

Vadique Myself

# PHYSICS *of* ELASTIC CONTINUA

© MMXIX-MMXX *Vadique*



## WHAT IS THIS BOOK ABOUT?

In this book, all models of an elastic continuum are presented: non-linear and linear, micropolar and classical momentless; three-dimensional, two-dimensional (shells and plates), one-dimensional (rods, including thin-walled ones). Fundamentals of dynamics — oscillations, waves and stability — are explained. For thermoelasticity and magnetoelasticity, the summary of theories of thermodynamics and electrodynamics is given. Theories of defects and fractures are described. Approaches to modeling inhomogeneous materials — composites — are shown.

The book is written using compact and elegant direct indexless tensor notation, operating with invariant objects — tensors. The mathematical apparatus for interpreting direct tensor relations is contained in the first chapter.

*[github.com/VadiqueMe/PhysicsOfElasticContinua](https://github.com/VadiqueMe/PhysicsOfElasticContinua)*



# CONTENTS

<i>Chapter 1</i>	<b>Elements of tensor calculus</b>	<b>1</b>
§ 1.	Vector	1
§ 2.	Tensor and its components	4
§ 3.	Operations with tensors	6
§ 4.	Polyadic representation (decomposition)	8
§ 5.	Matrices, permutations and determinants	10
§ 6.	Cross product and Levi-Civita tensor	12
§ 7.	Symmetric and antisymmetric tensors	18
§ 8.	Eigenvectors and eigenvalues of tensor	20
§ 9.	Rotation tensor	22
§ 10.	Variations	28
§ 11.	Polar decomposition	29
§ 12.	Tensors in oblique basis	31
§ 13.	Tensor functions	37
§ 14.	Tensor fields. Spatial differentiation	38
§ 15.	Integral theorems	43
§ 16.	Curvature tensors	46
<i>Chapter 2</i>	<b>Fundamentals of classical generic mechanics</b>	<b>50</b>
§ 1.	Discrete collection of particles	50
§ 2.	Absolutely rigid undeformable solid body	53
§ 3.	Principle of virtual work	58
§ 4.	Balance of momentum, rotational momentum, and energy	61
§ 5.	Hamilton's principle and Lagrange's equations	62
§ 6.	Statics	64

§ 7. Mechanics of relative motion . . . . .	67
§ 8. Small oscillations (vibrations) . . . . .	68
<b>Chapter 3 Nonlinear elastic momentless continuum</b>	<b>70</b>
§ 1. Continuum. Two descriptions of processes . . . . .	70
§ 2. Motion gradient . . . . .	74
§ 3. Measures (tensors) of deformation . . . . .	75
§ 4. Velocity field . . . . .	80
§ 5. Area vector. Surface change . . . . .	82
§ 6. Forces in continuum. Cauchy stress tensor . . . . .	82
§ 7. Balance of momentum and rotational momentum . . . . .	84
§ 8. Eigenvalues of Cauchy stress tensor . . . . .	85
§ 9. Principle of virtual work (without Lagrange multipliers) . . . . .	86
§ 10. Constitutive relations of elasticity . . . . .	88
§ 11. Piola–Kirchhoff stress tensors and other measures of stress . . . . .	90
§ 12. Variation of present configuration . . . . .	95
§ 13. Internal constraints . . . . .	95
§ 14. Hollow sphere under pressure . . . . .	96
§ 15. Stresses as Lagrange multipliers . . . . .	97
<b>Chapter 4 Classical linear elasticity</b>	<b>99</b>
§ 1. Complete set of equations . . . . .	99
§ 2. Uniqueness of the solution in dynamics . . . . .	101
§ 3. Hooke’s law . . . . .	103
§ 4. Theorems of statics . . . . .	106
§ 5. Equations for displacements . . . . .	110
§ 6. Concentrated force in an infinite medium . . . . .	110
§ 7. Finding displacements by deformations . . . . .	111
§ 8. Equations for stresses . . . . .	112
§ 9. Principle of minimum potential energy . . . . .	112
§ 10. Principle of minimum complementary energy . . . . .	115
§ 11. Mixed principles of stationarity . . . . .	115
§ 12. Antiplane shear . . . . .	116
§ 13. Twisting of rods . . . . .	117

§ 14. Plane deformation .....	118
<b>Chapter 5 Micropolar three-dimensional continuum</b>	<b>119</b>
§ 1. Introduction to linear micropolar theory .....	119
§ 2. Relations of elasticity .....	123
§ 3. Compatibility equations .....	125
§ 4. Theorems of statics .....	125
§ 5. Cosserat pseudocontinuum .....	125
§ 6. Plane deformation .....	126
§ 7. Nonlinear theory .....	126
§ 8. Nonlinear model with constrained rotation .....	128
<b>Chapter 6 Thermoelasticity</b>	<b>130</b>
§ 1. First law of thermodynamics .....	130
§ 2. Second law .....	132
§ 3. Constitutive equations .....	134
§ 4. Heat equation .....	134
§ 5. Linear thermoelasticity .....	135
§ 6. Equations for displacements .....	135
§ 7. Thermal stress .....	135
§ 8. Variational formulations .....	135
<b>Chapter 7 Magnetoelasticity</b>	<b>137</b>
§ 1. Electromagnetic field .....	137
§ 2. Electromagnetic waves .....	140
§ 3. Electrostatics .....	142
§ 4. Dielectrics .....	142
§ 5. Magnetostatics .....	142
§ 6. Magnetics .....	143
§ 7. Magnetic rigidity .....	143
<b>Chapter 8 Perturbation methods (asymptotic methods)</b>	<b>146</b>
§ 1. Asymptotic decompositions .....	146
§ 2. Splitting in a linear algebraic system .....	146

§ 3. Poincaré method .....	147
§ 4. Van der Pol averaging method .....	147
§ 5. Coalescence of asymptotic decompositions .....	148
§ 6. Multiple-scale analysis (method of multiple scales) .....	148
§ 7. Equations with slowly varying parameters .....	148
§ 8. Thin bodies .....	148
<b>Chapter 9 Rods</b> .....	<b>150</b>
§ 1. Initial concepts .....	150
§ 2. Kinematics of Cosserat lines .....	154
§ 3. Balance of forces and moments .....	155
§ 4. Principle of virtual work and consequences .....	155
§ 5. Classical Kirchhoff's model .....	156
§ 6. Euler's problem .....	156
§ 7. Variational equations .....	156
§ 8. Non-shear model with (ex)tension .....	156
§ 9. Mechanics of flexible thread .....	157
§ 10. Linear theory .....	157
§ 11. Case of small thickness .....	157
§ 12. Saint-Venant's problem .....	158
§ 13. Finding stiffness by energy .....	158
§ 14. Variational method of building one-dimensional model .....	159
§ 15. Asymptotic splitting of three-dimensional problem .....	160
§ 16. Thermal deformation and stress .....	161
<b>Chapter 10 Thin-walled rods</b> .....	<b>162</b>
§ 1. Variational approach .....	162
§ 2. Equations with small parameter .....	162
§ 3. First step of the asymptotic procedure .....	162
§ 4. Second step .....	163
§ 5. Third step .....	163
§ 6. Fourth step .....	164
§ 7. Displacements .....	164
§ 8. Results of asymptotic analysis .....	164



<i>Chapter 11</i>	<b>Shells and plates</b>	<b>166</b>
§ 1.	Surface geometry	166
§ 2.	Model of a shell	168
§ 3.	Balance of forces and moments for a shell	168
§ 4.	Shells: Relations of elasticity	169
§ 5.	Classical theory of shells	169
§ 6.	Shells: A plate	169
§ 7.	Shells: Approach with Lagrange multipliers	169
§ 8.	Cylindrical shell	170
§ 9.	Shells: Common theorems	170
§ 10.	Shells: Boundary conditions	170
§ 11.	Shells of revolution	170
§ 12.	Momentless theory of shells	171
§ 13.	Shells: Nonlinear momentless theory	171
§ 14.	Shells: Other variant of classical theory	171
§ 15.	Plates: Overall concepts	171
§ 16.	Timoshenko-like model of a plate (direct approach)	172
§ 17.	Kirchhoff's classical theory of plates	172
§ 18.	Plates: Asymptotic matching of two-dimensional models	172
§ 19.	Plates: Variational transition from three-dimensional model	172
§ 20.	Plates: Splitting of three-dimensional bending problem	173
§ 21.	Circular plates	173
§ 22.	Plates: Plane stress	173
<i>Chapter 12</i>	<b>Oscillations and waves</b>	<b>175</b>
§ 1.	Vibrations of a three-dimensional body	175
§ 2.	Vibrations of a rod	176
§ 3.	Small perturbations of parameters	176
§ 4.	Vibrations of a shell	176
§ 5.	Waves in an elastic continuum	176
§ 6.	Waves in a rod	177
§ 7.	Nonlinear oscillations	177

<i>Chapter 13</i>	<b>Stability</b>	<b>178</b>
§ 1.	Various approaches to the problem of stability	178
§ 2.	Classical problems with rods	179
§ 3.	“Tracking” loads	179
§ 4.	The role of additional pliabilities	179
§ 5.	Variational formulations	179
§ 6.	Nonconservative problems	180
§ 7.	Case of multiple roots	180
<i>Chapter 14</i>	<b>Defects</b>	<b>181</b>
§ 1.	Volterra dislocations	181
§ 2.	Straight-line dislocations	181
§ 3.	Action of stress field on dislocation	181
§ 4.	About movement of dislocations	182
§ 5.	Point defects	182
§ 6.	Force acting on point defect	182
§ 7.	Continuously distributed dislocations	182
§ 8.	Stress during winding of coil	182
<i>Chapter 15</i>	<b>Fractures</b>	<b>184</b>
§ 1.	Traditional criteria of toughness	184
§ 2.	Antiplane deformation of continuum with a crack	185
§ 3.	Crack in plane deformation	185
§ 4.	Crack-driving force	185
§ 5.	Criterion of crack growth	186
§ 6.	J-integral	186
§ 7.	Stress intensity factors	186
§ 8.	Barenblatt’s model	186
§ 9.	Deformational criterion	187
§ 10.	Growth of cracks	187
§ 11.	Elastic field ahead of a moving crack	187
§ 12.	Balance of energy for a moving crack	188

<i>Chapter 16</i>	<b>Composites</b>	<b>189</b>
§ 1.	Introductory thoughts . . . . .	189
§ 2.	Effective fields . . . . .	190
§ 3.	Boundary value problems for representative volume . . . . .	190
§ 4.	Hill's fork . . . . .	190
§ 5.	Eshelby formulas . . . . .	191
§ 6.	Effective moduli for material with spherical inclusions . . . . .	191
§ 7.	Self-consistent method . . . . .	191
§ 8.	Hashin–Shtrikman principle . . . . .	192
<i>Chapter 17</i>	<b>Periodic composites</b>	<b>193</b>
§ 1.	One-dimensional problem . . . . .	193
§ 2.	Three-dimensional continuum . . . . .	193
§ 3.	Fibrous structure . . . . .	193
§ 4.	Statics of a periodic rod . . . . .	193
	<b>List of referenced publications</b>	<b>194</b>



# chapter 1

## ELEMENTS OF TENSOR CALCULUS

Mention of tensors may scare away the reader, commonly avoiding needless complications. Don't be afraid: tensors are used just because of their wonderful property of invariance — independence from coordinate systems.

### §1. Vector

**I** propose to begin familiarizing with tensors via memoirs about such a phenomenon as a vector.

Here it is — vector  $\mathbf{v}$ . It is pretty well characterized by its length (modulus, magnitude) and its direction in space. It objectively exists by itself, independent of methods and units of measurements of both lengths and directions.

Introduce rectangular (“cartesian”) coordinates by picking some three mutually perpendicular unit vectors  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  as a basis for measurements. Within such a system, “ $\cdot$ ”-products of basis vectors are equal to the Kronecker delta:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

for any “orthonormal” basis.

Decomposing vector  $\mathbf{v}$  in orthonormal basis  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), we get coefficients  $v_i$  — components of vector  $\mathbf{v}$  in that basis (fig. 1)

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \equiv \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i \equiv v_i \mathbf{e}_i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.1)$$

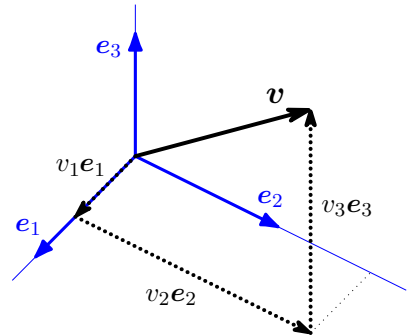


figure 1

Here and hereinafter, the Einstein's summation convention is accepted: an index repeated twice (and no more than twice) in a single term implies summation over this index. And a non-repeating index is called “free”, it is identical in all parts of the equation. These are examples:

$$\sigma = \tau_{ii}, \quad p_j = n_i \tau_{ij}, \quad m_i = e_{ijk} x_j f_k, \quad a_i = \lambda b_i + \mu c_i.$$

(But equations  $a = b_{kkk}$ ,  $c = f_i + g_k$ ,  $a_{ij} = k_i \gamma_{ij}$  are incorrect.)

Having components of a vector in an orthonormal basis, the length of this vector is retrieved by the “Πυθαγόρας’ equation”

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i \cdot v_j \mathbf{e}_j = v_i \delta_{ij} v_j = v_i v_i, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_i v_i}. \quad (1.2)$$

The direction of a vector in space is measured by three angles (cosines of angles) between this vector and each of basis ones:

$$\cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{v_i}{\sqrt{v_j v_j}} \Leftrightarrow \underbrace{v_i}_{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i} = \|\mathbf{v}\| \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i). \quad (1.3)$$

The length (1.2) and the direction in space (1.3) — measurable by means of the trio of basic vectors — describe a vector, and every vector possesses these properties\*. However, this is not enough (“not sufficient” in jargon of math books) for vector

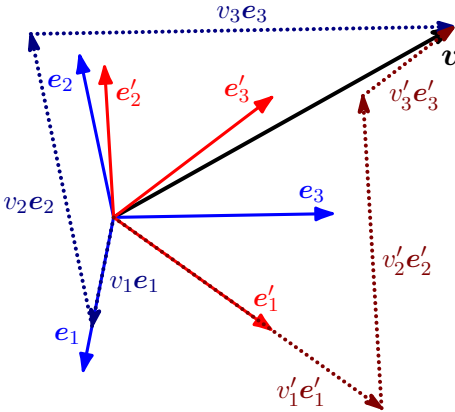


figure 2

A vector is not just a collection of components in some basis. Vector is *invariant*, it doesn't depend on any basis of any coordinate system.

Decomposition of the same vector  $\mathbf{v}$  in two cartesian systems with basis unit vectors  $\mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{e}'_i$  (fig. 2) gives

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v'_i \mathbf{e}'_i,$$

where

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = v'_k \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i,$$

$$v'_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_i = v_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i.$$

Appeared two-index objects  $o_{k'i} \equiv \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i$  and  $o_{ki'} \equiv \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i$  are called “matrices of cosines” or “rotation matrices”.

\* And what is direction of the null vector  $\mathbf{0}$  with length  $\|\mathbf{0}\| = 0$ ?

The “ $\bullet$ ”-product (inner product, dot product) of two vectors is commutative — that is, swapping multipliers doesn’t change the result. Thus

$$\begin{aligned} o_{k'i} &= \mathbf{e}'_k \bullet \mathbf{e}_i = \cos \angle(\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}_i) = \cos \angle(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_k) = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}'_k = o_{ik'}, \\ o_{ki'} &= \mathbf{e}_k \bullet \mathbf{e}'_i = \cos \angle(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}'_i) = \cos \angle(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}'_i \bullet \mathbf{e}_k = o_{i'k}. \end{aligned}$$

Components of the same vector  $\mathbf{v}$  in an “old” and a “new” — rotated — orthonormal bases, converting to each other:

$$v_i = v'_{i'} o_{ki'}, \quad v'_{i'} = v_k o_{ki'}. \quad (1.4)$$

At the same time, orthonormal basis vectors of “old” and “new” — rotated — rectangular coordinates are connected via the matrix of cosines as

$$\mathbf{e}'_i = o_{i'k} \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{e}'_i o_{i'k} = o_{ki'} \mathbf{e}'_i. \quad (1.5)$$

...

$$(1.5) \Rightarrow \delta_{kj} = \mathbf{e}_k \bullet \mathbf{e}_j = o_{ki'} \mathbf{e}'_i \bullet \mathbf{e}_j = o_{ki'} o_{i'j}$$

The matrix of cosines is orthogonal, meaning that it inverses with “transposing” (swapping letters of indices)\*:

$$o_{i'k} o_{j'k} = o_{k'i} o_{k'j} = \delta_{ij} \quad (1.6)$$

(proof:  $\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \bullet \mathbf{e}'_j = o_{i'k} \mathbf{e}_k \bullet o_{j'n} \mathbf{e}_n = o_{i'k} o_{j'n} \delta_{kn} = o_{i'k} o_{j'k}$ ).

Multiplying an orthogonal matrix by components of any vector retains the length of this vector:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = v'_i v'_i = o_{i'k} v_k o_{i'n} v_n = v_n v_n$$

— this conclusion **leans on** (1.6).

Orthogonal transformation of vector components

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{e}'_i = v_k \mathbf{e}_k \bullet \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i \bullet \mathbf{e}_k v_k = o_{i'k} v_k = v'_i \quad (1.7)$$

is sometimes used for defining a vector itself. If in each orthonormal basis  $\mathbf{e}_i$  a triplet of numbers  $v_i$  is known, and with a rotation of basis as a whole (with a transition to a new orthonormal basis) it is transformed according to (1.7), then this triplet of components represents an invariant object — vector  $\mathbf{v}$ .

\* More about matrices — in §5.

## § 2. Tensor and its components

When in each orthonormal basis  $\mathbf{e}_i$  we have a set of nine ( $3^2 = 9$ ) numbers  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), and this set is transformed during a transition to a new (rotated) orthonormal basis  $\mathbf{e}'_i$  as

$$B'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_m B_{mn} \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_m \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_n B_{mn} = o_{i'm} o_{j'n} B_{mn}, \quad (2.1)$$

then this set of components represents an invariant object — tensor of second complexity (of second valence, bivalent)  ${}^2\mathbf{B}$ .

In other words, tensor  ${}^2\mathbf{B}$  reveals in every basis as a collection of its components  $B_{ij}$ , changing along with a basis according to (2.1).

The key example of a second complexity tensor is a dyad. Having two vectors  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ , in each basis  $\mathbf{e}_i$  assume  $d_{ij} \equiv a_i b_j$ . It's easy to see how components  $d_{ij}$  transform according to (2.1):

$$a'_i = o_{i'm} a_m, \quad b'_j = o_{j'n} b_n \Rightarrow d'_{ij} = a'_i b'_j = o_{i'm} a_m o_{j'n} b_n = o_{i'm} o_{j'n} d_{mn}.$$

Resulting tensor  ${}^2\mathbf{d}$  is called a dyadic product or just dyad and is written as  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  or  $\mathbf{ab}$ . I choose notation  ${}^2\mathbf{d} = \mathbf{ab}$  without symbol  $\otimes$ .

Essential exemplar of a bivalent tensor is the unit tensor (other names are unit dyad, identity tensor and metric tensor). Let for any orthonormal (cartesian) basis  $E_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ . These are really components of tensor, (2.1) is actual:  $E'_{mn} = o_{m'i} o_{n'j} E_{ij} = o_{m'i} o_{n'i} = \delta_{mn}$ . I write this tensor as  $\mathbf{E}$  (other popular choices are  $\mathbf{I}$  and  ${}^2\mathbf{1}$ ).

Immutability of components upon any rotation makes tensor  $\mathbf{E}$  isotropic. There are no non-null vectors with such property (all components of the null vector  $\mathbf{0}$  are zero in any basis).

The next example is related to a linear transformation (linear mapping) of vectors. If  $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$  is linear (preserving addition and multiplication by number) function of  $\mathbf{a} = a_j \mathbf{e}_j$ , then  $b_i = c_{ij} a_j$  in every basis. Transformation coefficients  $c_{ij}$  alter when a basis rotates:

$$b'_i = c'_{ij} a'_j = o_{i'k} b_k = o_{i'k} c_{kn} a_n, \quad a_n = o_{j'n} a'_j \Rightarrow c'_{ij} = o_{i'k} o_{j'n} c_{kn}.$$

It turns out that a set of two-index objects  $c_{ij}$ ,  $c'_{ij}$ ,  $\dots$ , describing the same linear mapping  $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ , but in various bases, represents a single invariant object — a tensor of second complexity  ${}^2\mathbf{c}$ . And many book authors introduce tensors in that way, by means of linear mappings (linear transformations).



And the last example is a bilinear form  $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f_{ij} a_i b_j$ , where  $f_{ij}$  are coefficients,  $a_i$  and  $b_j$  are components of vector arguments  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ . The result  $F$  is invariant (independent of basis) with the transformation (2.1) for coefficients  $f_{ij}$ :

$$F' = f'_{ij} a'_i b'_j = f_{mn} \underbrace{a_m}_{o_{i'm} a'_{i'}} \underbrace{b_n}_{o_{j'n} b'_{j'}} = F \Leftrightarrow f'_{ij} = o_{i'm} o_{j'n} f_{mn}.$$

If  $f_{ij} = \delta_{ij}$ , then  $F = \delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i$  — the “ $\cdot$ ”-product (dot product, inner product, scalar product) of two vectors. When both arguments are the same, such a homogeneous polynomial of second degree (quadratic) of one vector’s components  $F(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = f_{ij} a_i a_j$  is called a quadratic form.

