

*Vadique Myself*

# PHYSICS *of* ELASTIC CONTINUA

© MMXIX *Vadique*

УДК 539.3 *Механика деформируемых тел. Упругость. Деформации*

УДК 539 *Строение материи*

УДК 53 *Физика*

УДК 5 *Математика. Естественные науки*

UDC 539.3 *Elasticity. Deformation. Mechanics of elastic solids*

UDC 539 *Physical nature of matter*

UDC 53 *Physics*

UDC 5 *Mathematics. Natural sciences*

Представлены все модели упругих сред: нелинейные и линейные, микрополярные и классические безмоментные; трёхмерные, двумерные (оболочки и пластины), одномерные (стержни, в том числе тонкостенные). Для термоупругости и магнитоупругости дана сводка законов термодинамики и электродинамики. Изложены основы динамики — колебания, волны и устойчивость. Описаны теории дефектов, трещин, композитов и периодических структур.

All models of elastic continua are presented: nonlinear and linear, micropolar and classical momentless; three-dimensional, two-dimensional (shells and plates), one-dimensional (rods, including thin-walled ones). For thermoelasticity and magnetoelasticity, summary of laws of thermodynamics and electrodynamics is given. Fundamentals of dynamics — oscillations, waves and stability — are explained. Theories of defects, fractures, composites and periodic structures are described.

## CONTENTS

<i>Chapter 1. Elements of tensor calculus</i>	<b>10</b>
§ 1. Vectors	10
§ 2. Definition of tensor	12
§ 3. Operations on tensors	13
§ 4. Polyadic representation	16
§ 5. Cross product and Levi-Civita tensor	18
§ 6. Symmetric and antisymmetric tensors	21
§ 7. Eigenvectors and eigenvalues of tensor	23
§ 8. Rotation tensor	25
§ 9. Variations	31
§ 10. Polar decomposition	32
§ 11. Tensors in oblique basis	34
§ 12. Tensor functions	40
§ 13. Tensor fields. Differentiation	41
§ 14. Integral theorems	45
§ 15. Curvature tensors	48
<i>Chapter 2. Fundamentals of generic mechanics</i>	<b>51</b>
§ 1. Discrete system of particles	51
§ 2. Absolutely rigid undeformable solid body	52
§ 3. Principle of virtual work	54
§ 4. Balance of momentum, rotational momentum, and energy	56
§ 5. Hamilton's principle and Lagrange's equations	57
§ 6. Statics	58
§ 7. Mechanics of relative motion	61
§ 8. Small oscillations (vibrations)	61

<i>Chapter 3. Nonlinear elastic momentless continuum</i>	<b>62</b>
§ 1. Model of continuum. Descriptions of processes	62
§ 2. Differentiation	63
§ 3. Motion gradient	64
§ 4. Tensors and measures of deformation	64
§ 5. Velocity field	68
§ 6. Area vector. Surface change	69
§ 7. Forces in continuum. Cauchy stress tensor	69
§ 8. Balance of momentum and rotational momentum	70
§ 9. Eigenvalues of Cauchy stress tensor	71
§ 10. Principle of virtual work	72
§ 11. Constitutive relations of elasticity	74
§ 12. Piola–Kirchhoff stress tensors and other measures of stress	75
§ 13. Variation of present configuration	80
§ 14. Internal constraints	80
§ 15. Hollow sphere under pressure	81
§ 16. Stresses as Lagrange multipliers	82
<i>Chapter 4. Classical linear elasticity</i>	<b>84</b>
§ 1. Complete set of equations	84
§ 2. Uniqueness of the solution of a dynamic problem	86
§ 3. Hooke’s law	88
§ 4. Theorems of statics	90
§ 5. Equations for displacements	91
§ 6. Concentrated force in a limitless medium	91
§ 7. Determining displacements from deformations	91
§ 8. Equations for stresses	92
§ 9. Principle of minimum potential energy	92
§ 10. Principle of minimum complementary energy	93
§ 11. Mixed principles of stationarity	93
§ 12. Antiplane shear	95
§ 13. Twisting of rods	95
§ 14. Plane deformation	95

<i>Chapter 5. Micropolar three-dimensional continuum</i>	<b>96</b>
§ 1. Introduction to linear micropolar theory	96
§ 2. Relations of elasticity	100
§ 3. Compatibility equations	100
§ 4. Theorems of statics	100
§ 5. Cosserat pseudo-continuum	101
§ 6. Plane deformation	101
§ 7. Nonlinear theory	101
§ 8. Nonlinear model with constrained rotation	102
<i>Chapter 6. Thermoelasticity</i>	<b>103</b>
§ 1. First law of thermodynamics	103
§ 2. Second law	103
§ 3. Constitutive equations	104
§ 4. Heat equation	104
§ 5. Linear thermoelasticity	104
§ 6. Уравнения в перемещениях	104
§ 7. Температурные напряжения	105
§ 8. Вариационные постановки	105
<i>Chapter 7. Magnetoelasticity</i>	<b>106</b>
§ 1. Electromagnetic field	106
§ 2. Электростатика	106
§ 3. Диэлектрики	106
§ 4. Магнитостатика	107
§ 5. Магнетики	107
§ 6. Магнитная жёсткость	107
<i>Chapter 8. Asymptotic methods</i>	<b>110</b>
§ 1. Asymptotic decompositions	110
§ 2. Splitting in a linear algebraic system	110
§ 3. Poincaré method	111
§ 4. Van der Pol averaging method	111
§ 5. Метод сращения асимптотических разложений	111

§ 6. Метод многих масштабов .....	112
§ 7. Уравнения с медленно меняющимися коэффициентами ...	112
§ 8. Thin bodies .....	112

## *Chapter 9. Rods* **114**

§ 1. Исходные представления .....	114
§ 2. Кинематика линий Коссера .....	114
§ 3. Силовые факторы и их баланс .....	115
§ 4. Принцип виртуальной работы и его следствия .....	115
§ 5. Классическая модель Кирхгофа .....	115
§ 6. Задача Эйлера .....	116
§ 7. Уравнения в вариациях .....	116
§ 8. Модель с растяжением без сдвига .....	116
§ 9. Механика нити .....	116
§ 10. Линейная теория .....	116
§ 11. Случай малой толщины .....	117
§ 12. Задача Сен-Венана .....	117
§ 13. Определение жёсткостей по энергии .....	117
§ 14. Вариационный метод построения одномерных моделей ....	117
§ 15. Асимптотическое ращепление трёхмерной задачи .....	118
§ 16. Температурные деформации и напряжения .....	118

## *Chapter 10. Thin-walled rods* **119**

§ 1. Вариационный подход .....	119
§ 2. Уравнения с малым параметром .....	119
§ 3. Первый шаг асимптотической процедуры .....	119
§ 4. Второй шаг .....	120
§ 5. Третий шаг .....	120
§ 6. Четвёртый шаг .....	121
§ 7. Перемещения .....	121
§ 8. Итоги асимптотического анализа .....	121

## *Chapter 11. Shells and plates* **123**

§ 1. Оболочки: Геометрия поверхностей .....	123
---	-----

§ 2. Оболочки: Модель оболочки .....	123
§ 3. Оболочки: Баланс сил и моментов .....	123
§ 4. Shells: Relations of elasticity .....	123
§ 5. Оболочки: Классическая теория .....	123
§ 6. Оболочки: Пластина .....	124
§ 7. Оболочки: Подход с множителями Лагранжа .....	124
§ 8. Оболочки: Цилиндрическая оболочка .....	124
§ 9. Оболочки: Общие теоремы .....	125
§ 10. Оболочки: Краевые условия .....	125
§ 11. Оболочки: Оболочки вращения .....	125
§ 12. Оболочки: Безмоментная теория .....	125
§ 13. Оболочки: Нелинейная безмоментная теория .....	126
§ 14. Оболочки: Иной вариант классической теории .....	126
§ 15. Пластины: Общие представления .....	126
§ 16. Пластины: Модель типа Тимошенко (прямой подход) .....	126
§ 17. Пластины: Классическая теория Кирхгофа .....	126
§ 18. Пластины: Асимптотическое соотношение двумерных моделей .....	127
§ 19. Пластины: Вариационный переход от трёхмерной модели .....	127
§ 20. Plates: Splitting of three-dimensional bending problem .....	127
§ 21. Plates: Circular plates .....	128
§ 22. Пластины: Плоское напряжённое состояние .....	128
<b>Chapter 12. Oscillations and waves</b> .....	<b>129</b>
§ 1. Колебания трёхмерных тел .....	129
§ 2. Колебания стержней .....	129
§ 3. Малые возмущения параметров .....	129
§ 4. Колебания оболочек .....	129
§ 5. Волны в упругой среде .....	130
§ 6. Волны в стержнях .....	130
§ 7. Нелинейные колебания .....	130

<i>Chapter 13. Stability</i>	<b>131</b>
§ 1. Различные подходы к проблеме устойчивости	131
§ 2. Классические задачи о стержнях	131
§ 3. Следящие нагрузки	131
§ 4. Роль дополнительных податливостей	131
§ 5. Вариационные постановки	131
§ 6. Неконсервативные задачи	131
§ 7. Случай кратных корней	132
<i>Chapter 14. Defects</i>	<b>133</b>
§ 1. Volterra dislocations	133
§ 2. Straight-line dislocations	133
§ 3. Action of stress field on dislocation	133
§ 4. About movement of dislocations	134
§ 5. Point defects	134
§ 6. Force acting on point defect	134
§ 7. Continuously distributed dislocations	134
§ 8. Stress during winding of coil	134
<i>Chapter 15. Fractures</i>	<b>136</b>
§ 1. Традиционные критерии прочности	136
§ 2. Антиплоская деформация среды с трещиной	136
§ 3. Трещина при плоской деформации	136
§ 4. Трещиноподвижная сила	137
§ 5. Критерий роста трещины	137
§ 6. Интеграл Райса	137
§ 7. Определение коэффициентов интенсивности	137
§ 8. Модель Баренблатта	137
§ 9. Деформационный критерий	138
§ 10. Рост трещин	138
§ 11. Упругое поле впереди движущейся трещины	138
§ 12. Баланс энергии для движущейся трещины	138



<i>Chapter 16. Composites</i>	<b>139</b>
§ 1. Вводные соображения .....	139
§ 2. Эффективные поля .....	139
§ 3. Краевые задачи для представительного объёма .....	139
§ 4. Вилка Хилла .....	140
§ 5. Формулы Эшелби .....	140
§ 6. Модули среды со сферическими включениями .....	140
§ 7. Метод самосогласования .....	140
§ 8. Принцип Хашина–Штрикмана .....	141
<i>Chapter 17. Periodic structures</i>	<b>142</b>
§ 1. Одномерная задача .....	142
§ 2. Трёхмерная среда .....	142
§ 3. Волокнистая структура .....	142
§ 4. Статика периодического стержня .....	142
<b>List of books</b>	<b>143</b>

# ELEMENTS OF TENSOR CALCULUS

## § 1. Vectors

Mention of tensors may scare away the reader, commonly avoiding needless complications. But tensors are introduced just because of their wonderful property of being invariant — independent of coordinate systems. I propose to begin familiarizing with tensors from reminiscences of vectors.

Meet  $\mathbf{v}$  — a vector; it is fully characterized by its length (modulus, magnitude) and direction in space, but does not depend on units and methods of measurement neither lengths nor directions.

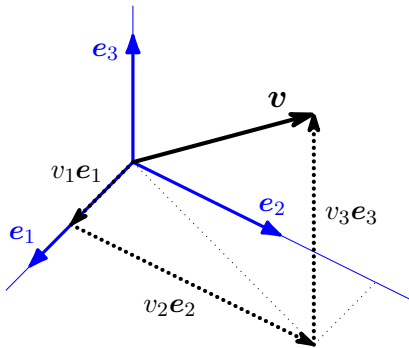


figure 1

Introduce some cartesian coordinate system with mutually perpendicular unit vectors of basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . In such a system, dot products of basis vectors are equal to the Kronecker delta:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Decomposing vector  $\mathbf{v}$  by basis  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), we have components of vector (fig. 1)

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i \equiv v_i \mathbf{e}_i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = |\mathbf{v}| \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i). \quad (1.1)$$

Here and hereinafter, Einstein's summation convention is accepted: having an index repeated twice in a single term implies summation over this index. More than two times in the same term index can't be repeated. And a non-repeating index is called free, it's identical in both parts of equation. There are examples:

$$\sigma = \tau_{ii}, \quad p_j = n_i \tau_{ij}, \quad m_i = e_{ijk} x_j f_k, \quad a_i = \lambda b_i + \mu c_i.$$

But following equations are incorrect

$$a = b_{kkk}, \quad c = f_i + g_k, \quad a_{ij} = k_i \gamma_{ij}.$$

Vector  $\mathbf{v}$  is invariant, it doesn't depend on any coordinate system. Its decomposition in two cartesian systems with basis unit vectors  $\mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{e}'_i$  gives

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_i \mathbf{e}_i = v'_i \mathbf{e}'_i, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k &= \underbrace{v_k}_{v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = v_i \delta_{ik}} = v'_i \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_k = v'_k = v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k. \end{aligned}$$

Connection between basis vectors of an “old” and a “new” — “rotated” — orthonormal systems is represented by a rotation matrix (a matrix of “direction” cosines)  $o_{i'k}$ :

$$\mathbf{e}'_i = o_{i'k} \mathbf{e}_k, \quad (\mathbf{e}_k) \Rightarrow o_{i'k} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k = \cos \angle(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k). \quad (1.2)$$

Matrix of cosines is orthogonal, meaning that it inverses when transposing:

$$o_{i'k} o_{j'k} = o_{k'i} o_{k'j} = \delta_{ij} \quad (1.3)$$

(proof:  $\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = o_{i'k} \mathbf{e}_k \cdot o_{j'n} \mathbf{e}_n = o_{i'k} o_{j'n} \delta_{kn} = o_{i'k} o_{j'k}$ ).

Orthogonal transformation of vector components

$$v'_i = v_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i = o_{i'k} v_k \quad (1.4)$$

can be used to define a vector itself. Suppose that in each orthonormal basis  $\mathbf{e}_i$  a triplet of numbers  $v_i$  is given, and on transition to a new orthonormal basis it is transformed according to (1.4); then this triplet of components represents an invariant object — vector  $\mathbf{v}$ .

Multiplying an orthogonal matrix by components of any vector retains length (modulus) of this vector:

$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v'_i v'_i = o_{i'k} v_k o_{i'n} v_n = v_n v_n$  — this conclusion leans on (1.3).

## § 2. Definition of tensor

Пусть в каждом ортонормальном базисе  $\mathbf{e}_i$  задана совокупность девяти ( $3^2 = 9$ ) чисел  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), преобразующаяся при переходе к новому (“повёрнутому”) ортонормальному базису по закону

$$B'_{ij} = o_{i'k} o_{j'n} B_{kn}, \quad (2.1)$$

тогда эта совокупность компонент определяет инвариантный объект — тензор второй сложности (второго ранга, второй валентности)  ${}^2\mathbf{B}$ .

Иными словами, тензор  ${}^2\mathbf{B}$  проявляется в каждом базисе матрицей своих компонент  $B_{ij}$ , меняющейся вместе с базисом согласно (2.1). Распространённые в литературе попытки заменить тензоры матрицами ведут к ошибкам, если не следить за базисами, которым эти матрицы соответствуют.

Ключевой пример тензора второй сложности — диада. Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — векторы. В каждом базисе положим  $D_{ij} \equiv a_i b_j$ . Легко убедиться, что преобразование (2.1) для  $D_{ij}$  соблюдается. Получившийся тензор  ${}^2\mathbf{D}$  называется диадным произведением (dyadic product) или просто диадой (dyad); его пишут как  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  или  $\mathbf{ab}$ . Предпочтём второе.

Ещё один существенный пример двухвалентного тензора — единичный тензор (он же “метрический”). Для любого декартова (cartesian) базиса положим  $E_{ij} \equiv \delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ . Это действительно компоненты тензора, (2.1) действует. Назовём этот тензор  $\mathbf{E}$ .

Неизменность компонент при повороте базиса делает тензор  $\mathbf{E}$  изотропным. Ненулевых векторов с таким свойством нет (все компоненты нуль-вектора  $\mathbf{0}$  равны нулю в любом базисе).

Третий пример связан с линейным преобразованием векторов:  $\mathbf{b}$  есть линейная функция от  $\mathbf{a}$ . В каждом базисе имеем  $b_i = c_{ij} a_j$ . Коэффициенты преобразования меняются при перемене базиса:

$$b'_i = c'_{ij} a'_j = o_{i'k} b_k = o_{i'k} c_{kn} a_n, \quad a_n = o_{j'n} a'_j \Rightarrow c'_{ij} = o_{i'k} o_{j'n} c_{kn}.$$

Видим, что множество матриц  $c_{ij}$ ,  $c'_{ij}$ , ..., определяющих одно и то же линейное преобразование  $\mathbf{a}$  в  $\mathbf{b}$ , но в разных базисах, сводится к одному инвариантному объекту — тензору второй

сложности  $^2\mathbf{c}$ . Многие авторы так и определяют тензор через линейное преобразование.

Четвёртый пример — коэффициенты инвариантной квадратичной формы  $F(\mathbf{a}) = f_{ij}a_ia_j$ , где  $a_i$  и  $a_j$  — компоненты векторного аргумента  $\mathbf{a}$ , и результат  $F$  не зависит от базиса. Из равенств  $F' = f'_{ij}a'_ia'_j = F$  следует (2.1) для коэффициентов  $f_{ij}$ .

Обратимся теперь к тензорам больших сложностей. Тензор третьей сложности  $^3\mathbf{C}$  определяется через совокупность  $3^3 = 27$  чисел  $C_{ijk}$ , преобразующихся по закону

$$C'_{ijk} = o_{i'p}o_{j'q}o_{k'r}C_{pqr}. \quad (2.2)$$

Простейший пример — триада из векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$C_{ijk} \equiv a_ib_jc_k \Leftrightarrow ^3\mathbf{C} = \mathbf{abc}.$$

Отметим, что законы преобразования (2.2) и (2.1) — результаты своеобразного “повторения” векторного (1.4). Читатель без труда напишет закон преобразования компонент тензора любой сложности и для примера приведёт соответствующую полиаду.

Векторы с преобразованием компонент (1.4) суть тензоры первой сложности.

В конце этого параграфа обратимся к самым простым объектам — скалярам, то есть тензорам нулевой сложности. Скаляр это одно ( $3^0 = 1$ ) число, не зависящее от базиса: масса, энергия, температура и др. Но что такое, например, компоненты (1.1) вектора  $\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i$  и  $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ ? Если не скаляры, то что? Односложно ответить невозможно. В каждом фиксированном базисе  $\mathbf{e}_i$ , конечно, векторы, а  $v_i$  — скаляры.

### § 3. Operations on tensors

There're four of them.

Первое — линейная комбинация — объединяет в себе сложение и умножение на число. Объекты действия и результат — одинаковой сложности. Комбинирование двух тензоров выглядит так:

$$\lambda a_{ij\dots} + \mu b_{ij\dots} = c_{ij\dots} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{c}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты-скаляры;  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — тензоры одной и той же сложности. Легко показать, что для компонент  $\mathbf{c}$  выполняется (2.1), то есть результат действия это тоже тензор.

“Разложение вектора по базису” — представление вектора суммой  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$  — это не что иное, как линейная комбинация векторов базиса  $\mathbf{e}_i$  с коэффициентами  $v_i$ .

Второе действие это умножение. Сложности сомножителей — любые, сложность произведения — суммарная. Примеры:

$$\begin{aligned} v_i a_{jk} &= C_{ijk} \Leftrightarrow \mathbf{v}^2 \mathbf{a} = {}^3\mathbf{C}, \\ a_{ij} B_{k\ell m} &= D_{ijk\ell m} \Leftrightarrow {}^2\mathbf{a} {}^3\mathbf{B} = {}^5\mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрев преобразование совокупностей  $C_{ijk}$  и  $D_{ijk\ell m}$  при повороте базиса, видим, что это действительно компоненты тензоров. Простейший пример умножения — диадное произведение векторов  ${}^2\mathbf{A} = \mathbf{b}\mathbf{c}$ .

Третье действие называется свёрткой (contraction). Это действие над одним тензором, других “участников” нет. Грубо говоря, свёртка состоит в суммировании компонент по какой-либо паре индексов. В результате свёртки сложность тензора уменьшается на два. Для тензора, например, третьей сложности  ${}^3\mathbf{D}$  возможны следующие варианты свёртки, приводящие к векторам  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$a_i = D_{kki}, \quad b_i = D_{kik}, \quad c_i = D_{ikk}. \quad (3.3)$$

При повороте базиса

$$a'_i = D'_{kki} = \underbrace{o_{k'p} o_{k'q} o_{i'r}}_{\delta_{pq}} D_{pqr} = o_{i'r} D_{ppr} = o_{i'r} a_r,$$

что доказывает тензорный характер результата свёртки.

Для тензора второй сложности возможен лишь один вариант свёртки, приводящий к скаляру, называемому первым инвариантом или следом тензора

$$B_{kk} = \mathbf{I}(\mathbf{B}) \equiv \text{tr } \mathbf{B}.$$

След единичного тензора (“свёртка дельты Кронекера”) есть размерность пространства:

$$\text{tr } \mathbf{E} = \delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

Четвёртое действие именуется по-разному: перестановка индексов, жонглирование индексами, index swap и др. Из компонент

тензора образуется новая совокупность величин с другой последовательностью индексов, результатом является тензор той же сложности. Из тензора  ${}^3D$ , например, можно получить тензоры  ${}^3A$ ,  ${}^3B$ ,  ${}^3C$  с компонентами

$$\begin{aligned} {}^3A &= {}^3D_{1\rightleftharpoons 2} \Leftrightarrow A_{ijk} = D_{jik}, \\ {}^3B &= {}^3D_{1\rightleftharpoons 3} \Leftrightarrow B_{ijk} = D_{kji}, \\ {}^3C &= {}^3D_{2\rightleftharpoons 3} \Leftrightarrow C_{ijk} = D_{ikj}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для тензора второй сложности возможна лишь одна перестановка, называемая транспонированием:  $B_{ij} = A_{ji} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^\top$ . Очевидно,  $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$ .

При диадном умножении векторов  $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}^\top$ .

Представленные четыре действия можно комбинировать в разных сочетаниях. Чаще всего встречается комбинация умножения и свёртки — dot product; при этом в инвариантной безындexсной записи ставится точка, указывающая на свёртку по соответствующим соседним индексам:

$$a_i = B_{ij}c_j \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}, \quad A_{ij} = B_{ik}C_{kj} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}. \quad (3.5)$$

Определяющее свойство единичного тензора

$${}^n\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{a} = {}^n\mathbf{a} \quad \forall {}^n\mathbf{a} \quad \forall n > 0. \quad (3.6)$$

В коммутативном скалярном произведении двух векторов точка имеет тот же смысл:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = b_i a_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \text{tr } \mathbf{ab} = \text{tr } \mathbf{ba}. \quad (3.7)$$

Для dot product'a тензоров второй сложности справедливо следующее

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q} &= (\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{B}^\top)^\top \\ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q})^\top &= \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{B}^\top \end{aligned} \quad (3.8)$$

(например, для диад  $\mathbf{B} = \mathbf{bd}$  и  $\mathbf{Q} = \mathbf{pq}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{bd} \cdot \mathbf{pq})^\top &= \mathbf{pq}^\top \cdot \mathbf{bd}^\top \\ d_i p_i \mathbf{bq}^\top &= \mathbf{qp} \cdot \mathbf{db} \\ d_i p_i \mathbf{qb} &= p_i d_i \mathbf{qb} ). \end{aligned}$$

Для вектора и тензора второй сложности

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}^\top. \quad (3.9)$$

“Квадрат” тензора второй сложности определяется как

$$B^2 \equiv B \cdot B. \quad (3.10)$$

Свёртка может повторяться:  $A \bullet \bullet B \equiv A_{ij}B_{ji}$ , и вот немного полезных равенств для тензоров второй сложности

$$\begin{aligned} A \bullet \bullet E &= E \bullet \bullet A = \text{tr } A = A_{jj}, \\ A \bullet \bullet B &= B \bullet \bullet A, \quad A \bullet \bullet B^\top = A^\top \bullet \bullet B, \\ A \bullet \bullet B \bullet C &= A \bullet B \bullet \bullet C = C \bullet \bullet A \bullet B = A_{ij}B_{jk}C_{ki}, \\ A \bullet \bullet B \bullet C \bullet D &= A \bullet B \bullet \bullet C \bullet D = A \bullet B \bullet C \bullet \bullet D = \\ &= D \bullet \bullet A \bullet B \bullet C = A_{ij}B_{jk}C_{kn}D_{ni}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

## § 4. Polyadic representation

Мы ввели тензоры как некие инвариантные объекты, проявляющиеся в каждом базисе в виде совокупности чисел. Такое изложение характерно для большинства руководств по тензорному исчислению. Индексная запись конструктивна, когда достаточно декартовых координат. Но для физики упругих тел этого мало, она требует более изящного, мощного и совершенного аппарата прямого тензорного исчисления, оперирующего лишь с инвариантными безындексными объектами.

Соотношение  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$  из (1.1) связывает вектор  $\mathbf{v}$  с базисом  $\mathbf{e}_i$  и компонентами  $v_i$  вектора в этом базисе. Вскоре мы установим аналогичное соотношение для тензора любой сложности.

Рассмотрим тензор  ${}^2\mathbf{B}$ . В каждом базисе имеем девять чисел  $B_{ij}$  и столько же диад  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ . Линейным комбинированием возможно образовать сумму  $B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ . Это тензор, но каковы его компоненты и сохранится ли подобное его представление при повороте базиса?

Компоненты построенной суммы

$$(B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)_{pq} = B_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = B_{pq}$$

это компоненты тензора  ${}^2\mathbf{B}$ . При повороте же базиса

$$B'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = o_{i'p} o_{j'q} B_{pq} o_{i'n} \mathbf{e}_n o_{j'm} \mathbf{e}_m = \delta_{pn} \delta_{qm} B_{pq} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m = B_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q.$$



Сомнения отпали — приходим к диадному представлению тензора второй сложности

$${}^2\mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (4.1)$$

Для единичного тензора

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Полиадные представления типа (4.1) позволяют проще и с бóльшим пониманием оперировать с тензорами:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot {}^2\mathbf{B} &= v_i \mathbf{e}_i \cdot B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = v_i B_{jk} \delta_{ij} \mathbf{e}_k = v_i B_{ik} \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{e}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_i \cdot B_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_j = B_{pq} \delta_{ip} \delta_{jq} = B_{ij} = {}^2\mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Последняя строчка весьма важна: выражение компонент тензора второй сложности представлено через сам тензор. Закон (2.1) ортогонального преобразования компонент при повороте базиса оказывается очевидным следствием (4.2).

