Vadique Myself

PHYSICS *of* ELASTIC CONTINUA

CONTENTS

chapter 8

PERTURBATION METHODS (ASYMPTOTIC METHODS)

Of approximate approaches to the analysis of nonlinear systems, perturbation methods are applied the most often.

§ 1. Asymptotic decomposition

Until now, the arguments of a function were only the coordinates and time. Dimensions of a body, elastic moduli, ranges of actions — all these parameters were considered known. All asymptotic methods are based on studying how the solution depends on parameters.

A decomposition of perturbation usually consists of the first two terms. If a problem with unknown u contains parameter a, then, assuming

$$a = a_0 + \chi a_1,$$

a solution is sought as series

$$u = u_0 + \chi u_1 + \chi^2 u_2 + \dots \tag{1.1}$$

Additional argument χ is called a formal small parameter.

A decomposition of perturbation may diverge, but at the same time it can be more useful description of the solution than a representation that converges uniformly and absolutely.

Decomposition (1.1) looks like a common power series. However, the approach within the perturbation methods is different: series are considered there as asymptotic with convergence $\chi \to 0$, and not $n \to \infty$, where n defines how many terms to hold.

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\chi), \quad \lim_{\chi \to 0} \frac{\phi - \sum\limits_{k=0}^{n} \phi_k}{\phi_n} = 0. \tag{1.2}$$

In other words, the remainder of series is a higher order infinitesimal in comparison with the last withheld term. Obviously, a power series (1.1) also converges as an asymptotic series.

But the decomposable unknowns usually also depend on the "main" arguments — on coordinates and time. The convergence for $\chi \to 0$ must be uniform across these "main" arguments — this is a requirement for effective use of asymptotic decompositions. For example

$$\sin(1+\chi)t = \sin t + \chi t \cos \chi t - \tfrac{1}{2}\chi^2 t^2 \sin \chi t + \dots$$

doesn't satisfy the requirement of uniformity, because with $t \to \infty$ subsequent terms prevail over previous ones.

Why asymptotic methods are so attractive? As example take a solution of the equation

$$f(u,\chi) = 0.$$

Substituting decomposition (1.1) into (1.2) and equating coefficients at the same degrees of χ, we get

$$\begin{gathered} f(u_0, 0) = 0, \\ \left(\partial_u f\right)_0 + u_1 \left(\partial_\chi f\right)_0 = 0, \\ \left(\partial_u f\right)_0 u_2 + \tfrac{1}{2}\left(\partial_u^2 f\right)_0 u_1^2 + \tfrac{1}{2}\left(\partial_\chi^2 f\right)_0 + \left(\partial_u \partial_\chi f\right)_0 u_1 = 0, \\ \dots \end{gathered}$$

If the problem for u_0 is uniquely solvable at the first step, then subsequent steps will give corrections $u_1, u_2, \dots$ Small corrections are barely important and u_0 is enough, but then the asymptotic analysis disappears, since formally small terms in (1.2) are just discarded. However, it happens that these corrections contain in self some important information, absent in u_0 — then they play the main role. It's worth mentioning that all corrections follow from the linear problem with the same operator $\left(\partial_u f\right)_0$.

But all non-trivial and effective solutions are obtained in other ways, non-uniqueness of the solution at the first step characterizes them. About this — in the next sections.

And yes, asymptotic methods change the initially complex formulation of the problem (1.2) to a simpler one. Essential is that this does not happen by "simple" discarding of terms, but quite correctly — equalities remain equalities. However, the convergence is not proven, so there is no complete mathematical accuracy.

In previous chapters, asymptotic problems have already arisen. The linear theory follows from the nonlinear theory thru an asymptotic decomposition by the value of load (§ **??**.**??**). The momentless theory derives (accurate to edge effects) from the moment (micropolar) theory (chapter **??**) when the "moment" stiffnesses are approaching infinity. In the thermoelasticity (chapter **??**), the use of the heat equation (**??**, § **??**.**??**) instead of the whole entire balance of energy needs to be proved by asymptotic methods.

To a certain degree the introduction of a small parameter $\chi \to 0$ is the weakness of all asymptotic approaches. A protestation like "infinitesimal parameters do not exist, all quantities are finite" is barely constructive here. The more relevant question is: what is a small parameter? Usually a problem is reformulated in "dimensionless" quantities, then that "dimensionless" parameter is taken as a small parameter χ, which turns out to be small. But another way is possible too : if it's known that some parameter ω influences the solution only a little, then, redesignating it as $\chi\omega$, do asymptotic analysis for $\chi \to 0$.

