Vadique Myself

PHYSICS *of* ELASTIC CONTINUA

CONTENTS

chapter 11

SHELLS AND PLATES

§1. Surface geometry

A surface is described by a function (a morphism)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^\alpha), \;\; \alpha = 1, 2 \tag{1.1}$$

of two mutually independent variable parameters (coordinates) q^α, then $\boldsymbol{r}$ is the location vector (the radius vector) of the surface's points.

Examples

- ✓ a linear mapping is a plane $\boldsymbol{r}(a,b) = a\boldsymbol{e}_1 + b\big(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\big)$
- ✓ a helicoid $\boldsymbol{r}(u,v) = u \sin v \, \boldsymbol{e}_1 + u \cos v \, \boldsymbol{e}_2 + v\boldsymbol{e}_3$
- ✓ a cone $\boldsymbol{r}(u,v) = u \sin v \, \boldsymbol{e}_1 + u \cos v \, \boldsymbol{e}_2 + u\boldsymbol{e}_3$
- ✓ a cylinder of radius $r = \mathsf{constant}$
$$\boldsymbol{r}(u,v) = r\big(\cos u \, \boldsymbol{e}_1 + \sin u \, \boldsymbol{e}_2\big) + v\boldsymbol{e}_3$$
- ✓ a torus of revolution with radii r and R
$$\boldsymbol{r}(p,q) = \boldsymbol{e}_1\big(r\cos p + R\big)\cos q + \boldsymbol{e}_2\big(r\cos p + R\big)\sin q + \boldsymbol{e}_3 r \sin p$$
- ✓ a 2-sphere — a torus with $R = 0$
$$\boldsymbol{r}(p,q) = r\big(\cos p \cos q \, \boldsymbol{e}_1 + \cos p \sin q \, \boldsymbol{e}_2 + \sin p \, \boldsymbol{e}_3\big)$$
- ✓ a paraboloid $\boldsymbol{r}(u,v) = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + \big(u^2 + v^2\big)\boldsymbol{e}_3$ or via a cylindrical parameterization $\boldsymbol{r}(\rho,\vartheta) = \rho\cos\vartheta \, \boldsymbol{e}_1 + \rho \sin\vartheta \, \boldsymbol{e}_2 + \rho^2\boldsymbol{e}_3$ for a paraboloid of revolution.

The continuous change of the first coordinate q^1, while the second one $q^2 = u^* = \mathsf{constant}$ is "frozen", gives the coordinate line $\overset{(1)}{\boldsymbol{r}}(q^1) = \boldsymbol{r}(q^1, u^*)$. The crossing of the two coordinate lines $q^1 = v^*$ and $q^2 = w^*$ uniquely identifies the point $\boldsymbol{r}(v^*, w^*)$ of the surface.

Vectors

$$\boldsymbol{r}_{\partial\alpha} \equiv \partial_\alpha \boldsymbol{r}, \;\; \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \tag{1.2}$$

are tangent to coordinate lines. If they are linearly independent (that is $\boldsymbol{r}_{\partial 1} \times \boldsymbol{r}_{\partial 2} \neq \boldsymbol{0}$)*, they compose the local basis for representing any vector $\overset{(2)}{\boldsymbol{v}}$ in the tangent plane as linear combination

$$\begin{gathered}\overset{(2)}{\boldsymbol{v}} = v^{\alpha} \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} = v_{\alpha} \boldsymbol{r}^{\alpha}, \\ v^{\alpha} = \overset{(2)}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{r}^{\alpha}, \;\; v_{\alpha} = \overset{(2)}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial\alpha}, \;\; \boldsymbol{r}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} .\end{gathered} \tag{1.3}$$

Here $\boldsymbol{r}^{\alpha}$ is the local reciprocal basis in the (co)tangent plane.

