

Vadique Myself

ФИЗИКА УПРУГИХ КОНТИНУУМОВ



О ЧЁМ ЭТА КНИГА?

В этой книге представлены все модели упругого континуума: нелинейные и линейные, микрополярные и классические безмоментные; трёхмерные, двумерные (оболочки и пластины), одномерные (стержни, в том числе тонкостенные). Изложены основы динамики — колебания, волны и устойчивость. Для термоупругости и магнитоупругости даётся сводка теорий термодинамики и электродинамики. Описаны теории дефектов и трещин. Показаны подходы к моделированию неоднородных материалов — композитов.

Книга написана с использованием компактной и элегантной прямой безиндексной тензорной записи, оперирующей с инвариантными объектами — тензорами. Математический аппарат для интерпретации прямых тензорных соотношений содержится в первой главе.

github.com/VadiqueMe/PhysicsOfElasticContinua

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Глава 1</i>	Элементы тензорного исчисления	1
§ 1.	Вектор	1
§ 2.	Тензор и его компоненты	4
§ 3.	Действия с тензорами	6
§ 4.	Полиадное представление (разложение)	9
§ 5.	Матрицы, перестановки и определители	10
§ 6.	Векторное произведение и тензор Лёви-Чивиты	13
§ 7.	Симметричные и антисимметричные тензоры	18
§ 8.	Собственные векторы и собственные числа тензора	21
§ 9.	Тензор поворота	23
§ 10.	Варьирование	29
§ 11.	Полярное разложение	29
§ 12.	Тензоры в косоугольном базисе	31
§ 13.	Тензорные функции	37
§ 14.	Тензорные поля. Пространственное дифференцирование	38
§ 15.	Интегральные теоремы	43
§ 16.	Тензоры кривизны	46
<i>Глава 2</i>	Основы классической общей механики	50
§ 1.	Дискретная совокупность частиц	50
§ 2.	Совершенно жёсткое недеформируемое твёрдое тело	54
§ 3.	Принцип виртуальной работы	59
§ 4.	Баланс импульса, момента импульса и энергии	62
§ 5.	Принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа	63

§ 6. Статика	65
§ 7. Механика относительного движения	68
§ 8. Малые колебания (вибрации)	69

Глава 3 **Нелинейно-упругая безмоментная среда** **71**

§ 1. Континуум. Два описания процессов	71
§ 2. Градиент движения	75
§ 3. Меры (тензоры) деформации	76
§ 4. Поле скоростей	81
§ 5. Вектор площади. Изменение площади	83
§ 6. Силы в континууме. Тензор напряжения Cauchy	83
§ 7. Баланс импульса и момента импульса	85
§ 8. Собственные числа тензора напряжения Коши	87
§ 9. Принцип виртуальной работы (без множителей Лагранжа)	87
§ 10. Определяющие отношения упругости	89
§ 11. Тензоры напряжения Piola–Kirchhoff’a и другие меры напряжения	91
§ 12. Варьирование текущей конфигурации	96
§ 13. Внутренние связи	96
§ 14. Полая сфера под действием давления	97
§ 15. Напряжения как множители Лагранжа	98

Глава 4 **Классическая линейная упругость** **100**

§ 1. Полный набор уравнений	100
§ 2. Уникальность решения в динамике	102
§ 3. Закон Гука	104
§ 4. Теоремы статики	107
§ 5. Уравнения в перемещениях	111
§ 6. Сосредоточенная сила в бесконечной среде	111
§ 7. Нахождение перемещений по деформациям	112
§ 8. Уравнения в напряжениях	113
§ 9. Принцип минимума потенциальной энергии	113
§ 10. Принцип минимума дополнительной энергии	116

§ 11. Смешанные принципы стационарности	116
§ 12. Антиплоский сдвиг	118
§ 13. Кручение стержней	118
§ 14. Плоская деформация	119
Глава 5 Микрополярная трёхмерная среда	120
§ 1. Введение в линейную микрополярную теорию	120
§ 2. Отношения упругости	124
§ 3. Уравнения совместности	126
§ 4. Теоремы статики	126
§ 5. Псевдоконтинуум Коссера	126
§ 6. Плоская деформация	127
§ 7. Нелинейная теория	127
§ 8. Нелинейная модель со стеснённым вращением	130
Глава 6 Термоупругость	131
§ 1. Первый закон термодинамики	131
§ 2. Второй закон	133
§ 3. Определяющие уравнения	135
§ 4. Уравнение теплопроводности	135
§ 5. Линейная термоупругость	136
§ 6. Уравнения в перемещениях	136
§ 7. Температурное напряжение	136
§ 8. Вариационные формулировки	137
Глава 7 Магнитоупругость	138
§ 1. Электромагнитное поле	138
§ 2. Электромагнитные волны	141
§ 3. Электростатика	143
§ 4. Диэлектрики	143
§ 5. Магнитостатика	143
§ 6. Магнетики	144
§ 7. Магнитная жёсткость	144

<i>Глава 8</i>	Методы возмущений (асимптотические методы)	147
§ 1.	Асимптотические разложения	147
§ 2.	Расщепление в линейной алгебраической системе	147
§ 3.	Метод Пуанкаре	148
§ 4.	Метод осреднения Ван дер Поля	148
§ 5.	Сращивание асимптотических разложений	149
§ 6.	Многоуровневый анализ (метод многих масштабов)	149
§ 7.	Уравнения с медленно меняющимися параметрами	149
§ 8.	Тонкие тела	149
<i>Глава 9</i>	Стержни	151
§ 1.	Исходные представления	151
§ 2.	Кинематика линий Коссера	155
§ 3.	Баланс сил и моментов	156
§ 4.	Принцип виртуальной работы и следствия	156
§ 5.	Классическая модель Kirchhoff'a	157
§ 6.	Проблема Эйлера	157
§ 7.	Вариационные уравнения	157
§ 8.	Модель без сдвига с растяжением	157
§ 9.	Механика гибкой нити	158
§ 10.	Линейная теория	158
§ 11.	Случай малой толщины	158
§ 12.	Задача Сэйн-Венана	159
§ 13.	Нахождение жёсткости по энергии	159
§ 14.	Вариационный метод построения одномерной модели	160
§ 15.	Асимптотическое расщепление трёхмерной проблемы	161
§ 16.	Температурные деформация и напряжение	162
<i>Глава 10</i>	Тонкостенные стержни	163
§ 1.	Вариационный подход	163
§ 2.	Уравнения с малым параметром	163
§ 3.	Первый шаг асимптотической процедуры	163
§ 4.	Второй шаг	164

§ 5. Третий шаг	164
§ 6. Четвёртый шаг	165
§ 7. Перемещения	165
§ 8. Итоги асимптотического анализа	165
Глава 11 Оболочки и пластины	167
§ 1. Геометрия поверхности	167
§ 2. Модель оболочки	169
§ 3. Баланс сил и моментов для оболочки	170
§ 4. Оболочки: Отношения упругости	170
§ 5. Классическая теория оболочек	170
§ 6. Оболочки: Пластина	170
§ 7. Оболочки: Подход с множителями Лагранжа	171
§ 8. Цилиндрическая оболочка	171
§ 9. Оболочки: Общие теоремы	171
§ 10. Оболочки: Краевые условия	171
§ 11. Оболочки вращения	172
§ 12. Безмоментная теория оболочек	172
§ 13. Оболочки: Нелинейная безмоментная теория	172
§ 14. Оболочки: Иной вариант классической теории	172
§ 15. Пластины: Общие представления	173
§ 16. Модель пластины типа Тимошенко (прямой подход)	173
§ 17. Классическая теория пластин Kirchhoff'a	173
§ 18. Пластины: Асимптотическое сопоставление двумерных моделей	173
§ 19. Пластины: Вариационный переход от трёхмерной модели	174
§ 20. Пластины: Расщепление трёхмерной задачи изгиба	174
§ 21. Круглые пластины	174
§ 22. Пластины: Плоское напряжение	175
Глава 12 Колебания и волны	176
§ 1. Вибрации трёхмерного тела	176
§ 2. Вибрации стержня	177

§ 3. Малые возмущения параметров	177
§ 4. Вибрации оболочки	177
§ 5. Волны в упругой среде	177
§ 6. Волны в стержне	178
§ 7. Нелинейные колебания	178
Глава 13 Устойчивость	179
§ 1. Разные подходы к проблеме устойчивости	179
§ 2. Классические проблемы со стержнями	180
§ 3. “Следящие” нагрузки	180
§ 4. Роль добавочных податливостей	180
§ 5. Вариационные формулировки	180
§ 6. Неконсервативные задачи	181
§ 7. Случай кратных корней	181
Глава 14 Дефекты	182
§ 1. Дислокации Вольтерры	182
§ 2. Прямолинейные дислокации	182
§ 3. Действие поля напряжений на дислокацию	182
§ 4. О движении дислокаций	183
§ 5. Точечные дефекты	183
§ 6. Действующая на точечный дефект сила	183
§ 7. Непрерывно распределённые дислокации	183
§ 8. Напряжение при намотке катушки	183
Глава 15 Трещины	185
§ 1. Традиционные критерии прочности	185
§ 2. Антиплоская деформация среды с трещиной	186
§ 3. Трещина при плоской деформации	186
§ 4. Трещиноподвижная сила	186
§ 5. Критерий роста трещины	187
§ 6. J-интеграл	187
§ 7. Коэффициенты интенсивности напряжений	187
§ 8. Модель Barenblatt’a	187

§ 9. Деформационный критерий	188
§ 10. Рост трещин	188
§ 11. Упругое поле перед движущейся трещиной	188
§ 12. Баланс энергии для движущейся трещины	189
Глава 16 Композиты	190
§ 1. Вводные размышления	190
§ 2. Эффективные поля	191
§ 3. Краевые задачи для представительного объёма	191
§ 4. Вилка Hill'a	191
§ 5. Формулы Eshelby	192
§ 6. Эффективные модули для материала со сферическими включениями	192
§ 7. Метод самосогласования	192
§ 8. Принцип Хашина–Штрикмана	193
Глава 17 Периодические композиты	194
§ 1. Одномерная задача	194
§ 2. Трёхмерный континуум	194
§ 3. Волокнистая структура	194
§ 4. Статика периодического стержня	194
Список упомянутых публикаций	195

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Упоминание тензоров может отпугнуть читателя, обычно избегающего ненужных сложностей. Не бойся: тензоры используются просто из-за своего чудесного свойства инвариантности — независимости от систем координат.

§1. Вектор

Я предлагаю начать знакомство с тензорами через мемуары о таком феномене как вектор.

Вот он — вектор \mathbf{v} . Он вполне характеризуется своей длиной (модулем, магнитудой) и своим направлением в пространстве. Он объективно существует сам по себе, независимо от методов и единиц измерений и длин, и направлений.

Введём прямоугольные (“декартовы”) координаты выбором каких-либо трёх взаимно перпендикулярных единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ как основы (базиса) для измерений. В такой системе “ \cdot ”-произведения базисных векторов равны дельте Кронекера:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

для любого “ортонормального” базиса.

Разлагая вектор \mathbf{v} в ортонормальном базисе \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$), получаем коэффициенты v_i — компоненты вектора \mathbf{v} в том базисе (рис. 1)

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \equiv \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i \equiv v_i \mathbf{e}_i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.1)$$

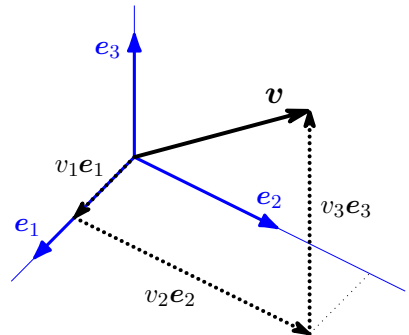


рисунок 1

Здесь и далее принимается соглашение о суммировании Einstein'a: повторённый дважды (и не более чем дважды) в одночлене индекс подразумевает суммирование по этому индексу. А неповторяющийся индекс называется “свободным”, он одинаков во всех частях равенства. Это примеры:

$$\sigma = \tau_{ii}, \quad p_j = n_i \tau_{ij}, \quad m_i = e_{ijk} x_j f_k, \quad a_i = \lambda b_i + \mu c_i.$$

(Равенства же $a = b_{kkk}$, $c = f_i + g_k$, $a_{ij} = k_i \gamma_{ij}$ некорректны.)

Имея компоненты вектора в ортонормальном базисе, длина этого вектора возвращается “равенством Пифагора (Πυθαγόρας)”

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i \cdot v_j \mathbf{e}_j = v_i \delta_{ij} v_j = v_i v_i, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_i v_i}. \quad (1.2)$$

Направление вектора в пространстве измеряется тремя углами (косинусами углов) между этим вектором и каждым из базисных:

$$\cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{v_i}{\sqrt{v_j v_j}} \Leftrightarrow \underbrace{v_i}_{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i} = \|\mathbf{v}\| \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i). \quad (1.3)$$

Длина (1.2) и направление в пространстве (1.3) — измеримые посредством трио базисных векторов — описывают вектор, и каждый вектор обладает этими свойствами*. Однако, этого мало (“не достаточно” на жаргоне книг по математике) для вектора

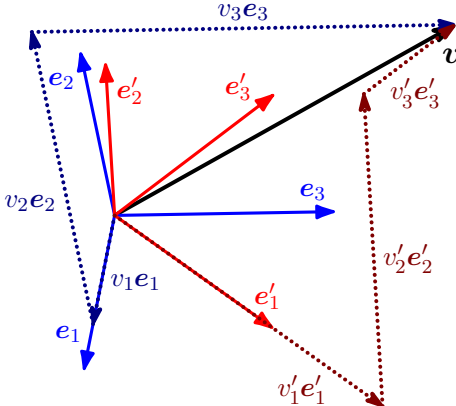


рисунок 2

Вектор ведь не просто совокупность компонент в каком-то базисе. Вектор *инвариантен*, он не зависит ни от какого базиса никакой системы координат.

Разложение одного и того же вектора \mathbf{v} в двух декартовых системах с базисными ортами \mathbf{e}_i и \mathbf{e}'_i (рис. 2) даёт

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v'_i \mathbf{e}'_i,$$

где

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = v'_k \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i,$$

$$v'_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_i = v_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i.$$

Возникшие двухиндексные объекты $o_{ki} \equiv \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i$ и $o_{ki'} \equiv \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_{i'}$ называются “матрицы косинусов” или “матрицы поворота”.

* И какое же направление у нуль-вектора $\mathbf{0}$ с длиной $\|\mathbf{0}\| = 0$?

“•”-произведение (внутреннее произведение, dot product) двух векторов коммутативно — то есть, обмен местами множителей не меняет результат. Так что

$$\begin{aligned} o_{k'i} &= \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i = \cos \angle(\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}_i) = \cos \angle(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_k) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k = o_{ik'}, \\ o_{ki'} &= \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i = \cos \angle(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}'_i) = \cos \angle(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k = o_{i'k}. \end{aligned}$$

Компоненты одного и того же вектора \mathbf{v} в “старом” и “новом” — повернутом — ортонормальных базисах, converting to each other:

$$v_i = v'_k o_{k'i}, \quad v'_i = v_k o_{ki'}. \quad (1.4)$$

В то же время, ортонормальные базисные векторы “старых” и “новых” — повернутых — прямоугольных координат связываются через матрицу косинусов как

$$\mathbf{e}'_i = o_{i'k} \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{e}'_i o_{i'k} = o_{ki'} \mathbf{e}'_i. \quad (1.5)$$

...

$$(1.5) \Rightarrow \delta_{kj} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = o_{ki'} \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j = o_{ki'} o_{ij}$$

Матрица косинусов ортогональна, то есть она обращается с “транспонированием” (обменом местами букв индексов)*:

$$o_{i'k} o_{j'k} = o_{k'i} o_{k'j} = \delta_{ij} \quad (1.6)$$

(доказательство: $\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = o_{i'k} \mathbf{e}_k \cdot o_{j'n} \mathbf{e}_n = o_{i'k} o_{j'n} \delta_{kn} = o_{i'k} o_{j'k}$).

Умножение ортогональной матрицы на компоненты любого вектора сохраняет длину этого вектора:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v'_i v'_i = o_{i'k} v_k o_{i'n} v_n = v_n v_n$$

— этот вывод **опирается на** (1.6).

Ортогональное преобразование компонент вектора

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_i = v_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k v_k = o_{i'k} v_k = v'_i \quad (1.7)$$

иногда используется для определения самого вектора. Если в каждом ортонормированном базисе \mathbf{e}_i известна тройка чисел v_i , и с вращением базиса как целого (с переходом к новому ортонормированному базису) она преобразуется согласно (1.7), тогда эта тройка компонент представляет инвариантный объект — вектор \mathbf{v} .

* Больше о матрицах — в § 5.

§ 2. Тензор и его компоненты

Когда в каждом ортонормальном базисе \mathbf{e}_i имеем набор девяти ($3^2 = 9$) чисел B_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), и этот набор преобразуется во время перехода к новому (повёрнутому) ортонормальному базису \mathbf{e}'_i как

$$B'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_m B_{mn} \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_m \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_n B_{mn} = o_{i'm} o_{j'n} B_{mn}, \quad (2.1)$$

тогда этот набор компонент представляет инвариантный объект — тензор второй сложности (второй валентности, бивалентный) ${}^2\mathbf{B}$.

Иными словами, тензор ${}^2\mathbf{B}$ проявляется в каждом базисе совокупностью своих компонент B_{ij} , меняющейся вместе с базисом согласно (2.1).

Ключевой пример тензора второй сложности — диада. Имея два вектора $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$, в каждом базисе \mathbf{e}_i положим $d_{ij} \equiv a_i b_j$. Легко увидеть как компоненты d_{ij} преобразуются согласно (2.1):

$$a'_i = o_{i'm} a_m, \quad b'_j = o_{j'n} b_n \Rightarrow d'_{ij} = a'_i b'_j = o_{i'm} a_m o_{j'n} b_n = o_{i'm} o_{j'n} d_{mn}.$$

Получающийся тензор ${}^2\mathbf{d}$ называется диадным произведением (dyadic product) или просто диадой (dyad) и пишется как $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ или \mathbf{ab} . Я выбираю запись ${}^2\mathbf{d} = \mathbf{ab}$ без символа \otimes .

Существенным экземпляром двухвалентного тензора является единичный тензор (другие именованя — единичная диада, тождественный тензор и метрический тензор). Пусть для любого ортонормального (декартова, cartesian) базиса $E_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Это действительно компоненты тензора, (2.1) актуально: $E'_{mn} = o_{m'i} o_{n'j} E_{ij} = o_{m'i} o_{n'i} = \delta_{mn}$. Я пишу этот тензор как \mathbf{E} (другие популярные варианты — \mathbf{I} и ${}^2\mathbf{1}$).

Неизменяемость компонент при любом повороте делает тензор \mathbf{E} изотропным. Ненулевых векторов с таким свойством нет (все компоненты нуль-вектора $\mathbf{0}$ равны нулю в любом базисе).

Следующий пример связан с линейным преобразованием (линейным отображением) векторов. Если $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ есть линейная (сохраняющая сложение и умножение на число) функция от $\mathbf{a} = a_j \mathbf{e}_j$, то $b_i = c_{ij} a_j$ в каждом базисе. Коэффициенты преобразования c_{ij} меняются, когда базис вращается:

$$b'_i = c'_{ij} a'_j = o_{i'k} b_k = o_{i'k} c_{kn} a_n, \quad a_n = o_{j'n} a'_j \Rightarrow c'_{ij} = o_{i'k} o_{j'n} c_{kn}.$$

Оказывается, множество двухиндексных объектов c_{ij}, c'_{ij}, \dots , описывающих одно и то же линейное отображение $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$, но в разных базисах, представляет один инвариантный объект — тензор второй сложности ${}^2\mathbf{C}$. И многие авторы книг вводят тензоры таким путём, посредством линейных отображений (линейных преобразований).

И последний пример — билинейная форма $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f_{ij} a_i b_j$, где f_{ij} — коэффициенты, a_i и b_j — компоненты векторных аргументов $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$. Результат F инвариантен (независим от базиса) с преобразованием (2.1) для коэффициентов f_{ij} :

$$F' = f'_{ij} a'_i b'_j = f_{mn} \underbrace{a'_m b'_n}_{o_{i'm} a'_i o_{j'n} b'_j} = F \Leftrightarrow f'_{ij} = o_{i'm} o_{j'n} f_{mn}.$$

Если $f_{ij} = \delta_{ij}$, то $F = \delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i$ — “ \cdot ”-произведение (dot product, внутреннее произведение, скалярное произведение) двух векторов. Когда оба аргумента одинаковые, такой однородный многочлен (полином) второй степени (квадратный) от компонент одного вектора $F(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = f_{ij} a_i a_j$ называется квадратичной формой.

Теперь о более сложных тензорах (валентности больше двух). Тензор третьей сложности ${}^3\mathbf{C}$ представляется совокупностью $3^3 = 27$ чисел C_{ijk} , меняющихся с поворотом базиса как

$$C'_{ijk} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_p \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_q \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_r C_{pqr} = o_{i'p} o_{j'q} o_{k'r} C_{pqr}. \quad (2.2)$$

Первичный пример — триада от трёх векторов $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ и $\mathbf{c} = c_k \mathbf{e}_k$

$$t_{ijk} \equiv a_i b_j c_k \Leftrightarrow {}^3\mathbf{t} = \mathbf{abc}.$$

Видно, что ортогональные преобразования (2.2) и (2.1) — результаты “повторения” векторного (1.7). Читатель легко составит преобразование компонент для тензора любой сложности и напишет соответствующую полиаду как пример.

Векторы с преобразованием (1.7) суть тензоры первой сложности.

Напоследок рассмотрим наименее сложные объекты — скаляры, они же тензоры нулевой сложности. Скаляр это одно ($3^0 = 1$) число, которое не зависит от базиса: энергия, масса, температура и др. Но что такое компоненты, к примеру, вектора $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$, $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$?

Если не скаляры, то что? Здесь не может быть простого ответа. В каждом отдельном базисе, \mathbf{e}_i — векторы и v_i — скаляры.

§ 3. Действия с тензорами

Этих действий четыре.

Первое — **линейная комбинация** — объединяет сложение и умножение на число. Аргументы этого действия и результат — одинаковой сложности. Для двух тензоров оно выглядит так:

$$\lambda a_{ij\dots} + \mu b_{ij\dots} = c_{ij\dots} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{c}. \quad (3.1)$$

Здесь λ и μ — коэффициенты-скаляры; \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} — тензоры одной и той же сложности. Легко показать, что компоненты результата \mathbf{c} удовлетворяют ортогональному преобразованию вида (2.1).

“Разложение вектора в базисе” — представление вектора суммой $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ — это не что иное как линейная комбинация векторов базиса \mathbf{e}_i с коэффициентами v_i .

Второе действие это **умножение (тензорное произведение, прямое произведение)**. Оно принимает аргументы любых сложностей, возвращая результат суммарной сложности. Примеры:

$$\begin{aligned} v_i a_{jk} = C_{ijk} &\Leftrightarrow \mathbf{v}^2 \mathbf{a} = {}^3\mathbf{C}, \\ a_{ij} B_{abc} = D_{ijabc} &\Leftrightarrow {}^2\mathbf{a} {}^3\mathbf{B} = {}^5\mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Преобразование совокупности компонент результата, такой как $C_{ijk} = v_i a_{jk}$, при повороте базиса — ортогональное, подобное (2.2), посему тут нет сомнений, что эта совокупность есть набор компонент тензора.

Первичный и ужé знакомый (по § 2) подвид умножения — диадное произведение двух векторов ${}^2\mathbf{A} = \mathbf{bc}$.

Третье действие называется **свёрткой (contraction)**. Оно применяется к бивалентным и более сложным тензорам. Это действие над одним тензором, без других “участников”. Грубо говоря, свёртывание тензора есть суммирование его компонент по какой-либо паре индексов. В результате сложность тензора уменьшается на два.

Для трёхвалентного тензора ${}^3\mathbf{D}$ возможны три варианта свёртки, дающие векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} с компонентами

$$a_i = D_{kki}, \quad b_i = D_{kik}, \quad c_i = D_{ikk}. \quad (3.3)$$

Поворот базиса

$$a'_i = D'_{kki} = \underbrace{o_{k'p} o_{k'q}}_{\delta_{pq}} o_{i'r} D_{pqr} = o_{i'r} D_{ppr} = o_{i'r} a_r$$

проявляет “тензорную природу” результата свёртки.

Для тензора второй сложности возможен лишь один вариант свёртки, дающий скаляр, называемый следом (trace) или первым инвариантом

$$\mathbf{B}_\bullet \equiv \text{trace } \mathbf{B} \equiv \mathbf{I}(\mathbf{B}) = B_{kk}.$$

След единичного тензора (“свёртка дельты Кронекера”) равен размерности пространства

$$\text{trace } \mathbf{E} = \mathbf{E}_\bullet = \delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

Четвёртое действие также применимо к одному тензору второй и бóльших сложностей. Оно именуется как **перестановка индексов (index swap)**, **жонглирование индексами (index juggling)**, **транспонирование (transposing)**. Из компонент тензора возникает новая совокупность с другой последовательностью индексов, сложность результата остаётся той же. Для примера, трёхвалентный тензор ${}^3\mathbf{D}$ может дать тензоры ${}^3\mathbf{A}$, ${}^3\mathbf{B}$, ${}^3\mathbf{C}$ с компонентами

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{A} &= {}^3\mathbf{D}_{1\leftrightarrow 2} \Leftrightarrow A_{ijk} = D_{jik}, \\ {}^3\mathbf{B} &= {}^3\mathbf{D}_{1\leftrightarrow 3} \Leftrightarrow B_{ijk} = D_{kji}, \\ {}^3\mathbf{C} &= {}^3\mathbf{D}_{2\leftrightarrow 3} \Leftrightarrow C_{ijk} = D_{ikj}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для бивалентного тензора возможно лишь одно транспонирование: $\mathbf{A}^\top \equiv \mathbf{A}_{1\leftrightarrow 2} = \mathbf{B} \Leftrightarrow B_{ij} = A_{ji}$. Очевидно, $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$.

Для диадного умножения двух векторов, $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}^\top$.

Комбинирование действий

Четыре представленных действия комбинируются (сочетаются) в разных последовательностях.

Комбинация умножения (3.2) и свёртки (3.3) — dot product — самая частая, в инвариантной безындексной записи сие обозначается точкой, показывающей свёртку по соседним индексам:

$$a_i = B_{ij}c_j \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}, \quad A_{ij} = B_{ik}C_{kj} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}. \quad (3.5)$$

Определяющее свойство единичного тензора

$${}^n\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{a} = {}^n\mathbf{a} \quad \forall {}^n\mathbf{a} \quad \forall n > 0. \quad (3.6)$$

В коммутативном скалярном произведении двух векторов точка имеет тот же смысл:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{ab})_{\bullet} = a_i b_i = b_i a_i = (\mathbf{ba})_{\bullet} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.7)$$

Для dot product'a тензоров второй сложности справедливо следующее

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q} &= (\mathbf{Q}^{\top} \cdot \mathbf{B}^{\top})^{\top} \\ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q})^{\top} &= \mathbf{Q}^{\top} \cdot \mathbf{B}^{\top} \end{aligned} \quad (3.8)$$

(например, для диад $\mathbf{B} = \mathbf{bd}$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{pq}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{bd} \cdot \mathbf{pq})^{\top} &= \mathbf{pq}^{\top} \cdot \mathbf{bd}^{\top} \\ d_i p_i \mathbf{bq}^{\top} &= \mathbf{qp} \cdot \mathbf{db} \\ d_i p_i \mathbf{qb} &= p_i d_i \mathbf{qb} \quad). \end{aligned}$$

Для вектора и бивалентного тензора

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{\top} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}^{\top}. \quad (3.9)$$

Свёртка может повторяться: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{\bullet} = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = A_{ij}B_{ji}$, и вот полезные равенства для тензоров второй сложности

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{A}, \quad d \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{bd} = \mathbf{bd} \cdot \cdot \mathbf{A} = b_j d_i A_{ij}, \\ \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{A}^{\top} \cdot \cdot \mathbf{B}^{\top} = A_{ij}B_{ji}, \quad \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B}^{\top} = \mathbf{A}^{\top} \cdot \cdot \mathbf{B} = A_{ij}B_{ij}, \\ \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}_{\bullet} = A_{jj}, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{E} &= A_{ij}B_{jk}\delta_{ki} = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij}B_{jk}C_{ki}, \\ \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{D} = \\ &= \mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = A_{ij}B_{jk}C_{kh}D_{hi}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

§ 4. Полиадное представление (разложение)

Ранее в § 2 тензор был представлен как некий инвариантный объект, проявляющий себя в каждом базисе совокупностью чисел (компонент). Такое представление типично для большинства книг о тензорах. Индексная запись может быть удобна, особенно когда используются только прямоугольные координаты, но очень часто это не так. И подходящий случай — физика упругих континуумов: ей нужен более изящный, более мощный и совершенный аппарат прямого тензорного исчисления, оперирующий с безындексными инвариантными объектами.

Линейная комбинация $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ из разложения (1.1) соединяет вектор \mathbf{v} с базисом \mathbf{e}_i и компонентами v_i вектора в том базисе. Вскоре мы получим похожее соотношение для тензора любой сложности.

Любой бивалентный тензор ${}^2\mathbf{B}$ имеет девять компонент B_{ij} в каждом базисе. Число различных диад $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ для одного и того же базиса — тоже девять (3^2). Линейное комбинирование этих диад с коэффициентами B_{ij} даёт сумму $B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$. Это тензор, — но каковы его компоненты, и как это представление меняется или не меняется с поворотом базиса?

Компоненты построенной суммы

$$(B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)_{pq} = B_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = B_{pq}$$

суть компоненты тензора ${}^2\mathbf{B}$. С поворотом же базиса

$$B'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = o_{i'p} o_{j'q} B_{pq} o_{i'n} o_{j'm} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m = \delta_{pn} \delta_{qm} B_{pq} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m = B_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q.$$

Сомнения отпали: тензор второй сложности может быть представлен как линейная комбинация

$${}^2\mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \tag{4.1}$$

— диадное разложение бивалентного тензора.

Для единичного тензора

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3,$$

вот почему \mathbf{E} называется единичной диадой.

Полиадные представления типа (4.1) помогают оперировать с тензорами проще и с бóльшим пониманием:

$$\begin{aligned} v \cdot {}^2B &= v_i e_i \cdot e_j B_{jk} e_k = v_i \delta_{ij} B_{jk} e_k = v_i B_{ik} e_k, \\ e_i \cdot {}^2B \cdot e_j &= e_i \cdot B_{pq} e_p e_q \cdot e_j = B_{pq} \delta_{ip} \delta_{qj} = B_{ij} = {}^2B \cdot \cdot e_j e_i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Последняя строчка здесь весьма интересна: компоненты тензора представлены через сам тензор. Ортогональное преобразование компонент с поворотом базиса (2.1) оказывается просто версией (4.2).

И любой тензор, любой сложности выше нуля, может быть разложен по базисным полиадам. Следующие равенства — для трёхвалентного тензора

$$\begin{aligned} {}^3C &= C_{ijk} e_i e_j e_k, \\ C_{ijk} &= {}^3C \dots e_k e_j e_i = e_i \cdot {}^3C \cdot \cdot e_k e_j = e_j e_i \cdot \cdot {}^3C \cdot e_k. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя разложение по полиадам, легко увидеть действительность свойства (3.6) — “единичность” тензора E :

$$\begin{aligned} {}^n a &= a_{ij\dots q} e_i e_j \dots e_q, \quad E = e_e e_e \\ {}^n a \cdot E &= a_{ij\dots q} e_i e_j \dots \underbrace{e_q \cdot e_e}_{\delta_{eq}} e_e = a_{ij\dots q} e_i e_j \dots e_q = {}^n a, \\ E \cdot {}^n a &= e_e e_e \cdot a_{ij\dots q} e_i e_j \dots e_q = a_{ij\dots q} \delta_{ei} e_e e_j \dots e_q = {}^n a. \end{aligned}$$

Полиадное представление соединяет прямую и индексную записи воедино. Не стоит противопоставлять одно другому. Прямая запись компактна, изящна, она много больше других подходит для конечных соотношений. Но иногда индексная запись тоже очень удобна, как это есть для громоздких манипуляций с тензорами.

§ 5. Матрицы, перестановки и определители

Матрица — это двумерный или одномерный массив элементов (чисел или выражений).

Матрица есть прямоугольный массив — она составлена из строк и столбцов. У матрицы одно и то же число элементов в каждой строке и одно и то же число элементов в каждом столбце.

Иногда весьма удобно представлять набор компонент бивалентного тензора как матрицу.

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

Потому что матричное умножение вычисляется аналогично тензорному умножению со свёрткой (“•”-произведению).

$$C_{ik} = A_{ij}B_{jk}$$

...

Широко распространённая в литературе подмена тензоров матрицами компонент ведёт к ошибкам — без слежения за базисами, которым эти матрицы соответствуют.

...

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

...

The transpose of a matrix is computed/performed by swapping columns for rows in that matrix (swapping letters of indices)

...

... Вводится символ перестановки (permutation symbol) O.Veblen’a e_{ijk} *

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \quad e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1,$$

остальные — нули. Символ e_{ijk} (± 1 или 0) меняет знак при перестановке любых двух индексов, не меняется при двойной (“круговой”) перестановке, а при совпадении какой-либо пары индексов обращается в нуль.

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{when there is a repeated index in } ijk, \\ +1 & \text{when an even number of permutations of } ijk \text{ is present,} \\ -1 & \text{when an odd number of permutations of } ijk \text{ is present.} \end{cases}$$

...

* Число индексов в e -символах равно размерности пространства.

Используя e -символы, определитель (детерминант) матрицы выражается как

$$e_{pqr} \det_{m,n} A_{mn} = e_{ijk} A_{pi} A_{qj} A_{rk} = e_{ijk} A_{ip} A_{jq} A_{kr}. \quad (5.1)$$

... for 123

$$\det_{m,n} A_{mn} = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = e_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$$

$$\det_{m,n} A_{mn} = A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23} A_{32} - A_{12} A_{21} A_{33} + \\ + A_{12} A_{23} A_{31} + A_{13} A_{21} A_{32} - A_{13} A_{22} A_{31}$$

...

$$e_{pqr} \det_{m,n} A_{mn} = \det \begin{bmatrix} A_{1p} & A_{1q} & A_{1r} \\ A_{2p} & A_{2q} & A_{2r} \\ A_{3p} & A_{3q} & A_{3r} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_{p1} & A_{p2} & A_{p3} \\ A_{q1} & A_{q2} & A_{q3} \\ A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} \end{bmatrix}$$

...

$$\det_{i,j} \delta_{ij} = 1$$

...

А символ перестановки через детерминант — как

$$e_{pqr} = e_{ijk} \delta_{pi} \delta_{qj} \delta_{rk} = e_{ijk} \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr}, \\ e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

...

Определитель не чувствителен к транспонированию:

$$\det_{i,j} A_{ij} = \det_{i,j} A_{ji} = \det_{j,i} A_{ij}.$$

...

“Определитель произведения равен произведению определителей”

$$\det_{i,k} B_{ik} \det_{k,j} C_{kj} = \det_{i,j} B_{ik} C_{kj} \quad (5.3)$$

$$e_{fgh} \det_{m,n} B_{ms} C_{sn} = e_{pqr} B_{fi} C_{ip} B_{gj} C_{jq} B_{hk} C_{kr}$$

$$e_{fgh} \det_{m,s} B_{ms} = e_{ijk} B_{fi} B_{gj} B_{hk}$$

$$e_{ijk} \det_{s,n} C_{sn} = e_{pqr} C_{ip} C_{jq} C_{kr}$$

$$e_{fgh} e_{ijk} \det_{m,s} B_{ms} \det_{s,n} C_{sn} = e_{ijk} e_{pqr} B_{fi} B_{gj} B_{hk} C_{ip} C_{jq} C_{kr}$$

...

Определитель компонент бивалентного тензора инвариантен, он не меняется с поворотом базиса

$$A'_{ij} = o_{i'm} o_{j'n} A_{mn}$$

...

§ 6. Векторное произведение и тензор Лёви-Чивиты

По привычным представлениям, “ \times ”-произведение (“cross product”, “векторное произведение”, иногда “oriented area product”) двух векторов есть вектор, направленный перпендикулярно плоскости сомножителей, длина которого равна площади параллелограмма, охватываемого сомножителями

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Однако, “ \times ”-произведение — не вполне вектор, поскольку оно не полностью инвариантно.

Для начала, векторное произведение может быть ориентировано любым из двух возможных способов (рис. 3). Поскольку направление в пространстве произведения $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ определяется — кроме знака (ориентации) — сомножителями, последовательная тройка векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} is what is going to be oriented: одно направление из двух is to be chosen as “положительное”.

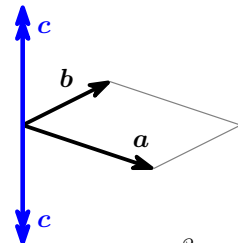


рисунок 3

And when vectors are measured using some basis \mathbf{e}_i — being represented as linear combinations like $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ — тогда последовательная тройка векторов базиса \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 is what is going to be oriented. Therefore the sequence of vectors of a basis becomes significant (for linear combinations like $a_i \mathbf{e}_i = \mathbf{a}$ it wasn't). After orienting, two bases with different sequences of the same vectors will differ by some permutation.

The orientation of a basis in space is the (kind of) asymmetry that makes a reflection impossible to replicate by means of a rotation in that space (without lifting to a more-dimensional space). It's impossible to turn the left

hand of a human figure into the right hand by applying a rotation, only by reflecting the figure in a mirror.

An orientation of space is an arbitrary choice of which sequences of basis vectors are “positively” oriented and which are “negatively” oriented.

In the three-dimensional Euclidean space, the two possible basis orientations are commonly called right-handed (right-chiral) and left-handed (left-chiral).

... chiral (adjective) = asymmetric in such a way that the thing and its зеркальное отражение are not совмещаются, cannot be superposed on its mirror image by any combination of rotations and translations

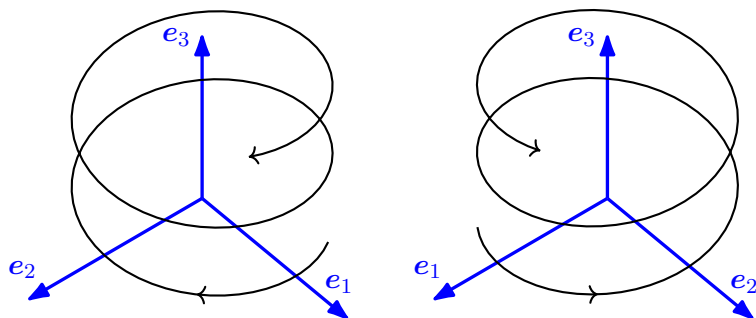


рисунок 4

Псевдовектор (аксиальный вектор) — похожий на вектор объект, инвариантный при любом повороте*, но при отражении он дополнительно меняет своё направление на обратное.

... put the figure here ...

Кроме редких случаев, направление полностью инвариантного (полярного) вектора поменяется при отражении вместе со всем пространством.

Псевдовектор (аксиальный вектор), в отличие от (полярного) вектора, при отражении не меняет ортогональную плоскости отражения компоненту, и оказывается перевёрнутым относительно полярных векторов и геометрии всего пространства. Это случается из-за того, что вместе с изменением знака каждого

* Повороты не могут поменять ориентацию тройки векторов базиса, только отражение может.

“ \times ”-произведения — что соответствует отражению — знак (и, соответственно, направление) каждого аксиального вектора также меняется.

Инаковость псевдовекторов сужает разнообразие формул: псевдовектор не складывается с вектором. Формула $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ корректна, поскольку $\boldsymbol{\omega}$ там — псевдовектор, и с векторным произведением два “псевдо” дают $(-1)^2 = 1$ (“взаимно компенсируют друг друга”).

Вот тензор Levi-Civita’ы — волюметрический тензор третьей сложности

$${}^3\epsilon = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k, \quad \epsilon_{ijk} \equiv \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \quad (6.1)$$

с компонентами ϵ_{ijk} , равными “тройным” (“смешанным”, “векторно-скалярным”) произведениям векторов базиса.

Абсолютная величина (модуль) всякой ненулевой компоненты тензора ${}^3\epsilon$ равна объёму \sqrt{g} параллелепипеда, натянутого на базис. Для базиса \mathbf{e}_i из взаимно перпендикулярных векторов единичной длины $\sqrt{g} = 1$.

Тензор ${}^3\epsilon$ изотропен, его компоненты не меняются при любом повороте базиса. Но отражение — изменение ориентации тройки базисных векторов (перемена “направления винта”) — меняет знак ${}^3\epsilon$, и поэтому он является псевдотензором.

Если $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, то \mathbf{e}_i — произвольно выбираемая из двух вариантов (рис. 3) как ориентированная положительно (“правая”) тройка, и компоненты ${}^3\epsilon$ равны символу Веблена: $\epsilon_{ijk} = e_{ijk}$. Когда же $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3$, тогда тройка \mathbf{e}_i ориентирована отрицательно (“левая”, “зеркальная”), для неё $\epsilon_{ijk} = -e_{ijk}$ (а $e_{ijk} = -\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k$).

