



Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Решение краевой задачи для уравнения Пуассона с потенциалом

Выполнил:
Студент 608 группы
Трибрат Вадим Дмитриевич
вариант 2

Москва
2022

1 Введение

Требуется методом конечных разностей приближенно решить краевую задачу для уравнения Пуассона с потенциалом в прямоугольной области. Задание необходимо выполнить на ПВС Московского университета IBM Polus.

2 Математическая постановка задачи

В прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) : A_1 \leq x \leq A_2, B_1 \leq y \leq B_2\}$, граница Γ которого состоит из отрезков

$$\begin{aligned}\gamma_R &= \{(A_2, y), B_1 \leq y \leq B_2\}, & \gamma_L &= \{(A_1, y), B_1 \leq y \leq B_2\}, \\ \gamma_T &= \{(x, B_2), A_1 \leq x \leq A_2\}, & \gamma_B &= \{(x, B_1), A_1 \leq x \leq A_2\},\end{aligned}$$

рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона с потенциалом

$$-\Delta u + q(x, y)u = F(x, y), \quad (1)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условиями. На каждом отрезке границы прямоугольника Π задается условие одним из трех способов:

1. условия первого типа (условия Дирихле):

$$u(x, y) = \varphi(x, y); \quad (2)$$

2. условия второго типа (условия Неймана):

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial n} \right)(x, y) = \psi(x, y), \quad (3)$$

3. условия третьего типа:

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial n} \right)(x, y) + \alpha u(x, y) = \psi(x, y), \quad (4)$$

где n – единичная внешняя нормаль к границе прямоугольника. Заметим, что краевое условие второго типа (условие Неймана) содержится в краевом условии третьего типа (случай $\alpha = 0$).

Функции $F(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, коэффициент $k(x, y)$, потенциал $q(x, y)$ и параметр $\alpha \geq 0$ считаются известными, функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) и граничным условиям, определенным вариантом задания, требуется найти.

Замечание. Нормаль n не определена в угловых точках прямоугольника. Краевое условие второго и третьего типа следует рассматривать лишь в тех точках границы, где нормаль существует.

3 Разностная схема решения задачи

Краевые задачи для уравнения Пуассона с потенциалом (1) предлагается численно решать методом конечных разностей. В расчетной области Π определяется равномерная прямоугольная сетка $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, где

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = \overline{0, M}\}, \quad \bar{\omega}_2 = \{y_j = B_1 + jh_2, j = \overline{0, N}\}.$$

Здесь $h_1 = (A_2 - A_1)/M$, $h_2 = (B_2 - B_1)/N$. Через ω_h обозначим множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_h$, т.е. множество узлов сетки прямоугольника, не лежащих на границе Γ .

Рассмотрим линейное пространство H функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$. Обозначим через w_{ij} значение сеточной функции $w \in H$ в узле сетки $(x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h$. Будем считать, что в пространстве H задано скалярное произведение и евклидова норма

$$[u, v] = \sum_{i=0}^M h_1 \sum_{j=0}^N h_2 \rho_{ij} u_{ij} v_{ij}, \quad \|u\|_E = \sqrt{[u, u]}. \quad (5)$$

Весовая функция $\rho_{ij} = \rho^{(1)}(x_i) \rho^{(2)}(y_j)$, где

$$\rho^{(1)}(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq M-1 \\ 1/2, & i = 0, i = M \end{cases} \quad \rho^{(2)}(y_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq N-1 \\ 1/2, & j = 0, j = N \end{cases}$$

В методе конечных разностей дифференциальная задача математической физики заменяется конечно-разностной операторной задачей вида

$$Aw = B, \quad (6)$$

где $A : H \rightarrow H$ – оператор, действующий в пространстве сеточных функций, $B \in H$ – известная правая часть. Задача (6) называется разностной схемой. Решение этой задачи считается численным решением исходной дифференциальной задачи.