The dield of unit normal vectors $\boldsymbol{n}(q^{\alpha})$ adds at every point of the surface $(\forall \boldsymbol{r}(q^{\alpha}) \Leftrightarrow \forall q^{\alpha})$ the unit** normal

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_{\partial 1} \times \boldsymbol{r}_{\partial 2}}{\left\| \boldsymbol{r}_{\partial 1} \times \boldsymbol{r}_{\partial 2} \right\|} . \tag{1.4}$$

At non-singular points, three vectors $\boldsymbol{r}_{\partial 1}$, $\boldsymbol{r}_{\partial 2}$ and $\boldsymbol{n}$ can be taken as a basis for the entire three-dimensional space, giving decomposition for any vector and any tensor, for example $\overset{(3)}{\boldsymbol{u}} = u^{\alpha} \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} + u^{n} \boldsymbol{n}$.

$u^{n} = u_{n}$

for a 2-sphere of unit radius

$$\boldsymbol{r}_{\partial p} \times \boldsymbol{r}_{\partial q} = -\det \begin{bmatrix} -\sin p \cos q & \boldsymbol{e}_1 & -\cos p \sin q \\ -\sin p \sin q & \boldsymbol{e}_2 & \cos p \cos q \\ \cos p & \boldsymbol{e}_3 & 0 \end{bmatrix} = \ldots$$

The bivalent unit (“metric”) tensors, $\boldsymbol{E}$ in space and $\boldsymbol{I}$ in the tangent plane

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}, \;\; \boldsymbol{I} \equiv \boldsymbol{E} - \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} \boldsymbol{r}^{\alpha} = \boldsymbol{r}^{\alpha} \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} .$$

* Sometimes somewhere — at the so-called singular points — it’s not so. As example, for a 2-sphere of unit radius

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(p,q) &= \cos p \cos q \, \boldsymbol{e}_1 + \cos p \sin q \, \boldsymbol{e}_2 + \sin p \, \boldsymbol{e}_3 , \\ \boldsymbol{r}_{\partial p} = \partial_p \boldsymbol{r} &= -\sin p \cos q \, \boldsymbol{e}_1 - \sin p \sin q \, \boldsymbol{e}_2 + \cos p \, \boldsymbol{e}_3 , \\ \boldsymbol{r}_{\partial q} = \partial_q \boldsymbol{r} &= -\cos p \sin q \, \boldsymbol{e}_1 + \cos p \cos q \, \boldsymbol{e}_2 + 0 \, \boldsymbol{e}_3 , \end{aligned}$$

a pole $p = \pm\frac{\pi}{2}$ is a singular point: $\boldsymbol{r}_{\partial q}\big|_{p=\pm\pi/2} = \boldsymbol{0}$.

** $\|\boldsymbol{a}\| \equiv \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ is the length of vector $\boldsymbol{a}$.

Representation of the location vector $\overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}$ for any point in space at distance h from the surface $(\partial_\alpha h = 0)$

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}(q^\alpha, h) = \boldsymbol{r}(q^\alpha) + h\boldsymbol{n}(q^\alpha) \tag{1.5}$$

gives the local basis in the tangent space

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}_{\partial n} = \boldsymbol{n} = \overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}{}^{n},$$
$$\overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}_{\partial\alpha} \equiv \partial_\alpha \overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}} = \partial_\alpha \boldsymbol{r} + h\partial_\alpha \boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} + h\boldsymbol{r}_{\partial\alpha} \cdot \boldsymbol{r}^\beta \partial_\beta \boldsymbol{n}.$$

...

differential operator "nabla"

in space $\boldsymbol{\nabla} \equiv \overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}{}^{i}\partial_i$

in the tangent plane $\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}} \equiv \boldsymbol{r}^\alpha \partial_\alpha$

...

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}_{\partial\alpha} = \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} \cdot \left(\boldsymbol{r}^\beta \boldsymbol{r}_{\partial\beta} + h\boldsymbol{r}^\beta \partial_\beta \boldsymbol{n}\right) = \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} \cdot \left(\boldsymbol{I} + h\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{n}\right) = \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} \cdot \left(\boldsymbol{I} - {}^{2}\overset{(2)}{\boldsymbol{c}}h\right)$$

The two-coordinate bivalent tensor

$${}^{2}\overset{(2)}{\boldsymbol{c}} \equiv -\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}^\alpha \partial_\alpha \boldsymbol{n} \tag{1.6}$$

characterizes the surface's curvature.