Surely, these are not the "laws" of asymptotics, but only considerations. There's no common theory of asymptotic methods, and their application is to some extent an art.

The deeper description of asymptotic methods is written in the books by Ali Hasan Nayfeh [106, 107].

§ 2. Splitting in a linear algebraic system

This simple case well illustrates asymptotic methods.

A linear system is considered

$$C_{ij}\, u_j = f_i, \;\; C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)} \tag{2.1}$$

with the matrix C_{ij} and the sets of unknowns u_j and loads f_i. The process of constructing an asymptotic solution is determined by whether the matrix $C_{ij}^{(0)}$ is singular (invertible) or not. Three cases are possible.

1.° $\det C_{ij}^{(0)} \neq 0$. Однородная задача

$$C_{ij}^{(0)} u_j = 0 \tag{2.2}$$

имеет лишь тривиальное (нулевое) решение. Матрица $C_{ij}^{(0)}$ обратима, неоднородная задача всегда однозначно реши́ма. Решение строится как

$$u_j = \dots \tag{2.3}$$

...

2.° $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

3.° $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

§ 3. Poincaré method

This method, associated with the name Jules Henri Poincaré, is widely known in the theory of nonlinear oscillations. It is intended, in particular, to determine the periodic solutions of equation

$$\ddot{u} + u = \chi f(u, \dot{u}) \tag{3.1}$$

....

§ 4. Van der Pol averaging method

Here again figures equation (3.1), but the solutions being found are not only periodic anymore. Introducing the phase plane

...

Процедура осреднения применяется во многих темах, таких как тонкие тела и композиты. Осреднение вне асимптотических методов ведёт обычно к не за́мкнутому набору уравнений. Для замыкания системы приходится добавлять некие гипотезы, убавляющие убедительность теории. Иная ситуация в асимптотике: условия разрешимости для поправочных членов с необходимостью приводят к соответствующим интегральным соотношениям.

§ 5. Coalescence of asymptotic decompositions

Основоположник метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений — Ludwig Prandtl. Рассматривая течение вязкой жидкости, он заметил, что влияние малой вязкости локализовано у края — в тонком слое на краю. Вдали́ от края жидкость ведёт себя как идеальная. Одни и те же уравнения Navier–Stokes по-разному упрощаются вдали от края и около него [...]

Метод сращивания состоит из трёх процедур: построения внешнего разложения, построения внутренних разложений и сращивания внешнего разложения с внутренними. Метод предназначен для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Вдали от края решение меняется плавно, формально малые члены можно отбросить, уравнение имеет пониженный порядок — всё это характерно для внешнего разложения. У края наоборот: решение меняется быстро, первостепенную роль играют старшие производные, хотя имеют малые коэффициенты. Но внешнее и внутреннее разложения — это разные формы одного решения, они должны быть состыкованы процедурой сращивания. Рассмотрим пример.

Задача о прогибе $u(x)$ натянутой струны с закреплёнными концами под действием равномерно распределённой нагрузки может быть поставлена так:

...

§ 6. Multiple-scale analysis (method of multiple scales)

Этот метод привлекателен, естественен и — как написано у Ali Hasan Nayfeh

...

§ 7. Equations with slowly varying parameters

Рассмотрим гармонический осциллятор, собственная частота которого медленно меняется во времени

...

§ 8. Thin bodies

Задачи теории упругости часто ставятся для тонких тел — стержней, пластин и оболочек. Таковы многие элементы конструкций, но и в природе вне человека тонкие тела встречаются довольно часто.

Решение задач упругости для тонких тел многие десятилетия основывалось на неких гипотезах о распределении решения по толщине и о порядках одних неизвестных относительно других. Построенные так теории сыграли большу́ю роль в практике инженерных расчётов. Однако, им не хватало логической стройности и убедительности, их хотелось обосновать, уточнить — а в последнее время и уничтожить (в связи́ с появлением великолепных компьютеров). Но открытие асимптотического расщепления прояснило картину: в тонком теле трёхмерная задача расщепляется на задачи меньшей размерности. Классические теории тонких тел получили и подтверждение, и развитие.

Рассмотрим задачу о кручении из ...

...

Bibliography

Ali Hasan Nayfeh's book [107] is an excellent introduction to perturbation methods (asymptotic methods).
Всё разнообразие асимптотических методов представлено в монографиях ...

