

Vadique Myself

# PHYSICS *of* ELASTIC CONTINUA



# CONTENTS

<i>Chapter 15</i>	<b>Fractures</b>	<b>1</b>
§ 1.	Traditional criteria of toughness .....	1
§ 2.	Antiplane deformation of continuum with a crack.....	2
§ 3.	Crack in plane deformation .....	2
§ 4.	Crack-driving force .....	2
§ 5.	Criterion of crack growth .....	3
§ 6.	J-integral.....	3
§ 7.	Stress intensity factors.....	3
§ 8.	Barenblatt's model .....	3
§ 9.	Deformational criterion .....	4
§ 10.	Growth of cracks .....	4
§ 11.	Elastic field ahead of a moving crack .....	4
§ 12.	Balance of energy for a moving crack.....	5
<b>List of publications</b>		<b>6</b>



## chapter 15

# FRACTURES

### §1. Traditional criteria of toughness

After determining the stresses in the body, how to estimate the toughness? When a sample of material is uniaxially extended during a test, there obviously is some limit — the “tensile strength”  $\sigma_*$ , above which the material is destroyed. So for uniaxial (ex)tension with stress  $\sigma$ , the toughness is thought to be sufficient if  $\sigma \leq \sigma_*/k$ , where  $k$  is the so-called safety factor (coefficient of safety). But this approach isn’t very convincing, because the values of  $\sigma_*$  obtained from uniaxial tension tests have a big scatter, and the choice of safety factor is sometimes tied to bureaucracy. However, such views on analysis of toughness are quite widespread. Without criticizing, I will mention the most popular of them.

**Maximum principal stress criterion** : a destruction occurs when the biggest eigenvalue (“principal”) stress  $\sigma_1$  reaches the limit,  $\sigma_1 = \sigma_*$ . But in the case of uniaxial compression with  $\sigma_1 = 0$  this hypothesis is false.

**Критерий максимального касательного напряжения (Tresca criterion)**: destruction happens if  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_*$  ( $\sigma_3$  — наименьшее из собственных напряжений). Это более соответствует началу пластического течения.

**Критерий максимального удлинения** : наибольшее из собственных значений тензора деформации  $\varepsilon_1 = \varepsilon_*$ . Это приемлемо и для сжатия с  $\varepsilon_1 > 0$ .

**Критерий энергии деформации** :  $\Pi = \Pi_*$ . Здесь учитывается, что разрушение требует энергии, а источником её может быть лишь само деформированное тело. Однако достаточный запас энергии — необходимое, но не единственное условие разрушения; должен

включиться некий механизм преобразования упругой энергии в работу разрушения.

**Критерий энергии формоизменения (von Mises yield criterion) :**  
 $s \bullet s = 2\tau_*^2$ ,  $s \equiv \tau - \frac{1}{3} E \text{ trace } \tau$  (“девиатор напряжений”). Здесь не играет роли энергия объёмной деформации. Richard von Mises предложил\* этот критерий как гладкую аппроксимацию условия Henri Tresca.

**Критерий Mohr’a.** Представим себе множество предельных состояний ...

...

## § 2. Antiplane deformation of continuum with a crack

Любая регулярная функция комплексного переменного  $z = x + iy$  содержит в себе решение какой-либо антиплоской задачи статики без ...

...

## § 3. Crack in plane deformation

Рассмотрим плоскую область произвольного очертания с трещиной внутри; нагрузка приложена и “в объёме”, и на внешнем крае. Как и при антиплоской деформации, решение строится в два этапа

...

## § 4. Crack-driving force

Это едва ли не основное понятие механики трещин. Рассмотрим его, следуя

\* **R. von Mises.** *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse.* 1913, Seiten 582–592.

...

## § 5. Criterion of crack growth

Связанная с энергией  $\mathcal{E}$  трещинодвижущая сила  $F$  — не единственное воздействие на передний край трещины. Должна быть ещё некая сила сопротивления  $F_*$ ; рост трещины начинается, когда

...

## § 6. J-integral

Одно из самых известных понятий в механике трещин выражается интегралом

$$J = \dots \quad (6.1)$$

...

## § 7. Stress intensity factors

Расчёт прочности тела с трещиной сводится к определению коэффициентов интенсивности напряжений. Методы расчёта таких коэффициентов — как аналитические, так и численные — хорошо освещены в литературе.

Рассмотрим ещё один подход к задачам механики трещин, разработанный

...

## § 8. Barenblatt's model

An unlimited increase of stress at the edge of a crack seems indeed dubious. Singular solutions desire support by some additional reasonings or by using of another model. And such support was given in the work

...

## § 9. Deformational criterion

D. S. Dugdale\*, а также М. Я. Леонов и В. В. Панасюк\*\* предложили модель, напоминающую построения Баренблатта. Также есть силы сцепления  $q$  и равен нулю итоговый коэффициент интенсивности напряжений. Но, во-первых,  $q$  имеет иной вид:

...