Now about more complex tensors (of valence larger than two). Tensor of third complexity  ${}^3C$  is represented by a collection of  $3^3 = 27$  numbers  $C_{ijk}$ , changing with a rotation of basis as

$$C'_{ijk} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_p \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_q \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_r C_{pqr} = o_{i'p} o_{j'q} o_{k'r} C_{pqr}. \quad (2.2)$$

The primary example is a triad of three vectors  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$  and  $\mathbf{c} = c_k \mathbf{e}_k$

$$t_{ijk} \equiv a_i b_j c_k \Leftrightarrow {}^3t = \mathbf{abc}.$$

It is seen that orthogonal transformations (2.2) and (2.1) are results of “repeating” vector’s (1.7). The reader will easily compose a transformation of components for tensor of any complexity and will write a corresponding polyad as an example.

Vectors with transformation (1.7) are tensors of first complexity.

In the end consider the least complex objects — scalars, they are tensors of zeroth complexity. A scalar is a single ( $3^0 = 1$ ) number, which doesn’t depend on a basis: energy, mass, temperature et al. But what are components, for example, of vector  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ ,  $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ ? If not scalars, then what? Here could be no simple answer. In each particular basis,  $\mathbf{e}_i$  are vectors and  $v_i$  are scalars.

### § 3. Operations with tensors

There're four of them.

The first — **linear combination** — aggregates addition and multiplication by number. Arguments of this operation and the result are of the same complexity. For two tensors it looks like this:

$$\lambda a_{ij...} + \mu b_{ij...} = c_{ij...} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{c}. \quad (3.1)$$

Here  $\lambda$  and  $\mu$  are scalar coefficients;  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{c}$  are tensors of the same complexity. It's easy to show that components of result  $\mathbf{c}$  satisfy the orthogonal transformation like (2.1).

“Decomposition of a vector in a basis” — representation of a vector as the sum  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$  — is nothing else but the linear combination of basis vectors  $\mathbf{e}_i$  with coefficients  $v_i$ .

The second operation is **multiplication (tensor product, direct product)**. It takes arguments of any complexities, returning the result of cumulative complexity. Examples:

$$\begin{aligned} v_i a_{jk} &= C_{ijk} \Leftrightarrow \mathbf{v}^2 \mathbf{a} = {}^3\mathbf{C}, \\ a_{ij} B_{abc} &= D_{ijabc} \Leftrightarrow {}^2\mathbf{a} {}^3\mathbf{B} = {}^5\mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Transformation of a collection of result's components, such as  $C_{ijk} = v_i a_{jk}$ , during rotation of basis is orthogonal, similar to (2.2), thus here's no doubt that this collection is a set of tensor components.

Primary and already known (from § 2) subtype of multiplication is the dyadic product of two vectors  ${}^2\mathbf{A} = \mathbf{b}\mathbf{c}$ .

The third operation is called **contraction**. It applies to bivalent and more complex tensors. This operation acts upon a single tensor, without other “participants”. Roughly speaking, contracting a tensor is summing of its components over some pair of indices. As a result, tensor's complexity decreases by two.

For trivalent tensor  ${}^3\mathbf{D}$ , three variants of contraction are possible, giving vectors  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{c}$  with components

$$a_i = D_{kki}, \quad b_i = D_{kik}, \quad c_i = D_{ikk}. \quad (3.3)$$

A rotation of basis

$$a'_i = D'_{kki} = \underbrace{o_{k'p} o_{k'q}}_{\delta_{pq}} o_{i'r} D_{pqr} = o_{i'r} D_{ppr} = o_{i'r} a_r$$

shows “the tensorial nature” of the result of contraction.

For a tensor of second complexity, the only one variant of contraction is possible, giving a scalar called the trace or the first invariant

$$\mathbf{B}_\bullet \equiv \text{trace } \mathbf{B} \equiv \mathbf{I}(\mathbf{B}) = B_{kk}.$$

The trace of the unit tensor (“contraction of the Kronecker delta”) is equal to the dimension of space

$$\text{trace } \mathbf{E} = \mathbf{E}_\bullet = \delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

The fourth operation is also applicable to a single tensor of second and bigger complexities. It is named as **index swap**, **index juggling**, **transposing**. From components of a tensor, the new collection is emerged with another sequence of indices, result’s complexity stays the same. For example, trivalent tensor  ${}^3\mathbf{D}$  can give tensors  ${}^3\mathbf{A}$ ,  ${}^3\mathbf{B}$ ,  ${}^3\mathbf{C}$  with components

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{A} = {}^3\mathbf{D}_{1\rightleftharpoons 2} &\Leftrightarrow A_{ijk} = D_{jik}, \\ {}^3\mathbf{B} = {}^3\mathbf{D}_{1\rightleftharpoons 3} &\Leftrightarrow B_{ijk} = D_{kji}, \\ {}^3\mathbf{C} = {}^3\mathbf{D}_{2\rightleftharpoons 3} &\Leftrightarrow C_{ijk} = D_{ikj}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

For a bivalent tensor, the only one transposition is possible:  $\mathbf{A}^\top \equiv \mathbf{A}_{1\rightleftharpoons 2} = \mathbf{B} \Leftrightarrow B_{ij} = A_{ji}$ . Obviously,  $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$ .

For the dyadic multiplication of two vectors,  $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}^\top$ .

### Combining operations

The four presented operations are combined in various sequences.

The combination of multiplication (3.2) and contraction (3.3) — the dot product — is the most frequent, в инвариантной безындексной записи сие обозначается точкой, показывающей свёртку по соседним индексам:

$$a_i = B_{ij}c_j \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}, \quad A_{ij} = B_{ik}C_{kj} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}. \quad (3.5)$$

Определяющее свойство единичного тензора

$${}^n\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{a} = {}^n\mathbf{a} \quad \forall {}^n\mathbf{a} \quad \forall n > 0. \quad (3.6)$$

В коммутативном скалярном произведении двух векторов точка имеет тот же смысл:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}\mathbf{b})_\bullet = a_i b_i = b_i a_i = (\mathbf{b}\mathbf{a})_\bullet = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.7)$$

Для dot product'а тензоров второй сложности справедливо следующее

$$\begin{aligned} B \cdot Q &= (Q^\top \cdot B^\top)^\top \\ (B \cdot Q)^\top &= Q^\top \cdot B^\top \end{aligned} \quad (3.8)$$

(например, для диад  $B = bd$  and  $Q = pq$   
 $(bd \cdot pq)^\top = pq^\top \cdot bd^\top$   
 $d_i p_i bq^\top = qp \cdot db$   
 $d_i p_i qb = p_i d_i qb$  ).

For a vector and a bivalent tensor

$$c \cdot B = B^\top \cdot c, \quad B \cdot c = c \cdot B^\top. \quad (3.9)$$

Contraction can be repeated:  $(A \cdot B)_\bullet = A \bullet B = A_{ij} B_{ji}$ , and here are useful equations for second complexity tensors

$$\begin{aligned} A \bullet B &= B \bullet A, \quad d \cdot A \cdot b = A \bullet bd = bd \bullet A = b_j d_i A_{ij}, \\ A \bullet B &= A^\top \bullet B^\top = A_{ij} B_{ji}, \quad A \bullet B^\top = A^\top \bullet B = A_{ij} B_{ij}, \\ A \bullet E &= E \bullet A = A_\bullet = A_{jj}, \\ A \cdot B \bullet E &= A_{ij} B_{jk} \delta_{ki} = A \bullet B, \quad A \cdot A \bullet E = A \bullet A, \\ A \bullet B \cdot C &= A \cdot B \bullet C = C \bullet A \cdot B = A_{ij} B_{jk} C_{ki}, \\ A \bullet B \cdot C \cdot D &= A \cdot B \bullet C \cdot D = A \cdot B \cdot C \bullet D = \\ &= D \bullet A \cdot B \cdot C = A_{ij} B_{jk} C_{kh} D_{hi}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

## § 4. Polyadic representation (decomposition)

Before in § 2, a tensor was presented as some invariant object, showing itself in every basis as a collection of numbers (components). Such a presentation is typical for majority of books about tensors. Index notation can be convenient, especially when only rectangular coordinates are used, but very often it is not. And the relevant case is physics of elastic continua: it needs more elegant, more powerful and perfect apparatus of the direct tensor calculus, operating with indexless invariant objects.

Linear combination  $v = v_i e_i$  from decomposition (1.1) connects vector  $v$  with basis  $e_i$  and vector's components  $v_i$  in that basis. Soon we will get a similar relation for a tensor of any complexity.

Any bivalent tensor  ${}^2\mathbf{B}$  has nine components  $B_{ij}$  in each basis. The number of various dyads  $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$  for the same basis is nine ( $3^2$ ) too. Linear combining these dyads with coefficients  $B_{ij}$  gives the sum  $B_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ . This is tensor, — but what are its components, and how this representation changes or doesn't change with a rotation of basis?

Components of the constructed sum

$$(B_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)_{pq} = B_{ij}\delta_{ip}\delta_{jq} = B_{pq}$$

are components of tensor  ${}^2\mathbf{B}$ . And with a rotation of basis

$$B'_{ij}\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j = o_{i'p}o_{j'q}B_{pq}o_{i'n}o_{j'm}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m = \delta_{pn}\delta_{qm}B_{pq}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m = B_{pq}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q.$$

Doubts are dropped: a tensor of second complexity can be (re)presented as the linear combination

$${}^2\mathbf{B} = B_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad (4.1)$$

— the dyadic decomposition of a bivalent tensor.

For the unit tensor

$$\mathbf{E} = E_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$

that's why  $\mathbf{E}$  is called the unit dyad.

Polyadic representations like (4.1) help to operate with tensors easier and with more comprehension:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot {}^2\mathbf{B} &= v_i\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j B_{jk}\mathbf{e}_k = v_i\delta_{ij}B_{jk}\mathbf{e}_k = v_iB_{ik}\mathbf{e}_k, \\ \mathbf{e}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_i \cdot B_{pq}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_j = B_{pq}\delta_{ip}\delta_{jq} = B_{ij} = {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

The last line here is quite interesting: tensor components are represented through the tensor itself. An orthogonal transformation of components with a rotation of basis (2.1) turns out to be just a version of (4.2).

And any tensor, of any complexity above zero, may be decomposed into basis polyads. The following equalities are for a trivalent tensor

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{C} &= C_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k, \\ C_{ijk} &= {}^3\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_k\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot {}^3\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_k\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i \cdot {}^3\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_k. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Using decomposition into polyads, it's easy to see the actuality of property (3.6) — the “unitness” of tensor  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} {}^n\mathbf{a} &= a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q, \quad \mathbf{E} = \mathbf{e}_e \mathbf{e}_e \\ {}^n\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} &= a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \underbrace{\mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_e}_{\delta_{eq}} \mathbf{e}_e = a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = {}^n\mathbf{a}, \\ \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{a} &= \mathbf{e}_e \mathbf{e}_e \cdot a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = a_{ij\dots q} \delta_{ei} \mathbf{e}_e \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = {}^n\mathbf{a}. \end{aligned}$$

The polyadic representation connects direct and index notations together. It's not worth contraposing one another. The direct notation is compact, elegant, it much more than others suits for final relations. But sometimes the index notation is very convenient too, as it is for cumbersome manipulations with tensors.

## § 5. Matrices, permutations and determinants

A matrix is a two-dimensional or one-dimensional array of elements (numbers or expressions).

A matrix is a rectangular array — it is made up of rows and columns. A matrix has the same number of elements in each row and the same number of elements in each column.

It's sometimes pretty convenient to represent the set of components of a bivalent tensor as a matrix.

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

Because the matrix multiplication is calculated similar to the tensor multiplication with contraction (the “ $\cdot$ ”-product).

$$C_{ik} = A_{ij} B_{jk}$$

...

Widespread in literature substitution of tensors for matrices of components leads to mistakes — without tracking the bases which these matrices correspond to.

...

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

...

The transpose of a matrix is computed/performed by swapping columns for rows in that matrix (swapping letters of indices)

...

... Вводится символ перестановки (permutation symbol) O.Veblen'a  $e_{ijk}$ \*

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \quad e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1,$$

the rest are zeroes. Символ  $e_{ijk}$  ( $\pm 1$  or 0) меняет знак при перестановке любых двух индексов, не меняется при двойной (“круговой”) перестановке, а при совпадении какой-либо пары индексов обращается в нуль.

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{when there is a repeated index in } ijk, \\ +1 & \text{when an even number of permutations of } ijk \text{ is present,} \\ -1 & \text{when an odd number of permutations of } ijk \text{ is present.} \end{cases}$$

...

Using  $e$ -symbols, the determinant of a matrix is expressed as

$$e_{pqr} \det_{m,n} A_{mn} = e_{ijk} A_{pi} A_{qj} A_{rk} = e_{ijk} A_{ip} A_{jq} A_{kr}. \quad (5.1)$$

... for 123

$$\det_{m,n} A_{mn} = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = e_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$$

$$\det_{m,n} A_{mn} = A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23} A_{32} - A_{12} A_{21} A_{33} + \\ + A_{12} A_{23} A_{31} + A_{13} A_{21} A_{32} - A_{13} A_{22} A_{31}$$

...

$$e_{pqr} \det_{m,n} A_{mn} = \det \begin{bmatrix} A_{1p} & A_{1q} & A_{1r} \\ A_{2p} & A_{2q} & A_{2r} \\ A_{3p} & A_{3q} & A_{3r} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_{p1} & A_{p2} & A_{p3} \\ A_{q1} & A_{q2} & A_{q3} \\ A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} \end{bmatrix}$$

\* The number of indices in  $e$ -symbols is equal to the dimension of space.

...

$$\det_{i,j} \delta_{ij} = 1$$

...

А символ перестановки через детерминант — как

$$e_{pqr} = e_{ijk} \delta_{pi} \delta_{qj} \delta_{rk} = e_{ijk} \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr},$$

$$e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

...

A determinant is not sensitive to transposing:

$$\det_{i,j} A_{ij} = \det_{i,j} A_{ji} = \det_{j,i} A_{ij}.$$

...

“Determinant of the product is equal to the product of determinants”

$$\det_{i,k} B_{ik} \det_{k,j} C_{kj} = \det_{i,j} B_{ik} C_{kj} \quad (5.3)$$

$$e_{fgh} \det_{m,n} B_{ms} C_{sn} = e_{pqr} B_{fi} C_{ip} B_{gj} C_{jq} B_{hk} C_{kr}$$

$$e_{fgh} \det_{m,s} B_{ms} = e_{ijk} B_{fi} B_{gj} B_{hk}$$

$$e_{ijk} \det_{s,n} C_{sn} = e_{pqr} C_{ip} C_{jq} C_{kr}$$

$$e_{fgh} e_{ijk} \det_{m,s} B_{ms} \det_{s,n} C_{sn} = e_{ijk} e_{pqr} B_{fi} B_{gj} B_{hk} C_{ip} C_{jq} C_{kr}$$

...

Определитель компонент of a bivalent tensor is invariant, он не меняется с поворотом базиса

$$A'_{ij} = o_{i'm} o_{j'n} A_{mn}$$

...

## § 6. Cross product and Levi-Civita tensor

By habitual notions, a “ $\times$ ”-product (“cross product”, “vector product”, sometimes “oriented area product”) of two vectors is a vector, heading



perpendicular to the plane of multipliers, whose length is equal to the area of parallelogram, spanned by multipliers

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

However, a “ $\times$ ”-product isn’t quite a vector, since it is not completely invariant.

To begin with, a cross product may be oriented in either of two possible ways (fig. 3). Since the direction in space of product  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  is determined — except a sign (an orientation) — by multipliers, the sequential triple of vectors  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{c}$  is what is going to be oriented: one direction out of two is to be chosen as “positive”.

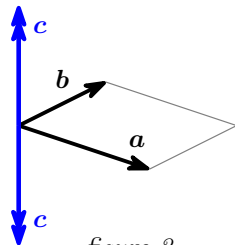


figure 3

And when vectors are measured using some basis  $\mathbf{e}_i$  — being represented as linear combinations like  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  — then the sequential triple of basis vectors  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  is what is going to be oriented. Therefore the sequence of vectors of a basis becomes significant (for linear combinations like  $a_i \mathbf{e}_i = \mathbf{a}$  it wasn’t). After orienting, two bases with different sequences of the same vectors will differ by some permutation.

The orientation of a basis in space is the (kind of) asymmetry that makes a reflection impossible to replicate by means of a rotation in that space (without lifting to a more-dimensional space). It’s impossible to turn the left hand of a human figure into the right hand by applying a rotation, only by reflecting the figure in a mirror.

An orientation of space is an arbitrary choice of which sequences of basis vectors are “positively” oriented and which are “negatively” oriented.

In the three-dimensional Euclidean space, the two possible basis orientations are commonly called right-handed (right-chiral) and left-handed (left-chiral).

... chiral (adjective) = asymmetric in such a way that the thing and its mirror image are not superimposable, cannot be superposed on its mirror image by any combination of rotations and translations

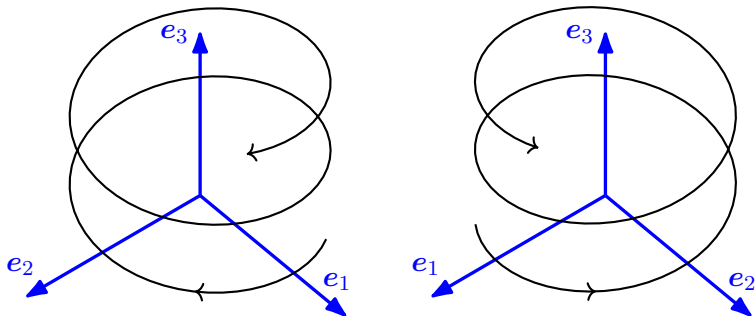


figure 4

A pseudovector (axial vector) is a vector-like object that is invariant under any rotation\*, but on a reflection it additionally flips its direction backwards.

... put the figure here ...

Except in rare cases, the direction of a fully invariant (polar) vector will change on a reflection together with the entire space.

A pseudovector (axial vector), unlike a (polar) vector, when reflected doesn't change the component orthogonal to the plane of reflection, and turns out to be flipped relatively to the polar vectors and the geometry of the entire space. This happens due to the fact that along with changing the sign of each “ $\times$ ”-product — which corresponds to reflection — the sign (and, accordingly, the direction) of each axial vector also changes .

The otherness of pseudovectors narrows the variety of formulas: a pseudovector is not additive with a vector. Formula  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  is correct, because  $\boldsymbol{\omega}$  is pseudovector there, and with the cross product two “pseudo” give  $(-1)^2 = 1$  (“mutually compensate each other”).

Here is the Levi-Civita tensor — the volumetric tensor of third complexity

$${}^3\epsilon = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k, \quad \epsilon_{ijk} \equiv \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \quad (6.1)$$

\* Rotations cannot change orientation of a triple of basis vectors, only a reflection can.

with components  $\epsilon_{ijk}$  equal to “triple” (“mixed”, “cross-dot”) products of basis vectors.

The absolute value (modulus) of each nonzero component of tensor  ${}^3\epsilon$  is equal to the volume  $\sqrt{g}$  of a parallelepiped, drew upon a basis. For basis  $\mathbf{e}_i$  of mutually perpendicular one-unit long vectors  $\sqrt{g} = 1$ .

Тензор  ${}^3\epsilon$  изотропен, его компоненты не меняются при любом повороте базиса. Но отражение — изменение ориентации тройки базисных векторов (перемена “направления винта”) — меняет знак  ${}^3\epsilon$ , и поэтому он является псевдотензором.

Если  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ , то  $\mathbf{e}_i$  — произвольно выбираемая из двух вариантов (рис. 3) как ориентированная положительно (“правая”) тройка, и компоненты  ${}^3\epsilon$  равны символу Веблена:  $\epsilon_{ijk} = e_{ijk}$ . Когда же  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3$ , тогда тройка  $\mathbf{e}_i$  ориентирована отрицательно (“левая”, “зеркальная”), для неё  $\epsilon_{ijk} = -e_{ijk}$  (а  $e_{ijk} = -\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k$ ).

With the Levi-Civita tensor  ${}^3\epsilon$  it is possible to take a fresh look at the cross product:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} &= \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_i \mathbf{e}_i \times b_j \mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = a_i b_j \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k = \\ &= b_j a_i \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i = -b_j a_i \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k = -b_j a_i \epsilon_{ikj} \mathbf{e}_k = \\ &= a_i \epsilon_{ikj} \mathbf{e}_k b_j = -a_i \epsilon_{ikj} \mathbf{e}_k b_j = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \cdot \mathbf{b}. \quad (6.2)\end{aligned}$$

So that, the cross product is not another new, entirely distinct operation. With the Levi-Civita tensor it reduces to the four already described (§3) and is applicable to tensors of any complexity.

“The cross product” is just the dot product — the combination of multiplication and contraction (§3) — involving tensor  ${}^3\epsilon$ . Such combinations are possible with any tensors:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times {}^2\mathbf{B} &= a_i \mathbf{e}_i \times B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \underbrace{a_i B_{jk} \epsilon_{ijn}}_{-a_i \epsilon_{ijn} B_{jk}} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_k = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^2\mathbf{B}, \\ {}^2\mathbf{C} \times d\mathbf{b} &= C_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \times d_p b_q \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q = \mathbf{e}_i C_{ij} d_p \underbrace{\epsilon_{jpk}}_{-\epsilon_{pjk} = -\epsilon_{jkp}} \mathbf{e}_k b_q \mathbf{e}_q = \\ &= -{}^2\mathbf{C} d \cdot {}^3\epsilon \mathbf{b} = -{}^2\mathbf{C} \cdot {}^3\epsilon \cdot d\mathbf{b}, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{E} &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = \underbrace{-\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k}_{+\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j} = -{}^3\epsilon. \quad (6.3)\end{aligned}$$

The last equation connects the isotropic tensors of second and third complexities.