LIST OF PUBLICATIONS

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Издание 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И.**, **Бобровницкий Ю. И.**, **Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** Использование МКЭ при решении контактной задачи теории упругости с переменной зоной контакта // Известия северо-кавказского научного центра высшей школы (СКНЦ ВШ). Серия естественные науки. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1984. № 1. С. 38–42.
5. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** К решению контактной задачи с помощью метода конечных элементов // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1988. С. 43–48.
6. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
7. **Вениамин И. Блох**. Теория упругости. Харьков: Издательство Харьковского Государственного Университета, 1964. 484 с.
8. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
9. **Алексей Л. Гольденвейзер**. Теория упругих тонких оболочек. 2-е издание. «Наука», 1976. 512 с. *Translation:* **Alexey L. Goldenveizer**. Theory of elastic thin shells. Pergamon Press, 1961. 658 pages.
10. **Алексей Л. Гольденвейзер**, **Виктор Б. Лидский**, **Пётр Е. Товстик**. Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 384 с.

11. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.

12. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.

13. **Александр Н. Гузь**. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: "Наукова думка", 1973. 271 с.

14. *Перевод:* **Де Вит Р.** Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.

15. **Джанелидзе Г. Ю.**, **Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.

16. **Dorin Ieşan**. Classical and generalized models of elastic rods. 2nd edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. 369 pages

17. **Владимир В. Елисеев**. Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.

18. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод:* **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.

19. **Журавлёв В. Ф.** Основы теоретической механики. 3-е издание, переработанное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 304 с.

20. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.

21. **Кац, Арнольд М.** Теория упругости. 2-е издание, стереотипное. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2002. 208 с.

22. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1 : Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B.V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод:* **Филипп Сьярле** Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.

23. **Cosserat E.** et **Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.

24. **Cottrell, Alan**. Theory of crystal dislocations. Gordon and Breach (Documents on Modern Physics), 1964. 94 p. *Перевод:* **Коттрел А.** Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.

25. **Kröner, Ekkehart** *(i)* Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. *(ii)* Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод:* **Крёнер Э.** Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.

26. **Augustus Edward Hough Love**. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Volume I. Cambridge, 1892. 354 p. Volume II. Cambridge, 1893. 327 p. 4th edition. Cambridge, 1927. Dover, 1944. 643 p. *Перевод:* **Аугустус Ляв**. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.

27. **Анатолий И. Лурье**. Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Nonlinear Theory of Elasticity: translated from the Russian by K. A. Lurie. Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 617 p.

28. **Анатолий И. Лурье**. Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Theory of Elasticity (translated by A. Belyaev). Springer-Verlag, 2005. 1050 p.

29. **Анатолий И. Лурье**. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.

30. **Анатолий И. Лурье**. Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.

31. **George E. Mase**. Schaum's outline of theory and problems of continuum mechanics (Schaum's outline series). McGraw–Hill, 1970. 221 p. *Перевод:* **Джордж Мейз**. Теория и задачи механики сплошных сред. Издание 3-е. URSS, 2010. 320 с.

32. **Ernst Melan**, **Heinz Parkus**. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод:* **Мелан Э.**, **Паркус Г.** Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.

33. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.

34. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е издание. «Наука», 1987. 304 с.

35. **Mindlin, Raymond David** and **Tiersten, Harry F.** Effects of couple-stresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод:* **Миндлин Р. Д.**, **Тирстен Г. Ф.** Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.
36. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.
37. **Witold Nowacki**. Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation:* **Nowacki, Witold**. Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод:* **Витольд Новацкий**. Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.
38. **Witold Nowacki**. Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод:* **Новацкий Витольд**. Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.
39. **Witold Nowacki**. Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод:* **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.
40. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е издание. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
41. **Пановко Я. Г.**, **Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.
42. **Пановко Я. Г.**, **Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е издание. «Наука», 1987. 352 с.
43. **Heinz Parkus**. Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод:* **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
44. **Партон Владимир З.**, **Кудрявцев Борис А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.

45. **Подстригач Я. С.**, **Бурак Я. И.**, **Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
46. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.
47. **Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant**. De la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. Extrait du tome xiv des mémoires présentés par divers savants a l'académie des sciences. Imprimerie Impériale, Paris, M DCCC LV (1855). 332 pages. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.
48. **Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant**. Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes. Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. 2me serie, tome 1, année 1856. Pages 89 à 189. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.
49. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод:* **Саусвелл Р. В.** Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.
50. **Cristian Teodosiu**. Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод:* **Теодосиу К.** Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.
51. **Тимошенко Степан П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.
52. **Тимошенко Степан П.**, **Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.
53. **Stephen P. Timoshenko** and **James N. Goodier**. Theory of Elasticity. 2nd edition. McGraw–Hill, 1951. 506 pages. 3rd edition. McGraw–Hill, 1970. 567 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Джеймс Гудьер**. Теория упругости. 2-е издание. «Наука», 1979. 560 с.

54. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод:* **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.
55. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е издание. «Наука», 1975. 173 с.
56. *Перевод:* **Циглер Г.** Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.
57. **Черны́х К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.
58. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.

Oscillations and waves

59. **Timoshenko, Stephen P.**; **Young, Donovan H.**; **William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Янг Донован Х.**, **Уильям Уивер**. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
60. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е издание. «Дрофа», 2004. 592 с.
61. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
62. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.
63. **Гринченко В. Т.**, **Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
64. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод:* **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.
65. **Kolsky, Herbert**. Stress waves in solids. Oxford, Clarendon Press, 1953. 211 p. 2nd edition. Dover Publications, 2012. 224 p. *Перевод:* **Кольский Г.** Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.
66. **Энгельбрехт Ю. К.**, **Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.
67. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.

68. **Григолюк Э. И.**, **Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.

Fracture mechanics

69. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.
70. **Керштейн И. М.**, **Клюшников В. Д.**, **Ломакин Е. В.**, **Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
71. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.
72. **Партон Владимир З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.
73. **Партон Владимир З.**, **Морозов Евгений М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е издание. «Наука», 1985. 504 с.
74. *Перевод:* **Хеллан К.** Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.
75. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.
76. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.

Composites

77. **Christensen, Richard M.** Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод:* **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.
78. **Кравчук А. С.**, **Майборода В. П.**, **Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.
79. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
80. **Бахвалов Н. С.**, **Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.
81. **Bensoussan A.**, **Lions J.-L.**, **Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.

The finite element method

82. **Зенкевич О.**, **Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.
83. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.

Mechanics, thermodynamics, electromagnetism

84. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew**. The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online:* The Feynman Lectures on Physics. Online edition.
85. **Goldstein, Herbert**; **Poole, Charles P.**; **Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison–Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод:* **Голдстейн Г.**, **Пул Ч.**, **Сафко Дж.** Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
86. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод:* **Парс Л. А.** Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.
87. **Ter Haar, Dirk**. Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод:* **Тер Хаар Д.** Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.
88. **Беляев Н. М.**, **Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.
89. **Бредов М. М.**, **Румянцев В. В.**, **Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.
90. **Феликс Р. Гантмахер** Лекции по аналитической механике. Издание 2-е. «Наука», 1966. 300 с.
91. **Ландау Л. Д.**, **Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.
92. **Лев Г. Лойцянский**, **Анатолий И. Лурье**. Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е издание. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е издание. 719 с.
93. **Анатолий И. Лурье**. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
94. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е издание. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.

95. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е издание. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

Tensors and tensor calculus

96. **McConnell, Albert Joseph**. Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод:* **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
97. **Димитриенко Ю. И.** Тензорное исчисление: Учебное пособие для вузов. М.: "Высшая школа", 2001. 575 с.
98. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Издание 3-е. «Наука», 1967. 664 с.
99. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод:* **Схоутен Я. А.** Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.
100. **Sokolnikoff, I. S.** Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua. 2nd edition. John Wiley & Sons, 1965. 361 pages. *Перевод:* **Сокольников И. С.** Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). «Наука», 1971. 376 с.

Variational methods

101. **Karel Rektorys**. Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation:* **Rektorys, Karel**. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D. Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод:* **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
102. **Washizu, Kyuichiro**. Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод:* **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
103. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.
104. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Издание 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

Perturbation methods (asymptotic methods)

105. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод:* **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.

106. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод:* **Найфэ Али Х.** Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.

107. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-VCH, 2004. 425 pages.

108. **Боголюбов Н. Н.**, **Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.

109. **Васильева А. Б.**, **Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

110. **Зино И. Е.**, **Тропп Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.

111. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е издание. «Наука», 1981. 400 с.

112. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.

Other topics of mathematics

113. **Collatz, Lothar**. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод:* **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.

114. **Dwight, Herbert Bristol**. Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод:* **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Издание 4-е. «Наука», 1973. 228 с.

115. **Kamke, Erich**. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод:* **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. «Лань», 2003. 576 с.

116. **Korn, Granino A.** and **Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод:* **Корн Г.**, **Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.

117. **Лаврентьев М. А.**, **Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е издание. «Наука», 1973. 736 с.

118. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Издание 6-е. «Наука», 1974. 176 с.