С тензором Лёви-Чивиты ${}^3\epsilon$ возможно по-новому взглянуть на векторное произведение:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_i \mathbf{e}_i \times b_j \mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = a_i b_j \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k = \\ &= b_j a_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \cdot \epsilon_{mnk} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \mathbf{e}_k = \mathbf{b} \mathbf{a} \cdot \cdot {}^3\epsilon, \\ &= a_i \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k b_j = -a_i \epsilon_{ikj} \mathbf{e}_k b_j = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Так что, векторное произведение не есть ещё одно новое, полностью отдельное действие. С тензором Levi-Civita’ы оно сводится

к четырём уже описанным (§ 3) и применимо к тензорам любой сложности.

“Векторное произведение” это всего лишь dot product — комбинация умножения и свёртки (§ 3) — с участием тензора ${}^3\epsilon$. Такие комбинации возможны с любыми тензорами:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times {}^2\mathbf{B} &= a_i \mathbf{e}_i \times B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \underbrace{a_i B_{jk} \epsilon_{ijn} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_k}_{-a_i \epsilon_{inj} B_{jk}} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^2\mathbf{B}, \\
 {}^2\mathbf{C} \times d\mathbf{b} &= C_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \times d_p b_q \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q = \underbrace{e_i C_{ij} d_p \epsilon_{jpk} \mathbf{e}_k b_q \mathbf{e}_q}_{-\epsilon_{pjk} = -\epsilon_{jpk}} = -{}^2\mathbf{C} d \cdot {}^3\epsilon \mathbf{b} = -{}^2\mathbf{C} \cdot {}^3\epsilon \cdot d\mathbf{b}, \\
 \mathbf{E} \times \mathbf{E} &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = \underbrace{-\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k}_{+\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j} = -{}^3\epsilon. \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Последнее равенство связывает изотропные тензоры второй и третьей сложностей.

Обобщая на все тензоры ненулевой сложности

$${}^n\boldsymbol{\xi} \times {}^m\boldsymbol{\zeta} = -{}^n\boldsymbol{\xi} \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^m\boldsymbol{\zeta} \quad \forall {}^n\boldsymbol{\xi}, {}^m\boldsymbol{\zeta} \quad \forall n > 0, m > 0. \quad (6.4)$$

Когда один из операндов — единичный (метрический) тензор, из (6.4) и (3.6) $\forall {}^n\boldsymbol{\Upsilon} \quad \forall n > 0$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \times {}^n\boldsymbol{\Upsilon} &= -\mathbf{E} \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^n\boldsymbol{\Upsilon} = -{}^3\epsilon \cdot {}^n\boldsymbol{\Upsilon}, \\
 {}^n\boldsymbol{\Upsilon} \times \mathbf{E} &= -{}^n\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\epsilon \cdot \mathbf{E} = -{}^n\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\epsilon.
 \end{aligned}$$

Векторное произведение двух векторов не коммутативно, но антикоммутативно:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} \mathbf{b}, \\
 \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{b} \mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{b} \mathbf{a}, \quad (6.5) \\
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon = \mathbf{b} \mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.
 \end{aligned}$$

Для любого бивалентного тензора ${}^2\mathbf{B}$ и тензора первой сложности (вектора) \mathbf{a}

$${}^2\mathbf{B} \times \mathbf{a} = e_i B_{ij} \mathbf{e}_j \times a_k \mathbf{e}_k = (-a_k \mathbf{e}_k \times e_j B_{ij} \mathbf{e}_i)^\top = -(\mathbf{a} \times {}^2\mathbf{B}^\top)^\top.$$

Однако, в частном случае единичного тензора \mathbf{E} и вектора

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \times \mathbf{a} &= -(\mathbf{a} \times \mathbf{E}^\top)^\top = -(\mathbf{a} \times \mathbf{E})^\top = \mathbf{a} \times \mathbf{E}, \\
 \mathbf{E} \times \mathbf{a} &= \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a}. \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

Справедливо такое соотношение

$$e_{ijk}e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

○ Доказательство начнём с представлений символов Веблена как определителей (5.2). $e_{ijk} = \pm \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k$ по строкам, $e_{pqr} = \pm \mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_r$ по столбцам, с “—” для “левой” тройки

$$e_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix}, \quad e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{q1} & \delta_{r1} \\ \delta_{p2} & \delta_{q2} & \delta_{r2} \\ \delta_{p3} & \delta_{q3} & \delta_{r3} \end{bmatrix}.$$

Левая часть (6.7) есть произведение $e_{ijk}e_{pqr}$ этих определителей. Но $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ — определитель произведения матриц равен произведению определителей (5.3). В матрице-произведении элемент $[\dots]_{11}$ равен $\delta_{is}\delta_{ps} = \delta_{ip}$, как и в (6.7); **легко проверить и другие фрагменты.** ●

Свёртка (6.7) приводит к полезным формулам

$$\begin{aligned} e_{ijk}e_{pqk} &= \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & 3 \end{bmatrix} = \\ &= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{kp} + \delta_{ik}\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{kp} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jk}\delta_{kq} = \\ &= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} + \delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} = \\ &= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \\ e_{ijk}e_{pjk} &= \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}, \\ e_{ijk}e_{ijk} &= 2\delta_{ii} = 6. \end{aligned}$$

Или коротко

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \quad e_{ijk}e_{pjk} = 2\delta_{ip}, \quad e_{ijk}e_{ijk} = 6. \quad (6.8)$$

Первая из этих формул даёт представление двойного векторно-го произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_i \mathbf{e}_i \times \epsilon_{pqj} b_p c_q \mathbf{e}_j = \epsilon_{kij} \epsilon_{pqj} a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = \\ &= (\delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip}) a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = a_i b_k c_i \mathbf{e}_k - a_i b_i c_k \mathbf{e}_k = \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{cb} - \mathbf{bc}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} - \mathbf{cb} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

По другой интерпретации, dot product диады и вектора не коммутативен: $\mathbf{bd} \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{c} \cdot \mathbf{bd}$, и эта разница может быть выражена как

$$\mathbf{bd} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{bd} = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{d}). \quad (6.10)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{cb} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{ca} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{ac}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

Тем же путём выводится

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ba} - \mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}. \quad (6.11)$$

И такие тождества для любых двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{E} &= \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n = a_i b_j \epsilon_{ijk} \epsilon_{knq} \mathbf{e}_q \mathbf{e}_n = \\ &= a_i b_j (\delta_{in} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jn}) \mathbf{e}_q \mathbf{e}_n = a_i b_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \\ &= \mathbf{ba} - \mathbf{ab}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon) \cdot (\mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon) = \\ &= a_i \epsilon_{ipn} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_n \cdot b_j \epsilon_{jsk} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k = a_i b_j \epsilon_{ipn} \epsilon_{nkj} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = \\ &= a_i b_j (\delta_{ik} \delta_{pj} - \delta_{ij} \delta_{pk}) \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = a_i b_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - a_i b_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \\ &= \mathbf{ba} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{bE}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Наконец, ещё одно соотношение между изотропными тензорами второй и третьей сложности:

$${}^3\epsilon \cdot {}^3\epsilon = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \epsilon_{kjn} \mathbf{e}_n = -2\delta_{in} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_n = -2\mathbf{E}. \quad (6.14)$$

§ 7. Симметричные и антисимметричные тензоры

Тензор, не меняющийся при перестановке какой-либо пары своих индексов, называется симметричным по этой паре индексов. Если же при перестановке пары индексов тензор меняет свой знак, то он называется антисимметричным (кососимметричным) по этой паре индексов.

Тензор Лёви-Чивиты ${}^3\epsilon$ антисимметричен по любой паре индексов, то есть он полностью антисимметричен (абсолютно кососимметричен).

Тензор второй сложности \mathbf{B} симметричен, если $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\top$. Когда транспонирование меняет знак тензора, то есть $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$, тогда он антисимметричен (кососимметричен).

Любой тензор второй сложности представим суммой симметричной и антисимметричной частей

$$\begin{aligned} C &= C^S + C^A, \quad C^T = C^S - C^A; \\ C^S &\equiv \frac{1}{2} (C + C^T), \quad C^A \equiv \frac{1}{2} (C - C^T). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для диады $cd = cd^S + cd^A = \frac{1}{2} (cd + dc) + \frac{1}{2} (cd - dc)$.

Произведение двух симметричных тензоров $C^S \cdot D^S$ симметрично далеко не всегда, но только когда $D^S \cdot C^S = C^S \cdot D^S$, ведь по (3.8) $(C^S \cdot D^S)^T = D^S \cdot C^S$.

В нечётномерных пространствах любой антисимметричный тензор второй сложности необратим, определитель матрицы компонент для него — нулевой.

Существует взаимно-однозначное соответствие между антисимметричными тензорами второй сложности и (псевдо)векторами. Компоненты кососимметричного тензора полностью определяются тройкой чисел (диагональные элементы матрицы компонент — нули, а недиагональные — попарно противоположны). Dot product кососимметричного A и какого-либо тензора ${}^n\xi$ однозначно соответствует cross product'у псевдовектора a и того же тензора ${}^n\xi$

$$\begin{aligned} b &= A \cdot {}^n\xi \Leftrightarrow a \times {}^n\xi = b \quad \forall A = A^A \quad \forall {}^n\xi \quad \forall n > 0, \\ d &= {}^n\xi \cdot A \Leftrightarrow {}^n\xi \times a = d \quad \forall A = A^A \quad \forall {}^n\xi \quad \forall n > 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Раскроем это соответствие $A = A(a)$:

$$\begin{aligned} A \cdot {}^n\xi &= a \times {}^n\xi \\ A_{hi} e_h e_i \cdot \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q &= a_i e_i \times \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q \\ A_{hj} \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q &= a_i \in_{ijh} \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q \\ A_{hj} &= a_i \in_{ijh} \\ A_{hj} &= -a_i \in_{ihj} \\ A &= -a \cdot {}^3\epsilon \end{aligned}$$

Так же из ${}^n\xi \cdot A = {}^n\xi \times a$ получается $A = -{}^3\epsilon \cdot a$.

Или проще, согласно (6.4)

$$\begin{aligned} A &= A \cdot E = a \times E = -a \cdot {}^3\epsilon, \\ A &= E \cdot A = E \times a = -{}^3\epsilon \cdot a. \end{aligned}$$

(Псевдо)вектор a называется сопутствующим для тензора A .

В общем, для взаимно-однозначного соответствия между \mathbf{A} и \mathbf{a} имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon = \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \left(-\frac{1}{2} {}^3\epsilon \cdot {}^3\epsilon\right) = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\epsilon.\end{aligned}\quad (7.3)$$

Компоненты кососимметричного \mathbf{A} через компоненты сопутствующего ему псевдовектора \mathbf{a}

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} = -\epsilon_{ijk} e_i e_j a_k, \\ A_{ij} &= -\epsilon_{ijk} a_k = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

и наоборот

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\epsilon = \frac{1}{2} A_{jk} \epsilon_{kji} e_i, \\ a_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} A_{jk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \epsilon_{123} A_{32} + \epsilon_{132} A_{23} \\ \epsilon_{213} A_{31} + \epsilon_{231} A_{13} \\ \epsilon_{312} A_{21} + \epsilon_{321} A_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{32} - A_{23} \\ A_{13} - A_{31} \\ A_{21} - A_{12} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Легко запоминающийся вспомогательный “псевдовекторный инвариант” \mathbf{A}_\times получается из тензора \mathbf{A} заменой диадного произведения на векторное

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\times &\equiv A_{ij} e_i \times e_j = -\mathbf{A} \cdot {}^3\epsilon, \\ \mathbf{A}_\times &= (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times = -2\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times = -\frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Обоснование (7.4):

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times \times \mathbf{E} = -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{(e_i \times e_j)}_{\epsilon_{ijn} e_n} \times e_k e_k = \\ &= -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{\epsilon_{nij} \epsilon_{nkp}}_{\delta_{jp} \delta_{ik} - \delta_{ip} \delta_{jk}} e_p e_k = -\frac{1}{2} A_{ij} (e_j e_i - e_i e_j) = \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}) = \mathbf{A}^\mathbf{A} = \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Сопутствующий вектор **можно ввести** для любого бивалентного тензора, но лишь антисимметричная часть при этом даёт вклад: $\mathbf{C}^\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}$. Для симметричного тензора сопутствующий вектор — нулевой: $\mathbf{B}_\times = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^\top = \mathbf{B}^\mathbf{S}$.

С (7.4) разложение какого-либо тензора \mathbf{C} на симметричную и антисимметричную части выглядит как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^\mathbf{S} - \frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}. \quad (7.5)$$

Для диады же

(6.12) $\Rightarrow (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E} = \mathbf{dc} - \mathbf{cd} = -2\mathbf{cd}^A$, $(\mathbf{cd})_{\times} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$,
и разложение её

$$\mathbf{cd} = \frac{1}{2}(\mathbf{cd} + \mathbf{dc}) - \frac{1}{2}(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E}. \quad (7.6)$$

§ 8. Собственные векторы и собственные числа тензора

Если для тензора ${}^2\mathbf{B}$ и ненулевого вектора \mathbf{a}

$${}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \quad (8.1)$$

$${}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}, \quad ({}^2\mathbf{B} - \eta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

то η называется собственным числом (собственным значением, eigenvalue, proper value, главным значением) ${}^2\mathbf{B}$, а определяемая собственным вектором \mathbf{a} ось (направление) — его собственной (главной, principal) осью (направлением).

В компонентах это матричная задача на собственные значения $(B_{ij} - \eta \delta_{ij})a_j = 0$ — однородная линейная алгебраическая система, имеющая ненулевые решения при равенстве нулю определителя $\det_{i,j}(B_{ij} - \eta \delta_{ij})$:

$$\det \begin{bmatrix} B_{11} - \eta & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} - \eta & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - \eta \end{bmatrix} = -\eta^3 + \text{I}\eta^2 - \text{II}\eta + \text{III} = 0; \quad (8.2)$$

$$\text{I} = \text{trace } {}^2\mathbf{B} = B_{kk} = B_{11} + B_{22} + B_{33},$$

$$\text{II} = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} + B_{11}B_{33} - B_{13}B_{31} + B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}, \quad (8.3)$$

$$\text{III} = \det {}^2\mathbf{B} = \det_{i,j} B_{ij} = e_{ijk} B_{1i} B_{2j} B_{3k} = e_{ijk} B_{i1} B_{j2} B_{k3}.$$

Корни характеристического уравнения (8.2) — собственные числа — не зависят от базиса и потому инвариантны.

Коэффициенты (8.3) тоже не зависят от базиса; они называются первым, вторым и третьим инвариантами тензора. С первым инвариантом I — следом тензора — мы уже встречались в § 3. Второй инвариант II это след союзной (взаимной, adjugate) матрицы — транспонированной матрицы дополнений: $\text{II}({}^2\mathbf{B}) \equiv \text{trace}(\text{adj } B_{ij})$. Или он же

$$\text{II}({}^2\mathbf{B}) \equiv \frac{1}{2} [({}^2\mathbf{B} \cdot) {}^2\mathbf{B} - {}^2\mathbf{B} \cdot {}^2\mathbf{B}] = \frac{1}{2} [(B_{kk})^2 - B_{ij}B_{ji}].$$

И третий инвариант III это определитель (детерминант) компонент тензора: $\text{III}({}^2\mathbf{B}) \equiv \det {}^2\mathbf{B}$.

Это относилось ко всем тензорам второй сложности. Для случая же симметричного тензора справедливо следующее:

1° Собственные числа симметричного тензора вещественны.

2° Собственные оси для разных собственных чисел ортогональны.

○ Первое утверждение доказывается от противного. Если η — комплексный корень (8.2), определяющий собственный вектор \mathbf{a} , то сопряжённое число $\bar{\eta}$ также будет корнем. Ему соответствует собственный вектор $\bar{\mathbf{a}}$ с сопряжёнными компонентами. При этом

$$\begin{aligned} (8.1) \Rightarrow (\bar{\mathbf{a}} \cdot) {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} &= \eta \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} \cdot) {}^2\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\eta} \bar{\mathbf{a}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{\mathbf{a}} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}} = (\eta - \bar{\eta}) \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

Но слева здесь — нуль, поскольку $\mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot {}^2\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{a}$ и ${}^2\mathbf{B} = {}^2\mathbf{B}^\top$. Поэтому $\eta = \bar{\eta}$, то есть вещественно.

Столь же просто обосновывается и 2°:

$$\underbrace{\mathbf{a}_2 \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_2}_{=0} = (\eta_1 - \eta_2) \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2, \quad \eta_1 \neq \eta_2 \Rightarrow \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0. \quad \bullet$$

При различных собственных числах собственные векторы единичной длины \mathbf{e}_i образуют ортонормальный базис. Каковы же в нём компоненты тензора?

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_k &= \sum_k \eta_k \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3 \\ {}^2\mathbf{B} \cdot \underbrace{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k}_E &= \sum_k \eta_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

В общем случае $B_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j$, в базисе же $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ единичных взаимно ортогональных $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ собственных осей симметричного тензора:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \mathbf{e}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = \eta_1, \\ B_{12} &= \mathbf{e}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Матрица компонент диагональна и ${}^2\mathbf{B} = \sum \eta_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$. Здесь идёт суммирование по трём повторяющимся индексам, ведь используется особый базис.

Случай кратных главных значений можно рассмотреть с помощью предельного перехода. При $\eta_2 \rightarrow \eta_1$ любая линейная комбинация \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 в пределе удовлетворяет (8.1); это значит, что любая ось в плоскости $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ становится собственной. Если же совпадают все три собственных числа, то любая ось в пространстве — собственная. При этом ${}^2\mathbf{B} = \eta \mathbf{E}$, такие тензоры называются изотропными или шаровыми.

§ 9. Тензор поворота

Соотношение между двумя “правыми” (или двумя “левыми”) ортонормальными базами \mathbf{e}_i и $\hat{\mathbf{e}}_i$ вполне определено матрицей косинусов (§ 1)

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j \hat{\mathbf{e}}_j}_{\mathbf{E}} = o_{ij}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_j, \quad o_{ij}^{\circ} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j.$$

Но кто-то может написать и так:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i}_{\delta_{ji}} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{P} \equiv \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j = e_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + e_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + e_3 \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (9.1)$$

\mathbf{P} называется тензором поворота.

Компоненты \mathbf{P} и в начальном $\hat{\mathbf{e}}_i$, и в повернутом \mathbf{e}_i базисах образуют одну и ту же матрицу, равную транспонированной матрице косинусов $o_{ji}^{\circ} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j &= \underbrace{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k}_{\delta_{ik}} \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{e}_j = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j, \\ \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j &= \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_k \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_j}_{\delta_{kj}} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{P} &= o_{ji}^{\circ} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = o_{ji}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Тензор \mathbf{P} связывает два вектора — “до поворота” $\hat{\mathbf{r}} = \rho_i \hat{\mathbf{e}}_i$ и “после поворота” $\mathbf{r} = \rho_i \mathbf{e}_i$ — с теми же компонентами $\rho_i = \text{constant}$ у \mathbf{r} в актуальном повернутом базисе \mathbf{e}_i , что и у $\hat{\mathbf{r}}$ в неподвижном базисе $\hat{\mathbf{e}}_i$ (“вектор вращается вместе с базисом”): поскольку $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \Leftrightarrow \rho_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \rho_i \hat{\mathbf{e}}_i$, то

$$\mathbf{r} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (9.3)$$

(эта связь — обобщённая формула поворота Rodrigues’a).

Поворот же тензора второй сложности $\overset{\circ}{C} = C_{ij} \overset{\circ}{e}_i \overset{\circ}{e}_j$ в текущее (актуальное) положение $C = C_{ij} e_i e_j$ происходит так:

$$e_i C_{ij} e_j = e_i \overset{\circ}{e}_i \cdot \overset{\circ}{e}_p C_{pq} \overset{\circ}{e}_q \cdot \overset{\circ}{e}_j e_j \Leftrightarrow C = P \cdot \overset{\circ}{C} \cdot P^\top. \quad (9.4)$$

Существенное свойство тензора поворота — ортогональность — выражается как

$$\underset{e_i \overset{\circ}{e}_i}{P} \cdot \underset{\overset{\circ}{e}_j e_j}{P^\top} = \underset{\overset{\circ}{e}_i e_i}{P^\top} \cdot \underset{e_j \overset{\circ}{e}_j}{P} = \underset{\overset{\circ}{e}_i \overset{\circ}{e}_i}{E}, \quad (9.5)$$

то есть транспонированный тензор совпадает с обратным тензором: $P^\top = P^{-1} \Leftrightarrow P = P^{-\top}$.

Ортогональный тензор не меняет скалярное произведение векторов, сохраняя длины и углы (“метрику”)

$$(P \cdot a) \cdot (P \cdot b) = a \cdot P^\top \cdot P \cdot b = a \cdot E \cdot b = a \cdot b. \quad (9.6)$$

Для всех ортогональных тензоров $(\det O)^2 = 1$:

$$1 = \det E = \det (O \cdot O^\top) = (\det O) (\det O^\top) = (\det O)^2.$$

Тензор поворота это ортогональный тензор с $\det P = 1$. Но не только лишь тензоры поворота обладают свойством ортогональности. Когда в (9.1) один из базисов “правый”, а другой “левый”, тогда это комбинация поворота и отражения (“rotoreflexion”) $O = -E \cdot P$ с $\det(-E \cdot P) = -1$.

У любого бивалентного тензора в трёхмерном пространстве как минимум одно собственное число — корень (8.2) — действительное (некомплексное). Для тензора поворота оно равно единице

$$P \cdot a = \eta a \Rightarrow \overbrace{a \cdot \underbrace{P^\top \cdot P}_E \cdot a}^{P \cdot a} = \eta a \cdot \eta a \Rightarrow \eta^2 = 1.$$

Соответствующая собственная ось называется осью поворота; теорема Euler’a о конечном повороте в том и состоит, что такая ось существует. Если k — орт этой оси, а ϑ — величина угла поворота, то тензор поворота представим как

$$P(k, \vartheta) = E \cos \vartheta + k \times E \sin \vartheta + k k (1 - \cos \vartheta). \quad (9.7)$$

Доказывается эта формула так. Направление k при повороте не меняется ($P \cdot k = k$), поэтому на оси поворота $\overset{\circ}{e}_3 = e_3 = k$.

В перпендикулярной плоскости (рис. 5) $\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \vartheta - \mathbf{e}_2 \sin \vartheta$, $\dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 \sin \vartheta + \mathbf{e}_2 \cos \vartheta$, $\mathbf{P} = \mathbf{e}_i \dot{\mathbf{e}}_i \Rightarrow (9.7)$.

Из (9.7) и (9.3) получаем формулу поворота Родрига в параметрах \mathbf{k} и ϑ :

$$\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{r}} (1 - \cos \vartheta).$$

В параметрах конечного поворота транспонирование, оно же обращение, тензора \mathbf{P} эквивалентно перемене направления поворота — знака угла ϑ

$$\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}|_{\vartheta=-\vartheta} = \mathbf{E} \cos \vartheta - \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta).$$

Пусть теперь тензор поворота меняется со временем: $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$. Псевдовектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вводится через \mathbf{P} таким путём. Дифференцируем тождество ортогональности (9.5) по времени*

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top = 2\mathbf{0}.$$

Тензор $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top$ (по (3.8) $(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top)^\top = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top$) оказался антисимметричным. Поэтому согласно (7.3) он представим сопутствующим вектором как $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top$. То есть

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times \quad (9.8)$$

Помимо этого общего представления вектора $\boldsymbol{\omega}$, для него есть и другие. Например, через параметры конечного поворота.

Производная $\dot{\mathbf{P}}$ в параметрах конечного поворота в общем случае (оба параметра — и единичный вектор \mathbf{k} , и угол ϑ — переменны во времени):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= (\mathbf{P}^S + \mathbf{P}^A)^\bullet = \left(\overbrace{\mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta)}^{\mathbf{P}^S} + \overbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}^{\mathbf{P}^A} \right)^\bullet = \\ &= \underbrace{(\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k})(1 - \cos \vartheta)}_{\dot{\mathbf{P}}^S} + \underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}_{\dot{\mathbf{P}}^A}. \end{aligned}$$

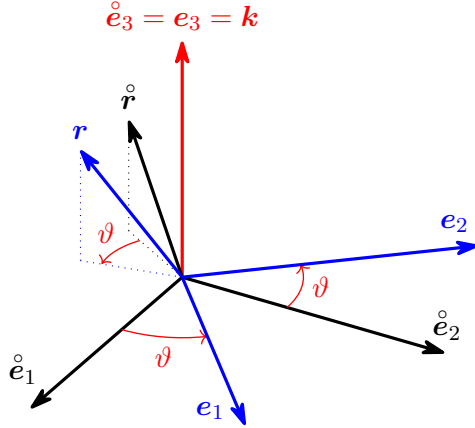
Находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top &= (\dot{\mathbf{P}}^S + \dot{\mathbf{P}}^A) \cdot (\mathbf{P}^S - \mathbf{P}^A) = \\ &= \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S + \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S - \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A - \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A, \end{aligned}$$

* Various notations are used to denote the time derivative. In addition to the Leibniz's notation dx/dt , the very popular short-hand one is the “over-dot” Newton's notation \dot{x} .

$$\mathring{e}_i = \mathring{e}_i \cdot e_j e_j$$

$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \\ \mathring{e}_2 \\ \mathring{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(90^\circ + \vartheta) & \cos 90^\circ \\ \cos(90^\circ - \vartheta) & \cos \vartheta & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathring{e}_1 = e_1 \cos \vartheta - e_2 \sin \vartheta$$

$$\mathring{e}_2 = e_1 \sin \vartheta + e_2 \cos \vartheta$$

$$\mathring{e}_3 = e_3 = k$$

$$P = e_1 \mathring{e}_1 + e_2 \mathring{e}_2 + e_3 \mathring{e}_3 =$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{e_1 \mathring{e}_1}^{e_1 e_1 \cos \vartheta - e_1 e_2 \sin \vartheta} + \overbrace{e_2 \mathring{e}_2}^{e_2 e_1 \sin \vartheta + e_2 e_2 \cos \vartheta} + \overbrace{e_3 \mathring{e}_3}^{kk} = \\ &= E \cos \vartheta - \underbrace{e_3 e_3}_{kk} \cos \vartheta + \underbrace{(e_2 e_1 - e_1 e_2)}_{e_3 \times e_i e_i = \epsilon_{3ij} e_j e_i} \sin \vartheta + kk = \\ &= E \cos \vartheta + k \times E \sin \vartheta + kk (1 - \cos \vartheta) \end{aligned}$$

рисунк 5
“Конечный поворот”

ИСПОЛЬЗУЯ

$$\begin{aligned}
& \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 = \text{constant} \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} = 0, \\
& \mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} = \mathbf{k}\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\
& (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} = \mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{k}\mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\
& \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\
& (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \\
& (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\mathbf{k}, \\
(6.13) \quad & \Rightarrow (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} - \widehat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{E}, \\
(6.12) \quad & \Rightarrow \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} = (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}) \times \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k})\mathbf{k} - \mathbf{k}(\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) = \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \\
& \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S = \\
& = (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k})(1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + \\
& \quad + (\widehat{\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k})(1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) = \\
& = (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k}) \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\widehat{\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta)^2 = \\
& = (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\
& \quad + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} - 2\dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos^2 \vartheta = \\
& = (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta), \\
& \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S = \\
& = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \\
& \quad + (\widehat{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}) \cdot \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \dot{\vartheta} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
& = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta), \\
& \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A = \\
& = (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k})(1 - \cos \vartheta) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta = \\
& = \widehat{\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E})} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + \left(\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \right) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
& \quad = -\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta), \\
& \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin^2 \vartheta = \\
& \quad = (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\Gamma &= \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S + \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S - \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A - \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - E) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + \\
&\quad + \mathbf{k} \times E \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times E \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\
&\quad + \mathbf{k} \times E \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) - (\mathbf{k}\mathbf{k} - E) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta = \\
&= \mathbf{k} \times E \dot{\vartheta} + (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}})(1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times E \sin \vartheta \cos \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times E \dot{\vartheta} + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times E (1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times E \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times E \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times E \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times E \sin \vartheta \cos \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}) \times E \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times E (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times E \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times E \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times E (1 - \cos \vartheta).
\end{aligned}$$

Этот результат, подставленный в определение (9.8) псевдовектора $\boldsymbol{\omega}$, даёт

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} (1 - \cos \vartheta). \quad (9.9)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ получился разложенным по трём взаимно ортогональным направлениям — \mathbf{k} , $\dot{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}$. При неподвижной оси поворота $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \dot{\vartheta}$.

Ещё одно представление $\boldsymbol{\omega}$ связано с компонентами тензора поворота (9.2). Поскольку $\mathbf{P} = o_{ji}^{\circ} \mathring{e}_i \mathring{e}_j$, $\mathbf{P}^\Gamma = o_{ij}^{\circ} \mathring{e}_i \mathring{e}_j$, а векторы начального базиса \mathring{e}_i неподвижны (со временем не меняются), то

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}} &= \dot{o}_{ji}^{\circ} \mathring{e}_i \mathring{e}_j, \quad \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\Gamma = \dot{o}_{ni}^{\circ} o_{nj}^{\circ} \mathring{e}_i \mathring{e}_j, \\
\boldsymbol{\omega} &= -\frac{1}{2} \dot{o}_{ni}^{\circ} o_{nj}^{\circ} \mathring{e}_i \times \mathring{e}_j = \frac{1}{2} \in_{jik} o_{nj}^{\circ} \dot{o}_{ni}^{\circ} \mathring{e}_k. \quad (9.10)
\end{aligned}$$

Отметим и формулы

$$\begin{aligned}
(9.8) &\Rightarrow \mathring{e}_i \mathring{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \mathring{e}_i \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \\
(9.8) &\Rightarrow \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}_i \mathring{e}_i \cdot \mathring{e}_j \mathbf{e}_j)_{\times} = -\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_i)_{\times} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_i \times \dot{\mathbf{e}}_i. \quad (9.11)
\end{aligned}$$

Не всё то вектор, что имеет величину и направление. Поворот тела вокруг оси представляет, казалось бы, вектор, имеющий численное значение, равное углу поворота, и направление, совпадающее с направлением оси вращения. Однако, два таких поворота не складываются как векторы, когда углы поворота не бесконечно малые. На самом же деле последовательные повороты не складываются, а умножаются.

Можно ли складывать угловые скорости? — Да, ведь угол поворота в $\dot{\vartheta}$ бесконечно малый. — Но только при вращении вокруг неподвижной оси?

...

§ 10. Варьирование

Далее часто будет использоваться сходная с дифференцированием операция варьирования. Не отсылая читателя к книгам о вариационном исчислении (calculus of variations), ограничимся представлениями о вариации δx величины x как о задаваемом нами бесконечно малом приращении, совместимом с ограничениями (связями, constraints). Если ограничений для x нет, то δx произвольна (случайна). Но когда $x = x(y)$ — функция независимого аргумента y , тогда $\delta x = x'(y)\delta y$.

Записи с вариациями имеют те же особенности, как и записи с дифференциалами. Если, например, δx и δy — вариации x и y , u и v — конечные величины, то пишем $u\delta x + v\delta y = \delta w$, а не w — даже когда δw не является вариацией величины w ; в этом случае δw это единое обозначение. Разумеется, если $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ и $\partial_x v = \partial_y u$ ($\frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial y} u$), то сумма δw будет вариацией некой w .

Варьируя тождество (9.5), получим $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = -\mathbf{O} \cdot \delta \mathbf{O}^\top$. Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор $\delta \mathbf{o}$ как $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$. Приходим к соотношениям

$$\delta \mathbf{O} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{O}, \quad \delta \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top \right)_\times, \quad (10.1)$$

аналогичным (9.8). Вектор бесконечно малого поворота $\delta \mathbf{o}$ это не “вариация \mathbf{o} ”, но единый символ (в отличие от $\delta \mathbf{O}$).

Малый поворот определяется вектором $\delta \mathbf{o}$, но конечный поворот тоже возможно представить как вектор

...

§ 11. Полярное разложение

Любой тензор второй сложности \mathbf{F} с $\det F_{ij} \neq 0$ (не сингулярный тензор) может быть разложен как

...

Example. Polar decompose tensor $\mathbf{C} = C_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, where \mathbf{e}_k are mutually perpendicular unit vectors of basis, and C_{ij} are tensor's components

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & 11 \\ 10 & -15 & 23 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O} = O_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{O}_2$$

$$O_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{S}_R, \quad \mathbf{O}^\top \cdot \mathbf{C} = \mathbf{S}_R$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_L \cdot \mathbf{O}, \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{O}^\top = \mathbf{S}_L$$

$$S_{Rij} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -10 \\ 5 & 0 & 25 \\ -10 & 25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$S_{Lij} = \begin{bmatrix} 104/5 & 47/5 & 5 \\ 47/5 & -129/5 & -10 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

...

§ 12. Тензоры в косоугольном базисе

До сих пор использовался базис трёх взаимно перпендикулярных единичных векторов \mathbf{e}_i . Теперь возьмём базис из любых трёх линейно независимых (некомпланарных) векторов \mathbf{a}_i .

Дekomпозиция (разложение) вектора \mathbf{v} в базисе \mathbf{a}_i (рис. 6) есть линейная комбинация

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i. \quad (12.1)$$

Соглашение о суммировании обретает новые положения: индекс суммирования повторяется на разных уровнях того же одночлена, а свободный индекс остаётся на одинаковой высоте в каждой части выражения ($a_i = b_{ij}c^j$ — корректно, $a_i = b_{kk}^i$ — дважды ошибочно).

В таком базисе уже $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i = v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i \neq v^i$, ведь тут $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k \neq \delta_{ik}$.

Дополним же базис \mathbf{a}_i ещё другой тройкой векторов \mathbf{a}^i , называемых кобазисом или взаимным базисом, чтобы

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j &= \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{a}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{a}^i. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Это — основное свойство кобазиса. Ортонормированный (ортонормальный) базис может быть определён как совпадающий со своим кобазисом: $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$.

Для, к примеру, первого вектора кобазиса \mathbf{a}^1

$$\begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \gamma \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 = 1/\gamma \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \\ \gamma = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 \end{cases}$$

Коэффициент γ получился равным (с точностью до знака для “левой” тройки \mathbf{a}_i) объёму параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a}_i . В § 6 тот же объём был представлен как \sqrt{g} ,

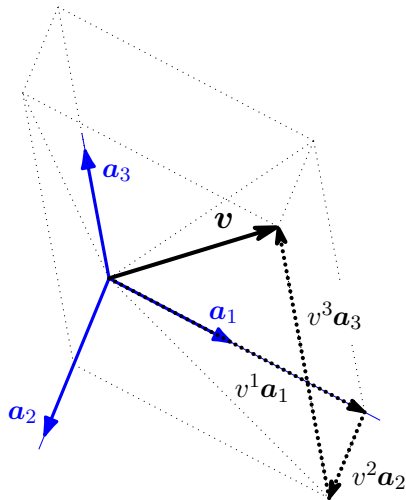


рисунок 6

и это не без причины, ведь он совпадает с квадратным корнем из грамиана $g \equiv \det g_{ij}$ — определителя симметричной матрицы J. P. Gram'a $g_{ij} \equiv \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$.

○ Доказательство похоже на вывод (6.7). “Тройное произведение” $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k$ в каком-нибудь ортонормальном базисе \mathbf{e}_i вычислимо как детерминант (с “—” для “левой” тройки \mathbf{a}_i) по строкам

$$\in_{ijk} \equiv \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

или по столбцам

$$\in_{pqr} \equiv \mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{a}_r = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}.$$

Произведение определителей $\in_{ijk} \in_{pqr}$ равно определителю произведения матриц, а элементы последнего — суммы вида $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_s = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p$, в результате

$$\in_{ijk} \in_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_r \end{bmatrix};$$

$$i=p=1, j=q=2, k=r=3 \Rightarrow \in_{123} \in_{123} = \det_{i,j} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = \det_{i,j} g_{ij}. \quad \bullet$$

Представляя \mathbf{a}^1 и остальные векторы кобазиса суммой

$$\pm 2\sqrt{g} \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \overset{+ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{- \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2},$$

приходим к общей формуле (с “—” для “левой” тройки \mathbf{a}_i)

$$\mathbf{a}^i = \pm \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{ijk} \mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k, \quad \sqrt{g} \equiv \pm \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 > 0. \quad (12.3)$$

Здесь e^{ijk} по-прежнему символ перестановки Veblen'a (± 1 или 0): $e^{ijk} \equiv e_{ijk}$. Произведение $\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k = \in_{jkn} \mathbf{a}^n$, компоненты тензора Лёви-Чивиты $\in_{jkn} = \pm e_{jkn} \sqrt{g}$, а по (6.8) $e^{ijk} e_{jkn} = 2\delta_n^i$. Так что

$$\mathbf{a}^1 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{a}^2 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{a}^3 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2).$$

Example. Get cobasis for basis \mathbf{a}_i when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$\sqrt{g} = -\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2;$$

$$-\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_2 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$-\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_2 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2,$$

$$-\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$$

and finally

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^3 = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

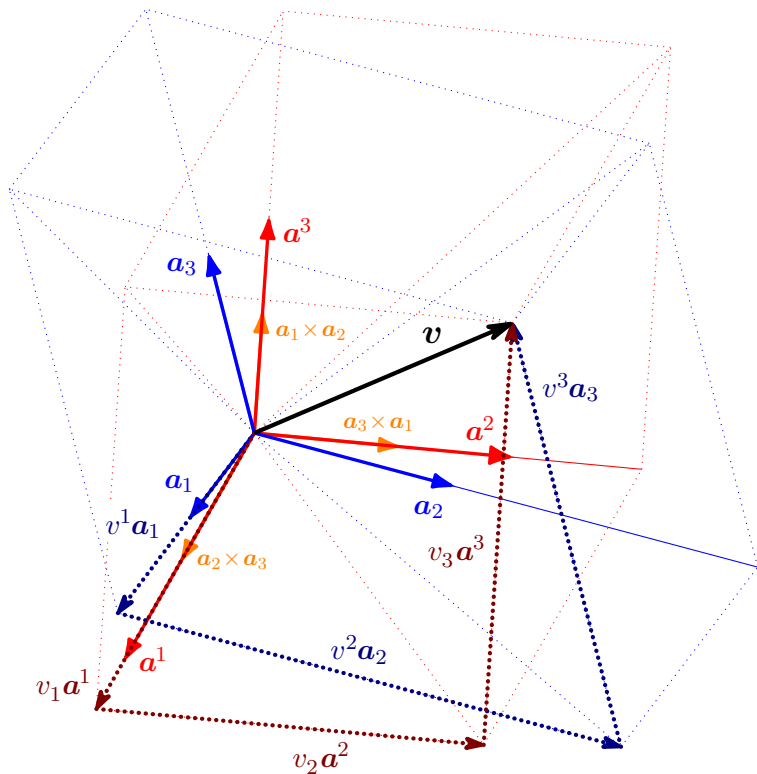
Имея кобазис, возможно не только разложить по нему любой вектор (рис. 7), но и найти коэффициенты разложения (12.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{a}_i = v_i \mathbf{a}^i, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^i &= v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = v^i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Коэффициенты v_i называются ковариантными компонентами вектора \mathbf{v} , а v^i — его контравариантными* компонентами.

Есть литература о тензорах, где introducing existence and различают ковариантные и контравариантные... векторы (и “ковекторы”, “dual vectors”). Не сто́ит вводить читателя в заблуждение: вектор-то один и тот же, просто разложение по двум разным базисам даёт два набора компонент.

* Потому что они меняются обратно (contra) изменению длин базисных векторов \mathbf{a}_i .



$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \sqrt{g} = 0.56274$$

$$1/\sqrt{g} = 1.77703$$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_i^j$$

рисунок 7
 “Разложение вектора в косоугольном базисе”

От векторов перейдём к тензорам второй сложности. Имеем четыре комплекта диад: $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$, $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^j$, $\mathbf{a}^i \mathbf{a}_j$. Сопасаующиеся коэффициенты в декомпозиции тензора называются его контравариантными, ковариантными и смешанными компонентами:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} &= B^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = B_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j = B_j^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = B_i^j \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j, \\ B^{ij} &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j, \quad B_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \\ B_j^i &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \quad B_i^j = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Для двух видов смешанных компонент точка в индексе это просто свободное место: у B_j^i верхний индекс “ i ” — первый, а нижний “ j ” — второй.

Компоненты единичного (“метрического”) тензора \mathbf{E}

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}^k \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k \mathbf{a}^k = g_{jk} \mathbf{a}^j \mathbf{a}^k = g^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k: \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \equiv g_{ij}, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j \equiv g^{ij}; \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= g_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \cdot g^{nk} \mathbf{a}_n \mathbf{a}_k = g_{ij} g^{jk} \mathbf{a}^i \mathbf{a}_k = \mathbf{E} \Rightarrow g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Вдобавок к (12.2) и (12.3) открылся ещё один способ найти векторы кобазиса — через матрицу g^{ij} , обратную матрице Грама g_{ij} . И наоборот:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk} \mathbf{a}_j \delta_k^i = g^{ji} \mathbf{a}_j, \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk} \mathbf{a}^j \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk} \mathbf{a}^j \delta_i^k = g_{ji} \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Example. Using reversed Gram matrix, get cobasis for basis \mathbf{a}_i when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det g_{ij} = 4,$$

$$\text{adj } g_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^\top,$$

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{\text{adj } g_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Using $\mathbf{a}^i = g^{ij} \mathbf{a}_j$

$$\mathbf{a}^1 = g^{11} \mathbf{a}_1 + g^{12} \mathbf{a}_2 + g^{13} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^2 = g^{21} \mathbf{a}_1 + g^{22} \mathbf{a}_2 + g^{23} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^3 = g^{31} \mathbf{a}_1 + g^{32} \mathbf{a}_2 + g^{33} \mathbf{a}_3 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3.$$

...