Generalizing to all tensors of nonzero complexity

$${}^n\boldsymbol{\xi} \times {}^m\boldsymbol{\zeta} = -{}^n\boldsymbol{\xi} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot {}^m\boldsymbol{\zeta} \quad \forall {}^n\boldsymbol{\xi}, {}^m\boldsymbol{\zeta} \quad \forall n > 0, m > 0. \quad (6.4)$$

When one of the operands is the unit (metric) tensor, from (6.4) and (3.6)  $\forall {}^n\boldsymbol{\Upsilon} \quad \forall n > 0$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} \times {}^n\boldsymbol{\Upsilon} &= -\boldsymbol{E} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot {}^n\boldsymbol{\Upsilon} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot {}^n\boldsymbol{\Upsilon}, \\ {}^n\boldsymbol{\Upsilon} \times \boldsymbol{E} &= -{}^n\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{E} = -{}^n\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon}. \end{aligned}$$

The cross product of two vectors is not commutative but anti-commutative:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= -\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} \Rightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

For any bivalent tensor  ${}^2\boldsymbol{B}$  and a tensor of first complexity (vector)  $\boldsymbol{a}$

$${}^2\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{a} = e_i B_{ij} e_j \times a_k e_k = (-a_k e_k \times e_j B_{ij} e_i)^\top = -(\boldsymbol{a} \times {}^2\boldsymbol{B}^\top)^\top.$$

However, in the particular case of the unit tensor  $\boldsymbol{E}$  and a vector

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a} &= -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E}^\top)^\top = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E})^\top = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{a} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{a}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Справедливо такое соотношение

$$e_{ijk} e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

○ Доказательство начнём с представлений символов Веблена как определителей (5.2).  $e_{ijk} = \pm e_i \times e_j \cdot e_k$  по строкам,  $e_{pqr} = \pm e_p \times e_q \cdot e_r$  по столбцам, с “−” для “левой” тройки

$$e_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix}, \quad e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{q1} & \delta_{r1} \\ \delta_{p2} & \delta_{q2} & \delta_{r2} \\ \delta_{p3} & \delta_{q3} & \delta_{r3} \end{bmatrix}.$$

Левая часть (6.7) есть произведение  $e_{ijk} e_{pqr}$  этих определителей. Но  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  — определитель произведения матриц равен произведению определителей (5.3). В матрице-произведении элемент  $[\cdots]_{11}$  равен  $\delta_{is}\delta_{ps} = \delta_{ip}$ , как и в (6.7); **легко проверить и другие фрагменты.** ●

Contraction of (6.7) приводит к полезным формулам

$$\begin{aligned}
 e_{ijk}e_{pqk} &= \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & 3 \end{bmatrix} = \\
 &= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{kp} + \delta_{ik}\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{kp} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jk}\delta_{kq} = \\
 &= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} + \delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} = \\
 &= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \\
 e_{ijk}e_{pj k} &= \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}, \\
 e_{ijk}e_{ijk} &= 2\delta_{ii} = 6.
 \end{aligned}$$

Or in short

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \quad e_{ijk}e_{pj k} = 2\delta_{ip}, \quad e_{ijk}e_{ijk} = 6. \quad (6.8)$$

The first of these formulas даёт представление двойного векторного произведения

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_i \mathbf{e}_i \times \epsilon_{pqj} b_p c_q \mathbf{e}_j = \epsilon_{kij} \epsilon_{pqj} a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = \\
 &= (\delta_{kp} \delta_{iq} - \delta_{kq} \delta_{ip}) a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = a_i b_k c_i \mathbf{e}_k - a_i b_i c_k \mathbf{e}_k = \\
 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{cb} - \mathbf{bc}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} - \mathbf{cb} \cdot \mathbf{a}. \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

By another interpretation, the dot product of a dyad and a vector is not commutative:  $\mathbf{bd} \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{c} \cdot \mathbf{bd}$ , and this difference can be expressed as

$$\mathbf{bd} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{bd} = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{d}). \quad (6.10)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{cb} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{ca} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{ac}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

The same way it may be derived that

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ba} - \mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}. \quad (6.11)$$

And such identities for any two vectors  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{E} &= \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n = a_i b_j \epsilon_{ijk} \epsilon_{knq} \mathbf{e}_q \mathbf{e}_n = \\
 &= a_i b_j (\delta_{in} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jn}) \mathbf{e}_q \mathbf{e}_n = a_i b_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - a_i b_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = \\
 &= \mathbf{ba} - \mathbf{ab}, \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon) \cdot (\mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon) = \\
 &= a_i \epsilon_{ipn} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_n \cdot b_j \epsilon_{jsk} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k = a_i b_j \epsilon_{ipn} \epsilon_{nkj} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = \\
 &= a_i b_j (\delta_{ik} \delta_{pj} - \delta_{ij} \delta_{pk}) \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = a_i b_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - a_i b_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \\
 &= \mathbf{ba} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{bE}. \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

Finally, one more correlation between isotropic tensors of second and third complexities:

$${}^3\epsilon \bullet \bullet {}^3\epsilon = \epsilon_{ijk} e_i \epsilon_{kjin} e_n = -2\delta_{in} e_i e_n = -2E. \quad (6.14)$$

## § 7. Symmetric and antisymmetric tensors

Тензор, не меняющийся при перестановке какой-либо пары своих индексов, называется симметричным по этой паре индексов. Если же при перестановке пары индексов тензор меняет свой знак, то он называется антисимметричным (кососимметричным) по этой паре индексов.

Тензор Лёви-Чивиты  ${}^3\epsilon$  антисимметричен по любой паре индексов, то есть он полностью антисимметричен (абсолютно кососимметричен).

Тензор второй сложности  $B$  симметричен, если  $B = B^\top$ . Когда транспонирование меняет знак тензора, то есть  $A^\top = -A$ , тогда он антисимметричен (кососимметричен).

Любой тензор второй сложности представим суммой симметричной и антисимметричной частей

$$\begin{aligned} C &= C^S + C^A, \quad C^\top = C^S - C^A; \\ C^S &\equiv \frac{1}{2}(C + C^\top), \quad C^A \equiv \frac{1}{2}(C - C^\top). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для диады  $cd = cd^S + cd^A = \frac{1}{2}(cd + dc) + \frac{1}{2}(cd - dc)$ .

Произведение двух симметричных тензоров  $C^S \cdot D^S$  симметрично далеко не всегда, но только когда  $D^S \cdot C^S = C^S \cdot D^S$ , ведь по (3.8)  $(C^S \cdot D^S)^\top = D^S \cdot C^S$ .

В нечётномерных пространствах любой антисимметричный тензор второй сложности необратим, определитель матрицы компонент для него — нулевой.

Существует взаимно-однозначное соответствие между антисимметричными тензорами второй сложности и (псевдо)векторами. Компоненты кососимметричного тензора полностью определяются тройкой чисел (диагональные элементы матрицы компонент — нули, а недиагональные — попарно противоположны). Dot product

кососимметричного  $\mathbf{A}$  и какого-либо тензора  ${}^n\xi$  однозначно соответствует cross product'у псевдовектора  $\mathbf{a}$  и того же тензора  ${}^n\xi$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{A} \cdot {}^n\xi \Leftrightarrow \mathbf{a} \times {}^n\xi = \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{A} = \mathbf{A}^A \quad \forall {}^n\xi \quad \forall n > 0, \\ \mathbf{d} &= {}^n\xi \cdot \mathbf{A} \Leftrightarrow {}^n\xi \times \mathbf{a} = \mathbf{d} \quad \forall \mathbf{A} = \mathbf{A}^A \quad \forall {}^n\xi \quad \forall n > 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Раскроем это соответствие  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{a})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot {}^n\xi &= \mathbf{a} \times {}^n\xi \\ A_{hi} e_h e_i \cdot \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q &= a_i e_i \times \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q \\ A_{hj} \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q &= a_i \in_{ijh} \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q \\ A_{hj} &= a_i \in_{ijh} \\ A_{hj} &= -a_i \in_{ihj} \\ \mathbf{A} &= -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \end{aligned}$$

Так же из  ${}^n\xi \cdot \mathbf{A} = {}^n\xi \times \mathbf{a}$  получается  $\mathbf{A} = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a}$ .

Или проще, согласно (6.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \times \mathbf{a} = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

(Псевдо)вектор  $\mathbf{a}$  называется сопутствующим для тензора  $\mathbf{A}$ .

В общем, для взаимно-однозначного соответствия между  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{a}$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon = \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \left( -\frac{1}{2} {}^3\epsilon \cdot {}^3\epsilon \right) = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\epsilon. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Компоненты кососимметричного  $\mathbf{A}$  через компоненты сопутствующего ему псевдовектора  $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} = -\in_{ijk} e_i e_j a_k, \\ A_{ij} &= -\in_{ijk} a_k = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и наоборот

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\epsilon = \frac{1}{2} A_{jk} \in_{kji} e_i, \\ a_i &= \frac{1}{2} \in_{ikj} A_{jk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \in_{123} A_{32} + \in_{132} A_{23} \\ \in_{213} A_{31} + \in_{231} A_{13} \\ \in_{312} A_{21} + \in_{321} A_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{32} - A_{23} \\ A_{13} - A_{31} \\ A_{21} - A_{12} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Легко запоминающийся вспомогательный “псевдовекторный инвариант”  $\mathbf{A}_\times$  получается из тензора  $\mathbf{A}$  заменой диадного произведения на векторное

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\times &\equiv A_{ij} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = -\mathbf{A} \cdot \cdot^3 \epsilon, \\ \mathbf{A}_\times &= (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times = -2\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times = -\frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Обоснование (7.4):

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times \times \mathbf{E} = -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)}_{\in_{ijn} \mathbf{e}_n} \times \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \\ &= -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{\in_{nij} \in_{nkp}}_{\delta_{jp} \delta_{ik} - \delta_{ip} \delta_{jk}} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = -\frac{1}{2} A_{ij} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}) = \mathbf{A}^\mathbf{A} = \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Сопутствующий вектор **можно ввести** для любого бивалентного тензора, но лишь антисимметричная часть при этом даёт вклад:  $\mathbf{C}^\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}$ . Для симметричного тензора сопутствующий вектор — нулевой:  $\mathbf{B}_\times = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^\top = \mathbf{B}^\mathbf{S}$ .

With (7.4) разложение какого-либо тензора  $\mathbf{C}$  на симметричную и антисимметричную части выглядит как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^\mathbf{S} - \frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}. \quad (7.5)$$

Для диады же

$$(6.12) \Rightarrow (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E} = \mathbf{dc} - \mathbf{cd} = -2\mathbf{cd}^\mathbf{A}, \quad (\mathbf{cd})_\times = \mathbf{c} \times \mathbf{d},$$

и разложение её

$$\mathbf{cd} = \frac{1}{2} (\mathbf{cd} + \mathbf{dc}) - \frac{1}{2} (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E}. \quad (7.6)$$

## § 8. Eigenvectors and eigenvalues of tensor

Если для тензора  ${}^2\mathbf{B}$  и ненулевого вектора  $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned}{}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} &= \eta \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \\ {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} &= \eta \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}, \quad ({}^2\mathbf{B} - \eta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0},\end{aligned}\quad (8.1)$$

то  $\eta$  называется собственным числом (собственным значением, eigenvalue, proper value, главным значением)  ${}^2\mathbf{B}$ , а определяемая собственным вектором  $\mathbf{a}$  ось (направление) — его собственной (главной, principal) осью (направлением).



В компонентах это матричная задача на собственные значения  $(B_{ij} - \eta \delta_{ij}) a_j = 0$  — однородная линейная алгебраическая система, имеющая ненулевые решения при равенстве нулю определителя  $\det_{i,j} (B_{ij} - \eta \delta_{ij})$ :

$$\det \begin{bmatrix} B_{11} - \eta & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} - \eta & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - \eta \end{bmatrix} = -\eta^3 + I\eta^2 - II\eta + III = 0; \quad (8.2)$$

$$I = \text{trace } {}^2\mathbf{B} = B_{kk} = B_{11} + B_{22} + B_{33},$$

$$II = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} + B_{11}B_{33} - B_{13}B_{31} + B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}, \quad (8.3)$$

$$III = \det {}^2\mathbf{B} = \det_{i,j} B_{ij} = e_{ijk} B_{1i} B_{2j} B_{3k} = e_{ijk} B_{i1} B_{j2} B_{k3}.$$

The roots of characteristic equation (8.2) — eigenvalues — не зависят от базиса и потому инвариантны.

Коэффициенты (8.3) тоже не зависят от базиса; они называются первым, вторым и третьим инвариантами тензора. С первым инвариантом  $I$  — следом тензора — мы уже встречались в § 3. Второй инвариант  $II$  это след союзной (взаимной, adjugate) матрицы — транспонированной матрицы дополнений:  $II({}^2\mathbf{B}) \equiv \text{trace}(\text{adj } B_{ij})$ . Или он же

$$II({}^2\mathbf{B}) \equiv \frac{1}{2} [({}^2\mathbf{B}_\bullet)^2 - {}^2\mathbf{B} \cdot {}^2\mathbf{B}] = \frac{1}{2} [(B_{kk})^2 - B_{ij} B_{ji}].$$

И третий инвариант  $III$  это определитель (детерминант) компонент тензора:  $III({}^2\mathbf{B}) \equiv \det {}^2\mathbf{B}$ .

Это относилось ко всем тензорам второй сложности. Для случая же симметричного тензора справедливо следующее:

1° Собственные числа симметричного тензора вещественны.

2° Собственные оси для разных собственных чисел ортогональны.

○ Первое утверждение доказывается от противного. Если  $\eta$  — комплексный корень (8.2), определяющий собственный вектор  $\mathbf{a}$ , то сопряжённое число  $\bar{\eta}$  также будет корнем. Ему соответствует собственный вектор  $\bar{\mathbf{a}}$  с сопряжёнными компонентами. При этом

$$\begin{aligned} (8.1) \Rightarrow (\bar{\mathbf{a}} \cdot) {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} &= \eta \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} \cdot) {}^2\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\eta} \bar{\mathbf{a}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{\mathbf{a}} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}} = (\eta - \bar{\eta}) \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

Но слева здесь — нуль, поскольку  $\mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot {}^2\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{a}$  и  ${}^2\mathbf{B} = {}^2\mathbf{B}^\top$ . Поэтому  $\eta = \bar{\eta}$ , то есть вещественно.

Столь же просто обосновывается и 2°:

$$\underbrace{\mathbf{a}_2 \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_2}_{=0} = (\eta_1 - \eta_2) \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2, \quad \eta_1 \neq \eta_2 \Rightarrow \Rightarrow \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0. \quad \bullet$$

При различных собственных числах собственные векторы единичной длины  $\mathbf{e}_i$  образуют ортонормальный базис. Каковы же в нём компоненты тензора?

$${}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_k \eta_k \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$${}^2\mathbf{B} \cdot \underbrace{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k}_E = \sum_k \eta_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k$$

В общем случае  $B_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j$ , в базисе же  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  единичных взаимно ортогональных  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  собственных осей симметричного тензора:

$$B_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = \eta_1,$$

$$B_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2 = 0,$$

...

Матрица компонент диагональна и  ${}^2\mathbf{B} = \sum \eta_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ . Здесь идёт суммирование по трём повторяющимся индексам, ведь используется особенный базис.

Случай кратных главных значений можно рассмотреть с помощью предельного перехода. При  $\eta_2 \rightarrow \eta_1$  любая линейная комбинация  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  в пределе удовлетворяет (8.1); это значит, что любая ось в плоскости  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  становится собственной. Если же совпадают все три собственных числа, то любая ось в пространстве — собственная. При этом  ${}^2\mathbf{B} = \eta \mathbf{E}$ , такие тензоры называются изотропными или шаровыми.

## § 9. Rotation tensor

Соотношение между двумя “правыми” (или двумя “левыми”) ортонормальными базисами  $\mathbf{e}_i$  и  $\hat{\mathbf{e}}_i$  вполне определено матрицей косинусов (§ 1)

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j \hat{\mathbf{e}}_j}_E = o_{ij}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_j, \quad o_{ij}^{\circ} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j.$$

But one may write like this:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \underbrace{\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \dot{\mathbf{e}}_i}_{\delta_{ji}} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{P} \equiv \mathbf{e}_j \dot{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_2 \dot{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_3 \dot{\mathbf{e}}_3. \quad (9.1)$$

$\mathbf{P}$  is called the rotation tensor.

Компоненты  $\mathbf{P}$  и в начальном  $\dot{\mathbf{e}}_i$ , и в повернутом  $\mathbf{e}_i$  базисах образуют одну и ту же матрицу, равную транспонированной матрице косинусов  $o_{ji}^\circ = \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j &= \underbrace{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k}_{\delta_{ik}} \dot{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{e}_j = \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j, \\ \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{e}}_j &= \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_k \underbrace{\dot{\mathbf{e}}_k \cdot \dot{\mathbf{e}}_j}_{\delta_{kj}} = \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{P} &= o_{ji}^\circ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = o_{ji}^\circ \dot{\mathbf{e}}_i \dot{\mathbf{e}}_j. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Тензор  $\mathbf{P}$  связывает два вектора — “до поворота”  $\dot{\mathbf{r}} = \rho_i \dot{\mathbf{e}}_i$  и “после поворота”  $\mathbf{r} = \rho_i \mathbf{e}_i$  — с теми же компонентами  $\rho_i = \text{constant}$  у  $\mathbf{r}$  в актуальном повернутом базисе  $\mathbf{e}_i$ , что и у  $\dot{\mathbf{r}}$  в неподвижном базисе  $\dot{\mathbf{e}}_i$  (“вектор вращается вместе с базисом”): поскольку  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \dot{\mathbf{e}}_j \cdot \dot{\mathbf{e}}_i \Leftrightarrow \rho_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \dot{\mathbf{e}}_j \cdot \rho_i \dot{\mathbf{e}}_i$ , то

$$\mathbf{r} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (9.3)$$

(эта связь — обобщённая формула поворота Rodrigues’a).

Поворот же тензора второй сложности  $\dot{\mathbf{C}} = C_{ij} \dot{\mathbf{e}}_i \dot{\mathbf{e}}_j$  в текущее (актуальное) положение  $\mathbf{C} = C_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  происходит так:

$$\mathbf{e}_i C_{ij} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_p C_{pq} \dot{\mathbf{e}}_q \cdot \dot{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_j \Leftrightarrow \mathbf{C} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{P}^\top. \quad (9.4)$$

Essential property of a rotation tensor — orthogonality — is expressed as

$$\underbrace{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_i \dot{\mathbf{e}}_i} \cdot \underbrace{\mathbf{P}^\top}_{\dot{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_j} = \underbrace{\mathbf{P}^\top}_{\dot{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_i} \cdot \underbrace{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_j \dot{\mathbf{e}}_j} = \underbrace{\mathbf{E}}_{\dot{\mathbf{e}}_i \dot{\mathbf{e}}_i}, \quad (9.5)$$

that is the transposed tensor coincides with the reciprocal tensor:  $\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-\top}$ .

Ортогональный тензор не меняет скалярное произведение векторов, preserving lengths and angles (“metric”)

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (9.6)$$

Для всех ортогональных тензоров  $(\det \mathbf{O})^2 = 1$ :

$$1 = \det \mathbf{E} = \det (\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top) = (\det \mathbf{O}) (\det \mathbf{O}^\top) = (\det \mathbf{O})^2.$$

Тензор поворота это ортогональный тензор with  $\det \mathbf{P} = 1$ . Но не только лишь тензоры поворота обладают свойством ортогональности. When in (9.1) один из базисов “правый”, а другой “левый”, then it’s combination of a rotation and a reflection (“rotoreflexion”)  $\mathbf{O} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$  with  $\det (-\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}) = -1$ .

У любого бивалентного тензора в трёхмерном пространстве как минимум одно собственное число — корень (8.2) — действительное (некомплексное). Для тензора поворота оно равно единице

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{a} \Rightarrow \overbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P}}^{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}} = \eta \mathbf{a} \cdot \eta \mathbf{a} \Rightarrow \eta^2 = 1.$$

Соответствующая собственная ось называется осью поворота; теорема Euler’a о конечном повороте в том и состоит, что такая ось существует. Если  $\mathbf{k}$  — орт этой оси, а  $\vartheta$  — величина угла поворота, то тензор поворота представим как

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}, \vartheta) = \mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta). \quad (9.7)$$

Доказывается эта формула так. Направление  $\mathbf{k}$  при повороте не меняется ( $\mathbf{P} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}$ ), поэтому на оси поворота  $\mathring{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ . В перпендикулярной плоскости (рис. 5)  $\mathring{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \vartheta - \mathbf{e}_2 \sin \vartheta$ ,  $\mathring{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 \sin \vartheta + \mathbf{e}_2 \cos \vartheta$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{e}_i \mathring{\mathbf{e}}_i \Rightarrow (9.7)$ .