Второе отличие рассматриваемой модели — в формулировке критерия прочности: трещина начинает расти, когда расхождение берегов в конце свободного участка достигает критического значения  $\delta_*$  (этот параметр — константа материала), то есть при

...

## § 10. Growth of cracks

Пусть нагрузка на тело с трещиной выросла настолько, что выполняется условие

...

## § 11. Elastic field ahead of a moving crack

Considering this topic

...

\* **Dugdale, D. S.** Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1960, Volume 8, Issue 2, pages 100–104.

\*\* **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твёрдом теле. *Прикладная механика*. 1959, Т. 5, № 4, с. 391–401.



## § 12. Balance of energy for a moving crack

The balance of energy equation in the linear theory ( $\Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $K = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ ):

$$\int_{\mathcal{V}} (K + \Pi) \dot{\phantom{x}} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{O}. \quad (12.1)$$

...

## Bibliography

Список книг по механике трещин уже велик. В нём сто́ит отметить работы Л. М. Качанова [70], Н. Ф. Морозова [72], В. З. Партона и Е. М. Морозова [74], Г. П. Черепанова [76]. Обзор статей есть у ... Экспериментальные данные представлены, например, в [71].

## LIST OF PUBLICATIONS

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Издание 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Ахтырец Г. П., Короткин В. И.** Использование МКЭ при решении контактной задачи теории упругости с переменной зоной контакта // Известия северо-кавказского научного центра высшей школы (СКНЦ ВШ). Серия естественные науки. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1984. № 1. С. 38–42.
5. **Ахтырец Г. П., Короткин В. И.** К решению контактной задачи с помощью метода конечных элементов // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1988. С. 43–48.
6. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
7. **Вениамин И. Блох.** Теория упругости. Харьков: Издательство Харьковского Государственного Университета, 1964. 484 с.
8. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
9. **Алексей Л. Гольденвейзер.** Теория упругих тонких оболочек. 2-е издание. «Наука», 1976. 512 с. *Translation: Alexey L. Goldenveizer.* Theory of elastic thin shells. Pergamon Press, 1961. 658 pages.
10. **Алексей Л. Гольденвейзер, Виктор Б. Лидский, Пётр Е. Товстик.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 384 с.

11. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.
12. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.
13. **Александр Н. Гузь.** Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: “Наукова думка”, 1973. 271 с.
14. *Перевод: Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.
15. **Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.
16. **Dorin Ieşan.** Classical and generalized models of elastic rods. 2nd edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. 369 pages
17. **Владимир В. Елисеев.** Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.
18. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод: Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.
19. **Журавлёв В. Ф.** Основы теоретической механики. 3-е издание, переработанное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 304 с.
20. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.
21. **Кац, Арнольд М.** Теория упругости. 2-е издание, стереотипное. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2002. 208 с.
22. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B.V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод: Филипп Сьярле.* Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.
23. **Cosserat E. et Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
24. **Cottrell, Alan.** Theory of crystal dislocations. Gordon and Breach (Documents on Modern Physics), 1964. 94 p. *Перевод: Коттрел А.* Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.

25. **Kröner, Ekkehart** (i) Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. (ii) Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод: Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.
26. **Augustus Edward Hough Love**. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Volume I. Cambridge, 1892. 354 p. Volume II. Cambridge, 1893. 327 p. 4th edition. Cambridge, 1927. Dover, 1944. 643 p. *Перевод: Аугустус Ляв.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
27. **Анатолий И. Лурье**. Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с. *Translation: Lurie, A. I.* Nonlinear Theory of Elasticity: translated from the Russian by K. A. Lurie. Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 617 p.
28. **Анатолий И. Лурье**. Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с. *Translation: Lurie, A. I.* Theory of Elasticity (translated by A. Belyaev). Springer-Verlag, 2005. 1050 p.
29. **Анатолий И. Лурье**. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
30. **Анатолий И. Лурье**. Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
31. **George E. Mase**. Schaum's outline of theory and problems of continuum mechanics (Schaum's outline series). McGraw-Hill, 1970. 221 p. *Перевод: Джордж Мейз.* Теория и задачи механики сплошных сред. Издание 3-е. URSS, 2010. 320 с.
32. **Ernst Melan, Heinz Parkus**. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод: Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.
33. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.
34. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е издание. «Наука», 1987. 304 с.

35. **Mindlin, Raymond David and Tiersten, Harry F.** Effects of couplestresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод: Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.
36. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.
37. **Witold Nowacki.** Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation: Nowacki, Witold.* Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод: Витольд Новацкий.* Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.
38. **Witold Nowacki.** Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод: Новацкий Витольд.* Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.
39. **Witold Nowacki.** Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод: Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.
40. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е издание. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
41. **Пановко Я. Г., Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.
42. **Пановко Я. Г., Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е издание. «Наука», 1987. 352 с.
43. **Heinz Parkus.** Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод: Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
44. **Партон Владимир З., Кудрявцев Борис А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.