Единичный тензор (unit tensor, identity tensor, metric tensor)

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{trace } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{trace } \mathbf{A} \neq \text{not anymore } A_{jj}$$

Thus for, say, trace of some tensor $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j$: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{trace } \mathbf{A}$, you have

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{r}_{\partial k} \mathbf{r}^k = A_{ij} \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = A_{ij} g^{ij}$$

...

Тензор поворота (rotation tensor)

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}_i \hat{\mathbf{a}}^i = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{-\top}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \hat{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^\top$$

$$\mathbf{P}^\top = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \hat{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \mathbf{P}^{-1}$$

...

... Характеристическое уравнение (8.2) быстро приводит к тождеству Кэли–Гамильтона (Cayley–Hamilton)

$$\begin{aligned} -\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{I} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{II} \mathbf{B} + \mathbf{III} \mathbf{E} &= {}^2\mathbf{0}, \\ -\mathbf{B}^3 + \mathbf{I} \mathbf{B}^2 - \mathbf{II} \mathbf{B} + \mathbf{III} \mathbf{E} &= {}^2\mathbf{0}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

§ 13. Тензорные функции

В представлении о функции $y=f(x)$ как отображении (морфизме) $f: x \mapsto y$, прообраз (аргумент) x и образ (результат) y могут быть тензорами любых сложностей.

Рассмотрим хотя бы скалярную функцию двухвалентного тензора $\varphi=\varphi(\mathbf{B})$. Примеры — $\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi$ (или $\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}$) и $\mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{B}$. Тогда в каждом базисе \mathbf{a}_i в паре с кобазисом \mathbf{a}^i имеем функцию $\varphi(B_{ij})$ девяти числовых аргументов — компонент B_{ij} тензора \mathbf{B} . Для примера

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \cdot \Phi = B_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \cdot \cdot \mathbf{a}_m \mathbf{a}_n \Phi^{mn} = B_{ij} \Phi^{ji} = \varphi(B_{ij}).$$

С любым переходом к новому базису результат не меняется: $\varphi(B'_{ij}) = \varphi(B'_{ij}) = \varphi(\mathbf{B})$.

Дифференцирование $\varphi(\mathbf{B})$ выглядит как

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} dB_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top. \quad (13.1)$$

Тензор $\partial\varphi/\partial\mathbf{B}$ называется производной функции φ по аргументу \mathbf{B} ; $d\mathbf{B}$ — дифференциал тензора \mathbf{B} , $d\mathbf{B} = dB_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$; $\partial\varphi/\partial B_{ij}$ — компоненты (контравариантные) $\partial\varphi/\partial\mathbf{B}$

$$\mathbf{a}^i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{a}^j = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \cdot \mathbf{a}^j \mathbf{a}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j.$$

...

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \cdot \Phi$$

$$d\varphi = d(\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi) = d\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi = \Phi \cdot \cdot d\mathbf{B} = \Phi^\top \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top, \quad \frac{\partial(\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi)}{\partial \mathbf{B}} = \Phi^\top$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{qp}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{pq}$$

...

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

$$d\varphi = d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = d\ldots$$

...

Но согласно опять-таки (12.8) $-\mathbf{B}^2 + \mathbf{I}\mathbf{B} - \mathbf{II}\mathbf{E} + \mathbf{III}\mathbf{B}^{-1} = {}^2\mathbf{0}$, поэтому

...

Скалярная функция $\varphi(\mathbf{B})$ называется изотропной, если она не чувствительна к повороту аргумента:

$$\varphi(\mathbf{B}) = \varphi(\mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{O}^\top) = \varphi(\overset{\circ}{\mathbf{B}}) \quad \forall \mathbf{O} = \mathbf{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i = \mathbf{a}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i = \mathbf{O}^{-\top}$$

для любого ортогонального тензора \mathbf{O} (тензора поворота, §9).

Симметричный тензор \mathbf{B}^S полностью определяется тройкой инвариантов и угловой ориентацией собственных осей (они же взаимно ортогональны, §8). Ясно, что изотропная функция $\varphi(\mathbf{B}^S)$ симметричного аргумента является функцией лишь инвариантов $\mathbf{I}(\mathbf{B}^S)$, $\mathbf{II}(\mathbf{B}^S)$, $\mathbf{III}(\mathbf{B}^S)$; она дифференцируется согласно (??), где транспонирование излишне.

§ 14. Тензорные поля. Пространственное дифференцирование

Тензорное поле — это тензор, меняющийся от точки к точке (переменный в пространстве, зависящий от координат)

Пусть в каждой точке некоторой области трёхмерного пространства определена величина ς . Тогда имеем поле $\varsigma = \varsigma(\mathbf{r})$, где \mathbf{r} — вектор положения (вектор-радиус) точки пространства. Величина ς может быть тензором любой сложности. Пример скалярного поля — поле температуры в среде, векторного поля — скорости частиц жидкости.

Не только для решения прикладных задач, но нередко и в “чистой теории” вместо аргумента \mathbf{r} используется набор (какая-либо тройка) криволинейных координат q^i . Если непрерывно менять лишь одну координату из трёх, получается координатная линия. Каждая точка трёхмерного пространства лежит на пересе-

чении трёх координатных линий (рис. 8). Вектор положения точки выражается через набор координат как отношение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$.

Curvilinear coordinates may be derived from a set of rectangular (“cartesian”) coordinates by using a transformation that is locally invertible (a one-to-one map) at each point. Therefore, rectangular coordinates любой точки могут быть преобразованы to its curvilinear coordinates и обратно.

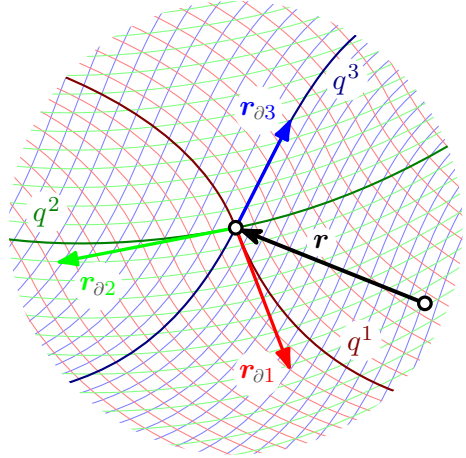


рисунок 8

Commonly used sets of coordinates are rectangular (“cartesian”), spherical and cylindrical.

The differential of a function presents a change in the linearization of this function.

частная производная

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$$

дифференциал $\varsigma(q^i)$

$$d\varsigma = \frac{\partial \varsigma}{\partial q^i} dq^i = \partial_i \varsigma dq^i \quad (14.1)$$

Линейность

$$\partial_i (\lambda p + \mu q) = \lambda (\partial_i p) + \mu (\partial_i q) \quad (14.2)$$

“Product rule”

$$\partial_i (p \circ q) = (\partial_i p) \circ q + p \circ (\partial_i q) \quad (14.3)$$

...

Local basis $\mathbf{r}_{\partial i}$ Дифференциал вектора положения $\mathbf{r}(q^i)$ есть

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = dq^i \mathbf{r}_{\partial i}, \quad \mathbf{r}_{\partial i} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \mathbf{r} \quad (14.4)$$

...

Local cobasis \mathbf{r}^i , $\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \delta_j^i$

...

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial \zeta}{\partial q^i} \mathbf{r}^i = \partial_i \zeta \mathbf{r}^i \\ d\zeta &= \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \partial_i \zeta \mathbf{r}^i \cdot dq^j \mathbf{r}_{\partial j} = \partial_i \zeta dq^i \end{aligned} \quad (14.5)$$

...

Bivalent unit tensor (identity tensor, metric tensor) \mathbf{E} , the one which is neutral (3.6) to the dot product operation, может быть представлен как

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_{\partial i} = \underbrace{\mathbf{r}^i \partial_i}_{\nabla} \mathbf{r}, \quad (14.6)$$

где появляется дифференциальный оператор “набла”

$$\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i. \quad (14.7)$$

...

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \zeta = \partial_i \zeta dq^i \quad (14.8)$$

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \underbrace{\mathbf{E}}_{\nabla} \mathbf{r}$$

...

Дивергенция диадного произведения двух векторов

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (ab) &= \mathbf{r}^i \partial_i \cdot (ab) = \mathbf{r}^i \cdot \partial_i (ab) = \mathbf{r}^i \cdot (\partial_i a) \mathbf{b} + \mathbf{r}^i \cdot a (\partial_i \mathbf{b}) = \\ &= (\mathbf{r}^i \cdot \partial_i a) \mathbf{b} + a \cdot \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{b}) = (\mathbf{r}^i \partial_i \cdot a) \mathbf{b} + a \cdot (\mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{b}) = \\ &= (\nabla \cdot a) \mathbf{b} + a \cdot (\nabla \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (14.9)$$

— тут нет нужды разворачивать векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , развернув лишь дифференциальный оператор ∇ .

...

Градиент векторного произведения двух векторов, применяя “product rule” (14.3) и соотношение (6.5) для любых двух векто-

ров (частная производная ∂_i некоторого вектора по скалярной координате q^i это тоже вектор)

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{r}^i \partial_i (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \partial_i \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \partial_i \mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \\ &= \nabla \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \nabla \mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (14.10)\end{aligned}$$

...

Градиент dot product'а двух векторов

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \mathbf{r}^i \partial_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{r}^i \mathbf{a} \cdot (\partial_i \mathbf{b}) = \\ &= (\mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}. \quad (14.11)\end{aligned}$$

...

...

§ 15. Интегральные теоремы

Для векторных полей известны интегральные теоремы Gauss'а и Stokes'а.

Gauss' theorem (divergence theorem) enables an integral taken over a volume to be replaced by one taken over the closed surface bounding that volume, and vice versa.

Stokes' theorem enables an integral taken around a closed curve to be replaced by one taken over *any* surface bounded by that curve. Stokes' theorem relates a line integral around a closed path to a surface integral over what is called a *capping surface* of the path.

Теорема Гаусса о дивергенции — про то, как заменить объёмный интеграл поверхностным (и наоборот). В этой теореме рассматривается поток (ef)flux вектора через ограничивающую объём V замкнутую поверхность $\mathcal{O}(\partial V)$ с единичным вектором внешней нормали \mathbf{n}

$$\oint_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\mathcal{O} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV. \quad (15.1)$$

Объём V нарезается тремя семействами координатных поверхностей на множество бесконечно малых элементов. Поток через поверхность $\mathcal{O}(\partial V)$ равен сумме потоков через края получившихся элементов. В бесконечной малости каждый такой элемент — маленький локальный дифференциальный кубик (параллелепипед). ... Поток вектора \mathbf{a} через грани малого кубика объёма dV есть $\sum_{i=1}^6 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a} \mathcal{O}_i$, а через сам этот объём поток равен $\nabla \cdot \mathbf{a} dV$.

Похожая трактовка этой теоремы есть, к примеру, в курсе Richard'a Feynman'a [84].

(рисунок с кубиками)

to dice — нарезать кубиками

small cube, little cube

локально ортонормальные координаты $\boldsymbol{\xi} = \xi_i \mathbf{n}_i$, $d\boldsymbol{\xi} = d\xi_i \mathbf{n}_i$,
 $\nabla = \mathbf{n}_i \partial_i$

разложение вектора $\mathbf{a} = a_i \mathbf{n}_i$

Теорема Стокса о циркуляции выражается равенством

...

...

§ 16. Тензоры кривизны

The *Riemann curvature tensor* or *Riemann–Christoffel tensor* (after **Bernhard Riemann** and **Elwin Bruno Christoffel**) is the most common method used to express the curvature of Riemannian manifolds. It's a tensor field, it assigns a tensor to each point of a Riemannian manifold, that measures the extent to which the metric tensor is not locally isometric to that of “flat” space. The curvature tensor measures noncommutativity of the covariant derivative, and as such is the integrability obstruction for the existence of an isometry with “flat” space.

~ from Wikipedia, the free encyclopedia

Рассматривая тензорные поля в криволинейных координатах (§ 14), мы исходили из представления вектора-радиуса (вектора положения) точки функцией этих координат: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$. Этим отношением порождаются выражения

- ✓ векторов локального касательного базиса $\mathbf{r}_{\partial i} \equiv \partial \mathbf{r} / \partial q^i \equiv \partial_i \mathbf{r}$,
- ✓ компонент $g_{ij} \equiv \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j}$ и $g^{ij} \equiv \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = g_{ij}^{-1}$ единичного “метрического” тензора $\mathbf{E} = \mathbf{r}_{\partial i} \mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_{\partial i} = g_{jk} \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k = g^{jk} \mathbf{r}_{\partial j} \mathbf{r}_{\partial k}$,
- ✓ векторов локального взаимного кокасательного базиса $\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \delta_j^i$, $\mathbf{r}^i = g^{ij} \mathbf{r}_{\partial j}$,
- ✓ дифференциального набла-оператора Hamilton’а $\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$, $\mathbf{E} = \nabla \mathbf{r}$,
- ✓ полного дифференциала $d\xi = d\mathbf{r} \cdot \nabla \xi$,
- ✓ частных производных касательного базиса (вторых частных производных \mathbf{r}) $\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \equiv \partial_i \partial_j \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_{\partial j}$,
- ✓ символов “связности” Христоффеля (Christoffel symbols) $\Gamma_{ij}^k \equiv \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}^k$ и $\Gamma_{ijk} \equiv \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k}$.

Представим теперь, что функция $\mathbf{r}(q^k)$ не известна, но зато в каждой точке пространства определены шесть независимых элементов положительной симметричной метрической матрицы Грама $g_{ij}(q^k)$.

Билинейная форма

...

Поскольку шесть функций $g_{ij}(q^k)$ происходят от векторной функции $\mathbf{r}(q^k)$, то между элементами g_{ij} существуют некие соотношения.

Дифференциал $d\mathbf{r}$ (14.4) — полный (точный). Это истинно тогда и только тогда, когда вторые частные производные коммутируют:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\partial k} dq^k \Leftrightarrow \partial_i \mathbf{r}_{\partial j} = \partial_j \mathbf{r}_{\partial i} \text{ или } \mathbf{r}_{\partial i \partial j} = \mathbf{r}_{\partial j \partial i}.$$

Но это условие уже обеспечено симметрией g_{ij}

...

метрическая (“аффинная”) связность ∇_i , её же называют “ковариантная производная”

$$\mathbf{r}_{\partial i \partial j} = \underbrace{\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}^k}_{\Gamma_{ij}^k} \mathbf{r}_{\partial k} = \underbrace{\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}^k}_{\Gamma_{ij\dot{k}}^k} \mathbf{r}_{\partial k}$$

$$\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_{\partial k} = \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{\partial k} = \mathbf{r}_{\partial i \partial j}$$

covariant derivative (affine connection) is only defined for vector fields

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \partial_i (v^j \mathbf{r}_{\partial j}) = \mathbf{r}^i (\partial_i v^j \mathbf{r}_{\partial j} + v^j \mathbf{r}_{\partial i \partial j})$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_{\partial j} \nabla_i v^j, \quad \nabla_i v^j \equiv \partial_i v^j + \Gamma_{in}^j v^n$$

$$\nabla \mathbf{r}_{\partial i} = \mathbf{r}^k \partial_k \mathbf{r}_{\partial i} = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{\partial k \partial i} = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{\partial n} \Gamma_{ki}^n, \quad \nabla_i \mathbf{r}_{\partial n} = \Gamma_{in}^k \mathbf{r}_{\partial k}$$

Christoffel symbols describe a metric (“affine”) connection, that is how the basis changes from point to point.

символы Христоффеля это “компоненты связности” в локальных координатах

...

тензор кручения ${}^3\mathfrak{T}$ с компонентами

$$\mathfrak{T}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

determines the antisymmetric part of a connection

...

симметрия $\Gamma_{ij\dot{k}} = \Gamma_{ji\dot{k}}$, поэтому $3^3 - 3 \cdot 3 = 18$ разных (независимых) $\Gamma_{ij\dot{k}}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^n g_{nk} &= \Gamma_{ijk} = \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} = \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial i \partial j} + \mathbf{r}_{\partial j \partial i}) \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial j \partial k} - \mathbf{r}_{\partial k \partial j}) \cdot \mathbf{r}_{\partial i} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial i \partial k} - \mathbf{r}_{\partial k \partial i}) \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \mathbf{r}_{\partial i \partial k} \cdot \mathbf{r}_{\partial j}) + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial j \partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \mathbf{r}_{\partial j \partial k} \cdot \mathbf{r}_{\partial i}) - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial k \partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j} + \mathbf{r}_{\partial k \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial i}) = \\
&= \frac{1}{2}(\partial_i(\mathbf{r}_{\partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k}) + \partial_j(\mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial k}) - \partial_k(\mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j})) = \\
&= \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad (16.1)
\end{aligned}$$

Все символы Christoffel'я тождественно равны нулю лишь в ортонормальной (декартовой) системе. (А какие они для ко-соугольной?)

Дальше: $d\mathbf{r}_{\partial i} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{r}_{\partial i} = dq^k \partial_k \mathbf{r}_{\partial i} = \mathbf{r}_{\partial k \partial i} dq^k$ — тоже полные дифференциалы.

$$d\mathbf{r}_{\partial k} = \partial_i \mathbf{r}_{\partial k} dq^i = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial k}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial k}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial k}}{\partial q^3} dq^3$$

Поэтому $\partial_i \partial_j \mathbf{r}_{\partial k} = \partial_j \partial_i \mathbf{r}_{\partial k}$, $\partial_i \mathbf{r}_{\partial j \partial k} = \partial_j \mathbf{r}_{\partial i \partial k}$, и трёхиндексный объект из векторов третьих частных производных

$$\mathbf{r}_{\partial i \partial j \partial k} \equiv \partial_i \partial_j \partial_k \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_{\partial j \partial k} \quad (16.2)$$

симметричен по первому и второму индексам (а не только по второму и третьему). И тогда равен нулю ⁴ $\mathbf{0}$ следующий тензор четвёртой сложности — *тензор кривизны Riemann'a* (или *тензор Riemann'a–Christoffel'я*)

$${}^4\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{hijk} \mathbf{r}^h \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k, \quad \mathfrak{R}_{hijk} \equiv \mathbf{r}_{\partial h} \cdot (\mathbf{r}_{\partial j \partial i \partial k} - \mathbf{r}_{\partial i \partial j \partial k}). \quad (16.3)$$

Выразим компоненты \mathfrak{R}_{ijkn} через метрическую матрицу g_{ij} . Начнём с дифференцирования локального кобазиса:

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial k} = \delta_k^i \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial j \partial k} = 0 \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{r}^k.$$

...

Шесть независимых компонент: \mathfrak{R}_{1212} , \mathfrak{R}_{1213} , \mathfrak{R}_{1223} , \mathfrak{R}_{1313} , \mathfrak{R}_{1323} , \mathfrak{R}_{2323} .

...

Симметричный бивалентный *тензор кривизны Ricci*

$$\mathcal{R} \equiv \frac{1}{4} \mathfrak{R}_{abij} \mathbf{r}^a \times \mathbf{r}^b \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j = \frac{1}{4} \epsilon^{abp} \epsilon^{ijq} \mathfrak{R}_{abij} \mathbf{r}_{\partial p} \mathbf{r}_{\partial q} = \mathcal{R}^{pq} \mathbf{r}_{\partial p} \mathbf{r}_{\partial q}$$

(коэффициент $\frac{1}{4}$ используется тут для удобства) с компонентами

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{11} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{2323}, \\ \mathcal{R}^{21} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1323}, \quad \mathcal{R}^{22} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1313}, \\ \mathcal{R}^{31} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1223}, \quad \mathcal{R}^{32} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1213}, \quad \mathcal{R}^{33} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1212}.\end{aligned}$$

Равенство тензора Риччи нулю $\mathcal{R} = {}^2\mathbf{0}$ (в компонентах это шесть уравнений $\mathcal{R}^{ij} = \mathcal{R}^{ji} = 0$) есть **необходимое** условие интегрируемости (“совместности”, “compatibility”) для нахождения вектора-радиуса $\mathbf{r}(q^k)$ по полю $g_{ij}(q^k)$.

Библиография

Существует много книг, где описывается только аппарат тензорного исчисления [96, 97, 98, 99, 100]. Однако, “индексный подход” преобладает — тензоры трактуются как матрицы компонент, преобразующиеся известным путём. “Прямой подход” к тензорам излагается, например, в приложениях книг А. И. Лурье (A. I. Lurie) [22, 23]. Лекции R. Feynman’a [84] содержат яркое описание векторных полей. Информация о тензорном исчислении — также часть своеобразной и глубокой книги С. Truesdell’a [57].

ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ОБЩЕЙ МЕХАНИКИ

§1. Дискретная совокупность частиц

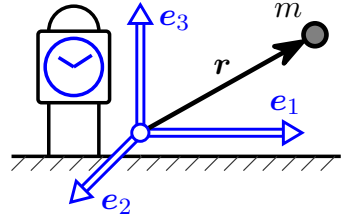
Классическая общая механика моделирует физические объекты, дискретизируя их в совокупность частиц (“точечных масс”, “материальных точек”^{*}).

В совокупности N частиц каждая k -ая частица имеет свою ненулевую массу $m_k = \text{constant} > 0$ и функцию движения $\mathbf{r}_k(t)$. Функция $\mathbf{r}_k(t)$ измеряется относительно выбранной системы отсчёта.

Система отсчёта состоит из (рис. 9)

- ✓ некоторой “нулевой” точки отсчёта,
- ✓ набора координат,
- ✓ любых часов.

“Любые” часов — потому что (в классической общей механике) время тикает, течёт и проходит одинаково в любых часах в любом месте, и все часы идеально синхронизированы.



рисунк 9

Когда-то давно, системой отсчёта было некое абсолютное пространство: сначала пустое, а затем заполненное сплошной упругой средой — эфиром (aether). Позже стало ясно, что для классической механики могут быть использованы любые системы отсчёта, но

^{*} Точечная масса (материальная точка) — это концепт объекта, типично материи, который имеет ненулевую массу и является (или мыслится) бесконечно-малым по своему объёму (размерам).

предпочтение отдаётся так называемым “инерциальным” системам, где точка движется с постоянной скоростью без ускорения ($\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{r}} = \text{constant}$) в отсутствии внешних взаимодействий.

Мерой взаимодействия в механике является вектор силы \mathbf{F} . В широко известном* уравнении Newton’a

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (1.1)$$

правая часть может зависеть лишь от положения, скорости и явно входящего времени, тогда как ускорение $\ddot{\mathbf{r}}$ прямо пропорционально силе \mathbf{F} с коэффициентом $1/m$.

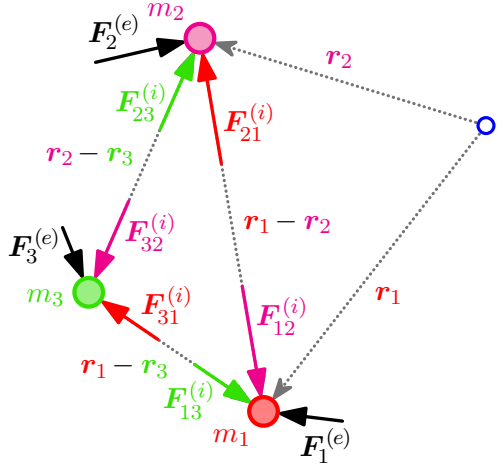
* “Axiomata sive Leges Motus” (“Axioms or Laws of Motion”) were written by Isaac Newton in his *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, first published in 1687. Reprint (en Latin), 1871. Translated into English by Andrew Motte, 1846.

Вот тезисы динамики совокупности частиц.

Сила, действующая на k -ую частицу (рис. 10)

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)}. \quad (1.2)$$

$\mathbf{F}_k^{(e)}$ есть внешняя сила — такие силы исходят от объектов вне рассматриваемой системы. Второе слагаемое — сумма внутренних сил (сила $\mathbf{F}_{kj}^{(i)}$ есть взаимодействие, подаваемое j -ой частицей на k -ую частицу). Внутренние взаимодействия случаются только между элементами наблюдаемой системы и не влияют (механически) ни на что другое. Ни одна частица не взаимодействует сама с собой, $\mathbf{F}_{kk}^{(i)} = \mathbf{0} \forall k$.



рисунки 10

Из (1.2) вместе с принципом действия–противодействия

$$\mathbf{F}_{kj}^{(i)} = -\mathbf{F}_{jk}^{(i)} \forall k, j \Rightarrow \sum_k \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0},$$

вытекает баланс импульса

$$\left(\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^\bullet = \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.3)$$

Момент, действующий на k -ую частицу

$$\mathbf{r}_k \times m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{r}_k \times \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)}. \quad (1.4)$$

It is relative to the reference point.

Когда вдобавок к принципу действия–противодействия, внутренние взаимодействия между частицами центральны, то есть

$$\mathbf{F}_{kj}^{(i)} \parallel (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \Leftrightarrow (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0},$$

баланс момента импульса выходит*

$$\left(\sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^{\bullet} = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.5)$$

Изменения импульса и момента импульса определяются только внешними силами $\mathbf{F}_k^{(e)}$.

...

$$\begin{aligned} * \left(\sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^{\bullet} &= \sum_k \dot{\mathbf{r}}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k + \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \ddot{\mathbf{r}}_k, \\ \mathbf{F}_{kj}^{(i)} &= -\mathbf{F}_{jk}^{(i)} \text{ и } (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=k+1}^N (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

§ 2. Совершенно жёсткое недеформируемое твёрдое тело

Совершенно жёсткое недеформируемое тело это твёрдое* тело, в котором деформация нулевая (или пренебрежимо мала — так мала, что ею можно пренебречь). Расстояние между любыми двумя точками недеформируемого жёсткого тела остаётся постоянным независимо от действующих на него внешних сил.

Недеформируемое жёсткое тело моделируется с использованием “континуального подхода” — как непрерывное распределение массы (материальный континуум, сплошная среда), вместо использования “дискретного подхода” — моделирования как дискретной совокупности частиц тела.

Масса материального континуума распределяется в своём объёме непрерывно

$$dm \equiv \rho dV \quad (2.1)$$

(ρ — объёмная плотность массы и dV — бесконечномалый объём).

Формула с суммированием по дискретным точкам превращается в формулу для сплошного тела заменой масс частиц на массу (2.1) элемента объёма dV и интегрированием по всему объёму тела. В частности, вот формулы для импульса

$$\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \text{ становится } \int_V \dot{\mathbf{r}} dm \quad (2.2)$$

и момента импульса

$$\sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \text{ становится } \int_V \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dm. \quad (2.3)$$

Чтобы полностью описать положение (позицию, место) любого недеформируемого тела со всеми своими точками, достаточно выбрать какую-либо уникальную точку за “полюс”, найти или задать положение $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ выбранной точки, а также угловую ориентацию тела относительно полюса (рис. 11). Как результат,

* “Жёсткое” это неупругое и не гибкое, а “твёрдое” это не текучее. Твёрдое вещество сохраняет свой размер и форму без контейнера (в отличие от текучего вещества — жидкости или газа).

любое движение недеформируемого твёрдого тела есть либо поворот вокруг выбранного полюса, либо равное перемещение полюса и всех точек тела — трансляция (линейное движение)*, либо комбинация их обоих.

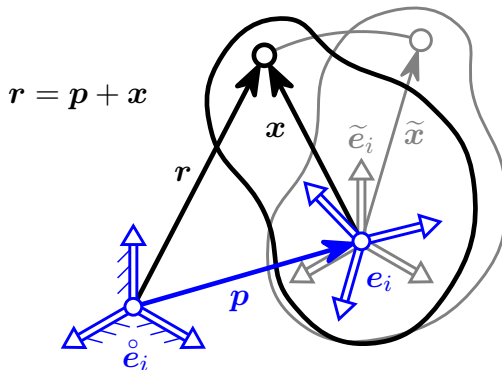


рисунок 11

\mathring{e}_i — тройка ортонормальных базисных векторов, неподвижная относительно абсолютной (или любой инерциальной) системы отсчёта

Имея неподвижный базис \mathring{e}_i и движущийся вместе с телом базис e_i , ...

Если добавить базис e_i (этот базис движется вместе с телом), то угловая ориентация тела может быть определена тензором поворота $O \equiv e_i \tilde{e}_i$.

Тогда любое движение тела полностью описывается двумя функциями $p(t)$ и $O(t)$.

Вектор положения некоторой точки тела

$$r = p + x \quad (2.4)$$

$$\tilde{x} = x_i \tilde{e}_i, \quad x = x_i e_i$$

$$(9.3), \quad \S 1.9$$

$$x = O \cdot \tilde{x}$$

* Трансляция может также быть мыслима как вращение с центром поворота на бесконечности.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{x}},$$

Для недеформируемого жёсткого тела, компоненты x_i не зависят от времени: $x_i = \text{constant}(t)$ и $\dot{\mathbf{x}} = x_i \dot{\mathbf{e}}_i$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

$$x_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{O}} \cdot x_i \mathring{\mathbf{e}}_i \Leftrightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathring{\mathbf{e}}_i$$

...

Импульс (количество движения) и момент импульса недеформируемого сплошного тела описываются следующими интегралами

...

...

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{p} dm = \mathbf{p} \int_{\mathcal{V}} dm = \mathbf{p} m$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm = \mathbf{\Xi} m, \quad \mathbf{\Xi} \equiv m^{-1} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm$$

Три инерциальных характеристики тела:

- ✓ интегральная масса $m = \int_{\mathcal{V}} dm = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$ — масса всего тела,
- ✓ вектор эксцентриситета $\mathbf{\Xi}$ — измеряет смещение выбранного полюса от “центра масс” тела,
- ✓ тензор инерции ${}^2\mathcal{I}$.

Вектор эксцентриситета равняется нуль-вектору только когда выбранный полюс совпадает с “центром масс” — уникальной точкой внутри тела с вектором положения $\mathbf{\boldsymbol{\imath}}$, короче

$$\mathbf{\Xi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{\boldsymbol{\imath}}.$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{p}, \quad \mathbf{\Xi} m = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r} - \mathbf{\boldsymbol{\imath}}) dm = \mathbf{0},$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dm - \mathbf{\boldsymbol{\imath}} \int_{\mathcal{V}} dm = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{\boldsymbol{\imath}} = m^{-1} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dm$$

...

Вводя (псевдо)вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, ...

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i$$

...

тензор инерции ${}^2\mathfrak{J}$

$${}^2\mathfrak{J} \equiv - \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{E}) dm = \int_V (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \mathbf{E} - \mathbf{x} \mathbf{x}) dm$$

It is assumed (can be proven?) that the inertia tensor changes only due to a rotation

$${}^2\mathfrak{J} = \mathbf{O} \cdot {}^2\mathfrak{J}^\circ \cdot \mathbf{O}^\top$$

and its components in basis \mathbf{e}_i (moving together with a body) don't change over time

$${}^2\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b, \quad \mathfrak{J}_{ab} = \text{constant}(t)$$

thus the time derivative is

$$\begin{aligned} {}^2\dot{\mathfrak{J}} &= \mathfrak{J}_{ab} (\dot{\mathbf{e}}_a \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \dot{\mathbf{e}}_b) = \mathfrak{J}_{ab} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_b) = \\ &= \mathfrak{J}_{ab} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b - \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \times {}^2\mathfrak{J} - {}^2\mathfrak{J} \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Подстановка (...) в (1.3) и (1.5) даёт уравнения баланса — баланс количества движения (импульса) и баланс момента импульса — для модели сплошного недеформируемого жёсткого тела

...

здесь \mathbf{f} — внешняя сила на единицу массы, \mathbf{F} — результата внешних сил (также называемая “равнодействующей силой” или “главным вектором”), \mathbf{M} — результата внешних пар сил (“главная пара”, “главный момент”).

...

— Are there any scenarios for which the center of mass is not almost exactly equivalent to the center of gravity?

— Non-uniform gravity field. In a uniform gravitational field, the center of mass is equal to the center of gravity.

...

Work

$$W(\mathbf{F}, \mathbf{u}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$$

as the exact (full) differential

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \cdot d\mathbf{F} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u}$$

by “product rule”

$$dW = d(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{u}, \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{F}$$

...

Constraints

Imposed on the positions and velocities of particles, there are restrictions of a geometrical or kinematical nature, called constraints.

Holonomic constraints are relations between position variables (and possibly time) which can be expressed as equality like

$$f(q^1, q^2, q^3, \dots, q^n, t) = 0,$$

where $q^1, q^2, q^3, \dots, q^n$ are n parameters (coordinates) that fully describe the system.

A constraint that cannot be expressed as such is nonholonomic.

Holonomic constraint depends only on coordinates and time. It does not depend on velocities or any higher time derivatives.

Velocity-dependent constraints like

$$f(q^1, q^2, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n, t) = 0$$

are mostly not holonomic.

For example, the motion of a particle constrained to lie on a sphere's surface is subject to a holonomic constraint, but if the particle is able to fall off a sphere under the influence of gravity, the constraint becomes non-holonomic. For the first case the holonomic constraint may be given by the equation: $r^2 - a^2 = 0$, where r is the distance from the centre of a sphere of radius a . Whereas the second non-holonomic case may be given by: $r^2 - a^2 \geq 0$.

Three examples of nonholonomic constraints are: when the constraint equations are nonintegrable, when the constraints have inequalities, or with complicated non-conservative forces like friction.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q^1, q^2, \dots, q^n, t)$$

(assuming n independent parameters/coordinates)

§ 3. Принцип виртуальной работы

Mécanique analytique (1788–89) is a two volume French treatise on analytical mechanics, written by Joseph Louis Lagrange, and published 101 years following Isaac Newton’s *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

Joseph Louis Lagrange. *Mécanique analytique*. Nouvelle édition, revue et augmentée par l’auteur. Tome premier. Mme Ve Courcier, Paris, 1811. 490 pages.

Joseph Louis Lagrange. *Mécanique analytique*. Troisième édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand. Tome second. Mallet-Bachelier, Paris, 1855. 416 pages.

The historical transition from geometrical methods, as presented in Newton’s *Principia*, to methods of mathematical analysis.

Consider the exact differential of any set of location vectors \mathbf{r}_i , that are functions of other variable parameters (coordinates) q^1, q^2, \dots, q^n and time t .

The actual displacement is the differential

$$d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} dq^j$$

Now, imagine an arbitrary path through the configuration space/manifold. This means it has to satisfy the constraints of the system but not the actual applied forces

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j$$

A virtual infinitesimal displacement of a system of particles refers to a change in the configuration of a system as the result of any arbitrary infinitesimal change of location vectors (or coordinates) $\delta \mathbf{r}_k$, consistent with the forces and constraints imposed on the system at the current/given instant t . This displacement is called “virtual” to distinguish it from an actual displacement of the system occurring in a time interval dt , during which the forces and constraints may be changing.

Assume the system is in equilibrium, that is the full force on each particle vanishes, $\mathbf{F}_i = \mathbf{0} \ \forall i$. Then clearly the term $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$, which is the virtual work of force \mathbf{F}_i in displacement $\delta \mathbf{r}_i$, also vanishes for each

particle, $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \ \forall i$. The sum of these vanishing products over all particles is likewise equal to zero:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Decompose the full force \mathbf{F}_i into the applied (active) force $\mathbf{F}_i^{(a)}$ and the force of constraint Φ_i ,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \Phi_i$$

We now restrict ourselves to systems for which the net virtual work of the force of every constraint is zero:

$$\sum_i \Phi_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

We therefore have as the condition for equilibrium of a system that the virtual work of all applied forces vanishes:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

— the principle of virtual work.

Note that coefficients $\mathbf{F}_i^{(a)}$ can no longer be thought equal to zero: in common $\mathbf{F}_i^{(a)} \neq 0$, since $\delta \mathbf{r}_i$ are not independent but are bound by constraints.

Виртуальным перемещением частицы с вектором-радиусом \mathbf{r}_k называется вариация $\delta \mathbf{r}_k$ — любое бесконечно малое приращение вектора \mathbf{r}_k , происходящее мгновенно и совместимое со связями (constraints). Если связей нет, то есть система свободна, тогда виртуальные перемещения $\delta \mathbf{r}_k$ совершенно любые.

Связи бывают голономные (holonomic, или геометрические), связывающие только положения (перемещения) — это функции лишь координат и, возможно, времени

$$c(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{3.1}$$

— и неголономные (или дифференциальные), содержащие производные координат по времени: $c(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0$ и не интегрируемые до геометрических связей.

Далее рассматриваем системы, все связи в которых — голономные. В системе с голономными связями виртуальные перемещения частицы “ k ” удовлетворяют уравнению

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial c_j}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (3.2)$$

В несвободных системах все силы делятся на две группы: активные и реакции связей. Реакция Φ_k действует со стороны всех материальных ограничителей на частицу “ k ” и меняется согласно уравнению (3.1) для каждой связи. Связи предполагаются идеальными:

$$\sum_k \Phi_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad — \quad (3.3)$$

работа реакций на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Принцип виртуальной работы is

$$\sum_k \left(\mathbf{F}_k^{(a)} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{F}_k^{(a)}$ — лишь активные силы, без реакций связей.

Дифференциальное вариационное уравнение (3.4) может показаться тривиальным следствием закона Ньютона (1.1) и условия идеальности связей (3.3). Однако содержание (3.4) несравненно обширнее. Читатель вскоре увидит, что принцип (3.4) может быть положен в основу механики [90]. Разные модели упругих тел, описываемые в этой книге, построены с опорой на этот принцип.

Для примера рассмотрим совершенно жёсткое (недеформируемое) твёрдое тело.

$$\dots (2.4) \Rightarrow \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{x}$$

(begin copied from § 1.10)

Варьируя тождество (9.5), получим $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = -\mathbf{O} \cdot \delta \mathbf{O}^\top$. Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор $\delta \mathbf{o}$ как $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$. Приходим к соотношениям

$$\delta \mathbf{O} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{O}, \quad \delta \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top \right)_{\times}, \quad (3.5)$$

(end of copied from § 1.10)

...

Проявилась замечательная особенность (3.4): это уравнение эквивалентно системе такого порядка, каково число степеней свободы системы, то есть сколько независимых вариаций $\delta \mathbf{r}_k$ мы имеем. Если в системе N точек есть m связей, то число степеней свободы $n = 3N - m$.

...

§ 4. Баланс импульса, момента импульса и энергии

Эти уравнения баланса можно связать со свойствами пространства и времени [91]. Сохранение импульса (количества движения) в изолированной* системе выводится из однородности пространства (*при любом параллельном переносе — трансляции — замкнутой системы как целого свойства этой системы не меняются*). Сохранение момента импульса — следствие изотропии пространства (*свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте этой системы как целого*). Энергия же изолированной системы сохраняется, так как время однородно (энергия $E \equiv K(q, \dot{q}) + \Pi(q)$ такой системы не зависит явно от времени).

Уравнения баланса могут быть выведены из принципа виртуальной работы (3.4). Перепишем его в виде

$$\sum_k \left(\mathbf{F}_k^{(e)} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k + \delta W^{(i)} = 0, \quad (4.1)$$

где выделены внешние силы $\mathbf{F}_k^{(e)}$ и виртуальная работа внутренних сил $\delta W^{(i)} = \sum_k \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{r}_k$.

Предполагается, что внутренние силы не совершают работы на виртуальных перемещениях тела как жёсткого целого ($\delta \mathbf{r}$ и $\delta \mathbf{o}$ —

* Изолированная (замкнутая) система — это система частиц, взаимодействующих друг с другом, но ни с какими другими телами.

произвольные постоянные векторы, определяющие трансляцию и поворот)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_k &= \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k, \\ \delta \mathbf{p} &= \text{constant}, \delta \mathbf{o} = \text{constant} \end{aligned} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (4.2)$$

Предпосылки-соображения для этого предположения таковы.

Первое — для случая упругих (потенциальных) внутренних сил. Тогда $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$ — вариация потенциала с противоположным знаком. Достаточно очевидно, что только лишь деформирование меняет Π .

Второе соображение — в том, что суммарный вектор и суммарный момент внутренних сил равен нулю

$$\sum \dots$$

...

Принимая (4.2) и подставляя в (4.1) сначала $\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{p}$ (трансляция), а затем $\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k$ (поворот), получаем баланс импульса (...) и баланс момента импульса (...).

...

§ 5. Принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа

Two branches of analytical mechanics are Lagrangian mechanics (using generalized coordinates and corresponding generalized velocities in configuration space) and Hamiltonian mechanics (using coordinates and corresponding momenta in phase space). Both formulations are equivalent by a Legendre transformation on the generalized coordinates, velocities and momenta, therefore both contain the same information for describing the dynamics of a system.

Вариационное уравнение (3.4) удовлетворяется в любой момент времени. Проинтегрируем его* по какому-либо промежутку $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta K + \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) dt - \left[\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (5.1)$$

Без ущерба для общности можно принять $\delta \mathbf{r}_k(t_1) = \delta \mathbf{r}_k(t_2) = \mathbf{0}$, тогда внеинтегральный член исчезает.

Вводятся обобщённые координаты q^i ($i = 1, \dots, n$ — число степеней свободы). Векторы-радиусы становятся функциями вида $\mathbf{r}_k(q^i, t)$, тождественно удовлетворяющими уравнениям связей (3.1). Если связи стационарны, то есть (3.1) не содержат t , то остаётся $\mathbf{r}_k(q^i)$. Кинетическая энергия превращается в функцию $K(q^i, \dot{q}^i, t)$, где явно входящее t характерно лишь для нестационарных связей.