При построении разностной схемы следует аппроксимировать (приблизительно заменить) все уравнения краевой задачи их разностными аналогами – сеточными уравнениями, связывающими значения искомой сеточной функции в узлах сетки. Полученные таким образом уравнения должны быть функционально независимыми, а их общее количество – совпадать с числом неизвестных, т.е. с количеством узлов сетки.

Уравнение (1) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением

$$-\Delta_h w_{ij} + q_{ij} w_{ij} = F_{ij}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (7)$$

в котором $F_{ij} = F(x_i, y_j)$, $q_{ij} = q(x_i, y_j)$, разностный оператор Лапласа

$$\Delta_h w_{ij} = \frac{1}{h_1} \left(k(x_i + 0.5h_1, y_j) \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1} - k(x_i - 0.5h_1, y_j) \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1} \right) + \\ + \frac{1}{h_2} \left(k(x_i, y_j + 0.5h_2) \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2} - k(x_i, y_j - 0.5h_2) \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2} \right).$$

Введем обозначения правой и левой разностных производных по переменным x, y соответственно:

$$w_{x,ij} = \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1}, \quad w_{\bar{x},ij} = w_{x,i-1j} = \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1}, \\ w_{y,ij} = \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2}, \quad w_{\bar{y},ij} = w_{y,ij-1} = \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2},$$

а также определим сеточные коэффициенты

$$a_{ij} = k(x_i - 0.5h_1, y_j), \quad b_{ij} = k(x_i, y_j - 0.5h_2).$$

– в вершине $P(A_1, B_2)$ прямоугольника. Здесь

$$\psi_{00} = \frac{h_1 \psi(A_1 + 0, B_1) + h_2 \psi(A_1, B_1 + 0)}{h_1 + h_2}, \quad \psi_{M0} = \frac{h_1 \psi(A_2 - 0, B_1) + h_2 \psi(A_2, B_1 + 0)}{h_1 + h_2}, \\ \psi_{MN} = \frac{h_1 \psi(A_2 - 0, B_2) + h_2 \psi(A_2, B_2 - 0)}{h_1 + h_2}, \quad \psi_{0N} = \frac{h_1 \psi(A_1 + 0, B_2) + h_2 \psi(A_1, B_2 - 0)}{h_1 + h_2},$$

где

$$\psi(x_0 \pm 0, y) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} \psi(x, y), \quad \psi(x, y_0 \pm 0) = \lim_{y \rightarrow y_0 \pm 0} \psi(x, y).$$

4 Метод решения системы линейных алгебраических уравнений

Приближенное решение системы уравнений (6) для сформулированных выше краевых задач может быть получено итерационным методом наименьших невязок. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций $w^{(k)} \in H$, $k = 1, 2, \dots$, сходящуюся по норме пространства H к решению разностной схемы, т.е.

$$\|w - w^{(k)}\|_E \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Начальное приближение $w^{(0)}$ можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки.

Метод является одношаговым. Итерация $w^{(k+1)}$ вычисляется по итерации $w^{(k)}$ согласно равенствам:

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}, \quad (15)$$

где невязка $r^{(k)} = Aw^{(k)} - B$, итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{[Ar^{(k)}, r^{(k)}]}{\|Ar^{(k)}\|_E^2}.$$

В качестве условия остановки итерационного процесса следует использовать неравенство

$$\|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|_E < \varepsilon,$$

где ε – положительное число, определяющее точность итерационного метода. Оценку точности приближенного решения сеточных уравнений (6) можно проводить в других нормах пространства сеточных функций, например, в максимум норме

5 Постановка задачи

Необходимо восстановить гладкую известную функцию $u(x, y)$ по ее образу и граничным значениям. В рамках 2 варианта предлагаются следующие функции:

- $u(x, y) = \sqrt{4 + xy}$ $\Pi = [0, 4] * [0, 3]$
- $k(x, y) = 4 + x + y$
- $q(x, y) = x + y$
- $F(x, y) = (4 + x + y) * (x^2 + y^2) / (4 * \sqrt{(4 + xy)^3}) - (x + y) / (2 * \sqrt{4 + x * y}) + (x + y) * \sqrt{4 + x * y}$

6 Описание программы

При выполнении задания расчётная область разбивалась на двумерные подобласти в соответствии с требованиями. Также производился обмен информации о значениях на границах прямоугольных областей. Для этого использовались неблокирующие операции `Isend` и `Irecv`. Затем на каждой области производились необходимые вычисления и результаты собирались в процессе с рангом 0. Итерации повторялись до сходимости по условию $(|x_k - x_{k+1}| < 1e-6)$.