Из (9.7) и (9.3) получаем формулу поворота Родрига в параметрах  $\mathbf{k}$  и  $\vartheta$ :

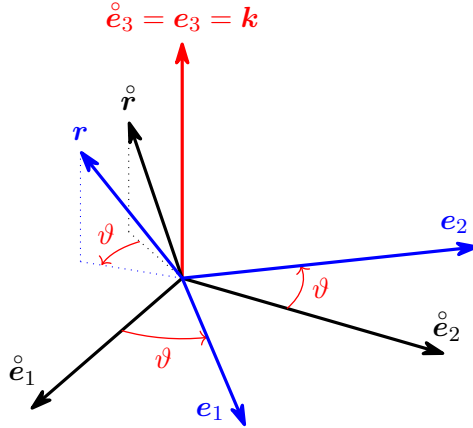
$$\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathring{\mathbf{r}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathring{\mathbf{r}} (1 - \cos \vartheta).$$

В параметрах конечного поворота транспонирование, оно же обращение, тензора  $\mathbf{P}$  эквивалентно перемене направления поворота — знака угла  $\vartheta$

$$\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}|_{\vartheta=-\vartheta} = \mathbf{E} \cos \vartheta - \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta).$$

$$\mathring{e}_i = \mathring{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j$$

$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \\ \mathring{e}_2 \\ \mathring{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathring{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathring{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathring{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathring{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathring{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathring{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathring{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathring{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathring{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathring{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathring{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathring{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(90^\circ + \vartheta) & \cos 90^\circ \\ \cos(90^\circ - \vartheta) & \cos \vartheta & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathring{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \vartheta - \mathbf{e}_2 \sin \vartheta$$

$$\mathring{e}_2 = \mathbf{e}_1 \sin \vartheta + \mathbf{e}_2 \cos \vartheta$$

$$\mathring{e}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}_1 \mathring{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathring{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathring{e}_3 =$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{\mathbf{e}_1 \mathring{e}_1}^{\mathbf{e}_1 \mathring{e}_1} + \overbrace{\mathbf{e}_2 \mathring{e}_2}^{\mathbf{e}_2 \mathring{e}_2} + \overbrace{\mathbf{e}_3 \mathring{e}_3}^{\mathbf{e}_3 \mathring{e}_3} = \\ &= \mathbf{E} \cos \vartheta - \underbrace{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3}_{\mathbf{k}\mathbf{k}} \cos \vartheta + \underbrace{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)}_{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \epsilon_{3ij} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i} \sin \vartheta + \mathbf{k}\mathbf{k} = \\ &= \mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) \end{aligned}$$

рисунок 5  
“Finite rotation”

Пусть теперь тензор поворота меняется со временем:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ . Псевдовектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  вводится через  $\mathbf{P}$  таким путём. Дифференцируем тождество ортогональности (9.5) по времени\*

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top = {}^2\mathbf{0}.$$

Тензор  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top$  (по (3.8)  $(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top)^\top = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top$ ) оказался антисимметричным. Поэтому согласно (7.3) он представим сопутствующим вектором как  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top$ . То есть

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv -\frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times \quad (9.8)$$

Помимо этого общего представления вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , для него есть и другие. Например, через параметры конечного поворота.

Производная  $\dot{\mathbf{P}}$  в параметрах конечного поворота в общем случае (оба параметра — и единичный вектор  $\mathbf{k}$ , и угол  $\vartheta$  — переменны во времени):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= (\mathbf{P}^S + \mathbf{P}^A)^\bullet = \left( \overbrace{\mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta)}^{\mathbf{P}^S} + \overbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}^{\mathbf{P}^A} \right)^\bullet = \\ &= \underbrace{(\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} + \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}}) (1 - \cos \vartheta)}_{\dot{\mathbf{P}}^S} + \underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}_{\dot{\mathbf{P}}^A}. \end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top &= (\dot{\mathbf{P}}^S + \dot{\mathbf{P}}^A) \cdot (\mathbf{P}^S - \mathbf{P}^A) = \\ &= \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S + \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S - \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A - \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A, \end{aligned}$$

используя

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 = \text{constant} &\Rightarrow \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} = 0, \\ \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} &= \mathbf{k} \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\ (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{k} - \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k} \mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\ \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\ (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= -\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k}, \\ (6.13) \Rightarrow (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \mathbf{E}, \\ (6.12) \Rightarrow \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} &= (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}) \times \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \mathbf{k} - \mathbf{k} (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) = \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

\* Various notations are used to denote the time derivative. In addition to the Leibniz's notation  $dx/dt$ , the very popular short-hand one is the “over-dot” Newton's notation  $\dot{x}$ .

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S &= \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k})(1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + \\
&\quad + (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k})(1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k}) \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta)^2 = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\
&\quad + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} - 2 \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos^2 \vartheta = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S &= \\
&= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \\
&\quad + (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} \dot{\vartheta} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A &= \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k})(1 - \cos \vartheta) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta = \\
&= \mathbf{k}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E})) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= -\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A &= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin^2 \vartheta = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\Gamma &= \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S + \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S - \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A - \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + \\
&\quad + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\
&\quad + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) - (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}})(1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta).
\end{aligned}$$

Этот результат, подставленный в определение (9.8) псевдовектора  $\boldsymbol{\omega}$ , даёт

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} (1 - \cos \vartheta). \quad (9.9)$$

Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  получился разложенным по трём взаимно ортогональным направлениям —  $\mathbf{k}$ ,  $\dot{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}$ . При неподвижной оси поворота  $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \dot{\vartheta}$ .

Ещё одно представление  $\omega$  связано с компонентами тензора поворота (9.2). Поскольку  $P = o_{ji} \circ \mathring{e}_i \mathring{e}_j$ ,  $P^\top = o_{ij} \circ \mathring{e}_i \mathring{e}_j$ , а векторы начального базиса  $\mathring{e}_i$  неподвижны (со временем не меняются), то

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{o}_{ji} \circ \mathring{e}_i \mathring{e}_j, \quad \dot{P} \cdot P^\top = \dot{o}_{ni} \circ o_{nj} \circ \mathring{e}_i \mathring{e}_j, \\ \omega &= -\frac{1}{2} \dot{o}_{ni} \circ o_{nj} \circ \mathring{e}_i \times \mathring{e}_j = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} o_{nj} \circ \dot{o}_{ni} \circ \mathring{e}_k. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Отметим и формулы

$$\begin{aligned} (9.8) &\Rightarrow \dot{\mathring{e}}_i \mathring{e}_i = \omega \times e_i \mathring{e}_i \Rightarrow \dot{\mathring{e}}_i = \omega \times e_i, \\ (9.8) &\Rightarrow \omega = -\frac{1}{2} (\dot{\mathring{e}}_i \mathring{e}_i \cdot \mathring{e}_j e_j)_\times = -\frac{1}{2} (\dot{\mathring{e}}_i e_i)_\times = \frac{1}{2} e_i \times \dot{\mathring{e}}_i. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Не всё то вектор, что имеет величину и направление. Поворот тела вокруг оси представляет, казалось бы, вектор, имеющий численное значение, равное углу поворота, и направление, совпадающее с направлением оси вращения. Однако, два таких поворота не складываются как векторы, когда углы поворота не бесконечно малые. На самом же деле последовательные повороты не складываются, а умножаются.

Можно ли складывать угловые скорости? — Да, ведь угол поворота в  $\dot{\vartheta}$  бесконечно малый. — Но только при вращении вокруг неподвижной оси?

...

## § 10. Variations

Далее часто будет использоваться сходная с дифференцированием операция варьирования. Не отсылая читателя к книгам о вариационном исчислении (calculus of variations), ограничимся представлениями о вариации  $\delta x$  величины  $x$  как о задаваемом нами бесконечно малом приращении, совместимом с ограничениями (связями, constraints). Если ограничений для  $x$  нет, то  $\delta x$  произвольна (случайна). But when  $x = x(y)$  — функция независимого аргумента  $y$ , then  $\delta x = x'(y) \delta y$ .

Writings with variations have the same features as writings with differentials. Если, например,  $\delta x$  and  $\delta y$  are variations of  $x$



and  $y$ ,  $u$  and  $v$  are конечные величины, то пишем  $u\delta x + v\delta y = \delta w$ , а не  $w$  — даже когда  $\delta w$  не является вариацией величины  $w$ ; в этом случае  $\delta w$  это единое обозначение. Surely, if  $u=u(x, y)$ ,  $v=v(x, y)$  and  $\partial_x v = \partial_y u$  ( $\frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial y} u$ ), then the sum  $\delta w$  will be a variation of some  $w$ .

Варьируя тождество (9.5), получим  $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = -\mathbf{O} \cdot \delta \mathbf{O}^\top$ . Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор  $\delta \mathbf{o}$  как  $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$ . Приходим к соотношениям

$$\delta \mathbf{O} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{O}, \quad \delta \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top \right)_\times, \quad (10.1)$$

аналогичным (9.8). Вектор бесконечно малого поворота  $\delta \mathbf{o}$  это не “вариация  $\mathbf{o}$ ”, но единый символ (в отличие от  $\delta \mathbf{O}$ ).

Малый поворот определяется вектором  $\delta \mathbf{o}$ , но конечный поворот тоже возможно представить как вектор

...

## § 11. Polar decomposition

Any tensor of second complexity  $\mathbf{F}$  with  $\det F_{ij} \neq 0$  (not singular tensor) can be decomposed as

...

*Example.* Polar decompose tensor  $\mathbf{C} = C_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ , where  $\mathbf{e}_k$  are mutually perpendicular unit vectors of basis, and  $C_{ij}$  are tensor's components

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & 11 \\ 10 & -15 & 23 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O} = O_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{O}_2$$

$$O_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{S}_R, \quad \mathbf{O}^\top \cdot \mathbf{C} = \mathbf{S}_R$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_L \cdot \mathbf{O}, \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{O}^\top = \mathbf{S}_L$$

$$S_{Rij} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -10 \\ 5 & 0 & 25 \\ -10 & 25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$S_{Lij} = \begin{bmatrix} 104/5 & 47/5 & 5 \\ 47/5 & -129/5 & -10 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

...

## § 12. Tensors in oblique basis

Until now a basis of three mutually perpendicular unit vectors  $\mathbf{e}_i$  was used. Presently take a basis of any three linearly independent (non-coplanar) vectors  $\mathbf{a}_i$ .

Decomposition of vector  $\mathbf{v}$  in basis  $\mathbf{a}_i$  (fig. 6) is linear combination

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i. \quad (12.1)$$

The summation convention gains the new conditions: a summation index is repeated at different levels of the same monomial, and a free index stays at the equal height in every part of the expression ( $a_i = b_{ij}c^j$  is correct,  $a_i = b_{kk}^i$  is wrong twice).

В таком базисе уже  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i = v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i \neq v^i$ , ведь тут  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k \neq \delta_{ik}$ .

Дополним же базис  $\mathbf{a}_i$  ещё другой тройкой векторов  $\mathbf{a}^i$ , называемых кобазисом или взаимным базисом, чтобы

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j &= \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{a}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{a}^i. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Это — основное свойство кобазиса. Ортонормированный (ортонормальный) базис может быть определён как совпадающий со своим кобазисом:  $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ .

Для, к примеру, первого вектора кобазиса  $\mathbf{a}^1$

$$\begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \gamma \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 = 1/\gamma \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \\ \gamma = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 \end{cases}$$

Коэффициент  $\gamma$  получился равным (с точностью до знака для “левой” тройки  $\mathbf{a}_i$ ) объёму параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}_i$ . In § 6 the same volume was presented as  $\sqrt{g}$ , and this is not without reason, because it coincides with the square root

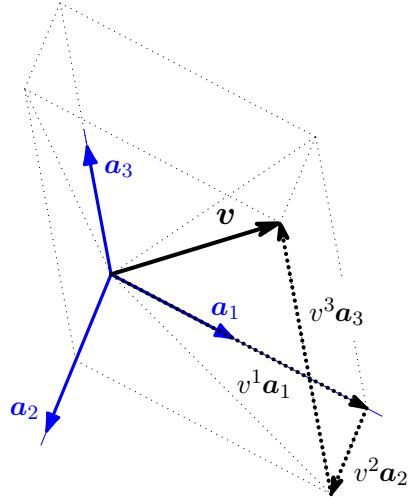


figure 6

of gramian  $g \equiv \det g_{ij}$  — determinant of the symmetric J. P. Gram matrix  $g_{ij} \equiv \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ .

○ The proof resembles the derivation of (6.7). The “triple product”  $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k$  in some orthonormal basis  $\mathbf{e}_i$  вычисли́мо как детерминант (с “—” для “левой” тройки  $\mathbf{a}_i$ ) по строкам

$$\in_{ijk} \equiv \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

или по столбцам

$$\in_{pqr} \equiv \mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{a}_r = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}.$$

Произведение определителей  $\in_{ijk} \in_{pqr}$  равно определителю произведения матриц, and elements of the latter are sums like  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_s = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p$ , в результате

$$\in_{ijk} \in_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_r \end{bmatrix};$$

$$i=p=1, j=q=2, k=r=3 \Rightarrow \in_{123} \in_{123} = \det_{i,j} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = \det_{i,j} g_{ij}. \quad \bullet$$

Представляя  $\mathbf{a}^1$  и остальные векторы кобазиса суммой

$$\pm 2\sqrt{g} \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 - \overbrace{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2}^{+\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3},$$

приходим к общей формуле (с “—” для “левой” тройки  $\mathbf{a}_i$ )

$$\mathbf{a}^i = \pm \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{ijk} \mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k, \quad \sqrt{g} \equiv \pm \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 > 0. \quad (12.3)$$

Здесь  $e^{ijk}$  по-прежнему символ перестановки Veblen’a ( $\pm 1$  или 0):  $e^{ijk} \equiv e_{ijk}$ . Произведение  $\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k = \epsilon_{jkn} \mathbf{a}^n$ , компоненты тензора Лёви-Чивиты  $\epsilon_{jkn} = \pm e_{jkn} \sqrt{g}$ , and by (6.8)  $e^{ijk} e_{jkn} = 2\delta_n^i$ . Thus

$$\mathbf{a}^1 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{a}^2 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{a}^3 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2).$$

*Example.* Get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$\sqrt{g} = -\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2;$$

$$-\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_2 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$-\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_2 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2,$$

$$-\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$$

and finally

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^3 = \frac{1}{2} (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

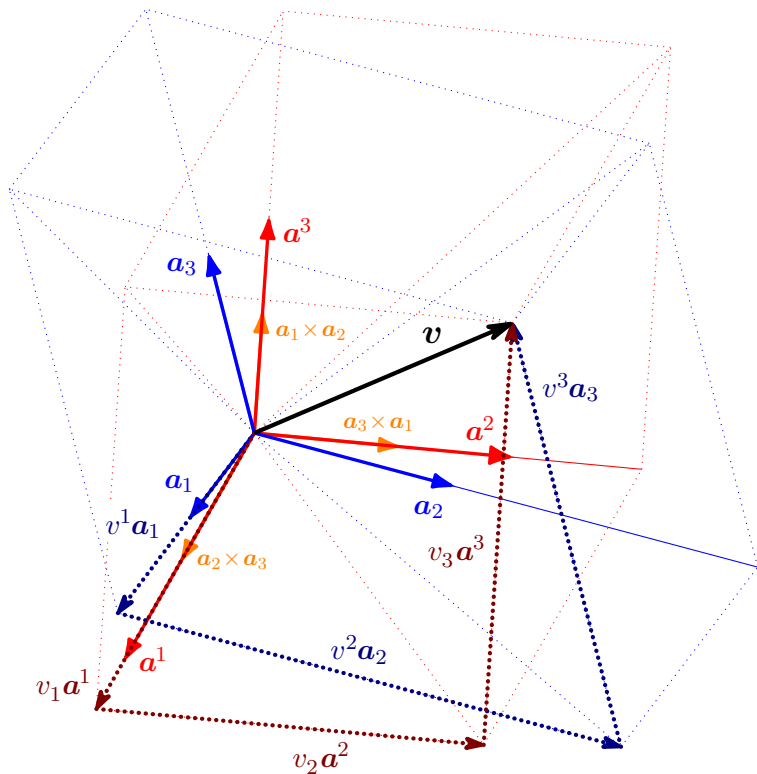
Имея кобазис, возможно не только разложить по нему любой вектор (рис. 7), но и найти коэффициенты разложения (12.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{a}_i = v_i \mathbf{a}^i, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^i &= v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = v^i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Коэффициенты  $v_i$  называются ковариантными компонентами вектора  $\mathbf{v}$ , а  $v^i$  — его контравариантными\* компонентами.

Есть литература о тензорах, где introducing existence and различают ковариантные и контравариантные... векторы (and “covectors”, “dual vectors”). Не сто́ит вводить читателя в заблуждение: вектор-то один и тот же, просто разложение по двум разным базисам даёт два набора компонент.

\* Потому что они меняются обратно (contra) изменению длин базисных векторов  $\mathbf{a}_i$ .



$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \sqrt{g} = 0.56274$$

$$1/\sqrt{g} = 1.77703$$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_i^j$$

рисунок 7  
 “Decomposition of vector in oblique basis”

От векторов перейдём к тензорам второй сложности. Имеем четыре комплекта диад:  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}_j$ . Сопасаующиеся коэффициенты в декомпозиции тензора называются его контравариантными, ковариантными и смешанными компонентами:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} &= B^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = B_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j = B_j^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = B_i^j \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j, \\ B^{ij} &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j, \quad B_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \\ B_j^i &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \quad B_i^j = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Для двух видов смешанных компонент точка в индексе это просто свободное место: у  $B_j^i$  верхний индекс “ $i$ ” — первый, а нижний “ $j$ ” — второй.

Компоненты единичного (“метрического”) тензора  $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}^k \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k \mathbf{a}^k = g_{jk} \mathbf{a}^j \mathbf{a}^k = g^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k: \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \equiv g_{ij}, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j \equiv g^{ij}; \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= g_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \cdot g^{nk} \mathbf{a}_n \mathbf{a}_k = g_{ij} g^{jk} \mathbf{a}^i \mathbf{a}_k = \mathbf{E} \Rightarrow g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Вдобавок к (12.2) и (12.3) открылся ещё один способ найти векторы кобазиса — через матрицу  $g^{ij}$ , обратную матрице Грама  $g_{ij}$ . И наоборот:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk} \mathbf{a}_j \delta_k^i = g^{ji} \mathbf{a}_j, \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk} \mathbf{a}^j \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk} \mathbf{a}^j \delta_i^k = g_{ji} \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (12.7)$$

*Example.* Using reversed Gram matrix, get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det g_{ij} = 4,$$

$$\text{adj } g_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^\top,$$

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{\text{adj } g_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Using  $\mathbf{a}^i = g^{ij} \mathbf{a}_j$

$$\mathbf{a}^1 = g^{11} \mathbf{a}_1 + g^{12} \mathbf{a}_2 + g^{13} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^2 = g^{21} \mathbf{a}_1 + g^{22} \mathbf{a}_2 + g^{23} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^3 = g^{31} \mathbf{a}_1 + g^{32} \mathbf{a}_2 + g^{33} \mathbf{a}_3 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3.$$

...

Единичный тензор (unit tensor, identity tensor, metric tensor)

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{trace } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{trace } \mathbf{A} \neq \text{not anymore } A_{jj}$$

Thus for, say, trace of some tensor  $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j$ :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{trace } \mathbf{A}$ , you have

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{r}_{\partial k} \mathbf{r}^k = A_{ij} \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = A_{ij} g^{ij}$$

...

Тензор поворота (rotation tensor)

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}_i \hat{\mathbf{a}}^i = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{-\top}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \hat{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^\top$$

$$\mathbf{P}^\top = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \hat{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \mathbf{P}^{-1}$$

...



... Характеристическое уравнение (8.2) быстро приводит к тождеству Кэли–Гамильтона (Cayley–Hamilton)

$$\begin{aligned} -\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{I} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{II} \mathbf{B} + \mathbf{III} \mathbf{E} &= {}^2\mathbf{0}, \\ -\mathbf{B}^3 + \mathbf{I} \mathbf{B}^2 - \mathbf{II} \mathbf{B} + \mathbf{III} \mathbf{E} &= {}^2\mathbf{0}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

### §13. Tensor functions

In the concept of function  $y=f(x)$  as of mapping (morphism)  $f: x \mapsto y$ , an input (argument)  $x$  and an output (result)  $y$  may be tensors of any complexities.

Consider at least a scalar function of a bivalent tensor  $\varphi=\varphi(\mathbf{B})$ . Examples are  $\mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{\Phi}$  (or  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}$ ) and  $\mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{B}$ . Then in each basis  $\mathbf{a}_i$  paired with cobasis  $\mathbf{a}^i$  we have function  $\varphi(B_{ij})$  of nine numeric arguments — components  $B_{ij}$  of tensor  $\mathbf{B}$ . For example

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{\Phi} = B_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \cdot \cdot \mathbf{a}_m \mathbf{a}_n \mathbf{\Phi}^{mn} = B_{ij} \mathbf{\Phi}^{ji} = \varphi(B_{ij}).$$

With any transition to a new basis, the result doesn't change:  $\varphi(B_{ij}) = \varphi(B'_{ij}) = \varphi(\mathbf{B})$ .

Differentiation of  $\varphi(\mathbf{B})$  looks like

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} dB_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top. \quad (13.1)$$

Tensor  $\partial \varphi / \partial \mathbf{B}$  is called the derivative of function  $\varphi$  by argument  $\mathbf{B}$ ;  $d\mathbf{B}$  is the differential of tensor  $\mathbf{B}$ ,  $d\mathbf{B} = dB_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$ ;  $\partial \varphi / \partial B_{ij}$  are components (contravariant ones) of  $\partial \varphi / \partial \mathbf{B}$

$$\mathbf{a}^i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{a}^j = \frac{\partial \varphi}{\partial B} \cdot \cdot \mathbf{a}^j \mathbf{a}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j.$$

...

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{\Phi}$$

$$d\varphi = d(\mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{\Phi}) = d\mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi} \cdot \cdot d\mathbf{B} = \mathbf{\Phi}^\top \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top, \quad \frac{\partial(\mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{\Phi})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{\Phi}^\top$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{qp}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{pq}$$

...

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet \bullet \mathbf{B}$$

$$d\varphi = d(\mathbf{B} \bullet \bullet \mathbf{B}) = d \dots$$

...

Но согласно опять-таки (12.8)  $-\mathbf{B}^2 + \mathbf{I}\mathbf{B} - \mathbf{II}\mathbf{E} + \mathbf{III}\mathbf{B}^{-1} = {}^2\mathbf{0}$ , поэтому

...

Скалярная функция  $\varphi(\mathbf{B})$  называется изотропной, если она не чувствительна к повороту аргумента:

$$\varphi(\mathbf{B}) = \varphi(\mathbf{O} \bullet \overset{\circ}{\mathbf{B}} \bullet \mathbf{O}^\top) = \varphi(\overset{\circ}{\mathbf{B}}) \quad \forall \mathbf{O} = \mathbf{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i = \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{O}^{-\top}$$

для любого ортогонального тензора  $\mathbf{O}$  (тензора поворота, § 9).