Весьма существенно понятие обобщённых сил Q_i . Они вводятся через выражение виртуальной работы

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_i Q_i \delta q^i, \quad Q_i \equiv \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^i}. \quad (5.2)$$

Стоит акцентировать происхождение обобщённых сил через работу. Установив набор обобщённых координат системы, следует сгруппировать приложенные силы \mathbf{F}_k в комплексы Q_i .

Если силы потенциальны с энергией $\Pi = \Pi(q^i, t)$, то

$$\sum_i Q_i \delta q^i = -\delta \Pi, \quad Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}. \quad (5.3)$$

Явное присутствие t может быть при нестационарности связей или зависимости физических полей от времени.

...

$$\begin{aligned} * \delta K &= \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k, \quad \left(\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) \dot{} = \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \underbrace{\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k}_{\delta K} \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta K dt - \left[\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

Известны уравнения Lagrange'а не только второго, но и первого рода. Рассмотрим их ради методики вывода, много раз применяемой в этой книге.

При наличии связей (3.1) равенство $\mathbf{F}_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$ не следует из вариационного уравнения (3.4), ведь тогда виртуальные перемещения $\delta \mathbf{r}_k$ не независимы. Каждое из m (m — число связей) условий для вариаций (3.2) умножим на некий скаляр λ_α ($\alpha = 1, \dots, m$) и добавим к (3.4):

$$\sum_{k=1}^N \left(\mathbf{F}_k + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (5.4)$$

Среди $3N$ компонент вариаций $\delta \mathbf{r}_k$ зависимых m . Но столько же и множителей Лагранжа: подберём λ_α так, чтобы коэффициенты (??какие?) при зависимых вариациях обратились в нуль. Но при остальных вариациях коэффициенты (??) также должны быть нулями из-за независимости. Следовательно, все выражения в скобках (\dots) равны нулю — это и есть уравнения Lagrange'а первого рода.

Поскольку для каждой частицы

...

§ 6. Статика

Рассмотрим систему со стационарными (постоянными во времени) связями при статических (не меняющихся со временем) активных силах \mathbf{F}_k . В равновесии $\mathbf{r}_k = \text{constant}$, и формулировка принципа виртуальной работы следующая:

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^i} = Q_i = 0. \quad (6.1)$$

Существенны обе стороны этого положения: и вариационное уравнение, и равенство нулю обобщённых сил.

Соотношения (6.1) — это самые общие уравнения статики. В литературе распространено узкое представление об уравнениях равновесия как балансе сил и моментов. Но при этом нужно понимать, что набор уравнений равновесия точно соответству-

ет обобщённым координатам. Результирующая сила (также называемая “равнодействующей силой” или “главным вектором”) и результирующая пара сил (“главный момент”) в уравнениях равновесия фигурируют*, поскольку у системы есть степени свободы трансляции и поворота. Огромная популярность сил и моментов связана не столько с известностью статики совершенно недеформируемого твёрдого тела, но с тем, что виртуальная работа внутренних сил на перемещениях системы как жёсткого целого равна нулю в любой среде.

Пусть в системе действуют два вида сил: потенциальные с энергией от обобщённых координат $\Pi(q^i)$ и дополнительные внешние \mathring{Q}_i . Из (6.1) следуют уравнения равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} = \mathring{Q}_i, \quad (6.2)$$

$$d\Pi = \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial q^i} dq^i = \sum_i \mathring{Q}_i dq^i.$$

Здесь содержится нелинейная в общем случае задача статики о связи положения равновесия q^i с нагрузками \mathring{Q}_i .

В линейной системе с квадратичным потенциалом вида $\Pi = \frac{1}{2} C_{ik} q^k q^i$

$$\sum_k C_{ik} q^k = \mathring{Q}_i. \quad (6.3)$$

Тут фигурируют “матрица жёсткости” C_{ik} , координаты q^k и нагрузки \mathring{Q}_i .

Сказанное возможно обобщить и на континуальные линейные упругие среды.

Матрица жёсткости C_{ik} обычно бывает положительной (таково свойство конструкций и в природе, и в технике). Тогда $\det C_{ik} > 0$,

* Со времён описания приведения любой системы сил, действующей на одно и то же совершенно жёсткое тело, к одной силе и одной паре (вокруг выбранной точки) в книге “Éléments de statique” Louis’a Poinso.

линейная алгебраическая система (6.3) однозначно разрешима, а решение её можно заменить минимизацией квадратичной формы

$$\mathcal{E}(q^j) \equiv \Pi - \sum_i \mathring{Q}_i q^i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} q^i C_{ik} q^k - \sum_i \mathring{Q}_i q^i \rightarrow \min. \quad (6.4)$$

Бывает однако, что конструкция неудачно спроектирована, тогда матрица жёсткости сингулярна (необратима) и $\det C_{ik} = 0$ (или же весьма близок к нулю — nearly singular матрица с $\det C_{ik} \approx 0$). Тогда решение линейной проблемы статики (6.3) существует лишь при ортогональности столбца нагрузок \mathring{Q}_i всем линейно независимым решениям однородной сопряжённой системы

...

Известные теоремы статики линейно **упругих** систем легко доказываются в случае конечного числа степеней свободы. Теорема Клареугон'а выражается равенством

...

Теорема о взаимности работ (“работа W_{12} сил первого варианта на перемещениях от сил второго равна работе W_{21} сил второго варианта на перемещениях от сил первого”) мгновенно выводится из (6.3):

(...)

Тут существенна симметрия матрицы жёсткости C_{ij} , то есть консервативность системы.

...

Но вернёмся к проблеме (6.2), иногда называемой теоремой Lagrange'а. Её можно обратить преобразованием Лежандра Legendre (involution) transform(ation):

$$\begin{aligned} d \left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i \right) &= \sum_i d \left(\mathring{Q}_i q^i \right) = \sum_i \left(q^i d\mathring{Q}_i + \mathring{Q}_i dq^i \right), \\ d \left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i \right) - \sum_i \mathring{Q}_i dq^i &= \sum_i q^i d\mathring{Q}_i, \\ d \left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i - \Pi \right) &= \sum_i q^i d\mathring{Q}_i = \sum_i \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial \mathring{Q}_i} d\mathring{Q}_i; \end{aligned}$$

$$q^i = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \dot{Q}_i}, \quad \hat{\Pi}(\dot{Q}_i) = \sum_i \dot{Q}_i q^i - \Pi. \quad (6.5)$$

Это теорема Castigliano, $\hat{\Pi}$ называется дополнительной энергией. В линейной системе (6.3) $\Rightarrow \hat{\Pi} = \Pi$. Теорема (6.5) бывает очень полезна — когда легко находится $\hat{\Pi}(\dot{Q}_i)$. Встречаются так называемые статически определимые системы, в которых все внутренние силы удаётся найти лишь из баланса сил и моментов. Для них (6.5) эффективна.

В отличие от линейной задачи (6.3), нелинейная задача (6.2) может не иметь решений вовсе или же иметь их несколько.

....

Рассказ о статике в общей механике закончим принципом d'Alembert'a: уравнения динамики отличаются от статических лишь наличием дополнительных “сил инерции” $m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$. Принцип d'Alembert'a достаточно очевиден, но бездумное применение может привести к ошибкам. Например, уравнения вязкой жидкости в статике и в динамике отличаются не только лишь инерционными добавками. Но для твёрдых упругих тел принцип d'Alembert'a полностью справедлив.

§ 7. Механика относительного движения

До этого не ставился вопрос о системе отсчёта, всё рассматривалось в некой “абсолютной” системе или одной из инерциальных систем (§ 1). Теперь представим себе две системы: “абсолютную” и “подвижную”

...

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} + \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{r} &= \rho_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho}_i \mathbf{e}_i, \quad \dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_i \mathbf{e}_i)^\bullet = \dot{x}_i \mathbf{e}_i + x_i \dot{\mathbf{e}}_i \end{aligned}$$

$$x_i \neq \text{constant} \Rightarrow \dot{x}_i \neq 0$$

По (9.11, § 1.9)

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow x_i \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times x_i \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{x}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}}_{\mathbf{v}_e} \underbrace{- \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}}_{\mathbf{v}_{rel}}$$

$$\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = \dot{x}_i \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{v}_{rel} - \text{relative velocity, } \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \equiv \mathbf{v}_e$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_{rel} \quad (7.1)$$

...

$$\dot{\dot{\mathbf{r}}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{w} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{x}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho}_i \dot{\mathbf{e}}_i, \quad \ddot{\mathbf{x}} = (x_i \mathbf{e}_i)^{\bullet\bullet} = (\dot{x}_i \mathbf{e}_i + x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} = \ddot{x}_i \mathbf{e}_i + \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow \ddot{\mathbf{e}}_i = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)$$

$$x_i \ddot{\mathbf{e}}_i = x_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times x_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times x_i \mathbf{e}_i) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \dot{x}_i \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}$$

$$\ddot{x}_i \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{w}_{rel} - \text{relative acceleration}$$

$$2\dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} \equiv \mathbf{w}_{Cor} - \text{Coriolis acceleration}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{w}_{rel} + \mathbf{w}_{Cor} + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i$$

$$(x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} = \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{Cor} + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i$$

$$(x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \dot{x}_i \mathbf{e}_i}_{\dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{Cor}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

...

§ 8. Малые колебания (вибрации)

Если статика линейной системы описывается уравнением (6.3), то в динамике имеем

$$\sum_k \left(A_{ik} \ddot{q}_k + C_{ik} q^k \right) = \dot{Q}_i(t), \quad (8.1)$$

где A_{ik} — симметричная и положительная “матрица кинетической энергии”.

A normal mode of an oscillating system is a pattern of motion in which all parts of the system move sinusoidally with the same frequency and with a fixed phase relation. The free motion described by the normal modes takes place at fixed frequencies. These fixed frequencies of the normal modes of a system are known as its natural resonant frequencies.

In music, normal modes of vibrating instruments (strings, air pipes, drums, etc.) are called “harmonics” or “overtones”.

The most general motion of a system is a superposition of its normal modes. The modes are normal in the sense that they can move independently, that is to say that an excitation of one mode will never cause motion of a different mode. In mathematical terms, normal modes are orthogonal to each other.

Изучение колеблющейся системы чаще всего начинается с ортогональных (нормальных) “мод” — гармоник, собственных (свободных, без воздействий извне) синусоидальных колебаний вида

$$q^k(t) = \hat{q}_k \sin \omega_k t.$$

Множители $\hat{q}_k = \text{constant}$ — ортогональные (нормальные) “моды” колебания, ω_k — натуральные (резонансные, собственные) частоты. Этот набор, зависящий от структуры колеблющегося объекта, материалов и краевых условий, находится из задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_i &= 0, \quad \ddot{q}_k = -\omega_k^2 \hat{q}_k \sin \omega_k t, \quad (8.1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_k (C_{ik} - A_{ik} \omega_k^2) \hat{q}_k \sin \omega_k t = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

...

Библиография

В длинном списке книг по общей механике можно найти труды не только механиков-профессионалов [85, 86, 92, 93, 94], но и физиков-теоретиков широкой ориентации [91, 87]. Интересен курс Ф. Р. Гантмахера [90] с компактным, но полным изложением оснóв.

НЕЛИНЕЙНО-УПРУГАЯ БЕЗМОМЕНТНАЯ СРЕДА

§1. Континуум. Два описания процессов

Согласно атомной теории, вещество состоит из дискретных частиц — атомов. Поэтому модель системы частиц с массами m_k и векторами положения $\mathbf{r}_k(t)$ может показаться подходящей даже несмотря на невообразимое число степеней свободы, так как объёмы памяти и быстрота компьютеров характеризуются тоже астрономическими числами.

Но всё же стоит выбрать фундаментально и качественно иную модель — модель сплошной среды (материального континуума), где масса распределена в объёме непрерывно: объём \mathcal{V} содержит массу

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}, \quad dm = \rho d\mathcal{V}, \quad (1.1)$$

здесь ρ — объёмная плотность массы и $d\mathcal{V}$ — бесконечномалый элемент объёма.

Реальная материя моделируется как континуум, который может быть мыслим как бесконечное множество исчезающе малых частиц, соединённых вместе.

С непрерывным распределением массы связано лишь первое и простое представление о сплошной среде как множестве (пространстве) материальных точек. Возможны и более сложные модели, в которых частицы обладают степенями свободы не только трансляции, но и поворота, внутренней деформации и другими. Отметив, что подобные модели притягивают всё больший интерес, в этой главе ограничимся классическим представлением о среде как состоящей из “простых точек”.

В каждый момент времени t деформируемый континуум занимает некий объём \mathcal{V} пространства. Этот объём движется и деформируется, но набор частиц в нём постоянен — баланс массы (“материя не создаётся и не аннигилируется”)

$$dm = \rho d\mathcal{V} = \rho' d\mathcal{V}' = \overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{\mathcal{V}}, \quad m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' d\mathcal{V}' = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{\mathcal{V}}. \quad (1.2)$$

Вводя какие-либо переменные параметры q^i — криволинейные координаты, имеем отношение для положений частиц

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i, t). \quad (1.3)$$

...

Материальное описание

в начальный момент, в так называемой начальной (оригинальной, *отечётной*, “материальной”) конфигурации

в какой-то начальный момент $t=0$

“запоминается” начальная (“материальная”) конфигурация — locations in space of particles at some arbitrarily chosen “initial” moment $t=0$

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}(q^i) \equiv \mathbf{r}(q^i, 0)$$

Морфизм (функция) $\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}(q^i)$

isomorphism (bijective mapping) (invertible one-to-one relation) (взаимно однозначное)

Subsequent locations in space of particles are then dependent variables — functions of time and of the initial (material, “Lagrangian”) *coordinates*/location $\overset{\circ}{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t).$$

Для пространственного дифференцирования (постоянных во времени) отношений типа $\varphi = \varphi(\overset{\circ}{\mathbf{r}})$

вводится локальный касательный базис $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial i}$ и взаимный базис $\overset{\circ}{\mathbf{r}}^i$

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial i} \equiv \partial_i \overset{\circ}{\mathbf{r}} \left(\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i} \right), \quad \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial j} = \delta_j^i$$

“материальный” оператор Hamilton’a $\overset{\circ}{\nabla}$

$$\mathbf{E} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial i} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i \overset{\circ}{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{\mathbf{r}}, \quad \overset{\circ}{\nabla} \equiv \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i, \quad (1.4)$$

тогда $d\varphi = d\overset{\circ}{\mathbf{r}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \varphi$.

...

Но может быть эффективен ещё иной подход — *пространственное* (или “*эйлерово*”) *описание*, когда вместо фокусирования на том, как частицы континуума движутся из начальной конфигурации в пространстве и времени, процессы рассматриваются в неподвижных точках пространства с течением времени. С отношениями типа $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, мы следим за происходящим именно в этом месте и не смущаемся непрерывным уходом и приходом сюда разных частиц.

...

баланс массы в пространственном описании (уравнение непрерывности (сплошности, неразрывности) для массы)

...

Jaumann derivative (“**corotational** time derivative”) was first introduced by Gustav Jaumann*

Es sei $\frac{\partial}{\partial t}$ der Operator der lokalen Fluxion, d. i. der partiellen Fluxion in einem gegen das Koordinatensystem ruhenden Punkte des Raumes. Ferner sei $\frac{d}{dt}$ der Operator der totalen Fluxion, welcher definiert wird durch

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a,$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \stackrel{3}{=} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla; \mathbf{a} - \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{a},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \stackrel{9}{=} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla; \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v} \times \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \times \text{rot } \mathbf{v}).$$

Endlich verwenden wir die körperliche Fluxion eines Skalars:

$$\frac{\delta}{\delta t} a = \frac{\partial}{\partial t} a + \text{div } a \mathbf{v} = \frac{d}{dt} a + a \text{ div } \mathbf{v}.$$

körperliche — bodily/телесная, material/вещественная(материальная), physical/физическая

* **Gustav Jaumann.** Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (I. Mitteilung) // Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa, Band CXX, 1911. Seiten 385–530.

$$\nabla \cdot (av) = a \nabla \cdot v + v \cdot \nabla a$$

...

Пусть $v(\overset{\circ}{r}, t)$ — какое-либо поле (?? только в материальном описании от $\overset{\circ}{r}$??). Найдём скорость изменения интеграла по объёму

$$\Upsilon \equiv \int_{\mathcal{V}} \rho v d\mathcal{V}$$

(“ v есть Υ на единицу массы”). Кажущееся сложным вычисление $\dot{\Upsilon}$ (ведь \mathcal{V} деформируется) на самом деле весьма простое вместе с (1.2):

$$\Upsilon = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} v d\overset{\circ}{\mathcal{V}} \Rightarrow \dot{\Upsilon} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \dot{v} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{v} d\mathcal{V}. \quad (1.5)$$

$$\Psi = \int_{\mathcal{V}} \rho \psi d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \psi d\mathcal{V}' \Rightarrow \dot{\Psi} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\psi} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \dot{\psi} d\mathcal{V}'$$

...

Не сто́ит противопоставлять материальное и пространственное описания. В этой книге используются оба, в зависимости от ситуации.

§ 2. Градиент движения

Имея функцию движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i, t)$, $\overset{\circ}{\mathbf{r}}(q^i) \equiv \mathbf{r}(q^i, 0)$, операторы “набла” $\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$, $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i$ и глядя на дифференциальные отношения для какого-либо бесконечно малого вектора в двух конфигурациях, текущей с $d\mathbf{r}$ и начальной с $d\overset{\circ}{\mathbf{r}}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d\overset{\circ}{\mathbf{r}} \cdot \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}}_{\substack{\mathbf{F}^\top \\ \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \mathbf{r}_{\partial_i}}} = \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^\top}_{\substack{\mathbf{F} \\ \mathbf{r}_{\partial_i} \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i}} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{r}} \\ d\overset{\circ}{\mathbf{r}} &= d\mathbf{r} \cdot \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{\mathbf{r}}}_{\substack{\mathbf{r}^i \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial_i} \\ \mathbf{F}^{-\top}}} = \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{\mathbf{r}}^\top}_{\substack{\mathbf{r}_{\partial_i} \mathbf{r}^i \\ \mathbf{F}^{-1}}} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.1)$$

приходит на ум ввести “градиент движения”^{*}, взяв one of these tensor multipliers for it: $\mathbf{F} \equiv \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^\top = \mathbf{r}_{\partial_i} \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i$.

Почему именно этот? Причина выбрать $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^\top$ — другое выражение для дифференциала

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{r}} \\ \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}} \\ d\overset{\circ}{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \\ \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}} &= \partial_i \boldsymbol{\zeta} \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i & \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathbf{r}} &= \partial_i \boldsymbol{\zeta} \mathbf{r}^i \\ \dots & \\ \mathbf{E} &= \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{\mathbf{r}}}_{\substack{\frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}}} = \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}}_{\substack{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}}} \\ \dots & \end{aligned}$$

^{*} Тензору \mathbf{F} не вполне подходит его более популярное название “градиент деформации”, поскольку этот тензор описывает не только саму деформацию, но и поворот тела как целого без деформации.

Для декартовых координат с ортонормальным базисом $\mathbf{e}_i = \text{constant}$

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x_i(t) \mathbf{e}_i, \quad \dot{\mathbf{r}} = x_i(0) \mathbf{e}_i = \dot{x}_i \mathbf{e}_i, \quad \dot{x}_i \equiv x_i(0), \\ \dot{\nabla} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} = \mathbf{e}_i \dot{\partial}_i, \quad \nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \partial_i, \\ \dot{\nabla} \mathbf{r} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{x}_i} = \mathbf{e}_i \frac{\partial (x_j \mathbf{e}_j)}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \dot{x}_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \dot{\partial}_i x_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \\ \nabla \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial x_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \partial_i \dot{x}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\end{aligned}$$

...

По теореме о полярном разложении (§ 1.11), градиент движения разложим на тензор поворота \mathbf{O} и симметричные положительные тензоры искажений \mathbf{U} и \mathbf{V} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}$$

...

Когда нет поворота ($\mathbf{O} = \mathbf{E}$), тогда $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$.

...

§ 3. Меры (тензоры) деформации

Градиент движения \mathbf{F} характеризует и деформацию тела, и поворот тела как целого. “Чистыми” тензорами деформации являются тензоры искажений \mathbf{U} и \mathbf{V} из полярного разложения $\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}$, так же как и другие тензоры, происходящие от \mathbf{U} или (и) \mathbf{V} .

Широко используются “квадраты” \mathbf{U} и \mathbf{V}

$$\begin{aligned}(\mathbf{U}^2) &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}, \\ (\mathbf{V}^2) &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \equiv \Phi.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Это тензор деформации Green’a (или правый тензор Cauchy–Green’a) \mathbf{G} и тензор деформации Finger’a (или левый тензор Cauchy–Green’a) Φ . Удобная связь с \mathbf{F} — без извлечения корней

как у U и V — объясняет большую популярность тензоров G и Φ . Тензор G впервые использовал George Green*.

Обращение Φ и G даёт ещё два тензора деформации

$$\begin{aligned} V^{-2} &= \Phi^{-1} = (F \cdot F^T)^{-1} = F^{-T} \cdot F^{-1} \equiv {}^2c, \\ U^{-2} &= G^{-1} = (F^T \cdot F)^{-1} = F^{-1} \cdot F^{-T} \equiv {}^2f, \end{aligned} \quad (3.2)$$

каждый из которых иногда называется тензором Piola или тензором Finger'a. Обратный к левому тензору Cauchy–Green'a Φ — тензор деформации Cauchy 2c .

Компоненты тензоров деформации

$$\begin{aligned} G &= \dot{r}^i_{\partial i} \dot{r}^j_{\partial j} \dot{r}^j = G_{ij} \dot{r}^i \dot{r}^j, \quad G_{ij} \equiv r_{\partial i} \cdot r_{\partial j}, \\ {}^2f &= \dot{r}^i_{\partial i} \dot{r}^i \cdot r^j_{\partial j} \dot{r}^j = G^{ij} \dot{r}^i_{\partial i} \dot{r}^j_{\partial j}, \quad G^{ij} \equiv r^i \cdot r^j, \\ {}^2c &= r^i \dot{r}^i_{\partial i} \cdot \dot{r}^j_{\partial j} r^j = g_{ij} r^i r^j, \quad g_{ij} \equiv \dot{r}^i_{\partial i} \cdot \dot{r}^j_{\partial j}, \\ \Phi &= r_{\partial i} \dot{r}^i \cdot \dot{r}^j_{\partial j} r^j = g^{ij} r_{\partial i} r_{\partial j}, \quad g^{ij} \equiv \dot{r}^i \cdot \dot{r}^j \end{aligned}$$

совпадают с компонентами единичного (“метрического”) тензора

$$\begin{aligned} E &= r_{\partial i} r^i = G_{ij} r^i r^j = r^i r_{\partial i} = G^{ij} r_{\partial i} r_{\partial j} = \\ &= \dot{r}^i \dot{r}^i_{\partial i} = g^{ij} \dot{r}^i_{\partial i} \dot{r}^j_{\partial j} = \dot{r}^i_{\partial i} \dot{r}^i = g_{ij} r^i r^j, \end{aligned}$$

но эти компоненты — в разных базисах. Пользуясь индексной записью, легко запутаться в различиях между единичным (“метрическим”) тензором E и тензорами G , Φ , 2f , 2c деформации. Прямая безиндексная запись имеет явное преимущество здесь.

Как упоминалось в § 1.11, тензоры искажений U и V имеют общие инварианты. Если U_k ($k = 1, 2, 3$) — собственные значения U и V , то инвариантами будут

$$\begin{aligned} I(U) &= I(V) = \sum U_k, \\ II(U) &= II(V) = U_1 U_2 + U_1 U_3 + U_2 U_3, \\ III(U) &= III(V) = U_1 U_2 U_3. \end{aligned}$$

Инварианты G и Φ тоже совпадают: $I(G) = I(\Phi) = \sum U_k^2, \dots$

Без деформации

$$F = U = V = G = \Phi = {}^2f = {}^2c = E,$$

* **Green, George.** (1839) On the propagation of light in crystallized media. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.* 1842, vol. 7, part II, pages 121–140.

поэтому как характеристики деформации стоит взять разности типа $\mathbf{U} - \mathbf{E}$, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{E}$, ...

...

The right Cauchy–Green deformation tensor

George Green discovered a deformation tensor known as the right Cauchy–Green deformation tensor or Green’s deformation tensor

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \text{или} \quad G_{ij} = F_{k'i} F_{k'j} = \frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_j}.$$

This tensor gives the “square” of local change in distances due to deformation: $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{G} \cdot d\hat{\mathbf{r}}$

Invariants of \mathbf{G} are used in expressions for (density of) isotropic body’s potential energy of deformation. The most popular invariants are

$$\begin{aligned} \text{I}(\mathbf{G}) &\equiv \text{trace } \mathbf{G} = G_{ii} = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 \\ \text{II}(\mathbf{G}) &\equiv \frac{1}{2} (G_{jj}^2 - G_{ik} G_{ki}) = \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \gamma_1^2 \\ \text{III}(\mathbf{G}) &\equiv \det \mathbf{G} = \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \end{aligned}$$

where γ_i are stretch ratios for unit fibers that are initially oriented along directions of eigenvectors of the right stretch tensor \mathbf{U} .

The inverse of Green’s deformation tensor

Sometimes called the Finger tensor or the Piola tensor, the inverse of the right Cauchy–Green deformation tensor

$${}^2\mathbf{f} = \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \quad \text{или} \quad f_{ij} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_{k'}} \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial x_{k'}}$$

The left Cauchy–Green or Finger deformation tensor

Swapping multipliers in the formula for the right Green–Cauchy deformation tensor leads to the left Cauchy–Green deformation tensor, defined as

$$\Phi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top = \mathbf{V}^2 \quad \text{или} \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial x_j}{\partial \hat{x}_k}$$

The left Cauchy–Green deformation tensor is often called the Finger’s deformation tensor, named after Josef Finger (1894).

Invariants of Φ are also used in expressions for strain energy density functions. The conventional invariants are defined as

$$I_1 \equiv \Phi_{ii} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 \equiv \frac{1}{2}(\Phi_{ii}^2 - \Phi_{jk}\Phi_{kj}) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2$$

$$I_3 \equiv \det \Phi = J^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$$

($J \equiv \det \mathbf{F}$ — якобиан, определитель градиента движения)

The Cauchy deformation tensor

The Cauchy deformation tensor is defined as the inverse of the left Cauchy–Green deformation tensor

$${}^2\mathbf{c} = \Phi^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{или} \quad c_{ij} = \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_j}$$

$$d\hat{\mathbf{r}} \cdot d\hat{\mathbf{r}} = d\mathbf{r} \cdot {}^2\mathbf{c} \cdot d\mathbf{r}$$

This tensor is also called the Piola tensor or the Finger tensor in rheology and fluid dynamics literature.

Finite strain tensors

The concept of *strain* is used to evaluate how much a given displacement differs locally from a body displacement as a whole (a “rigid body displacement”). One of such strains for large deformations is the *Green strain tensor* (*Green–Lagrangian strain tensor*, *Green–Saint-Venant strain tensor*), defined as

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) \quad \text{или} \quad C_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_j} - \delta_{ij} \right)$$

or as the function of the displacement gradient tensor

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \left(\hat{\nabla} \mathbf{u} + \hat{\nabla} \mathbf{u}^\top + \hat{\nabla} \mathbf{u} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{u}^\top \right)$$

in cartesian coordinates

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial u_k}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial u_k}{\partial \hat{x}_j} \right)$$

The Green strain tensor measures how much \mathbf{G} differs from \mathbf{E} .

The *Almansi–Hamel strain tensor*, referenced to the deformed configuration (“Eulerian description”), is defined as

$${}^2\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - {}^2\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}^{-1}) \quad \text{или} \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial \overset{\circ}{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \overset{\circ}{x}_k}{\partial x_j} \right)$$

or as function of the displacement gradient

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top) \\ a_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

Seth–Hill family of abstract strain tensors

B. R. Seth was the first to show that the Green and Almansi strain tensors are special cases of a more abstract measure of deformation. The idea was further expanded upon by Rodney Hill in 1968 (publication??). The Seth–Hill family of strain measures (also called Doyle–Ericksen tensors) is expressed as

$$\mathbf{D}_{(m)} = \frac{1}{2m} (\mathbf{U}^{2m} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{G}^m - \mathbf{E})$$

Для разных m это даёт

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{(1)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{E}) = \frac{1}{2} (\mathbf{G} - \mathbf{E}) && \text{Green strain tensor} \\ \mathbf{D}_{(1/2)} &= \mathbf{U} - \mathbf{E} = \mathbf{G}^{1/2} - \mathbf{E} && \text{Biot strain tensor} \\ \mathbf{D}_{(0)} &= \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G} && \text{logarithmic strain, Hencky strain} \\ \mathbf{D}_{(-1)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2}) && \text{Almansi strain} \end{aligned}$$

The second-order approximation of these tensors is

$$\mathbf{D}_{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top - (1 - m) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

where $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S$ is the infinitesimal deformation tensor.

Many other different definitions of measures \mathbf{D} are possible, provided that they satisfy these conditions:

- ✓ \mathbf{D} vanishes for any movement of a body as a rigid whole
- ✓ dependence of \mathbf{D} on displacement gradient tensor $\nabla \mathbf{u}$ is continuous, continuously differentiable and monotonic
- ✓ it's desired that \mathbf{D} reduces to the infinitesimal linear deformation tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ when $\nabla \mathbf{u} \rightarrow 0$

For example, tensors from the set

$$\mathbf{D}^{(n)} = (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{-n}) / 2n$$

aren't from the Seth–Hill family, but for any n they have the same 2nd-order approximation as Seth–Hill measures with $m = 0$.

Wikipedia, the free encyclopedia — Finite strain theory

...

§ 4. Поле скоростей

Эта тема обсуждается в почти любой книге о механике сплошной среды, однако для твёрдых упругих сред она не столь насущна. Среди разных моделей материального континуума, упругое твёрдое тело выделяется интересной возможностью вывода полного набора (системы) уравнений для него единой логически безупречной процедурой. Но пока мы идём путём, обычным для механики сплошной текучей среды.

Итак, есть поле скоростей в пространственном описании $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Разложение тензора $\nabla \mathbf{v} = \nabla \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^i \partial_i \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^i \dot{\mathbf{r}}_{\partial i}^*$ на симметричную и кососимметричную части (§ 1.7)

$$\nabla \dot{\mathbf{r}} = \nabla \dot{\mathbf{r}}^S - \frac{1}{2} (\nabla \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{E}$$

или, вводя тензор скорости деформации (rate of deformation tensor, rate of stretching tensor, strain rate tensor) \mathcal{D} и тензор вихря (vorticity tensor, rate of rotation tensor, spin tensor) \mathcal{W}

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \mathcal{D} - \mathcal{W}, \\ \mathcal{D} \equiv \nabla \mathbf{v}^S &= \nabla \dot{\mathbf{r}}^S = \frac{1}{2} (\mathbf{r}^i \dot{\mathbf{r}}_{\partial i} + \dot{\mathbf{r}}_{\partial i} \mathbf{r}^i), \\ -\mathcal{W} \equiv \nabla \mathbf{v}^A &= -\mathbf{w} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{w} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{r}^i \times \dot{\mathbf{r}}_{\partial i}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

* For sufficiently smooth functions, partial derivatives always commute, space and time ones too. Thus

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \quad \text{или} \quad \partial_i \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{\partial i}$$

где также фигурирует (псевдо)вектор вихря \mathbf{w} , сопутствующий тензору вихря \mathcal{W} .

Компоненты тензора скорости деформации в базисе текущей конфигурации

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = \mathcal{D}_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j, \quad \mathcal{D}_{ij} = \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathcal{D} \cdot \mathbf{r}_{\partial j} &= \frac{1}{2} \mathbf{r}_{\partial i} \cdot (\mathbf{r}^k \dot{\mathbf{r}}_k + \dot{\mathbf{r}}_k \mathbf{r}^k) \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j} + \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\partial j}) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j})^\bullet\end{aligned}$$

...

$$\dot{G}_{ij}$$

$$G_{ij} \equiv \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j}$$

...

Для упругих твёрдых сред нет нужды в дискуссии о поворотах: истинное представление появляется по пути логически гармоничных выводов без добавочных гипотез.

§ 5. Вектор площади. Изменение площади

Возьмём бесконечно малую площадку. Вектор площади (area vector) по длине равен площади площадки и направлен вдоль нормали к этой площадке.

В начальной (оригинальной, недеформированной, “материальной”, *отечётной*) конфигурации вектор площади может быть представлен как $\mathring{n}do$. Площадь do бесконечно мала, а \mathring{n} — единичный вектор нормали.

В текущей (актуальной, деформированной, “пространственной”) конфигурации, та же площадка имеет вектор площади $\mathbf{n}dO$.

С дифференциальной точностью, эти бесконечно малые площадки суть параллелограммы, поэтому

$$\begin{aligned}\mathring{n}do &= d\mathring{\mathbf{r}}' \times d\mathring{\mathbf{r}}'' = \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial q^j} dq^j = \mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} dq^i dq^j, \\ \mathbf{n}dO &= d\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} dq^i dq^j.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Применяя преобразование объёма (??), имеем

$$\begin{aligned}dV &= Jd\mathcal{V} \Rightarrow \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} = J\mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} \cdot \mathring{\mathbf{r}}_{\partial k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} \mathbf{r}^k = J\mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} \cdot \mathring{\mathbf{r}}_{\partial k} \mathbf{r}^k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} = J\mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} \cdot \mathbf{F}^{-1}.\end{aligned}$$

Отсюда с (5.1) мы приходим к соотношению

$$\mathbf{n}dO = J\mathring{n}do \cdot \mathbf{F}^{-1},\tag{5.2}$$

называемому формулой Nanson’a.

§ 6. Силы в континууме. Тензор напряжения Cauchy

Поскольку частицы этой модели континуума — точки лишь с трансляционными степенями свободы*, то среди обобщённых сил нет моментов, нет никаких приложенных внешних пар сил ни в объёме, ни по поверхности.

* Трансляционные степени свободы возникают из способности частицы свободно двигаться в пространстве.

Сила $\rho \mathbf{f} dV$ действует на бесконечно-малый объём dV ; если \mathbf{f} — массовая сила (действующая на единицу массы), то $\rho \mathbf{f}$ — объёмная. Такие силы происходят от силовых полей, например: гравитационные силы (“силы тяжести”), силы инерции в неинерциальных системах отсчёта, электромагнитные силы при наличии в среде зарядов и токов.

Поверхностная сила $\mathbf{p} dO$ действует на бесконечно-малую поверхность dO . Это может быть контактное давление или/и трение, электростатическая сила при сосредоточенных на поверхности зарядах.

В материальном континууме, как в любой механической системе, различаются силы внешние и внутренние. Внутренние силы уравнивают действие внешних сил, и внутри среды они передаются непрерывно от точки к точке. Со времён Euler’a и Cauchy, внутренние силы в континууме считаются поверхностными контактными силами близкодействия: на бесконечномалой площадке $\mathbf{n} dO$ внутри среды действует сила $\mathbf{t}(\mathbf{n}) dO$. **Проясняя(??): действует с той?? стороны, куда направлена единичная нормаль \mathbf{n} .**

По принципу действия и противодействия, $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ меняет знак с переменной направления \mathbf{n} на противоположную сторону: $\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n})$. (Иногда последний тезис доказывается через баланс импульса для бесконечно короткого цилиндра с основаниями $\mathbf{n} dO$ и $-\mathbf{n} dO$.)

Вектор $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ на площадке с единичной нормалью \mathbf{n} называется вектором поверхностной тракции (surface traction vector) или вектором силового напряжения. Однако, $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ — не векторное поле: тракция $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)$ зависит не только от положения \mathbf{r} точки, но также от локальной ориентации (определяемой \mathbf{n}) элемента поверхности. Бесконечное число площадок любой ориентации проходят через одну и ту же точку, и бесконечно много векторов $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ существуют в каждой точке.

Тем самым, напряжение в точке континуума — не векторное поле, но совокупность (множество) всех векторов тракции для любых по-всякому ориентированных площадок, содержащих в себе эту точку. И оказывается, бесконечное множество всех векторов $\mathbf{t}(\mathbf{n})$

в точке полностью определяется одним-единственным тензором второй сложности — тензором напряжения Cauchy $\boldsymbol{\tau}$. Рассмотрим содержащийся во многих книгах вывод этого утверждения — теорему о существовании ныне называемого тензора напряжения Cauchy — и не без “аргумента-тетраэдра”.

A. L. Cauchy founded Continuum Mechanics by assuming that two parts of a continuum interact by means of surface densities of contact forces concentrated on their dividing surface. Then, assuming that these contact forces depend only on the normal to the dividing surface and that they are balanced by some volume density of force (including inertia), he played with tetrahedrons and proved the existence of the stress tensor.

De la pression ou tension dans un corps solide. *Exercices de mathématiques*, par M. **Augustin-Louis Cauchy**. Seconde année: 1827. Paris, Chez de Bure frères. Pages 42 à 59.

На поверхности бесконечномалого материального тетраэдра ...

§ 7. Баланс импульса и момента импульса

Рассмотрим какой-либо конечный объём \mathcal{V} среды, ограниченный поверхностью $\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})$, нагруженный поверхностными $\boldsymbol{p}d\mathcal{O}$ и массовыми/объёмными $\boldsymbol{f}dm = \rho\boldsymbol{f}d\mathcal{V}$ внешними силами. Формулировка баланса импульса такова

$$\left(\int_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{v} d\mathcal{V} \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{f} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{p} d\mathcal{O}. \quad (7.1)$$

... $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{t}_{(n)} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$...

Импульс слева найдём по (1.5), а поверхностный интеграл справа превратим в объёмный по теореме о дивергенции. Получим

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{v}}) \right) d\mathcal{V} = \mathbf{0}.$$

Но объём \mathcal{V} произволен, поэтому равно нулю подынтегральное выражение. Приходим к уравнению баланса импульса в локальной (дифференциальной) форме

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

...

Теперь к балансу момента импульса. Интегральная формулировка:

$$\left(\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \mathbf{r} \times \mathbf{p} d\mathcal{O}. \quad (7.3)$$

Дифференцируя левую часть ($\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$)

$$\left(\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{r}} d\mathcal{V} \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \ddot{\mathbf{r}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \rho \dot{\mathbf{r}}}_0 d\mathcal{V},$$

применяя теорему о дивергенции к поверхностному интегралу (... $\mathbf{p} = \mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$...)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) &= -(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r} = -\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \oint_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\mathcal{O} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) d\mathcal{V}, \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \ddot{\mathbf{r}} d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) d\mathcal{V}, \\ \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}) d\mathcal{V} &- \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) d\mathcal{V} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

...

$$\underbrace{\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r})}_{\mathbf{r}^i \cdot \partial_i (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r})} = \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r}}_{\mathbf{r}^i \cdot (\partial_i \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r}} + \mathbf{r}^i \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \partial_i \mathbf{r})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_i \mathbf{t}_{(i)}, \mathbf{e}_i = \text{constant}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^i \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \partial_i \mathbf{r}) &= \mathbf{r}^i \cdot (\mathbf{e}_j \mathbf{t}_{(j)} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{t}_{(j)} \times \mathbf{r}_i = \\ &= -\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i \times \mathbf{t}_{(j)} = -\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{t}_{(j)} = -\mathbf{e}_j \times \mathbf{t}_{(j)} = -\boldsymbol{\tau}_{\times} \end{aligned}$$

...

§ 8. Собственные числа тензора напряжения Коши

Как и любой симметричный тензор, $\boldsymbol{\tau}$ имеет три вещественных собственных числа σ_i , называемых главными напряжениями (principal stresses), а также ортогональную тройку собственных векторов единичной длины \mathbf{e}_i . В представлении $\boldsymbol{\tau} = \sum \sigma_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ чаще всего индексы сортируются как $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, а тройка \mathbf{e}_i — “правая”.

Известна теорема о кругах Мора (Mohr’s circles)*

...

Чтобы замкнуть набор (систему) уравнений модели сплошной среды, нужно добавить определяющие отношения (constitutive relations) — уравнения, связывающие напряжение с деформацией (и другие необходимые связи). Однако, для твёрдого упругого континуума такой длинный путь построения модели излишен, что читатель и увидит ниже.

§ 9. Принцип виртуальной работы (без множителей Лагранжа)

Согласно принципу виртуальной работы для некоего конечного объёма сплошной среды

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \delta W^{(i)}) d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{O}(\partial \mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{O} = 0. \quad (9.1)$$

Здесь $\delta W^{(i)}$ — работа внутренних сил на единицу объёма в текущей конфигурации; \mathbf{f} — массовая сила, с динамикой $(\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}})$; $\mathbf{p} = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ — поверхностная сила.

* Mohr’s circles, named after Christian Otto Mohr, is a two-dimensional graphical representation of transformation for the Cauchy stress tensor.