....

cobasis $\overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}{}^{\alpha} \cdot \overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}_{\partial\beta} = \delta^\alpha_\beta$, $\overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}{}^{i} \cdot \overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}_{\partial j} = \delta^i_j$

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}{}^{\alpha} = \left(\boldsymbol{I} + h\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{n}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{r}^\alpha, \quad \overset{(3)}{\boldsymbol{\mathcal{r}}}{}^{n} = \boldsymbol{n}$$

relation between $\boldsymbol{\nabla}$ and $\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}}$

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\boldsymbol{I} + h\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{n}\right)^{-1} \cdot \overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}} + \boldsymbol{n}\partial_n$$

...

§ 2. The model of a shell

Having the models of three-dimensional micropolar continuum (chapter **??**) and one-dimensional rods (chapter **??**, chapter **??**), the mechanics of two-dimensional shells is pretty easy to describe.

As a geometrical object, the shell is defined by its middle surface and thickness $\hbar$, thus in (1.5)

$$-{}^{\hbar}\!/_{2} \leq h \leq {}^{\hbar}\!/_{2}\,.$$

...

§ 3. The balance of forces and moments for a shell

When $\delta \boldsymbol{u} =$ **constant** and $\delta \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ (a translation) ...

....

§ 4. Shells: The relations of elasticity

Локальное соотношение (**??**) после вывода уравнений баланса ...

...

§ 5. The classical theory of shells

Вышеизложенная теория (напоминающая балку Тимошенко и континуумы Cosserat) рассматривает rotations $\boldsymbol{\varphi}$ независимо от displacements $\boldsymbol{u}$. Но опыт подсказывает, что материальный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остаётся таким и после деформации (кинематическая гипотеза Kirchhoff'а). В классической теории Kirchhoff'а, Арона и Love'а field $\boldsymbol{\varphi}$ выражается через $\boldsymbol{u}$, что в конце концов даёт свести всё к одному векторному уравнению для $\boldsymbol{u}$.

Предположим, что в основе классической теории лежит внутренняя связь

...

§ 6. Shells: A plate

Plate is the simplest kind of shell. Единичный перпендикуляр $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$ направлен по декартовой оси z, в качестве координат ...

...

§ 7. Shells: Approach with Lagrange multipliers

Уязвимым местом этого изложения теории оболочек являются формулы

...

§ 8. Cylindrical shell

Существуют разные уравнения цилиндрической оболочки. Приводятся громоздкие выкладки с отбрасыванием некоторых малых членов, и не всегда ясно, какие именно члены действительно можно отбросить.

Предлагаемая читателю теория оболочек иного свойства: лишних членов нет, все уравнения записаны в компактной тензорной форме — остаётся лишь грамотно действовать с компонентами тензоров. В качестве иллюстрации рассмотрим цилиндрическую оболочку.

В декартовой системе

...

§ 9. Shells: Common theorems

Пусть край закреплён

...

§ 10. Shells: Boundary conditions

В рамках рассматриваемого прямого подхода к оболочкам как материальным поверхностям наиболее надёжным способом вывода граничных условий представляется вариационный. Исходим из вариационного уравнения:

...

§ 11. Shells of revolution

Surface of revolution (reference surface of shell of revolution) is created by rotating a plane curve (the meridian, the generatrix) about a straight line in the plane of curve (an axis of rotation).

Разберёмся в геометрии поверхности вращения (рисунок). Меридиан можно задать зависимостью декартовых координат

...

§ 12. Momentless theory of shells

В отличие от пластины, оболочка способна выдерживать нормальную распределённую нагрузку без появления внутренних моментов. В безмоментном состоянии напряжения равномерно распределены по толщине оболочки, безмоментные оболочечные конструкции можно считать оптимально спроектированными.