Симметричный тензор  $\mathbf{B}^S$  полностью определяется тройкой инвариантов и угловой ориентацией собственных осей (они же взаимно ортогональны, § 8). Ясно, что изотропная функция  $\varphi(\mathbf{B}^S)$  симметричного аргумента является функцией лишь инвариантов  $\mathbf{I}(\mathbf{B}^S)$ ,  $\mathbf{II}(\mathbf{B}^S)$ ,  $\mathbf{III}(\mathbf{B}^S)$ ; она дифференцируется согласно (??), где транспонирование излишне.

## § 14. Tensor fields. Spatial differentiation

*Tensor field* is a tensor varying from point to point (variable in space, coordinate dependent)

Пусть в каждой точке некоторой области трёхмерного пространства определена величина  $\varsigma$ . Тогда имеем поле  $\varsigma = \varsigma(\mathbf{r})$ , where  $\mathbf{r}$  is location vector (radius vector) of a point in space. Величина  $\varsigma$  может быть тензором любой сложности. Пример скалярного поля — поле температуры в среде, векторного поля — скорости частиц жидкости.

Не только для решения прикладных задач, но нередко и в “чистой теории” вместо аргумента  $\mathbf{r}$  используется набор (какая-либо тройка) криволинейных координат  $q^i$ . Если непрерывно менять лишь одну координату из трёх, получается координатная линия. Каждая точка трёхмерного пространства лежит на пересечении трёх координатных линий (рис. 8). Вектор положения точки выражается через набор координат as relation  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ .

Curvilinear coordinates may be derived from a set of rectangular (“cartesian”) coordinates by using a transformation that is locally invertible (a one-to-one map) at each point. Therefore, rectangular coordinates of any point can be converted to its curvilinear coordinates and vice versa.

Commonly used sets of coordinates are rectangular (“cartesian”), spherical and cylindrical.

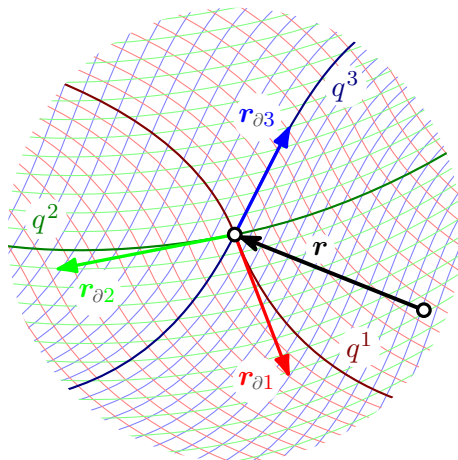


figure 8

...

...

The differential of a function presents a change in the linearization of this function.

...

partial derivative

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$$

...

differential of  $\varsigma(q^i)$

$$d\varsigma = \frac{\partial \varsigma}{\partial q^i} dq^i = \partial_i \varsigma dq^i \quad (14.1)$$

...

Linearity

$$\partial_i (\lambda p + \mu q) = \lambda (\partial_i p) + \mu (\partial_i q) \quad (14.2)$$

“Product rule”

$$\partial_i (p \circ q) = (\partial_i p) \circ q + p \circ (\partial_i q) \quad (14.3)$$

...

Local basis  $\mathbf{r}_{\partial i}$

The differential of location vector  $\mathbf{r}(q^i)$  is

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = dq^i \mathbf{r}_{\partial i}, \quad \mathbf{r}_{\partial i} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \mathbf{r} \quad (14.4)$$

...

Local cobasis  $\mathbf{r}^i, \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \delta_j^i$

...

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varsigma}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial \varsigma}{\partial q^i} \mathbf{r}^i = \partial_i \varsigma \mathbf{r}^i \\ d\varsigma &= \frac{\partial \varsigma}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \partial_i \varsigma \mathbf{r}^i \cdot dq^j \mathbf{r}_{\partial j} = \partial_i \varsigma dq^i \end{aligned} \quad (14.5)$$

...

Bivalent unit tensor (identity tensor, metric tensor)  $\mathbf{E}$ , the one which is neutral (3.6) to the dot product operation, can be represented as

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_{\partial i} = \underbrace{\mathbf{r}^i \partial_i}_{\nabla} \mathbf{r} = \nabla \mathbf{r}, \quad (14.6)$$

where appears the differential “nabla” operator

$$\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i. \quad (14.7)$$

...

$$d\varsigma = \frac{\partial \varsigma}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \varsigma = \partial_i \varsigma dq^i \quad (14.8)$$

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \overbrace{\mathbf{E}}^{\mathbf{E}}$$

...

Divergence of the dyadic product of two vectors

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}) &= \mathbf{r}^i \partial_i \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{r}^i \cdot \partial_i (\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{r}^i \cdot (\partial_i \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{a} (\partial_i \mathbf{b}) = \\ &= (\mathbf{r}^i \cdot \partial_i \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{b}) = (\mathbf{r}^i \partial_i \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{b}) = \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (14.9)$$

— here’s no need to expand vectors  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$ , expanding just differential operator  $\nabla$ .

...

Gradient of cross product of two vectors, applying “product rule” (14.3) and relation (6.5) for any two vectors (partial derivative  $\partial_i$  of some vector by scalar coordinate  $q^i$  is a vector too)

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{r}^i \partial_i (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \partial_i \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \partial_i \mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \\ &= \nabla \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \nabla \mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (14.10)\end{aligned}$$

...

Gradient of dot product of two vectors

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \mathbf{r}^i \partial_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{r}^i \mathbf{a} \cdot (\partial_i \mathbf{b}) = \\ &= (\mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}. \quad (14.11)\end{aligned}$$

...

...

## § 15. Integral theorems

Для векторных полей известны интегральные теоремы Gauss'а и Stokes'а.

Gauss' theorem (divergence theorem) enables an integral taken over a volume to be replaced by one taken over the closed surface bounding that volume, and vice versa.

Stokes' theorem enables an integral taken around a closed curve to be replaced by one taken over *any* surface bounded by that curve. Stokes' theorem relates a line integral around a closed path to a surface integral over what is called a *capping surface* of the path.

Теорема Гаусса о дивергенции — про то, как заменить объёмный интеграл поверхностным (and vice versa). В этой теореме рассматривается поток (ef)flux вектора через ограничивающую объём  $V$  замкнутую поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$  с единичным вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$

$$\oint_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\mathcal{O} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV. \quad (15.1)$$

Объём  $V$  нарезается тремя семействами координатных поверхностей на множество бесконечно малых элементов. Поток через поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$  равен сумме потоков через края получившихся элементов. В бесконечной малости каждый такой элемент — маленький локальный дифференциальный кубик (параллелепипед). ... Поток вектора  $\mathbf{a}$  через грани малого кубика объёма  $dV$  есть  $\sum_{i=1}^6 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a} \mathcal{O}_i$ , а через сам этот объём поток равен  $\nabla \cdot \mathbf{a} dV$ .

Похожая трактовка этой теоремы есть, к примеру, в курсе Richard'a Feynman'a [84].

( рисунок с кубиками )

to dice — нарезать кубиками

small cube, little cube

локально ортонормальные координаты  $\boldsymbol{\xi} = \xi_i \mathbf{n}_i$ ,  $d\boldsymbol{\xi} = d\xi_i \mathbf{n}_i$ ,  
 $\nabla = \mathbf{n}_i \partial_i$

разложение вектора  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{n}_i$

Теорема Стокса о циркуляции выражается равенством

...



...

## § 16. Curvature tensors

The *Riemann curvature tensor* or *Riemann–Christoffel tensor* (after **Bernhard Riemann** and **Elwin Bruno Christoffel**) is the most common method used to express the curvature of Riemannian manifolds. It's a tensor field, it assigns a tensor to each point of a Riemannian manifold, that measures the extent to which the metric tensor is not locally isometric to that of “flat” space. The curvature tensor measures noncommutativity of the covariant derivative, and as such is the integrability obstruction for the existence of an isometry with “flat” space.

~ from Wikipedia, the free encyclopedia

Рассматривая тензорные поля в криволинейных координатах (§ 14), мы исходили из представления вектора-радиуса (вектора положения) точки функцией этих координат:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ . Этим отношением порождаются выражения

- ✓ векторов локального касательного базиса  $\mathbf{r}_{\partial i} \equiv \partial \mathbf{r} / \partial q^i \equiv \partial_i \mathbf{r}$ ,
- ✓ компонент  $g_{ij} \equiv \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j}$  и  $g^{ij} \equiv \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = g_{ij}^{-1}$  единичного “метрического” тензора  $\mathbf{E} = \mathbf{r}_{\partial i} \mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_{\partial i} = g_{jk} \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k = g^{jk} \mathbf{r}_{\partial j} \mathbf{r}_{\partial k}$ ,
- ✓ векторов локального взаимного кокасательного базиса  $\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \delta_j^i$ ,  $\mathbf{r}^i = g^{ij} \mathbf{r}_{\partial j}$ ,
- ✓ дифференциального набла-оператора Hamilton’а  $\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$ ,  $\mathbf{E} = \nabla \mathbf{r}$ ,
- ✓ полного дифференциала  $d\xi = d\mathbf{r} \cdot \nabla \xi$ ,
- ✓ частных производных касательного базиса (вторых частных производных  $\mathbf{r}$ )  $\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \equiv \partial_i \partial_j \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_{\partial j}$ ,
- ✓ символов “связности” Христоффеля (Christoffel symbols)  $\Gamma_{ij}^k \equiv \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}^k$  и  $\Gamma_{ijk} \equiv \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k}$ .

Представим теперь, что функция  $\mathbf{r}(q^k)$  не известна, но зато в каждой точке пространства определены шесть независимых элементов положительной симметричной метрической матрицы Грама  $g_{ij}(q^k)$ .

Билинейная форма

...

Поскольку шесть функций  $g_{ij}(q^k)$  происходят от векторной функции  $\mathbf{r}(q^k)$ , то между элементами  $g_{ij}$  существуют некие соотношения.

Differential  $d\mathbf{r}$  (14.4) is exact. This is true if and only if second partial derivatives commute:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\partial k} dq^k \Leftrightarrow \partial_i \mathbf{r}_{\partial j} = \partial_j \mathbf{r}_{\partial i} \text{ or } \mathbf{r}_{\partial i \partial j} = \mathbf{r}_{\partial j \partial i}.$$

Но это условие уже обеспечено симметрией  $g_{ij}$

...

metric (“affine”) connection  $\nabla_i$ , её же называют “covariant derivative”

$$\mathbf{r}_{\partial i \partial j} = \underbrace{\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}^k}_{\Gamma_{ij}^k} \mathbf{r}_{\partial k} = \underbrace{\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}^k}_{\Gamma_{ij\dot{k}}^E} \mathbf{r}_{\partial k}$$

$$\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_{\partial k} = \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{\partial k} = \mathbf{r}_{\partial i \partial j}$$

covariant derivative (affine connection) is only defined for vector fields

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \partial_i (v^j \mathbf{r}_{\partial j}) = \mathbf{r}^i (\partial_i v^j \mathbf{r}_{\partial j} + v^j \mathbf{r}_{\partial i \partial j})$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_{\partial j} \nabla_i v^j, \quad \nabla_i v^j \equiv \partial_i v^j + \Gamma_{in}^j v^n$$

$$\nabla \mathbf{r}_{\partial i} = \mathbf{r}^k \partial_k \mathbf{r}_{\partial i} = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{\partial k \partial i} = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{\partial n} \Gamma_{ki}^n, \quad \nabla_i \mathbf{r}_{\partial n} = \Gamma_{in}^k \mathbf{r}_{\partial k}$$

Christoffel symbols describe a metric (“affine”) connection, that is how the basis changes from point to point.

символы Христоффеля это “components of connection” in local coordinates

...

torsion tensor  ${}^3\mathfrak{T}$  with components

$$\mathfrak{T}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

determines the antisymmetric part of a connection

...

симметрия  $\Gamma_{ij\dot{k}} = \Gamma_{ji\dot{k}}$ , поэтому  $3^3 - 3 \cdot 3 = 18$  разных (независимых)  $\Gamma_{ij\dot{k}}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^n g_{nk} &= \Gamma_{ijk} = \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} = \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial i \partial j} + \mathbf{r}_{\partial j \partial i}) \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial j \partial k} - \mathbf{r}_{\partial k \partial j}) \cdot \mathbf{r}_{\partial i} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial i \partial k} - \mathbf{r}_{\partial k \partial i}) \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \mathbf{r}_{\partial i \partial k} \cdot \mathbf{r}_{\partial j}) + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial j \partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \mathbf{r}_{\partial j \partial k} \cdot \mathbf{r}_{\partial i}) - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\partial k \partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j} + \mathbf{r}_{\partial k \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial i}) = \\
&= \frac{1}{2}(\partial_i(\mathbf{r}_{\partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k}) + \partial_j(\mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial k}) - \partial_k(\mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j})) = \\
&= \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad (16.1)
\end{aligned}$$

Все символы Christoffel'я тождественно равны нулю лишь в ортонормальной (декартовой) системе. (А какие они для ко-соугольной?)

Дальше:  $d\mathbf{r}_{\partial i} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{r}_{\partial i} = dq^k \partial_k \mathbf{r}_{\partial i} = \mathbf{r}_{\partial k \partial i} dq^k$  — тоже полные дифференциалы.

$$d\mathbf{r}_{\partial k} = \partial_i \mathbf{r}_{\partial k} dq^i = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial k}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial k}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial k}}{\partial q^3} dq^3$$

Поэтому  $\partial_i \partial_j \mathbf{r}_{\partial k} = \partial_j \partial_i \mathbf{r}_{\partial k}$ ,  $\partial_i \mathbf{r}_{\partial j \partial k} = \partial_j \mathbf{r}_{\partial i \partial k}$ , и трёхиндексный объект из векторов третьих частных производных

$$\mathbf{r}_{\partial i \partial j \partial k} \equiv \partial_i \partial_j \partial_k \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_{\partial j \partial k} \quad (16.2)$$

симметричен по первому и второму индексам (а не только по второму и третьему). И тогда равен нулю <sup>4</sup> $\mathbf{0}$  следующий тензор четвёртой сложности — *Riemann curvature tensor* (or *Riemann–Christoffel tensor*)

$${}^4\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{hijk} \mathbf{r}^h \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k, \quad \mathfrak{R}_{hijk} \equiv \mathbf{r}_{\partial h} \cdot (\mathbf{r}_{\partial j \partial i \partial k} - \mathbf{r}_{\partial i \partial j \partial k}). \quad (16.3)$$

Выразим компоненты  $\mathfrak{R}_{ijkn}$  через метрическую матрицу  $g_{ij}$ . Начнём с дифференцирования локального кобазиса:

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial k} = \delta_k^i \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial j \partial k} = 0 \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{r}^k.$$

...

Шесть независимых компонент:  $\mathfrak{R}_{1212}$ ,  $\mathfrak{R}_{1213}$ ,  $\mathfrak{R}_{1223}$ ,  $\mathfrak{R}_{1313}$ ,  $\mathfrak{R}_{1323}$ ,  $\mathfrak{R}_{2323}$ .

...

Symmetric bivalent *Ricci curvature tensor*

$$\mathcal{R} \equiv \frac{1}{4} \mathfrak{R}_{abij} \mathbf{r}^a \times \mathbf{r}^b \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j = \frac{1}{4} \epsilon^{abp} \epsilon^{ijq} \mathfrak{R}_{abij} \mathbf{r}_{\partial p} \mathbf{r}_{\partial q} = \mathcal{R}^{pq} \mathbf{r}_{\partial p} \mathbf{r}_{\partial q}$$

(coefficient  $\frac{1}{4}$  is used here for convenience) with components

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{11} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{2323}, \\ \mathcal{R}^{21} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1323}, \quad \mathcal{R}^{22} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1313}, \\ \mathcal{R}^{31} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1223}, \quad \mathcal{R}^{32} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1213}, \quad \mathcal{R}^{33} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1212}.\end{aligned}$$

Равенство тензора Риччи нулю  $\mathcal{R} = {}^2\mathbf{0}$  (в компонентах это шесть уравнений  $\mathcal{R}^{ij} = \mathcal{R}^{ji} = 0$ ) is the **necessary** condition of integrability (“compatibility”) для нахождения вектора-радиуса  $\mathbf{r}(q^k)$  по полю  $g_{ij}(q^k)$ .

## Bibliography

There’re many books, where only the apparatus of tensor calculus is described [96, 97, 98, 99, 100]. However, “the index approach” prevails — tensors are treated as matrices of components, transforming in a known way. “The direct approach” to tensors is explicated, for instance, in the appendices of books by А. И. Лурье (A. I. Lurie) [22, 23]. R. Feynman’s lectures [84] contain a vivid description of vector fields. Information about tensor calculus is also a piece of especial and profound C. Truesdell’s book [57].

*chapter 2*

# FUNDAMENTALS OF CLASSICAL GENERIC MECHANICS

## §1. Discrete collection of particles

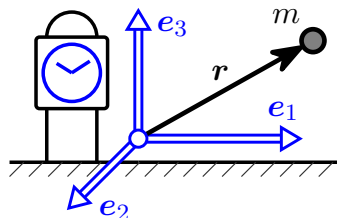
Classical generic mechanics models physical objects by discretizing them into a collection of particles (“pointlike masses”, “material points”<sup>\*</sup>).

In a collection of  $N$  particles, each  $k$ -th particle has its nonzero mass  $m_k = \text{constant} > 0$  and motion function  $\mathbf{r}_k(t)$ . Function  $\mathbf{r}_k(t)$  is measured relative to the chosen reference system.

A reference system (also “reference frame”) consists of (fig. 9)

- ✓ some “null” reference point,
- ✓ a set of coordinates,
- ✓ any clock.

“Any” clock — because (in classical generic mechanics) time tick-tocks, flows and passes identically in any clock in any place, and all clocks are perfectly synchronized.



*figure 9*

Long time ago, the reference system was some absolute space: empty at first, and then filled with the continuous elastic medium — the æther. Later it became clear that for classical mechanics any reference systems can be used, but the preference is given to the so called “inertial” systems, where a point moves with a constant

<sup>\*</sup> Point mass (pointlike mass, material point) is the concept of an object, typically matter, that has nonzero mass and is (or is being thought of as) infinitesimal in its volume (dimensions).

velocity without acceleration ( $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{r}} = \text{constant}$ ) in the absence of external interactions.

The measure of interaction in mechanics is the vector of force  $\mathbf{F}$ . In the widely known\* Newton's equation

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (1.1)$$

the right-hand side can depend only on position, velocity and explicitly presented time, whereas acceleration  $\ddot{\mathbf{r}}$  is directly proportional to force  $\mathbf{F}$  with coefficient  $1/m$ .

Here're theses of the dynamics of a collection of particles.

The force acting on the  $k$ -th particle (fig. 10)

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)}. \quad (1.2)$$

$\mathbf{F}_k^{(e)}$  is the external force — such forces emanate from objects outside the considered system. The second addend is the sum of internal forces (force  $\mathbf{F}_{kj}^{(i)}$  is the interaction induced by the  $j$ -th particle on the  $k$ -th particle). Internal interactions happen only between elements of the observed system and don't affect (mechanically) anything other. Neither particle interacts with itself,  $\mathbf{F}_{kk}^{(i)} = \mathbf{0} \forall k$ .

From (1.2) together with the action–reaction principle

$$\mathbf{F}_{kj}^{(i)} = -\mathbf{F}_{jk}^{(i)} \forall k, j \Rightarrow \sum_k \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0},$$

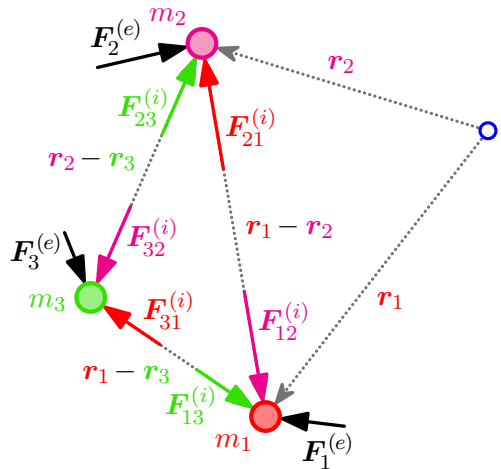


figure 10

\*“Axiomata sive Leges Motus” (“Axioms or Laws of Motion”) were written by Isaac Newton in his *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, first published in 1687. Reprint (en Latin), 1871. Translated into English by Andrew Motte, 1846.

ensues the balance of momentum

$$\left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^{\bullet} = \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.3)$$

The moment acting on the  $k$ -th particle

$$\mathbf{r}_k \times m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{r}_k \times \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)}. \quad (1.4)$$

It is relative to the reference point.

When in addition to the action–reaction principle, internal interactions between particles are central, that is

$$\mathbf{F}_{kj}^{(i)} \parallel (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \Leftrightarrow (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0},$$

the balance of angular (rotational) momentum comes out\*

$$\left( \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^{\bullet} = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.5)$$

Changes in momentum and angular momentum are determined only by external forces  $\mathbf{F}_k^{(e)}$ .

...

$$\begin{aligned} * \left( \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^{\bullet} &= \sum_k \dot{\mathbf{r}}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k + \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \ddot{\mathbf{r}}_k, \\ \mathbf{F}_{kj}^{(i)} &= -\mathbf{F}_{jk}^{(i)} \text{ and } (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=k+1}^N (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0} \end{aligned}$$



## §2. Absolutely rigid undeformable solid body

An absolutely rigid undeformable body is a solid\* body, in which deformation is zero (or negligibly small — so small that it can be neglected). The distance between any two points of a non-deformable rigid body remains constant regardless of external forces exerted on it.