Применяя к поверхностному интегралу теорему о дивергенции, используя*

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^\top$$

и случайность \mathcal{V} , получаем локальную дифференциальную версию (9.1)

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^\top + \delta W^{(i)} = 0. \quad (9.2)$$

Когда тело виртуально движется как жёсткое целое, работа внутренних сил обнуляется

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} &= \delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0, \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot (\delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\tau}^\top \cdot \nabla (\delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}) &= 0, \\ \delta \boldsymbol{\rho} = \text{constant} \Rightarrow \nabla \delta \boldsymbol{\rho} &= \mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{o} = \text{constant} \Rightarrow \nabla \delta \mathbf{o} = \mathbf{0}, \\ \nabla (\delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}) &= \nabla (\delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}) = \nabla \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \mathbf{o} = \\ &= -\nabla \mathbf{r} \times \delta \mathbf{o} = -\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o} \\ &\dots \end{aligned}$$

Полагая $\delta \mathbf{o} = \mathbf{0}$ (лишь трансляция) $\Rightarrow \nabla \delta \mathbf{r} = \nabla \delta \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$, оно превращается в баланс сил (импульса)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Если $\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}$ (лишь поворот) с $\delta \mathbf{o} = \text{constant}$, то

$$\begin{aligned} (14.10, \S 1.14) \Rightarrow \nabla \delta \mathbf{r} &= \nabla \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \mathbf{o} = -\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o}, \\ \nabla \delta \mathbf{r}^\top &= \mathbf{E} \times \delta \mathbf{o} \end{aligned}$$

With

$$\begin{aligned} (7.4, \S 1.7) \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_\times &= -\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^3, \\ \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o}) &= \boldsymbol{\tau} \cdot (-\boldsymbol{\epsilon}^3 \cdot \delta \mathbf{o}) = (-\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^3) \cdot \delta \mathbf{o} = \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \delta \mathbf{o} \end{aligned}$$

...

В упругой среде внутренние силы потенциальны

$$\delta W^{(i)} = -\rho \delta \tilde{\Pi}$$

...

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S = -\delta W^{(i)} = \rho \delta \tilde{\Pi} \quad (9.3)$$

...

$$\begin{aligned} * \mathbf{r}^i \cdot \partial_i (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r}) &= \mathbf{r}^i \cdot (\partial_i \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{r}^i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{r}), \\ \mathbf{r}^i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{r}) &= \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{r}) \mathbf{r}^i = \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{r}^i \partial_i \delta \mathbf{r})^\top \end{aligned}$$

Вид потенциала $\tilde{\Pi}$ на единицу массы пока неизвестен, но очевидно что $\tilde{\Pi}$ определяется деформацией.

С балансом массы $\rho J = \overset{\circ}{\rho} \Leftrightarrow \rho = J^{-1} \overset{\circ}{\rho}$ ($J \equiv \det \mathbf{F}$ — якобиан, определитель градиента движения), потенциал на единицу объёма в недеформированной конфигурации $\tilde{\Pi}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi} &\equiv \overset{\circ}{\rho} \tilde{\Pi} \Rightarrow \delta \tilde{\Pi} = \overset{\circ}{\rho} \delta \tilde{\Pi}, \\ \rho \delta \tilde{\Pi} &= J^{-1} \delta \tilde{\Pi}.\end{aligned}\tag{9.4}$$

Полным аналогом (...) является равенство

...

§ 10. Определяющие отношения упругости

Фундаментальное соотношение упругости (??)

...

$$\Pi(C) = \int_0^C \boldsymbol{\tau} \cdots d\mathbf{C}$$

If the strain energy density is path independent, then it acts as a potential for stress, that is

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi(C)}{\partial \mathbf{C}}$$

For adiabatic processes, Π is equal to the change in internal energy per unit volume.

For isothermal processes, Π is equal to the Helmholtz free energy per unit volume.

The natural configuration of a body is defined as the configuration in which the body is in stable thermal equilibrium with no external loads and zero stress and strain.

When we apply energy methods in elasticity, we implicitly assume that a body returns to its natural configuration after loads are removed. This implies that the Gibbs' condition is satisfied:

$$\Pi(C) \geq 0 \quad \text{with} \quad \Pi(C) = 0 \quad \text{iff} \quad C = 0$$

...

Начальная конфигурация считается естественной (natural configuration) — недеформированной ненапряжённой: $\mathbf{C} = {}^2\mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}$, поэтому в Π нет линейных членов.

Тензор жёсткости ${}^4\mathbf{A}$

...

Rubber-like material (elastomer)

Материалу типа резины (эластомеру) характерны большие деформации, и функция $\Pi(\text{I}, \text{II}, \text{III})$ для него бывает весьма сложной*.

При больших деформациях исчезают преимущества использования \mathbf{u} и \mathbf{C} — проще остаться с вектором-радиусом \mathbf{r} ...

...

* **Harold Alexander.** A constitutive relation for rubber-like materials // International Journal of Engineering Science, volume 6 (September 1968), pages 549–563.

§ 11. Тензоры напряжения Piola–Kirchhoff'a и другие меры напряжения

Соотношение Nanson'a $\mathbf{n}d\mathcal{O} = J\mathring{\mathbf{n}}do \cdot \mathbf{F}^{-1}$ между векторами бесконечно малой площадки в начальной ($\mathring{\mathbf{n}}do$) и в текущей ($\mathbf{n}d\mathcal{O}$) конфигурациях*

$$(5.2) \Rightarrow \mathbf{n}d\mathcal{O} \cdot \boldsymbol{\tau} = J\mathring{\mathbf{n}}do \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}d\mathcal{O} = \mathring{\mathbf{n}} \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}do$$

даёт двойное выражение поверхностной силы

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}d\mathcal{O} = \mathring{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}do, \quad \mathbf{T} \equiv J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (11.1)$$

Тензор \mathbf{T} называется первым (несимметричным) тензором напряжения Piola–Kirchhoff'a, иногда — “номинальным напряжением” (“nominal stress”) или “инженерным напряжением” (“engineering stress”). Бывает и когда какое-либо из этих (на)именований даётся транспонированному тензору

$$\mathbf{T}^\top = J\boldsymbol{\tau}^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} = J\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}.$$

Обращение (11.1)

$$J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$$

...

$$\delta\Pi = \mathbf{T} \cdot \delta\mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top \Rightarrow \Pi = \Pi(\mathring{\nabla}\mathbf{r}) \quad (11.2)$$

— этот немного неожиданный результат получился благодаря коммутативности δ и $\mathring{\nabla}$: $\mathring{\nabla}\delta\mathbf{r}^\top = \delta\mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top$ (∇ и δ не коммутируют).

Тензор \mathbf{T} оказался энергетически сопряжённым с $\mathbf{F} \equiv \mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top$

$$\mathbf{T} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{F}}. \quad (11.3)$$

Второй (симметричный) тензор напряжения Piola–Kirchhoff'a \mathbf{S} энергетически сопряжён с $\mathbf{G} \equiv \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$ и $\mathbf{C} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{C}) &= \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{S} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{C}}, \\ d\mathbf{G} &= 2d\mathbf{C} \Rightarrow \delta\Pi(\mathbf{G}) = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{G}, \quad \mathbf{S} = 2\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{G}}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

* По-прежнему, $\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{r}^\circ} = \mathbf{r}_{\partial i} \mathring{\mathbf{r}}^i = \mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top$ — градиент движения,
 $J \equiv \det \mathbf{F}$ — якобиан (определитель Якоби).

Связь между первым и вторым тензорами

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{\top} \Leftrightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top}, \quad \mathbf{T}^{\top} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$$

и между тензором \mathbf{S} и тензором напряжения Cauchy $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \Leftrightarrow J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} = \boldsymbol{\tau}.$$

...

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{\top} = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^{\top} \\ \delta \mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} \\ \delta \mathbf{T} &= \delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{F}^{\top} \end{aligned}$$

...

The quantity $\boldsymbol{\kappa} = J \boldsymbol{\tau}$ is called the *Kirchhoff stress tensor* and is used widely in numerical algorithms in metal plasticity (where there's no change in volume during plastic deformation). Another name for it is *weighted Cauchy stress tensor*.

...

Вот баланс сил (импульса) с тензором \mathbf{T} для любого недеформированного объёма $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$

$$\int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\mathcal{O} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} + \int_{\mathcal{O}(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} d\mathcal{O} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \left(\overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) d\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \mathbf{0}$$

или в локальной (дифференциальной) версии

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (11.5)$$

Преимущества этого уравнения в сравнении с (7.2): здесь фигурирует известная плотность $\overset{\circ}{\rho}$ массы недеформированного объёма $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$, и оператор $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \overset{\circ}{r}^i \partial_i$ определяется через известные векторы $\overset{\circ}{r}^i$. Появление \mathbf{T} **отражает** специфическое свойство упругого твёрдого тела — “помнить” свою начальную конфигурацию. Тензор \mathbf{T} едва ли полезен в механике текучих сред.

Принцип виртуальной работы для произвольного объёма $\overset{\circ}{V}$ упругой ($\delta W^{(i)} = -\delta\Pi$) среды:

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \left(\overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} - \delta\Pi \right) d\overset{\circ}{V} + \int_{o(\partial\overset{\circ}{V})} \overset{\circ}{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{r} \, do = 0,$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{r}) = \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{T}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r}, \quad \mathbf{T}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r} = \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r}^\top$$

$$\delta\Pi = \left(\overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r}^\top$$

....

The first one is non-symmetric, it connects forces in the deformed stressed configuration to underformed geometry+mass (initially known volumes, areas, densities), and it is energetically conjugate to the motion gradient (commonly mistakenly called “deformation gradient”, despite comprising of rigid rotations). The first (or sometimes its transpose) is also known as “nominal stress” and “engineering stress”.

The second one is symmetric, it connects loads in the initial undeformed configuration to initial mass+geometry, and it’s conjugate to the right Cauchy–Green deformation tensor (and thus to the Cauchy–Green–Venant measure of deformation).

The first is simpler when you use just motion gradient and is more universal, but the second is simpler when you prefer right Cauchy–Green deformation and its offsprings.

There’s also popular Cauchy stress, which relates forces in the deformed configuration to deformed geometry+mass.

“energetically conjugate” means that their product is energy, here: elastic (potential) energy per unit of volume

...

In the case of finite deformations, the Piola–Kirchhoff stress tensors express the stress relative to the initial configuration. This is in contrast to the Cauchy stress tensor which expresses the stress relative to the present configuration. For infinitesimal deformations and rotations, the Cauchy and Piola–Kirchhoff tensors are identical.

Whereas the Cauchy stress tensor $\boldsymbol{\tau}$ relates stresses in the current configuration, the motion gradient and strain tensors are described by relating the motion to the initial configuration; thus not all tensors describing the material are in either the initial or current configuration. Describing the stress, strain and deformation either in the initial or current configuration

would make it easier to define constitutive models. For example, the Cauchy stress tensor is variant to a pure rotation, while the deformation strain tensor is invariant; thus creating problems in defining a constitutive model that relates a varying tensor, in terms of an invariant one during pure rotation; as by definition constitutive models have to be invariant to pure rotations.

1st Piola–Kirchhoff stress tensor

The *1st Piola–Kirchhoff stress tensor* is one possible solution to this problem. It defines a family of tensors, which describe the configuration of the body in either the current or the initial configuration.

The 1st Piola–Kirchhoff stress tensor \mathbf{T} relates forces in the present (“spatial”) configuration with areas in the initial (“material”) configuration

$$\mathbf{T} = J \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

где \mathbf{F} is the motion gradient and $J \equiv \det \mathbf{F}$ is определитель Якоби.

In terms of components in an orthonormal basis, the first Piola–Kirchhoff stress is given by

$$T_{iL} = J \tau_{ik} F_{Lk}^{-1} = J \tau_{ik} \frac{\partial X_L}{\partial x_k}$$

Because it relates different coordinate systems, the 1st Piola–Kirchhoff stress is a two-point tensor. In common, it’s not symmetric. The 1st Piola–Kirchhoff stress is the 3D generalization of the 1D concept of engineering stress.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 1st Piola–Kirchhoff stress tensor will vary with material orientation.

The 1st Piola–Kirchhoff stress is energy conjugate to the motion gradient.

2nd Piola–Kirchhoff stress tensor

Whereas the 1st Piola–Kirchhoff stress relates forces in the current configuration to areas in the initial configuration, the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor \mathbf{S} relates forces in the initial configuration to areas in the initial configuration. The force in the initial configuration is obtained via a mapping that preserves the relative relationship between the force direction and the area normal in the initial configuration.

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

In index notation using an orthonormal basis,

$$S_{IL} = J F_{Ik}^{-1} F_{Lm}^{-T} \tau_{km} = J \frac{\partial X_I}{\partial x_k} \frac{\partial X_L}{\partial x_m} \tau_{km}$$

This tensor, a one-point tensor, is symmetric.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor remain constant, irrespective of material orientation.

The 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor is energy conjugate to the Green–Lagrange finite strain tensor.

...

§ 12. Варьирование текущей конфигурации

Прежде упругая среда рассматривалась в двух конфигурациях: начальной (отсчётной) с векторами-радиусами $\overset{\circ}{\mathbf{r}}$ и текущей (актуальной) с \mathbf{r} . Теперь представим себе малое изменение текущей конфигурации с бесконечно малыми приращениями вектора положения $\delta \mathbf{r}$, вектора массовых сил $\delta \mathbf{f}$, первого тензора напряжения Piola–Kirchhoff’a $\delta \mathbf{T}$ и тензора деформации $\delta \mathbf{C}$. Варьируя (11.5), (...) * и (...), получаем

$$\begin{aligned} \rho \delta \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \delta \mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{T} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} \right) \cdot \mathbf{F}^\top + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{F}^\top, \\ \delta \mathbf{F}^\top &= \delta \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} = \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r} = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla \delta \mathbf{r}, \quad \delta \mathbf{F} = \delta \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^\top = \nabla \delta \mathbf{r}^\top \cdot \mathbf{F}, \\ \delta \mathbf{C} &= \mathbf{F}^\top \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \delta \mathbf{r}^S. \end{aligned} \quad (12.1)$$

...

$$\begin{aligned} (5.2) \Rightarrow \dot{\mathbf{n}} d\mathcal{O} &= J^{-1} \mathbf{n} d\mathcal{O} \cdot \mathbf{F} \Rightarrow \dot{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{T} d\mathcal{O} = J^{-1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{T} d\mathcal{O} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{T} d\mathcal{O} = \mathbf{n} \cdot \delta \boldsymbol{\tau} d\mathcal{O}, \quad \delta \boldsymbol{\tau} \equiv J^{-1} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{T} \end{aligned}$$

— введённый так тензор $\delta \boldsymbol{\tau}$ связан с вариацией $\delta \mathbf{T}$ как $\boldsymbol{\tau}$ связан с \mathbf{T} ($\boldsymbol{\tau} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$). Из (12.1) и ...

...

... корректируя коэффициенты линейной функции $\delta \boldsymbol{\tau}(\nabla \delta \mathbf{r})$.

§ 13. Внутренние связи

До сих пор деформация считалась свободной, мера деформации \mathbf{C} могла быть любой. Однако, существуют материалы со значительным сопротивлением некоторым видам деформации. Резина, например, изменению формы сопротивляется намного меньше, чем изменению объёма — некоторые виды резины можно считать несжимаемым материалом.

Понятие геометрической связи, развитое в общей механике ...

...

$$\begin{aligned} * \quad \overset{\circ}{\nabla} &= \nabla \cdot \overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^i \partial_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}^j \partial_j \overset{\circ}{\mathbf{r}} \stackrel{?}{=} \mathbf{r}^i \partial_i \overset{\circ}{\mathbf{r}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}^j \partial_j = \nabla \overset{\circ}{\mathbf{r}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{F}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \\ \overset{\circ}{\nabla} &= \overset{\circ}{\nabla} \cdot \nabla \mathbf{r} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i \cdot \mathbf{r}^j \partial_j \mathbf{r} \stackrel{?}{=} \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^j \partial_j = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \cdot \nabla = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla \end{aligned}$$

for incompressible materials $\Pi = \Pi(I, II)$

Mooney–Rivlin model of incompressible material

$$\Pi = c_1(I - 3) + c_2(II - 3)$$

incompressible Treloar (neo-Hookean) material

$$c_2 = 0 \Rightarrow \Pi = c_1(I - 3)$$

...

§ 14. Полая сфера под действием давления

Решение этой относительно простой задачи описано во многих книгах. В отсчётной (ненапряжённой) конфигурации имеем сферу с внутренним радиусом r_0 и наружным r_1 . Давление равно p_0 внутри и p_1 снаружи.

Введём удобную для этой задачи сферическую систему координат в отсчётной конфигурации $q^1 = \theta$, $q^2 = \phi$, $q^3 = r$ (рис. ??). Эти же координаты будут и материальными. Имеем

...

§ 15. Напряжения как множители Лагранжа

Описанному ранее в § 9 использованию принципа виртуальной работы предшествовало введение тензора напряжения Cauchy через баланс сил для бесконечно малого тетраэдра (§ 6). Но тут мы увидим, что сей принцип применим и без рассуждений с тетраэдром.

Рассмотрим тело — не только лишь упругое, с любой виртуальной работой внутренних сил $\delta W^{(i)}$ на единицу массы — нагруженное массовыми $\mathbf{f} dm$ (для краткости пишем \mathbf{f} вместо $\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}$, так что динамика присутствует) и поверхностными $\mathbf{p} d\mathcal{O}$ внешними силами. Имеем вариационное уравнение

$$\int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \delta W^{(i)}) dV + \int_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{O} = 0. \quad (15.1)$$

Полагаем, что внутренние силы не совершают работу при виртуальном движении тела как целого — когда от бесконечно малых виртуальных перемещений $\delta \mathbf{r}$ частиц тела нет деформации $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \delta \mathbf{r}^S = {}^2\mathbf{0} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (15.2)$$

Отбросив $\delta W^{(i)}$ в (15.1) при условии (15.2), получим вариационное уравнение со связью. Приём с множителями Лагранжа даёт возможность считать вариации $\delta \mathbf{r}$ независимыми. Поскольку в каждой точке связь представлена симметричным тензором второй сложности, то таким же тензором будут и множители Лагранжа ${}^2\boldsymbol{\lambda}$. Приходим к уравнению

$$\int_V \left(\rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} - {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S \right) dV + \int_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{O} = 0. \quad (15.3)$$

Благодаря симметрии ${}^2\boldsymbol{\lambda}$ имеем*

$$\begin{aligned} {}^2\boldsymbol{\lambda} &= {}^2\boldsymbol{\lambda}^\top \Rightarrow {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S = {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^\top, \\ {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S &= \nabla \cdot ({}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{r}) - \nabla \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{r}. \end{aligned}$$

* $\boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X}^\top = \boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X}^S, \quad \nabla \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{B}^\top \cdot \nabla \mathbf{a}$

Подставив это в (15.3) и применив теорему о дивергенции, получаем

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{O} = 0.$$

Но $\delta \mathbf{r}$ случайна на поверхности и в объёме, так что

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}, \quad \nabla \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

— формально введённый симметричный множитель ${}^2\boldsymbol{\lambda}$ оказался тензором напряжения Cauchy.

Похожее введение напряжений было представлено в книге [49]. Тут нет новых результатов, но интересна сама возможность одновременного вывода тех уравнений механики сплошной среды, которые раньше считались независимыми. В следующих главах эта техника используется для построения новых континуальных моделей.

Библиография

Глубина изложения нелинейной безмоментной упругости характерна для книг А. И. Лурье [22, 23]. Оригинальность как основных идей, так и стиля присуща книге С. Truesdell'a [57]. Монография Ю. Н. Работнова [49], где напряжения представлены как множители Лагранжа, очень интересна и своеобразна. Много ценной информации можно найти у К. Ф. Черных [64]. Книгу Л. М. Зубова [15] тоже сто́ит упомянуть. О применении нелинейной теории упругости в смежных областях рассказано в книге С. Teodosiu [53]. Повышенным математическим уровнем отличается монография Ph. Ciarlet [52].

КЛАССИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ

Геометрически линейная модель: перемещения малы. Операторы $\overset{\circ}{\nabla}$ и ∇ неразличимы, $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$, $\rho = \overset{\circ}{\rho}$ — “уравнения можно писать в начальной конфигурации”, операторы δ и ∇ коммутируют ($\delta \nabla u = \nabla \delta u$).

§1. Полный набор уравнений

Уравнения нелинейной упругости, даже в самых простых случаях, приводят к математически сложным задачам. Поэтому повсеместно применяется линейная теория малых перемещений. Уравнения этой теории были выведены в первой половине XIX^{го} века Cauchy, Navier, Lamé, Clapeyron’ом, Poisson’ом, Saint-Venant’ом, George Green’ом и другими учёными.

Полный замкнутый набор (система) уравнений классической линейной теории в прямой инвариантной тензорной записи:

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0, \quad \sigma = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} = {}^4\mathcal{A} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \nabla u^S. \quad (1.1)$$

Здесь σ — линейный тензор напряжения, f — вектор объёмных нагрузок, ε — тензор бесконечномалой линейной деформации, $\Pi(\varepsilon)$ — потенциальная энергия деформации единицы объёма, ${}^4\mathcal{A}$ — тензор жёсткости (четырёхвалентный, с симметрией ${}^4\mathcal{A}_{12 \mp 34} = {}^4\mathcal{A}$, ${}^4\mathcal{A}_{1 \mp 2} = {}^4\mathcal{A}$, ${}^4\mathcal{A}_{3 \mp 4} = {}^4\mathcal{A}$).

Уравнения (1.1) точные, они могут быть получены варьированием уравнений нелинейной теории. Варьирование от произвольной конфигурации описано в §3.12. Линейная теория — результат варьирования от начальной ненапряжённой конфигурации, где

$$\begin{aligned} F &= E, \quad C = {}^20, \quad \delta C = \nabla \delta r^S \equiv \delta \varepsilon, \\ \tau &= {}^20, \quad \delta \tau = \delta T = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial C \partial C} \cdot \delta C, \quad \nabla \cdot \delta \tau + \rho \delta f = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Остаётся поменять $\delta \mathbf{r}$ на \mathbf{u} , $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ на $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\delta \boldsymbol{\tau}$ на $\boldsymbol{\sigma}$, $\partial^2 \Pi / \partial C \partial C$ на ${}^4\mathcal{A}$, а $\rho \delta \mathbf{f}$ на \mathbf{f} .

Если вывод (1.2) кажется читателю малопонятным, возможно исходить из уравнений

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \\ \boldsymbol{\tau} &= J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^\top, \quad \mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^S + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Полагая перемещение \mathbf{u} малым, перейдём от (1.3) к (1.1).

Или вот как. Вместо \mathbf{u} взять $\chi \mathbf{u}$, тут $\chi \rightarrow 0$ — некоторый весьма малый параметр. А неизвестные представить рядами по целым степеням χ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}^{(0)} + \chi \boldsymbol{\tau}^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^{(0)} + \chi \mathbf{C}^{(1)} + \dots, \\ \nabla &= \overset{\circ}{\nabla} + \chi \nabla^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \chi \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \quad J = 1 + \chi J^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Для первых (“нулевых”) членов этих разложений и получается (1.1). В книге [57] сие названо “формальным приближением”.

Невозможно сказать в общем случае, насколько мал должен быть параметр χ — ответ зависит от ситуации и определяется лишь тем, описывает линейная модель интересующий эффект или нет. Когда, например, интересна связь частоты свободных колебаний упругого тела с амплитудой, то нужна уже нелинейная модель.

Линейная задача ставится в начальном объёме $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$, ограниченном поверхностью \mathcal{o} с вектором площади $\mathbf{n} d\mathcal{o}$ (“принцип начальных размеров”).

Краевые (граничные) условия чаще всего такие: на части \mathcal{o}_1 поверхности известны перемещения (геометрическое/кинематическое условие), а на другой части \mathcal{o}_2 — силы (механическое условие)

$$\mathbf{u}|_{\mathcal{o}_1} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\mathcal{o}_2} = \mathbf{p}. \quad (1.4)$$

Бывают и более сложные комбинации, если мы знаем некоторые компоненты как \mathbf{u} , так и $\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ одновременно. Для примера, на плоской грани $x = \text{constant}$ при вдавливании штампа с гладкой поверхностью $u_x = \nu(y, z)$, $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ (функция ν определяется формой штампа).

Начальные условия в динамических задачах, когда вместо \mathbf{f} мы имеем $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$, ставятся как обычно в механике — на положения и на скорости: в условный момент времени $t=0$ определены \mathbf{u} и $\dot{\mathbf{u}}$.

Плотность потенциальной энергии деформации

$$\delta \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\delta^2 \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdots \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon} = 2\Pi(\delta \boldsymbol{\varepsilon})$$

$$\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \delta(\boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

Как отмечалось в гл. 2, в основу механики может быть положен принцип виртуальной работы (d'Alembert–Lagrange principle). Этот принцип справедлив и в линейной теории (внутренние силы в упругой среде потенциальны: $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$)

$$\int_{\mathcal{V}} \left[(\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} - \delta \Pi \right] d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} d\sigma = 0, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0}, \quad (1.5)$$

потому что

$$\delta \Pi = \boldsymbol{\sigma} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdots \nabla \delta \mathbf{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u},$$

$$\int_{\mathcal{V}} \delta \Pi d\mathcal{V} = \oint_{o(\partial \mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\sigma - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\mathcal{V}$$

и левая часть (1.5) приобретает вид

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{o_2} (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} d\sigma,$$

что, конечно же, равно нулю. Отметим краевое условие $\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0}$: виртуальные перемещения согласованы с этой связью — $\delta \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0}$.

§ 2. Уникальность решения в динамике

Как это типично для линейной математической физики, теорема единственности доказывается “от противного”. Предположим, что существуют какие-либо два решения: $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t)$. Если

разность $\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ окажется равной $\mathbf{0}$, тогда эти решения совпадают, то есть решение единственно.

Но сперва убедимся в существовании интеграла энергии — путём вывода уравнения баланса механической энергии для линейной модели теории малых перемещений

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{K} + \Pi) \cdot dV &= \int_V \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{u}} do, \\ \mathbf{u}|_{o_1} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{o_2} = \mathbf{p}, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}^0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}^0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для левой части имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \frac{1}{2} (\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) \cdot = \frac{1}{2} \rho (\dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}, \\ \dot{\Pi} &= \frac{1}{2} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot}_{2 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}}_{-(\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}})} = \\ &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \\ (\text{использован баланс импульса } \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}), \\ \dot{\mathbf{K}} + \dot{\Pi} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Применяя теорему о дивергенции

$$\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dV = \oint_{o(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}} do$$

и краевое условие $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}$ на o_2 , получаем (2.1).

Из (2.1) следует, что без нагрузок (когда нет внешних ни объёмных, ни поверхностных сил) полная механическая энергия не изменяется:

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ и } \mathbf{p} = \mathbf{0} \Rightarrow \int_V (\mathbf{K} + \Pi) dV = \text{constant}(t). \quad (2.2)$$

Если в момент $t=0$ был ненапряжённый ($\Pi=0$) покой ($\mathbf{K}=0$), то

$$\int_V (\mathbf{K} + \Pi) dV = 0. \quad (2.2')$$

Кинетическая энергия положительна: $\mathbf{K} > 0$ если $\dot{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$ и обращается в нуль лишь когда $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ — это вытекает из самого определения $\mathbf{K} \equiv \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$. Потенциальная энергия, будучи квадратичной формой бесконечномалой линейной деформации $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$, тоже положительна: $\Pi > 0$ если $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$. Таков

априорное требование положительной определённости для тензора жёсткости ${}^4\mathbf{A}$. Это одно из “дополнительных неравенств в теории упругости” [22, 57].

Так как \mathbf{K} и $\mathbf{\Pi}$ положительно определены, (2.2') даёт

$\mathbf{K} = 0, \mathbf{\Pi} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S = {}^2\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \boldsymbol{\omega}^\circ \times \mathbf{r}$ (\mathbf{u}° и $\boldsymbol{\omega}^\circ$ — некоторые константы трансляции и поворота). С неподвижной частью поверхности

$$\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}^\circ = \mathbf{0} \text{ и } \boldsymbol{\omega}^\circ = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ всюду.}$$

Теперь вспомним о двух решениях \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 . Разность $\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ есть решение полностью “однородной” (совсем без постоянных членов) линейной задачи: в объёме $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, в краевых и в начальных условиях — нули. Поэтому $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$ — единственность доказана.

Что же касается существования решения, то простыми выкладками его в общем случае не обосновать. Отметим лишь, что динамическая задача является эволюционной, то есть описывает развитие процесса во времени. Из баланса импульса находим ускорение $\ddot{\mathbf{u}}$, далее переходим на “следующий временной слой” $t + dt$:

...

Разумеется, эти соображения лишены математической точности, характерной, например, для монографии Philippe Ciarlet [52].

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathbf{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A}$$

§ 3. Закон Гука

То соотношение между напряжением и деформацией, которое в XVII^{ом} веке Robert Hooke мог высказать лишь весьма расплывчато*, записано в прямой инвариантной нотации в (1.1) и осуществляется тензором жёсткости

$${}^4\mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = A^{ijkl} \mathbf{r}_{\partial i} \mathbf{r}_{\partial j} \mathbf{r}_{\partial k} \mathbf{r}_{\partial l}, \quad A^{ijkl} = \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}. \quad (3.1)$$

* “*ceiinnosssttuu, id est, Ut tensio sic vis*” — Robert Hooke. Lectures de Potentia Restitutiva, Or of Spring Explaining the Power of Springing Bodies. London, 1678. 56 pages.

Тензор жёсткости, как частная производная скалярной плотности упругой потенциальной энергии Π дважды по тому же бивалентному тензору ε , симметричен по парам индексов: ${}^4\mathcal{A}_{12\equiv 34} = {}^4\mathcal{A} \Leftrightarrow A^{ijkl} = A^{klij}$. Оттого 36 компонент из $3^4 = 81$ “имеют двойника” и только 45 независимы. К тому же, из-за симметрии тензора бесконечномалой деформации ε , тензор ${}^4\mathcal{A}$ симметричен ещё и внутри каждой пары индексов: $A^{ijkl} = A^{jikl} = A^{ijlk} (= A^{jilk})$. Это снижает число независимых компонент до 21:

$$\begin{aligned}
 A^{abcd} &= A^{cdab} = A^{bacd} = A^{abdc} \\
 A^{1111} & \\
 A^{1112} &= A^{1121} = A^{1211} = A^{2111} \\
 A^{1113} &= A^{1131} = A^{1311} = A^{3111} \\
 A^{1122} &= A^{2211} \\
 A^{1123} &= A^{1132} = A^{2311} = A^{3211} \\
 A^{1133} &= A^{3311} \\
 A^{1212} &= A^{1221} = A^{2112} = A^{2121} \\
 A^{1213} &= A^{1231} = A^{1312} = A^{1321} = A^{2113} = A^{2131} = A^{3112} = A^{3121} \\
 A^{1222} &= A^{2122} = A^{2212} = A^{2221} \\
 A^{1223} &= A^{1232} = A^{2123} = A^{2132} = A^{2312} = A^{2321} = A^{3212} = A^{3221} \\
 A^{1233} &= A^{2133} = A^{3312} = A^{3321} \\
 A^{1313} &= A^{1331} = A^{3113} = A^{3131} \\
 A^{1322} &= A^{2213} = A^{2231} = A^{3122} \\
 A^{1323} &= A^{1332} = A^{2313} = A^{2331} = A^{3123} = A^{3132} = A^{3213} = A^{3231} \\
 A^{1333} &= A^{3133} = A^{3313} = A^{3331} \\
 A^{2222} & \\
 A^{2223} &= A^{2232} = A^{2322} = A^{3222} \\
 A^{2233} &= A^{3322} \\
 A^{2323} &= A^{2332} = A^{3223} = A^{3232} \\
 A^{2333} &= A^{3233} = A^{3323} = A^{3332} \\
 A^{3333} &
 \end{aligned}$$

Нередко компоненты тензора жёсткости записывают симметричной матрицей 6×6 вида

$$[{}^4\mathcal{A}]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_3 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_4 & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_5 & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_6 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A^{1111} & A^{1122} & A^{1133} & A^{1112} & A^{1113} & A^{1123} \\ A^{2211} & A^{2222} & A^{2233} & A^{1222} & A^{1322} & A^{2223} \\ A^{3311} & A^{3322} & A^{3333} & A^{1233} & A^{1333} & A^{2333} \\ A^{1211} & A^{2212} & A^{3312} & A^{1212} & A^{1213} & A^{1223} \\ A^{1311} & A^{2213} & A^{3313} & A^{1312} & A^{1313} & A^{1323} \\ A^{2311} & A^{2322} & A^{3323} & A^{2312} & A^{2313} & A^{2323} \end{bmatrix}$$

Даже в декартовых координатах x, y, z квадратичная форма упругой энергии $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ довольно-таки громоздкая:

$$\begin{aligned} 2\Pi = & a_1\varepsilon_x^2 + a_2\varepsilon_y^2 + a_3\varepsilon_z^2 + a_4\varepsilon_{xy}^2 + a_5\varepsilon_{xz}^2 + a_6\varepsilon_{yz}^2 + \\ & + 2\left[\varepsilon_x(a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\varepsilon_{xy} + a_{15}\varepsilon_{xz} + a_{16}\varepsilon_{yz}) + \right. \\ & + \varepsilon_y(a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\varepsilon_{xy} + a_{25}\varepsilon_{xz} + a_{26}\varepsilon_{yz}) + \\ & + \varepsilon_z(a_{34}\varepsilon_{xy} + a_{35}\varepsilon_{xz} + a_{36}\varepsilon_{yz}) + \\ & \left. + \varepsilon_{xy}(a_{45}\varepsilon_{xz} + a_{46}\varepsilon_{yz}) + a_{56}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}\right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Когда добавляется материальная симметрия, число независимых компонент тензора \mathbf{A} ещё уменьшается.

Пусть материал имеет плоскость симметрии упругих свойств $z = \text{constant}$. Тогда энергия Π не меняется при перемене знаков у ε_{zx} и ε_{zy} . А это возможно лишь если

$$\Pi \Big|_{\substack{\varepsilon_{xz} = -\varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{yz}}} = \Pi \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 = a_{15} = a_{16} = a_{25} = a_{26} = \\ = a_{35} = a_{36} = a_{45} = a_{46} \end{aligned} \quad (3.3)$$

— число независимых констант падает до 13.

Пусть далее плоскостей симметрии две: $z = \text{constant}$ и $y = \text{constant}$. Поскольку Π в таком случае не чувствительна к знакам ε_{yx} и ε_{yz} , вдобавок к (3.3) имеем

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{56} = 0 \quad (3.4)$$

— осталось 9 констант.

Ортотропным (ортогонально анизотропным) называется материал с тремя ортогональными плоскостями симметрии — пусть это координатные плоскости x, y, z . Легко увидеть, что (3.3) и (3.4) — это весь набор нулевых констант и в этом случае. Итак, ортотропный материал характеризуется девятью константами, и “для ортотропности” достаточно двух перпендикулярных плоскостей симметрии. Вид упругой энергии упрощается до

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}a_1\varepsilon_x^2 + \frac{1}{2}a_2\varepsilon_y^2 + \frac{1}{2}a_3\varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}a_4\varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{2}a_5\varepsilon_{xz}^2 + \frac{1}{2}a_6\varepsilon_{yz}^2 + \\ & + a_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_x\varepsilon_z + a_{23}\varepsilon_y\varepsilon_z. \end{aligned}$$

В ортотропном материале сдвиговые (угловые) деформации $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ никак не влияют на нормальные напряжения $\sigma_x = \partial\Pi/\partial\varepsilon_x$, $\sigma_y = \partial\Pi/\partial\varepsilon_y$, $\sigma_z = \partial\Pi/\partial\varepsilon_z$ (и наоборот). Популярный ортотропный материал — древесина; её упругие свойства различны по трём вза-

имно перпендикулярным направлениям: по радиусу, вдоль окружности и по высоте ствола.

Ещё один случай анизотропии — трансверсально изотропный (transversely isotropic) материал. Он характеризуется

...

æolotropic (anisotropic)

...

$$\begin{aligned} 2\Pi = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \Rightarrow \\ 2\Pi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.5)$$

...

преобразование Лежандра

Legendre (involution) transform(ation)

плотность потенциальной энергии внутренних сил (напряжений)

дополнительная энергия

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = {}^4\mathcal{B} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot {}^4\mathcal{B}, \\ \hat{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

...

В линейной теории дополнительная энергия численно равна энергии деформации (“упругому потенциалу”).

§ 4. Теоремы статики

Теорема Clapeyron’a

В равновесии с внешними силами, объёмными \mathbf{f} и поверхностными \mathbf{p} , работа этих сил (“статически замороженных” — постоянных

во времени) на актуальных перемещениях равна удвоенной* энергии деформации

$$2 \int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} do. \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \bigcirc \quad 2\Pi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{-\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = \int_{o_2} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}_p \cdot \mathbf{u} do + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} \quad \bullet \end{aligned}$$

Из (4.1) следует также, что без нагрузки $\int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = 0$. Поскольку Π положительна, то и напряжение $\boldsymbol{\sigma}$, и деформация $\boldsymbol{\varepsilon}$ без нагрузки — нулевые.

$$\begin{aligned} 2\Pi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\ \dot{\Pi} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \delta\Pi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

Парадокс эластостатики: Π равна лишь половине работы внешних сил.

Накопленная потенциальная энергия деформации Π is equal to only the half of the work done by external forces, acting through displacements from the unstressed configuration to the equilibrium.

Теорема Клапейрона подразумевает, что накопленная упругая энергия составляет лишь половину потраченной на деформацию энергии. Оставшаяся половина работы, совершённой внешними силами, теряется где-то до достижения равновесия.

Этот кажущийся парадокс достигается в рамках чисто консервативной линейной упругости. Как альтернатива, однако, в эластостатике обычная характеристика работы, совершённой для достижения

*“Ce produit représentait d’ailleurs le double de la force vive que le ressort pouvait absorber par l’effet de sa flexion et qui était la mesure naturelle de sa puissance.” —

Benoît Paul Émile Clapeyron. Mémoire sur le travail des forces élastiques dans un corps solide élastique déformé par l’action de forces extérieures. *Comptes rendus*, Tome XLVI, Janvier–Juin 1858. Page 208–212.

равновесия, концептуально сомнительна, и может быть нужна новая интерпретация.

Roger Fosdick and Lev Truskinovsky. About Clapeyron's Theorem in Linear Elasticity. *Journal of Elasticity*, Volume 72, July 2003. Pages 145–172.

There is always heating due to energy dissipation.

Для решения парадокса в теории распространена концепция “статического нагружения” — бесконечно медленного постепенного приложения нагрузки.

Статика рассматривает “замороженное” равновесие вне времени. Динамика нагружения до равновесия — предыстория. В линейной теории малых перемещений в равновесии затраченная на деформацию работа внешних сил на актуальных перемещениях равна удвоенной потенциальной энергии деформации. “Запасается” всего половина потраченной энергии. Вторая половина есть дополнительная энергия, она теряется до обретения равновесия на динамику — на внутреннюю энергию частиц (“диссипацию”), на колебания и волны. Так в теории. Однако, в реальности не бывает ни моментального “мёртвого” нагружения, ни бесконечно медленного “следающего”. Это две крайности. Реальная динамика нагружения всегда где-то между ними.

В области же бесконечно малых вариаций и виртуальных работ, работа реальных внешних сил на виртуальных перемещениях точно равна вариации упругого потенциала. А упругая среда есть такая, в которой вариация работы сил внутренних (напряжений) на виртуальных деформациях это минус вариация потенциала.

$-\delta W^{(i)} = \delta \Pi = \delta W^{(e)}$, когда варьируются только перемещения (нагрузки не варьируются). Потому в принципе виртуальной работы и варьируются лишь перемещения, чтобы виртуальная работа внешних неварьируемых реальных сил на вариациях перемещений была равна минус вариации внутренней энергии (в случае упругой среды — вариации упругого потенциала).

Теорема единственности решения

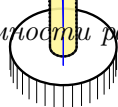
Как и в динамике (§ 2), допускаем существование двух решений и ищем их разность

...

Единственность решения, открытая G. Kirchhoff^{*}ом для тел с односвязным контуром^{*}, противоречит, казалось бы, повседневному опыту. Вообразим прямой стержень, зажатый на одном конце (“консольный”) и сжимаемый на втором конце продольной силой (рис. 12). Когда нагрузка достаточно большая, задача статики имеет два решения — “прямое” и “изогнутое”. Но такое противоречие с теоремой единственности происходит от нелинейности этой задачи. Если нагрузка малá, то решение описывается линейными уравнениями и единственно.

...
...
...
...

Теорема взаимности работ



Proposed by Enrico Betti^{**}.

Для тела с фиксированием части поверхности σ_1 рассматриваются два варианта: первый с нагрузками $\mathbf{f}_1, \mathbf{p}_1$ ^{рис. 12} и второй с нагрузками $\mathbf{f}_2, \mathbf{p}_2$. Словесная формулировка теоремы та же, что и в § 2.6. Математическая запись

$$\overbrace{\int_V \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{u}_2 dV + \int_{\sigma_2} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_2 d\sigma}^{W_{12}} = \overbrace{\int_V \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{u}_1 dV + \int_{\sigma_2} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_1 d\sigma}^{W_{21}}. \quad (4.2)$$

...

Reciprocal work theorem, also known as Betti's theorem, claims that for a linear elastic structure subject to two sets of forces P and Q , the work done by set P through displacements produced by set Q is equal to the work done by set Q through displacements produced by set P . This theorem has

* **Gustav Robert Kirchhoff**. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's journal)*, 56. Band (1859). Seiten 285–313. (Seite 291)

** **Enrico Betti**. Teoria della elasticità. *Il Nuovo Cimento* (1869–1876), VII e VIII (1872). Pagina 69.

applications in structural engineering where it is used to define influence lines and derive the boundary element method.