Уравнения безмоментной теории

...

§ 13. Shells: Nonlinear momentless theory

Вышеизложенную безмоментную теорию оболочек возможно просто и корректно обобщить на нелинейную постановку. Материальная поверхность состоит из частиц

...

§ 14. Shells: Other variant of classical theory

Выше при изложении моментной теории оболочек частицы материальной поверхности считались твёрдыми телами с шестью степенями свободы

...

§ 15. Plates: Overall concepts

Пластиной называется тонкое трёхмерное тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями и боковой цилиндрической поверхностью (?? рисунок ??). В декартовых координатах x_1, x_2, z поперечная координата ...

...

В теории пластин рассматриваются двумерные задачи. Переход от трёхмерной задачи наиболее достоверен на пути асимптотики. Но логическая стройность и эффективность присуща и вариационному подходу, основанному на аппроксимации по толщине решения трёхмерной вариационной задачи. Самое же простое корректное изложение теории пластин характерно для прямого подхода к ним как материальным плоскостям.

...

§ 16. Timoshenko-like model of a plate (direct approach)

Пластина рассматривается как материальная плоскость, частицы которой

...

§ 17. Kirchhoff's classical theory of plates

Принимается внутренняя связь

...

§ 18. Plates: Asymptotic matching of two-dimensional models

При малой толщине из теории типа Тимошенко следует классическая теория. Толщина $\mathscr{h}$ определяется отношением жёсткостей. Перепишем

...

§ 19. Plates: Variational transition from the three-dimensional model

Using the variational principles by Lagrange or by Hellinger and Reissner с аппроксимацией решения по толщине, можно получить двумерные вариационные формулировки проблем. Из этих вариационных принципов вытекают и соотношения внутри области, and the naturalboundary conditions.

For example, here is the model of the Timoshenko type with the approximation of displacements

...

...

The variational transitions can be easily generalized for the cases of the temperature deformations, the inhomogeneity (heterogeneity) and anisotropy материала, the dynamics. The advantage of the Hellinger–Reissner principle состоит в явном представлении напряжений. Зато принцип Лагранжа примени́м and к нелинейным задачам (in the chapter **??** описана трёхмерная постановка).

§ 20. Plates: Splitting of three-dimensional bending problem

Двумерная классическая теория изгиба пластин легко выводится из трёхмерной постановки с малым параметром. Представив радиус-вектор в объёме

...

§ 21. Circular plates

В качестве иллюстрации рассмотрим широко представленный в литературе вопрос об уравнениях теории Kirchhoff'а в полярных координатах.

...

§ 22. Plates: Plane stress

Это вторая из двух задач, о которых говорилось в § 15. Силы

...

Bibliography

Теория оболочек изложена в монографиях А. Л. Гольденвейзера [9], В. В. Новожилова [43], А. И. Лурье [32], В. С. Черниной [?] и ряде других. Достоинства этих книг перекрывают неразвитость формального аппарата. Переход от трёхмерной модели оболочки к двумерной рассмотрен у ...

...

Техническая теория изгиба пластин изложена ...

...

LIST OF PUBLICATIONS

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Издание 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И.**, **Бобровницкий Ю. И.**, **Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** Использование МКЭ при решении контактной задачи теории упругости с переменной зоной контакта // Известия северо-кавказского научного центра высшей школы (СКНЦ ВШ). Серия естественные науки. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1984. № 1. С. 38–42.
5. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** К решению контактной задачи с помощью метода конечных элементов // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1988. С. 43–48.
6. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
7. **Вениамин И. Блох**. Теория упругости. Харьков: Издательство Харьковского Государственного Университета, 1964. 484 с.
8. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
9. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. «Наука», 1976. 512 с.
10. **Гольденвейзер А. Л.**, **Лидский В. Б.**, **Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 383 с.
11. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.

12. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.
13. **Александр Н. Гузь**. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: "Наукова думка", 1973. 271 с.
14. *Перевод:* **Де Вит Р.** Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.
15. **Джанелидзе Г. Ю.**, **Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.
16. **Димитриенко Ю. И.** Тензорное исчисление: Учебное пособие для вузов. М.: "Высшая школа", 2001. 575 с.
17. **Dorin Ieşan**. Classical and generalized models of elastic rods. 2nd edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. 369 pages
18. **Владимир В. Елисеев**. Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.
19. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод:* **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.
20. **Журавлёв В. Ф.** Основы теоретической механики. 3-е издание, переработанное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 304 с.
21. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.
22. **Кац, Арнольд М.** Теория упругости. 2-е издание, стереотипное. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2002. 208 с.
23. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.
24. **Керштейн И. М.**, **Клюшников В. Д.**, **Ломакин Е. В.**, **Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
25. **Cosserat E.** et **Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
26. **Cottrell, Alan**. Theory of crystal dislocations. Gordon and Breach (Documents on Modern Physics), 1964. 94 p. *Перевод:* **Коттрел А.** Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.

27. **Kröner, Ekkehart** *(i)* Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. *(ii)* Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод:* **Крёнер Э.** Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.
28. **Augustus Edward Hough Love**. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Volume I. Cambridge, 1892. 354 p. Volume II. Cambridge, 1893. 327 p. 4th edition. Cambridge, 1927. Dover, 1944. 643 p. *Перевод:* **Аугустус Ляв** Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
29. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Nonlinear Theory of Elasticity: translated from the Russian by K. A. Lurie. Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 617 p.
30. **Лурье А. И.** Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Theory of Elasticity (translated by A. Belyaev). Springer-Verlag, 2005. 1050 p.
31. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
32. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
33. **George E. Mase**. Schaum's outline of theory and problems of continuum mechanics (Schaum's outline series). McGraw–Hill, 1970. 221 p. *Перевод:* **Джордж Мейз**. Теория и задачи механики сплошных сред. Издание 3-е. URSS, 2010. 320 с.
34. **Ernst Melan**, **Heinz Parkus**. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод:* **Мелан Э.**, **Паркус Г.** Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.
35. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.
36. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е издание. «Наука», 1987. 304 с.

37. **Mindlin, Raymond David** and **Tiersten, Harry F.** Effects of couple-stresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод:* **Миндлин Р. Д.**, **Тирстен Г. Ф.** Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.

38. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.

39. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.

40. **Witold Nowacki**. Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation:* **Nowacki, Witold**. Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод:* **Витольд Новацкий**. Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.

41. **Witold Nowacki**. Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод:* **Новацкий Витольд**. Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.

42. **Witold Nowacki**. Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод:* **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.

43. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е издание. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

44. **Пановко Я. Г.**, **Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.

45. **Пановко Я. Г.**, **Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е издание. «Наука», 1987. 352 с.

46. **Heinz Parkus**. Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод:* **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.

47. **Партон В. З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.

48. **Партон В. З.**, **Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.

49. **Партон В. З.**, **Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е издание. «Наука», 1985. 504 с.

50. **Подстригач Я. С.**, **Бурак Я. И.**, **Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.

51. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.

52. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод:* **Саусвелл Р. В.** Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.

53. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Том 2. 6-е издание. «Лань», 2004. 560 с.

54. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B. V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод:* **Филипп Сьярле** Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.

55. **Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant**. Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. Memoires presentes par divers savants a l'Academie des scienees, t. 14, année 1856. 327 pages. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.

56. **Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant**. Mémoire sur la flexion des prismes .... Journal de mathematiques pures et appliquees, publie par J. Liouville. 2me serie, t. 1, année 1856. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.

57. **Cristian Teodosiu**. Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод:* **Теодосиу К.** Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.

58. **Тимошенко Степан П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.

59. **Тимошенко Степан П.**, **Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.