Аналогичным образом можно разложить тензор любой сложности по соответствующим базисным полиадам. Например, для тензора третьей сложности

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{C} &= C_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k, \\ C_{ijk} &= {}^3\mathbf{C} \cdot \cdot \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot {}^3\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \cdot \cdot {}^3\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_k. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя разложение по полиадам, легко увидеть справедливость свойства (3.6) “единичности” тензора  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} {}^n\mathbf{a} &= a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q, \quad \mathbf{E} = \mathbf{e}_e \mathbf{e}_e \\ {}^n\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} &= a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \underbrace{\mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_e \mathbf{e}_e}_{\delta_{eq}} = a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = {}^n\mathbf{a}, \\ \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{a} &= \mathbf{e}_e \mathbf{e}_e \cdot a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = a_{ij\dots q} \delta_{ei} \mathbf{e}_e \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = {}^n\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Полиадное представление соединяет вместе прямую и индексную записи. Не сто́ит противопоставлять их. Прямая запись компактна, изящна, и лишь она должна быть в фундаментальных соотношениях. Но и индексная запись полезна: при громоздких выкладках с тензорами мы не встретим трудностей.

## § 5. Cross product and Levi-Civita tensor

Сохраним обычные представления о векторном произведении двух векторов. Оно направлено перпендикулярно плоскости сомножителей, а длина его равна площади образуемого сомножителями параллелограмма

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Cross product (векторное произведение)  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  считается псевдовектором, поскольку тройка векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  может быть либо “правой”, либо “левой” (рис. 2).

Различие векторов и псевдовекторов ограничивает вид формул: векторы с псевдовекторами не складываются. Формула кинематики твёрдого тела  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  корректна, поскольку во втором слагаемом «два “псевдо” взаимно компенсируются».

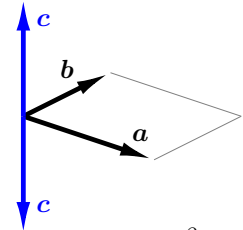


рисунок 2

Однако векторное произведение можно не считать самостоятельным действием. Оно сводится к четырём ранее описанным и обобщается на тензоры любой сложности. Покажем это.

Сначала введём символы перестановки (permutation symbols) О. Veblen’a  $e_{ijk}$ :  $e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$ ,  $e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1$ , остальные нули. Символы  $e_{ijk}$  ( $\pm 1$  или  $0$ ) не меняются при круговой перестановке индексов, меняют знак при перестановке любых двух индексов и обращаются в нуль при совпадении какой-либо пары.

Через символы Веблена определитель (детерминант) матрицы  $A_{ij}$  выражается так:

$$\det A_{ij} = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = e_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}.$$

Далее познакомимся с абсолютно антисимметричным тензором третьей сложности — тензором Levi-Civita’ы

$${}^3\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k, \quad \epsilon_{ijk} \equiv \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k. \quad (5.1)$$

Абсолютная величина каждой ненулевой компоненты  $\epsilon_{ijk}$  тензора Леви-Чивиты равна объёму  $\sqrt{g}$  параллелепипеда,

натянутого на базис — “тройному” или “смешанному” (“векторно-скалярному”) произведению базисных векторов.

Тензор  ${}^3\mathbf{\epsilon}$  антисимметричен по любой паре индексов, то есть он полностью антисимметричен (абсолютно кососимметричен). Это изотропный тензор, ведь его компоненты при повороте базиса не меняются. Но при изменении ориентации тройки векторов базиса (перемене “направления винта”) тензор Леви-Чивиты меняет знак и поэтому является псевдотензором.

Тензор Лёви-Чивиты  ${}^3\mathbf{\epsilon}$  даёт возможность по-новому взглянуть на векторное произведение

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} &= \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_i \mathbf{e}_i \times b_j \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k = \mathbf{b} \mathbf{a} \cdot \cdot {}^3\mathbf{\epsilon}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Здесь видим лишь dot product — комбинацию умножения и свёртки — с участием тензора  ${}^3\mathbf{\epsilon}$ .

Такие комбинации возможны с любыми тензорами:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times {}^2\mathbf{B} &= a_i \mathbf{e}_i \times B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \underbrace{a_i B_{jk} \epsilon_{ijn}}_{-\epsilon_{nji} a_i B_{jk}} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_k = -{}^3\mathbf{\epsilon} \cdot \cdot \mathbf{a} {}^2\mathbf{B}, \\ {}^2\mathbf{C} \times d\mathbf{b} &= C_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \times d_p b_q \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q = \mathbf{e}_i C_{ij} d_p \underbrace{\epsilon_{jpk}}_{-\epsilon_{pjk} = -\epsilon_{jkp}} \mathbf{e}_k b_q \mathbf{e}_q = \\ &= -{}^2\mathbf{C} d \cdot \cdot {}^3\mathbf{\epsilon} b = -{}^2\mathbf{C} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon} \cdot d\mathbf{b}, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{E} &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = \underbrace{-\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k}_{+\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j} = -{}^3\mathbf{\epsilon}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Последнее равенство представляет собой связь изотропных тензоров второй и третьей сложности.

Из (5.3) и (3.6)  $\forall {}^n\mathbf{\Upsilon} \quad \forall n > 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times {}^n\mathbf{\Upsilon} &= \mathbf{E} \times \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{\Upsilon} = -{}^3\mathbf{\epsilon} \cdot {}^n\mathbf{\Upsilon}, \\ {}^n\mathbf{\Upsilon} \times \mathbf{E} &= {}^n\mathbf{\Upsilon} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{E} = -{}^n\mathbf{\Upsilon} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon}.\end{aligned}\quad (5.4)$$

А для любого тензора первой сложности (вектора) к тому же

$$\mathbf{E} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon} = -{}^3\mathbf{\epsilon} \cdot \mathbf{a}.\quad (5.5)$$

Для двух векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{ab} \cdot \cdot {}^3\mathbf{E} = -{}^3\mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{ab}, \\ \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{ba} \cdot \cdot {}^3\mathbf{E} = -{}^3\mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{ba}, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Когда базис  $\mathbf{e}_i$  это “правая” тройка взаимно ортогональных векторов единичной длины, тогда  $\sqrt{g} = 1$ , и компоненты  ${}^3\mathbf{E}$  равны символам Веблена:  $\epsilon_{ijk} = e_{ijk}$ . Если же тройка  $\mathbf{e}_i$  “левая”, то  $\epsilon_{ijk} = -e_{ijk}$ .

Справедливо такое соотношение

$$e_{ijk}e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Доказательство начнём с представлений символов Веблена как определителей:

$$e_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix}, \quad e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{bmatrix}.$$

В левой части (5.7) имеем произведение этих определителей. Но  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  — определитель произведения матриц равен произведению определителей. В матрице-произведении элемент  $[\dots]_{11}$  равен  $\delta_{is}\delta_{ps} = \delta_{ip}$ , как и в (5.7); легко проверить и другие фрагменты (5.7).

Свёртка (5.7) приводит к полезным формулам

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \quad e_{ijk}e_{pjk} = 2\delta_{ip}, \quad e_{ijk}e_{ijk} = 6. \quad (5.8)$$

Первая из формул даёт знакомое представление двойного векторного произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_i \mathbf{e}_i \times \epsilon_{pqj} b_p c_q \mathbf{e}_j = \epsilon_{kij} \epsilon_{pqj} a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = \\ &= (\delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip}) a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = a_i b_k c_i \mathbf{e}_k - a_i b_i c_k \mathbf{e}_k = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{ca} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Тем же путём выводится  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}$ .

И такие тождества для любых двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{E} &= \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n = a_i b_j \epsilon_{ijk} \epsilon_{knq} \mathbf{e}_q \mathbf{e}_n = \\ &= a_i b_j (\delta_{in}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jn}) \mathbf{e}_q \mathbf{e}_n = a_i b_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{ba} - \mathbf{ab}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{a} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon}) \cdot (\mathbf{b} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon}) = \\
&= a_i \epsilon_{ipn} e_p e_n \cdot b_j \epsilon_{jsk} e_s e_k = a_i b_j \epsilon_{ipn} \epsilon_{nkj} e_p e_k = \\
&= a_i b_j (\delta_{ik} \delta_{pj} - \delta_{ij} \delta_{pk}) e_p e_k = a_i b_j e_j e_i - a_i b_i e_k e_k = \\
&= \mathbf{b} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{E}. \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Ещё одно соотношение между изотропными тензорами второй и третьей сложности:

$${}^3\mathbf{\epsilon} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon} = \epsilon_{ijk} e_i \epsilon_{kjm} e_m = -2\delta_{im} e_i e_m = -2\mathbf{E}. \quad (5.11)$$

## § 6. Symmetric and antisymmetric tensors

Тензор, не меняющийся при перестановке какой-либо пары своих индексов, называется симметричным по этой паре индексов. Если же при перестановке пары индексов тензор меняет свой знак, то он называется антисимметричным по этой паре индексов.

Тензор второй сложности  $\mathbf{B}$  симметричен, если  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\top$ . Когда транспонирование меняет знак тензора, то есть  $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$ , тогда он антисимметричен (кососимметричен).

Любой тензор второй сложности представим суммой симметричной и антисимметричной частей

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{C}^S + \mathbf{C}^A, \quad \mathbf{C}^\top = \mathbf{C}^S - \mathbf{C}^A; \\
\mathbf{C}^S &\equiv \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^\top), \quad \mathbf{C}^A \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}^\top). \quad (6.1)
\end{aligned}$$

Для диады  $\mathbf{cd} = \mathbf{cd}^S + \mathbf{cd}^A = \frac{1}{2}(\mathbf{cd} + \mathbf{dc}) + \frac{1}{2}(\mathbf{cd} - \mathbf{dc})$ .

Произведение двух симметричных тензоров  $\mathbf{C}^S \cdot \mathbf{D}^S$  симметрично далеко не всегда, но только когда  $\mathbf{D}^S \cdot \mathbf{C}^S = \mathbf{C}^S \cdot \mathbf{D}^S$ , ведь по (3.8)  $(\mathbf{C}^S \cdot \mathbf{D}^S)^\top = \mathbf{D}^S \cdot \mathbf{C}^S$ .

В нечётномерных пространствах любой антисимметричный тензор второй сложности необратим, его определитель  $\det \mathbf{A} = 0$ .

Существует взаимно-однозначное соответствие между антисимметричными тензорами второй сложности и (псевдо)векторами. Матрица компонент кососимметричного тензора определяется тройкой чисел (диагональные компоненты — нули, а недиагональные — попарно противоположны). Dot product

кососимметричного  $\mathbf{A}$  и какого-либо тензора  ${}^n\xi$  однозначно соответствует cross product'у псевдовектора  $\mathbf{a}$  и того же тензора  ${}^n\xi$

$$\mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot {}^n\xi \Leftrightarrow \mathbf{a} \times {}^n\xi = \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{A} = \mathbf{A}^A \quad \forall {}^n\xi \quad \forall n > 0. \quad (6.2)$$

Раскроем это соответствие  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{a})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot {}^n\xi &= \mathbf{a} \times {}^n\xi \\ A_{hi} e_h e_i \cdot \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q &= a_i e_i \times \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q \\ A_{hj} \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q &= a_i \epsilon_{ijh} \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q \\ A_{hj} &= -a_i \epsilon_{ihj} \\ \mathbf{A} &= -\mathbf{a} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon} \end{aligned}$$

Так же из  ${}^n\xi \cdot \mathbf{A} = {}^n\xi \times \mathbf{a}$  получается  $\mathbf{A} = -{}^3\mathbf{\epsilon} \cdot \mathbf{a}$ .

В общем, для взаимно-однозначного соответствия между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{a}$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{a} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon} = \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -{}^3\mathbf{\epsilon} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \left( -\frac{1}{2} {}^3\mathbf{\epsilon} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Вектор  $\mathbf{a}$  называется сопутствующим тензору  $\mathbf{A}$ .

Компоненты кососимметричного  $\mathbf{A}$  через компоненты сопутствующего ему псевдовектора  $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -{}^3\mathbf{\epsilon} \cdot \mathbf{a} = -\epsilon_{ijk} e_i e_j a_k, \\ A_{ij} &= -\epsilon_{ijk} a_k = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и обратно

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon} = \frac{1}{2} A_{jk} \epsilon_{kji} e_i, \\ a_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} A_{jk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \epsilon_{123} A_{32} + \epsilon_{132} A_{23} \\ \epsilon_{213} A_{31} + \epsilon_{231} A_{13} \\ \epsilon_{312} A_{21} + \epsilon_{321} A_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{32} - A_{23} \\ A_{13} - A_{31} \\ A_{21} - A_{12} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Легко запоминающийся вспомогательный “псевдовекторный инвариант”  $\mathbf{A}_\times$  получается из  $\mathbf{A}$  заменой диадных произведений на векторные

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\times &\equiv A_{ij} e_i \times e_j = -\mathbf{A} \cdot {}^3\mathbf{\epsilon}, \\ \mathbf{A}_\times &= (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times = -2\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times = -\frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Обоснование (6.4):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times \times \mathbf{E} = -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)}_{\in_{ijn} \mathbf{e}_n} \times \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \\
 &= -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{\in_{nij} \in_{nkp}}_{\delta_{jp} \delta_{ik} - \delta_{ip} \delta_{jk}} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = -\frac{1}{2} A_{ij} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \\
 &= -\frac{1}{2} (\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}) = \mathbf{A}^\mathbf{A} = \mathbf{A}.
 \end{aligned}$$

Сопутствующий вектор можно ввести для любого тензора второй сложности, но лишь антисимметричная часть при этом даёт вклад:  $\mathbf{C}^\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}$ . Для симметричного тензора сопутствующий вектор равен  $\mathbf{0}$ .

С (6.4) разложение какого-либо тензора  $\mathbf{C}$  на симметричную и антисимметричную части выглядит как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^\mathbf{S} - \frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}. \quad (6.5)$$

Для диады же

$$(5.9) \Rightarrow (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E} = \mathbf{dc} - \mathbf{cd} = -2\mathbf{cd}^\mathbf{A}, \quad (\mathbf{cd})_\times = \mathbf{c} \times \mathbf{d},$$

и разложение её

$$\mathbf{cd} = \frac{1}{2} (\mathbf{cd} + \mathbf{dc}) - \frac{1}{2} (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E}. \quad (6.6)$$

## § 7. Eigenvectors and eigenvalues of tensor

Если для тензора  ${}^2\mathbf{B}$  и ненулевого вектора  $\mathbf{a}$

$${}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \quad (7.1)$$

$${}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}, \quad ({}^2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

то  $\lambda$  называется собственным числом (собственным значением, eigenvalue, главным значением)  ${}^2\mathbf{B}$ , а определяемая собственным вектором  $\mathbf{a}$  ось — его собственной (главной, principal) осью.

В компонентах имеем матричную задачу на собственные значения  $(B_{ij} - \lambda \delta_{ij}) a_j = 0$  — это однородная линейная алгебраическая система, имеющая ненулевые решения при равенстве нулю определителя  $\det(B_{ij} - \lambda \delta_{ij})$ :

$$\det \begin{bmatrix} B_{11} - \lambda & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} - \lambda & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + \text{I} \lambda^2 - \text{II} \lambda + \text{III} = 0; \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned}
I &= \text{tr } {}^2\mathbf{B} = B_{kk} = B_{11} + B_{22} + B_{33}, \\
II &= B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} + B_{11}B_{33} - B_{13}B_{31} + B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}, \quad (7.3) \\
III &= \det {}^2\mathbf{B} = \det B_{ij} = e_{ijk}B_{1i}B_{2j}B_{3k} = e_{ijk}B_{i1}B_{j2}B_{k3}.
\end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения (7.2) — собственные числа — не зависят от базиса и потому инвариантны.

Коэффициенты (7.3) тоже не зависят от базиса; они называются первым, вторым и третьим инвариантами тензора. С первым инвариантом  $I$  — следом тензора — мы уже встречались в §3. Второй инвариант  $II$  это след союзной (взаимной, *adjugate*) матрицы — транспонированной матрицы дополнений:  $II({}^2\mathbf{B}) \equiv \text{tr}(\text{adj } B_{ij})$ . Или он же  $II({}^2\mathbf{B}) \equiv \frac{1}{2}[(\text{tr } {}^2\mathbf{B})^2 - \text{tr}({}^2\mathbf{B} \cdot {}^2\mathbf{B})] = \frac{1}{2}[(B_{kk})^2 - B_{ij}B_{ji}]$ . И третий инвариант  $III$  это определитель (детерминант) компонент тензора:  $III({}^2\mathbf{B}) \equiv \det {}^2\mathbf{B}$ .

Это относилось ко всем тензорам второй сложности. Для случая же симметричного тензора справедливо следующее:

1°. Собственные числа симметричного тензора вещественны.

2°. Собственные оси для разных собственных чисел ортогональны.

Первое утверждение доказывается от противного. Если  $\lambda$  — комплексный корень (7.2), определяющий собственный вектор  $\mathbf{a}$ , то сопряжённое число  $\bar{\lambda}$  также будет корнем. Ему соответствует собственный вектор  $\bar{\mathbf{a}}$  с сопряжёнными компонентами. Из (7.1) следует равенство

$$\begin{aligned}
(\bar{\mathbf{a}} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) &= \lambda \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}, \quad (\mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}}) = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \bar{\mathbf{a}} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}} = (\lambda - \bar{\lambda}) \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}.
\end{aligned}$$

Но слева здесь — нуль, поскольку  $\mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot {}^2\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{a}$  и  ${}^2\mathbf{B} = {}^2\mathbf{B}^\top$ . Поэтому  $\lambda = \bar{\lambda}$ , то есть вещественно.

Столь же просто обосновывается 2°:

$$\underbrace{\mathbf{a}_2 \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_2}_{=0} = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0.$$

При различных собственных числах собственные векторы единичной длины  $\mathbf{e}_i$  образуют ортонормальный базис; каковы же



в нём компоненты тензора?

$${}^2B \cdot \mathbf{e}_k = \sum_k \lambda_k \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$${}^2B \cdot \underbrace{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k}_E = \sum_k \lambda_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k$$

В общем случае  $B_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot {}^2B \cdot \mathbf{e}_j$ , в базисе же  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  единичных взаимно ортогональных  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  собственных осей симметричного тензора:

$$B_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot (\lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = \lambda_1,$$

$$B_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot (\lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2 = 0,$$

...

Матрица компонент диагональна и  ${}^2B = \sum \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ . Здесь идёт суммирование по трём повторяющимся индексам, ведь используется особенный базис.

Случай кратных главных значений можно рассмотреть с помощью предельного перехода. При  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$  любая линейная комбинация  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  в пределе удовлетворяет (7.1); это значит, что любая ось в плоскости  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  становится собственной. Если же совпадают все три собственных числа, то любая ось в пространстве — собственная. При этом  ${}^2B = \lambda E$ , такие тензоры называются изотропными или шаровыми.

## § 8. Rotation tensor

Соотношение между двумя “правыми” (или двумя “левыми”) ортонормальными базисами  $\mathbf{e}_i$  и  $\hat{\mathbf{e}}_i$  вполне определено матрицей косинусов (§ 1)

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j \hat{\mathbf{e}}_j}_E = o_{ij}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_j, \quad o_{ij}^{\circ} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j.$$

But one may write like this:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i}_{\delta_{ji}} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{P} \equiv \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (8.1)$$

$\mathbf{P}$  is called rotation tensor.

Компоненты  $\mathbf{P}$  и в начальном  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , и в повернутом  $\mathbf{e}_i$  базисах образуют одну и ту же матрицу, равную транспонированной

матрице косинусов  $o_{ji}^{\circ} = \mathring{e}_i \cdot e_j$ :

$$\begin{aligned} e_i \cdot P \cdot e_j &= \underbrace{e_i \cdot e_k}_{\delta_{ik}} \mathring{e}_k \cdot e_j = \mathring{e}_i \cdot e_j, \\ \mathring{e}_i \cdot P \cdot \mathring{e}_j &= \mathring{e}_i \cdot e_k \underbrace{\mathring{e}_k \cdot \mathring{e}_j}_{\delta_{kj}} = \mathring{e}_i \cdot e_j, \\ P &= o_{ji}^{\circ} e_i e_j = o_{ji}^{\circ} \mathring{e}_i \mathring{e}_j. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Тензор  $P$  связывает два вектора — “до поворота”  $\mathring{r} = \rho_i \mathring{e}_i$  и “после поворота”  $r = \rho_i e_i$  — с теми же компонентами  $\rho_i$  у  $r$  в актуальном повёрнутом базисе  $e_i$ , что и у  $\mathring{r}$  в неподвижном базисе  $\mathring{e}_i$  (“вектор вращается вместе с базисом”): поскольку  $e_i = e_j \mathring{e}_j \cdot \mathring{e}_i \Leftrightarrow \rho_i e_i = e_j \mathring{e}_j \cdot \rho_i \mathring{e}_i$ , то

$$r = P \cdot \mathring{r} \quad (8.3)$$

(эта связь — обобщённая формула поворота Rodrigues’a).

Поворот же тензора второй сложности  $\mathring{C} = C_{ij} \mathring{e}_i \mathring{e}_j$  в текущее (актуальное) положение  $C = C_{ij} e_i e_j$  происходит так:

$$C_{ij} e_i e_j = e_i \mathring{e}_i \cdot C_{pq} \mathring{e}_p \mathring{e}_q \cdot \mathring{e}_j \mathring{e}_j \Leftrightarrow C = P \cdot \mathring{C} \cdot P^{\top}. \quad (8.4)$$

Существенное свойство тензора поворота — ортогональность — выражается равенством

$$\underbrace{P}_{e_i \mathring{e}_i} \cdot \underbrace{P^{\top}}_{\mathring{e}_j e_j} = \underbrace{P}_{\mathring{e}_i e_i} \cdot \underbrace{P}_{e_j \mathring{e}_j} = \underbrace{E}_{\mathring{e}_i \mathring{e}_i}, \quad (8.5)$$

то есть  $P^{\top} = P^{-1} \Leftrightarrow P = P^{-\top}$  — транспонированный тензор совпадает с обратным.

Ортогональный тензор не меняет скалярное произведение векторов, сохраняя длины и углы (“метрику”)

$$(P \cdot a) \cdot (P \cdot b) = a \cdot P^{\top} \cdot P \cdot b = a \cdot E \cdot b = a \cdot b. \quad (8.6)$$

Для всех ортогональных тензоров  $(\det P)^2 = 1$ :

$$1 = \det E = \det (P \cdot P^{\top}) = (\det P) (\det P^{\top}) = (\det P)^2.$$

Тензор поворота это ортогональный тензор с  $\det P = 1$ . Но не только лишь тензоры поворота обладают свойством ортогональности. Когда в (8.1) один из базисов “правый”,

а другой “левый”, имеем комбинацию поворота с отражением, и  $\det(-\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}) = -1$ .

У любого тензора второй сложности в трёхмерном пространстве по крайней мере одно собственное число — корень (7.2) — действительное (некомплексное). Для тензора поворота оно равно единице

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} \Rightarrow \overbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P}}^{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} \cdot \lambda \mathbf{a} \Rightarrow \lambda^2 = 1.$$

Соответствующая собственная ось называется осью поворота; теорема Эйлера о конечном повороте в том и состоит, что такая ось существует. Если  $\mathbf{k}$  — орт этой оси, а  $\vartheta$  — величина угла поворота, то тензор поворота представим как

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}, \vartheta) = \mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta). \quad (8.7)$$

Доказывается эта формула так. Направление  $\mathbf{k}$  при повороте не меняется ( $\mathbf{P} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}$ ), поэтому на оси поворота  $\mathring{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ . В перпендикулярной плоскости (рис. 3)  $\mathring{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \vartheta - \mathbf{e}_2 \sin \vartheta$ ,  $\mathring{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 \sin \vartheta + \mathbf{e}_2 \cos \vartheta$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{e}_i \mathring{\mathbf{e}}_i \Rightarrow (8.7)$ .

Из (8.7) и (8.3) получаем формулу поворота Родрига в параметрах  $\mathbf{k}$  и  $\vartheta$ :

$$\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathring{\mathbf{r}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathring{\mathbf{r}} (1 - \cos \vartheta).$$

В параметрах конечного поворота транспонирование, оно же обращение, тензора  $\mathbf{P}$  эквивалентно перемене направления поворота — знака угла  $\vartheta$

$$\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}|_{\vartheta=-\vartheta} = \mathbf{E} \cos \vartheta - \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta).$$

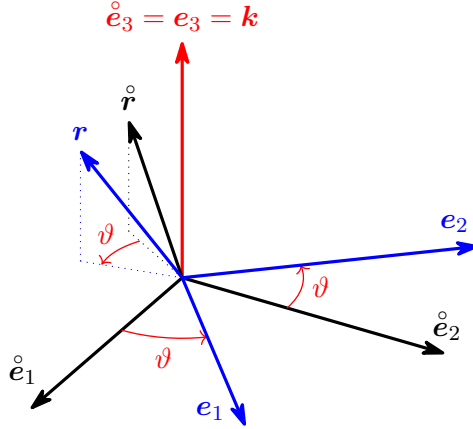
Пусть теперь тензор поворота меняется со временем:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ . Псевдовектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  вводится через  $\mathbf{P}$  таким путём. Продифференцируем тождество ортогональности (8.5) по времени\*

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top = 2\mathbf{0}.$$

\* A variety of notations are used to denote the full time derivative. In addition to the Leibniz's notation  $\frac{dx}{dt}$ , very popular short-hand notation is the “over-dot” Newton's notation  $\dot{x}$ .

$$\mathring{e}_i = \mathring{e}_i \cdot e_j e_j$$

$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \\ \mathring{e}_2 \\ \mathring{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(90^\circ + \vartheta) & \cos 90^\circ \\ \cos(90^\circ - \vartheta) & \cos \vartheta & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathring{e}_1 = e_1 \cos \vartheta - e_2 \sin \vartheta$$

$$\mathring{e}_2 = e_1 \sin \vartheta + e_2 \cos \vartheta$$

$$\mathring{e}_3 = e_3 = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{P} = e_1 \mathring{e}_1 + e_2 \mathring{e}_2 + e_3 \mathring{e}_3 =$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{e_1 \mathring{e}_1}^{e_1 e_1 \cos \vartheta - e_1 e_2 \sin \vartheta} + \overbrace{e_2 \mathring{e}_2}^{e_2 e_1 \sin \vartheta + e_2 e_2 \cos \vartheta} + \overbrace{e_3 \mathring{e}_3}^{\mathbf{k} \mathbf{k}} = \\ &= \mathbf{E} \cos \vartheta - \underbrace{e_3 e_3}_{\mathbf{k} \mathbf{k}} \cos \vartheta + \underbrace{(e_2 e_1 - e_1 e_2)}_{e_3 \times e_i e_i = \epsilon_{3ij} e_j e_i} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} = \\ &= \mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) \end{aligned}$$

рисунок 3  
“Finite rotation”

Тензор  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top$  (по (3.8)  $(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top)^\top = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top$ ) оказался антисимметричным, и согласно (6.3) он представим сопутствующим вектором как  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top$ . То есть

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv -\frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times \quad (8.8)$$

Помимо этого общего представления вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , для него есть и другие. Например, через параметры конечного поворота.