Теорема взаимности работ находит неожиданные и эффективные применения. Для примера рассмотрим стержень-балку, зашце́пленную на одном конце (“консольную”) и изгибаемую двумя силами с интегральными значениями P_1 и P_2 (рис. 13). Тогда как применяется линейная теория, перемещения-прогибы могут быть представлены в виде

$$u_1 = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2,$$

$$u_2 = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2.$$

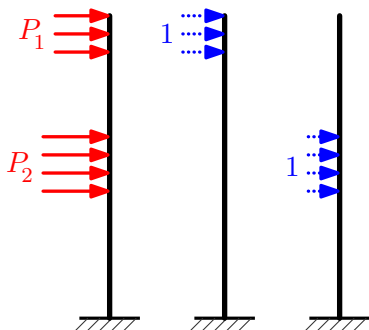


рисунок 13

§ 5. Уравнения в перемещениях

Полный набор уравнений (1.1) содержит неизвестные σ , ε и u . Исключая σ и ε , приходим к постановке в перемещениях (симметризация ∇u тут лишняя, ведь ${}^4\mathcal{A}_{3 \times 4} = {}^4\mathcal{A}$)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla u) + f &= 0, \\ u|_{o_1} &= u_0, \quad n \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla u|_{o_2} = p. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В изотропном теле (5.1) принимает вид

...

Общее решение однородного уравнения (...) нашёл Heinz Neuber
П. Ф. Папкович

...

§ 6. Сосредоточенная сила в бесконечной среде

Concentrated force is useful mathematical idealization, but cannot be found in the real world, where all forces are either body forces acting over a volume or surface forces acting over an area.

Начнём с риторического вопроса: почему упругое тело сопротивляется приложенной нагрузке, выдерживает её? Удачный ответ можно найти ...

...

§ 7. Нахождение перемещений по деформациям

Разложив градиент перемещения на симметричную и антисимметричную части

$$\nabla \mathbf{u} = \overbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\nabla \mathbf{u}^S} - \overbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}}^{-\nabla \mathbf{u}^A}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}, \quad (7.1)$$

...

Saint-Venant's compatibility condition is the integrability conditions for a symmetric tensor field to be a strain.

The compatibility conditions in linear elasticity are obtained by observing that there are six strain–displacement relations that are functions of only three unknown displacements. This suggests that the three displacements may be removed from the system of equations without loss of information.

A body that deforms without developing any gaps/overlaps is called a compatible body. Compatibility conditions are mathematical conditions that determine whether a particular deformation will leave a body in a compatible state.

...

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^T$$

Контур здесь произволен, так что приходим к соотношению

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} = {}^2\mathbf{0}, \quad (7.2)$$

называемому уравнением совместности деформаций.

Resulting expression (7.2) in terms of only deformation/strain provide constraints on possible variants of a deformation/strain field.

...

Тензор $\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon}$ симметричен вместе с $\boldsymbol{\varepsilon}$

...

Все уравнения линейной теории имеют аналог (первоисточник) в нелинейной. Чтобы найти его для (7.2), вспомним тензор деформации Cauchy–Green’a (§ 3.3) и тензоры кривизны (§ 1.16)

...

§ 8. Уравнения в напряжениях

Баланс сил (импульса)

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0 \quad (8.1)$$

ещё не определяет напряжения. Необходимо вдобавок, чтобы соответствующие напряжения деформации $\varepsilon(\sigma)$ (3.6)

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \sigma} = {}^4\mathcal{B} \cdot \sigma \quad (8.2)$$

были совместны (§ 7)

$$\text{inc } \varepsilon(\sigma) \equiv \nabla \times \left(\nabla \times \varepsilon(\sigma) \right)^T = {}^2 0. \quad (8.3)$$

Взятые вместе, (8.1), (8.2) and (8.3) являют полный замкнутый набор (систему) уравнений в напряжениях.

...

...

§ 9. Принцип минимума потенциальной энергии

Когда существование функции энергии деформации несомненно, и внешние силы считаются постоянными во время варьирования перемещений, принцип виртуальной работы приводит к принципу минимума потенциальной энергии.

Формулировка принципа:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) \equiv \int_{\mathcal{V}} \left(\Pi(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) dV - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{o} \rightarrow \min, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0. \quad (9.1)$$

Функционал $\mathcal{E}(\mathbf{u})$, называемый (полной) потенциальной энергией линейно-упругого тела, минимален тогда, когда перемещения \mathbf{u} истинны — то есть для решения задачи (5.1). Аргументы-функции \mathbf{u} должны удовлетворять геометрическому условию на o_1 (так они

не рвут существующие связи) и быть непрерывными (иначе $\Pi(\mathbf{u})$ не будет интегрируемой).

Для истинного поля перемещений \mathbf{u} , квадратичная функция

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}$$

становится равной истинной энергии деформации. Тогда $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\min}$, которая согласно теореме Клапейрона (4.1) есть

$$\mathcal{E}_{\min} = \int_{\mathcal{V}} \Pi(\mathbf{u}) d\mathcal{V} - \left(\int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} do \right) = - \int_{\mathcal{V}} \Pi(\mathbf{u}) d\mathcal{V}.$$

Взяв какое-то другое приемлемое (“admissible”) поле перемещений \mathbf{u}' , взглянем на конечную разность

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{V}} \left(\Pi(\mathbf{u}') - \Pi(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) do,$$

ища $\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) \geq 0$ или (то же самое) $\mathcal{E}(\mathbf{u}') \geq \mathcal{E}(\mathbf{u})$.

$\mathbf{f} = \text{constant}$ и $\mathbf{p} = \text{constant}$

$\Pi(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{a} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}$ (but *not* linear $\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}$ — this means $\Pi(\mathbf{a}) \neq \frac{1}{2} \sigma \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}$)

Связи не меняются: $(\mathbf{u}' - \mathbf{u})|_{o_1} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. Внешняя поверхностная сила $\mathbf{p}|_{o_2} = \mathbf{t}(n) = \mathbf{n} \cdot \sigma$ на o_2 и $= \mathbf{0}$ где-либо ещё на $o(\partial\mathcal{V})$.

$\sigma = \nabla \mathbf{u} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} = {}^2\text{constant}$ along with constant \mathbf{p} и \mathbf{f} . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) do &= \oint_{o(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) do = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\sigma \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u})) d\mathcal{V} = \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \sigma) \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \sigma^T \cdot \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

из-за симметрии $\sigma^T = \sigma \Rightarrow \sigma^T \cdot \cdot \nabla \mathbf{a} = \sigma \cdot \cdot \nabla \mathbf{a} = \sigma \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}^S \forall \mathbf{a}$. Разность преобразуется до

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) &= \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left(\Pi(\mathbf{u}') - \Pi(\mathbf{u}) - (\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) - \sigma \cdot \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

И с балансом импульса $\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0}$

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{V}} \left(\Pi(\mathbf{u}') - \Pi(\mathbf{u}) - \sigma \cdot \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V}.$$

Тут

$$\Pi(u') = \frac{1}{2} \nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u', \quad \Pi(u) = \frac{1}{2} \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u,$$

$$\Pi(u') - \Pi(u) = \frac{1}{2} \left(\nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' - \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u \right)$$

$${}^4\mathcal{A}_{12\rightleftharpoons 34} = {}^4\mathcal{A} \Rightarrow \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' = \nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u$$

$$\frac{1}{2} \left(\nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' - \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u + \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' - \nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u \right)$$

dot product is distributive ...

differentiation is linear

$$(\nabla u' - \nabla u) = \nabla(u' - u)$$

... для конечной разности потенциалов

$$\frac{1}{2} \nabla(u' + u) \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla(u' - u) = \Pi(u') - \Pi(u),$$

добавляя к которой

$$-\nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla(u' - u) = -\sigma \cdot \cdot \nabla(u' - u)$$

получаем

$$\frac{1}{2} \nabla(u' - u) \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla(u' - u) = \Pi(u' - u)$$

и в конце-концов*

$$\mathcal{E}(u') - \mathcal{E}(u) = \int_{\mathcal{V}} \Pi(u' - u) d\mathcal{V}.$$

Потому как ${}^4\mathcal{A}$ положительно определён (§2),
 $\Pi(w) = \frac{1}{2} \nabla w \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla w \geq 0 \quad \forall w$ (и $= 0$ только если
 $\nabla w = \mathbf{0} \Leftrightarrow w = \text{constant}$: для случая трансляции как целого
 без деформации).

...

$$\delta \nabla u = \nabla \delta u$$

...

метод Ritz'a

Задача о минимуме функционала $\mathcal{E}(u)$ приближённо решается
 как

...

$$* b^2 - a^2 - 2a(b - a) = (b + a)(b - a) - 2a(b - a) = (b - a)^2$$

метод конечных элементов, finite element method

...

§ 10. Принцип минимума дополнительной энергии

When the constitutive stress–strain relations assure the existence of a complementary energy function and the geometrical boundary conditions are assumed constant during variation of stresses, then the principle of minimum complementary energy emerges.

Дополнительная энергия линейно-упругого тела есть следующий функционал над полем напряжений:

$$\mathcal{D}(\sigma) \equiv \int_V \hat{\Pi}(\sigma) dV - \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{u}_0 do, \quad \mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}|_{o_1}, \quad (10.1)$$

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma|_{o_2} = \mathbf{p}.$$

...

$$\delta(\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}) = \nabla \cdot \delta \sigma = \mathbf{0} \text{ в объёме } V$$

...

Принцип минимума дополнительной энергии очень полезен для оценки неточных (приближённых) решений. Но для вычислений он не столь существенен, как принцип (Lagrange’a) минимума потенциальной энергии (9.1).

§ 11. Смешанные принципы стационарности

Prange–Hellinger–Reissner Variational Principle,

named after *Ernst Hellinger*, *Georg Prange* and *Eric Reissner*.

Working independently of Hellinger and Prange, Eric Reissner published his famous six-page paper “On a variational theorem in elasticity” in 1950. In this paper he develops — without, however, considering Hamilton–Jacobi theory — a variational principle same to that of Prange and Hellinger.

Hu–Washizu Variational Principle,

named after *Hu Haichang* and *Kyuichiro Washizu*.

Следующий функционал над перемещениями и напряжениями

$$\mathcal{R}(u, \sigma) = \int_{\mathcal{V}} [\sigma \cdot \nabla u^S - \hat{\Pi}(\sigma) - f \cdot u] d\mathcal{V} - \int_{o_1} n \cdot \sigma \cdot (u - u_0) do - \int_{o_2} p \cdot u do \quad (11.1)$$

но́сит имена Reissner'a, Prange'a и Hellinger'a.

...

Преимущество принципа Reissner'a–Hellinger'a — в свободе варьирования. Но есть и изъян: у функционала нет экстремума на истинном решении, а лишь стационарность.

Принцип можно использовать для построения приближённых решений методом Ритца (Ritz method). Задавая аппроксимации

...

Принцип Ну–Washizu (Ху–Васидзу) [102] формулируется так:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}(u, \varepsilon, \sigma) &= 0, \\ \mathcal{W} &\equiv \int_{\mathcal{V}} [\sigma \cdot (\nabla u^S - \varepsilon) + \Pi(\varepsilon) - f \cdot u] d\mathcal{V} - \\ &\quad - \int_{o_1} n \cdot \sigma \cdot (u - u_0) do - \int_{o_2} p \cdot u do. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Как и в принципе Рейсснера–Хеллингера, здесь нет ограничений ни в объёме, ни на поверхности, но добавляется третий независимый аргумент ε . Поскольку $\hat{\Pi} = \sigma \cdot \varepsilon - \Pi$, то (11.1) и (11.2) кажутся почти одним и тем же.

Из принципа Ху–Васидзу вытекает вся полная система уравнений с граничными условиями, так как

...

Об истории открытия вариационных принципов и соотношении их написано, например, у Ю. Н. Работнова [49].

§ 12. Антиплоский сдвиг

Это та проблема линейной теории упругости, где простыми выкладками получаются нетривиальные результаты.*

Рассматривается изотропная среда в декартовых координатах x_i (x_1 и x_2 в плоскости, x_3 перпендикулярна плоскости) с базисными ортами $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}$, $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. В случае антиплоской деформации (антиплоского сдвига) поле перемещений \mathbf{u} параллельно координате x_3 : $\mathbf{u} = \mathbf{v} \mathbf{e}_3$, и \mathbf{v} не зависит от x_3 : $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2)$, $\partial_3 \mathbf{v} = 0$.

Деформация

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S = \nabla (\mathbf{v} \mathbf{e}_3)^S = \mathbf{e}_3 \nabla \mathbf{v}^S + \underbrace{\mathbf{v} \nabla \mathbf{e}_3}_{20}^S = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \nabla \mathbf{v})$$

...

Возможна неоднородность среды в плоскости x_1, x_2 : $\mu = \mu(x_1, x_2)$, $\partial_3 \mu = 0$.

...

§ 13. Кручение стержней

M. de Saint-Venant. Memoire sur la torsion des prismes (1853)

Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant. Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. 1856. 327 pages.

1. Memoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion, etc. Memoires presentes par divers savants a l'Academie des sciences, t. 14, 1856.

2. Memoire sur la flexion des prismes, etc. Journal de mathematiques pures et appliquees, publie par J. Liouville, 2me serie, t. 1, 1856.

* Нетривиальное в теории упругости это, например, когда “деление силы на площадь” даёт бесконечно большую погрешность в нахождении напряжения.

Перевод на русский язык: **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц. стр. 379–494

Эта задача, тщательно изученная Saint-Venant'ом, рассматривается едва ли не в каждой книге по классической упругости. Речь идёт о цилиндре какого-либо сечения, нагруженном лишь поверхностными силами на торцах

...

§ 14. Плоская деформация

Тут вектор перемещения \mathbf{u} параллелен плоскости x_1, x_2 и не зависит от третьей координаты z

...

Для примера рассмотрим полуплоскость с сосредоточенной нормальной силой Q на краю (?? рисунок ??)

...

Библиография

Можно назвать несколько десятков книг по классической теории упругости, представляющих несомненный интерес несмотря на возрастающую отдалённость во времени. Подробные литературные указания содержатся в фундаментальной монографии ...

МИКРОПОЛЯРНАЯ ТРЁХМЕРНАЯ СРЕДА

§1. Введение в линейную микрополярную теорию

Характерная отличительная особенность классических упругих сред (гл. 3 и 4) — то, что они состоят “из простых материальных точек”. Частица классического континуума имеет лишь трансляционные степени свободы, её движение определяется только вектором $\mathbf{r}(q^i, t)$. Поэтому нагрузки (“силовые факторы”) в такой среде — только силы, объёмные и поверхностные. Моментов нет.

Но не так уж трудно построить более сложные модели сплошной среды, в которых частицы обладают не только лишь степенями свободы трансляции, но и некоторыми дополнительными. Новые степени свободы связаны и с новыми нагрузками.

Наиболее естественная из неклассических моделей трёхмерной среды предложена братьями Cosserat в 1909 году [19]. Каждая частица континуума Cosserat есть бесконечно малое совершенно твёрдое тело с шестью степенями свободы — тремя трансляционными и тремя вращательными. Нагрузки в такой среде — силы и моменты. Работа братьев Cosserat оставалась незамеченной полвека, но затем возник интерес к этой теме [30, 36].

from **Nowacki W.** *The Linear Theory of Micropolar Elasticity*. In: *Micropolar Elasticity. International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures)*, vol. 151, 1974, pp. 1–43

Woldemar Voigt tried to remove the shortcomings of the classical theory of elasticity [**W. Voigt**. *Theoretische Studien über*

die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, 34: 3–51, 1887] by the assumption that the interaction of two parts of the body is transmitted through an area element do by means not only of the force vector $\mathbf{p}do$ but also by the moment vector $\mathbf{m}do$. Thus, besides the force stresses σ_{ji} also the moment stresses have been defined.

However, the complete theory of asymmetric elasticity was developed by the brothers **François et Eugène Cosserat** who published it in 1909 in the work “*Théorie des corps déformables*”.

They assumed that the body consists of interconnected particles in the form of small rigid bodies. During the deformation each particle is displaced by $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ and rotated by $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$, the functions of the position \mathbf{x} and time t .

Thus an elastic continuum has been described such that its points possess the orientation (polar media) and for which we can speak of the rotation of a point. The vectors \mathbf{u} and $\boldsymbol{\varphi}$ are mutually independent and determine the deformation of the body. The introduction of the vectors \mathbf{u} and $\boldsymbol{\varphi}$ and the assumption that the transmission of forces through an area element do is carried out by means of the force vector \mathbf{p} and the moment vector \mathbf{m} leads in the consequence to asymmetric stress tensors σ_{ji} and μ_{ji} .

The theory of the brothers E. and F. Cosserat remained unnoticed and was not duly appreciated during their lifetime. This was so because the presentation was very general (the theory was non-linear, including large deformations) and because its frames exceeded the frames of the theory of elasticity. They attempted to construct the unified field theory, containing mechanics, optics and electrodynamics and combined by a general principle of the least action.

The research in the field of the general theories of continuous media conducted in the last fifteen years, drew the attention of the scientists to Cosserats' work. Looking for the new models, describing more precisely the behaviour of the real elastic media, the models similar to, or identical with that of Cosserats' have been encountered. Here, we mention, first of all, the papers by C. Truesdell and R. A. Toupin [**C. Truesdell and R. A. Toupin**. *The classical field theories. Encyclopædia of Physics, Chapter 1, Springer-Verlag, Berlin, 1960*], G. Grioli [**Grioli G.** *Elasticité asymétrique. Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser. IV, 50 (1960)*], R. D. Mindlin and H. F. Tiersten [**Mindlin, R. D.; Tiersten, H. F.**

В истинно микрополярном континууме векторные поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и поворотов $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, t)$ взаимно независимы. Это также называется моделью со свободным вращением (free rotation).

Рассмотрим сперва геометрически линейную модель, то есть случай малых перемещений и малых поворотов. Здесь операторы $\overset{\circ}{\nabla}$ и ∇ неразличимы, $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$, $\rho = \overset{\circ}{\rho}$ — уравнения “можно писать в начальной конфигурации”, операторы δ и ∇ коммутируют ($\delta \nabla \mathbf{u} = \nabla \delta \mathbf{u}$, $\delta \nabla \boldsymbol{\varphi} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}$).

Как основу построения этой модели положим принцип виртуальной работы (“вариация работы реальных внешних сил на виртуальных перемещениях равна с обратным знаком вариации работы внутренних сил — реальных напряжений на виртуальных деформациях”)

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) d\mathcal{V} + \int_o (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) do = - \int_{\mathcal{V}} \delta W^{(i)} d\mathcal{V}.$$

Здесь \mathbf{f} и \mathbf{m} — внешние силы и моменты на единицу объёма; \mathbf{p} и \mathbf{M} — они же, но на единицу поверхности (поверхностные нагрузки действуют лишь на некоторой части o поверхности $\partial \mathcal{V}$, ограничивающей объём \mathcal{V}); $\delta W^{(i)}$ — работа внутренних сил на единицу объёма.

По-прежнему полагаем, что $\delta W^{(i)}$ обнуляется при движении тела как целого без деформации:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} + \text{constant}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \text{constant} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0,$$

$$\nabla \delta \mathbf{u} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{E} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{2} \mathbf{0}.$$

Вводя тензоры деформации — тензор относительного смещения между частицами (distortion tensor, strain tensor) $\boldsymbol{\gamma}$ и тензор искривления-скручивания (curvature-twist tensor, torsion-flexure tensor, wryness tensor) $\boldsymbol{\kappa}$ — как

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \nabla \boldsymbol{\varphi}, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\times} &= \nabla \times \mathbf{u} - 2\varphi, \quad \kappa_{\times} = \nabla \times \varphi, \\ \delta\gamma &= \nabla\delta\mathbf{u} + \delta\varphi \times \mathbf{E}, \quad \delta\kappa = \nabla\delta\varphi,\end{aligned}$$

имея нужное отсутствие виртуальных деформаций $\delta\gamma = {}^2\mathbf{0}$ и $\delta\kappa = {}^2\mathbf{0}$.

В § 3.15 для безмоментной среды, напряжения появляются как множители Lagrange’a в принципе виртуальной работы, когда $\delta W^{(i)} = 0$. Так же и тут:

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta\varphi - \boldsymbol{\tau} \cdot \delta\gamma^{\top} - \boldsymbol{\mu} \cdot \delta\kappa^{\top} \right) d\mathcal{V} + \int_o \left(\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \delta\varphi \right) d\mathcal{o} = 0. \quad (1.2)$$

Множители Лагранжа в каждой точке — это несимметричные тензоры второй сложности $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\mu}$.

Преобразуем $-\boldsymbol{\tau} \cdot \delta\gamma^{\top}$ и $-\boldsymbol{\mu} \cdot \delta\kappa^{\top}$

$$\begin{aligned}\delta\gamma^{\top} &= \nabla\delta\mathbf{u}^{\top} - \delta\varphi \times \mathbf{E}, \quad \delta\kappa^{\top} = \nabla\delta\varphi^{\top}, \\ -\boldsymbol{\tau} \cdot \delta\gamma^{\top} &= -\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\delta\mathbf{u}^{\top} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\delta\varphi \times \mathbf{E}), \quad -\boldsymbol{\mu} \cdot \delta\kappa^{\top} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla\delta\varphi^{\top}.\end{aligned}$$

Используя

$$(7.4, \S 1.7) \Rightarrow \mathbf{A}_{\times} = -\mathbf{A} \cdot \cdot {}^3\epsilon,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{A} \cdot \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) = \mathbf{A} \cdot \cdot (-{}^3\epsilon \cdot \mathbf{b}) = \\ &= (-\mathbf{A} \cdot \cdot {}^3\epsilon) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A}_{\times} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot (\delta\varphi \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\tau}_{\times} \cdot \delta\varphi$$

и “product rule”

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta\mathbf{u}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \nabla\delta\mathbf{u}^{\top},$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta\varphi) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta\varphi + \boldsymbol{\mu} \cdot \cdot \nabla\delta\varphi^{\top},$$

получаем

$$-\boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \delta\gamma^{\top} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta\mathbf{u} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta\mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}_{\times} \cdot \delta\varphi,$$

$$-\boldsymbol{\mu} \cdot \cdot \delta\kappa^{\top} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta\varphi - \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta\varphi).$$

После интегрирования с применением теоремы о дивергенции*

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta\mathbf{u}) d\mathcal{V} = \oint_{\partial(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta\mathbf{u} d\mathcal{o}, \quad \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta\varphi) d\mathcal{V} = \oint_{\partial(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta\varphi d\mathcal{o}$$

* $\mathbf{a} \cdot \cdot ({}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{c}$

(1.2) приобретает вид

$$\int_V \left((\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dV + \int_o \left((\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) d\sigma = 0.$$

Из случайности вариаций $\delta \mathbf{u}$ и $\delta \boldsymbol{\varphi}$ в объёме вытекает баланс сил и моментов

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

а из случайности на поверхности — краевые условия

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}. \quad (1.4)$$

Тензор силового напряжения $\boldsymbol{\tau}$ удовлетворяет тем же дифференциальным “уравнениям равновесия”^{*} и краевым условиям, что и в безмоментной среде. Но тензор $\boldsymbol{\tau}$ несимметричен: вместо $\boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0}$ тут $\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{m} = \mathbf{0}$ — появляются моментные напряжения $\boldsymbol{\mu}$, и объёмная моментная нагрузка \mathbf{m} не нулевая.

Смысл компонент тензора моментного напряжения $\boldsymbol{\mu}$ раскрывается так же, как и для $\boldsymbol{\tau}$. Для ортонормального базиса, момент $\mathbf{M}_i = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\mu} = \mu_{ik} \mathbf{e}_k$ действует на площадке с нормалью \mathbf{e}_i . Диагональные компоненты $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$ это крутящие моменты, недиагональные — изгибающие (?? рисунок??).

...

вектор эксцентриситета $\boldsymbol{\alpha}$ и тензор инерции ${}^2\mathcal{J}$

Для изотропной среды $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, ${}^2\mathcal{J} = \mathcal{J}\mathbf{E}$.

...

§ 2. Отношения упругости

В этой книге упругой называется среда с потенциальными внутренними силами: $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$, где Π — энергия деформации на единицу объёма (продолжая моделировать геометрически линейный материал, $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$).

^{*} Кавычки здесь оттого, что *уравнения равновесия* это вообще всё, что вытекает из принципа виртуальной работы в статике.

Имея соотношения (...)

...

$$\begin{aligned}\delta\Pi = -\delta W^{(i)} &= \boldsymbol{\tau} \bullet \delta\boldsymbol{\gamma}^\top + \boldsymbol{\mu} \bullet \delta\boldsymbol{\kappa}^\top \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\gamma}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\kappa}}.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Последние равенства — соотношения упругости (определяющие уравнения, constitutive equations).

Разлагая тензоры деформации и напряжения на симметричные и антисимметричные части

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \boldsymbol{\gamma}^S - \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^S - \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}_\times \times \boldsymbol{E}, \\ \delta\boldsymbol{\gamma}^\top &= \delta\boldsymbol{\gamma}^S + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\gamma}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \delta\boldsymbol{\kappa}^\top = \delta\boldsymbol{\kappa}^S + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\kappa}_\times \times \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}^S - \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^S - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_\times \times \boldsymbol{E},\end{aligned}$$

преобразуем выражение $\delta\Pi = \boldsymbol{\tau} \bullet \delta\boldsymbol{\gamma}^\top + \boldsymbol{\mu} \bullet \delta\boldsymbol{\kappa}^\top$ как

$$\delta\Pi = \dots \quad (2.2)$$

...

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_\times &= \nabla \times \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{\varphi}, \\ \boldsymbol{\kappa}_\times &= \nabla \times \boldsymbol{\varphi}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &\equiv \boldsymbol{\gamma}^S = \nabla \boldsymbol{u}^S,\end{aligned}$$

...

The classical isotropic linear elastic material behavior is described by two material parameters, for example, the Young's modulus and the Poisson's ratio, while the isotropic Cosserat continuum needs six material parameters even when assumed to be linear, homogeneous and isotropic, it requires six independent material constants, in contrast to only two such constants for the classical continuum

...

Соотношения (2.1) обращаются преобразованием Лежандра

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial\boldsymbol{\tau}}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial\boldsymbol{\mu}}, \\ \hat{\Pi}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}) &= \boldsymbol{\tau} \bullet \boldsymbol{\gamma}^\top + \boldsymbol{\mu} \bullet \boldsymbol{\kappa}^\top - \Pi(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}).\end{aligned}\quad (2.3)$$

...

material's intrinsic (internal) length scale ℓ

Если устремить ℓ к нулю, то исчезает вклад κ в Π , а с ним и моментные напряжения μ . Когда вдобавок нет объёмной моментной нагрузки m , тогда тензор τ становится симметричным: $\nabla \cdot \mu + \tau_{\chi} + m = 0$, $\mu = {}^2 0$, $m = 0 \Rightarrow \tau_{\chi} = 0$, и модель превращается в классическую безмоментную.

Использование же микрополярной модели естественно в случае, когда реальный материал имеет некий наименьший объём, “в который невозможно войти”. И такая ситуация возникает нередко: композиты с “представительным” объёмом, поликристаллические материалы, полимеры с большими молекулами (макромолекулами).

§ 3. Уравнения совместности

Имея тождество $\nabla \times \nabla a = {}^2 0 \ \forall a$ и определения тензоров деформации (1.1),

$$\begin{aligned} \kappa &\equiv \nabla \varphi \Rightarrow \nabla \times \kappa = {}^2 0, \\ \gamma - \varphi \times E &= \nabla u \Rightarrow \nabla \times (\gamma - \varphi \times E) = {}^2 0 \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

...

§ 4. Теоремы статики

Теоремы статики линейных консервативных систем, легко выводимые для конечного числа степеней свободы (минимальность энергии, теорема Клапейрона, теорема о взаимности работ и др. — § 2.6), справедливы и для континуальных линейных упругих сред (гл. 4), включая микрополярную модель континуума (среду с парами сил, моментами).

...

§ 5. Псевдоконтинуум Коссера

Помимо модели со свободным вращением (“истинно микрополярного континуума”), существует упрощённая модель среды с парами

сил, в которой повороты выражаются через перемещения как в классическом безмоментном континууме:

$$\varphi = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \Leftrightarrow \gamma_{\chi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \gamma = \varepsilon = \nabla \mathbf{u}^S \quad (5.1)$$

— модель со стеснённым вращением (constrained rotation)*.

Равенство $\gamma_{\chi} = \mathbf{0}$ (симметрию γ) возможно понимать как внутреннюю связь (§3.13). Аргумент γ_{χ} исчезает из энергии Π , соотношение упругости для τ_{χ} не может быть написано. Его место в полной системе занимает уравнение связи.

В классической (линейной безмоментной) теории упругости полная система сводится к одному уравнению для вектора \mathbf{u} (§4.5). В моментной теории

...

§ 6. Плоская деформация

Все переменные в этой постановке не зависят от декартовой координаты $z \equiv x_3$ (орт оси — \mathbf{k}). Перемещения и силы перпендикулярны оси z , а повороты и моменты — параллельны ей:

...

Это краткое изложение плоской задачи относится к модели с независимыми поворотами. Псевдоконтинуум Коссера (модель со стеснённым вращением) получается либо при наложении внутренней связи $\gamma_{\chi} = \mathbf{0}$, либо при предельном переходе ...

Подробнее о плоской моментной задаче написано в книгах Н. Ф. Морозова [31, 32].

§ 7. Нелинейная теория

Кажущееся на первый взгляд чрезвычайно трудным, построение теории конечных деформаций континуума Коссера становится

* Братья Cosserat называли это cas de trièdre caché (случай скрытого трёхгранника, case of latent trihedron).

прозрачным, если опираться на общую механику, тензорное исчисление и нелинейную теорию безмоментной среды.

При построении модели упругого континуума обычно проходят четыре этапа:

- ✓ определение степеней свободы частиц,
 - ✓ выявление нагрузок (“силовых факторов”, напряжений) и условий их баланса,
 - ✓ подбор соответствующих мер деформации
- и, наконец,
- ✓ вывод соотношений упругости между напряжением и деформацией.

Этот традиционный путь очень сокращается, если опираться на принцип виртуальной работы.

Как и в гл. 3, среда состоит из частиц с материальными координатами q^i и вектором-радиусом $\mathbf{r}(q^i, t)$. В начальной (исходной, отсчётной) конфигурации $\mathbf{r}(q^i, 0) \equiv \mathring{\mathbf{r}}(q^i)$. Но кроме трансляции, частицы имеют независимые степени свободы поворота, описываемого ортогональным тензором

$$\mathbf{O}(q^i, t) \equiv \mathbf{a}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathbf{a}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{O}^{-\top},$$

где тройка векторов $\mathbf{a}_j(q^i, t)$ жёстко связана с каждой частицей, показывая угловую ориентацию относительно как-либо выбираемых* векторов $\mathring{\mathbf{a}}_j(q^i) \equiv \mathbf{a}_j(q^i, 0)$, $\mathbf{a}_j = \mathbf{O} \cdot \mathring{\mathbf{a}}_j$; \mathbf{a}^j — тройка взаимных векторов: $\mathbf{a}_j \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^j \mathbf{a}_j = \mathbf{E}$ ($t=0$, $\mathring{\mathbf{a}}^j$: $\mathring{\mathbf{a}}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathring{\mathbf{a}}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{E}$). Движение среды полностью определяется функциями $\mathbf{r}(q^i, t)$ и $\mathbf{O}(q^i, t)$.

Имея представления $\mathring{\mathbf{r}}(q^i)$ и $\mathbf{r}(q^i, t)$, вводим базис $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$, взаимный базис \mathbf{r}^i : $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}^i = \delta_j^i$, дифференциальные операторы $\mathring{\nabla}$ и ∇ , а также градиент движения \mathbf{F}

$$\mathring{\nabla} \equiv \mathring{\mathbf{r}}^i \partial_i, \quad \nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathring{\nabla}, \quad \mathbf{F} \equiv \mathring{\nabla} \mathbf{r}^\top = \mathbf{r}_i \mathring{\mathbf{r}}^i. \quad (7.1)$$

* Один из вариантов: $\mathring{\mathbf{a}}_j = \mathring{\mathbf{r}}_j \equiv \partial_j \mathbf{r}$. Другое предложение: $\mathring{\mathbf{a}}_j$ это ортонормальная тройка собственных векторов тензора инерции частицы. Вообще, $\mathring{\mathbf{a}}_j$ могут быть любой тройкой линейно-независимых векторов.

Вариационное уравнение принципа виртуальной работы для континуума с нагрузками в объёме и на поверхности:

$$\int_V \left(\rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) + \delta W^{(i)} \right) dV + \int_O \left(\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dO = 0. \quad (7.2)$$

Здесь ρ — плотность массы; \mathbf{f} и \mathbf{m} — внешние сила и момент на единицу массы; \mathbf{p} и \mathbf{M} — они же на единицу поверхности; $\delta W^{(i)}$ — работа внутренних сил на единицу объёма в текущей конфигурации. Вектор малаго поворота $\delta \boldsymbol{\varphi}$

$$\begin{aligned} \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{E} &\Rightarrow \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T = -\mathbf{O} \cdot \delta \mathbf{O}^T \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \Rightarrow \delta \mathbf{O} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{O}, \\ \delta \boldsymbol{\varphi} &= -\frac{1}{2} (\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T)_{\times} \end{aligned}$$

При движении среды как жёсткого целого нет деформаций, и работа $\delta W^{(i)}$ внутренних сил равна нулю:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} = \text{constant} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \text{constant} &\Rightarrow \delta W^{(i)} = 0, \\ \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \quad \nabla \delta \mathbf{r} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{E} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \\ \nabla \delta \mathbf{r} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

К нагрузкам. Несимметричные тензоры напряжения, силового $\boldsymbol{\tau}$ и моментного $\boldsymbol{\mu}$, введём как множители Lagrange'a:

$$\int_V \left(\rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \delta \mathbf{r} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E})^T - \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}^T \right) dV + \int_O \left(\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dO = 0. \quad (7.3)$$

После тех же преобразований, что и в § 1, получаем

...

Отсюда вытекают уравнения баланса сил и моментов в объёме и краевые условия в виде формул типа Cauchy. Они по существу те же, что и в линейной теории.

Найдём теперь тензоры деформации. Их можно вводить по-разному, если требовать лишь одного — нечувствительности к движению среды как жёсткого целого. Читатель найдёт не один

вариант таких тензоров. Однако, вид тензоров деформации “подсказывает” принцип виртуальной работы.

...

§ 8. Нелинейная модель со стеснённым вращением

Вспомним переход к модели со стеснённым вращением в линейной теории (§ 5). Разделились соотношения упругости для симметричной части тензора силового напряжения $\boldsymbol{\tau}^S$ и кососимметричной его части $\boldsymbol{\tau}_\chi$. Возникла внутренняя связь $\boldsymbol{\gamma}_\chi = \mathbf{0}$

...

Библиография

Все работы по моментной теории упругости упоминают книгу братьев Eugène et François Cosserat [19], где трёхмерной среде посвящена одна глава из шести. Переведённая монография W. Nowacki [36] была одной из первых книг на русском языке с изложением линейной моментной теории. Ранее эта область представлялась статьями — например, R. D. Mindlin’a и H. F. Tiersten’a [30]. Краткое изложение моментной теории, но с подробным рассмотрением задач содержится в книгах Н. Ф. Морозова [31, 32].

§1. Первый закон термодинамики

До сих пор моделирование было ограничено только механикой. Широко известно, однако, что изменение температуры вызывает деформацию. Температурная деформация и напряжение часто играют первичную роль и могут приводить к поломке.

Столь эффективный в механике, принцип виртуальной работы не применим к термомеханике*. Рассматривая тепловые эффекты, возможно опираться на два закона термодинамики.

Первый, открытый Joule'ем, Mayer'ом, и Helmholtz'ем, — это адаптированная версия баланса энергии: скорость изменения внутренней энергии \dot{E} равна сумме мощности внешних сил $P^{(e)}$ и скорости подвода тепла \dot{Q}

$$\dot{E} = P^{(e)} + \dot{Q}. \quad (1.1)$$

Внутренняя энергия E есть сумма кинетической и потенциальной энергий частиц. Для любого конечного объёма материального континуума

$$E = \int_V \rho \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + e \right) dV. \quad (1.2)$$

С балансом массы $dm = \rho dV = \rho' dV'$, $m = \int_V \rho dV = \int_{V'} \rho' dV'$ и

$$\Psi = \int_V \rho \psi dV = \int_{V'} \rho' \psi dV' \Rightarrow \dot{\Psi} = \int_V \rho \dot{\psi} dV = \int_{V'} \rho' \dot{\psi} dV',$$

легко получить производную внутренней энергии по времени

$$\dot{E} = \int_V \rho \left(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \dot{e} \right) dV. \quad (1.3)$$

* Аналог принципа виртуальной работы будет представлен ниже в §8.

Мощность внешних сил для некоторого конечного объёма континуума (безмоментного — в этой главе рассматривается лишь безмоментная модель)

$$P^{(e)} = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{r}} dV + \oint_{O(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}} dO = \int_V \left(\rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \right) dV = \\ = \int_V \left((\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^S \right) dV. \quad (1.4)$$

Как и раньше (гл. 3), $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжения Cauchy, \mathbf{f} — массовая сила (без инерционной части $-\ddot{\mathbf{r}}$, которая содержится в $\dot{\mathbf{E}}$), $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ — поверхностная сила. Использована симметрия $\boldsymbol{\tau}$ для раскрытия $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}})$:

$$\boldsymbol{\tau}^T = \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^S \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^T = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^S, \\ \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^T = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^S.$$

Обозначая тензор скорости деформации как $\mathcal{D} \equiv \nabla \dot{\mathbf{r}}^S$

$$P^{(e)} = \int_V \left((\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathcal{D} \right) dV. \quad (1.4')$$

Тепло прибывает в объём среды двумя путями. Первый — поверхностная передача тепла (heat conduction, теплопроводность, конвекция, диффузия), происходящая через материю, при контакте двух сред. Это может быть описано вектором потока тепла \mathbf{q} . Через бесконечно-малую площадку в текущей конфигурации в направлении вектора нормали \mathbf{n} в единицу времени проходит тепловой поток $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dO$. Для поверхности конечных размеров это выражение нужно проинтегрировать. Обычно полагают

$$\mathbf{q} = -{}^2\mathbf{k} \cdot \nabla \theta, \quad (1.5)$$

где θ — температура (поле температуры); ${}^2\mathbf{k}$ — тензор коэффициентов теплопроводности как свойство материала, для изотропного материала ${}^2\mathbf{k} = k\mathbf{E}$ и $\mathbf{q} = -k\nabla\theta$.

Второй путь — объёмная передача тепла (тепловое излучение, thermal radiation). Солнечная энергия, пламя костра, микроволновая печь — знакомые примеры проникающего нагрева излучением. Тепловое излучение происходит через электромагнитные волны и не нуждается в промежуточной среде. Тепло излучается (эми-

тируется) любой материей (с температурой выше абсолютного нуля 0 K). Скорость передачи тепла излучением на единицу массы b или на единицу объёма $B = \rho b$ считается известной.

В результате, скорость подвода тепла для конечного объёма есть

$$\dot{Q} = - \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dO + \int_{\mathcal{V}} \rho b dV = \int_{\mathcal{V}} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b) dV. \quad (1.6)$$

Применение (1.3), (1.4') и (1.6) к формулировке (1.1) даёт равенство интегралов по объёму

$$\int_{\mathcal{V}} \rho (\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \dot{\epsilon}) dV = \int_{\mathcal{V}} ((\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b) dV.$$

И поскольку объём \mathcal{V} случаен, подынтегральные выражения тоже равны

$$\rho \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \rho \dot{\epsilon} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b.$$

С балансом импульса

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \quad (7.2, \S 3.7)$$

это упрощается до

$$\rho \dot{\epsilon} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b \quad (1.7)$$

— локальная (дифференциальная) версия баланса энергии.

...

§ 2. Второй закон

Распространено следующее представление о законах термодинамики: изменение внутренней энергии dE равно сумме работы внешних сил $\partial W^{(e)}$ и подведённого тепла ∂Q

$$dE = \partial W^{(e)} + \partial Q.$$

Работа $\partial W^{(e)}$ и теплота ∂Q суть неполные дифференциалы*, но частное $\partial Q/\theta$ становится полным дифференциалом — дифференциалом dS энтропии.

Далее процессы делятся на обратимые, для которых $dS = \partial Q/\theta$, и необратимые с характерным неравенством Clausius'a $dS \geq \partial Q/\theta$.

Но как адаптировать это для континуума с неоднородным полем температуры?

Иногда процесс в бесконечно малом объёме мыслится обратимым, тогда предлагается равенство типа

$$\rho\theta\dot{s} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b \quad (2.1)$$

(s — энтропия на единицу массы и \dot{s} — производная от неё по времени, то есть скорость изменения энтропии).

Однако, всегда есть тепловое рассеивание (диссипация) — необратимый процесс, и поэтому (2.1) выглядит спорно.

Наиболее подходящим выражением второго закона термодинамики для материального континуума видится неравенство Clausius'a–Duhem'a

$$\left(\int_V \rho s dV \right)^{\cdot} \geq - \oint_{O(\partial V)} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dO + \int_V \frac{\rho b}{\theta} dV. \quad (2.2)$$

Это неравенство как дисбаланс энтропии определяет скорость производства энтропии.

$$\begin{aligned} - \oint_{O(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \theta^{-1} dO &= - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{q} \theta^{-1}) dV \\ - \nabla \cdot (\mathbf{q} \theta^{-1}) &= - (\nabla \cdot \mathbf{q}) \theta^{-1} - \mathbf{q} \cdot \left(\nabla \frac{1}{\theta} \right) \\ - \nabla \frac{1}{\theta} &= \frac{1}{\theta^2} \nabla \theta \\ - \nabla \cdot (\mathbf{q} \theta^{-1}) &= - (\nabla \cdot \mathbf{q}) \theta^{-1} + (\mathbf{q} \cdot \nabla \theta) \theta^{-2} \end{aligned}$$

* Так как работа и теплота зависят от пути протекания процесса (являются функциями пути), они не могут быть полными (точными) дифференциалами, контрастируя с идеей полного дифференциала, выражаемого через градиент другой функции и потому́ независимого от пути.

$$\rho \dot{s} \geq (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b) \theta^{-1} + (\mathbf{q} \cdot \nabla \theta) \theta^{-2} \quad (2.3)$$

Неравенство Clausius'a–Duhem'a is also called неравенством диссипации. For a real matter, the dissipation is always greater than zero, it can never be negative and can't be zero whenever irreversible processes are present.