7 Исследование масштабируемости программы

Таблица 1. Результаты на ПВС IBM Polus (MPI)

Число процессов	Сетка	Время работы	Ускорение
4	500 × 500	223.274	1
8	500 × 500	118.256	1.888
16	500 × 500	64.901	3.440
32	500 × 500	35.363	6.313
4	500 × 1000	288.783	1
8	500 × 1000	150.173	1.923
16	500 × 1000	88.339	3.269
32	500 × 1000	49.644	5.817

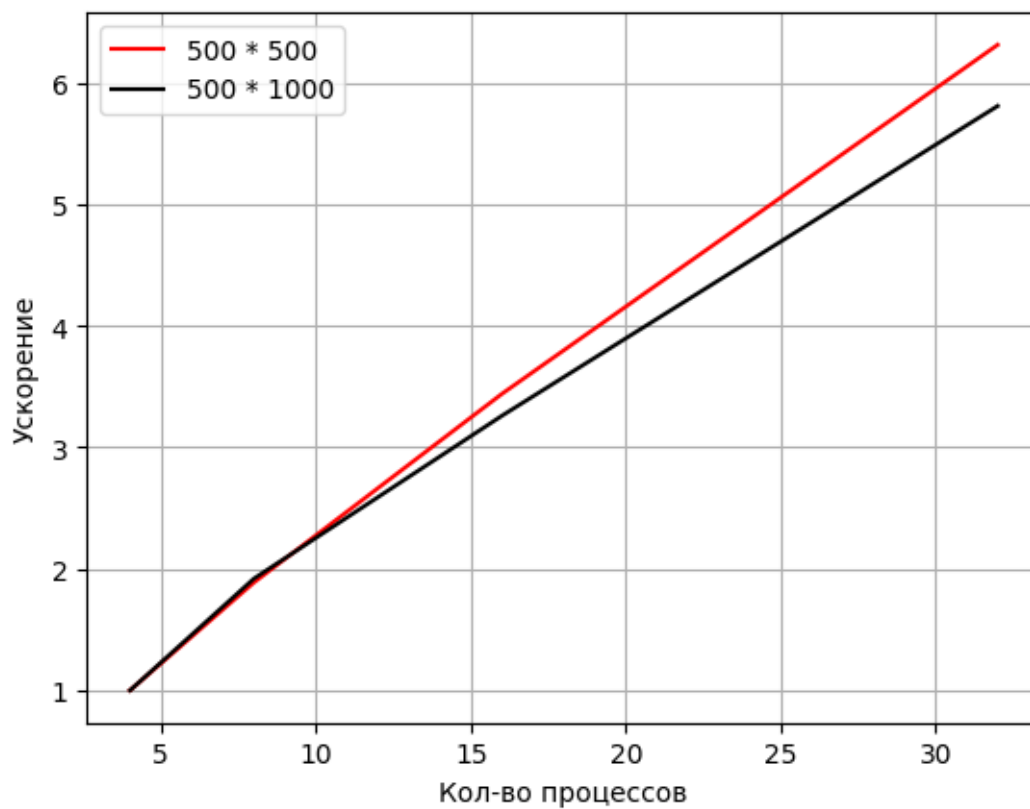


Рис. 1. График ускорения.

Таблица 2. Результаты ПВС IBM Polus (MPI + OpenMP).