Производная  $\dot{\mathbf{P}}$  в параметрах конечного поворота в общем случае (оба параметра — и единичный вектор  $\mathbf{k}$ , и угол  $\vartheta$  — переменны во времени):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= (\mathbf{P}^S + \mathbf{P}^A)^\bullet = \left( \overbrace{\mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta)}^{\mathbf{P}^S} + \overbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}^{\mathbf{P}^A} \right)^\bullet = \\ &= \underbrace{(\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k})(1 - \cos \vartheta)}_{\dot{\mathbf{P}}^S} + \underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}_{\dot{\mathbf{P}}^A}. \end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top &= (\dot{\mathbf{P}}^S + \dot{\mathbf{P}}^A) \cdot (\mathbf{P}^S - \mathbf{P}^A) = \\ &= \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S + \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S - \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A - \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A, \end{aligned}$$

используя

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 = \text{const} \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} = 0, \\ \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} &= \mathbf{k} \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\ (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{k} - \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k} \mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\ \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\ (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= -\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \\ (a \times \mathbf{E}) \cdot b &= a \times b \Rightarrow (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k}, \\ (5.10) \Rightarrow (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{E}, \\ (5.9) \Rightarrow \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} &= (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}) \times \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \mathbf{k} - \mathbf{k} (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) = \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{P}^S \cdot P^S &= \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + (\dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}})(1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + \\
&\quad + (\overline{\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}}(1 - \cos \vartheta) + (\dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}})(1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}}(1 - \cos \vartheta) = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}}) \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\overline{\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}})(1 - \cos \vartheta)^2 = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\
&\quad + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} - 2 \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cos^2 \vartheta = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} (1 - \cos \vartheta), \\
\dot{P}^A \cdot P^S &= \\
&= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \\
&\quad + (\overline{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}) \cdot \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \dot{\vartheta} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta), \\
\dot{P}^S \cdot P^A &= \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}})(1 - \cos \vartheta) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta = \\
&= \overline{\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E})} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + (\dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E})) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= -\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta), \\
\dot{P}^A \cdot P^A &= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin^2 \vartheta = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta; \\
\dot{P} \cdot P^\Gamma &= \dot{P}^S \cdot P^S + \dot{P}^A \cdot P^S - \dot{P}^S \cdot P^A - \dot{P}^A \cdot P^A = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} (1 - \cos \vartheta) + \\
&\quad + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\
&\quad + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) - (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + (\dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}})(1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} - \dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta).
\end{aligned}$$

Этот результат, подставленный в определение (8.8) псевдо-вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , даёт

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}\dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} (1 - \cos \vartheta). \quad (8.9)$$

Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  получился разложенным по трём взаимно ортогональным направлениям —  $\mathbf{k}$ ,  $\dot{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}$ . При неподвижной оси поворота  $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}\dot{\vartheta}$ .

Ещё одно представление  $\omega$  связано с компонентами тензора поворота (8.2). Поскольку  $P = o_{ji} \circ \dot{e}_i \circ \dot{e}_j$ ,  $P^\top = o_{ij} \circ \dot{e}_i \circ \dot{e}_j$ , а векторы начального базиса  $\dot{e}_i$  неподвижны (со временем не меняются), то

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{o}_{ji} \circ \dot{e}_i \circ \dot{e}_j, \quad \dot{P} \cdot P^\top = \dot{o}_{ni} \circ o_{nj} \circ \dot{e}_i \circ \dot{e}_j, \\ \omega &= -\frac{1}{2} \dot{o}_{ni} \circ o_{nj} \circ \dot{e}_i \times \dot{e}_j = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} o_{nj} \circ \dot{o}_{ni} \circ \dot{e}_k. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Отметим и формулы

$$\begin{aligned} (8.8) &\Rightarrow \dot{e}_i \circ \dot{e}_i = \omega \times e_i \circ \dot{e}_i \Rightarrow \dot{e}_i = \omega \times e_i, \\ (8.8) &\Rightarrow \omega = -\frac{1}{2} (\dot{e}_i \circ \dot{e}_i \cdot \dot{e}_j \circ e_j)_\times = -\frac{1}{2} (\dot{e}_i e_i)_\times = \frac{1}{2} e_i \times \dot{e}_i. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Comment\*

На самом деле последовательные повороты не складываются, а умножаются.

Можно ли складывать угловые скорости? — Да, потому что угол поворота в  $\dot{\vartheta}$  бесконечно малый. — Но только при вращении вокруг неподвижной оси?

...

## § 9. Variations

Далее повсеместно будет использоваться сходная с дифференцированием операция варьирования. Не отсылая читателя к курсам вариационного исчисления, ограничимся представлениями о вариации  $\delta x$  величины  $x$  как о задаваемом нами бесконечно малом приращении, совместимом с ограничениями — связями (constraints). Если ограничений для  $x$  нет, то  $\delta x$  произвольна (случайна). Но когда  $x = x(y)$  — функция независимого аргумента  $y$ , следует считать  $\delta x = x'(y) \delta y$ .

\* Поворот тела вокруг какой-то оси представляет, казалось бы, вектор, ведь он имеет численное значение, равное углу поворота, и направление, совпадающее с направлением оси вращения, которое определяется по “правилу буравчика”. Однако два таких поворота не складываются как векторы, если только углы поворота не являются бесконечно малыми.

Here we consider the exact differential of any set of position vectors  $\mathbf{r}_i$ , that are functions of other variables  $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$  and time  $t$ .

The actual displacement is the differential

$$d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} dq^j$$

Now, imagine if we have an arbitrary path through the configuration space/manifold. This means it has to satisfy the constraints of the system but not the actual applied forces

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j$$

В записях с вариациями действуют те же правила, что и с дифференциалами. Если, например,  $\delta x$  и  $\delta y$  — вариации  $x$  и  $y$ , а  $u$  и  $v$  — конечные величины, то следует писать  $u\delta x + v\delta y = \delta w$ , а не  $w$  — даже когда  $\delta w$  не является вариацией величины  $w$ ; в этом случае  $\delta w$  это единое обозначение. Разумеется, при  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  и  $\partial_x v = \partial_y u$  ( $\frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial y} u$ ) сумма  $\delta w$  будет вариацией некой  $w$ .

Варируя тождество (8.5), получим  $\delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = -\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{P}^\top$ . Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор  $\delta \mathbf{o}$  как  $\delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$ . Приходим к соотношениям

$$\delta \mathbf{P} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{P}, \quad \delta \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times, \quad (9.1)$$

аналогичным (8.8). Вектор бесконечно малого поворота  $\delta \mathbf{o}$  это не “вариация  $\mathbf{o}$ ”, но единый символ (в отличие от  $\delta \mathbf{P}$ ).

Малый поворот определяется вектором  $\delta \mathbf{o}$ , но конечный поворот тоже допускает(?) векторное представление

...

## § 10. Polar decomposition

Любой тензор второй сложности  $\mathbf{F}$  с  $\det F_{ij} \neq 0$  может быть представлен как

...



...

## § 11. Tensors in oblique basis

До сих пор нам было достаточно базиса из ортогональной тройки единичных векторов  $\mathbf{e}_i$ . Теперь рассмотрим базис из трёх любых линейно независимых (некомпланарных) векторов  $\mathbf{a}_i$ .

Дekomпозицию (разложение) вектора  $\mathbf{v}$  по базису  $\mathbf{a}_i$  (рис. 4) запишем как линейную комбинацию

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i. \quad (11.1)$$

Соглашение о суммировании обретает новые положения: повторяющиеся (“немые”) индексы суммирования расположены на разных уровнях, а свободные индексы в обеих частях равенств — на одной высоте ( $a_i = b_{ij}c^j$  — корректно,  $a_i = b_{ik}^i$  — дважды ошибочно).

В таком базисе уже  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i = v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i \neq v^i$ , ведь тут  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k \neq \delta_{ik}$ .

Дополним же базис  $\mathbf{a}_i$  ещё другой тройкой векторов  $\mathbf{a}^i$ , называемых кобазисом или взаимным базисом, чтобы при этом

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j &= \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{a}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{a}^i. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Это — основное свойство кобазиса. Ортонормированный (ортонормальный) базис может быть определён как совпадающий со своим кобазисом:  $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ .

Для, к примеру, первого вектора кобазиса  $\mathbf{a}^1$  имеем

$$\begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \gamma \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 = 1/\gamma \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \\ \gamma = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 \end{cases}$$

Коэффициент  $\gamma$  получился равным объёму параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}_i$ ; в §5 тот же объём был представлен

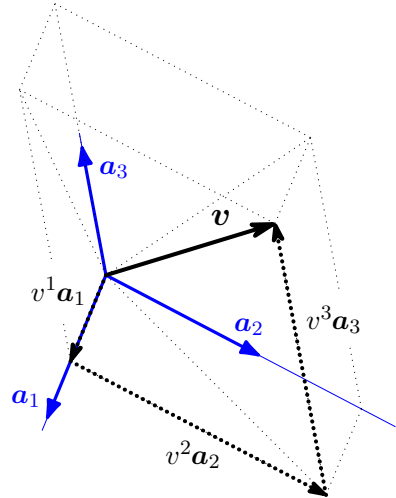


рисунок 4

как  $\sqrt{g}$ , и это неспроста, поскольку он совпадает с квадратным корнем из грамиана  $g \equiv \det g_{ij}$  — определителя симметричной матрицы Ж.Р. Грама  $g_{ij} \equiv \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ .

Доказательство напоминает вывод (5.7). “Тройное” произведение  $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k$  в каком-нибудь ортонормальном базисе  $\mathbf{e}_i$  вычислим как детерминант (с “—” для “левой” базисной тройки) по строкам

$$\epsilon_{ijk} = \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

или по столбцам

$$\epsilon_{pqr} = \mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{a}_r = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}.$$

Произведение определителей  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr}$  равно определителю произведения матриц, элементы последнего — суммы вида  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_r \end{bmatrix};$$

$$i=p=1, j=q=2, k=r=3 \Rightarrow \epsilon_{123} \epsilon_{123} = \det_{i,j} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = \det_{i,j} g_{ij}.$$

Представляя  $\mathbf{a}^1$  и остальные векторы кобазиса суммой

$$2\sqrt{g} \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \overbrace{+ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} - \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2,$$

приходим к общей формуле

$$\mathbf{a}^i = \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{ijk} \mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k, \quad \sqrt{g} \equiv \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3. \quad (11.3)$$

Здесь  $e^{ijk}$  — по-прежнему символы Веблена ( $\pm 1$  или 0), и по (5.8)  $e^{ijk} e_{jkn} = 2\delta_n^i$ . Произведение  $\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k = \epsilon_{jkn} \mathbf{a}^n$ , а компоненты тензора Лёви-Чивиты  $\epsilon_{jkn} = \sqrt{g} e_{jkn}$ . Так что

$$\mathbf{a}^1 = 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{a}^2 = 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{a}^3 = 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2).$$

*Example.* Get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$\sqrt{g} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2;$$

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{e}_1 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 1 & 1 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = -\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 1 & 0 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ 1 & 0 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$$

and finally

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^3 = \frac{1}{2} (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

Имея кобазис, возможно не только разложить по нему любой вектор (рис. 5), но и найти коэффициенты разложения (11.1):

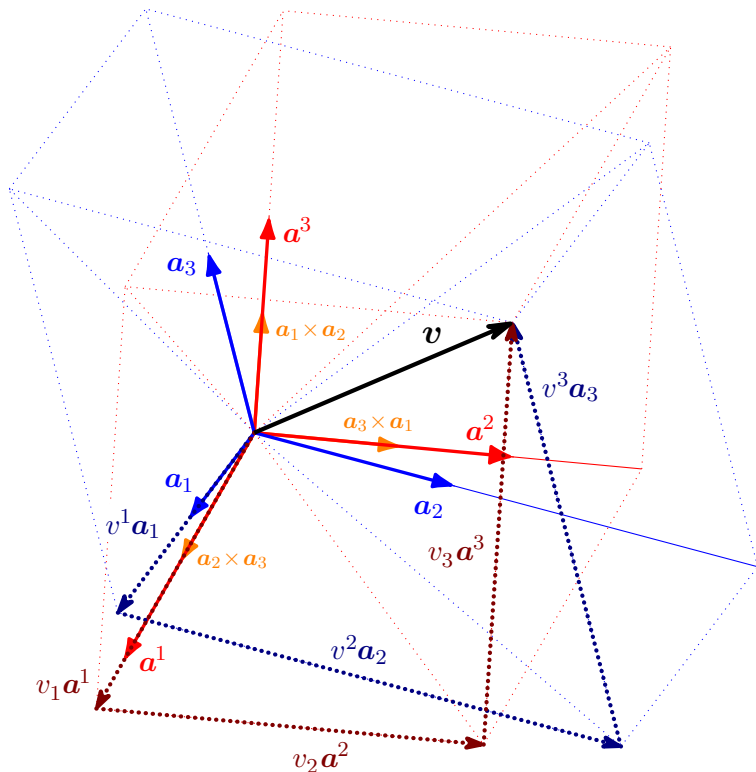
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{a}_i = v_i \mathbf{a}^i, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^i &= v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = v^i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Коэффициенты  $v_i$  называются ковариантными компонентами вектора  $\mathbf{v}$ , а  $v^i$  — его контравариантными\* компонентами.

Есть литература о тензорах, где различают ковариантные и контравариантные... векторы (и “ковекторы”). Не сто́ит вводить читателя в заблуждение: вектор-то один и тот же, просто при разложении по двум разным базисам у него два набора компонент.

От векторов перейдём к тензорам второй сложности. Имеем четыре комплекта диад:  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}_j$ . Согласующиеся

\* Потому что они меняются обратно (contra) изменению длин базисных векторов  $\mathbf{a}_i$ .



$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \sqrt{g} = 0.56274$$

$$1/\sqrt{g} = 1.77703$$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_i^j$$

рисунок 5  
 “Decomposition of vector in oblique basis”

коэффициенты в декомпозиции тензора называются его контра-вариантными, ковариантными и смешанными компонентами:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} &= B^{ij}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = B_{ij}\mathbf{a}^i\mathbf{a}^j = B_i^j\mathbf{a}_i\mathbf{a}^j = B_i^j\mathbf{a}^i\mathbf{a}_j, \\ B^{ij} &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j, \quad B_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \\ B_i^j &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \quad B_i^j = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Для двух видов смешанных компонент точка в индексе это просто свободное место: у  $B_i^j$  верхний индекс “ $i$ ” — первый, а нижний “ $j$ ” — второй.

Компоненты единичного (“метрического”) тензора

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}^k\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k\mathbf{a}^k = g_{jk}\mathbf{a}^j\mathbf{a}^k = g^{jk}\mathbf{a}_j\mathbf{a}_k: \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \equiv g_{ij}, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j \equiv g^{ij}; \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= g_{ij}\mathbf{a}^i\mathbf{a}^j \cdot g^{nk}\mathbf{a}_n\mathbf{a}_k = g_{ij}g^{jk}\mathbf{a}^i\mathbf{a}_k = \mathbf{E} \Rightarrow g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Вдобавок к (11.2) и (11.3) открылся ещё один способ найти векторы кобазиса — через матрицу  $g^{ij}$ , обратную матрице Грама  $g_{ij}$ . И наоборот:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk}\mathbf{a}_j\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk}\mathbf{a}_j\delta_k^i = g^{ji}\mathbf{a}_j, \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk}\mathbf{a}^j\mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk}\mathbf{a}^j\delta_i^k = g_{ji}\mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (11.7)$$

*Example.* Using reversed Gram matrix, get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det g_{ij} = 4,$$

$$\text{adj } g_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T,$$

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{\text{adj } g_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Using  $\mathbf{a}^i = g^{ij} \mathbf{a}_j$

$$\mathbf{a}^1 = g^{11} \mathbf{a}_1 + g^{12} \mathbf{a}_2 + g^{13} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^2 = g^{21} \mathbf{a}_1 + g^{22} \mathbf{a}_2 + g^{23} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^3 = g^{31} \mathbf{a}_1 + g^{32} \mathbf{a}_2 + g^{33} \mathbf{a}_3 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3.$$

...

Единичный тензор (unit tensor, identity tensor, metric tensor)

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A} = \text{not anymore } A_{jj}$$

Thus for, say, trace of some tensor  $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j$ :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A}$ ,

you have

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k = A_{ij} \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = A_{ij} g^{ij}$$

...

Тензор поворота (rotation tensor)

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}_i \hat{\mathbf{a}}^i = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{-\top}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \hat{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{\top}$$

$$\mathbf{P}^{\top} = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \hat{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \mathbf{P}^{-1}$$

...

... Характеристическое уравнение (7.2) быстро приводит к тождеству Гамильтона–Кэли (Cayley–Hamilton)

$$-B^3 + IB^2 - IIB + IIIE = {}^2\mathbf{0}. \quad (11.8)$$

## § 12. Tensor functions

In the popular conception of function  $y=f(x)$  as of mapping (morphism)  $f: x \mapsto y$  an input (argument)  $x$  and an output (result)  $y$  may be tensors of any complexity.

Рассмотрим хотя бы скалярную функцию двухвалентного тензора  $\varphi = \varphi(\mathbf{B})$ . В каждом базисе  $\mathbf{a}_i$  имеем функцию девяти числовых аргументов  $\varphi(B_{ij})$ ; при переходе к новому базису  $B_{ij}$  могут изменяться лишь так, чтобы результат  $\varphi$  сохранился. Дифференцирование  $\varphi$  выглядит так:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} dB_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \bullet \bullet d\mathbf{B}^\top, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j. \quad (12.1)$$

Тензор ...

...

Но согласно опять-таки (11.8)  $-B^2 + IB - IIE + IIIB^{-1} = {}^2\mathbf{0}$ , поэтому

...

Скалярная функция  $\varphi(\mathbf{B})$  называется изотропной, если она не чувствительна к повороту аргумента:

$$\varphi(\mathbf{B}) = \varphi(\mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{O}^\top) = \varphi(\overset{\circ}{\mathbf{B}}) \quad \forall \mathbf{O} = \mathbf{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i = \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{O}^{-\top}$$

для любого ортогонального тензора  $\mathbf{O}$  (тензора поворота, § 8).

Симметричный тензор  $\mathbf{B}^S$  вполне определяется тройкой инвариантов и угловой ориентацией собственных осей (они же взаимно ортогональны, § 7). Ясно, что изотропная функция  $\varphi(\mathbf{B}^S)$  симметричного аргумента является функцией лишь инвариантов  $I(\mathbf{B}^S)$ ,  $II(\mathbf{B}^S)$ ,  $III(\mathbf{B}^S)$ ; она дифференцируется согласно (?), где транспонирование излишне.



### § 13. Tensor fields. Differentiation

“*но́ле*” — это тензор, меняющийся от точки к точке  
(переменный по координатам)

Путь в каждой точке некоторой области трёхмерного пространства известна величина  $u$ . Тогда имеем поле  $u = u(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки. Например, поле температуры в среде, поле давления в идеальной жидкости. Величина  $u$  может быть тензором любой сложности. Пример векторного поля — скорости частиц жидкости.

Не только при решении прикладных задач, но нередко и в “чистой” теории вместо аргумента  $\mathbf{r}$  используется какая-либо тройка криволинейных координат  $q^i$ . При этом  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ . Непрерывно меняя лишь одну координату из трёх, получаем координатную линию. Каждая точка трёхмерного пространства лежит на пересечении трёх координатных линий (рис. 6).

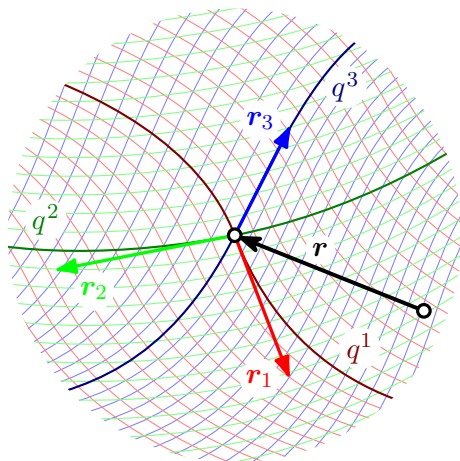


figure 6

Commonly used curvilinear coordinate systems include: rectangular, spherical, and cylindrical coordinate systems. These coordinates may be derived from a set of cartesian coordinates by using a transformation that is locally invertible (a one-to-one map) at each point. This means that one can convert a point given in a cartesian coordinate system to its curvilinear coordinates and back.

...

...

...

...

...

## § 14. Integral theorems

Для векторных полей известны интегральные теоремы Gauss'а и Stokes'а.

Gauss' theorem (divergence theorem) enables an integral taken over a volume to be replaced by one taken over the closed surface bounding that volume, and vice versa.

Stokes' theorem enables an integral taken around a closed curve to be replaced by one taken over *any* surface bounded by that curve. Stokes' theorem relates a line integral around a closed path to a surface integral over what is called a *capping surface* of the path.

Теорема Гаусса о дивергенции — про то, как заменить объёмный интеграл поверхностным (и наоборот). В этой теореме рассматривается поток (ef)flux вектора через ограничивающую объём  $V$  замкнутую поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$  с единичным вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$

$$\oint_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\mathcal{O} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV. \quad (14.1)$$

Объём  $V$  нарезается тремя семействами координатных поверхностей на множество бесконечно малых элементов. Поток через поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$  равен сумме потоков через края получившихся элементов. В бесконечной малости каждый такой элемент — маленький локальный дифференциальный кубик (параллелепипед). ... Поток вектора  $\mathbf{a}$  через грани малого кубика объёма  $dV$  есть  $\sum_{i=1}^6 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a} \mathcal{O}_i$ , а через сам этот объём поток равен  $\nabla \cdot \mathbf{a} dV$ .

Похожая трактовка этой теоремы есть, к примеру, в курсе Richard'а Feynman'а [101].

( рисунок с кубиками )

to dice — нарезать кубиками

small cube, little cube

локально ортонормальные координаты  $\boldsymbol{\xi} = \xi_i \mathbf{n}_i$ ,  $d\boldsymbol{\xi} = d\xi_i \mathbf{n}_i$ ,  
 $\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{n}_i \partial_i$

разложение вектора  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{n}_i$

Теорема Стокса о циркуляции выражается равенством

...

...

## § 15. Curvature tensors

The *Riemann curvature tensor* or *Riemann–Christoffel tensor* (after **Bernhard Riemann** and **Elwin Bruno Christoffel**) is the most common method used to express the curvature of Riemannian manifolds. It's a tensor field, it assigns a tensor to each point of a Riemannian manifold, that measures the extent to which the metric tensor is not locally isometric to that of “flat” space. The curvature tensor can also be defined for any pseudo-Riemannian manifold, or any manifold equipped with an “affine connection” (a choice of such connection makes a manifold look infinitesimally like affine “flat” space).

The *Ricci curvature tensor*, named after **Gregorio Ricci-Curbastro**, represents the amount by which the volume of a narrow conical piece of a small geodesic ball in a curved Riemannian manifold deviates from that of the standard ball in “flat” space.

~ from Wikipedia, the free encyclopedia

*“Мы рассматриваем трёхмерное пространство классической механики, а метрика у нас любая невырожденная без кручения”.*

Рассматривая операции тензорного анализа в криволинейных координатах, мы исходили из представления вектора-радиуса функцией этих координат:  $\mathbf{r}(q^i)$ . Этой зависимостью порождаются выражения векторов локального касательного базиса  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$  ( $\partial_i \equiv \partial/\partial q^i$ ), компонент  $g_{ij} \equiv \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$  и  $g^{ij} \equiv \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = g_{ij}^{-1}$  единичного “метрического” тензора  $\mathbf{E} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i$ , векторов локального взаимного кокасательного базиса  $\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j = \delta_j^i$ ,  $\mathbf{r}^i = g^{ij} \mathbf{r}_j$ , дифференциального набла-оператора Hamilton’а  $\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$ ,  $\mathbf{E} = \nabla \mathbf{r}$ , полного дифференциала  $d\xi = d\mathbf{r} \cdot \nabla \xi$ , частных производных касательного базиса (вторых частных производных  $\mathbf{r}$ )  $\mathbf{r}_{ij} \equiv \partial_i \partial_j \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_j$ , символов “связности” Христоффеля (Christoffel symbols)  $\Gamma_{ij}^k \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}^k$  и  $\Gamma_{ijk} \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k$ .

Представим теперь, что функция  $\mathbf{r}(q^k)$  не известна, но зато в каждой точке пространства определены шесть независимых элементов положительной симметричной метрической матрицы Грама  $g_{ij}(q^k)$ .

Билинейная форма



...

Поскольку шесть функций  $g_{ij}(q^k)$  происходят от векторной функции  $\mathbf{r}(q^k)$ , то между элементами  $g_{ij}$  существуют некие соотношения.