...

свободная энергия Helmholtz'a на единицу массы

$$\begin{aligned} a &\equiv e - \theta s, \\ \dot{a} &= \dot{e} - \theta \dot{s} - \dot{\theta} s \end{aligned} \quad (2.4)$$

§ 3. Определяющие уравнения

К балансу импульса, балансу момента импульса и законам термодинамики нужно добавить определяющие уравнения, выражающие свойства среды. Эти уравнения

...

Термоупругим называется материал, в котором свободная энергия a и энтропия s — функции деформации \mathbf{C} и температуры θ

$$\begin{aligned} a &= a(\mathbf{C}, \theta) \\ \dot{a} &= \frac{\partial a}{\partial \mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial a}{\partial \theta} \dot{\theta} \end{aligned}$$

...

§ 4. Уравнение теплопроводности

В математической физике параболическое дифференциальное уравнение, похожее на

$$k \Delta \theta + B = c \dot{\theta}, \quad (4.1)$$

объявляется “уравнением теплопроводности”. Здесь k — теплопроводность, $B = \rho b$ — скорость передачи тепла излучением на единицу объёма, c — теплоёмкость на единицу объёма. Краевые условия чаще всего — внешняя температура $\theta_1^{(e)}$ на части O_1 поверхности и поток тепла $q^{(e)}$ снаружи части O_2 поверхности:

$$\theta|_{O_1} = \theta_1^{(e)}, \quad k \partial_n \theta|_{O_2} = q^{(e)}.$$

Иногда поток $q^{(e)}$ считается пропорциональным разности между температурой $\Theta^{(e)}$ внешней среды и температурой тела Θ

$$k \partial_n \Theta + \hbar (\Theta - \Theta^{(e)}) = 0.$$

Если коэффициент теплообмена \hbar бесконечно большой, оно превращается в первое условие $\Theta = \Theta^{(e)}$, а когда $\hbar \rightarrow 0$ — в условие $\partial_n \Theta = 0$ теплоизоляции.

Но как уравнение (4.1) связано с фундаментальными принципами баланса? Ведь нет никакой особенной “тепловой энергии”, но есть внутренняя энергия, меняющаяся согласно первому закону термодинамики ...

...

$$\begin{aligned} e = a + \Theta s &\Rightarrow \dot{e} = \dot{a} + \dot{\Theta} s + \Theta \dot{s} \\ &\quad \dot{a}(C, \Theta) \\ \rho \dot{e} = \rho (\dot{a} + \dot{\Theta} s + \Theta \dot{s}) &= \rho \left(\overbrace{\frac{\partial a}{\partial C} \cdot \dot{C} + \frac{\partial a}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \dot{\Theta} s + \Theta \dot{s}}^{\substack{=0 \Leftarrow s = -\frac{\partial a}{\partial \Theta}}} \right) \end{aligned}$$

...

§ 5. Линейная термоупругость

Квадратичная аппроксимация свободной энергии наиболее естественна в линейной теории

...

§ 6. Уравнения в перемещениях

Полагая поле температуры известным

...

§ 7. Температурное напряжение

Это напряжение стоит рассмотреть детально, хотя оно и определяется очевидным образом полями перемещений и температуры. При равновесии свободного тела без внешних нагрузок

...

§ 8. Вариационные формулировки

Когда температура постоянна, уравнения термоупругости выглядят как в механике.

...

Для переноса вариационного метода на термоупругость достаточно заменить в принципе (Lagrange'a) минимума потенциальной энергии $\Pi(\mathbf{C})$ на свободную энергию Helmholtz'a $A(\mathbf{C}, \Theta)$, а в принципе Reissner'a–Hellinger'a заменить $\hat{\Pi}(\boldsymbol{\tau})$ на свободную энтальпию Gibbs'a (функцию Gibbs'a) $G(\boldsymbol{\tau}, \Theta)$.

The *Gibbs free energy* (*Gibbs energy* or *Gibbs function* or *free enthalpy* to distinguish it from Helmholtz free energy) is a thermodynamic potential that measures the maximum of reversible work by a thermodynamic system at a constant temperature and pressure.

...

...

Более сложные вариационные постановки для нестационарных задач можно найти, например, в книге [88].

Библиография

Шириной и глубиной описания термоупругости выделяются книги W. Nowacki [35, 36], книга E. Melan'a и H. Parkus'a [27] и монография H. Parkus'a [42]. С. Truesdell [57] внёс большой вклад в создание и распространение новых взглядов на термодинамику сплошной среды. Чёткое изложение основных законов есть у С. Теодосиу [53]. Методы расчёта температурных полей представлены у Н. М. Беляева и А. А. Рядно [88].

МАГНИТОУПРУГОСТЬ

Проблемы, решаемые с использованием моделей упругих сред, обыкновенно содержат уже известные внешние нагрузки (как найти их — отдельная проблема). Когда электрические токи протекают в упругом теле, магнитное поле создаёт нагрузку. С деформированием тела меняется и магнитное поле. Если чувствительность поля к деформации высока, то нужно решение совместной проблемы упругости и магнетизма.

§1. Электромагнитное поле

Вот краткое изложение теории электромагнетизма.

Эта теория описывает два векторных поля: электрическое $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитное $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Что такое вектор \mathbf{E} и псевдовектор \mathbf{B} видно из выражения электромагнитной силы (силы Лоренца) $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t, q)$, действующей на точечный заряд — частицу бесконечно-малого размера, содержащую электрический заряд q и движущуюся со скоростью $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.1)$$

По сути, часть электромагнитной силы, возникающая от взаимодействия с движущимся зарядом — магнитная сила $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ — является магнитное поле \mathbf{B} , в то время как другая часть — электрическая сила $q\mathbf{E}$ — является электрическое поле \mathbf{E} .

Острый вопрос: в какой же именно системе отсчёта измеряется скорость $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$ заряженной частицы, ведёт к специальной теории относительности*.

the classical concept about the existence of absolute space and time as the preferred frame of reference

* **Albert Einstein.** Zur Elektrodynamik bewegter Körper. // Annalen der Physik, IV. Folge, Band 17, 1905. Seiten 891–921.

a vacuum is a space without matter, “free space”

...

непрерывное распределение заряда

плотность заряда (электрический заряд на единицу объёма)

$\varrho(\mathbf{r}, t)$

$$dq = \varrho dV, \quad q = \int_V \varrho dV$$

плотность электрического тока есть поток электрического заряда $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \equiv \varrho \dot{\mathbf{r}} \equiv \varrho \mathbf{v}$

в вакууме нет ϱ и \mathbf{j}

in a region with no charges ($\varrho = 0$) and no currents ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$), such as in a vacuum, ...

...

пондеромоторная сила is electromagnetic force (Lorentz force) per volume unit

В материальном континууме с зарядами и токами действует объёмная “пондеромоторная” (“ponderomotive”) сила

$$\mathbf{f} = \varrho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.2)$$

— это дифференциальная (локальная, микроскопическая, континуальная) версия (1.1).

...

Электромагнитные явления обыкновенно описываются уравнениями Maxwell’a. Дифференциальные версии уравнений Maxwell’a суть

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad \text{теорема Gauss’a для электричества} \quad (1.3^\alpha)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad \text{уравнение Maxwell’a–Faraday’я (закон индукции Faraday’я)} \quad (1.3^\beta)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{теорема Gauss’a для магнетизма} \quad (1.3^\gamma)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbf{E}} \quad \text{циркуляционный закон Ampère’a со слагаемым Maxwell’a $\dot{\mathbf{E}}$ для баланса электрического заряда} \quad (1.3^\delta)$$

...

скорость света в вакууме $c = 299\,792\,458 \text{ м/с}$

“electric constant”, vacuum permittivity ε_0

$\varepsilon_0 \approx 8.8541878 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$ (фарад на метр)

“magnetic constant”, vacuum permeability $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

...

С μ_0 уравнение (1.3^δ) иногда пишется как

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \quad \text{или} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}}.$$

...

Баланс электрического заряда — уравнение непрерывности (сплошности, неразрывности) для электрического заряда — математически следует из уравнений Maxwell’a

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (1.3^\delta) &\Rightarrow c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} \\ (1.3^\alpha)^\bullet &\Rightarrow \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\varrho}}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= 0 \quad \forall \mathbf{a}, \quad \mathbf{j} \equiv \varrho \dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\varrho \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\varrho} = 0. \quad (1.4)$$

Помимо вектора пондеромоторной силы (1.2), с которой электромагнитное поле действует на континуум, существует и другое выражение взаимодействия — бивалентный “Maxwell’овский” тензор напряжения

$${}^2\mathbf{M} \equiv \varepsilon_0 \left(\mathbf{E}\mathbf{E} + c^2 \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E} \right). \quad (1.5)$$

Он выводится из (1.2) и уравнений Maxwell’a

$$(1.3^\alpha) \Rightarrow \varrho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$$

$$(1.3^\delta) \Rightarrow \mathbf{j} = \varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$$

$$\begin{aligned} (1.2) \Rightarrow \mathbf{f} &= \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} + (\varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}) \times \mathbf{B} = \\ &= \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} + \varepsilon_0 c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^\bullet &= \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \dot{\mathbf{B}} \\ (1.3^\beta) \Rightarrow \dot{\mathbf{B}} &= -\nabla \times \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^\bullet + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

Тогда

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} - \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \varepsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^\bullet$$

Для симметрии с $\nabla \cdot \mathbf{E}\mathbf{E}$, нуль-вектор

$$(1.3^\gamma) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B}\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad c^2 \nabla \cdot \mathbf{B}\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

добавляется к \mathbf{f} .

...

$$(14.9, § 1.14) \Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{a}\mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a}$$

$$(14.11, § 1.14) \Rightarrow \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2 \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{E} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2 \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot {}^2M &= \varepsilon_0 \left(\nabla \cdot (\mathbf{E}\mathbf{E}) + c^2 \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \mathbf{E}) \right) = \\ &= \varepsilon_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{B}\mathbf{B} + c^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \right. \\ &\quad \left. - \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - c^2 \nabla \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) \end{aligned}$$

...

§ 2. Электромагнитные волны

To derive wave equations

$$\nabla \times (1.3^\beta) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}$$

$$\nabla \times (1.3^\delta) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\dot{\mathbf{E}}}{c^2} \right)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = (\nabla \times \mathbf{E})^\bullet, (1.3^\beta) \Rightarrow \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -\ddot{\mathbf{B}}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{B}} = (\nabla \times \mathbf{B})^\bullet, (1.3^\delta) \Rightarrow \nabla \times \dot{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{j}^\bullet}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\ddot{\mathbf{E}}}{c^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B}$$

$$\Delta \mathbf{E} - \underbrace{\nabla \nabla \cdot \mathbf{E}}_{\substack{\varrho/\varepsilon_0 \\ (1.3^\alpha)}} = \frac{\ddot{\mathbf{E}}}{c^2} + \frac{\mathbf{j}^\bullet}{\varepsilon_0 c^2}$$

$$\Delta \mathbf{B} - \underbrace{\nabla \nabla \cdot \mathbf{B}}_{0 \text{ (1.3}^\gamma)} = \frac{\ddot{\mathbf{B}}}{c^2} - \frac{\nabla \times \mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}$$

...

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad \forall \mathbf{a}$$

$$\nabla \times \nabla = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \nabla \alpha = \mathbf{0} \quad \forall \alpha$$

vector potential \mathbb{A}

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \quad (1.3^\gamma) \Leftrightarrow \mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$$

potential \mathbb{A} is not unique and has gauge freedom $\mathbb{A} + \nabla a$

$$\mathbb{B} = \nabla \times (\mathbb{A} + \nabla a) \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \quad (1.3^\gamma)$$

scalar potential ϕ

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbb{E} &= -\dot{\mathbb{B}} \quad (1.3^\beta) \Rightarrow \nabla \times \mathbb{E} = -\nabla \times (\dot{\mathbb{A}} + \nabla \dot{a}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla \times (\mathbb{E} + \dot{\mathbb{A}} + \nabla \dot{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow -\nabla \phi = \mathbb{E} + \dot{\mathbb{A}} + \nabla \dot{a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{E} = -\nabla(\phi + \dot{a}) - \dot{\mathbb{A}}. \quad (2.1) \end{aligned}$$

And

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbb{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.3^\alpha) \Rightarrow -\Delta(\phi + \dot{a}) - \nabla \cdot \dot{\mathbb{A}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\quad -\Delta \phi - \nabla \cdot (\dot{\mathbb{A}} + \nabla \dot{a}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \nabla \nabla \cdot \mathbb{A} - \Delta \mathbb{A}$$

$\nabla \nabla \cdot \nabla a - \nabla \cdot \nabla \nabla a = \mathbf{0}$ (partial derivatives of a smooth function commute)

$$\begin{aligned} c^2 \nabla \times \mathbb{B} &= \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbb{E}} \quad (1.3^\delta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} - \nabla(\dot{\phi} + \ddot{a}) - \ddot{\mathbb{A}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c^2 (\nabla \nabla \cdot \mathbb{A} - \Delta \mathbb{A}) = \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} - \nabla \dot{\phi} - \nabla \ddot{a} - \ddot{\mathbb{A}}. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Со свободой калибровки возможно упростить волновые уравнения (2.3) и (2.2), положив

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \ddot{a} &= \nabla \dot{\phi} + c^2 \nabla \nabla \cdot \mathbb{A} \Rightarrow \ddot{a} = -\dot{\phi} - c^2 \nabla \cdot \mathbb{A} \\ -\nabla \cdot (\dot{\mathbb{A}} + \nabla \dot{a}) &= \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = -c^2 \nabla \cdot (\mathbb{A} + \nabla a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 \nabla \cdot \mathbb{A} + c^2 \Delta a - c^2 \nabla \cdot \mathbb{A} = \ddot{a},$$

наконец становясь однородным волновым уравнением для a

$$\ddot{a} = c^2 \Delta a. \quad (2.4)$$

Более популярный вариант — ещё более жёсткое условие

$$\Delta a = 0 \Rightarrow \ddot{a} = 0, \quad \dot{\phi} + c^2 \nabla \cdot \mathbb{A} = 0$$

— условие калибровки Lorenz'a, которое даёт такой же эффект, будучи лишь частным — гармоническим — случаем (2.4).

Следующие из (2.2) и (2.3) с условием (2.4), уравнения электромагнитных волн в потенциальной формулировке

$$\begin{aligned} -\Delta\phi + \frac{1}{c^2}\ddot{\Phi} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \\ -c^2\Delta\mathbb{A} &= \dot{\mathbf{j}} - \ddot{\mathbb{A}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

...

§ 3. Электростатика

Рассмотрение этого вопроса полезно и для последующего описания магнетизма. В статике

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbb{B} = \mathbf{0}$$

...

Объёмная “пондеромоторная” сила, с которой электростатическое поле действует на среду ...

...

Тензор напряжения Максвелла (1.5) в электростатике

$${}^2M = \varepsilon_0 \left(\mathbb{E}\mathbb{E} - \frac{1}{2} \mathbb{E} \cdot \mathbb{E} \mathbb{E} \right)$$

...

§ 4. Диэлектрики

Начнём с рассмотрения электростатического поля

...

В диэлектриках нет свободных зарядов: плотность заряда $\varrho = 0$. Здесь вводится плотность дипольного момента

...

§ 5. Магнитостатика

Если поле (а с ним ...)

...

§ 6. Магнетики

Выяснив законы магнитостатики в общем случае, обратимся к веществу — некий опыт у нас уже есть в электростатике диэлектриков.

Начнём с рассмотрения

...

...

Насколько соответствует поведение реальных материалов представленным здесь формальным построениям — сей вопрос is out of scope этой книги.

§ 7. Магнитная жёсткость

В электротехнике распространены обмотки всевозможной формы, в которых провод намотан так, что образуется некое массивное тело. Такие обмотки есть в статоре генератора автомобиля (да и в роторе), в больших промышленных электромагнитах и в магнитных системах установок “токама́к” (тороидальная камера с магнитными катушками) для управляемого термоядерного синтеза — примеров много. Сочетание токопровода и изоляции образует периодический композит, и одной из главных нагрузок для него является пондеромоторная магнитная сила. Рассчитывая деформации и механические напряжения в обмотке, начинают с определения магнитных сил. Поскольку распределение токов задано известной геометрией проводов, достаточно интегрирования по формуле Био-Савара (??). Термин “магнитоупругость” при этом неуместен, так как задачи магнитостатики и упругости решаются отдельно.

Однако при деформации обмотки меняются и поле \mathbf{j} , и вызываемое им поле \mathbf{B} . Объёмная сила становится равной

$$\mathbf{f} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_0 + \dots \quad (7.1)$$

Подчёркнутое слагаемое соответствует недеформированному состоянию. Обусловленное деформацией изменение объёмной силы линейно связано с малым перемещением \mathbf{u} , поэтому матричное (по-

сле дискретизации) уравнение в перемещениях можно представить в виде

$$(C + C_m)u = \overset{\circ}{F}. \quad (7.2)$$

К “обычному” оператору линейной упругости C добавилась магнитная жёсткость C_m ; $\overset{\circ}{F}$ — силы в недеформированном состоянии.

Добавка C_m пропорциональна квадрату тока и может стать весьма существенной в магнитных системах с сильным полем. Учёт её необходим и при недостаточной величине C ; в номинальном режиме конструкция может держать нагрузку, но дополнительная нагрузка неблагоприятного направления может оказаться “невыносимой”.

Но особенно важна роль магнитной жёсткости в задачах устойчивости. Поскольку магнитные силы потенциальны, матрица C_m симметрична, и критические параметры могут быть найдены статическим методом Euler’a.

Как иллюстрацию рассмотрим простую задачу о балке в продольном магнитном поле. Балка располагается на декартовой оси z , концы $z=0$ и $z=l$ закреплены, магнитная индукция $\mathbb{B} = B\mathbf{k} = \text{constant}$, по балке течёт постоянный (по величине) ток I . В классической модели балки при равных жёсткостях на изгиб для прогиба $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ легко получить следующую постановку:

...

Вводя комплексную комбинацию $u \equiv u_1 + iu_2$, будем иметь

...

с общим решением

...

Подстановка в граничные условия приводит к однородной системе для постоянных A_k ; приравняв нулю определитель, придём к характеристическому уравнению

...

Наименьший положительный корень $x = 3.666$, так что критическая комбинация параметров такова:

$$(IBl^3/a)_* = 394.2.$$

В этом решении поле \mathbb{B} считалось внешним и не варьировалось. Но если собственное поле тока в стержне сравнимо с \mathbb{B} , решение изменится и усложнится.

Библиография

Основы электродинамики хорошо изложены во многих книгах [89, 84], но для приложений в механике выделяется курс И. Е. Тамма [95]. Растёт список литературы по связанным задачам электромагнетизма и упругости [44, 46]. Как введение в эту область может быть полезна книга В. Новацкого [37].

МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ (АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ)

Of approximate approaches for analysis of nonlinear systems, perturbation methods are the most often applied.

§1. Асимптотические разложения

До сих пор аргументами рассматриваемых функций были только координаты и время. Размеры тела, упругие модули, характерные масштабы изменения ...

...

В предыдущих главах асимптотические проблемы уже возникали. Линейная теория получается из нелинейной с помощью разложений по масштабу нагрузки (§4.1). Безмоментная теория вытекает (с точностью до краевых эффектов) из моментной (гл. 5) при устремлении “моментных” жёсткостей к бесконечности. В термоупругости (гл. 6) использование уравнения теплопроводности (4.1, §6.4) вместо полного баланса энергии должно быть обосновано асимптотическими методами.

Узвизимым в какой-то степени местом

...

§2. Расщепление в линейной алгебраической системе

Этот простой случай очень познавателен, он хорошо проясняет/иллюстрирует асимптотические явления. Рассматривается

линейная система

$$C_{ij} u_j = f_i, \quad C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)} \quad (2.1)$$

с матрицей C_{ij} и столбцами неизвестных u_j и нагрузок f_i . Процесс построения асимптотического решения определяется тем, вырождена матрица $C_{ij}^{(0)}$ или нет. Возможны три случая.

1° $\det C_{ij}^{(0)} \neq 0$. Однородная задача

$$C_{ij}^{(0)} u_j = 0 \quad (2.2)$$

имеет лишь тривиальное (нулевое) решение. Матрица $C_{ij}^{(0)}$ обратима, неоднородная задача всегда однозначно решима. Решение строится так:

$$u_j = \dots \quad (2.3)$$

...

2° $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

3° $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

§ 3. Метод Пуанкаре

Этот метод широко известен в теории нелинейных колебаний. Он предназначен, в частности, для определения периодических решений уравнения

$$\ddot{u} + u = \chi f(u, \dot{u}) \quad (3.1)$$

...

§ 4. Метод осреднения Ван дер Поля

Опять рассматривается уравнение (3.1), но теперь ищутся не только периодические решения. Вводится фазовая плоскость

...

Процедура осреднения применяется в разных разделах теории упругости (тонкие тела, композиты и др.). Осреднение вне асимп-

тотических методов приводит обычно к незамкнутым системам уравнений; для замыкания приходится принимать некие гипотезы, что умаляет убедительность теории. Иная ситуация в асимптотике: условия разрешимости для поправочных членов с необходимостью приводят к соответствующим интегральным соотношениям.

§ 5. Сращивание асимптотических разложений

Основоположник метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений — Ludwig Prandtl. Рассматривая течение вязкой жидкости, он заметил, что влияние малой вязкости локализовано у границы — в тонком приграничном слое. Вдали от границы жидкость ведёт себя как идеальная. Одни и те же уравнения

...

§ 6. Многоуровневый анализ (метод многих масштабов)

Этот метод привлекателен, естественен и — как написано у Ali Hasan Nayfeh

...

§ 7. Уравнения с медленно меняющимися параметрами

Рассмотрим гармонический осциллятор, собственная частота которого медленно меняется во времени

...

§ 8. Тонкие тела

Задачи теории упругости часто ставятся для тонких тел — стержней, пластин и оболочек. Таковы многие элементы конструкций,

но и в природе вне человека тонкие тела встречаются довольно часто.

Решение задач упругости для тонких тел многие десятилетия основывалось на неких гипотезах о распределении решения по толщине и о порядках одних неизвестных относительно других. Построенные так теории сыграли большúю роль в практике инженерных расчётов. Однако, им не хватало логической стройности и убедительности, их хотелось обосновать, уточнить — а в последнее время и уничтожить (в связи с появлением великолепных компьютеров). Но открытие асимптотического расщепления прояснило картину: в тонком теле трёхмерная задача расщепляется на задачи меньшей размерности. Классические теории тонких тел получили и подтверждение, и развитие.

Рассмотрим задачу о кручении из ...

...

Библиография

Ali Hasan Nayfeh's book [107] is an excellent introduction to perturbation methods (asymptotic methods).

Всё разнообразие асимптотических методов представлено в монографиях ...

глава 9
СТЕРЖНИ

§1. Исходные представления

Стержень — это тонкое длинное тело. Он мыслится (и моделируется) как пространственная кривая — ось стержня, покрытая материалом ([рисунок](#)).

Ось стержня описывается параметризацией вектора положения точек кривой как морфизма (функции) одной переменной координаты s ,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s). \quad (1.1)$$

Покрытие материалом даёт в каждой точке стержня плоскую фигуру, перпендикулярную оси — нормальное сечение $\Omega(s)$.

...

Добавив **единичный??** вектор касательной к оси

$$\mathbf{r}' \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \equiv \mathbf{r}_{\partial s} \equiv \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{k},$$

получим (для каждого s) тройку взаимно перпендикулярных единичных векторов, характеризующих угловую ориентацию.

Кривизна и кручение оси стержня определяются вектором $\boldsymbol{\psi}$

$$\mathbf{e}'_j = \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{e}_j, \quad \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}'_j. \quad (1.2)$$

...

Кроме этого, в каждой точке оси стержня как кривой линии есть и другая тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов — с нормалью и бинормалью.

Касательная \mathbf{T} , нормаль \mathbf{N} и бинормаль \mathbf{B} , вместе называемые *системой Frenet–Serret*, are defined as follows:

- ✓ \mathbf{T} is the unit vector tangent to the curve, pointing where the curve continues further.
- ✓ \mathbf{N} is the normal unit vector, the derivative of \mathbf{T} by the curve's arc length parameter, divided by its length $\kappa = \|\mathbf{N}\|$.
- ✓ \mathbf{B} is the binormal unit vector, the cross product of \mathbf{T} and \mathbf{N} , $\mathbf{B} \equiv \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

The Frenet–Serret formulas, describing derivatives of tangent, normal and binormal unit vectors in terms of each other, are

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \kappa \mathbf{N}, \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} &= -\tau \mathbf{N},\end{aligned}$$

where d/ds denotes the derivative by arc length, κ is the curvature and τ is the curve's torsion. The associated collection — \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} , κ , τ — is called the *Frenet–Serret apparatus*.

Two scalars κ and τ effectively define the curvature and torsion of a space curve. Intuitively, curvature measures the deviation of a curve from a straight line, while torsion measures the deviation of a curve from being planar.

$$\begin{aligned}\kappa &= \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| \\ \kappa &\geq 0\end{aligned}$$

(nonzero curvature $\kappa \neq 0$ that is $\kappa > 0$)

the Frenet–Serret frame is not defined if $\kappa = 0$

zero curvature implies the curve is a straight line, which lies in a plane, making the torsion zero too

If the curvature is not zero, it is considered as a curve line.

...

\mathbf{T} always has unit magnitude, and since there's no change in length of \mathbf{T} , then \mathbf{N} — the derivative of \mathbf{T} — is always perpendicular to \mathbf{T} ($\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \Rightarrow \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T} = 0 \Rightarrow \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$).

Vectors of the Frenet–Serret frame make an orthonormal basis \mathbf{f}_i : $\mathbf{f}_1 = \mathbf{T}$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{N}$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{B}$.

Тензорная версия формул Frenet–Serret

$$\mathbf{f}_i' = {}^2\mathbf{d} \cdot \mathbf{f}_i. \quad (1.3)$$

Frenet–Serret formulas using matrix notation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Tensor ${}^2\mathbf{d}$ is skew-symmetric, therefore it can be represented by the companion (pseudo)vector (§1.7). This pseudovector is known as the Darboux vector.

$$\mathbf{D} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$$

$$\mathbf{D} = \tau \mathbf{T} + 0 \mathbf{N} + \kappa \mathbf{B}$$

With the Darboux vector, Frenet–Serret formulas turn into

$$\mathbf{T}' = \mathbf{D} \times \mathbf{T},$$

$$\mathbf{N}' = \mathbf{D} \times \mathbf{N},$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

или как векторная версия (1.3)

$$\mathbf{f}_i' = \mathbf{D} \times \mathbf{f}_i. \quad (1.4)$$

The Darboux vector is the angular velocity vector of the Frenet–Serret frame of a curve. It is also called as angular momentum vector, because it is directly proportional to angular momentum (really??).

...

В приближённых (“прикладных”) теориях стержней вроде “сопротивления материалов” фигурируют внутренние сила Q и момент M . Они связаны с тензором напряжения соотношениями

$$Q(s) = \int_{\Omega} t_{(k)} d\Omega = \int_{\Omega} k \cdot \tau d\Omega, \quad (1.5)$$

$$M(s) = \int_{\Omega} x \times t_{(k)} d\Omega = \int_{\Omega} x \times k \cdot \tau d\Omega. \quad (1.6)$$

$$k \equiv e_3, \quad x = x_{\alpha} e_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2$$

...

Такие рассуждения о геометрии и о механике (внутренних силе и моменте) относятся только лишь к какой-то одной конфигурации стержня. Продолжать эти соображения бессмысленно потому, что плоские нормальные сечения после деформирования не остаются плоскими и нормальными. Добавление же в модель предположения-гипотезы о том, что деформации нет и “плоские сечения остаются плоскими”^{*} вносит существенные противоречия с реальностью. Достаточно вспомнить лишь один факт, что без деформации невозможно приемлемо описать кручение стержня (и не только кручение).

Очень резонный подход к моделированию деформаций упругого стержня состоит в асимптотическом расщеплении трёхмерной проблемы с малой толщиной. Но для сложной асимптотической процедуры было бы намного проще иметь какую-нибудь версию решения заранее. И прямой подход, когда одномерная модель стержня — материальная линия, даёт такую версию.

Первичный вопрос для построения одномерной модели: какими степенями свободы — помимо трансляции — обладают частицы материальной линии?

^{*} Существуют две очень популярные модели балки с гипотезой, постулирующей отсутствие деформаций. In the Euler–Bernoulli beam theory, shear deformations are neglected, and plane sections remain plane and normal to the axis. In the Timoshenko beam theory, there’s a constant поперечный сдвиг вдоль сечения, and plane sections still remain plane but are no longer normal to the axis.

Известно, что стержни чувствительны к моментным нагрузкам. А присутствие моментов среди обобщённых сил говорит о наличии вращательных степеней свободы. Следовательно, одномерной моделью стержня должна быть линия Коссера — она состоит из бесконечномалых **твёрдых тел**. Впрочем, могут проявиться и дополнительные степени свободы — как в тонкостенных стержнях, которым посвящена отдельная глава.

В механике упругих тел стержни занимают особенное место. Во-первых, это моментные модели, и моменты здесь играют главную роль (не роль малых добавок, как в трёхмерном континууме Cosserat). Во-вторых, стержни являются как бы “тестовой площадкой” для моделей с дополнительными степенями свободы, поскольку наличие этих степеней можно исследовать на трёхмерной модели.

Ну а пока сосредоточимся на простой одномерной моментной модели типа Cosserat.

§ 2. Кинематика линий Коссера

Рассматриваемое далее является упрощённым вариантом [гл. 5](#). Вместо тройки материальных координат q^i имеем одну — s , это может быть параметр длины дуги в начальной конфигурации. Движение частицы со временем описывается вектором положения $\mathbf{r}(s, t)$ и тензором поворота $\mathbf{O}(s, t)$. Линейная и угловая ([9.8](#), [§ 1.9](#)) скорости частицы стержня суть

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{O}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^\top)_\times. \quad (2.2)$$

Деформация стержня как линии Cosserat определяется двумя векторами

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{r}' - \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{r}}', \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = -\frac{1}{2}(\mathbf{O}' \cdot \mathbf{O}^\top)_\times \Leftrightarrow \mathbf{O}' = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{O}. \quad (2.4)$$

$$\left(\dot{\mathbf{r}}(s) \equiv \mathbf{r}(s, 0) \right)$$

(*) Если \mathring{e}_3 направить по касательной $\mathring{e}_3 \equiv \mathring{r}'$

$$\mathring{r}' \equiv \frac{\partial \mathring{r}}{\partial s} \equiv \mathring{r}_{\partial s} \equiv \mathring{e}_3$$

...

То, что (2.3) и (2.4) действительно векторы деформации, следует из равенства их нулю на перемещениях тела как жёсткого целого.

...

В модели Cosserat нет сечения как плоской фигуры.

...

§ 3. Баланс сил и моментов

Возможные нагрузки для стержня как линии Cosserat — силы и моменты: на бесконечно-малый элемент ds действуют внешняя сила $\mathbf{q}ds$ и внешний момент $\mathbf{m}ds$. Внутренними взаимодействиями будут сила $\mathbf{Q}(s)$ и момент $\mathbf{M}(s)$ — это воздействие от частицы с координатой $s+0$ к частице с $s-0$. Принцип действия–противодействия даёт, что перемена направления s меняет знаки \mathbf{Q} и \mathbf{M} .

...

§ 4. Принцип виртуальной работы и следствия

Для куска стержня $s_0 \leq s \leq s_1$ формулировка принципа такова

...

Условно \mathbf{a} есть тензор жёсткости на изгиб и кручение, \mathbf{b} — тензор жёсткости на растяжение и сдвиг, а \mathbf{c} — тензор перекрёстных связей.

Тензоры жёсткости поворачиваются вместе с частицей:

...

§ 5. Классическая модель Kirchhoff'a

До сих пор функции $\mathbf{r}(s, t)$ и $\mathbf{O}(s, t)$ были независимы. В классической теории Kirchhoff'a существует внутренняя связь

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\partial s} = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial s} \text{ или } \mathbf{r}' = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}'. \quad (5.1)$$

Вспоминая смысл вектора $\mathbf{\Gamma}$ (какой? где??), делаем выводы: (1) стержень нерастяжим, (2) поперечных сдвигов нет. Если в начальном состоянии единичный вектор $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_3$ был направлен по касательной к оси, то он останется на ней и после деформирования. Частицы стержня поворачиваются лишь вместе с касательной и вокруг неё.

Уравнения баланса сил и моментов (импульса и момента импульса) не меняются от введения связи (5.1). Но локальное вариационное соотношение (...) становится короче:

...

§ 6. Проблема Эйлера

Рассматривается прямой стержень, закреплённый на одном конце и нагруженный силой \mathbf{P} на другом (рисунок ?? 123 ??). Сила “мёртвая” (не меняется в процессе деформирования)

...

§ 7. Вариационные уравнения

В нелинейной механике упругих тел полезны уравнения в вариациях, описывающие малое изменение актуальной конфигурации. Как и в § 3.12, вариации величин

...

§ 8. Модель без сдвига с растяжением

Модель Kirchhoff'a с внутренней связью $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$ (5.1) не описывает простейшего случая растяжения/сжатия для прямого стержня.

Эта неприятность исчезает со “смягчением” связи: добавлением возможности растяжения и подавлением лишь поперечного сдвига, то есть

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma} e_3 \Leftrightarrow \Gamma_\alpha = 0 \quad (8.1)$$

...

§ 9. Механика гибкой нити

Гибкая нить (цепь) проще стержня: её частицы суть “простые” материальные точки с лишь трансляционными степенями свободы. Поэтому среди нагрузок нет моментов, только “линейные” силы — внешние распределённые \mathbf{q} и внутренние сосредоточенные \mathbf{Q} . Движение нити полностью определяется одним вектором-радиусом $\mathbf{r}(s, t)$, а инерционные свойства — линейной плотностью $\rho(s)$.

Вот принцип виртуальной работы для куска нити $s_0 \leq s \leq s_1$

$$\int_{s_0}^{s_1} \left((\mathbf{q} - \rho \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} - \delta \Pi \right) ds + \left[\mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r} \right]_{s_0}^{s_1} = 0. \quad (9.1)$$

...

Механика нити детально описана в книге [28].

§ 10. Линейная теория

В линейной теории внешние воздействия считаются малыми, а отсчётная конфигурация — ненапряжённым состоянием покоя. Уравнения в вариациях в этом случае дают

...

§ 11. Случай малой толщины

Когда относительная толщина стержня малá, тогда модель типа Cosserat уступает место классической. Понятие “толщина” определяется соотношением жёсткостей: \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} — разных единиц

измерения; полагая $\mathbf{a} = k^2 \hat{\mathbf{a}}$ и $\mathbf{c} = k \hat{\mathbf{c}}$, где k — некий диапазон длины, получим тензоры $\hat{\mathbf{a}}$, \mathbf{b} и $\hat{\mathbf{c}}$ с одной и той же единицей. Подбирая k так, чтобы сблизилась характерные значения тензоров $\hat{\mathbf{a}}$, \mathbf{b} и $\hat{\mathbf{c}}$, найдём эквивалентную толщину h стержня (для реальных трёхмерных стержней h где-то на уровне диаметра сечения).

Представив \mathbf{Q} и \mathbf{M} через векторы бесконечномалой линейной деформации

...

Переход модели типа Cosserat в классическую кажется более очевидным, если непосредственно интегрировать уравнения (...)

...

§ 12. Задача Сэйн-Венана

Трудно переоценить ту роль, которую играет в механике стержней классическое решение Saint-Venant'a. О нём уже шла речь в § 4.13.

Вместо условий ...

...

§ 13. Нахождение жёсткости по энергии

Для определения тензоров жёсткости \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} одномерной модели достаточно решений трёхмерных задач для стержня. Но тут возникают два вопроса: какие именно задачи рассматривать и что нужно взять из решений?

Проблема Saint-Venant'a выделяется среди прочих, ведь оттуда берётся жёсткость на кручение.

Вдобавок есть много точных решений, получаемых таким путём: задаётся поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, определяется $\check{\boldsymbol{\tau}} = {}^4\mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u}$, затем находятся объёмные $\mathbf{f} = -\nabla \cdot \check{\boldsymbol{\tau}}$ и поверхностные $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \check{\boldsymbol{\tau}}$ нагрузки.

Но что делать с решением? Ясно, что \mathbf{Q} и \mathbf{M} в стержне — это интегралы по сечению (...). И совсем не ясно, что считать пере-

мещением и поворотом в одномерной модели. Если предложить, например, такой вариант (индекс у \mathbf{u} — размерность модели)

$$\mathbf{u}_1(z) = \Omega^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}_3(\mathbf{x}, z) d\Omega, \quad \boldsymbol{\theta}(z) = \frac{1}{2} \Omega^{-1} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u}_3 d\Omega,$$

то чем другие возможные представления хуже?

Помимо \mathbf{Q} и \mathbf{M} , есть ещё величина, не вызывающая сомнений — упругая энергия. Естественно потребовать, чтобы в одномерной и в трёхмерной моделях энергии на единицу длины совпали. При этом, чтобы уйти от различий в трактовках \mathbf{u}_1 и $\boldsymbol{\theta}$, будем исходить из дополнительной энергии $\hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$:

$$\hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) = \int_{\Omega} \Pi_3 d\Omega$$

...

§ 14. Вариационный метод построения одномерной модели

Мы только что определили жёсткости стержня, полагая, что одномерная модель линии типа Cosserat адекватно описывает поведение трёхмерной модели. “Одномерные” представления ассоциируются со следующей картиной перемещений в сечении:

$$\mathbf{u}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{U}(s) + \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{x}. \quad (14.1)$$

Однако, такое поле \mathbf{u} не удовлетворяет уравнениям трёхмерной теории(??добавить, каким именно). Невозможно пренебречь возникающими невязками в дифференциальных уравнениях и краевых условиях.

Формально “чистым” является вариационный метод сведения трёхмерной проблемы к одномерной, называемый иногда методом внутренних связей. Аппроксимация (14.1) подставляется в трёхмерную формулировку вариационного принципа минимума потенциальной энергии (9.1, § 4.9)

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{V}} (\Pi(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma \rightarrow \min,$$

которая после интегрирования по сечению становится одномерной. Если \mathbf{U} и $\boldsymbol{\theta}$ варьируются независимо, получаем модель типа Коссера. В случае $\mathbf{U}' = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}$ приходим к классической модели.

Метод внутренних связей привлекателен, его продолжают “переоткрывать”. С его помощью возможно моделировать тела с неоднородностью и анизотропией, он легко обобщается на динамику, если \mathbf{f} дополнить неварьируемой динамической добавкой до $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$. Можно рассматривать и стержни переменного сечения, и даже нелинейно упругие, ведь вариационная постановка есть (гл. 3).

Аппроксимацию (14.1) можно дополнить слагаемыми с внутренними степенями свободы. Понимая необходимость учёта деформаций, некоторые авторы

...

...

Для вариационного построения одномерных моделей удобен принцип Рейсснера–Хеллингера (§ 4.11) с независимой аппроксимацией напряжений [13]. Но тогда необходима некая согласованность между \mathbf{u} и $\boldsymbol{\tau}$.

Множеству достоинств вариационного метода противостоит один, но очень большой недостаток. Вводя аппроксимации по сечению, мы навязываем реальности свои упрощённые представления. Вариационный метод более подходит для прикладных расчётов.

§ 15. Асимптотическое расщепление трёхмерной проблемы

В изложении механики стержней асимптотическое расщепление можно считать фундаментальным. Одномерные модели составляют лишь часть картины; другая часть — это двумерные задачи в сечении, а вместе они являются тем решением трёхмерной задачи, которое получается для малой толщины.

Малый параметр χ в трёхмерную задачу проще всего ввести через представление вектора-радиуса (рисунок ?? 22 ??, § 1):

...

§ 16. Температурные деформация и напряжение

Прямой подход, столь эффективный для создания одномерных моделей Cosserat и Kirchhoff’a, для проблем термоупругости неприменим. Тогда переход от трёхмерной модели к одномерной может быть реализован или вариационным путём, или асимптотическим.

Описанный в § 14 вариационный метод целиком переносится на термоупругость — включая задачи с неоднородностью и анизотропией, переменным сечением, динамические и даже нелинейные. Для этого нужно (§ 6.8) в принципе Lagrange’a минимума потенциальной энергии заменить потенциал $\Pi(\epsilon)$ свободной энергией

...

Библиография

В отличие от других тем теории упругости, стержни представлены в книгах очень скромно. Стиль изложения “сопротивления материалов” преобладает, более точные и совершенные подходы кажутся невозможными или ненужными многим авторам.

Но опубликовано много интересных статей, обзоры которых можно найти у S. Antman’a [1], В. В. Елисеева [13] и А. А. Илюхина [16].

ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ

§1. Вариационный подход

В главе 9 рассматривались стержни с массивным сечением. Но в технике широко используются иные стержни — тонкостенные, сечения которых представляют собой узкие полоски различного очертания (уголок, швеллер, двутавр и др.). Если стержни похожи на линии (материальные линии Коссера), то в тонкостенных стержнях и само сечение выглядит как линия. Три размера — толщина и длина сечения, а также длина стержня — имеют различные порядки.

Известны прикладные теории тонкостенных стержней ...

...

§2. Уравнения с малым параметром

Рассмотрим призматический стержень с односвязным сечением в виде тонкой криволинейной полоски постоянной толщины h . Радиус-вектор в объеме представим следующим образом:

...

§3. Первый шаг асимптотической процедуры

Внешнее разложение

Из системы

...

Внутреннее разложение вблизи s_0

Выпишем уравнения для

...

Сращивание

Стыковка внутреннего и внешнего разложений

...

§ 4. Второй шаг

Внешнее разложение

Из системы

...

Внутреннее разложение вблизи $s = s_0$

Из общей системы

...

Сращивание

Поскольку рассматриваются поправочные члены асимптотических разложений

...

§ 5. Третий шаг

Внешнее разложение

Из системы

....

Внутреннее разложение около $s = s_0$

Как уже отмечалось, внутренние разложения нужны для постановки краевых условий на концах

...

Сращивание

В плоской задаче имеем следующее двучленное внешнее разложение:

....

§ 6. Четвёртый шаг

Здесь понадобится лишь внешнее разложение. Более того: в этом приближении мы не будем искать решения уравнений — будет достаточно лишь условий разрешимости. Напомним, что философия наша такова: разыскиваются лишь главные члены асимптотических разложений, но для полного их определения могут понадобиться

...

§ 7. Перемещения

Расписывая тензорное соотношение

...

§ 8. Итоги асимптотического анализа

Определение главных членов асимптотики напряжений и перемещений для тонкостенных стержней оказалось намного сложнее, чем в случае массивного сечения. Дадим сводку полученных выше итоговых результатов.

Перемещение:

...

Помимо известных книг ... Материал главы содержится в [13], где можно найти и обширный список статей.

ОБОЛОЧКИ И ПЛАСТИНЫ

§1. Геометрия поверхности

Поверхность описывается функцией (морфизмом)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^\alpha), \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.1)$$

двух взаимно независимых переменных параметров (координат) q^α , тогда \mathbf{r} — вектор положения (вектор-радиус) точек поверхности.

Примеры

- ✓ линейное отображение есть плоскость $\mathbf{r}(a, b) = a\mathbf{e}_1 + b(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$
- ✓ геликоид $\mathbf{r}(u, v) = u \sin v \mathbf{e}_1 + u \cos v \mathbf{e}_2 + v \mathbf{e}_3$
- ✓ конус $\mathbf{r}(u, v) = u \sin v \mathbf{e}_1 + u \cos v \mathbf{e}_2 + u \mathbf{e}_3$
- ✓ цилиндр радиуса $r = \text{constant}$

$$\mathbf{r}(u, v) = r(\cos u \mathbf{e}_1 + \sin u \mathbf{e}_2) + v \mathbf{e}_3$$
- ✓ тор вращения с радиусами r и R

$$\mathbf{r}(p, q) = \mathbf{e}_1(r \cos p + R) \cos q + \mathbf{e}_2(r \cos p + R) \sin q + \mathbf{e}_3 r \sin p$$
- ✓ 2-сфера — тор с $R = 0$

$$\mathbf{r}(p, q) = r(\cos p \cos q \mathbf{e}_1 + \cos p \sin q \mathbf{e}_2 + \sin p \mathbf{e}_3)$$
- ✓ параболоид $\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + (u^2 + v^2) \mathbf{e}_3$ или цилиндрическая параметризация $\mathbf{r}(\rho, \vartheta) = \rho \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \rho \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + \rho^2 \mathbf{e}_3$ для параболоида вращения.

Непрерывное изменение одной координаты q^1 , пока вторая координата $q^2 = u^* = \text{constant}$ “заморожена”, даёт координатную линию $\mathbf{r}^{(1)}(q^1) = \mathbf{r}(q^1, u^*)$. Пересечение двух координатных линий $q^1 = v^*$ и $q^2 = w^*$ однозначно определяет точку $\mathbf{r}(v^*, w^*)$ поверхности.

Векторы

$$\mathbf{r}_{\partial\alpha} \equiv \partial_\alpha \mathbf{r}, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \quad (1.2)$$

касательны к координатным линиям. Если они линейно независимы (то есть $\mathbf{r}_{\partial 1} \times \mathbf{r}_{\partial 2} \neq \mathbf{0}$)^{*}, они составляют локальный базис для представления любого вектора \mathbf{v} в касательной плоскости как линейной комбинации

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^\alpha \mathbf{r}_{\partial \alpha} = v_\alpha \mathbf{r}^\alpha, \\ v^\alpha &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}^\alpha, \quad v_\alpha = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_{\partial \alpha}, \quad \mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_{\partial \beta} = \delta_\beta^\alpha. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{r}^α — локальный взаимный базис в (ко)касательной плоскости.

Поле единичных нормальных векторов $\mathbf{n}(q^\alpha)$ добавляет в каждой точке поверхности ($\forall \mathbf{r}(q^\alpha) \Leftrightarrow \forall q^\alpha$) единичную^{**} нормаль

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_{\partial 1} \times \mathbf{r}_{\partial 2}}{\|\mathbf{r}_{\partial 1} \times \mathbf{r}_{\partial 2}\|}. \quad (1.4)$$

В несингулярных точках, три вектора $\mathbf{r}_{\partial 1}$, $\mathbf{r}_{\partial 2}$ и \mathbf{n} могут быть взяты как базис для всего трёхмерного пространства, давая разложение любого вектора (и любого тензора тоже), например $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{r}_{\partial \alpha} + u^n \mathbf{n}$.

$$u^n = u_n$$

для 2-сферы единичного радиуса

$$\mathbf{r}_{\partial p} \times \mathbf{r}_{\partial q} = -\det \begin{bmatrix} -\sin p \cos q & \mathbf{e}_1 & -\cos p \sin q \\ -\sin p \sin q & \mathbf{e}_2 & \cos p \cos q \\ \cos p & \mathbf{e}_3 & 0 \end{bmatrix} = \dots$$

Единичные (“метрические”) бивалентные тензоры \mathbf{E} в пространстве и \mathbf{I} в касательной плоскости

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} + \mathbf{n}\mathbf{n}, \quad \mathbf{I} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n} = \mathbf{r}_{\partial \alpha} \mathbf{r}^\alpha = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}_{\partial \alpha}.$$

^{*} Иногда где-нибудь — в так называемых сингулярных точках — это не так. Как пример, для 2-сферы единичного радиуса

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(p, q) &= \cos p \cos q \mathbf{e}_1 + \cos p \sin q \mathbf{e}_2 + \sin p \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{r}_{\partial p} &= \partial_p \mathbf{r} = -\sin p \cos q \mathbf{e}_1 - \sin p \sin q \mathbf{e}_2 + \cos p \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{r}_{\partial q} &= \partial_q \mathbf{r} = -\cos p \sin q \mathbf{e}_1 + \cos p \cos q \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

полюс $p = \pm \frac{\pi}{2}$ — сингулярная точка: $\mathbf{r}_{\partial q}|_{p=\pm\pi/2} = \mathbf{0}$.

^{**} $\|\mathbf{a}\| \equiv \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ — длина вектора \mathbf{a} .

Представление вектора положения $\mathbf{h}^{(3)}$ любой точки пространства на расстоянии h от поверхности ($\partial_\alpha h = 0$)

$$\mathbf{h}^{(3)}(q^\alpha, h) = \mathbf{r}(q^\alpha) + h\mathbf{n}(q^\alpha) \quad (1.5)$$

даёт локальный касательный базис

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\partial n}^{(3)} &= \mathbf{n} = \mathbf{h}^{(3)n}, \\ \mathbf{h}_{\partial\alpha}^{(3)} &\equiv \partial_\alpha \mathbf{h}^{(3)} = \partial_\alpha \mathbf{r} + h \partial_\alpha \mathbf{n} = \mathbf{r}_{\partial\alpha} + h \mathbf{r}_{\partial\alpha} \cdot \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n}. \end{aligned}$$

...

дифференциальный оператор “набла”

$$\text{в пространстве } \nabla \equiv \mathbf{h}^{(3)i} \partial_i$$

$$\text{в касательной плоскости } \nabla \equiv \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha$$

...

$$\mathbf{h}_{\partial\alpha}^{(3)} = \mathbf{r}_{\partial\alpha} \cdot \left(\mathbf{r}^\beta \mathbf{r}_{\partial\beta} + h \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n} \right) = \mathbf{r}_{\partial\alpha} \cdot \left(\mathbf{I} + h \nabla \mathbf{n} \right) = \mathbf{r}_{\partial\alpha} \cdot \left(\mathbf{I} - {}^2\mathbf{c} h \right)$$

Двухкоординатный бивалентный тензор

$${}^2\mathbf{c} \equiv -\nabla \mathbf{n} = -\mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha \mathbf{n} \quad (1.6)$$

характеризует кривизну поверхности.

...

$$\text{кобазис } \mathbf{h}^{(3)\alpha} \cdot \mathbf{h}_{\partial\beta}^{(3)} = \delta_\beta^\alpha, \quad \mathbf{h}^{(3)i} \cdot \mathbf{h}_{\partial j}^{(3)} = \delta_j^i$$

$$\mathbf{h}^{(3)\alpha} = \left(\mathbf{I} + h \nabla \mathbf{n} \right)^{-1} \cdot \mathbf{r}^\alpha, \quad \mathbf{h}^{(3)n} = \mathbf{n}$$

связь между ∇ и $\nabla^{(2)}$

$$\nabla = \left(\mathbf{I} + h \nabla \mathbf{n} \right)^{-1} \cdot \nabla^{(2)} + \mathbf{n} \partial_n$$

...

§ 2. Модель оболочки

Располагая моделями трёхмерного моментного континуума, *стержней и пластин*, не так уж тяжело разобраться в механике оболочек.

Как геометрический объект, оболочка определяется срединной поверхностью и толщиной h , так что в представлении (1.5) $-h/2 \leq h \leq h/2$.

...

§ 3. Баланс сил и моментов для оболочки

При $\delta u = \text{constant}$ и $\delta \varphi = 0$ (трансляция) ...

...

§ 4. Оболочки: Отношения упругости

Локальное соотношение (??) после вывода уравнений баланса ...

...

§ 5. Классическая теория оболочек

Вышеизложенная теория (напоминающая балку Тимошенко и континуумы Cosserat) рассматривает повороты φ независимо от перемещений \mathbf{u} . Но обыденный опыт подсказывает: материальный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остаётся таковым и после (кинематическая гипотеза Kirchhoff'a). В классической теории Kirchhoff'a, Арона и Лява поле φ выражается через \mathbf{u} , что в конце концов даёт свести всё к одному векторному уравнению для \mathbf{u} .

Предположим, что в основе классической теории лежит внутренняя связь

...

§ 6. Оболочки: Пластина

Пластина есть простейший вид оболочки. Единичный перпендикуляр $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ направлен по декартовой оси z , в качестве координат

...

...

§ 7. Оболочки: Подход с множителями Лагранжа

Уязвимым местом этого изложения теории оболочек являются формулы

...

§ 8. Цилиндрическая оболочка

Существуют разные уравнения цилиндрической оболочки. Приводятся громоздкие выкладки с отбрасыванием некоторых малых членов, и не всегда ясно, какие именно члены действительно можно отбросить.

Предлагаемая читателю теория оболочек иного свойства: лишних членов нет, все уравнения записаны в компактной тензорной форме — остаётся лишь **грамотно** действовать с компонентами тензоров. В качестве иллюстрации рассмотрим цилиндрическую оболочку.

В декартовой системе

...

§ 9. Оболочки: Общие теоремы

Пусть край закреплён

...

§ 10. Оболочки: Краевые условия

В рамках рассматриваемого прямого подхода к оболочкам как материальным поверхностям наиболее надёжным способом вывода граничных условий представляется вариационный. Исходим из вариационного уравнения:

...

§ 11. Оболочки вращения

Surface of revolution (reference surface of shell of revolution) is created by rotating a plane curve (the meridian, the generatrix) about a straight line in the plane of curve (an axis of rotation).

Разберёмся в геометрии поверхности вращения ([рисунок](#)).
Меридиан можно задать зависимостью декартовых координат

...

§ 12. Безмоментная теория оболочек

В отличие от пластины, оболочка способна выдерживать нормальную распределённую нагрузку без появления внутренних моментов. В безмоментном состоянии напряжения равномерно распределены по толщине оболочки, безмоментные оболочечные конструкции можно считать оптимально спроектированными.

Уравнения безмоментной теории

...

§ 13. Оболочки: Нелинейная безмоментная теория

Вышеизложенную безмоментную теорию оболочек возможно просто и корректно обобщить на нелинейную постановку. Материальная поверхность состоит из частиц

...

§ 14. Оболочки: Иной вариант классической теории

Выше при изложении моментной теории оболочек частицы материальной поверхности считались твёрдыми телами с шестью степенями свободы

...

§ 15. Пластины: Общие представления

Пластиной называется тонкое трёхмерное тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями и боковой цилиндрической поверхностью (?? [рисунок](#) ??). В декартовых координатах x_1, x_2, z поперечная координата ...

...

В теории пластин рассматриваются двумерные задачи. Переход от трёхмерной задачи наиболее достоверен на пути асимптотики. Но логическая стройность и эффективность присуща и вариационному подходу, основанному на аппроксимации по толщине решения трёхмерной вариационной задачи. Самое же простое корректное изложение теории пластин характерно для прямого подхода к ним как материальным плоскостям.

...

§ 16. Модель пластины типа Тимошенко (прямой подход)

Пластина рассматривается как материальная плоскость, частицы которой

...

§ 17. Классическая теория пластин Kirchhoff'a

Принимается внутренняя связь

...

§ 18. Пластины: Асимптотическое сопоставление двумерных моделей

При малой толщине из теории типа Тимошенко вытекает классическая. Толщина h определяется отношением жёсткостей. Перепишем

...

§ 19. Пластины: Вариационный переход от трёхмерной модели

Используя вариационные принципы Lagrange'a или Рейсснера–Хеллингера с аппроксимацией решения по толщине, можно получить двумерные вариационные постановки. Из них вытекают и соотношения внутри области, и естественные краевые условия.

Для примера построим модель типа Тимошенко с аппроксимацией перемещений

...

...

Рассмотренные вариационные переходы легко обобщаются на случаи неоднородности и анизотропии материала, температурных деформаций, динамики. Достоинство принципа Рейсснера–Хеллингера — в явном представлении напряжений. Зато принцип Лагранжа применим к нелинейным задачам (глава 3 содержит трёхмерную постановку).

§ 20. Пластины: Расщепление трёхмерной задачи изгиба

Двумерная классическая теория изгиба пластин легко выводится из трёхмерной постановки с малым параметром. Представив радиус-вектор в объёме

...

§ 21. Круглые пластины

В качестве иллюстрации рассмотрим широко представленный в литературе вопрос об уравнениях теории Kirchhoff'a в полярных координатах.

...

§ 22. Пластины: Плоское напряжение

Это вторая из двух задач, о которых говорилось в § 15. Силы

...

Библиография

Теория оболочек изложена в монографиях А. Л. Гольденвейзера [7], В. В. Новожилова [38], А. И. Лурье [25], В. С. Черниной [62] и ряде других. Достоинства этих книг перекрывают неразвитость формального аппарата. Переход от трёхмерной модели оболочки к двумерной рассмотрен у ...

...

Техническая теория изгиба пластин изложена ...

...

§1. Вибрации трёхмерного тела

Динамическая задача классической линейной упругости

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \sigma + f &= \rho \ddot{u}, \quad \sigma = {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla u, \\ u|_{o_1} &= 0, \quad n \cdot \sigma|_{o_2} = p, \\ u|_{t=0} &= u^0, \quad \dot{u}|_{t=0} = \dot{u}^0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Согласно общей теории (§2.8), начинаем с анализа гармоник (ортогональных колебаний):

$$\begin{aligned}f &= 0, \quad p = 0, \quad u(r, t) = U(r) \sin \omega t, \\ \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla U) + \rho \omega^2 U &= 0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Значения ω , при которых однородная задача имеет нетривиальное решение — это натуральные резонансные частоты, а $U(r)$ — ортогональные (нормальные) “моды”.

Независимое от времени (1.2) выглядит как уравнение линейной эластостатики (5.1, §4.5) с объёмной нагрузкой, равной $\omega^2 \rho U$. Поверхностная нагрузка на o_2 — нуль. Тождество Клапейрона (4.1, §4.4) даёт

$$\omega^2 \int_V \rho U \cdot U dV = 2 \int_V \Pi(\nabla U^S) dV.\tag{1.3}$$

Это также значит $\omega^2 \geq 0$, с нулём для движения U континуума как жёсткого целого. С закреплением хотя бы малой части поверхности все $\omega_i > 0$.

Но тут предполагалось, что ω^2 и U вещественны. Это может быть доказано “от противного”. Если $\Im m \omega^2 \neq 0$, то сопряжённая частота $\bar{\omega}^2$ — тоже часть спектра колебания, и “мода” \bar{U} для этой частоты имеет сопряжённые компоненты. Используя далее теорему

о взаимности работ (4.2, § 4.4) для U и \bar{U} как двух статических вариантов,

$$\omega^2 \int_V \rho U \cdot \bar{U} dV = \bar{\omega}^2 \int_V \rho \bar{U} \cdot U dV \Rightarrow \omega^2 = \bar{\omega}^2 \Rightarrow \Im \omega^2 = 0.$$

...

§ 2. Вибрации стержня

В линейной динамике стержней имеем следующую систему для сил Q , моментов M , перемещений u и поворотов θ (§ 9.??):

...

§ 3. Малые возмущения параметров

Рассмотрим задачу об определении собственных частот и форм с малыми возмущениями масс и жёсткостей:

$$(C_{ij} - \omega^2 A_{ij}) U_j = 0, \quad (3.1)$$

$$C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)}, \quad A_{ij} = A_{ij}^{(0)} + \chi A_{ij}^{(1)}, \quad \chi \rightarrow 0.$$

Находя решение в виде

$$\omega = \omega^{(0)} + \chi \omega^{(1)} + \dots, \quad U_j = U_j^{(0)} + \chi U_j^{(1)} + \dots,$$

получаем последовательность задач

...

§ 4. Вибрации оболочки

Динамика оболочек рассматривалась многими

...

§ 5. Волны в упругой среде

Рассмотрим линейные уравнения динамики однородной изотропной среды без объёмных сил

...

§ 6. Волны в стержне

Рассмотрим прямой стержень. Продольная деформация описывается уравнениями

...

§ 7. Нелинейные колебания

Рассмотрим простой пример: продольные колебания прямого стержня с малой нелинейной добавкой в соотношениях упругости

...

Библиография

Методы решения динамических задач упругости представлены в книгах Л. И. Слепяна [74] и В. Б. Поручикова [48]. О малых линейных колебаниях (вибрациях) написано у С. П. Тимошенко, D. H. Young'a и W. Weaver'a [66], И. М. Бабакова [67], В. Л. Бидермана [68], В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [70]. Асимптотические проблемы колебаний оболочек освещены у ...

УСТОЙЧИВОСТЬ

§1. Разные подходы к проблеме устойчивости

Есть весьма развита́я теория устойчивости по Ляпунову. Она говорит, что если близкие начальные отклонения не увеличиваются в будущем и остаются близкими навсегда, то процесс устойчив. Это относится и к состоянию равновесия тоже. Рассмотрим динамику малых отклонений от равновесной конфигурации, чтобы убедиться, что эти отклонения не растут. Таков **динамический подход** к проблеме устойчивости, признаваемый самым обоснованным.

Однако, для задач об устойчивости равновесия упругих систем обрёл популярность иной подход, называемый **статическим** и связываемый с именем Leonhard’a Euler’a. Здесь значения параметров, при которых уравнения статики для малых отклонений получают нетривиальное решение, предполагаются “критическими”. Иными словами, “критическим” считается такое равновесное состояние, которое перестаёт быть изолированным — в его окрестности появляется множество смежных равновесных форм (“безразличное равновесие”). С этим подходом достаточно решить задачу на собственные числа.

И есть ещё подходы. Например, **метод несовершенств**: если малые случайные изменения начальной формы, жёсткостей, нагрузок и **чего-нибудь ещё** приводят лишь к малому изменению равновесной деформированной конфигурации, то равновесие устойчиво. Или **энергетический подход**: потеря устойчивости происходит, когда она становится энергетически выгодной, то есть ведёт к уменьшению энергии.

Упомянутые подходы рисуют пёструю картину. Но её довольно просто визуализировать для дискретной модели — модели с конечным числом степеней свободы.

Большой общностью обладают

...

§ 2. Классические проблемы со стержнями

Состояние перед варьированием описывается уравнениями нелинейной теории стержней Kirchhoff’a

...

§ 3. “Следящие” нагрузки

В проблемах устойчивости весьма весо́мо поведение нагрузки в процессе деформирования. Ведь в уравнения входит вариация (of what?) δq , она равна нулю лишь для “мёртвых” нагрузок. **Распространены** “следящие” нагрузки, которые меняются определённым путём вместе со смещениями частиц упругого континуума.

Статический подход Euler’a к проблеме устойчивости

...

§ 4. Роль добавочных податливостей

Для прямого **консольного** стержня, сжатого постоянной силой F на свободном конце, критическая нагрузка определяется формулой Euler’a

...

§ 5. Вариационные формулировки

Во всех разделах линейной теории упругости большую роль играют вариационные постановки. Среди прочего, они составляют основу метода конечных элементов как варианта метода Ritz’a.

Менее развиты вариационные постановки для проблем устойчивости. Здесь получил популярность метод

...

§ 6. Неконсервативные задачи

В уравнении динамики (...) матрица позиционных сил

...

§ 7. Случай кратных корней

Вернёмся к проблеме устойчивости (...) в случае циркуляционных сил. Как уже отмечалось (где??), критическая ситуация характеризуется

...

Библиография

Увлекательные вопросы устойчивости упругих систем освещены в книгах ...

глава 14 ДЕФЕКТЫ

§ 1. Дислокации Вольтерры

Рассмотрим классическую линейную трёхмерную среду (гл. 4). Как показано в § 4.7, уравнение совместности деформаций

...

§ 2. Прямолинейные дислокации

Линия дислокации может быть любой пространственной кривой, замкнутой в теле или выходящей концами на поверхность. Для дислокации произвольной формы в неограниченной среде не так уж сложно получить соответствующее решение [14]. Мы же ограничимся простейшим случаем прямолинейной дислокации. Ищется решение

...

§ 3. Действие поля напряжений на дислокацию

Рассмотрим тело, содержащее внутри дислокацию с замкнутой линией C . Тело нагружено объёмными \mathbf{f} и поверхностными \mathbf{p} силами. Обозначим

...

§ 4. О движении дислокаций

Рассмотрим это явление, следуя [20]. Ограничимся случаем прямолинейной винтовой дислокации, движущейся с постоянной скоростью

...

§ 5. Точечные дефекты

Речь пойдёт о континуальной модели таких явлений как вакансии, примесные частицы или междоузельные атомы в кристаллической решётке. В случае дислокации рассматривались

...

§ 6. Действующая на точечный дефект сила

Дефект находится в теле, нагруженном объёмными f и поверхностными p силами. Суперпозиция

...

§ 7. Непрерывно распределённые дислокации

Начнём со сложения векторов Бюргерса. При обходе сразу двух дислокаций (рис. ?? 40 ??) по контуру

...

§ 8. Напряжение при намотке катушки

Не только дислокации и точечные дефекты, но и макроскопические факторы могут быть источниками собственных напряжений. При намотке катушки (рис. ?? 42 ??) в ней возникают напряжения от натяжения ленты. Расчёт этих напряжений очень сложен, если рассматривать детально процесс укладки ленты.

Но существует чёткий алгоритм Southwell'a [50] расчёта напряжений в катушке: укладка каждого нового витка вызывает внутри катушки приращения напряжений, определяемые соотношениями линейной упругости. Здесь два этапа, и первый состоит в решении задачи Lamé о деформации полого цилиндра под внешним давлением (рис. ?? 43 ??)

Lamé problem about deformation of a hollow cylinder under external pressure

...

Библиография

Дислокации и точечные дефекты в линейно-упругих телах рассматривали многие авторы: John Eshelby [14], Roland deWit [11], Cristian Teodosiu [53], Alan Cottrell [20]. Теорию собственных напряжений изложил Ekkehart Kröner в [21]. Методику расчёта напряжений при намотке описал Richard Southwell в книге [50].

§1. Традиционные критерии прочности

Как судить о прочности тела после определения напряжения в нём? При одноосном растяжении напряжением σ есть, очевидно, некий “предел прочности” σ_* , выше которого материал разрушается. Прочность считают достаточной при $\sigma \leq \sigma_*/k$, где k есть так называемый коэффициент запаса. Но такой подход не вполне удовлетворяет, поскольку получаемые из опытов значения σ_* имеют большой разброс, а выбор коэффициента запаса временами становится бюрократическим актом.

Тем не менее, подобные взгляды на анализ прочности широко распространены. Воздерживаясь от критики, стоит упомянуть самые популярные из них.

Критерий максимального нормального напряжения: разрушение происходит при $\sigma_1 = \sigma_*$ (наибольшее из главных напряжений достигает предельного значения). Но это положение несправедливо для одноосного сжатия, при котором $\sigma_1 = 0$.

Критерий максимального касательного напряжения (Tresca criterion): разрушение наступает при $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_*$ (σ_3 — наименьшее из главных напряжений). Это более соответствует началу пластического течения.

Критерий максимального удлинения: наибольшее из собственных значений тензора деформации $\varepsilon_1 = \varepsilon_*$. Это приемлемо и при сжатии с $\varepsilon_1 > 0$.

Критерий энергии деформации: $\Pi = \Pi_*$. Здесь учитывается, что разрушение требует энергии, а источником её может быть лишь само деформированное тело. Однако достаточный запас энергии — необходимое, но не единственное условие разрушения; должен

включиться некий механизм преобразования упругой энергии в работу разрушения.

Критерий энергии формоизменения (von Mises yield criterion): $s \cdot s = 2\tau_*^2$, $s \equiv \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \mathbf{E} \operatorname{trace} \boldsymbol{\tau}$ (“девиатор напряжений”). Здесь не играет роли энергия объёмной деформации. Richard von Mises предложил* этот критерий как гладкую аппроксимацию условия Henri Tresca.

Критерий Mohr’a. Представим себе множество предельных состояний ...

...

§ 2. Антиплоская деформация среды с трещиной

Любая регулярная функция комплексного переменного $z = x + iy$ содержит в себе решение какой-либо антиплоской задачи статики без ...

...

§ 3. Трещина при плоской деформации

Рассмотрим плоскую область произвольного очертания с трещиной внутри; нагрузка приложена и “в объёме”, и на внешнем крае. Как и при антиплоской деформации, решение строится в два этапа

...

§ 4. Трещиновдвижущая сила

Это едва ли не основное понятие механики трещин. Рассмотрим его, следуя

* **R. von Mises.** Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse.* 1913, Seiten 582–592.

...

§ 5. Критерий роста трещины

Связанная с энергией \mathcal{E} трещинодвижущая сила F — не единственное воздействие на передний край трещины. Должна быть ещё некая сила сопротивления F_* ; рост трещины начинается при условии

...

§ 6. J-интеграл

Одно из самых известных понятий в механике трещин выражается интегралом

$$J = \dots \quad (6.1)$$

...

§ 7. Коэффициенты интенсивности напряжений

Расчёт прочности тела с трещиной сводится к определению коэффициентов интенсивности напряжений. Методы расчёта таких коэффициентов — как аналитические, так и численные — хорошо освещены в литературе.

Рассмотрим ещё один подход к задачам механики трещин, разработанный

...

§ 8. Модель Barenblatt'a

Неограниченный рост напряжения на краю трещины кажется конечно же сомнительным. Сингулярные решения желают поддержки какими-либо дополнительными рассуждениями или использованием иной модели. И такую поддержку дала работа

...

§ 9. Деформационный критерий

D. S. Dugdale*, а также М. Я. Леонов и В. В. Панасюк** предложили модель, напоминающую построения Баренблатта. Также есть силы сцепления q и равен нулю итоговый коэффициент интенсивности напряжений. Но, во-первых, q имеет иной вид:

...

Второе отличие рассматриваемой модели — в формулировке критерия прочности: трещина начинает расти, когда расхождение берегов в конце свободного участка достигает критического значения δ_* (этот параметр — константа материала), то есть при

...

§ 10. Рост трещин

Пусть нагрузка на тело с трещиной выросла настолько, что выполняется условие

...

§ 11. Упругое поле перед движущейся трещиной

Рассмотрим этот вопрос

...

* **Dugdale, D. S.** Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1960, Volume 8, Issue 2, pages 100–104.

** **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твёрдом теле. *Прикладная механика*. 1959, Т. 5, № 4, с. 391–401.

§12. Баланс энергии для движущейся трещины

Уравнение баланса энергии в линейной теории ($\Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$, $K = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$):

$$\int_{\mathcal{V}} (K + \Pi) \dot{} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{O}. \quad (12.1)$$

...

Библиография

Список книг по механике трещин уже велик. В нём сто́ит отметить работы Л. М. Качанова [17], Н. Ф. Морозова [32], В. З. Партона и Е. М. Морозова [45], Г. П. Черепанова [61]. Обзор статей есть у ... Экспериментальные данные представлены, например, в [18].

§ 1. Вводные размышления

Используя глину как строительный материал, в неё добавляют измельчённую солому. Работая с эпоксидной смолой, полезно до отвердевания смешать с наполнителем: порошком, волокнами, кусочками ткани. Это примеры композитов (композитных материалов, композитных смесей). Новые типы композитов применяются всё шире, вытесняя сталь, алюминиевые сплавы и другие популярные однородные материалы.

Композиты могут быть определены как (микро-)неоднородные материалы, в которых происходит некое осреднение с возникновением новых свойств. “Обычная” механика континуумов применима, конечно же, и к композитам тоже. Но едва ли возможно смоделировать каждый аспект композитного материала — и весьма абсурдно. Нужен некий новый подход, который будет иметь дело со сложностью структуры материала. Как для газа, когда вместо описания динамики отдельных молекул мы вводим параметры “давление”, “температура” и другие.

Механика однородного некомпозитного континуума являет лишь одну — макроскопическую — длину ℓ , характерный размер тела (объём, делённый на площадь поверхности), полагая что объёмы любой малости имеют такие же свойства, как и конечные.

Для композита — по-иному, давая здесь три диапазона длины: $\ell \gg \ell' \gg \ell_0$. Наибольший ℓ представляет размеры тела. Наименьший ℓ_0 — вокруг размера элементов структуры материала (например, частичек порошка-наполнителя). Промежуточный диапазон ℓ' показывает размер так-называемого “представительного”

объёма, “единичной ячейки”: того минимального объёма, в котором проявляются специфические свойства этого композита.

В композитах сложная проблема для неоднородного тела расщепляется на две: для тела в целом (макроуровень) и для “представительного” объёма (микроуровень). На макроуровне (диапазон ℓ) композит моделируется однородной средой с “эффективными” свойствами, где “представительные” объёмы играют роль частиц. На микроуровне (диапазон ℓ_0) поля очень неоднородны, но некое осреднение по “представительному” объёму выводит на макроуровень.

...

§ 2. Эффективные поля

Любое поле в композите обычно представляется суммой

...

§ 3. Краевые задачи для представительного объёма

Как определяются упругие модели для однородной среды? Без реальной возможности получить отношение между σ и ε для точки бесконечно-малого размера, эксперименты проводятся с телами конечных объёмов при так называемом “однородном напряжении” — когда напряжение одно и то же во всех точках тела. В композитах роль точки играет “представительный” объём.

...

§ 4. Вулка Hill'a

Using Voigt and Reuss theories, Hill derived upper and lower bounds on the effective properties of a composite material [Hill, R. W. The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proceedings of the Physical Society*, Section A, Volume 65, Issue 5 (May 1952). Pages 349–354.]

The scale separation is motivated by the material properties, at both scales continuum mechanics models the underlying system. Such an approach uses energy equivalence at both scales as proposed in Hill (1972).

Hill R (1972) On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain (pages 131–147)

For a composite material, at least two different materials with known material models and parameters, generate a homogenized material modeled with a predetermined constitutive equation. Determination of material parameters of the homogenized material is a challenging task.

Отметив, что

...

§ 5. Формулы Eshelby

Итак, эффективные модули определяются энергией представительного объёма в первой или второй задачах:

...

§ 6. Эффективные модули для материала со сферическими включениями

В однородной матрице случайным образом, но достаточно равномерно, распределены сферические включения радиусом a . Получившийся композит на макроуровне будет изотропным, его упругие свойства полностью определяются ...

...

§ 7. Метод самосогласования

Мы опирались на две задачи для представительного объёма и определяли эффективные модули из равенства энергий. В основе метода самосогласования лежит новая идея: представительный объём помещается в безграничную среду с эффективными свойствами, на бесконечности состояние считается однородным, эффек-

тивные модули находятся из некоторых дополнительных условий самосогласования.

Обратимся снова к вопросу об объёмном модуле среды со сферическими включениями. Задача сферически симметрична; для включения по-прежнему

...

§ 8. Принцип Хашина–Штрикмана

Hashin and Shtrikman derived upper and lower bounds for the effective elastic properties of quasi-isotropic and quasi-homogeneous multiphase materials using a variational approach [Hashin, Z.; Shtrikman, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. Volume 11, Issue 2 (March–April 1963). Pages 127–140.]

Hashin Z, Shtrikman S (1962) On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 10(4): pages 335–342

Вилка Hill’a основана на обычных экстремальных принципах теории упругости. Специально для механики композитов Hashin и Shtrikman построили очень своеобразный функционал, который на некотором точном решении может иметь как максимум, так и минимум, давая возможность с двух сторон оценивать эффективные модули [65].

Рассмотрим первую из двух задач для представительного объёма

...

Библиография

Книги R. Christensen’a [76] и Б. Е. Победри [78] содержат и основы механики композитов, и постановку не теряющих актуальности проблем. Для самого требовательного читателя представляет интерес монография Т. Д. Шермергора [65]. Немало книг посвящено механике разрушения композитов, здесь стоит отметить труд Г. П. Черепанова [79].

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОМПОЗИТЫ

Periodic composite structure is made of a finite or infinite repetition of a unit cell.

§1. Одномерная задача

В одномерной задаче статики имеем уравнение

...

§2. Трёхмерный континуум

Исходим из уравнений в перемещениях

...

§3. Волокнистая структура

Тензор \mathcal{A} в этом случае постоянен вдоль оси

...

§4. Статика периодического стержня

В уравнениях линейной статики стержня

...

Библиография

Лежащий в основе этой главы асимптотический метод представлен (с разной степенью математической скрупулёзности) в книгах [80, 81, 77, 78].

СПИСОК УПОМЯНУТЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Издание 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
5. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
6. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
7. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. «Наука», 1976. 512 с.
8. **Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 383 с.
9. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.
10. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.
11. *Перевод: Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.
12. **Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.

13. **Елисеев В. В.** Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.
14. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // *Solid State Physics*, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод: Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.
15. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.
16. **Илюхин А. А.** О построении соотношений теории упругих стержней // *Механика твёрдого тела* (Киев), 1990, № 22, С. 82–92.
17. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.
18. **Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
19. **Cosserat E. et Cosserat F.** *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
20. **Cottrell, Alan.** *Theory of crystal dislocations*. (Documents on Modern Physics) Gordon and Breach, 1964. 94 p. *Перевод: Коттрел А.* Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.
21. **Kröner, Ekkehart** (i) *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. (ii) *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen* // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод: Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.
22. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с. *Translation: Lurie, A. I.* *Nonlinear Theory of Elasticity*: translated from the Russian by K. A. Lurie. Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 617 p.
23. **Лурье А. И.** Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с. *Translation: Lurie, A. I.* *Theory of Elasticity* (translated by A. Belyaev). Springer-Verlag, 2005. 1050 p.
24. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
25. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.

26. **Augustus Edward Hough Love.** A treatise on the mathematical theory of elasticity. Volume I. Cambridge, 1892. 354 p. Volume II. Cambridge, 1893. 327 p. 4th edition. Cambridge, 1927. Dover, 1944. 643 p. *Перевод: Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
27. **Ernst Melan, Heinz Parkus.** Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод: Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.
28. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.
29. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е издание. «Наука», 1987. 304 с.
30. **Mindlin, Raymond David and Tiersten, Harry F.** Effects of couple-stresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод: Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.
31. **Морозов Н. Ф.** Избранные двумерные задачи теории упругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 182 с.
32. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.
33. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. Издание 5-е. «Наука», 1966. 708 с.
34. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.
35. **Witold Nowacki.** Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation: Nowacki, Witold.* Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод: Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.
36. **Witold Nowacki.** Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод: Новацкий В.* Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.

37. **Witold Nowacki.** Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод: Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.
38. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е издание. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
39. **Пановко Я. Г.** Механика деформируемого твёрдого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы. «Наука», 1985. Издание 2-е. URSS, 2017. 288 с.
40. **Пановко Я. Г., Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.
41. **Пановко Я. Г., Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е издание. «Наука», 1987. 352 с.
42. **Heinz Parkus.** Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод: Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
43. **Партон В. З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.
44. **Партон В. З., Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.
45. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е издание. «Наука», 1985. 504 с.
46. **Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
47. **Понятовский В. В.** Вывод уравнений тонкостенных стержней-оболочек открытого профиля из уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования // Исследования по упругости и пластичности. Изд-во ЛГУ, 1980. Вып. 13. С. 40–48.
48. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.
49. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твёрдого тела. 2-е издание. «Наука», 1988. Издание 3-е. URSS, 2019. 712 с.

50. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод: Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.
51. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Том 2. 6-е издание. «Лань», 2004. 560 с.
52. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B.V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод: Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.
53. **Teodosiu, Cristian.** Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод: Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.
54. **Тимошенко С. П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.
55. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.
56. **Stephen P. Timoshenko and James N. Goodier.** Theory of Elasticity. 2nd edition. McGraw-Hill, 1951. 506 pages. 3rd edition. McGraw-Hill, 1970. 567 pages. *Перевод: Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. 2-е издание. «Наука», 1979. 560 с.
57. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод: Труделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.
58. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е издание. «Наука», 1975. 173 с.
59. *Перевод: Хеллан К.* Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.
60. *Перевод: Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.
61. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.
62. **Чернина В. С.** Статика тонкостенных оболочек вращения. «Наука», 1968. 456 с.
63. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.

64. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
65. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.

Колебания и волны

66. **Timoshenko, Stephen P.; Young, Donovan H.; William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод: Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
67. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е издание. «Дрофа», 2004. 592 с.
68. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
69. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.
70. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
71. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод: Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.
72. **Kolsky, Herbert.** Stress waves in solids. Oxford, Clarendon Press, 1953. 211 p. 2nd edition. Dover Publications, 2012. 224 p. *Перевод: Кольский Г.* Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.
73. **Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.
74. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
75. **Григолюк Э. И., Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.

Композиты

76. **Christensen, Richard M.** Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод: Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.

77. **Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.
78. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
79. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.
80. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.
81. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.

Метод конечных элементов

82. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.
83. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.

Механика, термодинамика, электромагнетизм

84. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew.** The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online: The Feynman Lectures on Physics. Online edition.*
85. **Goldstein, Herbert; Poole, Charles P.; Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison–Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод: Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж.* Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
86. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод: Парс Л. А.* Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.
87. **Ter Haar, Dirk.** Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод: Тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.
88. **Беляев Н. М., Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.
89. **Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.

90. **Гантмахер Ф. Р.** Лекции по аналитической механике. Издание 2-е. «Наука», 1966. 300 с.
91. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.
92. **Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е издание. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е издание. 719 с.
93. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
94. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е издание. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.
95. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е издание. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

Тензоры и тензорное исчисление

96. **McConnell, Albert Joseph.** Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод: Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
97. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод: Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.
98. **Sokolnikoff, I. S.** Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua. 2nd edition. John Wiley & Sons, 1965. 361 pages. *Перевод: Сокольников И. С.* Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). «Наука», 1971. 376 с.
99. **Борисенко А. И., Тарапов И. Е.** Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Издание 6-е. Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьковском ун-те, 1986. 216 с.
100. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Издание 3-е. «Наука», 1967. 664 с.

101. **Karel Rektorys.** Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation: Rektorys, Karel.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D.Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод: Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
102. **Washizu, Kyuichiro.** Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод: Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
103. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.
104. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Издание 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

Методы возмущений (асимптотические методы)

105. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод: Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.
106. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.
107. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-Interscience, 1973. 425 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Методы возмущений. «Мир», 1976. 456 с.
108. **Бабич В. М., Буддырев В. С.** Искусство асимптотики // Вестник ЛГУ, 1977, № 13, вып. 3, С. 5–12.
109. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.
110. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
111. **Зино И. Е., Тропш Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
112. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е издание. «Наука», 1981. 400 с.

113. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.

Другие темы математики

114. **Collatz, Lothar.** Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод: Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.
115. **Dwight, Herbert Bristol.** Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод: Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. Издание 4-е. «Наука», 1973. 228 с.
116. **Kamke, Erich.** Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод: Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. «Лань», 2003. 576 с.
117. **Korn, Granino A. and Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод: Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.
118. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. «Наука», 1971. 416 с.
119. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е издание. «Наука», 1973. 736 с.
120. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Издание 6-е. «Наука», 1974. 176 с.
121. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. 6-е издание. Изд-во МГУ, 1999. 798 с.