60. **Stephen P. Timoshenko** and **James N. Goodier**. Theory of Elasticity. 2nd edition. McGraw–Hill, 1951. 506 pages. 3rd edition. McGraw–Hill, 1970. 567 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Джеймс Гудьер**. Теория упругости. 2-е издание. «Наука», 1979. 560 с.

61. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод:* **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.

62. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е издание. «Наука», 1975. 173 с.

63. *Перевод:* **Хеллан К.** Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.

64. *Перевод:* **Циглер Г.** Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.

65. **Черепанов Г. П.**. Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.

66. **Черны́х К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.

67. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.

Oscillations and waves

68. **Timoshenko, Stephen P.**; **Young, Donovan H.**; **William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Янг Донован Х.**, **Уильям Уивер**. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

69. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е издание. «Дрофа», 2004. 592 с.

70. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

71. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.

72. **Гринченко В. Т.**, **Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.

73. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод:* **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.

74. **Kolsky, Herbert**. Stress waves in solids. Oxford, Clarendon Press, 1953. 211 p. 2nd edition. Dover Publications, 2012. 224 p. *Перевод:* **Кольский Г.** Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.

75. **Энгельбрехт Ю. К.**, **Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.

76. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.

77. **Григолюк Э. И.**, **Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.

Composites

78. **Christensen, Richard M.** Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод:* **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.

79. **Кравчук А. С.**, **Майборода В. П.**, **Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.

80. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.

81. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.

82. **Бахвалов Н. С.**, **Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.

83. **Bensoussan A.**, **Lions J.-L.**, **Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.

The finite element method

84. **Зенкевич О.**, **Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.

85. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.

Mechanics, thermodynamics, electromagnetism

86. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew**. The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online:* The Feynman Lectures on Physics. Online edition.
87. **Goldstein, Herbert**; **Poole, Charles P.**; **Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison–Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод:* **Голдстейн Г.**, **Пул Ч.**, **Сафко Дж.** Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
88. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод:* **Парс Л. А.** Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.
89. **Ter Haar, Dirk**. Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод:* **Тер Хаар Д.** Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.
90. **Беляев Н. М.**, **Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.
91. **Бредов М. М.**, **Румянцев В. В.**, **Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.
92. **Феликс Р. Гантмахер** Лекции по аналитической механике. Издание 2-е. «Наука», 1966. 300 с.
93. **Ландау Л. Д.**, **Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.
94. **Лойцянский Л. Г.**, **Лурье А. И.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е издание. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е издание. 719 с.
95. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
96. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е издание. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.
97. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е издание. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

Tensors and tensor calculus

98. **McConnell, Albert Joseph**. Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод:* **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

99. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод:* **Схоутен Я. А.** Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.
100. **Sokolnikoff, I. S.** Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua. 2nd edition. John Wiley & Sons, 1965. 361 pages. *Перевод:* **Сокольников И. С.** Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). «Наука», 1971. 376 с.
101. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Издание 3-е. «Наука», 1967. 664 с.

Variational methods

102. **Karel Rektorys**. Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation:* **Rektorys, Karel**. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D. Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод:* **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
103. **Washizu, Kyuichiro**. Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод:* **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
104. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.
105. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Издание 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

Perturbation methods (asymptotic methods)

106. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод:* **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.
107. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод:* **Найфэ Али Х.** Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.
108. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-VCH, 2004. 425 pages.
109. **Боголюбов Н. Н.**, **Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.

110. **Васильева А. Б.**, **Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

111. **Зино И. Е.**, **Тропп Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.

112. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е издание. «Наука», 1981. 400 с.

113. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.

Other topics of mathematics

114. **Collatz, Lothar**. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод:* **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.

115. **Dwight, Herbert Bristol**. Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод:* **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Издание 4-е. «Наука», 1973. 228 с.

116. **Kamke, Erich**. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод:* **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. «Лань», 2003. 576 с.

117. **Korn, Granino A.** and **Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод:* **Корн Г.**, **Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.

118. **Лаврентьев М. А.**, **Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е издание. «Наука», 1973. 736 с.

119. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Издание 6-е. «Наука», 1974. 176 с.