Выражение  $d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \overbrace{\nabla}^E \mathbf{r} = \mathbf{r}_k dq^k$  — полный дифференциал. Следовательно, вторые частные производные коммутируют:  $\partial_i \mathbf{r}_j = \partial_j \mathbf{r}_i$  ( $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$ ). Но это необходимое условие уже обеспечено симметрией  $g_{ij}$  (“связностью”  $\nabla_i$ , её же часто называют “ковариантная производная” — а символы Христоффеля это “компоненты связности” в локальных координатах).

$$\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}^k \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{ij}$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \partial_i (v^j \mathbf{r}_j) = \mathbf{r}^i (\partial_i v^j \mathbf{r}_j + v^j \mathbf{r}_{ij})$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j \nabla_i v^j, \quad \nabla_i v^j \equiv \partial_i v^j + \Gamma_{in}^j v^n$$

$$\nabla \mathbf{r}_i = \mathbf{r}^k \partial_k \mathbf{r}_i = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{ki} = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_n \Gamma_{ki}^n, \quad \nabla_i \mathbf{r}_n = \Gamma_{in}^k \mathbf{r}_k$$

(Добавить) про симметрию  $\Gamma_{ijk} \dots$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^n g_{nk} &= \Gamma_{ijk} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ij} + \mathbf{r}_{ji}) \cdot \mathbf{r}_k + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{jk} - \mathbf{r}_{kj}) \cdot \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ik} - \mathbf{r}_{ki}) \cdot \mathbf{r}_j = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ji} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{jk} \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ki} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_{kj} \cdot \mathbf{r}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_i (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k) + \partial_j (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k) - \partial_k (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \end{aligned} \quad (15.1)$$

Все символы Христоффеля тождественно равны нулю лишь в ортонормальной (декартовой) системе. (А какие они для косоугольной?)

Пойдём дальше:  $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{r}_i = dq^k \partial_k \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{ik} dq^k$  — тоже полные дифференциалы. Поэтому  $\partial_i \partial_j \mathbf{r}_k = \partial_j \partial_i \mathbf{r}_k$  ( $\partial_i \mathbf{r}_{jk} = \partial_j \mathbf{r}_{ik}$ ), и трёхиндексный объект третьих частных производных

$$\mathbf{r}_{ijk} \equiv \partial_i \partial_j \partial_k \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_{jk} \quad (15.2)$$

симметричен по первому и второму индексам (а не только по второму и третьему). И тогда равен нулю <sup>4</sup> $\mathbf{0}$  следующий тензор четвёртой сложности — тензор кривизны Римана–Христоффеля

$${}^4\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{ijkn} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k \mathbf{r}^n, \quad \mathfrak{R}_{ijkn} \equiv (\mathbf{r}_{jik} - \mathbf{r}_{ijk}) \cdot \mathbf{r}_n. \quad (15.3)$$

The curvature tensor is given in terms of the connection  $\nabla$  as  $R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w$  where  $[u, v]$  is the Lie bracket of vector fields. Occasionally, the curvature tensor is defined with the opposite sign.

If  $u = \partial/\partial x^i$  and  $v = \partial/\partial x^j$  are coordinate vector fields then  $[u, v] = 0$  and therefore the formula simplifies to  $R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w$ .

The curvature tensor measures noncommutativity of the covariant derivative, and as such is the integrability obstruction for the existence of an isometry with “flat” space. The linear transformation  $w \mapsto R(u, v)w$  is also called the curvature transformation or endomorphism.

Выразим компоненты  $\mathfrak{R}_{ijkn}$  через метрическую матрицу  $g_{ij}$ . Начнём с дифференцирования локального кобазиса:

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_k = \delta_k^i \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{jk} = 0 \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{r}^k.$$

...

Равенство тензора Риччи нулю:  $\mathcal{R} = {}^2\mathbf{0}$  (в компонентах тут шесть уравнений  $\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_{ji} = 0$ ) — это достаточное условие интегрируемости (“совместности”, “compatibility”) при определении радиуса-вектора  $\mathbf{r}(q^k)$  по полю  $g_{ij}(q^k)$ .

## Bibliography

Существует немало книг, в которых рассматривается лишь аппарат тензорного исчисления [15, 58, 85, 87, 88]. Преобладает “индексный” подход — тензоры трактуются как матрицы компонент, преобразующиеся определённым путём. “Прямой” подход к тензорам излагается, например, в приложениях книг А. И. Лурье [53, 56]. Яркое описание теории векторных полей можно найти у Р. Феунман’а [101]. Сведения о тензорном исчислении содержатся и в своеобразной и глубокой книге С. Truesdell’a [99].

## FUNDAMENTALS OF GENERIC MECHANICS

## § 1. Discrete system of particles

In generic mechanics, systems of particles (“pointlike masses”, “material points”) are considered. In a system of  $N$  particles each particle has mass  $m_k = \text{const}$  and motion function  $\mathbf{r}_k(t)$ . Function  $\mathbf{r}_k(t)$  is measured relative to some reference system — a solid body with a clock (fig. 7).

Long time ago, some absolute space was accepted as a reference system: empty at first, and then filled with continuous elastic medium — the ether. Later it became clear that within the scope of classical mechanics any reference systems are usable, but preference is given to inertial systems, where a point moves without acceleration ( $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ ) in the absence of external interactions.

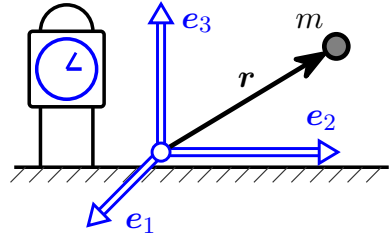


figure 7

The measure of interaction in mechanics is a vector of force  $\mathbf{F}$ . In famous Newton's equation

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (1.1)$$

the right-hand side depends only on position, speed and explicitly presented time, as acceleration is directly proportional to force.

Remind theses of dynamics of a system of particles. Force acting on  $k$ -th particle

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)}, \quad (1.2)$$

where the first addend  $\mathbf{F}_k^{(e)}$  is external force, and the second is sum of internal ones ( $\mathbf{F}_{kj}^{(i)}$  is force from particle with number “ $j$ ”).

Принимая принцип действия и противодействия  $\mathbf{F}_{kj}^{(i)} = -\mathbf{F}_{jk}^{(i)}$ , получаем из (1.1) и (1.2) баланс импульса

$$\left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^\bullet = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.3)$$

Считая также, что внутренние взаимодействия между частицами центральны, то есть

$$\mathbf{F}_{kj}^{(i)} \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) = \mathbf{0},$$

приходим к балансу момента импульса

$$\left( \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^\bullet = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.4)$$

...

## § 2. Absolutely rigid undeformable solid body

### *Discrete and continual approaches*

To define position (location) of absolutely rigid (undeformable) body it's enough to choose some one of its points, to set location of this point, as well as angular orientation of body (fig. 8).

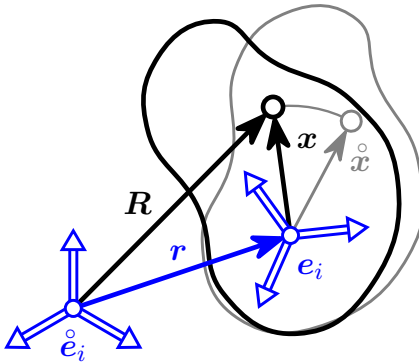


figure 8

As adjectives the difference between “rigid” and “solid” is that rigid is stiff (rather than flexible) while solid is in the state of a solid (not fluid). As a noun solid is a substance in the fundamental state of matter that retains its size and shape without need of container (as opposed to a liquid or gas).

A rigid body is a solid body in which deformation is zero (or negligibly small, so small it can be neglected). The distance between any two points of a rigid body remains constant, regardless of

external forces exerted on it. A rigid body is usually considered as a continuous distribution of mass (modeled as a continuous mass rather than as discrete particles).

В модели совершенно (абсолютно) жёсткого твёрдого тела расстояние между любыми двумя точками такого тела остаётся постоянным, не завися от внешних сил: деформации нет.

Совершенно жёсткое тело рассматривается либо как дискретная совокупность частиц, либо как непрерывное распределение массы (материальный континуум, сплошная среда).

Для радиуса-вектора некоторой точки тела имеем

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = x_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \quad \dot{\mathbf{x}} = x_i \dot{\mathbf{e}}_i$$

Компоненты  $x_i$  в совершенно жёстком теле не зависят от времени:  $x_i = \text{const}$ .

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{x}}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{x}}$$

$$x_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{P}} \cdot x_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{P}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$$

Вводя псевдовектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , ...

Пусть  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$  — ортогональная тройка базисных ортов, неподвижная относительно системы отсчёта.

Имея неподвижный базис  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$  и движущийся вместе с телом базис  $\mathbf{e}_i$ , ...

Если связать с телом тройку декартовых осей с ортами  $\mathbf{e}_i$  (этот базис движется вместе с телом), тогда угловая ориентация тела может быть задана тензором поворота  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{e}_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$ .

...

Движение тела полностью определяется функциями  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{P}(t)$ .

...

Переход от формул, содержащих суммирование по дискретным точкам, к формулам для сплошного тела осуществляется заменой масс частиц на массу  $\rho dV$  элемента объёма  $dV$  ( $\rho$  — плотность массы), и интегрированием по всему объёму тела.

...

Holonomic constraints are relations between position variables (and possibly time) which can be expressed as

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = 0$$

where  $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$  are  $n$  coordinates which describe the system. For example, the motion of a particle constrained to lie on sphere's surface is subject to a holonomic constraint, but if the particle is able to fall off the sphere under the influence of gravity, the constraint becomes non-holonomic. For the first case the holonomic constraint may be given by the equation:  $r^2 - a^2 = 0$ , where  $r$  is the distance from the centre of a sphere of radius  $a$ . Whereas the second non-holonomic case may be given by:  $r^2 - a^2 \geq 0$ .

Holonomic constraint depends only on coordinates and time. It does not depend on velocities or any higher time derivative. A constraint that cannot be expressed as shown above is nonholonomic.

Velocity-dependent constraints like

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0$$

are mostly not holonomic.

### § 3. Principle of virtual work

Виртуальным перемещением частицы с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_k$  называется вариация  $\delta\mathbf{r}_k$  — любое (неопределённое) бесконечно малое приращение  $\mathbf{r}_k$ , происходящее мгновенно и совместимое с ограничениями-связями. Если связей нет, то есть система свободна, тогда виртуальные перемещения  $\delta\mathbf{r}_k$  совершенно любые.

Связи бывают голономные (holonomic, или геометрические), связывающие только положения (перемещения) — это функции лишь координат и, возможно, времени

$$c(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{3.1}$$

— и неголономные (или дифференциальные), содержащие производные координат по времени:  $c(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0$  и не интегрируемые до геометрических связей.

Далее рассматриваем системы, все связи в которых — голономные. В системе с голономной связью виртуальные перемещения должны удовлетворять уравнению

$$\sum_k \frac{\partial c}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (3.2)$$

В несвободных системах все силы делятся на две группы: активные и реакции связей. Реакция  $\mathbf{N}_k$  действует со стороны всех материальных ограничителей на частицу “ $k$ ” и меняется в соответствии с уравнением (3.1) каждой связи. Принимается предложение об идеальности связей:

$$\sum_k \mathbf{N}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad — \quad (3.3)$$

работа реакций на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Принцип виртуальной работы выражается уравнением

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{F}_k$  — лишь активные силы.

Дифференциальное вариационное уравнение (3.4) может показаться тривиальным следствием закона Ньютона (1.1) и условия идеальности связей (3.3). Однако содержание (3.4) несравненно обширнее. Известно — и читатель вскоре это увидит, — что принцип (3.4) может быть положен в основу механики [20]. Различные модели упругих тел, описываемые в этой книге, построены с опорой на этот принцип.

Для примера рассмотрим совершенно жёсткое (недеформируемое) твёрдое тело.

...

Проявилась замечательная особенность (3.4): это уравнение эквивалентно системе такого порядка, каково число степеней свободы системы, то есть сколько независимых вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  мы имеем. Если в системе  $N$  точек есть  $m$  связей, то число степеней свободы  $n = 3N - m$ .

...

#### § 4. Balance of momentum, rotational momentum, and energy

Эти фундаментальные законы баланса можно связать со свойствами пространства и времени [50]. Сохранение импульса (количества движения) в изолированной\* системе выводится из однородности пространства (*при любом параллельном переносе — трансляции — замкнутой системы как целого свойства этой системы не меняются*). Сохранение момента импульса — следствие изотропии пространства (*свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте этой системы как целого*). Энергия же изолированной системы сохраняется, так как время однородно (энергия  $E \equiv T(q, \dot{q}) + \Pi(q)$  такой системы не зависит явно от времени).

Фундаментальные законы баланса можно вывести из принципа виртуальной работы (3.4). Перепишем его в виде

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k^{(e)} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k + \delta W^{(i)} = 0, \quad (4.1)$$

где выделены внешние силы  $\mathbf{F}_k^{(e)}$  и виртуальная работа внутренних сил  $\delta W^{(i)} = \sum_k \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{r}_k$ .

Предполагается, что внутренние силы не совершают работы на виртуальных перемещениях тела как жёсткого целого ( $\delta \boldsymbol{\rho}$  и  $\delta \mathbf{o}$  — произвольные константы, определяющие трансляцию и поворот)

$$\delta \mathbf{r}_k = \delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (4.2)$$

Предпосылки-соображения для этого предположения таковы.

Первое — для случая упругих (потенциальных) внутренних сил. При этом  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$  — вариация потенциала с противоположным знаком. Достаточно очевидно, что  $\Pi$  меняется лишь при деформации.

Второе соображение — в том, что суммарный вектор и суммарный момент внутренних сил равен нулю

\* Изолированная (замкнутая) система — это система частиц, взаимодействующих друг с другом, но ни с какими другими телами.



$$\sum \dots$$

...

Принимая (4.2) и подставляя в (4.1) сначала  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \boldsymbol{\rho}$  (трансляция), а затем  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k$  (поворот), получаем баланс импульса (...) и баланс момента импульса (...).

...

## § 5. Hamilton's principle and Lagrange's equations

Вариационное уравнение (3.4) удовлетворяется в любой момент времени. Проинтегрируем его\* по какому-либо промежутку  $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T + \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (5.1)$$

Без ущерба для общности можно принять  $\delta \mathbf{r}_k(t_1) = \delta \mathbf{r}_k(t_2) = \mathbf{0}$ , тогда внеинтегральный член исчезает.

Вводятся обобщённые координаты  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$  — число степеней свободы). Векторы-радиусы становятся функциями вида  $\mathbf{r}_k(q_i, t)$ , тождественно удовлетворяющими уравнениям связей (3.1). Если связи стационарны, то есть (3.1) не содержат  $t$ , то остаётся  $\mathbf{r}_k(q_i)$ . Кинетическая энергия превращается в функцию  $T(q_i, \dot{q}_i, t)$ , где явно входящее  $t$  характерно лишь для нестационарных связей.

Весьма существенно понятие обобщённых сил  $Q_i$ . Они вводятся через выражение виртуальной работы

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_i Q_i \delta q_i, \quad Q_i \equiv \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} * \left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) &= \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \underbrace{\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k}_{\delta T} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

Стоит подчеркнуть происхождение обобщённых сил через работу. Установив набор обобщённых координат системы, следует сгруппировать приложенные силы  $\mathbf{F}_k$  в комплексы  $Q_i$ .

Если силы потенциальны с энергией  $\Pi = \Pi(q_i, t)$ , то

$$\sum_i Q_i \delta q_i = -\delta \Pi, \quad Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \quad (5.3)$$

Явное присутствие  $t$  может быть при нестационарности связей или зависимости физических полей от времени.

...

Известны уравнения Lagrange'a не только второго, но и первого рода. Рассмотрим их ради методики вывода, много раз применяемой в этой книге.

При наличии связей (3.1) равенство  $\mathbf{F}_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$  не следует из вариационного уравнения (3.4), ведь тогда виртуальные перемещения  $\delta \mathbf{r}_k$  не независимы. Каждое из  $m$  ( $m$  — число связей) условий для вариаций (3.2) умножим на некий скаляр  $\lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) и добавим к (3.4):

$$\sum_{k=1}^N \left( \mathbf{F}_k + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (5.4)$$

Среди  $3N$  компонент вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  зависимых  $m$ . Но столько же и множителей Лагранжа: подберём  $\lambda_\alpha$  так, чтобы коэффициенты (??какие?) при зависимых вариациях обратились в нуль. Но при остальных вариациях коэффициенты(??) также должны быть нулями из-за независимости. Следовательно, все выражения в скобках (...) равны нулю — это и есть уравнения Лагранжа первого рода.

Поскольку для каждой частицы

...

## § 6. Statics

Рассмотрим систему со стационарными (постоянными во времени) связями при статических (не меняющихся со временем)

активных силах  $\mathbf{F}_k$ . В равновесии  $\mathbf{r}_k = \text{const}$ , и формулировка принципа виртуальной работы следующая:

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \Leftrightarrow Q_i = 0. \quad (6.1)$$

Существенны обе стороны этого положения: и вариационное уравнение, и равенство нулю обобщённых сил.

Соотношения (6.1) — это самые общие уравнения статики. В литературе распространено узкое представление об уравнениях равновесия как балансе сил и моментов. Но при этом нужно понимать, что набор уравнений равновесия точно соответствует обобщённым координатам. Главный вектор и главный момент в уравнениях равновесия фигурируют, поскольку у системы есть степени свободы трансляции и поворота. Особенная популярность сил и моментов связана не столько с известностью статики совершенно жёсткого твёрдого тела, но с тем, что виртуальная работа внутренних сил на перемещениях системы как жёсткого целого равна нулю в любой среде.

Пусть в системе действуют два вида сил: потенциальные с энергией от обобщённых координат  $\Pi(q_i)$  и дополнительные внешние  $\mathring{Q}_i$ . Из (6.1) следуют уравнения равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \mathring{Q}_i. \quad (6.2)$$

Здесь содержится нелинейная в общем случае задача статики о связи положения равновесия  $q_i$  с нагрузками  $\mathring{Q}_i$ .

В линейной системе с квадратичным потенциалом вида  $\Pi = \frac{1}{2} C_{ik} q_k q_i$

$$\sum_k C_{ik} q_k = \mathring{Q}_i. \quad (6.3)$$

Тут фигурируют матрица жёсткости  $C_{ik}$  и столбцы координат  $q_k$  и нагрузок  $\mathring{Q}_i$ .

Сказанное возможно обобщить и на континуальные линейные упругие среды.

Матрица жёсткости  $C_{ik}$  обычно бывает положительной (такое свойство конструкций). Тогда  $\det C_{ik} > 0$ , линейная алгебра-

ическая система (6.3) однозначно разрешима, а решение её можно заменить минимизацией квадратичной формы

$$\mathcal{Q}(q_j) \equiv \Pi - \sum_i \mathring{Q}_i q_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} q_i C_{ik} q_k - \sum_i \mathring{Q}_i q_i \rightarrow \min. \quad (6.4)$$

Бывает однако, что конструкция неудачно спроектирована, тогда матрица жёсткости сингулярна (необратима) и  $\det C_{ik} = 0$  (или же весьма близок к нулю — nearly singular матрица с  $\det C_{ik} \approx 0$ ). Тогда решение линейной проблемы статики (6.3) существует лишь при ортогональности столбца нагрузок  $\mathring{Q}_i$  всем линейно независимым решениям однородной сопряжённой системы

...

Известные теоремы статики линейно упругих систем легко доказываются в случае конечного числа степеней свободы. Теорема Клапейрона выражается равенством

...

Но вернёмся к проблеме (6.2), иногда называемой теоремой Лагранжа. Её можно обратить преобразованием Лежандра

$$q_i = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathring{Q}_i}, \quad \hat{\Pi}(\mathring{Q}_i) = \sum_i \mathring{Q}_i q_i - \Pi. \quad (6.5)$$

Это теорема Кастильяно,  $\hat{\Pi}$  называется дополнительной энергией. В линейной системе (6.3)  $\Rightarrow \hat{\Pi} = \Pi$ . Теорема (6.5) бывает очень полезна — когда легко находится  $\hat{\Pi}(\mathring{Q}_i)$ . Встречаются так называемые статически определимые системы, в которых все внутренние силы удаётся найти лишь из баланса сил и моментов. Для них (6.5) эффективна.

В отличие от линейной задачи (6.3), нелинейная задача (6.2) может не иметь решений вовсе или же иметь их несколько.

...

Разговор о статике в общей механике закончим принципом д’Аламбера (d’Alembert’s principle): уравнения динамики отличаются от статических лишь наличием дополнительных “фиктивных сил инерции”  $m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$ . Принцип д’Аламбера очевиден, но бездумное его применение может привести к ошибкам. Например,

уравнения вязкой жидкости в статике и динамике отличаются не только лишь инерционными членами. Для упругих же сред принцип д'Аламбера полностью справедлив.

## § 7. Mechanics of relative motion

До сих пор не ставился вопрос о системе отсчёта, всё рассматривалось в некой “абсолютной” системе или одной из инерциальных систем (§ 1). Теперь представим себе две системы: “абсолютную” и подвижную

...

## § 8. Small oscillations (vibrations)

Если статика линейной системы описывается уравнениями (6.3), то в динамике имеем

$$\sum_k \left( A_{ik} \ddot{q}_k + C_{ik} q_k \right) = \dot{Q}_i(t), \quad (8.1)$$

где  $A_{ik}$  — симметричная и положительная “матрица кинетической энергии”.

Изучение колеблющейся системы обычно начинают с нормальных (главных) колебаний

...

## Bibliography

В длинном списке книг по общей механике можно найти труды не только механиков-профессионалов [24, 51, 52, 75, 77], но и физиков-теоретиков широкой ориентации [50, 92]. Интересен курс Ф. Р. Гантмахера [20] с компактным, но полным изложением основ.

# NONLINEAR ELASTIC MOMENTLESS CONTINUUM

## § 1. Model of continuum. Descriptions of processes

Вещества имеют дискретное строение, и модель системы частиц с массами  $m_k$  и радиусами-векторами  $\mathbf{R}_k(t)$  может показаться подходящей, несмотря на невообразимое число степеней свободы — тем более что объёмы памяти и быстродействие компьютеров характеризуются тоже астрономическими числами.

И всё же предпочтение стоит отдать качественно иной модели — модели сплошной среды (материального континуума), в которой масса распределена по объёму непрерывно: в объёме  $\mathcal{V}$  содержится масса

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}, \quad (1.1)$$

where  $\rho$  is volumetric mass density.

С непрерывным распределением массы связано лишь первое и простейшее представление о сплошной среде как множестве (пространстве) материальных точек. Возможны и более сложные модели, в которых частицы обладают степенями свободы не только трансляции, но и поворота, внутренней деформации и др. Отметив, что подобные модели вызывают всё больший интерес, ограничимся пока простейшим классическим представлением о среде как состоящей из точек.

В каждый момент времени  $t$  деформируемое тело занимает некий объём  $V$  пространства. Вводя какие-либо криволинейные координаты  $q^i$ , считаем

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^i, t). \quad (1.2)$$

...

Но может быть эффективно и иное описание — пространственное (или эйлерово), при котором рассматриваются процессы не в частицах среды, а в точках пространства. Полагая, например,  $\rho = \rho(\mathbf{R}, t)$ , мы следим за происходящим в этом месте и не смущаемся непрерывным уходом и приходом частиц.

## § 2. Differentiation

Имея зависимости  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ , можно ввести базис  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$  ( $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$ ), взаимный базис  $\mathbf{r}^i$  и оператор Гамильтона

$$\overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{r}^i \partial_i, \quad (2.1)$$

так что  $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \varphi$ .

Если

...

Пусть  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — какое-либо поле. Найдём скорость изменения интеграла по объёму

$$\Upsilon \equiv \int_{\mathcal{V}} \rho \varphi d\mathcal{V}$$

(“ $\varphi$  есть  $\Upsilon$  на единицу массы”). Кажущееся сложным вычисление  $\dot{\Upsilon}$  ( $\mathcal{V}$  деформируется) оказывается элементарным благодаря (??):

$$\Upsilon = \int_{\mathcal{V}} \overset{\circ}{\rho} \varphi d\overset{\circ}{\mathcal{V}} \Rightarrow \dot{\Upsilon} = \int_{\mathcal{V}} \overset{\circ}{\rho} \dot{\varphi} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\varphi} d\mathcal{V}. \quad (2.2)$$

Не сто́ит противопоставлять материальное и пространственное описание. Далее будут использоваться оба в зависимости от ситуации.

## § 3. Motion gradient

При  $t = \text{const}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= d\mathbf{r} \cdot \underbrace{\overset{F^\top}{\mathbf{r}^i \mathbf{R}_i}}_{\overset{F}{\mathbf{R}_i \mathbf{r}^i}} = \underbrace{\overset{F}{\mathbf{R}_i \mathbf{r}^i}}_{\overset{F^\top}{\mathbf{r}^i \mathbf{R}_i}} \cdot d\mathbf{r} \\ d\mathbf{r} &= d\mathbf{R} \cdot \underbrace{\mathbf{\nabla} \mathbf{r}}_{\mathbf{r}^i \mathbf{R}^i} = \underbrace{\mathbf{r}^i \mathbf{R}^i}_{\mathbf{F}^{-1}} \cdot d\mathbf{R} \end{aligned}$$

Располагая функцией движения ...

...

называемый градиентом движения или градиентом деформации.\*

...

По теореме о полярном разложении (§ 1.10), градиент движения разложим на тензор поворота  $\mathbf{O}$  и симметричные положительные тензоры  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ :

...

Когда нет поворота ( $\mathbf{O} = \mathbf{E}$ ), тогда  $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$ .

...

## § 4. Tensors and measures of deformation

Градиент движения  $\mathbf{F}$  характеризует и деформацию тела, и поворот тела как целого. “Чистыми” же тензорами деформации являются  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ , а также их вторые степени

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^2 &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}, \\ \mathbf{V}^2 &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \equiv \mathbf{\Phi}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Это тензор деформации Green’a (или правый тензор Cauchy–Green’a)  $\mathbf{G}$  и тензор деформации Finger’a (или левый тензор Cauchy–Green’a)  $\mathbf{\Phi}$ . Преимущество  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{\Phi}$  перед  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  — в алгебраической связи с  $\mathbf{F}$ , без извлечения корня.

Рассмотрим компоненты  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{\Phi}$ :

\* Тензору  $\mathbf{F}$  не вполне подходит его более популярное название “deformation gradient”, поскольку он описывает не только деформацию, но и поворот тела как целого без деформации.