Число процессов	Сетка	Время работы	Ускорение	Число процессов
1	4	500 × 500	313.285	1
2	4	500 × 500	171.569	1.836
4	4	500 × 500	91.018	3.442
8	4	500 × 500	50.448	6.21
1	4	500 × 1000	403.319	1
2	4	500 × 1000	227.221	1.775
4	4	500 × 1000	119.113	3.386

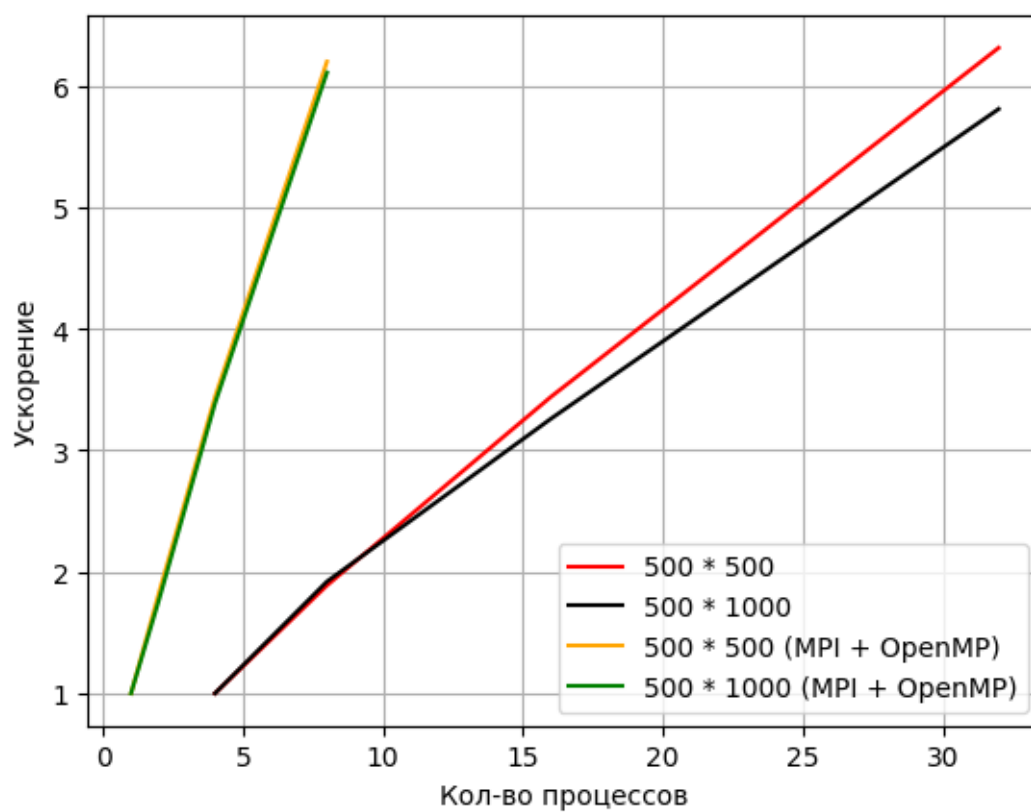


Рис. 2. Сравнение ускорений на MPI и MPI + OpenMP.