A non-deformable rigid body is modeled using the “continual approach” — as a continuous distribution of mass (material continuum), rather than using the “discrete approach” — modeling as a discrete collection of body’s particles.

The mass of a material continuum is distributed in its volume continuously

$$dm \equiv \rho dV \quad (2.1)$$

( $\rho$  is volume(tric) mass density and  $dV$  is infinitesimal volume).

A formula with summation over discrete points turns into a formula for a continuous body by replacing particle masses with mass (2.1) of volume element  $dV$  and integrating over the whole volume of a body. In particular, here are formulas for the (linear) momentum

$$\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \text{ becomes } \int_V \dot{\mathbf{r}} dm \quad (2.2)$$

and the angular (rotational) momentum

$$\sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \text{ becomes } \int_V \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dm. \quad (2.3)$$

To fully describe the location (position, place) of any non-deformable body with all its points, it’s enough to choose some unique point as the “pole”, to find or to set the location  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$  of the chosen point, as well as the angular orientation of a body relative to the pole (fig. 11). As a result, any motion of an undeformable rigid body is either a rotation around the chosen pole, or an equal

\*“Rigid” is inelastic and not flexible, and “solid” is not fluid. A solid substance retains its size and shape without a container (as opposed to a fluid substance — liquid or gas).

displacement of the pole and all body's points — translation (linear motion)\*, or a combination of them both.

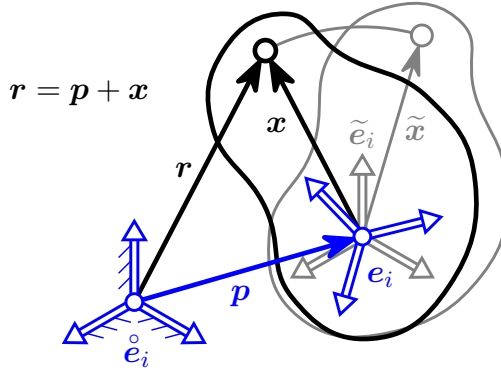


figure 11

$\dot{\mathbf{e}}_i$  — triplet of orthonormal basis vectors, immovable relatively to the absolute (or any inertial) reference system

Имея неподвижный базис  $\dot{\mathbf{e}}_i$  and движущийся вместе с телом базис  $\mathbf{e}_i$ , ...

Если добавить базис  $\mathbf{e}_i$  (этот базис движется вместе с телом), то угловая ориентация тела может быть определена тензором поворота  $\mathbf{O} \equiv \mathbf{e}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$ .

Then any motion of a body is completely described by two functions  $\mathbf{p}(t)$  and  $\mathbf{O}(t)$ .

Вектор положения некоторой точки тела

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{x} \quad (2.4)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = x_i \tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

$$(9.3), \S 1.9$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{O} \cdot \tilde{\mathbf{x}}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{x}},$$

For a non-deformable rigid body, components  $x_i$  don't depend on time:  $x_i = \text{constant}(t)$  and  $\dot{\mathbf{x}} = x_i \dot{\mathbf{e}}_i$

\* A translation can also be thought of as a rotation with the revolution center at infinity.

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{x}}$$

$$x_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{O}} \cdot x_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \Leftrightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{O}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$$

...

The linear momentum and the rotational (angular) momentum of a non-deformable continuous body are described by the following integrals

...

...

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{p} dm = \mathbf{p} \int_{\mathcal{V}} dm = \mathbf{p} m$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm = \mathbf{\Xi} m, \quad \mathbf{\Xi} \equiv m^{-1} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm$$

Three inertial characteristics of the body:

- ✓ integral mass  $m = \int_{\mathcal{V}} dm = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$  — the mass of the whole body,
- ✓ eccentricity vector  $\mathbf{\Xi}$  — measures the offset of the chosen pole from the body's “center of mass”,
- ✓ inertia tensor  ${}^2\mathfrak{J}$ .

The eccentricity vector is equal to the null vector only when the chosen pole coincides with the “center of mass” — the unique point within a body with location vector  $\mathbf{n}$ , in short

$$\mathbf{\Xi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{n}.$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{p}, \quad \mathbf{\Xi} m = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r} - \mathbf{n}) dm = \mathbf{0},$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dm - \mathbf{n} \int_{\mathcal{V}} dm = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{n} = m^{-1} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dm$$

...

Introducing (pseudo)vector of angular velocity  $\boldsymbol{\omega}$ , ...

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i$$

...

inertia tensor  ${}^2\mathfrak{J}$

$${}^2\mathfrak{J} \equiv - \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{x} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{E}) dm = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \mathbf{E} - \mathbf{x} \mathbf{x}) dm$$

It is assumed (can be proven?) that the inertia tensor changes only due to a rotation

$${}^2\mathfrak{J} = \mathbf{O} \cdot {}^2\mathfrak{J}^{\circ} \cdot \mathbf{O}^{\top}$$

and its components in basis  $\mathbf{e}_i$  (moving together with a body) don't change over time

$${}^2\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b, \quad \mathfrak{J}_{ab} = \text{constant}(t)$$

thus the time derivative is

$$\begin{aligned} {}^2\dot{\mathfrak{J}} &= \mathfrak{J}_{ab} (\dot{\mathbf{e}}_a \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \dot{\mathbf{e}}_b) = \mathfrak{J}_{ab} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_b) = \\ &= \mathfrak{J}_{ab} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b - \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \times {}^2\mathfrak{J} - {}^2\mathfrak{J} \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Substitution of (...) into (1.3) and (1.5) gives equations of balance — the balance of linear momentum and the balance of rotational momentum — for a model of continuous non-deformable rigid body

...

here  $\mathbf{f}$  is the external force per mass unit,  $\mathbf{F}$  is the resultant of external forces (also called the “equally acting force” or the “main vector”),  $\mathbf{M}$  is the resultant of external couples (the “main couple”, the “main moment”).

...

— Are there any scenarios for which the center of mass is not almost exactly equivalent to the center of gravity?

— Non-uniform gravity field. In a uniform gravitational field, the center of mass is equal to the center of gravity.

...

*Work*

$$W(\mathbf{F}, \mathbf{u}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$$

as the exact (full) differential

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \cdot d\mathbf{F} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u}$$

by “product rule”

$$dW = d(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{u}, \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{F}$$

...

### *Constraints*

Imposed on the positions and velocities of particles, there are restrictions of a geometrical or kinematical nature, called constraints.

Holonomic constraints are relations between position variables (and possibly time) which can be expressed as equality like

$$f(q^1, q^2, q^3, \dots, q^n, t) = 0,$$

where  $q^1, q^2, q^3, \dots, q^n$  are  $n$  parameters (coordinates) that fully describe the system.

A constraint that cannot be expressed as such is nonholonomic.

Holonomic constraint depends only on coordinates and time. It does not depend on velocities or any higher time derivatives.

Velocity-dependent constraints like

$$f(q^1, q^2, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n, t) = 0$$

are mostly not holonomic.

For example, the motion of a particle constrained to lie on a sphere's surface is subject to a holonomic constraint, but if the particle is able to fall off a sphere under the influence of gravity, the constraint becomes non-holonomic. For the first case the holonomic constraint may be given by the equation:  $r^2 - a^2 = 0$ , where  $r$  is the distance from the centre of a sphere of radius  $a$ . Whereas the second non-holonomic case may be given by:  $r^2 - a^2 \geq 0$ .

Three examples of nonholonomic constraints are: when the constraint equations are nonintegrable, when the constraints have inequalities, or with complicated non-conservative forces like friction.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q^1, q^2, \dots, q^n, t)$$

(assuming  $n$  independent parameters/coordinates)

### §3. Principle of virtual work

*Mécanique analytique* (1788–89) is a two volume French treatise on analytical mechanics, written by Joseph Louis Lagrange, and published 101 years following Isaac Newton's *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

**Joseph Louis Lagrange.** *Mécanique analytique*. Nouvelle édition, revue et augmentée par l'auteur. Tome premier. Mme Ve Courcier, Paris, 1811. 490 pages.

**Joseph Louis Lagrange.** *Mécanique analytique*. Troisième édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand. Tome second. Mallet-Bachelier, Paris, 1855. 416 pages.

The historical transition from geometrical methods, as presented in Newton's *Principia*, to methods of mathematical analysis.

Consider the exact differential of any set of location vectors  $\mathbf{r}_i$ , that are functions of other variable parameters (coordinates)  $q^1, q^2, \dots, q^n$  and time  $t$ .

The actual displacement is the differential

$$d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} dq^j$$

Now, imagine an arbitrary path through the configuration space/manifold. This means it has to satisfy the constraints of the system but not the actual applied forces

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j$$

A virtual infinitesimal displacement of a system of particles refers to a change in the configuration of a system as the result of any arbitrary infinitesimal change of location vectors (or coordinates)  $\delta \mathbf{r}_k$ , consistent with the forces and constraints imposed on the system at the current/given instant  $t$ . This displacement is called “virtual” to distinguish it from an actual displacement of the system occurring in a time interval  $dt$ , during which the forces and constraints may be changing.

Assume the system is in equilibrium, that is the full force on each particle vanishes,  $\mathbf{F}_i = \mathbf{0} \forall i$ . Then clearly the term  $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ , which is the virtual work of force  $\mathbf{F}_i$  in displacement  $\delta \mathbf{r}_i$ , also vanishes for each

particle,  $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \ \forall i$ . The sum of these vanishing products over all particles is likewise equal to zero:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Decompose the full force  $\mathbf{F}_i$  into the applied (active) force  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  and the force of constraint  $\Phi_i$ ,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \Phi_i$$

We now restrict ourselves to systems for which the net virtual work of the force of every constraint is zero:

$$\sum_i \Phi_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

We therefore have as the condition for equilibrium of a system that the virtual work of all applied forces vanishes:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

— the principle of virtual work.

Note that coefficients  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  can no longer be thought equal to zero: in common  $\mathbf{F}_i^{(a)} \neq 0$ , since  $\delta \mathbf{r}_i$  are not independent but are bound by constraints.

Виртуальным перемещением частицы с вектором-радиусом  $\mathbf{r}_k$  называется вариация  $\delta \mathbf{r}_k$  — любое бесконечно малое приращение вектора  $\mathbf{r}_k$ , происходящее мгновенно и совместимое со связями (constraints). Если связей нет, то есть система свободна, тогда виртуальные перемещения  $\delta \mathbf{r}_k$  совершенно любые.

Связи бывают голономные (holonomic, или геометрические), связывающие только положения (перемещения) — это функции лишь координат и, возможно, времени

$$c(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{3.1}$$

— и неголономные (или дифференциальные), содержащие производные координат по времени:  $c(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0$  и не интегрируемые до геометрических связей.

Далее рассматриваем системы, все связи в которых — голономные. В системе с голономными связями виртуальные перемещения частицы “ $k$ ” удовлетворяют уравнению

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial c_j}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (3.2)$$

В несвободных системах все силы делятся на две группы: активные и реакции связей. Реакция  $\Phi_k$  действует со стороны всех материальных ограничителей на частицу “ $k$ ” и меняется согласно уравнению (3.1) для каждой связи. Связи предполагаются идеальными:

$$\sum_k \Phi_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad — \quad (3.3)$$

работа реакций на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Принцип виртуальной работы is

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k^{(a)} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{F}_k^{(a)}$  — лишь активные силы, без реакций связей.

Дифференциальное вариационное уравнение (3.4) может показаться тривиальным следствием закона Ньютона (1.1) и условия идеальности связей (3.3). Однако содержание (3.4) несравненно обширнее. Читатель вскоре увидит, что принцип (3.4) может быть положен в основу механики [90]. Разные модели упругих тел, описываемые в этой книге, построены с опорой на этот принцип.

Для примера рассмотрим совершенно жёсткое (недеформируемое) твёрдое тело.

$$\dots (2.4) \Rightarrow \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{x}$$

(begin copied from § 1.10)

Варьируя тождество (9.5), получим  $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = -\mathbf{O} \cdot \delta \mathbf{O}^\top$ . Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор  $\delta \mathbf{o}$  как  $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$ . Приходим к соотношениям

$$\delta \mathbf{O} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{O}, \quad \delta \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top \right)_{\times}, \quad (3.5)$$

(end of copied from § 1.10)

...



Проявилась замечательная особенность (3.4): это уравнение эквивалентно системе такого порядка, каково число степеней свободы системы, то есть сколько независимых вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  мы имеем. Если в системе  $N$  точек есть  $m$  связей, то число степеней свободы  $n = 3N - m$ .

...

#### § 4. Balance of momentum, rotational momentum, and energy

Эти уравнения баланса можно связать со свойствами пространства и времени [91]. Сохранение импульса (количества движения) в изолированной\* системе выводится из однородности пространства (*при любом параллельном переносе — трансляции — замкнутой системы как целого свойства этой системы не меняются*). Сохранение момента импульса — следствие изотропии пространства (*свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте этой системы как целого*). Энергия же изолированной системы сохраняется, так как время однородно (энергия  $E \equiv K(q, \dot{q}) + \Pi(q)$  такой системы не зависит явно от времени).

Уравнения баланса могут быть выведены из принципа виртуальной работы (3.4). Перепишем его в виде

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k^{(e)} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k + \delta W^{(i)} = 0, \quad (4.1)$$

где выделены внешние силы  $\mathbf{F}_k^{(e)}$  и виртуальная работа внутренних сил  $\delta W^{(i)} = \sum_k \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{r}_k$ .

Предполагается, что внутренние силы не совершают работы на виртуальных перемещениях тела как жёсткого целого ( $\delta \mathbf{r}$  и  $\delta \mathbf{o}$  —

\* Изолированная (замкнутая) система — это система частиц, взаимодействующих друг с другом, но ни с какими другими телами.

произвольные постоянные векторы, определяющие трансляцию и поворот)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_k &= \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k, \\ \delta \mathbf{p} &= \text{constant}, \delta \mathbf{o} = \text{constant} \end{aligned} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (4.2)$$

Предпосылки-соображения для этого предположения таковы.

Первое — для случая упругих (потенциальных) внутренних сил. Тогда  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$  — вариация потенциала с противоположным знаком. Достаточно очевидно, что только лишь деформирование меняет  $\Pi$ .

Второе соображение — в том, что суммарный вектор и суммарный момент внутренних сил равен нулю

$$\sum \dots$$

...

Принимая (4.2) и подставляя в (4.1) сначала  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{p}$  (трансляция), а затем  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k$  (поворот), получаем баланс импульса (...) и баланс момента импульса (...).

...

## § 5. Hamilton's principle and Lagrange's equations

Two branches of analytical mechanics are Lagrangian mechanics (using generalized coordinates and corresponding generalized velocities in configuration space) and Hamiltonian mechanics (using coordinates and corresponding momenta in phase space). Both formulations are equivalent by a Legendre transformation on the generalized coordinates, velocities and momenta, therefore both contain the same information for describing the dynamics of a system.

Вариационное уравнение (3.4) удовлетворяется в любой момент времени. Проинтегрируем его\* по какому-либо промежутку  $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta K + \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (5.1)$$

Без ущерба для общности можно принять  $\delta \mathbf{r}_k(t_1) = \delta \mathbf{r}_k(t_2) = \mathbf{0}$ , тогда внеинтегральный член исчезает.

Вводятся обобщённые координаты  $q^i$  ( $i = 1, \dots, n$  — число степеней свободы). Векторы-радиусы становятся функциями вида  $\mathbf{r}_k(q^i, t)$ , тождественно удовлетворяющими уравнениям связей (3.1). Если связи стационарны, то есть (3.1) не содержат  $t$ , то остаётся  $\mathbf{r}_k(q^i)$ . Кинетическая энергия превращается в функцию  $K(q^i, \dot{q}^i, t)$ , где явно входящее  $t$  характерно лишь для нестационарных связей.

Весьма существенно понятие обобщённых сил  $Q_i$ . Они вводятся через выражение виртуальной работы

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_i Q_i \delta q^i, \quad Q_i \equiv \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^i}. \quad (5.2)$$

Стойит акцентировать происхождение обобщённых сил через работу. Установив набор обобщённых координат системы, следует сгруппировать приложенные силы  $\mathbf{F}_k$  в комплексы  $Q_i$ .

Если силы потенциальны с энергией  $\Pi = \Pi(q^i, t)$ , то

$$\sum_i Q_i \delta q^i = -\delta \Pi, \quad Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}. \quad (5.3)$$

Явное присутствие  $t$  может быть при нестационарности связей или зависимости физических полей от времени.

...

$$\begin{aligned} * \delta K &= \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k, \quad \left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) \dot{\phantom{x}} = \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \underbrace{\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k}_{\delta K} \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta K dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

Известны уравнения Lagrange'а не только второго, но и первого рода. Рассмотрим их ради методики вывода, много раз применяемой в этой книге.

При наличии связей (3.1) равенство  $\mathbf{F}_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$  не следует из вариационного уравнения (3.4), ведь тогда виртуальные перемещения  $\delta \mathbf{r}_k$  не независимы. Каждое из  $m$  ( $m$  — число связей) условий для вариаций (3.2) умножим на некий скаляр  $\lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) и добавим к (3.4):

$$\sum_{k=1}^N \left( \mathbf{F}_k + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (5.4)$$

Среди  $3N$  компонент вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  зависимых  $m$ . Но столько же и множителей Лагранжа: подберём  $\lambda_\alpha$  так, чтобы коэффициенты (??какие?) при зависимых вариациях обратились в нуль. Но при остальных вариациях коэффициенты (??) также должны быть нулями из-за независимости. Следовательно, все выражения в скобках  $(\dots)$  равны нулю — это и есть уравнения Lagrange'а первого рода.

Поскольку для каждой частицы

...

## § 6. Statics

Рассмотрим систему со стационарными (постоянными во времени) связями при статических (не меняющихся со временем) активных силах  $\mathbf{F}_k$ . В равновесии  $\mathbf{r}_k = \text{constant}$ , и формулировка принципа виртуальной работы следующая:

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^i} = Q_i = 0. \quad (6.1)$$

Существенны обе стороны этого положения: и вариационное уравнение, и равенство нулю обобщённых сил.

Соотношения (6.1) — это самые общие уравнения статики. В литературе распространено узкое представление об уравнениях равновесия как балансе сил и моментов. Но при этом нужно понимать, что набор уравнений равновесия точно соответствует обоб-

щённым координатам. The resultant force (также называемая “равнодействующей силой” или “главным вектором”) and the resultant couple (“главный момент”) в уравнениях равновесия фигурируют\*, поскольку у системы есть степени свободы трансляции и поворота. Огромная популярность сил и моментов связана не столько с известностью статики совершенно недеформируемого твёрдого тела, но с тем, что виртуальная работа внутренних сил на перемещениях системы как жёсткого целого равна нулю в любой среде.

Пусть в системе действуют два вида сил: потенциальные с энергией от обобщённых координат  $\Pi(q^i)$  и дополнительные внешние  $\dot{Q}_i$ . Из (6.1) следуют уравнения равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} = \dot{Q}_i, \quad (6.2)$$

$$d\Pi = \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial q^i} dq^i = \sum_i \dot{Q}_i dq^i.$$

Здесь содержится нелинейная в общем случае задача статики о связи положения равновесия  $q^i$  с нагрузками  $\dot{Q}_i$ .

В линейной системе с квадратичным потенциалом вида  $\Pi = \frac{1}{2} C_{ik} q^k q^i$

$$\sum_k C_{ik} q^k = \dot{Q}_i. \quad (6.3)$$

Тут фигурируют “матрица жёсткости”  $C_{ik}$ , координаты  $q^k$  и нагрузки  $\dot{Q}_i$ .

Сказанное возможно обобщить и на континуальные линейные упругие среды.

Матрица жёсткости  $C_{ik}$  обычно бывает положительной (таково свойство конструкций и в природе, и в технике). Тогда  $\det C_{ik} > 0$ ,

\* Since describing a composition of any system of forces, acting on the same absolutely rigid body, into a single force and a single couple (about a chosen point) in the book “Éléments de statique” by Louis Poinso.

линейная алгебраическая система (6.3) однозначно разрешима, а решение её можно заменить минимизацией квадратичной формы

$$\mathcal{E}(q^j) \equiv \Pi - \sum_i \mathring{Q}_i q^i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} q^i C_{ik} q^k - \sum_i \mathring{Q}_i q^i \rightarrow \min. \quad (6.4)$$

Бывает однако, что конструкция неудачно спроектирована, тогда матрица жёсткости сингулярна (необратима) и  $\det C_{ik} = 0$  (или же весьма близок к нулю — nearly singular матрица с  $\det C_{ik} \approx 0$ ). Тогда решение линейной проблемы статики (6.3) существует лишь при ортогональности столбца нагрузок  $\mathring{Q}_i$  всем линейно независимым решениям однородной сопряжённой системы

...

Известные теоремы статики линейно **упругих** систем легко доказываются в случае конечного числа степеней свободы. Теорема Клапейрона выражается равенством

...

Reciprocal work theorem (“работа  $W_{12}$  сил первого варианта на перемещениях от сил второго равна работе  $W_{21}$  сил второго варианта на перемещениях от сил первого”) мгновенно выводится из (6.3):

(...)

Тут существенна симметрия матрицы жёсткости  $C_{ij}$ , то есть консервативность системы.

...

Но вернёмся к проблеме (6.2), иногда называемой теоремой Lagrange’a. Её можно обратить преобразованием Лежандра Legendre (involution) transform(ation):

$$\begin{aligned} d\left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i\right) &= \sum_i d\left(\mathring{Q}_i q^i\right) = \sum_i \left(q^i d\mathring{Q}_i + \mathring{Q}_i dq^i\right), \\ d\left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i\right) - \sum_i \mathring{Q}_i dq^i &= \sum_i q^i d\mathring{Q}_i, \\ d\left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i - \Pi\right) &= \sum_i q^i d\mathring{Q}_i = \sum_i \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathring{Q}_i} d\mathring{Q}_i; \end{aligned}$$

$$q^i = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \dot{Q}_i}, \quad \hat{\Pi}(\dot{Q}_i) = \sum_i \dot{Q}_i q^i - \Pi. \quad (6.5)$$

Это теорема Castigliano,  $\hat{\Pi}$  называется дополнительной энергией. В линейной системе (6.3)  $\Rightarrow \hat{\Pi} = \Pi$ . Теорема (6.5) бывает очень полезна — когда легко находится  $\hat{\Pi}(\dot{Q}_i)$ . Встречаются так называемые статически определимые системы, в которых все внутренние силы удаётся найти лишь из баланса сил и моментов. Для них (6.5) эффективна.