...

from Wikipedia, the free encyclopedia — Finite strain theory

*The right Cauchy–Green deformation tensor*

In 1839, George Green introduced a deformation tensor known as the right Cauchy–Green deformation tensor or Green's deformation tensor, defined as:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \text{or} \quad G_{IJ} = F_{kI} F_{kJ} = \frac{\partial x_k}{\partial X_I} \frac{\partial x_k}{\partial X_J}.$$

Physically, the Cauchy–Green tensor gives the square of local change in distances due to deformation:  $d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{X}$

Invariants of  $\mathbf{G}$  are often used in expressions for strain energy density functions. The most commonly used invariants are

$$\begin{aligned} I_1^G &\equiv G_{II} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2^G &\equiv \frac{1}{2} [(G_{JJ})^2 - G_{IK} G_{KI}] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3^G &\equiv \det(\mathbf{G}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

where  $\lambda_i$  are stretch ratios for the unit fibers that are initially oriented along the eigenvector directions of the right (reference) stretch tensor (these are not generally aligned with the three axis of the coordinate systems).

*The inverse of Green's deformation tensor*

It is the inverse of the right Cauchy–Green deformation tensor

$${}^2\mathbf{f} = \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \quad \text{or} \quad f_{IJ} = \frac{\partial X_I}{\partial x_k} \frac{\partial X_J}{\partial x_k}$$

The International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC) recommends that this tensor be called the Finger tensor. However, that nomenclature is not universally accepted in applied mechanics.

*The left Cauchy–Green or Finger deformation tensor*

Reversing the order of multiplication in the formula for the right Green–Cauchy deformation tensor leads to the left Cauchy–Green deformation tensor which is defined as:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top = \mathbf{V}^2 \quad \text{or} \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_K}$$

The left Cauchy–Green deformation tensor is often called the Finger deformation tensor, named after Josef Finger (1894).

Invariants of  $\Phi$  are also used in the expressions for strain energy density functions. The conventional invariants are defined as

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \Phi_{ii} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &\equiv \frac{1}{2} (\Phi_{ii}^2 - \Phi_{jk}\Phi_{kj}) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \\ I_3 &\equiv \det \Phi = J^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \end{aligned}$$

where  $J \equiv \det \mathbf{F}$  is the determinant of the motion gradient.

For incompressible materials, a slightly different set of invariants is used:

$$\bar{I}_1 \equiv J^{-2/3} I_1 ; \quad \bar{I}_2 \equiv J^{-4/3} I_2 ; \quad J = 1 .$$

### *The Cauchy deformation tensor*

Earlier in 1828, Augustin Louis Cauchy introduced a deformation tensor defined as the inverse of the left Cauchy–Green deformation tensor,  $\Phi^{-1}$ . This tensor has also been called the Piola tensor and the Finger tensor in the rheology and fluid dynamics literature.

$${}^2\mathbf{c} = \Phi^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{or} \quad c_{ij} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \frac{\partial X_K}{\partial x_j}$$

### *Finite strain tensors*

The concept of *strain* is used to evaluate how much a given displacement differs locally from a body displacement as a whole (a “rigid body displacement”). One of such strains for large deformations is the *Lagrangian finite strain tensor*, also called the *Green–Lagrangian strain tensor* or *Green–Saint-Venant strain tensor*, defined as

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) \quad \text{or} \quad C_{KL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_j}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_L} - \delta_{KL} \right)$$

or as a function of the displacement gradient tensor

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} [(\nabla_X \mathbf{u})^\top + \nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^\top \cdot \nabla_X \mathbf{u}]$$

or

$$C_{KL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_K}{\partial X_L} + \frac{\partial u_L}{\partial X_K} + \frac{\partial u_M}{\partial X_K} \frac{\partial u_M}{\partial X_L} \right)$$

The Green–Lagrangian strain tensor is a measure of how much  $\mathbf{G}$  differs from  $\mathbf{E}$ .

The *Eulerian–Almansi finite strain tensor*, referenced to the deformed configuration, i.e. Eulerian description, is defined as

$${}^2\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}^{-1}) \quad \text{or} \quad e_{rs} = \frac{1}{2} \left( \delta_{rs} - \frac{\partial X_M}{\partial x_r} \frac{\partial X_M}{\partial x_s} \right)$$

or as a function of the displacement gradients we have

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

### *Seth–Hill family of generalized strain tensors*

B. R. Seth was the first to show that the Green and Almansi strain tensors are special cases of a more general strain measure. The idea was further expanded upon by Rodney Hill in 1968. The Seth–Hill family of strain measures (also called Doyle–Ericksen tensors) can be expressed as

$$\mathbf{D}_{(m)} = \frac{1}{2m}(\mathbf{U}^{2m} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2m}[\mathbf{G}^m - \mathbf{E}]$$

For different values of  $m$  we have:

$\mathbf{D}_{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$	Green–Lagrangian strain tensor
$\mathbf{D}_{(1/2)} = (\mathbf{U} - \mathbf{E}) = \mathbf{G}^{1/2} - \mathbf{E}$	Biot strain tensor
$\mathbf{D}_{(0)} = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G}$	Logarithmic strain, Natural (True) strain, or Hencky strain
$\mathbf{D}_{(-1)} = \frac{1}{2}[\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2}]$	Almansi strain

The second-order approximation of these tensors is

$$\mathbf{D}_{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \nabla \mathbf{u} - (1 - m)\boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

where  $\boldsymbol{\varepsilon}$  is the infinitesimal strain tensor.

Many other different definitions of tensors  $\mathbf{D}$  are admissible, provided that they all satisfy the conditions that:

- $\mathbf{D}$  vanishes for all rigid-body motions
- the dependence of  $\mathbf{D}$  on the displacement gradient tensor  $\nabla \mathbf{u}$  is continuous, continuously differentiable and monotonic
- it is also desired that  $\mathbf{D}$  reduces to the infinitesimal strain tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  as the norm  $|\nabla \mathbf{u}| \rightarrow 0$

An example is the set of tensors

$$\mathbf{D}^{(n)} = (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{-n}) / 2n$$

which do not belong to the Seth–Hill class, but have the same 2nd-order approximation as the Seth–Hill measures at  $m = 0$  for any value of  $n$ .

...

Как отмечалось в § 1.10, тензоры

...

## § 5. Velocity field

Этот вопрос рассматривается во всех курсах механики сплошной среды, но в теории упругости можно обойтись без него. Среди различных моделей материального континуума упругое твёрдое тело выделяется тем, что полная система уравнений для него выводится единой логически стройной процедурой (о ней — ниже). Но чтобы читатель лучше увидел преимущества этой процедуры, мы пока следуем традиционным для механики сплошной среды путём.

Итак, имеем поле скоростей в пространственном описании

...

В теории упругости дискуссии о поворотах не будет — истинное представление появится в ходе логически стройных выкладок без дополнительных гипотез.

## § 6. Area vector. Surface change

Take an infinitesimal surface. The area vector by length is equal to surface's area and is directed along normal to surface.

In the reference (undeformed, initial, “material”) configuration, the area vector can be represented as  $\mathbf{n}do$ . Surface's area  $do$  is infinitely small, and  $\mathbf{n}$  is unit normal vector.

In the present (actual, deformed, current, “spatial”) configuration, the same surface has area vector  $\mathbf{N}dO$ .

With enough precision these infinitesimal surfaces are parallelograms

$$\begin{aligned}\mathbf{n}do &= d\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j dq^i dq^j, \\ \mathbf{N}dO &= d\mathbf{R}' \times d\mathbf{R}'' = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j dq^i dq^j.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Applying volume transformation (??), we have

$$\begin{aligned}d\mathcal{V} &= Jd\mathcal{V}^\circ \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}_k = J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}_k \mathbf{R}^k &= J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k \mathbf{R}^k \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j = J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{F}^{-1}.\end{aligned}$$

Hence through (6.1) we come to the relation

$$\mathbf{N}dO = J\mathbf{n}do \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (6.2)$$

called Nanson's formula.

## § 7. Forces in continuum. Cauchy stress tensor

Поскольку частицы безмоментного континуума — точки лишь с трансляционными степенями свободы, то соответствующими обобщёнными силами будут только векторы сил (без моментов).

На элементарный объём  $d\mathcal{V}$  действует некая сила  $\rho \mathbf{f} d\mathcal{V}$ ; если  $\mathbf{f}$  — массовая сила (действующая на единицу массы), то  $\rho \mathbf{f}$  — объёмная. Например: силы тяжести, силы инерции в неинерциальных системах отсчёта, электромагнитные силы при наличии в среде зарядов и токов.

На элементарную поверхность  $dO$  действует поверхностная сила  $\mathbf{p}dO$ . Это может быть давление, трение, электростатическая сила при сосредоточенных на поверхности зарядах.

В сплошной среде, как в любой механической системе, различают силы внешние и внутренние. Со времён Эйлера и Коши считают, что внутренние силы в среде — это поверхностные силы близкодействия: на любой бесконечно малой площадке  $NdO$  внутри тела действует сила  $\boldsymbol{\tau}_N dO$ . Уточним: действует с той стороны, куда направлена нормаль  $\mathbf{N}$ .

Вектор  $\boldsymbol{\tau}_N$  называется вектором напряжения на площадке с нормалью  $\mathbf{N}$ . Согласно закону о действии и противодействии,  $\boldsymbol{\tau}_N$  меняет знак, если  $\mathbf{N}$  направить в противоположную сторону. (В некоторых книгах последнее утверждение доказывается через баланс импульса для бесконечно короткого цилиндра с основаниями  $NdO$  и  $-NdO$ .)

В каждой точке среды имеем бесконечно много векторов  $\boldsymbol{\tau}_N$ , поскольку через точку проходят площадки любой ориентации. Но оказывается, множество всех  $\boldsymbol{\tau}_N$  определяется одним тензором второго ранга — тензором напряжения. Рассмотрим содержащийся во многих книгах вывод этого утверждения.

На поверхности элементарного тетраэдра ...

...

## § 8. Balance of momentum and rotational momentum

Рассмотрим какой-либо конечный объём  $\mathcal{V}$  среды, ограниченный поверхностью  $O(\partial\mathcal{V})$ . Формулировка баланса импульса такова

$$\left( \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \overbrace{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}}^{\boldsymbol{\tau}_N} dO. \quad (8.1)$$

Импульс слева продифференцируем как в (2.2), а поверхностный интеграл справа превратим в объёмный по теореме о дивергенции. Получим

$$\int_{\mathcal{V}} \left( \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) \right) d\mathcal{V} = \mathbf{0}.$$

Но объём  $V$  произволен, поэтому равно нулю подинтегральное выражение. Приходим к уравнению баланса импульса в локальной (дифференциальной) форме

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}. \quad (8.2)$$

...

Переходим к балансу момента импульса. Интегральная формулировка:

$$\left( \int_V \mathbf{R} \times \rho \mathbf{v} dV \right)^{\cdot} = \int_V \mathbf{R} \times \rho \mathbf{f} dV + \oint_{O(\partial V)} \mathbf{R} \times (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) dO. \quad (8.3)$$

Дифференцируя левую часть ( $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}}$ )

$$\left( \int_V \mathbf{R} \times \rho \dot{\mathbf{R}} dV \right)^{\cdot} = \int_V \mathbf{R} \times \rho \ddot{\mathbf{R}} dV + \int_V \dot{\mathbf{R}} \times \rho \dot{\mathbf{R}} dV,$$

применяя теорему о дивергенции к поверхностному интегралу

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) &= -(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{R} = -\mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \oint_{O(\partial V)} \mathbf{R} \times (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) dO = - \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) dV \end{aligned}$$

...

## § 9. Eigenvalues of Cauchy stress tensor

Как и любой симметричный тензор,  $\boldsymbol{\tau}$  имеет три вещественных собственных числа  $\sigma_i$ , называемых главными напряжениями (principal stresses), а также ортогональную тройку собственных векторов единичной длины  $\mathbf{e}_i$ . В представлении  $\boldsymbol{\tau} = \sum \sigma_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$  можно считать  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , а тройку  $\mathbf{e}_i$  — “правой”.

Известна теорема о кругах Мора (Mohr's circles)\*

...

\* Mohr's circles, named after Christian Otto Mohr, is a two-dimensional graphical representation of transformation for the Cauchy stress tensor.

Чтобы замкнуть систему уравнений модели сплошной среды, нужно добавить определяющие отношения — уравнения состояния, связывающие напряжение с деформацией (и другие необходимые связи). Однако, для упругой среды такой длинный путь построения модели излишен, в чём читатель и убедится далее.

## § 10. Principle of virtual work

According to the principle of virtual work for some finite volume of continuum

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} + \delta W^{(i)}) d\mathcal{V} + \oint_{O(\partial \mathcal{V})} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (10.1)$$

Here  $\delta W^{(i)}$  is work of internal forces per volume unit in current configuration;  $\mathbf{f}$  is mass force, with dynamics  $(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}})$ ;  $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}$  is surface force.

Applying the divergence theorem to surface integral, using

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^T$$

and randomness of  $\mathcal{V}$ , we get the local differential edition of (10.1)

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{R} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^T + \delta W^{(i)} = 0. \quad (10.2)$$

When a body virtually moves as a rigid whole, the work of internal forces nullifies

$$\delta \mathbf{R} = \mathbf{const} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R}, \quad \delta \mathbf{o} = \mathbf{const} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (10.3)$$

Assuming  $\delta \mathbf{o} = \mathbf{0}$ ,  $\delta \mathbf{R} = \mathbf{const}$  (just translation)  $\Rightarrow \nabla \delta \mathbf{R} = \mathbf{0}$ , from (10.2) and (10.3) ensues balance of forces (of momentum)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

??? and ???  $\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^T = 0$  ???

If  $\delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R}$  (just rotation), then

$$\nabla \delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{o} \times \nabla \mathbf{R} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \delta \mathbf{o} = -(\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o})^T,$$

$$\nabla \delta \mathbf{R}^T = -\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o}$$

...

Упругой называется среда с потенциальными внутренними силами:  $\delta W^{(i)} = -\rho \delta \tilde{\Pi}$ .



...

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S = -\delta W^{(i)} = \rho \delta \tilde{\Pi} \quad (10.4)$$

...

Вид потенциала  $\tilde{\Pi}$  на единицу массы per mass unit пока неизвестен, но очевидно что  $\tilde{\Pi}$  определяется деформацией.

С помощью баланса массы  $\rho J = \overset{\circ}{\rho} \Leftrightarrow \rho = J^{-1} \overset{\circ}{\rho}$  ( $J \equiv \det \mathbf{F}$  — якобиан, определитель градиента движения) введём потенциал на единицу объёма в отсчётной конфигурации как

$$\Pi \equiv \overset{\circ}{\rho} \tilde{\Pi} \Rightarrow \delta \Pi = \overset{\circ}{\rho} \delta \tilde{\Pi}, \quad \rho \delta \tilde{\Pi} = J^{-1} \delta \Pi. \quad (10.5)$$

Полным аналогом (...) является равенство

...

$$\Pi(C) = \int_0^C \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{C}$$

If the strain energy density is path independent, then it acts as a potential for stress, that is

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi(C)}{\partial \mathbf{C}}$$

For adiabatic processes,  $\Pi$  is equal to the change in internal energy per unit volume.

For isothermal processes,  $\Pi$  is equal to the Helmholtz free energy per unit volume.

The natural configuration of a body is defined as the configuration in which the body is in stable thermal equilibrium with no external loads and zero stress and strain.

When we apply energy methods in elasticity, we implicitly assume that a body returns to its natural configuration after loads are removed. This implies that the Gibbs' condition is satisfied:

$$\Pi(C) \geq 0 \quad \text{with} \quad \Pi(C) = 0 \quad \text{iff} \quad C = 0$$

...

## § 11. Constitutive relations of elasticity

Fundamental relation of elasticity (??)

...

Начальная конфигурация считается естественной (natural configuration) — недеформированной ненапряжённой:  $\mathbf{C} = {}^2\mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}$ , поэтому в  $\Pi$  нет линейных членов.

Тензор жёсткости  ${}^4\mathbf{A}$

...

Rubber-like material (elastomer)

Материалу типа резины (эластомеру) характерны большие деформации, и функция  $\Pi(\text{I}, \text{II}, \text{III})$  для него бывает весьма сложной [34].

При больших деформациях исчезают преимущества использования  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{C}$  — проще остаться с радиусом-вектором  $\mathbf{R}$  ...

...

## § 12. Piola–Kirchhoff stress tensors and other measures of stress

Соотношение Нансона  $NdO = Jndo \cdot \mathbf{F}^{-1}$  между векторами бесконечно малой площадки в отсчётной ( $ndo$ ) и в актуальной ( $NdO$ ) конфигурациях\*

$$(6.2) \Rightarrow NdO \cdot \boldsymbol{\tau} = Jndo \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow N \cdot \boldsymbol{\tau} dO = n \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} do$$

даёт двойное выражение поверхностной силы

$$N \cdot \boldsymbol{\tau} dO = n \cdot \mathbf{T} do, \quad \mathbf{T} \equiv J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (12.1)$$

Тензор  $\mathbf{T}$  называется первым (несимметричным) тензором напряжения Пиолы–Кирхгофа, иногда — “номинальным напряжением” (“nominal stress”) или “инженерным напряжением” (“engineering stress”). Бывает и когда какое-либо из этих (на)именований даётся транспонированному тензору

$$\mathbf{T}^\top = J\boldsymbol{\tau}^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} = J\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}.$$

Обращение (12.1)

$$J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$$

...

$$\delta\Pi = \mathbf{T} \cdot \delta \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \Rightarrow \Pi = \Pi(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}) \quad (12.2)$$

— этот немного неожиданный результат получился благодаря коммутативности  $\delta$  и  $\overset{\circ}{\nabla}$  ( $\nabla$  и  $\delta$  не коммутируют).

Тензор  $\mathbf{T}$  оказался энергетически сопряжённым с  $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}$  (и  $\mathbf{F}$ )

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \Pi}{\partial \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{F}^\top}. \quad (12.3)$$

Второй (симметричный) тензор напряжения Пиолы–Кирхгофа  $\mathbf{S}$  энергетически сопряжён с  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$  и  $\mathbf{C} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$

$$\delta\Pi(\mathbf{C}) = \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{S} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}}, \quad (12.4)$$

$$d\mathbf{G} = 2d\mathbf{C} \Rightarrow \delta\Pi(\mathbf{G}) = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{G}, \quad \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{G}}.$$

Связь между первым и вторым тензорами

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \Leftrightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top$$

\* По-прежнему  $\mathbf{F}$  — градиент движения и  $J \equiv \det \mathbf{F}$  — якобиан.

и между тензором  $\mathbf{S}$  и тензором напряжения Коши  $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \Leftrightarrow J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} = \boldsymbol{\tau}.$$

...

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{\top} = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^{\top} \\ \delta \mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} \\ \delta \mathbf{T} &= \delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{F}^{\top}\end{aligned}$$

...

The quantity  $\boldsymbol{\kappa} = J\boldsymbol{\tau}$  is called the *Kirchhoff stress tensor* and is used widely in numerical algorithms in metal plasticity (where there's no change in volume during plastic deformation). Another name for it is *weighted Cauchy stress tensor*.

...

Here's balance of forces (of momentum) with tensor  $\mathbf{T}$  for any undeformed volume  $\overset{\circ}{V}$

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \rho \mathbf{f} dV + \int_{O(\partial \overset{\circ}{V})} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} dO = \int_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} d\overset{\circ}{V} + \int_{O(\partial \overset{\circ}{V})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} d\overset{\circ}{O} = \int_{\overset{\circ}{V}} \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) d\overset{\circ}{V} = \mathbf{0}$$

and its local (differential) variant

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (12.5)$$

Advantages of this equation in comparison with (8.2) are: here figures the known mass density  $\overset{\circ}{\rho}$  of undeformed volume  $\overset{\circ}{V}$ , and the operator  $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$  is defined through known vectors  $\mathbf{r}^i$ . Appearance of  $\mathbf{T}$  reflects specific property of an elastic solid body — “to preserve” the reference configuration. In fluid mechanics, for example, tensor  $\mathbf{T}$  is unlikely useful.

Principle of virtual work for an arbitrary volume  $\overset{\circ}{V}$  of elastic ( $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$ ) continuum:

$$\begin{aligned}\int_{\overset{\circ}{V}} \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} - \delta \Pi \right) d\overset{\circ}{V} + \int_{O(\partial \overset{\circ}{V})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R} d\overset{\circ}{O} &= 0, \\ \overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R}) &= \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R} + \mathbf{T}^{\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}, \quad \mathbf{T}^{\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}^{\top} \\ \delta \Pi &= \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) \cdot \delta \mathbf{R} + \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}^{\top}\end{aligned}$$

....

First one is non-symmetric, it connects forces in deformed stressed configuration to underformed geometry+mass (initially known volumes, areas, densities), and it is energetically conjugate to the motion gradient (commonly mistakenly called “deformation gradient”, despite comprising of rigid rotations). First (sometimes its transpose) is also known as “nominal stress” and “engineering stress”.

Second one is symmetric, it connects loads in initial undeformed configuration to initial mass+geometry, and it’s conjugate to the right Cauchy–Green deformation tensor (and thus to the Cauchy–Green–Venant measure of deformation).

The first is simpler when you use just motion gradient and is more universal, but the second is simpler when you prefer right Cauchy–Green deformation and its offsprings.

There’s also popular Cauchy stress, which relates forces in deformed configuration to deformed geometry+mass.

“energetically conjugate” means that their product is energy, here: elastic (potential) energy per unit of volume

...

In the case of finite deformations, the Piola–Kirchhoff stress tensors express the stress relative to the reference configuration. This is in contrast to the Cauchy stress tensor which expresses the stress relative to the present configuration. For infinitesimal deformations and rotations, the Cauchy and Piola–Kirchhoff tensors are identical.

Whereas the Cauchy stress tensor  $\boldsymbol{\tau}$  relates stresses in the current configuration, the motion gradient and strain tensors are described by relating the motion to the reference configuration; thus not all tensors describing the material are in either the reference or current configuration. Describing the stress, strain and deformation either in the reference or current configuration would make it easier to define constitutive models. For example, the Cauchy stress tensor is variant to a pure rotation, while the deformation strain tensor is invariant; thus creating problems in defining a constitutive model that relates a varying tensor, in terms of an invariant one during pure rotation; as by definition constitutive models have to be invariant to pure rotations.

### 1st Piola–Kirchhoff stress tensor

The *1st Piola–Kirchhoff stress tensor* is one possible solution to this problem. It defines a family of tensors, which describe the configuration of the body in either the current or the reference configuration.

The 1st Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{T}$  relates forces in the present (“spatial”) configuration with areas in the reference (“material”) configuration

$$\mathbf{T} = J \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

where  $\mathbf{F}$  is the motion gradient and  $J \equiv \det \mathbf{F}$  is the Jacobian determinant.

In terms of components in an orthonormal basis, the first Piola–Kirchhoff stress is given by

$$T_{iL} = J \tau_{ik} F_{Lk}^{-1} = J \tau_{ik} \frac{\partial X_L}{\partial x_k}$$

Because it relates different coordinate systems, the 1st Piola–Kirchhoff stress is a two-point tensor. In general, it is not symmetric. The 1st Piola–Kirchhoff stress is the 3D generalization of the 1D concept of engineering stress.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 1st Piola–Kirchhoff stress tensor will vary with material orientation.

The 1st Piola–Kirchhoff stress is energy conjugate to the motion gradient.

### 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor

Whereas the 1st Piola–Kirchhoff stress relates forces in the current configuration to areas in the reference configuration, the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{S}$  relates forces in the reference configuration to areas in the reference configuration. The force in the reference configuration is obtained via a mapping that preserves the relative relationship between the force direction and the area normal in the reference configuration.

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

In index notation using an orthonormal basis,

$$S_{IL} = J F_{Ik}^{-1} F_{Lm}^{-\top} \tau_{km} = J \frac{\partial X_I}{\partial x_k} \frac{\partial X_L}{\partial x_m} \tau_{km}$$

This tensor, a one-point tensor, is symmetric.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor remain constant, irrespective of material orientation.

The 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor is energy conjugate to the Green–Lagrange finite strain tensor.

...

### § 13. Variation of present configuration

Прежде упругая среда рассматривалась в двух конфигурациях: отсчётной с радиусами-векторами  $\mathbf{r}$  и актуальной с  $\mathbf{R}$ . Теперь представим себе малое изменение текущей конфигурации с бесконечно малыми приращениями радиуса-вектора  $\delta\mathbf{R}$ , вектора массовых сил  $\delta\mathbf{f}$ , первого тензора напряжения Пиолы–Кирхгофа  $\delta\mathbf{T}$  и тензора деформации  $\delta\mathbf{C}$ . Варьируя (12.5),  $(\dots)^*$  и  $(\dots)$ , получаем

$$\begin{aligned}\dot{\rho}\delta\mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \delta\mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad \delta\mathbf{T} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta\mathbf{C} \right) \cdot \mathbf{F}^\top + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta\mathbf{F}^\top, \\ \delta\mathbf{F}^\top &= \delta\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \overset{\circ}{\nabla}\delta\mathbf{R} = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla\delta\mathbf{R}, \quad \delta\mathbf{F} = \delta\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top = \nabla\delta\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{F}, \\ \delta\mathbf{C} &= \mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla\delta\mathbf{R}^S.\end{aligned}\tag{13.1}$$

...

Введённый здесь тензор  $\Theta$  [53] связан с  $\delta\mathbf{T}$  так же, как  $\boldsymbol{\tau}$  с  $\mathbf{T}$  ( $\boldsymbol{\tau} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ ). Учитывая(??синоним??) ...

...

### § 14. Internal constraints

До сих пор деформация считалась свободной, мера деформации  $\mathbf{C}$  могла быть любой. Однако, существуют материалы со значительным сопротивлением некоторым видам деформации. Резина, например, изменению формы сопротивляется намного меньше, чем изменению объёма — некоторые виды резины можно считать несжимаемым материалом.

Понятие геометрической связи, развитое в общей механике ...

...

$$\begin{aligned}^* \nabla &= \nabla \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} = R^i \partial_i \cdot r^j \partial_j \mathbf{r} = R^i \partial_i \mathbf{r} \cdot r^j \partial_j = \nabla \mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \\ \overset{\circ}{\nabla} &= \overset{\circ}{\nabla} \cdot \nabla \mathbf{R} = r^i \partial_i \cdot R^j \partial_j \mathbf{R} = r^i \partial_i \mathbf{R} \cdot R^j \partial_j = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} \cdot \nabla = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla\end{aligned}$$



## § 15. Hollow sphere under pressure

Решение этой относительно простой задачи описано во многих книгах. В отсчётной (ненапряжённой) конфигурации имеем сферу с внутренним радиусом  $r=r_0$  и наружным  $r=r_1$ . Давление равно  $p_0$  внутри и  $p_1$  снаружи.