45. **Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
46. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.
47. **Юрий Н. Работнов.** Механика деформируемого твёрдого тела. 2-е издание. «Наука», 1988. Издание 3-е. URSS, 2019. 712 с.
48. **Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant.** De la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. Extrait du tome xiv des mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences. Imprimerie Impériale, Paris, M DCCC LV (1855). 332 pages. *Перевод на русский язык: Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.
49. **Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant.** Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes. Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. 2me serie, tome 1, année 1856. Pages 89 à 189. *Перевод на русский язык: Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.
50. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод: Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.
51. **Cristian Teodosiu.** Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод: Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.
52. **Тимошенко Степан П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.
53. **Тимошенко Степан П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.
54. **Stephen P. Timoshenko and James N. Goodier.** Theory of Elasticity. 2nd edition. McGraw-Hill, 1951. 506 pages. 3rd edition. McGraw-Hill, 1970. 567 pages. *Перевод: Тимошенко Степан П., Джеймс Гудьер.* Теория упругости. 2-е издание. «Наука», 1979. 560 с.

55. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод: Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.
56. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е издание. «Наука», 1975. 173 с.
57. *Перевод: Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.
58. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.
59. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

*Oscillations and waves*

60. **Timoshenko, Stephen P.; Young, Donovan H.; William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод: Тимошенко Степан П., Янг Донован Х., Уильям Уивер.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
61. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е издание. «Дрофа», 2004. 592 с.
62. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
63. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.
64. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
65. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод: Узизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.
66. **Kolsky, Herbert.** Stress waves in solids. Oxford, Clarendon Press, 1953. 211 p. 2nd edition. Dover Publications, 2012. 224 p. *Перевод: Кольский Г.* Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.
67. **Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.
68. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.

69. **Григолюк Э. И., Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.

*Fracture mechanics*

70. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.
71. **Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
72. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.
73. **Партон Владимир З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.
74. **Партон Владимир З., Морозов Евгений М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е издание. «Наука», 1985. 504 с.
75. *Перевод: Хеллан К.* Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.
76. **Геннадий П. Черепанов.** Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.

*Composites*

77. **Christensen, Richard M.** Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод: Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.
78. **Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.
79. **Борис Е. Победря.** Механика композиционных материалов. Издательство Московского университета, 1984. 336 с.
80. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.
81. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.
82. **Геннадий П. Черепанов.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.



83. **Тимофей Д. Шермергор.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.

*The finite element method*

84. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.
85. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.

*Mechanics, thermodynamics, electromagnetism*

86. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew.** The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online: The Feynman Lectures on Physics. Online edition.*
87. **Goldstein, Herbert; Poole, Charles P.; Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison–Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод: Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж.* Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
88. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод: Парс Л. А.* Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.
89. **Ter Haar, Dirk.** Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод: Тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.
90. **Беляев Н. М., Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.
91. **Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.
92. **Феликс Р. Гантмахер** Лекции по аналитической механике. Издание 2-е. «Наука», 1966. 300 с.
93. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.
94. **Лев Г. Лойцянский, Анатолий И. Лурье.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е издание. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е издание. 719 с.
95. **Анатолий И. Лурье.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

96. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е издание. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.
97. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е издание. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

### *Tensors and tensor calculus*

98. **McConnell, Albert Joseph.** Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод: Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
99. **Димитриенко Ю. И.** Тензорное исчисление: Учебное пособие для вузов. М.: "Высшая школа", 2001. 575 с.
100. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Издание 3-е. «Наука», 1967. 664 с.
101. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод: Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.
102. **Sokolnikoff, I. S.** Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua. 2nd edition. John Wiley & Sons, 1965. 361 pages. *Перевод: Сокольников И. С.* Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). «Наука», 1971. 376 с.

### *Variational methods*

103. **Karel Rektorys.** Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation: Rektorys, Karel.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D. Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод: Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
104. **Washizu, Kyuichiro.** Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод: Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
105. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.

106. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Издание 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

*Perturbation methods (asymptotic methods)*

107. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод: Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.
108. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.
109. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-VCH, 2004. 425 pages.
110. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.
111. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
112. **Зино И. Е., Трош Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
113. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е издание. «Наука», 1981. 400 с.
114. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.

*Other topics of mathematics*

115. **Collatz, Lothar.** Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод: Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.
116. **Dwight, Herbert Bristol.** Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод: Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. Издание 4-е. «Наука», 1973. 228 с.
117. **Kamke, Erich.** Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод: Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. «Лань», 2003. 576 с.

118. **Korn, Granino A.** and **Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод: Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.
119. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е издание. «Наука», 1973. 736 с.
120. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Издание 6-е. «Наука», 1974. 176 с.