В отличие от линейной задачи (6.3), нелинейная задача (6.2) может не иметь решений вовсе или же иметь их несколько.

....

Рассказ о статике в общей механике закончим the d'Alembert's principle: уравнения динамики отличаются от статических лишь наличием дополнительных “сил инерции”  $m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$ . Принцип d'Alembert'a достаточно очевиден, но бездумное применение может привести к ошибкам. Например, уравнения вязкой жидкости в статике и в динамике отличаются не только лишь инерционными добавками. Но для твёрдых упругих тел принцип d'Alembert'a полностью справедлив.

## § 7. Mechanics of relative motion

До этого не ставился вопрос о системе отсчёта, всё рассматривалось в некой “абсолютной” системе или одной из инерциальных систем (§ 1). Теперь представим себе две системы: “абсолютную” и “подвижную”

...

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} + \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{r} &= \rho_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho}_i \mathbf{e}_i, \quad \dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_i \mathbf{e}_i)^\bullet = \dot{x}_i \mathbf{e}_i + x_i \dot{\mathbf{e}}_i \end{aligned}$$

$$x_i \neq \text{constant} \Rightarrow \dot{x}_i \neq 0$$

By (9.11, § 1.9)

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow x_i \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times x_i \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{x}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}}_{\mathbf{v}_e} - \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}}_{\mathbf{v}_{rel}}$$

$$\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = \dot{x}_i \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{v}_{rel} - \text{relative velocity, } \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \equiv \mathbf{v}_e$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_{rel} \quad (7.1)$$

...

$$\dot{\dot{\mathbf{r}}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{w} \equiv \ddot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{x}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho}_i \dot{\mathbf{e}}_i, \quad \ddot{\mathbf{x}} = (x_i \mathbf{e}_i)^{\bullet\bullet} = (\dot{x}_i \mathbf{e}_i + x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} = \ddot{x}_i \mathbf{e}_i + \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow \ddot{\mathbf{e}}_i = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)$$

$$x_i \ddot{\mathbf{e}}_i = x_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times x_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times x_i \mathbf{e}_i) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \dot{x}_i \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}$$

$$\ddot{x}_i \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{w}_{rel} - \text{relative acceleration}$$

$$2\dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} \equiv \mathbf{w}_{Cor} - \text{Coriolis acceleration}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{w}_{rel} + \mathbf{w}_{Cor} + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i$$

$$(x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} = \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{Cor} + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i$$

$$(x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \dot{x}_i \mathbf{e}_i}_{\dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{Cor}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

...

## § 8. Small oscillations (vibrations)

Если статика линейной системы описывается уравнением (6.3), то в динамике имеем

$$\sum_k \left( A_{ik} \ddot{q}_k + C_{ik} q^k \right) = \ddot{Q}_i(t), \quad (8.1)$$



где  $A_{ik}$  — симметричная и положительная “матрица кинетической энергии”.

A normal mode of an oscillating system is a pattern of motion in which all parts of the system move sinusoidally with the same frequency and with a fixed phase relation. The free motion described by the normal modes takes place at fixed frequencies. These fixed frequencies of the normal modes of a system are known as its natural resonant frequencies.

In music, normal modes of vibrating instruments (strings, air pipes, drums, etc.) are called “harmonics” or “overtones”.

The most general motion of a system is a superposition of its normal modes. The modes are normal in the sense that they can move independently, that is to say that an excitation of one mode will never cause motion of a different mode. In mathematical terms, normal modes are orthogonal to each other.

A research of an oscillating system most often begins with orthogonal (normal) “modes”—harmonics, собственных (свободных, без воздействий извне) sinusoidal oscillations like

$$q^k(t) = \hat{q}_k \sin \omega_k t.$$

Multipliers  $\hat{q}_k = \text{constant}$  are orthogonal (normal) “modes” of oscillation,  $\omega_k$  are natural (resonant, eigen-) frequencies. This set, dependent on the structure of an oscillating object, materials and boundary conditions, находится из задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_i &= 0, \quad \ddot{q}_k = -\omega_k^2 \hat{q}_k \sin \omega_k t, \quad (8.1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_k (C_{ik} - A_{ik} \omega_k^2) \hat{q}_k \sin \omega_k t = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

...

## Bibliography

В длинном списке книг по общей механике можно найти труды не только механиков-профессионалов [85, 86, 92, 93, 94], но и физиков-теоретиков широкой ориентации [91, 87]. Интересен курс Ф. Р. Гантмахера [90] с компактным, но полным изложением оснóв.

*chapter 3*

# NONLINEAR ELASTIC MOMENTLESS CONTINUUM

## §1. Continuum. Two descriptions of processes

According to the atomic theory, a substance is composed of discrete particles — atoms. Therefore a model of a system of particles with masses  $m_k$  and location vectors  $\mathbf{r}_k(t)$  may seem suitable yet despite an unimaginable number of degrees of freedom, because amounts of memory and speed of computers are characterized also by astronomical numbers.

But anyway, it's worth choosing a fundamentally and qualitatively different model — a model of material continuum, where mass is distributed in volume continuously: volume  $\mathcal{V}$  contains mass

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}, \quad dm = \rho d\mathcal{V}, \quad (1.1)$$

here  $\rho$  is volume(tric) mass density and  $d\mathcal{V}$  is infinitesimal volume element.

Real matter is modelled as a continuum, which can be thought of as an infinite set of vanishingly small particles, joined together.

С непрерывным распределением массы связано лишь первое и простое представление о сплошной среде как множестве (пространстве) материальных точек. Возможны и более сложные модели, в которых частицы обладают степенями свободы не только трансляции, но и поворота, внутренней деформации и другими. Отметив, что подобные модели притягивают всё больший интерес, в этой главе ограничимся классическим представлением о среде как состоящей из “простых точек”.

В каждый момент времени  $t$  деформируемый континуум занимает некий объём  $\mathcal{V}$  пространства. Этот объём движется

и деформируется, но набор частиц в нём постоянен — the balance of mass (“matter is neither created nor annihilated”)

$$dm = \rho d\mathcal{V} = \rho' d\mathcal{V}' = \overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{\mathcal{V}}, \quad m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' d\mathcal{V}' = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{\mathcal{V}}. \quad (1.2)$$

Introducing some variable parameters  $q^i$  — curvilinear coordinates, we have a relation for particle locations

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i, t). \quad (1.3)$$

...

*Material description*

at the initial moment, in the so-called initial (original, reference, “material”) configuration

at some initial moment  $t=0$

“запоминается” начальная (“материальная”) конфигурация — locations in space of particles at some arbitrarily chosen “initial” moment  $t=0$

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}(q^i) \equiv \mathbf{r}(q^i, 0)$$

Morphism (function)  $\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}(q^i)$

isomorphism (bijective mapping) (invertible one-to-one relation) (взаимно однозначное)

Subsequent locations in space of particles are then dependent variables — functions of time and of the initial (material, “Lagrangian”) coordinates/location  $\overset{\circ}{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t).$$

Для пространственного дифференцирования (постоянных во времени) отношений like  $\varphi = \varphi(\overset{\circ}{\mathbf{r}})$

вводится локальный касательный базис  $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial i}$  и взаимный базис  $\overset{\circ}{\mathbf{r}}^i$

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial i} \equiv \partial_i \overset{\circ}{\mathbf{r}} \left( \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i} \right), \quad \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial j} = \delta_j^i$$

“материальный” оператор Hamilton’a  $\overset{\circ}{\nabla}$

$$\mathbf{E} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial i} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i \overset{\circ}{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{\mathbf{r}}, \quad \overset{\circ}{\nabla} \equiv \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i, \quad (1.4)$$

тогда  $d\varphi = d\overset{\circ}{\mathbf{r}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \varphi$ .

...

But yet another approach may be effective — *the spatial (or “Eulerian”) description*, when instead of focusing on how particles of a continuum move from the initial configuration through space and time, processes are considered at fixed points in space as time progresses. With relations like  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ , we track what’s happening exactly in this place and aren’t confused by continuous leaving and arriving of various particles here.

...

the balance of mass in spatial description (the continuity equation for mass)

...

Jaumann derivative (“**corotational** time derivative”) was first introduced by Gustav Jaumann\*

Es sei  $\frac{\partial}{\partial t}$  der Operator der lokalen Fluxion, d. i. der partiellen Fluxion in einem gegen das Koordinatensystem ruhenden Punkte des Raumes. Ferner sei  $\frac{d}{dt}$  der Operator der totalen Fluxion, welcher definiert wird durch

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a,$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla; \mathbf{a} - \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{a},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla; \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v} \times \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \times \text{rot } \mathbf{v}).$$

Endlich verwenden wir die körperliche Fluxion eines Skalars:

$$\frac{\delta}{\delta t} a = \frac{\partial}{\partial t} a + \text{div } a\mathbf{v} = \frac{d}{dt} a + a \text{div } \mathbf{v}.$$

körperliche — bodily/телесная, material/вещественная(материальная),  
physical/физическая

$$\nabla \cdot (a\mathbf{v}) = a \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla a$$

\* **Gustav Jaumann.** Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (I. Mitteilung) // Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa, Band CXX, 1911. Seiten 385–530.

...

Пусть  $\mathbf{v}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t)$  — какое-либо поле (?? только в материальном описании от  $\overset{\circ}{\mathbf{r}}$  ??). Найдём скорость изменения интеграла по объёму

$$\Upsilon \equiv \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} d\mathcal{V}$$

(“ $\mathbf{v}$  is  $\Upsilon$  per mass unit”). Seemingly difficult calculation of  $\dot{\Upsilon}$  (since  $\mathcal{V}$  is deforming) is actually quite simple together with (1.2):

$$\Upsilon = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \mathbf{v} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} \Rightarrow \dot{\Upsilon} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \dot{\mathbf{v}} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\mathbf{v}} d\mathcal{V}. \quad (1.5)$$

$$\Psi = \int_{\mathcal{V}} \rho \psi d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \psi d\mathcal{V}' \Rightarrow \dot{\Psi} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\psi} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \dot{\psi} d\mathcal{V}'$$

...

It is not worth it to contrapose the material and the spatial descriptions. In this book both are used, depending on the situation.

## § 2. Motion gradient

Having motion function  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i, t)$ ,  $\mathring{\mathbf{r}}(q^i) \equiv \mathbf{r}(q^i, 0)$ , “nabla” operators  $\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$ ,  $\mathring{\nabla} \equiv \mathring{\mathbf{r}}^i \partial_i$  and looking at differential relations for a certain infinitesimal vector in two configurations, current with  $d\mathbf{r}$  and initial with  $d\mathring{\mathbf{r}}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d\mathring{\mathbf{r}} \cdot \underbrace{\mathring{\nabla}}_{\substack{\mathring{\mathbf{r}}^i \mathring{\mathbf{r}}_{\partial_i} \\ \mathbf{F}^\top}} = \underbrace{\nabla \mathbf{r}^\top}_{\substack{\mathbf{r}^i \mathring{\mathbf{r}}_{\partial_i} \\ \mathbf{F}^{-1}}} \cdot d\mathring{\mathbf{r}} \\ d\mathring{\mathbf{r}} &= d\mathbf{r} \cdot \underbrace{\nabla \mathring{\mathbf{r}}}_{\substack{\mathring{\mathbf{r}}^i \mathring{\mathbf{r}}_{\partial_i} \\ \mathbf{F}^{-1}}} = \underbrace{\nabla \mathring{\mathbf{r}}^\top}_{\substack{\mathring{\mathbf{r}}^i \mathring{\mathbf{r}}_{\partial_i} \\ \mathbf{F}^{-1}}} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.1)$$

here comes to mind to introduce the “motion gradient”<sup>\*</sup>, picking one of these tensor multipliers for it:  $\mathbf{F} \equiv \mathring{\nabla} \mathbf{r}^\top = \mathbf{r}_{\partial_i} \mathring{\mathbf{r}}^i$ .

Why this one? The reason to choose  $\mathring{\nabla} \mathbf{r}^\top$  is another expression for the differential

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathring{\mathbf{r}}} \cdot d\mathring{\mathbf{r}} \\ \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathring{\mathbf{r}}} \\ d\mathring{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \\ \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathring{\mathbf{r}}} &= \partial_i \boldsymbol{\zeta} \mathring{\mathbf{r}}^i & \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathbf{r}} &= \partial_i \boldsymbol{\zeta} \mathbf{r}^i \end{aligned}$$

...

$$\mathbf{E} = \underbrace{\mathring{\nabla} \mathring{\mathbf{r}}}_{\substack{\partial \mathring{\mathbf{r}} \\ \partial \mathring{\mathbf{r}}}} = \underbrace{\nabla \mathbf{r}}_{\substack{\partial \mathbf{r} \\ \partial \mathbf{r}}}$$

...

For cartesian coordinates with orthonormal basis  $\mathbf{e}_i = \text{constant}$

$$\mathbf{r} = x_i(t) \mathbf{e}_i, \quad \mathring{\mathbf{r}} = x_i(0) \mathbf{e}_i = \mathring{x}_i \mathbf{e}_i, \quad \mathring{x}_i \equiv x_i(0),$$

\* Tensor  $\mathbf{F}$  doesn't well suit its more popular name “deformation gradient”, because this tensor describes not only the deformation itself, but also the rotation of a body as a whole without deformation.

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\nabla} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{x}_i} = \mathbf{e}_i \overset{\circ}{\partial}_i, \quad \nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \partial_i, \\ \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overset{\circ}{x}_i} = \mathbf{e}_i \frac{\partial (x_j \mathbf{e}_j)}{\partial \overset{\circ}{x}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \overset{\circ}{x}_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \overset{\circ}{\partial}_i x_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \\ \nabla \overset{\circ}{\mathbf{r}} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{\partial x_i} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \partial_i \overset{\circ}{x}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\end{aligned}$$

...

By the polar decomposition theorem (§ 1.11), the motion gradient decomposes into the rotation tensor  $\mathbf{O}$  and the symmetric positive stretch tensors  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}$$

...

Когда нет поворота ( $\mathbf{O} = \mathbf{E}$ ), тогда  $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$ .

...

### § 3. Measures (tensors) of deformation

Motion gradient  $\mathbf{F}$  characterizes both the deformation of a body and the rotation of a body as a whole. “Pure” deformation tensors are the stretch tensors  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{V}$  from polar decomposition  $\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}$ , as well as other tensors, originating from  $\mathbf{U}$  or (and)  $\mathbf{V}$ .

Widely used ones are “squares” of  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned}(U^2) \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} &= \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}, \\ (V^2) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \equiv \mathbf{\Phi}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

These are Green’s deformation tensor (or right Cauchy–Green tensor)  $\mathbf{G}$  and Finger’s deformation tensor (or left Cauchy–Green tensor)  $\mathbf{\Phi}$ . The convenient relation to  $\mathbf{F}$  — without extracting roots as with  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{V}$  — explains the big popularity of tensors  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{\Phi}$ . Tensor  $\mathbf{G}$  was first used by George Green\*.

\* **Green, George.** (1839) On the propagation of light in crystallized media. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.* 1842, vol. 7, part II, pages 121–140.

Inversion of  $\Phi$  and  $G$  gives two more deformation tensors

$$\begin{aligned} V^{-2} &= \Phi^{-1} = (F \cdot F^\top)^{-1} = F^{-\top} \cdot F^{-1} \equiv {}^2c, \\ U^{-2} &= G^{-1} = (F^\top \cdot F)^{-1} = F^{-1} \cdot F^{-\top} \equiv {}^2f, \end{aligned} \quad (3.2)$$

each of which is sometimes called the Piola tensor or the Finger tensor. The inverse of the left Cauchy–Green tensor  $\Phi$  is the Cauchy deformation tensor  ${}^2c$ .

Components of the deformation tensors

$$\begin{aligned} G &= \mathring{r}^i r_{\partial i} \cdot r_{\partial j} \mathring{r}^j = G_{ij} \mathring{r}^i \mathring{r}^j, \quad G_{ij} \equiv r_{\partial i} \cdot r_{\partial j}, \\ {}^2f &= \mathring{r}_{\partial i} r^i \cdot r^j \mathring{r}_{\partial j} = G^{ij} \mathring{r}_{\partial i} \mathring{r}_{\partial j}, \quad G^{ij} \equiv r^i \cdot r^j, \\ {}^2c &= r^i \mathring{r}_{\partial i} \cdot \mathring{r}_{\partial j} r^j = g_{ij} r^i r^j, \quad g_{ij} \equiv \mathring{r}_{\partial i} \cdot \mathring{r}_{\partial j}, \\ \Phi &= r_{\partial i} \mathring{r}^i \cdot \mathring{r}^j r_{\partial j} = g^{ij} r_{\partial i} r_{\partial j}, \quad g^{ij} \equiv \mathring{r}^i \cdot \mathring{r}^j \end{aligned}$$

coincide with components of the unit (“metric”) tensor

$$\begin{aligned} E &= r_{\partial i} r^i = G_{ij} r^i r^j = r^i r_{\partial i} = G^{ij} r_{\partial i} r_{\partial j} = \\ &= \mathring{r}^i \mathring{r}_{\partial i} = g^{ij} \mathring{r}_{\partial i} \mathring{r}_{\partial j} = \mathring{r}_{\partial i} \mathring{r}^i = g_{ij} \mathring{r}^i \mathring{r}^j, \end{aligned}$$

but these components are in different bases. Using the index notation, it’s easy to get confused about differences between the unit (“metric”) tensor  $E$  and tensors  $G$ ,  $\Phi$ ,  ${}^2f$ ,  ${}^2c$  of deformation. The direct indexless notation has the obvious advantage here.

As was mentioned in §1.11, the stretch tensors  $U$  and  $V$  have common invariants. If  $U_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) are eigenvalues of  $U$  and  $V$ , then the invariants will be

$$\begin{aligned} \text{I}(U) &= \text{I}(V) = \sum U_k, \\ \text{II}(U) &= \text{II}(V) = U_1 U_2 + U_1 U_3 + U_2 U_3, \\ \text{III}(U) &= \text{III}(V) = U_1 U_2 U_3. \end{aligned}$$

Invariants of  $G$  and  $\Phi$  coincide too:  $\text{I}(G) = \text{I}(\Phi) = \sum U_k^2, \dots$

Without deformation

$$F = U = V = G = \Phi = {}^2f = {}^2c = E,$$

thus as characteristics of deformation it’s worth taking the differences like  $U - E$ ,  $U \cdot U - E$ ,  $\dots$

...



### *The right Cauchy–Green deformation tensor*

George Green discovered a deformation tensor known as the right Cauchy–Green deformation tensor or Green’s deformation tensor

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \text{or} \quad G_{ij} = F_{k'i} F_{k'j} = \frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_j}.$$

This tensor gives the “square” of local change in distances due to deformation:  $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{G} \cdot d\hat{\mathbf{r}}$

Invariants of  $\mathbf{G}$  are used in expressions for (density of) isotropic body’s potential energy of deformation. The most popular invariants are

$$\begin{aligned} \text{I}(\mathbf{G}) &\equiv \text{trace } \mathbf{G} = G_{ii} = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 \\ \text{II}(\mathbf{G}) &\equiv \frac{1}{2}(G_{jj}^2 - G_{ik}G_{ki}) = \gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2 \\ \text{III}(\mathbf{G}) &\equiv \det \mathbf{G} = \gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2 \end{aligned}$$

where  $\gamma_i$  are stretch ratios for unit fibers that are initially oriented along directions of eigenvectors of the right stretch tensor  $\mathbf{U}$ .

### *The inverse of Green’s deformation tensor*

Sometimes called the Finger tensor or the Piola tensor, the inverse of the right Cauchy–Green deformation tensor

$${}^2\mathbf{f} = \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \quad \text{or} \quad f_{ij} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_{k'}} \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial x_{k'}}$$

### *The left Cauchy–Green or Finger deformation tensor*

Swapping multipliers in the formula for the right Green–Cauchy deformation tensor leads to the left Cauchy–Green deformation tensor, defined as

$$\Phi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top = \mathbf{V}^2 \quad \text{or} \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial x_j}{\partial \hat{x}_k}$$

The left Cauchy–Green deformation tensor is often called the Finger’s deformation tensor, named after Josef Finger (1894).

Invariants of  $\boldsymbol{\Phi}$  are also used in expressions for strain energy density functions. The conventional invariants are defined as

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \Phi_{ii} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &\equiv \frac{1}{2}(\Phi_{ii}^2 - \Phi_{jk}\Phi_{kj}) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \\ I_3 &\equiv \det \boldsymbol{\Phi} = J^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \end{aligned}$$

( $J \equiv \det \mathbf{F}$  is the Jacobian, determinant of the motion gradient)

### *The Cauchy deformation tensor*

The Cauchy deformation tensor is defined as the inverse of the left Cauchy–Green deformation tensor

$${}^2\mathbf{c} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{or} \quad c_{ij} = \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_j}$$

$$d\hat{\mathbf{r}} \cdot d\hat{\mathbf{r}} = d\mathbf{r} \cdot {}^2\mathbf{c} \cdot d\mathbf{r}$$

This tensor is also called the Piola tensor or the Finger tensor in rheology and fluid dynamics literature.