Введём соответствующую задаче сферическую систему координат в отсчётной конфигурации  $q^1 = \theta$ ,  $q^2 = \phi$ ,  $q^3 = r$  (рис. ??). Эти же координаты будут и материальными. Имеем

...

## § 16. Stresses as Lagrange multipliers

Изложенному в § 10 применению принципа виртуальной работы предшествовало введение тензора напряжения Коши через баланс сил для элементарного тетраэдра (§ 7). Но здесь мы увидим, что принцип даёт обойтись и без рассуждений с тетраэдром.

Рассмотрим тело — не только лишь упругое, с любой виртуальной работой внутренних сил  $\delta W^{(i)}$  на единицу массы, — нагруженное массовыми  $\mathbf{f}$  (для краткости пишем  $\mathbf{f}$  вместо  $\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{R}}$ , так что динамика присутствует) и поверхностными  $\mathbf{p}$  внешними силами. Имеем вариационное уравнение

$$\int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} + \delta W^{(i)}) dV + \int_{O(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (16.1)$$

Полагаем, что внутренние силы не совершают работу при виртуальном движении тела как целого — когда нет деформации от бесконечно малых виртуальных перемещений  $\delta \mathbf{R}$  частиц тела:

$$\nabla \delta \mathbf{R}^S = {}^2\mathbf{0} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (16.2)$$

Отбросив  $\delta W^{(i)}$  в (16.1) при условии (16.2), получим вариационное уравнение со связью. Приём с множителями Лагранжа даёт возможность считать вариации  $\delta \mathbf{R}$  независимыми. Поскольку в каждой точке связь представлена симметричным тензором второй сложности, то таким же тензором будут и множители Лагранжа  ${}^2\lambda$ . Приходим к уравнению

$$\int_V (\rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} - {}^2\lambda \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S) dV + \int_{O(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (16.3)$$

Благодаря симметрии  ${}^2\lambda$  имеем\*

$${}^2\lambda \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S = \nabla \cdot ({}^2\lambda \cdot \delta \mathbf{R}) - \nabla \cdot {}^2\lambda \cdot \delta \mathbf{R}.$$

Подставив это в (16.3) и применив теорему о дивергенции, получаем

$$\int_V (\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot {}^2\lambda) \cdot \delta \mathbf{R} dV + \int_{O(\partial V)} (\mathbf{p} - N \cdot {}^2\lambda) \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0.$$

\*  $\Lambda^S \cdot X = \Lambda^S \cdot X^\top = \Lambda^S \cdot X^S$ ,  $\nabla \cdot (B \cdot a) = (\nabla \cdot B) \cdot a + B^\top \cdot \nabla a$

But  $\delta \mathbf{R}$  is random on a surface and inside a volume, thus

$$\mathbf{p} = N \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

— formally introduced symmetric multiplier  ${}^2\boldsymbol{\lambda}$  happened to be the Cauchy stress tensor.

Подобное введение напряжений показано в книге [84]. Новых результатов тут нет, но интересна сама возможность одновременного вывода тех уравнений механики сплошной среды, которые традиционно считались независимыми. В следующих главах эта техника используется для построения новых континуальных моделей.

### Библиография

Глубина изложения нелинейной безмоментной упругости характерна для книг А. И. Лурье [53, 56]. Оригинальность как основных идей, так и стиля присуща книге С. Truesdell'a [99]. Много ценной информации можно найти у К. Ф. Черных [109]. Стоит отметить и книгу Л. М. Зубова [37]. Монография Ю. Н. Работнова [84], где напряжения представлены как множители Лагранжа, очень интересна и своеобразна. О применении нелинейной теории упругости в смежных областях рассказано в книге С. Teodosiu [91]. Повышенным математическим уровнем отличается монография Ph. Ciarlet [89].

## CLASSICAL LINEAR ELASTICITY

Geometrically linear model: displacements are small. Operators  $\overset{\circ}{\nabla}$  and  $\nabla$  are indistinguishable: “equations can be written in the reference configuration”.

### § 1. Complete set of equations

Equations of nonlinear elasticity, even in simplest cases, bring to mathematically complicated problems. Therefore the linear theory is applied everywhere. Its equations were concluded in the first half of the XIX<sup>th</sup> century by Cauchy, Navier, Lamé, Clapeyron, Poisson, Saint-Venant, George Green and other scientists.

The complete set (system) of equations of classical linear theory in direct invariant tensor notation is:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \boldsymbol{u}^S. \quad (1.1)$$

Here  $\boldsymbol{\tau}$  is stress tensor,  $\boldsymbol{f}$  is vector of volume forces,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  is linear deformation tensor,  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon})$  is elastic energy of deformation per volume unit,  ${}^4\mathcal{A}$  is stiffness tensor (tetravalent).

Equations (1.1) are correct, they can be obtained via variation from the nonlinear theory. Variation from arbitrary configuration is described in §3.13. The linear theory is result of variation from unstressed reference configuration. There

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}, \quad \delta \boldsymbol{C} = \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \delta \boldsymbol{R}^S, \quad \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\Theta} = \delta \boldsymbol{T} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \boldsymbol{C} \partial \boldsymbol{C}} \cdot \delta \boldsymbol{C}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Theta} + \rho \delta \boldsymbol{f} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

It remains to change  $\delta \boldsymbol{R}$  to  $\boldsymbol{u}$ ,  $\boldsymbol{\Theta}$  to  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\partial^2 \Pi / \partial \boldsymbol{C} \partial \boldsymbol{C}$  to  ${}^4\mathcal{A}$ , and  $\rho \delta \boldsymbol{f}$  to  $\boldsymbol{f}$ .

Если такой вывод кажется читателю слишком формальным и малонаглядным, возможно исходить из уравнений

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \\ \boldsymbol{\tau} &= J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^\top, \quad \mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^S + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Полагая перемещение  $\mathbf{u}$  малым, перейдём от (1.3) к (1.1).

Или вот как. Вместо  $\mathbf{u}$  взять  $\lambda \mathbf{u}$ , тут  $\lambda \rightarrow 0$  — формальный малый параметр. А неизвестные представить рядами по целым степеням  $\lambda$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}^{(0)} + \lambda \boldsymbol{\tau}^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^{(0)} + \lambda \mathbf{C}^{(1)} + \dots, \\ \nabla &= \overset{\circ}{\nabla} + \lambda \nabla^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \lambda \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \quad J = 1 + \lambda J^{(1)} + \dots\end{aligned}$$

Для первых (“нулевых”) членов этих разложений и получается (1.1). В книге [99] сие названо формальным приближением.

Невозможно сказать в общем случае, насколько мал должен быть параметр  $\lambda$  — ответ зависит от ситуации и определяется лишь тем, описывает линейная модель интересующий эффект или нет. Когда, например, интересна связь частоты свободных колебаний упругого тела с амплитудой, то нужна уже нелинейная модель.

Линейная задача ставится в начальном объёме  $\overset{\circ}{V}$ , ограниченном поверхностью  $o$  с вектором площади  $\mathbf{n} do$ .

Краевые (граничные) условия часто предполагаются такими: на части  $o_1$  поверхности известны перемещения (кинематическое краевое условие), а на другой части  $o_2$  — силы (статическое краевое условие)

$$\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{o_2} = \mathbf{p}. \quad (1.4)$$

Но встречаются и более сложные комбинации, если знаем одновременно некоторые компоненты как  $\mathbf{u}$ , так и  $\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ . Для примера, на плоской грани  $x = \text{const}$  при вдавливании штампа с гладкой поверхностью  $u_x = v(y, z)$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$  (функция  $v$  определяется формой штампа).

Начальные условия в динамических задачах, когда вместо  $\mathbf{f}$  имеем  $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ , ставятся как обычно в механике — на положения и на скорости: в условный момент времени  $t=0$  определены  $\mathbf{u}$  и  $\dot{\mathbf{u}}$ .

Как отмечалось в гл. 2, в основу механики может быть положен принцип виртуальной работы (d'Alembert–Lagrange principle). Этот принцип справедлив и в линейной теории (внутренние силы в упругой среде потенциальны:  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$ )

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} - \delta \Pi \right] dV + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} do = 0, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = 0, \quad (1.5)$$

поскольку

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \delta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \nabla \delta \mathbf{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u},$$

$$\int_{\mathcal{V}} \delta \Pi dV = \oint_{o(\partial \mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u} do - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u} dV$$

и левая часть (1.5) приобретает вид

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{o_2} (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{u} do,$$

что, конечно же, равно нулю. Отметим краевое условие  $\mathbf{u}|_{o_1} = 0$ : виртуальные перемещения согласованы с этой связью —  $\delta \mathbf{u}|_{o_1} = 0$ .

## § 2. Uniqueness of the solution of a dynamic problem

Как обычно в линейной математической физике [56, 97], теорема единственности доказывается от противного. Допустим, что есть два решения:  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t)$ . Составим разность  $\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  и докажем, что она равна нулю.

Но сперва убедимся в существовании интеграла энергии — выведем уравнение баланса механической энергии в линейной модели:

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{T} + \Pi) \cdot d\mathbf{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{u}} do, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = 0. \quad (2.1)$$

Слева имеем

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} (\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) \cdot = \frac{1}{2} \rho (\dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}},$$

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot}_{2 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathcal{A} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}}_{-(\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}})}.$$

Применяя теорему о дивергенции и используя уравнение баланса импульса  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0$  и краевое условие  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}$  на  $o_2$ , убеждаемся, что (2.1) удовлетворено.

Из (2.1) следует, что при отсутствии объёмных и поверхностных сил (и закреплении на  $o_1$ ) полная механическая энергия постоянна. Если в начальный момент тело находилось в ненапряжённом состоянии покоя, то

$$\int_V (\mathbf{T} + \Pi) dV = 0. \quad (2.2)$$

Кинетическая энергия положительна:  $\mathbf{T} > 0$  при  $\dot{\mathbf{u}} \neq 0$  и обращается в нуль лишь когда  $\dot{\mathbf{u}} = 0$  — это следует из самого её определения  $\mathbf{T} = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ . Потенциальная энергия, при малых деформациях с тензором  $\boldsymbol{\varepsilon}$  представляемая квадратичной формой  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ , тоже положительна:  $\Pi > 0$  при  $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$ . Таково априорное требование положительной определённости к тензору  ${}^4\mathbf{A}$ . Это одно из “дополнительных неравенств в теории упругости” [53, 99].

And since  $\mathbf{T}$  and  $\Pi$  are positive, from (2.2) ensues

$$\mathbf{T} = 0, \Pi = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = 0, \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \boldsymbol{\omega}^\circ \times \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{u}^\circ$  и  $\boldsymbol{\omega}^\circ$  — некоторые константы. При закреплении на  $o_1$   $\mathbf{u}|_{o_1} = 0 \Rightarrow \mathbf{u}^\circ = 0$  и  $\boldsymbol{\omega}^\circ = 0$ .

Теперь вспомним о двух решениях  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ . Их разность  $\mathbf{u}^*$  есть решение полностью однородной задачи (в краевых и в начальных условиях — нули, и в объёме  $\mathbf{f} = 0$ ). Поэтому  $\mathbf{u}^* = 0$  — единственность доказана.

Что же касается существования решения, то простыми выкладками его в общем случае не обосновать. Отметим лишь, что задача является эволюционной, то есть определяет развитие процесса во времени. Из баланса импульса находим ускорение  $\ddot{\mathbf{u}}$ , далее переходим на “следующий временной слой”  $t + dt$ :

...

Разумеется, эти соображения лишены математической стройности, характерной, например, для монографии Philippe Ciarlet [89].

$$\tau = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} = {}^4\mathcal{A} \cdot \varepsilon$$

### § 3. Hooke's ceiiinosssttuv law

То соотношение между напряжением и деформацией, которое Robert Hooke в XVII<sup>ом</sup> веке мог высказать лишь в весьма неопределённой форме\*, в современных обозначениях записано в (1.1) и определяется тензором

$${}^4\mathcal{A} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon} = A^{ijkl} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l, \quad A^{ijkl} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}. \quad (3.1)$$

Тензор жёсткости, как частная производная упругого потенциала  $\Pi$  дважды по тензору деформаций, симметричен по первой и второй паре индексов:  $A^{ijkl} = A^{klij}$ , от этого у 36 компонент из  $3^4 = 81$  “есть двойник”, и 45 независимы. К тому же, из-за симметрии тензора деформаций  $\varepsilon$ , тензор  ${}^4\mathcal{A}$  симметричен ещё и внутри каждой пары индексов:  $A^{ijkl} = A^{jikl} = A^{ijlk}$  ( $= A^{jilk}$ ). Число независимых компонент при этом снижается до 21:

$$\begin{aligned} A^{abcd} &= A^{cdab} = A^{bacd} = A^{abdc} \\ A^{1111} & \\ A^{1112} &= A^{1121} = A^{1211} = A^{2111} \\ A^{1113} &= A^{1131} = A^{1311} = A^{3111} \\ A^{1122} &= A^{2211} \\ A^{1123} &= A^{1132} = A^{2311} = A^{3211} \\ A^{1133} &= A^{3311} \\ A^{1212} &= A^{1221} = A^{2112} = A^{2121} \\ A^{1213} &= A^{1231} = A^{1312} = A^{1321} = A^{2113} = A^{2131} = A^{3112} = A^{3121} \\ A^{1222} &= A^{2122} = A^{2212} = A^{2221} \\ A^{1223} &= A^{1232} = A^{2123} = A^{2132} = A^{2312} = A^{2321} = A^{3212} = A^{3221} \\ A^{1233} &= A^{2133} = A^{3312} = A^{3321} \\ A^{1313} &= A^{1331} = A^{3113} = A^{3131} \\ A^{1322} &= A^{2213} = A^{2231} = A^{3122} \\ A^{1323} &= A^{1332} = A^{2313} = A^{2331} = A^{3123} = A^{3132} = A^{3213} = A^{3231} \\ A^{1333} &= A^{3133} = A^{3313} = A^{3331} \\ A^{2222} & \\ A^{2223} &= A^{2232} = A^{2322} = A^{3222} \\ A^{2233} &= A^{3322} \\ A^{2323} &= A^{2332} = A^{3223} = A^{3232} \\ A^{2333} &= A^{3233} = A^{3323} = A^{3332} \\ A^{3333} & \end{aligned}$$

\* ceiiinosssttuv, that is Ut tensio sic vis; ...



Нередко компоненты тензора жёсткости записывают симметричной матрицей  $6 \times 6$  вида

$$[\mathcal{A}]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_3 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_4 & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_5 & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_6 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A^{1111} & A^{1122} & A^{1133} & A^{1112} & A^{1113} & A^{1123} \\ A^{2211} & A^{2222} & A^{2233} & A^{1222} & A^{1322} & A^{2223} \\ A^{3311} & A^{3322} & A^{3333} & A^{1233} & A^{1333} & A^{2333} \\ A^{1211} & A^{2212} & A^{3312} & A^{1212} & A^{1213} & A^{1223} \\ A^{1311} & A^{2213} & A^{3313} & A^{1312} & A^{1313} & A^{1323} \\ A^{2311} & A^{2322} & A^{3323} & A^{2312} & A^{2313} & A^{2323} \end{bmatrix}$$

Даже в декартовых координатах  $x, y, z$  квадратичная форма упругой энергии  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$  довольно-таки громоздкая:

$$\begin{aligned} 2\Pi = & a_1 \varepsilon_x^2 + a_2 \varepsilon_y^2 + a_3 \varepsilon_z^2 + a_4 \varepsilon_{xy}^2 + a_5 \varepsilon_{xz}^2 + a_6 \varepsilon_{yz}^2 + \\ & + 2 \left[ \varepsilon_x (a_{12} \varepsilon_y + a_{13} \varepsilon_z + a_{14} \varepsilon_{xy} + a_{15} \varepsilon_{xz} + a_{16} \varepsilon_{yz}) + \right. \\ & + \varepsilon_y (a_{23} \varepsilon_z + a_{24} \varepsilon_{xy} + a_{25} \varepsilon_{xz} + a_{26} \varepsilon_{yz}) + \\ & + \varepsilon_z (a_{34} \varepsilon_{xy} + a_{35} \varepsilon_{xz} + a_{36} \varepsilon_{yz}) + \\ & \left. + \varepsilon_{xy} (a_{45} \varepsilon_{xz} + a_{46} \varepsilon_{yz}) + a_{56} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Когда добавляется материальная симметрия, число независимых компонент тензора  $\mathbf{A}$  ещё уменьшается.

Пусть материал имеет плоскость симметрии (упругих свойств)  $z = \text{const}$ . Тогда энергия  $\Pi$  не меняется при перемене знаков у  $\varepsilon_{zx}$  и  $\varepsilon_{zy}$ . А это возможно лишь если

$$\Pi \Big|_{\substack{\varepsilon_{xz} = -\varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{yz}}} = \Pi \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 = a_{15} = a_{16} = a_{25} = a_{26} = \\ = a_{35} = a_{36} = a_{45} = a_{46} \end{aligned} \quad (3.3)$$

— число независимых констант упало до 13.

Пусть далее плоскостей симметрии две:  $z = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ . Поскольку  $\Pi$  не чувствительна к знакам  $\varepsilon_{yx}$  и  $\varepsilon_{yz}$ , вдобавок к (3.3) имеем

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{56} = 0 \quad (3.4)$$

— осталось 9 констант.

Ортотропным (ортогонально анизотропным) называется материал с тремя ортогональными плоскостями симметрии — пусть это координатные плоскости  $x, y, z$ . Легко увидеть, что (3.3) и (3.4) — это весь набор нулевых констант и в этом случае. Итак, ортотропный материал характеризуется девятью константами, и “для ортотропности” достаточно двух перпендикулярных

плоскостей симметрии. Форма упругой энергии упрощается до

$$\Pi = \frac{1}{2}a_1\varepsilon_x^2 + \frac{1}{2}a_2\varepsilon_y^2 + \frac{1}{2}a_3\varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}a_4\varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{2}a_5\varepsilon_{xz}^2 + \frac{1}{2}a_6\varepsilon_{yz}^2 + \\ + a_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_x\varepsilon_z + a_{23}\varepsilon_y\varepsilon_z.$$

В ортотропном материале сдвиговые (угловые) деформации  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  никак не влияют на нормальные напряжения  $\sigma_x = \partial\Pi/\partial\varepsilon_x$ ,  $\sigma_y = \partial\Pi/\partial\varepsilon_y$ ,  $\sigma_z = \partial\Pi/\partial\varepsilon_z$  (и наоборот). Популярный ортотропный материал — древесина; её упругие свойства различны по трём взаимно перпендикулярным направлениям: по радиусу, вдоль окружности и по высоте ствола.

Ещё один случай анизотропии —

...

#### § 4. Theorems of statics

**Формула Клапейрона.** При равновесии с объёмными силами  $\mathbf{f}$  и поверхностными  $\mathbf{p}$  удвоенная энергия деформации равна формально вычисленной работе нагрузок

$$2 \int_V \Pi dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} do. \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \bigcirc \quad 2\Pi &= \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}}_{-\mathbf{f}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \int_V \Pi dV = \int_{o_2} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}}_{\mathbf{p}} do + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV \quad \bullet \end{aligned}$$

Из (4.1) следует, что без нагрузки  $\int_V \Pi dV = 0$ . Поскольку  $\Pi$  положительна, то  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — нули.

**Теорема единственности.** Как и в динамике (§2), допускаем существование двух решений и ищем их разность

...

## § 5. Equations for displacements

Полная система (1.1) содержит неизвестные  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\mathbf{u}$ . Исключая  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , приходим к постановке в перемещениях (симметризация  $\nabla \mathbf{u}$  тут излишня)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{f} &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{u}|_{o_1} &= \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{n} \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{u}|_{o_2} = \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В изотропном теле (5.1) принимает вид

...

## § 6. Concentrated force in a limitless medium

Concentrated force is useful mathematical idealization, but cannot be found in the real world, where all forces are either body forces acting over a volume or surface forces acting over an area.

Начнём с риторического вопроса: почему упругое тело сопротивляется приложенной нагрузке, выдерживает её? Удачный ответ можно найти ...

...

## § 7. Determining displacements from deformations

Разложив градиент перемещения на симметричную и антисимметричную части

$$\nabla \mathbf{u} = \overbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\nabla \mathbf{u}^S} - \overbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}}^{-\nabla \mathbf{u}^A}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}, \quad (7.1)$$

...

Saint-Venant's compatibility condition is the integrability conditions for a symmetric tensor field to be a strain.

The compatibility conditions in linear elasticity are obtained by observing that there are six strain–displacement relations that are functions of only three unknown displacements. This suggests that the three displacements may be removed from the system of equations without loss of information. The resulting expressions in terms of only the strains provide constraints on the possible forms of a strain field.

A body that deforms without developing any gaps/overlaps is called a compatible body. Compatibility conditions are mathematical conditions that determine whether a particular deformation will leave a body in a compatible state.

...

Все уравнения линейной теории должны иметь аналог (первоисточник) в нелинейной. Чтобы найти его для (??), вспомним тензор деформации Коши–Грина (§ 3.4) и тензоры кривизны (§ 1.15)

...

## § 8. Equations for stresses

Баланс сил

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

ещё не определяет напряжений. Они должны быть такими, чтобы соответствующие им деформации оказались совместны:

...

## § 9. Principle of minimum potential energy

Начнём с формулировки принципа:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) \equiv \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} do \rightarrow \min, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0. \quad (9.1)$$

Этот функционал, называемый потенциальной энергией системы, принимает наименьшее значение на истинных перемещениях — то есть на решении задачи (5.1). При этом функции  $\mathbf{u}$  должны удовлетворять геометрическому условию на  $o_1$  (чтобы не нарушать связи) и быть непрерывными (иначе  $\Pi(\nabla \mathbf{u})$  не будет интегрируемой).

Для обоснования принципа возьмём какое-либо ещё приемлемое поле перемещений  $\mathbf{u}'$  и найдём разность  $\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) =$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}') - \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) do.$$

Поскольку  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{o_2} = \mathbf{p}$  и  $(\mathbf{u}' - \mathbf{u})|_{o_1} = \mathbf{0}$ , то

$$\begin{aligned} \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathbf{o} &= \oint_{o(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathbf{o} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u})) d\mathcal{V} = \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\tau}^\top \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V} \end{aligned}$$

и  $\mathfrak{A}(\mathbf{u}') - \mathfrak{A}(\mathbf{u}) =$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}') - \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f})}_0 \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V} - \\ &\quad - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u}' - \nabla \mathbf{u}) d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

Тут  $\Pi(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^S$ ,  $\Pi(\nabla \mathbf{u}') = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}'^S$ , а благодаря симметрии  $\boldsymbol{\tau}^\top = \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{a} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{a}^S \forall \mathbf{a}$ . Поэтому

...

## § 10. Principle of minimum complementary energy

Дополнительной энергией называется следующий функционал над полем напряжений:

...

...

Принцип минимума дополнительной работы очень полезен, например, для получения некоторых оценок приближённых решений. Но для вычислительной практики его роль не столь весома, как принципа Лагранжа.

## § 11. Mixed principles of stationarity

### Prange–Hellinger–Reissner Variational Principle,

named after *Ernst Hellinger*, *Georg Prange* and *Eric Reissner*.

Working independently of Hellinger and Prange, Eric Reissner published his famous six-page paper “On a variational theorem in elasticity” in 1950. In this paper he develops — without, however, considering

Hamilton–Jacobi theory — a variational principle same to that of Prange and Hellinger.

### **Hu–Washizu Variational Principle,**

named after *Hu Haichang* and *Kyuichiro Washizu*.

Именами Reissner’a, Prange’a и Hellinger’a назван такой функционал над перемещениями и напряжениями:

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\mathcal{V}} \left[ \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^S - \widehat{\Pi}(\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] d\mathcal{V} - \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) d\sigma - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma. \quad (11.1)$$

...

Преимущество принципа Рейсснера–Хеллингера — в свободе варьирования. Но имеется и некий изъян: у функционала нет экстремума на истинном решении, а лишь стационарность.

Принцип можно использовать для построения приближённых решений методом Ритца (Ritz method). Задавая аппроксимации

...

Вариационный принцип Ху–Васидзу [17] формулируется так:

$$\delta \mathcal{W}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\tau}) = 0, \\ \mathcal{W} \equiv \int_{\mathcal{V}} \left[ \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u}^S - \boldsymbol{\varepsilon}) + \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] d\mathcal{V} - \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) d\sigma - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma. \quad (11.2)$$

Как и в принципе Рейсснера–Хеллингера, здесь нет ограничений ни в объёме, ни на поверхности, но добавляется третий независимый аргумент  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Поскольку  $\widehat{\Pi} = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \Pi$ , то (11.1) и (11.2) кажутся почти одним и тем же.

Из принципа Ху–Васидзу вытекает вся полная система уравнений с граничными условиями, так как

...

Об истории открытия вариационных принципов и соотношении их написано, например, у Ю. Н. Работнова [84].

## § 12. Antiplane shear

Это тот раздел линейной теории упругости, где нетривиальные результаты получаются простыми математическими средствами. Нетривиальным в теории упругости я считаю, например, что “деление силы на площадь” может дать сколь угодно большúю погрешность при определении напряжений.

Рассматривается изотропная среда в декартовой системе ...

...

## § 13. Twisting of rods

Эта задача, тщательно изученная Сен-Венаном, рассматривается едва ли не во всех книгах по классической теории упругости. Речь идёт о цилиндре какого-либо сечения, нагруженном лишь поверхностными силами на торцах

...

## § 14. Plane deformation

Этот термин означает лишь то, что вектор  $\mathbf{u}$  параллелен плоскости  $x_1, x_2$  и не зависит от  $z$

...

## Библиография

Можно назвать несколько десятков книг по классической теории упругости, представляющих несомненный интерес несмотря на возрастающую отдалённость во времени. Подробные литературные указания содержатся в фундаментальной монографии ...

# MICROPOLAR THREE-DIMENSIONAL CONTINUUM

## § 1. Introduction to linear micropolar theory

Характерной отличительной особенностью классических сред (гл. 3 и 4) является то, что они “состоят из обычных материальных точек”. Частица классического континуума имеет лишь трансляционные степени свободы, её движение определяется только вектором  $\mathbf{R}(q^i, t)$ . Поэтому нагрузки (“силовые факторы”) в такой среде — только силы, объёмные и поверхностные. Моментов нет.