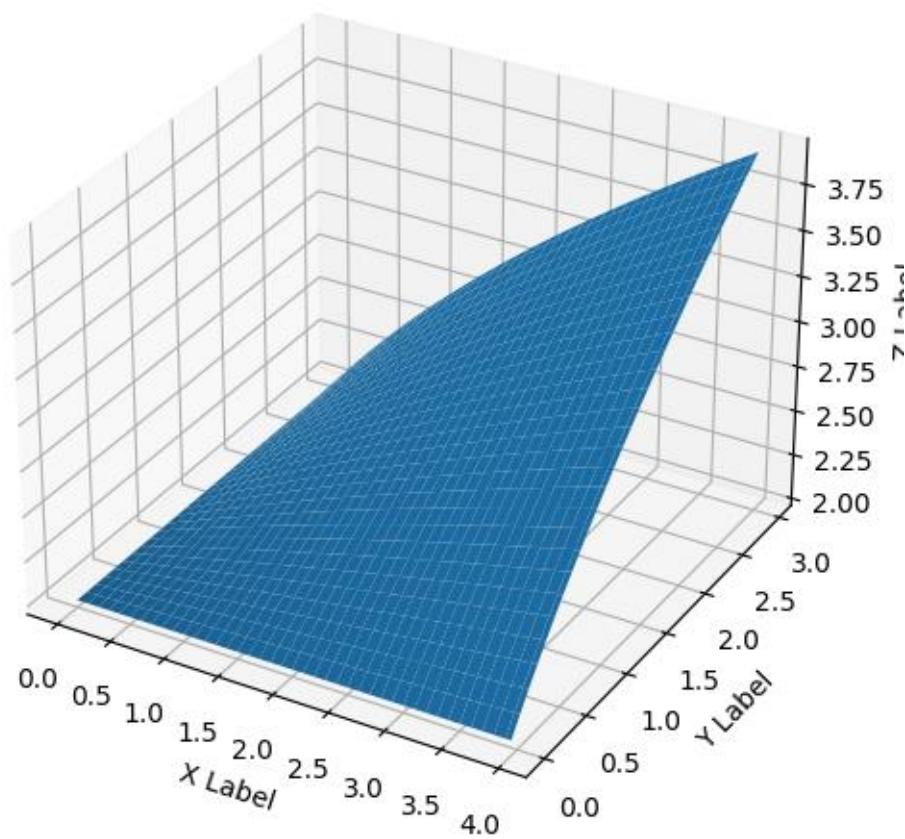


Рис. 3. Приближенное решение.

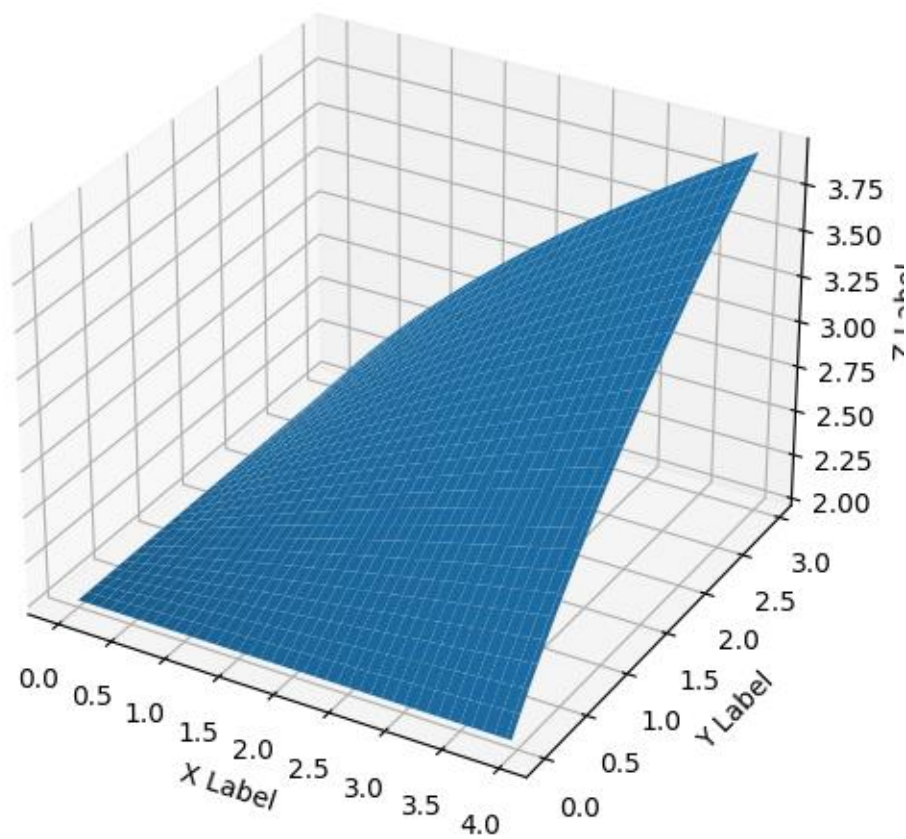


Рис. 4. Точное решение.