Но не так уж трудно построить более сложные модели сплошной среды, в которых частицы обладают не только лишь степенями свободы трансляции, но и некоторыми дополнительными. Новые степени свободы связаны и с новыми силовыми факторами, а также новыми уравнениями.

Наиболее естественная из неклассических моделей трёхмерной среды предложена братьями Cosserat в 1909 году [43]. Каждая частица континуума Коссера — это элементарное твёрдое тело с шестью степенями свободы. Силовые факторы в такой среде — силы и моменты. Работа братьев Коссера оставалась незамеченной полвека, но затем возник интерес к этой теме [62, 72].

from **Nowacki W.** *The Linear Theory of Micropolar Elasticity*. In: *Micropolar Elasticity. International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures)*, vol. 151, 1974, pp. 1–43

Woldemar Voigt tried to remove the shortcomings of the classical theory of elasticity [**W. Voigt**. *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Abhandlungen der Königlichen*



*Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 34: 3–51, 1887] by the assumption that the interaction of two parts of the body is transmitted through an area element  $do$  by means not only of the force vector  $\mathbf{p}do$  but also by the moment vector  $\mathbf{m}do$ . Thus, besides the force stresses  $\sigma_{ji}$  also the moment stresses have been defined.

However, the complete theory of asymmetric elasticity was developed by the brothers **François et Eugène Cosserat** who published it in 1909 in the work “*Théorie des corps déformables*”.

They assumed that the body consists of interconnected particles in the form of small rigid bodies. During the deformation each particle is displaced by  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  and rotated by  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ , the functions of the position  $\mathbf{x}$  and time  $t$ .

Thus an elastic continuum has been described such that its points possess the orientation (polar media) and for which we can speak of the rotation of a point. The vectors  $\mathbf{u}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  are mutually independent and determine the deformation of the body. The introduction of the vectors  $\mathbf{u}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  and the assumption that the transmission of forces through an area element  $do$  is carried out by means of the force vector  $\mathbf{p}$  and the moment vector  $\mathbf{m}$  leads in the consequence to asymmetric stress tensors  $\sigma_{ji}$  and  $\mu_{ji}$ .

The theory of the brothers E. and F. Cosserat remained unnoticed and was not duly appreciated during their lifetime. This was so because the presentation was very general (the theory was non-linear, including large deformations) and because its frames exceeded the frames of the theory of elasticity. They attempted to construct the unified field theory, containing mechanics, optics and electrodynamics and combined by a general principle of the least action.

The research in the field of the general theories of continuous media conducted in the last fifteen years, drew the attention of the scientists to Cosserats’ work. Looking for the new models, describing more precisely the behaviour of the real elastic media, the models similar to, or identical with that of Cosserats’ have been encountered. Here, we mention, first of all, the papers by C. Truesdell and R. A. Toupin [**C. Truesdell and R. A. Toupin**. *The classical field theories. Encyclopædia of Physics, Chapter 1, Springer-Verlag, Berlin, 1960*], G. Grioli [**Grioli G.** *Elasticité asymétrique. Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser. IV, 50 (1960)*], R. D. Mindlin and H. F. Tiersten [**Mindlin, R. D.; Tiersten, H. F.** *Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 11. 1962. 415–448*]. At the beginning the author’s attention was

concentrated on the simplified theory of elasticity, so called the Cosserat pseudo-continuum. By this name we understand a continuum for which the asymmetric force stresses and moment stresses occur, however, the deformation is determined by the displacement vector  $\mathbf{u}$  only. Here we assume, as in the classical theory of elasticity, that  $\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{u}$ . It is interesting to notice that this model was also considered by the Cosserats who called it the model with the latent trihedron.

Рассмотрим сначала геометрически линейную модель, то есть случай малых перемещений и поворотов. Векторные поля перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и малых поворотов  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, t)$  независимы. Операторы  $\overset{\circ}{\nabla}$  и  $\nabla$  (§ 3.2) неразличимы, уравнения “можно писать в отсчётной конфигурации”.

В основу построения модели положим принцип виртуальной работы:

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} + \delta W^{(i)}) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}} (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) d\mathcal{O} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{m}$  — внешние силы и моменты на единицу объёма;  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{M}$  — они же, но на единицу поверхности;  $\delta W^{(i)}$  — работа внутренних сил на единицу объёма.

По-прежнему полагаем, что  $\delta W^{(i)} = 0$  при движении тела как целого без деформации:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} + \text{const}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \text{const} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0, \\ \nabla \delta \mathbf{u} &= \delta \boldsymbol{\varphi} \times \nabla \mathbf{r} + {}^2\mathbf{0} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \delta \boldsymbol{\varphi}, \quad \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} = {}^2\mathbf{0}. \end{aligned}$$

Вводя тензоры деформации — тензор относительного смещения между частицами (tensor of relative displacement between particles, stretch tensor)  $\boldsymbol{\gamma}$  и тензор искривления-скручивания (curvature-twist tensor, wryness tensor)  $\boldsymbol{\alpha}$  — как

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &\equiv \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\alpha} \equiv \nabla \boldsymbol{\varphi}, \\ \boldsymbol{\gamma} &\equiv \nabla \mathbf{u}^\top + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\alpha} \equiv \nabla \boldsymbol{\varphi}^\top, \\ \delta \boldsymbol{\gamma} &= \nabla \delta \mathbf{u} - \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \delta \boldsymbol{\alpha} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}, \\ \delta \boldsymbol{\gamma}^\top &= \nabla \delta \mathbf{u}^\top + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \delta \boldsymbol{\alpha}^\top = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}^\top, \\ \boldsymbol{\gamma}_\times &= \nabla \times \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\alpha}_\times = \nabla \times \boldsymbol{\varphi}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

имеем нужное отсутствие деформаций  $\delta \boldsymbol{\gamma} = {}^2\mathbf{0}$  и  $\delta \boldsymbol{\alpha} = {}^2\mathbf{0}$ .

В §3.16 было показано, что напряжения можно рассматривать как множители Lagrange'a в принципе виртуальной работы при  $\delta W^{(i)} = 0$ . Поступим так же и теперь:

$$\int_V \left( \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^\top - \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}^\top \right) dV + \int_O \left( \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dO = 0. \quad (1.3)$$

Множители Лагранжа в каждой точке — это несимметричные тензоры второй сложности  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\mu}$ .

Используя

...

и теорему о дивергенции, приведём (1.3) к виду

$$\int_V \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dV + \int_O \left( (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dO = 0.$$

Из произвольности вариаций  $\delta \mathbf{u}$  и  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  в объёме и на поверхности вытекают уравнения баланса сил и моментов, а также формулы типа Коши, раскрывающие смысл  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\mu}$ :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}. \quad (1.5)$$

Тензор силовых напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  удовлетворяет тем же дифференциальным “уравнениям равновесия”<sup>\*</sup> и краевым условиям, что и в безмоментной среде. Но тензор  $\boldsymbol{\tau}$  несимметричен, поскольку отличны от нуля моментные напряжения  $\boldsymbol{\mu}$  и нагрузки  $\mathbf{m}$ .

Смысл компонент тензора  $\boldsymbol{\mu}$  раскрывается так же, как и для  $\boldsymbol{\tau}$ . На площадке с нормалью

...

\* Кавычки здесь оттого, что *уравнения равновесия* это вообще всё, что вытекает из принципа виртуальной работы в статике.

## § 2. Relations of elasticity

В этой книге упругой называем среду с потенциальными внутренними силами:  $\delta W^{(i)} = -\delta\Pi$ , где  $\Pi$  — энергия деформации на единицу объёма (по-прежнему рассматриваем геометрически линейную постановку).

Располагая соотношениями

...

..., разлагая тензоры деформаций и напряжений на симметричные и антисимметричные части

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}_\times \times \boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\gamma}^S = \nabla \boldsymbol{u}^S, \quad \boldsymbol{\gamma}_\times = \nabla \times \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{\varphi};$$

$$\delta\Pi = \dots$$

(2.1)

...

Если формально устремить  $h$  к нулю, то исчезает вклад  $\boldsymbol{\alpha}$  в  $\Pi$ , а с ним и моментные напряжения. При отсутствии моментной нагрузки  $\boldsymbol{m}$  тензор  $\boldsymbol{\tau}$  становится симметричным, и мы приходим к классической модели. Использование неклассической моментной модели естественно в тех случаях, когда в реальном материале есть некий минимальный объём, ...

...

## § 3. Compatibility equations

Из выражений тензоров деформации (1.2) следует

...

## § 4. Theorems of statics

Теоремы статики линейных консервативных систем, легко выводимые при конечном числе степеней свободы

...

## § 5. Cosserat pseudo-continuum

Так называется упрощённая моментная модель\*, в которой повороты выражаются через перемещения как в классической среде [72]:

$$\varphi = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma}_\times = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S. \quad (5.1)$$

Равенство  $\boldsymbol{\gamma}_\times = \mathbf{0}$  (симметрию  $\boldsymbol{\gamma}$ ) возможно понимать как внутреннюю связь (§ 3.14). Аргумент  $\boldsymbol{\gamma}_\times$  исчезает из энергии  $\Pi$ , соотношение упругости для  $\boldsymbol{\tau}_\times$  не может быть написано. Его место в полной системе занимает уравнение связи.

В классической теории упругости полная система сводится к одному уравнению для вектора  $\mathbf{u}$  (§ 4.5). В моментной теории

...

## § 6. Plane deformation

Все переменные в этой постановке не зависят от декартовой координаты  $z \equiv x_3$  (орт оси —  $\mathbf{k}$ ). Перемещения и силы перпендикулярны оси  $z$ , а повороты и моменты — параллельны ей:

...

## § 7. Nonlinear theory

Кажущееся на первый взгляд чрезвычайно трудным, построение теории конечных деформаций континуума Коссера становится прозрачным, если опираться на общую механику, тензорное исчисление и нелинейную теорию классической безмоментной среды.

Как и в гл. 3, рассматривается среда из частиц с материальными координатами

...

\* Братья Cosserat называли это *cas de trièdre caché* (случай скрытого трёхгранника, *case of latent trihedron*).

## § 8. Nonlinear model with constrained rotation

Вспомним переход к модели со стеснённым вращением в линейной теории (§ 5). Разделились соотношения упругости для симметричной части тензора силовых напряжений

...

### Bibliography

Все работы по моментной теории упругости содержат ссылки на книгу братьев Eugène et François Cosserat [43], где трёхмерной среде посвящена одна глава из шести. Переведённая монография W. Nowacki [72] была одной из первых книг на русском языке с изложением линейной моментной теории. Ранее эта область представлялась статьями — например, R. D. Mindlin’a и H. F. Tiersten’a [62]. Краткое изложение моментной теории, но с подробным рассмотрением задач содержится в книгах Н. Ф. Морозова [65, 66].

## *Chapter 6*

# THERMOELASTICITY

### § 1. First law of thermodynamics

The first law of thermodynamics is a version of the law of conservation of energy, adapted for thermodynamic systems. The law of conservation of energy states that the total energy of an isolated system is constant; energy can be transformed from one form to another, but can be neither created nor destroyed.

До сих пор мы ограничивались рамками механики и не рассматривали тепловые эффекты. Общеизвестно, однако, что изменение температуры вызывает деформацию тел. Температурные деформации и обусловленные ими напряжения часто играют первостепенную роль и могут приводить к разрушению конструкций.

Принцип виртуальной работы, столь эффективный в механике, не имеет места в термомеханике (хотя ниже мы увидим аналог этого принципа). Вводя в рассмотрение температуру, можно опираться на два закона термодинамики.

Первый закон, открытый ...

...

Тепло поступает в объём двумя путями. Первый — теплопроводность, определяемая вектором потока тепла  $\mathbf{h}$ . Предполагается, что через площадь

...

### § 2. Second law

В общих курсах физики распространено следующее представление о законах термодинамики: приращение энергии  $dE$  равно сум-

ме работы внешних сил  $dA$  и подведённого тепла  $dQ$ , величина  $dQ$  не является полным дифференциалом, но отношение  $dQ/T$  становится таковым — дифференциалом энтропии  $dS$ . Далее тепловые процессы делятся на ...

...

### § 3. Constitutive equations

К законам баланса импульса, момента импульса и термодинамики необходимо добавить ...

...

### § 4. Heat equation

The heat equation is a parabolic partial differential equation that describes the distribution of heat (or variation in temperature) in a given region over time.

В курсах математической физики [97] рассматривается уравнение теплопроводности

...

### § 5. Linear thermoelasticity

Квадратичная аппроксимация свободной энергии наиболее естественна в линейной теории

...

### § 6. Уравнения в перемещениях

Полагая поле температуры известным

...



## § 7. Температурные напряжения

Эти напряжения сто́ит рассмотреть детально, хотя они и определяются очевидным образом полями перемещений и температуры. При равновесии свободного тела без внешних нагрузок имеем

...

## § 8. Вариационные постановки

Поскольку при данной?? (постоянной??) (конкретной??) температуре уравнения термоупругости выглядят как в механике

...

## Библиография

В формировании новых взглядов на термодинамику сплошной среды велика роль С. Truesdell'a [99]. Чёткое изложение основных законов

...

## *Chapter 7*

# MAGNETOELASTICITY

### § 1. Electromagnetic field

**П**роблемы, решаемые с использованием моделей упругих сред, обычно уже содержат известные внешние нагрузки. Если в упругом теле протекают электрические токи, то нагрузка создаётся магнитным полем. При деформации тела магнитное поле меняется; при большой чувствительности поля к деформации становится необходимым совместное решение задач упругости и магнетизма.

Вспомним положения теории электромагнетизма. В трёхмерном пространстве имеем два векторных поля: электрическое  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и магнитное  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Смысл этих векторов ясен из выражения силы, действующей на точечный заряд  $q$ :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.1)$$

Острый вопрос о том, в какой системе отсчёта определяется скорость заряда  $\mathbf{v}$ , ведёт к специальной теории относительности

...

### § 2. Электростатика

Рассмотрение этого вопроса полезно для последующего описания магнетизма. В статике имеем

...

### § 3. Диэлектрики

Начнём с рассмотрения электростатического поля

...

## § 4. Магнитостатика

Если поле (а с ним ...)

...

## § 5. Магнетики

Выяснив законы магнитостатики в общем случае, обратимся к веществу — некий опыт у нас уже есть в электростатике диэлектриков.

Начнём с рассмотрения

...

...

Насколько соответствует поведение реальных материалов представленным здесь формальным построениям — этот вопрос вне рамок нашего изложения.

## § 6. Магнитная жёсткость

В электротехнике распространены обмотки всевозможной формы, в которых провод намотан так, что образуется некое массивное тело. Такие обмотки есть в статоре генератора автомобиля (да и в роторе), в больших промышленных электромагнитах и в магнитных системах установок “токама́к” (**т**ороидальная **к**амера с **м**агнитными **к**атушками) для управляемого термоядерного синтеза — примеров много. Сочетание токопровода и изоляции образует периодический композит, и одной из главных нагрузок для него является пондеромоторная магнитная сила. Рассчитывая деформации и механические напряжения в обмотке, начинают с определения магнитных сил. Поскольку распределение токов задано известной геометрией проводов, достаточно интегрирования по формуле Био-Савара (??). Термин “магнитоупругость”

при этом неуместен, так как задачи магнитостатики и упругости решаются раздельно.

Однако при деформации обмотки меняются и поле  $\mathbf{j}$ , и вызываемое им поле  $\mathbf{B}$ . Объёмная сила становится равной

$$\mathbf{f} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_0 + \dots \quad (6.1)$$

Подчёркнутое слагаемое соответствует недеформированному состоянию. Обусловленное деформацией изменение объёмной силы линейно связано с малым перемещением  $\mathbf{u}$ , поэтому матричное (после дискретизации) уравнение в перемещениях можно представить в виде

$$(C + C_m) u = F_0. \quad (6.2)$$

К обычному оператору линейной упругости  $C$  добавилась магнитная жёсткость  $C_m$ ;  $F_0$  — силы в недеформированном состоянии.

Добавка  $C_m$  пропорциональна квадрату тока и может стать весьма существенной в магнитных системах с сильным полем. Учёт её необходим и при недостаточной величине  $C$ ; в номинальном режиме конструкция может держать нагрузку, но дополнительная нагрузка неблагоприятного направления может оказаться “невыносимой”.

Но особенно важна роль магнитной жёсткости в задачах устойчивости. Поскольку магнитные силы потенциальны, матрица  $C_m$  симметрична, и критические параметры могут быть найдены статическим методом Эйлера.

Как иллюстрацию рассмотрим простую задачу о балке в продольном магнитном поле. Балка располагается на декартовой оси  $z$ , концы  $z=0$  и  $z=l$  закреплены, магнитная индукция  $\mathbf{B} = B\mathbf{k} = \text{const}$ , по балке течёт постоянный (по величине) ток  $I$ . В классической модели балки при равных жёсткостях на изгиб для прогиба  $\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j}$  легко получить следующую постановку:

...

Вводя комплексную комбинацию  $u \equiv u_x + iu_y$ , будем иметь

...

с общим решением

...

Подстановка в граничные условия приводит к однородной системе для постоянных  $A_k$ ; приравняв нулю определитель, придём к характеристическому уравнению

...

Наименьший положительный корень  $x_1 = 3.666$ , так что критическая комбинация параметров такова:

$$(IBl^3/a)_* = 394.2.$$

В этом решении поле  $\mathbf{B}$  считалось внешним и не варьировалось. Но если собственное поле тока в стержне сравнимо с  $\mathbf{B}$ , решение изменится и усложнится.

### Bibliography

Основы электродинамики хорошо изложены во многих книгах [16, 101], но для приложений в механике выделяется курс И. Е. Тамма [90]. Растёт список литературы по связанным задачам электромагнетизма и упругости [79, 82]. Как введение в эту область может быть полезна книга В. Новацкого [73].

## Chapter 8

# ASYMPTOTIC METHODS

### § 1. Asymptotic decompositions

До сих пор аргументами рассматриваемых функций были только координаты и время. Размеры тела, упругие модули, характерные масштабы изменения ...

...

В предыдущих главах уже возникали асимптотические проблемы. Линейная теория получается из нелинейной с помощью разложений по масштабу нагрузки (§ 4.1). Безмоментная теория вытекает (с точностью до краевых эффектов) из моментной (гл. 5) при устремлении “моментных” жёсткостей к бесконечности. В термоупругости (гл. 6) использование уравнения теплопроводности вместо полного баланса энергии должно быть обосновано асимптотическими методами.

Узвнимым в какой-то степени местом

...

### § 2. Splitting in a linear algebraic system

Этот простой случай очень познавателен, он хорошо поясняет особенности асимптотических явлений. Рассматривается линейная система

$$C_{ij}u_j = f_i, \quad C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \lambda C_{ij}^{(1)} \quad (2.1)$$

с матрицей  $C_{ij}$  и столбцами неизвестных  $u_j$  и нагрузок  $f_i$ . Процесс построения асимптотического решения определяется тем, вырождена матрица  $C_{ij}^{(0)}$  или нет. Возможны три случая.

1°.  $\det C_{ij}^{(0)} \neq 0$ . Однородная задача

$$C_{ij}^{(0)} u_j = 0 \quad (2.2)$$

имеет лишь тривиальное (нулевое) решение. Матрица  $C_{ij}^{(0)}$  обратима, неоднородная задача всегда однозначно решима. Решение строится так:

$$u_j = \dots \quad (2.3)$$

...

$$2^\circ \det C_{ij}^{(0)} = 0$$

...

$$3^\circ \det C_{ij}^{(0)} = 0$$

...

### § 3. Poincaré method

Этот метод широко известен в теории нелинейных колебаний. Он предназначен, в частности, для определения периодических решений уравнения

$$\ddot{u} + u = \lambda f(u, \dot{u}) \quad (3.1)$$

...

### § 4. Van der Pol averaging method

Опять рассматривается уравнение (3.1), но теперь ищутся не только периодические решения. Вводится фазовая плоскость

...

### § 5. Метод сращивания асимптотических разложений

Основоположник этого метода — Ludwig Prandtl. Рассматривая течение вязкой жидкости, он заметил, что влияние малой вязкости локализовано у границы — в тонком приграничном слое. Вдали от границы жидкость ведёт себя как идеальная. Одни и те же уравнения

...

## § 6. Метод многих масштабов

Этот метод привлекателен, естественен и — как написано

...

## § 7. Уравнения с медленно меняющимися коэффициентами

Рассмотрим гармонический осциллятор, собственная частота которого медленно меняется во времени

...

## § 8. Thin bodies

Задачи теории упругости часто ставятся для тонких тел — стержней, пластин и оболочек. Таковы многие элементы конструкций, но и в природе вне человека тонкие тела встречаются довольно часто.

Решение задач упругости для тонких тел многие десятилетия основывалось на неких гипотезах о распределении решения по толщине и о порядках одних неизвестных относительно других. Построенные так теории сыграли большую роль в практике инженерных расчётов. Однако, им не хватало логической стройности и убедительности, их хотелось обосновать, уточнить — а в последнее время и уничтожить (в связи с появлением великолепных компьютеров). Но открытое не так давно явление асимптотического ращепления прояснило картину: в тонком теле трёхмерная задача ращепляется на задачи меньшей размерности. Классические теории тонких тел получили и подтверждение, и развитие.

Рассмотрим задачу о кручении из ...

...



## Библиография

Всё разнообразие асимптотических методов представлено в монографиях ...

### § 1. Исходные представления

Стержень — это тонкое длинное тело. Он характеризуется прежде всего своей осью — пространственной кривой, которую “облепляет” материал (рисунок ?? 22 ??). В каждой точке оси имеем плоскую фигуру

...

Давно известно, что стержни чувствительны к моментным нагрузкам. Но присутствие моментов среди обобщённых сил означает наличие вращательных степеней свободы. Следовательно, одномерной моделью стержня должна быть линия Коссера — она состоит из элементарных твёрдых тел. Впрочем, могут проявиться и дополнительные степени свободы — как в тонкостенных стержнях, которым посвящена отдельная глава.

В механике упругих тел стержни занимают особенное место. Во-первых, это моментные модели; моменты здесь играют главную роль (не роль поправок, как в трёхмерном континууме Коссера). Во-вторых, стержни являются как бы “тестовой площадкой” для моделей с дополнительными степенями свободы, поскольку наличие этих степеней можно достоверно исследовать на трёхмерной модели. Ну а пока сосредоточимся на простой одномерной модели Коссера.

### § 2. Кинематика линий Коссера

Рассматриваемое далее является упрощённым вариантом [гл. 5](#). Вместо тройки материальных координат  $q^i$  имеем одну —  $s$ ; это может быть дуговая координата в отсчётной конфигурации.

Движение определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}(s, t)$  и тензором поворота  $\mathbf{P}(s, t)$ . Линейная и угловая скорости частицы вводятся равенствами

...

### § 3. Силовые факторы и их баланс

Поскольку частицы стержня (линии Коссера) — твёрдые тела, то силовыми факторами являются силы и моменты: на элемент  $ds$  действуют внешние сила  $\mathbf{q}ds$  и момент  $\mathbf{m}ds$ . Внутренние взаимодействия тоже определяются силой  $\mathbf{Q}(s)$  и моментом  $\mathbf{M}(s)$  — это воздействие от частицы с координатой  $s+0$  к частице с  $s-0$ . Из закона

...

### § 4. Принцип виртуальной работы и его следствия

For a piece of rod  $s_0 \leq s \leq s_1$  formulation of the principle is as follows

...

Conventionally call  $\mathbf{a}$  the tensor of stiffness for bending and twisting,  $\mathbf{b}$  the tensor of stiffness for (ex)tension and shear, and  $\mathbf{c}$  the tensor of crosslinks.

Stiffness tensors rotate together with particle:

...

### § 5. Классическая модель Кирхгофа

До сих пор функции  $\mathbf{r}(s, t)$  и  $\mathbf{P}(s, t)$  были независимы. В классической теории Кирхгофа существует внутренняя связь

...

## § 6. Задача Эйлера

Рассматривается прямой стержень, закреплённый на одном конце и нагруженный силой  $Q$  на другом (рисунок ?? 23 ??). Сила — “мёртвая”, то есть не меняется при деформировании

...

## § 7. Уравнения в вариациях

В нелинейной механике упругих тел полезны уравнения в вариациях, описывающие малое изменение актуальной конфигурации. Как и в § 3.13, вариации величин

...

## § 8. Модель с растяжением без сдвига

Модель Кирхгофа с  $\Gamma = 0$  не описывает наипростейший случай растяжения–сжатия прямого стержня. Эта неприятность исчезнет, если смягчить связь: запретить лишь поперечный сдвиг, но разрешить растяжение, то есть

...

## § 9. Механика нити

Этот вопрос выходит за рамки главы, поскольку нить проще стержня: её частицами являются “обычные” материальные точки с трансляционными степенями свободы. Соответственно, ...

...

## § 10. Линейная теория

В линейной теории внешние воздействия считаются малыми, а отсчётная конфигурация — ненапряжённым состоянием покоя. Уравнения в вариациях в этом случае дают

...

### § 11. Случай малой толщины

При малой относительной толщине стержня модель типа Коссера уступает место классической. Понятие “толщина” определяется соотношением жёсткостей:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — разной размерности; полагая  $\mathbf{a} = h^2 \hat{\mathbf{a}}$  и  $\mathbf{c} = h \hat{\mathbf{c}}$ , где  $h$  — некий масштаб длины, получим тензоры

...

Переход модели Коссера в классическую кажется более очевидным при непосредственном интегрировании

...

### § 12. Задача Сен-Венана

Трудно переоценить ту роль, которую играет в механике стержней классическое решение Сен-Венана. О нём уже шла речь в ...

...

### § 13. Определение жёсткостей по энергии

Тензоры жёсткости  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  в одномерной модели

...

### § 14. Вариационный метод построения одномерных моделей

Мы только что определили жёсткости стержня, полагая, что одномерная модель Коссера правильно отражает поведение трёхмерной модели. “Одномерные” представления ассоциируются со следующей картиной перемещений в сечении:

...

## § 15. Асимптотическое ращепление трёхмерной задачи

В изложении механики стержней этот вопрос я считаю основным. Одномерные модели составляют лишь часть картины; другая часть — это двумерные задачи в сечении, а вместе они являются тем решением трёхмерной задачи, которое образуется при малой толщине.

Малый параметр  $\lambda$  в трёхмерную задачу проще всего ввести через представление радиуса-вектора (рисунок ?? 22 ??, § 1):

...

## § 16. Температурные деформации и напряжения

Прямой подход, столь эффективный при построении одномерных моделей Коссера и Кирхгофа, теряет силу в задачах термоупругости. Необходимо рассматривать трёхмерную модель, что может быть реализовано или вариационным путём, или асимптотическим.

Описанный в § 14 вариационный метод целиком переносится на термоупругость — включая задачи с неоднородностью и анизотропией, переменным сечением, динамические — и даже нелинейные. Достаточно в принципе Лагранжа заменить потенциал

...

## Библиография

В отличие от других разделов теории упругости, механика стержней скромно представлена в книгах. Преобладает изложение в духе сопротивления материалов, более совершенные подходы кажутся многим авторам невозможными или ненужными. Но есть немало интересных статей; соответствующие обзоры можно найти у ...

## *Chapter 10*

### THIN-WALLED RODS

#### § 1. Вариационный подход

**В** главе 9 рассматривались стержни с массивным сечением. Но в технике широко используются иные стержни — тонкостенные, сечения которых представляют собой узкие полоски различного очертания (уголок, швеллер, двутавр и др.). Если стержни похожи на линии (материальные линии Коссера), то в тонкостенных стержнях и само сечение выглядит как линия. Три размера — толщина и длина сечения, а также длина стержня — имеют различные порядки.

Известны прикладные теории тонкостенных стержней ...

...

#### § 2. Уравнения с малым параметром

Рассмотрим призматический стержень с односвязным сечением в виде тонкой криволинейной полоски постоянной толщины  $h$ . Радиус-вектор в объёме представим следующим образом:

...

#### § 3. Первый шаг асимптотической процедуры

*Внешнее разложение*

Из системы

...

*Внутреннее разложение вблизи  $s_0$*

Выпишем уравнения для

...

*Сращивание*

Стыковка внутреннего и внешнего разложений

...

## § 4. Второй шаг

*Внешнее разложение*

Из системы

...

*Внутреннее разложение вблизи  $s = s_0$*

Из общей системы

...

*Сращивание*

Поскольку рассматриваются поправочные члены асимптотических разложений

...

## § 5. Третий шаг

*Внешнее разложение*

Из системы

....

*Внутреннее разложение около  $s = s_0$*

Как уже отмечалось, внутренние разложения нужны для постановки краевых условий на концах



...

*Сращивание*

В плоской задаче имеем следующее двучленное внешнее разложение:

....

**§ 6. Четвёртый шаг**

Здесь понадобится лишь внешнее разложение. Более того: в этом приближении мы не будем искать решения уравнений — будет достаточно лишь условий разрешимости. Напомним, что философия наша такова: разыскиваются лишь главные члены асимптотических разложений, но для полного их определения могут понадобиться

...

**§ 7. Перемещения**

Расписывая тензорное соотношение

...

**§ 8. Итоги асимптотического анализа**

Определение главных членов асимптотики напряжений и перемещений для тонкостенных стержней оказалось намного сложнее, чем в случае массивного сечения. Дадим сводку полученных выше итоговых результатов.

Перемещение:

...

## Библиография

Помимо известных книг ... Материал главы содержится в [32], где можно найти и обширный список статей.

*Chapter 11*

## SHELLS AND PLATES

### § 1. Оболочки: Геометрия поверхностей

**П**оверхность в трёхмерном пространстве определяется заданием вектора-радиуса как функции двух координат  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Фиксировав одну координату — пусть ...

### § 2. Оболочки: Модель оболочки

Располагая моделями трёхмерного моментного континуума, стержней и пластин, не так уж сложно разобраться в механике оболочек. Как геометрический объект, оболочка определяется ...

...

### § 3. Оболочки: Баланс сил и моментов

При  $\delta \mathbf{u} = \text{const}$  и  $\delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$  (трансляция) ...

...

### § 4. Shells: Relations of elasticity

Локальное соотношение (??) после вывода уравнений баланса ...

...

### § 5. Оболочки: Классическая теория

Вышеизложенная теория (напоминающая балку Тимошенко и континуумы Коссера) рассматривает  $\boldsymbol{\theta}$  независимо от  $\mathbf{u}$ . Но

обыденный опыт подсказывает: материальный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остаётся таковым и после (кинематическая гипотеза Кирхгофа). В классической теории Кирхгофа, Арона и Лява  $\theta$  выражается через  $u$ , что в конце концов позволяет всё свести к одному векторному уравнению для  $u$ .

Предположим, что в основе классической теории лежит внутренней связь

...

## § 6. Оболочки: Пластина

Это простейший вырожденный случай оболочки. Орт  $n = k$  направлен по декартовой оси  $z$ , в качестве координат ...

...

## § 7. Оболочки: Подход с множителями Лагранжа

Уязвимым местом нашего изложения теории оболочек являются формулы

...

## § 8. Оболочки: Цилиндрическая оболочка

Существуют разные уравнения цилиндрической оболочки. Приводятся громоздкие выкладки с отбрасыванием некоторых малых членов, и не всегда ясно, какие именно члены действительно можно отбросить.

Предлагаемая читателю теория оболочек иного свойства: лишних членов нет, все уравнения записаны в компактной тензорной форме — остаётся лишь грамотно действовать с компонентами тензоров. В качестве иллюстрации рассмотрим цилиндрическую оболочку.

В декартовой системе

...

## § 9. Оболочки: Общие теоремы

Пусть край закреплён

...

## § 10. Оболочки: Краевые условия

В рамках рассматриваемого прямого подхода к оболочкам как материальным поверхностям наиболее надёжным способом вывода граничных условий представляется вариационный. Исходим из вариационного уравнения:

...

## § 11. Оболочки: Оболочки вращения

Разберёмся в геометрии поверхности вращения ( рис. ?? 29 ?? ).  
Меридиан можно задать зависимостью декартовых координат

...

## § 12. Оболочки: Безмоментная теория

В отличие от пластины, оболочка способна выдерживать нормальную распределённую нагрузку без появления внутренних моментов. В безмоментном состоянии напряжения равномерно распределены по толщине оболочки, безмоментные оболочечные конструкции можно считать оптимально спроектированными.

Уравнения безмоментной теории

...

### § 13. Оболочки: Нелинейная безмоментная теория

Вышеизложенная безмоментная теория допускает простое и корректное нелинейное обобщение. Материальная поверхность состоит из частиц

...

### § 14. Оболочки: Иной вариант классической теории

Выше при изложении моментной теории оболочек частицы материальной поверхности считались твёрдыми телами с шестью степенями свободы

...

### § 15. Пластины: Общие представления

**П**ластиной называется тонкое трёхмерное тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями и боковой цилиндрической поверхностью (рисунок ?? 26 ???). В декартовой системе  $x_1, x_2, z$  поперечная координата ...

...

### § 16. Пластины: Модель типа Тимошенко (прямой подход)

Пластина рассматривается как материальная плоскость, частицы которой

...

### § 17. Пластины: Классическая теория Кирхгофа

Принимается внутренняя связь

...

## § 18. Пластины: Асимптотическое соотношение двумерных моделей

При малой толщине из теории типа Тимошенко вытекает классическая. Толщина  $h$  определяется отношением жёсткостей. Перепишем

...

## § 19. Пластины: Вариационный переход от трёхмерной модели

Используя вариационные принципы Лагранжа или Рейсснера–Хеллингера с аппроксимацией решения по толщине, можно получить двумерные вариационные постановки. Из них вытекают и соотношения внутри области, и естественные краевые условия.

Для примера рассмотрим построение модели типа Тимошенко с аппроксимацией перемещений

...

...

Рассмотренные вариационные переходы легко обобщаются на случаи неоднородности и анизотропии материала, температурных деформаций, динамики. Достоинство принципа Рейсснера–Хеллингера — в явном представлении напряжений. Зато принцип Лагранжа применим к нелинейным задачам (глава 3 содержит трёхмерную постановку).

## § 20. Plates: Splitting of three-dimensional bending problem

Двумерная классическая теория изгиба пластин легко выводится из трёхмерной постановки с малым параметром. Представив радиус-вектор в объёме

...

## § 21. Plates: Circular plates

В качестве иллюстрации рассмотрим широко представленный в литературе вопрос об уравнениях теории Кирхгофа в полярных координатах. Имеем

...

## § 22. Пластины: Плоское напряжённое состояние

Это вторая из двух задач, о которых говорилось в § 15. Силы

...

## Библиография

Теория оболочек изложена в монографиях А. Л. Гольденвейзера [22], В. В. Новожилова [74], А. И. Лурье [55], В. С. Черниной [107] и ряде других. Достоинства этих книг перекрывают неразвитость формального аппарата. Переход от трёхмерной модели оболочки к двумерной рассмотрен у ...

...

Техническая теория изгиба пластин изложена ...

...



*Chapter 12*

## OSCILLATIONS AND WAVES

### § 1. Колебания трёхмерных тел

Рассмотрим динамическую задачу классической линейной упругости

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f} &= \rho \ddot{\boldsymbol{u}}, \quad \boldsymbol{\tau} = {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \boldsymbol{u}^S, \\ \boldsymbol{u}|_{o_1} &= 0, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{o_2} = \boldsymbol{p}, \\ \boldsymbol{u}|_{t=0} &= \boldsymbol{u}^\circ, \quad \dot{\boldsymbol{u}}|_{t=0} = \dot{\boldsymbol{u}}^\circ.\end{aligned}\tag{1.1}$$

В соответствии с общей теорией (§ 2.8), начинаем с анализа главных, или нормальных, колебаний:

...

### § 2. Колебания стержней

В линейной динамике стержней имеем следующую систему для сил  $\boldsymbol{Q}$ , моментов  $\boldsymbol{M}$ , перемещений  $\boldsymbol{u}$  и поворотов  $\boldsymbol{\theta}$  (§ 9.??):

...

### § 3. Малые возмущения параметров

Рассмотрим задачу об определении собственных частот и форм с малыми возмущениями масс и жёсткостей:

...

### § 4. Колебания оболочек

Динамика оболочек рассматривалась многими

...

### **§ 5. Волны в упругой среде**

Рассмотрим линейные уравнения динамики однородной изотропной среды без объёмных сил

...

### **§ 6. Волны в стержнях**

Рассмотрим прямой стержень. Продольная деформация описывается уравнениями

...

### **§ 7. Нелинейные колебания**

Рассмотрим простой пример: продольные колебания прямого стержня с малой нелинейной добавкой в соотношениях упругости

...

### **Библиография**

Методы решения динамических задач теории упругости представлены в книгах ...

*Chapter 13*  
**STABILITY**

**§ 1. Различные подходы к проблеме устойчивости**

**С**уществует классическая, хорошо развитая теория устойчивости движения ...

...

**§ 2. Классические задачи о стержнях**

...

**§ 3. Следящие нагрузки**

...

**§ 4. Роль дополнительных податливостей**

...

**§ 5. Вариационные постановки**

...

**§ 6. Неконсервативные задачи**

...

## § 7. Случай кратных корней

...

### Библиография

Увлекательные вопросы устойчивости упругих систем освещены в книгах ...

## Chapter 14

### DEFECTS

#### § 1. Volterra dislocations

Рассмотрим классическую линейную трёхмерную среду (гл. 4). Как показано в § 4.7, уравнение совместности деформаций

...

#### § 2. Straight-line dislocations

Линия дислокации может быть любой пространственной кривой, замкнутой в теле или выходящей концами на поверхность. Для дислокации произвольной формы в неограниченной среде не так уж сложно получить соответствующее решение [33]. Мы же ограничимся простейшим случаем прямолинейной дислокации. Ищется решение

...

#### § 3. Action of stress field on dislocation

Рассмотрим тело, содержащее внутри дислокацию с замкнутой линией  $C$ . Тело нагружено объёмными  $\mathbf{f}$  и поверхностными  $\mathbf{p}$  силами. Обозначим

...

#### § 4. About movement of dislocations

Рассмотрим это явление, следуя [44]. Ограничимся случаем прямолинейной винтовой дислокации, движущейся с постоянной скоростью

...

#### § 5. Point defects

Речь пойдёт о континуальной модели таких явлений как вакансии, примесные частицы или междоузельные атомы в кристаллической решётке. В случае дислокации рассматривались

...

#### § 6. Force acting on point defect

Дефект находится в теле, нагруженном объёмными  $f$  и поверхностными  $p$  силами. Суперпозиция

...

#### § 7. Continuously distributed dislocations

Начнём со сложения векторов Бюргерса. При обходе сразу двух дислокаций (рис. ?? 40 ??) по контуру

...

#### § 8. Stress during winding of coil

Не только дислокации и точечные дефекты, но и макроскопические факторы могут быть источниками собственных напряжений. При намотке катушки (рис. ?? 42 ??) в ней возникают напряжения от натяжения ленты. Расчёт этих напряжений очень сложен, если рассматривать детально процесс укладки ленты.

Но существует чёткий алгоритм Southwell'a [86] расчёта напряжений в катушке: укладка каждого нового витка вызывает внутри катушки приращения напряжений, определяемые соотношениями линейной упругости. Здесь два этапа, и первый состоит в решении задачи Lamé о деформации полого цилиндра под внешним давлением (рис. ?? 43 ??)

Lamé problem about deformation of a hollow cylinder under external pressure

...

### Bibliography

Дислокации и точечные дефекты в линейно-упругих телах рассматривали многие авторы: John Eshelby [33], Roland deWit [30], Cristian Teodosiu [91], Alan Cottrell [44]. Теорию собственных напряжений изложил Ekkehart Kröner в [47]. Методику расчёта напряжений при намотке описал Richard Southwell в книге [86].

*Chapter 15*  
**FRACTURES**

**§ 1. Традиционные критерии прочности**

**К**ак судить о прочности тела после определения напряжения в нём? При одноосном растяжении напряжением  $\sigma$  есть, очевидно, некий предел прочности  $\sigma_*$ . Прочность считают достаточной при  $\sigma \leq \sigma_*/k$ , где  $k$  — так называемый коэффициент запаса. Но такой подход не является вполне удовлетворительным, поскольку определяемые из опыта

...

**§ 2. Антиплоская деформация среды с трещиной**

Любая регулярная функция комплексного переменного  $z = x + iy$  содержит в себе решение какой-либо антиплоской задачи статики без ...

...

**§ 3. Трещина при плоской деформации**

Рассмотрим плоскую область произвольного очертания с трещиной внутри; нагрузка приложена и “в объёме”, и на внешней границе. Как и при антиплоской деформации, решение строится в два этапа

...



#### § 4. Трещинодвижущая сила

Это едва ли не основное понятие механики трещин. Рассмотрим его, следуя

...

#### § 5. Критерий роста трещины

Связанная с энергией  $\mathcal{E}$  трещинодвижущая сила  $F$  — не единственное воздействие на фронт трещины. Должна быть ещё некая сила сопротивления  $F_*$ ; рост трещины начинается при условии

...

#### § 6. Интеграл Райса

Одно из самых известных

...

#### § 7. Определение коэффициентов интенсивности

Расчёт прочности тела с трещиной сводится к определению коэффициентов интенсивности. Методы расчёта таких коэффициентов — как аналитические, так и численные — хорошо освещены в литературе.

Рассмотрм ещё один подход к задачам механики трещин, разработанный

...

#### § 8. Модель Баренблатта

Неограниченный рост напряжений на фронте трещины вызывает некоторые сомнения. Желательно “дать поддержку” сингулярным решениям какими-либо дополнительными построениями или использованием иной модели. И эту поддержку дала работа

...

## **§ 9. Деформационный критерий**

...

## **§ 10. Рост трещин**

...

## **§ 11. Упругое поле впереди движущейся трещины**

Рассмотрим этот вопрос

...

## **§ 12. Баланс энергии для движущейся трещины**

...

## **Библиография**

Список книг по механике трещин уже велик. В нём нельзя не отметить ...

## *Chapter 16*

# COMPOSITES

### § 1. Вводные соображения

**И**спользуя глину как строительный материал, в неё добавляют измельчённую солому. Работая с эпоксидной смолой, полезно до затвердевания ввести наполнитель: порошок, волокна, кусочки ткани. Это примеры композитов (композиционных материалов). Новые виды композитов применяются всё шире, вытесняя сталь, алюминиевые сплавы и другие распространённые материалы.

Композиты можно определить как неоднородные материалы, в которых происходит некое осреднение с возникновением новых свойств. Обычная механика сплошной среды применима, разумеется, и к композитам. Но едва ли возможно учесть все детали структуры — и неразумно. Необходимы новые подходы, опирающиеся именно на сложность структуры. Ведь, например, в газе

...

### § 2. Эффективные поля

Любое поле в композите обычно представляется суммой

...

### § 3. Краевые задачи для представительного объёма

Как определяются упругие модели для “обычной” среды?

...

## § 4. Вилка Хилла

*Ложка Лихха*

Отметив, что

...

## § 5. Формулы Эшелби

Итак, эффективные модули определяются энергией представительного объёма в первой или второй задачах:

...

## § 6. Модули среды со сферическими включениями

В однородной матрице случайным образом, но достаточно равномерно, распределены сферические включения радиусом  $a$ . Получившийся композит на макроуровне будет изотропным, его упругие свойства полностью определяются ...

...

## § 7. Метод самосогласования

Мы опирались на две задачи для представительного объёма и определяли эффективные модули из равенства энергий. В основе метода самосогласования лежит новая идея: представительный объём помещается в безграничную среду с эффективными свойствами, на бесконечности состояние считается однородным, эффективные модули находятся из некоторых дополнительных условий самосогласования.

Обратимся снова к вопросу об объёмном модуле среды со сферическими включениями. Задача сферически симметрична; для включения по-прежнему

...

## § 8. Принцип Хашина–Штрикмана

Вилка Хилла основана на обычных экстремальных принципах теории упругости. Специально для механики композитов Хашин и Штрикман построили очень своеобразный функционал, который на некотором точном решении может иметь как максимум, так и минимум, давая возможность с двух сторон оценивать эффективные модули [111].

Рассмотрим первую из двух задач для представительного объёма

...

## Библиография

Книги Р. Кристенсена [...] и Б. Е. Победри [...] содержат и основы механики композитов, и перспективную постановку новых вопросов. Для самого требовательного читателя представляет интерес монография ...

*Chapter 17*  
**PERIODIC STRUCTURES**

**§ 1. Одномерная задача**

**В** одномерной задаче статики имеем уравнение  
...

**§ 2. Трёхмерная среда**

Исходим из уравнений в перемещениях  
...

**§ 3. Волокнистая структура**

Тензор <sup>4</sup>**A** в этом случае постоянен вдоль оси  
...

**§ 4. Статика периодического стержня**

В уравнениях линейной статики стержня  
...

**Bibliography**

Лежащий в основе этой главы асимптотический метод представлен (с разной степенью математической стройности) в книгах [6, 46, 80, 8].

## LIST OF BOOKS

1. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Изд. 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
2. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1973. Pages 641–703.
3. **Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. Наука, 1979. 296 с.
4. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е изд. Дрофа, 2004. 592 с.
5. **Бабич В. М., Булдырев В. С.** Искусство асимптотики // Вестник ЛГУ, 1977, № 13, вып. 3, С. 5–12.
6. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. Наука, 1984. 352 с.
7. **Беляев Н. М., Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. Т. 1. 327 с. Т. 2. 304 с.
8. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.
9. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. Наука, 1983. 448 с.
10. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
11. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
12. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Наука, 1974. 504 с.
13. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.

14. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. Наука, 1979. 336 с.
15. **Борисенко А. И., Тарапов И. Е.** Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Изд. 6-е. Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьковском ун-те, 1986. 216 с.
16. **Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. Наука, 1985. 400 с.
17. **Washizu, K.** Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод: Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Мир, 1987. 542 с.
18. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
19. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
20. **Гантмахер Ф. Р.** Лекции по аналитической механике. Изд. 2-е. Наука, 1966. 300 с.
21. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. Наука, 1971. 416 с.
22. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. Наука, 1976. 512 с.
23. **Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. Наука, 1979. 383 с.
24. **Goldstein, Herbert; Poole, Charles P.; Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison-Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод: Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж.* Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
25. **Gordon J. E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 p. *Перевод: Гордон Дж.* Конструкции, или почему не ломаются вещи. Мир, 1980. 390 с.
26. **Gordon J. E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 p. *Перевод: Гордон Дж.* Почему мы не проваливаемся сквозь пол. Мир, 1971. 272 с.
27. **Григолюк Э. И., Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. М.: ВИНТИ, 1973. 273 с.
28. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.



29. *Перевод: Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд. 4-е. Наука, 1973. 228 с.
30. *Перевод: Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. Мир, 1977. 208 с.
31. **Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.
32. **Елисеев В. В.** Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.
33. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод: Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.
34. **Harold Alexander.** A constitutive relation for rubber-like materials // International Journal of Engineering Science, volume 6 (September 1968), pages 549–563.
35. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. Мир, 1986. 318 с.
36. **Зино И. Е., Тропш Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
37. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.  
Илюхин[А.][А.] О построении соотношений теории упругих стержней // Механика твердого тела (Киев), 1990, № 22, С. 82–92.  
Камке[Э.] Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Наука, 1971. 576 с.
38. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. Наука, 1974. 312 с.
39. **Керштейн И. М., Клошников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
40. **Collatz, Lothar.** Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод: Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). Наука, 1968. 504 с.
41. *Перевод: Кольский Г.* Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.
42. *Перевод: Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Наука, 1974. 832 с.

43. **Cosserat E. et Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
44. *Перевод: Коттрел А.* Теория дислокаций. Мир, 1969. 96 с.
45. *Перевод: Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. Мир, 1972. 274 с.
46. **Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. Наука, 1985. 304 с.
47. **Kröner, Ekkehart** (i) Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1958. 180 pages. (ii) Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод: Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. Мир, 1965. 104 с.
48. **Christensen, Richard M.** Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод: Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. Мир, 1982. 336 с.
49. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд. Наука, 1973. 736 с.
50. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. Наука, 1969. 271 с.
51. **Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. Дрофа, 2006. Т. 1: Статика и кинематика. 9-е изд. 447 с. Т. 2: Динамика. 7-е изд. 719 с.
52. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
53. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. Наука, 1980. 512 с.
54. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
55. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
56. **Лурье А. И.** Теория упругости. Наука, 1970. 940 с.
57. *Перевод: Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
58. *Перевод: Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

59. *Перевод: Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.
60. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. Наука, 1980. 240 с.
61. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е изд. Наука, 1987. 304 с.
62. **Mindlin, Raymond David and Tiersten, Harry F.** Effects of couplestresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод: Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сб. переводов. Мир, 1964. № 4 (86). С. 80–114.
63. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Изд. 2-е. Наука, 1970. 512 с.
64. **Мойсеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е изд. Наука, 1981. 400 с.
65. **Морозов Н. Ф.** Избранные двумерные задачи теории упругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 182 с.
66. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. Наука, 1984. 256 с.
67. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. Наука, 1966. 708 с.
68. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1973. Pages 425–640.
69. *Перевод: Найфэ Али Х.* Введение в методы возмущений. Мир, 1984. 535 с.
70. *Перевод: Найфэ Али Х.* Методы возмущений. Мир, 1976. 456 с.
71. **Новацкий В.** Динамические задачи термоупругости. Мир, 1970. 256 с.
72. **Новацкий В.** Теория упругости. Мир, 1975. 872 с.
73. **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. Мир, 1986. 160 с.
74. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е изд. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

75. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е изд. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.
76. **Пановко Я. Г.** Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы. Изд. 2-е. URSS, 2017. 288 с.  
Пановко Я.Г., Бейлин Е.А. Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сб.: Строительная механика в СССР. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.  
Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Наука, 1979. 384 с.  
Паркус[Г.] Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
77. *Перевод:* **Парс Л. А.** Аналитическая динамика. Наука, 1971. 636 с.
78. **Партон В. З.** Механика разрушения: от теории к практике. Наука, 1990. 240 с.
79. **Партон В. З., Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Наука, 1988. 472 с.  
Партон[В.][З.], Морозов[Е.][М.] Механика упругопластического разрушения. Наука, 1985. 504 с.
80. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
81. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Изд. 6-е. Наука, 1974. 176 с.
82. **Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
83. **Понятовский В. В.** Вывод уравнений тонкостенных стержней–оболочек открытого профиля из уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования // Исследования по упругости и пластичности. Изд-во ЛГУ, 1980. Вып. 13. С. 40–48.  
Поручиков[В.][Б.] Методы динамической теории упругости. Наука, 1986. 327 с.
84. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твёрдого тела. 2-е изд. Наука, 1988. 712 с.
85. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд. 3-е. Наука, 1967. 664 с.  
Ректорис К. Вариационные методы в математической физике. Мир, 1985. 590 с.
86. *Перевод:* **Саусвелл Р. В.** Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.

- Седов[Л.][И.] Механика сплошной среды. Т. 2. Наука, 1970. 568 с.  
Слепян[Л.][И.] Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
87. **Сокольников И. С.** Тензорный анализ. Наука, 1971. 376 с.
  88. *Перевод: Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. Наука, 1965. 456 с.
  89. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B.V., 1988. xlii + 452 pp.  
*Перевод: Съярле Ф.* Математическая теория упругости. Мир, 1992. 472 с.
  90. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. Наука, 1989. 504 с.
  91. **Teodosiu, Cristian.** Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982. 336 pages. *Перевод: Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. Мир, 1985. 352 с.
  92. *Перевод: Тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. Наука, 1974. 223 с.
  93. **Тимошенко С. П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Наука, 1971. 808 с.
  94. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. Наука, 1966. 635 с.
  95. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости. Наука, 1979. 560 с.
  96. **Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.** Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
  97. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. 6-е изд. Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
  98. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. Наука, 1995. 319 с.
  99. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод: Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. Мир, 1975. 592 с.
  100. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 p. *Перевод: Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. Мир, 1977. 624 с.
  101. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew.** The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages.  
*Online: The Feynman Lectures on Physics. Online edition.*

102. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е изд. Наука, 1975. 173 с.
103. *Перевод: Хеллан К.* Введение в механику разрушения. Мир, 1988. 364 с.
104. *Перевод: Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. Мир, 1971. 192 с.
105. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. Наука, 1983. 296 с.
106. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. Наука, 1974. 640 с.
107. **Чернина В. С.** Статика тонкостенных оболочек вращения. Наука, 1968. 456 с.
108. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. Наука, 1988. 192 с.
109. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
110. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.
111. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. Наука, 1977. 400 с.
112. **Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. Наука, 1981. 256 с.