### *Finite strain tensors*

The concept of *strain* is used to evaluate how much a given displacement differs locally from a body displacement as a whole (a “rigid body displacement”). One of such strains for large deformations is the *Green strain tensor* (*Green–Lagrangian strain tensor*, *Green–Saint-Venant strain tensor*), defined as

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) \quad \text{or} \quad C_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_j} - \delta_{ij} \right)$$

or as the function of the displacement gradient tensor

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \left( \hat{\nabla} \mathbf{u} + \hat{\nabla} \mathbf{u}^\top + \hat{\nabla} \mathbf{u} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{u}^\top \right)$$

in cartesian coordinates

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial u_k}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial u_k}{\partial \hat{x}_j} \right)$$

The Green strain tensor measures how much  $\mathbf{G}$  differs from  $\mathbf{E}$ .

The *Almansi–Hamel strain tensor*, referenced to the deformed configuration (“Eulerian description”), is defined as

$${}^2\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - {}^2\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}^{-1}) \quad \text{or} \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial \overset{\circ}{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \overset{\circ}{x}_k}{\partial x_j} \right)$$

or as function of the displacement gradient

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top) \\ a_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

### *Seth–Hill family of abstract strain tensors*

B. R. Seth was the first to show that the Green and Almansi strain tensors are special cases of a more abstract measure of deformation. The idea was further expanded upon by Rodney Hill in 1968 (publication??). The Seth–Hill family of strain measures (also called Doyle–Ericksen tensors) is expressed as

$$\mathbf{D}_{(m)} = \frac{1}{2m} (\mathbf{U}^{2m} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{G}^m - \mathbf{E})$$

For various  $m$  it gives

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{(1)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) && \text{Green strain tensor} \\ \mathbf{D}_{(1/2)} &= \mathbf{U} - \mathbf{E} = \mathbf{G}^{1/2} - \mathbf{E} && \text{Biot strain tensor} \\ \mathbf{D}_{(0)} &= \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G} && \text{logarithmic strain, Hencky strain} \\ \mathbf{D}_{(-1)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2}) && \text{Almansi strain} \end{aligned}$$

The second-order approximation of these tensors is

$$\mathbf{D}_{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top - (1 - m) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

where  $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S$  is the infinitesimal deformation tensor.

Many other different definitions of measures  $\mathbf{D}$  are possible, provided that they satisfy these conditions:

- ✓  $\mathbf{D}$  vanishes for any movement of a body as a rigid whole
- ✓ dependence of  $\mathbf{D}$  on displacement gradient tensor  $\nabla \mathbf{u}$  is continuous, continuously differentiable and monotonic
- ✓ it's desired that  $\mathbf{D}$  reduces to the infinitesimal linear deformation tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  when  $\nabla \mathbf{u} \rightarrow 0$

For example, tensors from the set

$$\mathbf{D}^{(n)} = (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{-n}) / 2n$$

aren't from the Seth–Hill family, but for any  $n$  they have the same 2nd-order approximation as Seth–Hill measures with  $m = 0$ .

*Wikipedia, the free encyclopedia* — Finite strain theory

...

## § 4. Velocity field

This topic is discussed in nearly any book about continuum mechanics, however for solid elastic continua it's not very vital. Among various models of material continuum, an elastic solid body is distinguished by interesting possibility of deriving the complete set (system) of equations for it via the single logically flawless procedure. But now we follow the way, usual for fluid continuum mechanics.

So, there's velocity field in spatial description  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . Decomposition of tensor  $\nabla \mathbf{v} = \nabla \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^i \partial_i \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^i \dot{\mathbf{r}}_{\partial i}^*$  into symmetric and skew-symmetric parts (§ 1.7)

$$\nabla \dot{\mathbf{r}} = \nabla \dot{\mathbf{r}}^S - \frac{1}{2} (\nabla \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{E}$$

or, introducing the rate of deformation tensor (rate of stretching tensor, strain rate tensor)  $\mathcal{D}$  and the vorticity tensor (rate of rotation tensor, spin tensor)  $\mathcal{W}$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \mathcal{D} - \mathcal{W}, \\ \mathcal{D} \equiv \nabla \mathbf{v}^S &= \nabla \dot{\mathbf{r}}^S = \frac{1}{2} (\mathbf{r}^i \dot{\mathbf{r}}_{\partial i} + \dot{\mathbf{r}}_{\partial i} \mathbf{r}^i), \\ -\mathcal{W} \equiv \nabla \mathbf{v}^A &= -\mathbf{w} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{w} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{r}^i \times \dot{\mathbf{r}}_{\partial i}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

where also figures vorticity (pseudo)vector  $\mathbf{w}$ , the companion of vorticity tensor  $\mathcal{W}$ .

\* For sufficiently smooth functions, partial derivatives always commute, space and time ones too. Thus

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \quad \text{or} \quad \partial_i \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{\partial i}$$

Components of the rate of deformation tensor in the current configuration's basis

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \mathcal{D}_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j, \quad \mathcal{D}_{ij} = \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathcal{D} \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{\partial i} \cdot (\mathbf{r}^k \dot{\mathbf{r}}_k + \dot{\mathbf{r}}_k \mathbf{r}^k) \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j} + \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\partial j}) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j})^\bullet\end{aligned}$$

...

$$\dot{G}_{ij}$$

$$G_{ij} \equiv \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j}$$

...

For elastic solid media, there's no need for discussion about rotations: the true representation appears along the way of logically harmonious conclusions without additional hypotheses.

## § 5. Area vector. Surface change

Take an infinitesimal surface. The area vector by length is equal to the surface's area and is directed along the normal to this surface.

In the initial (original, undeformed, “material”, ~~reference~~) configuration, the area vector can be represented as  $\mathring{n}do$ . Surface's area  $do$  is infinitely small, and  $\mathring{n}$  is unit normal vector.

In the present (current, actual, deformed, “spatial”) configuration, the same surface has area vector  $\mathbf{n}dO$ .

With differential precision, these infinitesimal surfaces are parallelograms, thus

$$\begin{aligned}\mathring{n}do &= d\mathring{\mathbf{r}}' \times d\mathring{\mathbf{r}}'' = \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial q^j} dq^j = \mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} dq^i dq^j, \\ \mathbf{n}dO &= d\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} dq^i dq^j.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Applying the transformation of volume (??), we have

$$\begin{aligned}dV &= Jd\mathcal{V} \Rightarrow \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} = J\mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} \cdot \mathring{\mathbf{r}}_{\partial k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} \mathbf{r}^k = J\mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} \cdot \mathring{\mathbf{r}}_{\partial k} \mathbf{r}^k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} = J\mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} \cdot \mathbf{F}^{-1}.\end{aligned}$$

Hence with (5.1) we come to the relation

$$\mathbf{n}dO = J\mathring{n}do \cdot \mathbf{F}^{-1},\tag{5.2}$$

called Nanson's formula.

## § 6. Forces in continuum. Cauchy stress tensor

Since particles of this model of continuum are points with only translational degrees of freedom\*, there're no moments among generalized forces, there're no applied external couples neither in volume nor on surface.

Force  $\rho \mathbf{f} dV$  действует на бесконечно-малый объём  $dV$ ; если  $\mathbf{f}$  — массовая сила (действующая на единицу массы), то  $\rho \mathbf{f}$  — объёмная.

\* Translational degrees of freedom arise from a particle's ability to move freely in space.

Такие силы происходят от силовых полей, например: гравитационные силы (“силы тяжести”), силы инерции в неинерциальных системах отсчёта, электромагнитные силы при наличии в среде зарядов и токов.

Surface force  $\mathbf{p}d\mathcal{O}$  действует на бесконечно-малую поверхность  $d\mathcal{O}$ . Это может быть contact pressure or/and friction, электростатическая сила при сосредоточенных на поверхности зарядах.

In the material continuum, as in any mechanical system, external and internal forces are distinguished. Internal forces balance the action of external forces, and inside the medium they are transmitted continuously from point to point. Since times of Euler and Cauchy, internal forces in a continuum are assumed to be surface short-range contact forces: on infinitesimal surface  $\mathbf{n}d\mathcal{O}$  inside a medium acts force  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}d\mathcal{O}$ . Clarifying(?): acts from?? the side where unit normal  $\mathbf{n}$  is directed.

By the action–reaction principle,  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  меняет знак с переменной направления  $\mathbf{n}$  на противоположную сторону:  $\mathbf{t}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ . (Sometimes the last thesis is proved via the balance of momentum for an infinitely short cylinder with bases  $\mathbf{n}d\mathcal{O}$  and  $-\mathbf{n}d\mathcal{O}$ .)

Vector  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  on the surface with unit normal  $\mathbf{n}$  is called the surface traction vector or force-stress vector. However,  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  is not a vector field: traction  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)$  depends not only on location  $\mathbf{r}$  of the point, but also on the local orientation (defined by  $\mathbf{n}$ ) of the surface element. An infinite number of surfaces of any orientation pass through the same point, and infinitely many vectors  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  exist at each point.

Thereby, stress at the point of a continuum is not a vector field, but совокупность (множество) of all traction vectors для любых по-всякому ориентированных площадок, содержащих в себе эту точку. And it turns out, the infinite set of all vectors  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  at the point is completely determined by the only one second complexity tensor — Cauchy stress tensor  $\boldsymbol{\tau}$ . Рассмотрим содержащийся во многих книгах вывод этого утверждения — the theorem on existence of the now-called Cauchy stress tensor — and not without “the tetrahedron argument”.

A. L. Cauchy founded Continuum Mechanics by assuming that two parts of a continuum interact by means of surface densities of contact forces concentrated on their dividing surface. Then, assuming that these contact forces depend only on the normal to the dividing surface and that they are balanced by some volume density of force (including inertia), he played with tetrahedrons and proved the existence of the stress tensor.

De la pression ou tension dans un corps solide. *Exercices de mathématiques*, par M. **Augustin-Louis Cauchy**. Seconde année: 1827. Paris, Chez de Bure frères. Pages 42 à 59.

На поверхности бесконечномалого материального тетраэдра ...

## § 7. Balance of momentum and rotational momentum

Рассмотрим какой-либо конечный объём  $\mathcal{V}$  среды, ограниченный поверхностью  $\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})$ , нагруженный поверхностными  $\mathbf{p}d\mathcal{O}$  и массовыми/объёмными  $\mathbf{f}dm = \rho\mathbf{f}d\mathcal{V}$  внешними силами. Формулировка баланса импульса такова

$$\left( \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} \right)^{\cdot} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \mathbf{p} d\mathcal{O}. \quad (7.1)$$

...  $\mathbf{p} = \mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$  ...

Импульс слева найдём по (1.5), а поверхностный интеграл справа превратим в объёмный по теореме о дивергенции. Получим

$$\int_{\mathcal{V}} \left( \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) \right) d\mathcal{V} = \mathbf{0}.$$

Но объём  $\mathcal{V}$  произволен, поэтому равно нулю подынтегральное выражение. Приходим к уравнению баланса импульса в локальной (дифференциальной) форме

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

...



Теперь к балансу момента импульса. Интегральная формулировка:

$$\left( \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \right)^{\bullet} = \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} dV + \oint_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{r} \times \mathbf{p} d\mathcal{O}. \quad (7.3)$$

Дифференцируя левую часть ( $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$ )

$$\left( \int_V \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{r}} dV \right)^{\bullet} = \int_V \mathbf{r} \times \rho \ddot{\mathbf{r}} dV + \int_V \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \rho \dot{\mathbf{r}}}_0 dV,$$

применяя теорему о дивергенции к поверхностному интегралу (...  $\mathbf{p} = \mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$  ...)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) &= -(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r} = -\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \oint_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\mathcal{O} = - \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) dV, \end{aligned}$$

...

$$\int_V \mathbf{r} \times \rho \ddot{\mathbf{r}} dV = \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} dV - \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) dV,$$

$$\int_V \mathbf{r} \times \rho (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}) dV - \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) dV = \mathbf{0},$$

...

$$\underbrace{\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r})}_{\mathbf{r}^i \cdot \partial_i (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r})} = \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r} + \mathbf{r}^i \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \partial_i \mathbf{r})}_{\mathbf{r}^i \cdot (\partial_i \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r}}$$

$\boldsymbol{\tau} = e_i \mathbf{t}_{(i)}$ ,  $e_i = \text{constant}$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^i \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \partial_i \mathbf{r}) &= \mathbf{r}^i \cdot (e_j \mathbf{t}_{(j)} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{r}^i \cdot e_j \mathbf{t}_{(j)} \times \mathbf{r}_i = \\ &= -e_j \cdot \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i \times \mathbf{t}_{(j)} = -e_j \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{t}_{(j)} = -e_j \times \mathbf{t}_{(j)} = -\boldsymbol{\tau}_{\times} \end{aligned}$$

...

## § 8. Eigenvalues of Cauchy stress tensor

Как и любой симметричный тензор,  $\boldsymbol{\tau}$  имеет три вещественных собственных числа  $\sigma_i$ , называемых главными напряжениями (principal stresses), а также ортогональную тройку собственных

векторов единичной длины  $\mathbf{e}_i$ . In representation  $\boldsymbol{\tau} = \sum \sigma_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$  most often indices are sorted as  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , а тройка  $\mathbf{e}_i$  — “правая”.

Известна теорема о кругах Мора (Mohr's circles)\*

...

Чтобы замкнуть набор (систему) уравнений модели сплошной среды, нужно добавить определяющие отношения (constitutive relations) — уравнения, связывающие напряжение с деформацией (и другие необходимые связи). Однако, for a solid elastic continuum такой длинный путь построения модели излишен, что читатель и увидит ниже.

## § 9. Principle of virtual work (without Lagrange multipliers)

According to the principle of virtual work for some finite volume of continuum

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \delta W^{(i)}) d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{O}(\partial \mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{O} = 0. \quad (9.1)$$

Here  $\delta W^{(i)}$  is work of internal forces per volume unit in the current configuration;  $\mathbf{f}$  is mass force, with dynamics  $(\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}})$ ;  $\mathbf{p} = \mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$  is surface force.

Applying the divergence theorem to the surface integral, using\*\*

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^\top$$

and randomness of  $\mathcal{V}$ , we get the local differential version of (9.1)

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^\top + \delta W^{(i)} = 0. \quad (9.2)$$

\* Mohr's circles, named after Christian Otto Mohr, is a two-dimensional graphical representation of transformation for the Cauchy stress tensor.

\*\*  $\mathbf{r}^i \cdot \partial_i (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r}) = \mathbf{r}^i \cdot (\partial_i \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{r}^i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{r})$ ,  
 $\mathbf{r}^i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{r}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{r}) \mathbf{r}^i = \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{r}^i \partial_i \delta \mathbf{r})^\top$

When a body virtually moves as a rigid whole, the work of internal forces nullifies

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r} &= \delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0, \\
 (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot (\delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\tau}^\top \cdot \nabla (\delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}) &= 0, \\
 \delta \boldsymbol{\rho} = \text{constant} \Rightarrow \nabla \delta \boldsymbol{\rho} &= {}^2\mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{o} = \text{constant} \Rightarrow \nabla \delta \mathbf{o} = {}^2\mathbf{0}, \\
 \nabla (\delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}) &= \nabla (\delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}) = \nabla \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \mathbf{o} = \\
 &= -\nabla \mathbf{r} \times \delta \mathbf{o} = -\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Assuming  $\delta \mathbf{o} = \mathbf{0}$  (just translation)  $\Rightarrow \nabla \delta \mathbf{r} = \nabla \delta \boldsymbol{\rho} = {}^2\mathbf{0}$ , it turns into the balance of forces (of momentum)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

If  $\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}$  (just rotation) with  $\delta \mathbf{o} = \text{constant}$ , then

$$\begin{aligned}
 (14.10, \S 1.14) \Rightarrow \nabla \delta \mathbf{r} &= \nabla \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \mathbf{o} = -\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o}, \\
 \nabla \delta \mathbf{r}^\top &= \mathbf{E} \times \delta \mathbf{o}
 \end{aligned}$$

With

$$\begin{aligned}
 (7.4, \S 1.7) \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_\times &= -\boldsymbol{\tau} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon}, \\
 \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o}) &= \boldsymbol{\tau} \cdot (-{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \delta \mathbf{o}) = (-\boldsymbol{\tau} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \delta \mathbf{o} = \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \delta \mathbf{o}
 \end{aligned}$$

...

In an elastic continuum, internal forces are potential

$$\delta W^{(i)} = -\rho \delta \tilde{\Pi}$$

...

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S = -\delta W^{(i)} = \rho \delta \tilde{\Pi} \quad (9.3)$$

...

Вид потенциала  $\tilde{\Pi}$  per mass unit пока неизвестен, но очевидно что  $\tilde{\Pi}$  определяется деформацией.

With the balance of mass  $\rho J = \overset{\circ}{\rho} \Leftrightarrow \rho = J^{-1} \overset{\circ}{\rho}$  ( $J \equiv \det \mathbf{F}$  is Jacobian, determinant of the motion gradient), потенциал на единицу объёма в недеформированной конфигурации  $\overset{\circ}{\Pi}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\Pi} &\equiv \overset{\circ}{\rho} \tilde{\Pi} \Rightarrow \delta \overset{\circ}{\Pi} = \overset{\circ}{\rho} \delta \tilde{\Pi}, \\
 \rho \delta \tilde{\Pi} &= J^{-1} \delta \overset{\circ}{\Pi}.
 \end{aligned} \quad (9.4)$$

Полным аналогом (...) является равенство

...

## § 10. Constitutive relations of elasticity

Fundamental relation of elasticity (??)

...

$$\Pi(\mathbf{C}) = \int_0^{\mathbf{C}} \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{C}$$

If the strain energy density is path independent, then it acts as a potential for stress, that is

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}$$

For adiabatic processes,  $\Pi$  is equal to the change in internal energy per unit volume.

For isothermal processes,  $\Pi$  is equal to the Helmholtz free energy per unit volume.

The natural configuration of a body is defined as the configuration in which the body is in stable thermal equilibrium with no external loads and zero stress and strain.

When we apply energy methods in elasticity, we implicitly assume that a body returns to its natural configuration after loads are removed. This implies that the Gibbs' condition is satisfied:

$$\Pi(\mathbf{C}) \geq 0 \quad \text{with} \quad \Pi(\mathbf{C}) = 0 \quad \text{iff} \quad \mathbf{C} = 0$$

...

Начальная конфигурация считается естественной (natural configuration) — недеформированной ненапряжённой:  $\mathbf{C} = {}^2\mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}$ , поэтому в  $\Pi$  нет линейных членов.

Тензор жёсткости  ${}^4\mathbf{A}$

...

Rubber-like material (elastomer)

Материалу типа резины (эластомеру) характерны большие деформации, и функция  $\Pi(I, II, III)$  для него бывает весьма сложной\*.

При больших деформациях исчезают преимущества использования  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{C}$  — проще остаться с вектором-радиусом  $\mathbf{r}$  ...

...

\* **Harold Alexander.** A constitutive relation for rubber-like materials // International Journal of Engineering Science, volume 6 (September 1968), pages 549–563.

## § 11. Piola–Kirchhoff stress tensors and other measures of stress

Соотношение Nanson’a  $\mathbf{n}d\mathcal{O} = J\mathring{\mathbf{n}}do \cdot \mathbf{F}^{-1}$  между векторами бесконечно малой площадки в начальной ( $\mathring{\mathbf{n}}do$ ) и в текущей ( $\mathbf{n}d\mathcal{O}$ ) конфигурациях\*

$$(5.2) \Rightarrow \mathbf{n}d\mathcal{O} \cdot \boldsymbol{\tau} = J\mathring{\mathbf{n}}do \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}d\mathcal{O} = \mathring{\mathbf{n}} \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}do$$

gives the dual expression of a surface force

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}d\mathcal{O} = \mathring{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}do, \quad \mathbf{T} \equiv J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (11.1)$$

Тензор  $\mathbf{T}$  называется первым (несимметричным) тензором напряжения Piola–Kirchhoff, иногда — “номинальным напряжением” (“nominal stress”) или “инженерным напряжением” (“engineering stress”). Бывает и когда какое-либо из этих (на)именований даётся транспонированному тензору

$$\mathbf{T}^\top = J\boldsymbol{\tau}^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} = J\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}.$$

Обращение (11.1)

$$J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$$

...

$$\delta\Pi = \mathbf{T} \cdot \delta\mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top \Rightarrow \Pi = \Pi(\mathring{\nabla}\mathbf{r}) \quad (11.2)$$

— этот немного неожиданный результат получился благодаря коммутативности  $\delta$  и  $\mathring{\nabla}$ :  $\mathring{\nabla}\delta\mathbf{r}^\top = \delta\mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top$  ( $\nabla$  and  $\delta$  don’t commute).

Тензор  $\mathbf{T}$  оказался энергетически сопряжённым с  $\mathbf{F} \equiv \mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top$

$$\mathbf{T} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{F}}. \quad (11.3)$$

Второй (симметричный) тензор напряжения Piola–Kirchhoff  $\mathbf{S}$  энергетически сопряжён с  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$  и  $\mathbf{C} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{C}) &= \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{S} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{C}}, \\ d\mathbf{G} &= 2d\mathbf{C} \Rightarrow \delta\Pi(\mathbf{G}) = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{G}, \quad \mathbf{S} = 2\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{G}}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

\* Like before,  $\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{r}^i} = \mathbf{r}_{\partial i}\mathring{\mathbf{r}}^i = \mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top$  is motion gradient,  $J \equiv \det \mathbf{F}$  is the Jacobian (the Jacobian determinant).

Связь между первым и вторым тензорами

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{\top} \Leftrightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top}, \quad \mathbf{T}^{\top} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$$

и между тензором  $\mathbf{S}$  и тензором напряжения Cauchy  $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \Leftrightarrow J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} = \boldsymbol{\tau}.$$

...

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{\top} = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^{\top} \\ \delta \mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} \\ \delta \mathbf{T} &= \delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{F}^{\top} \end{aligned}$$

...

The quantity  $\boldsymbol{\kappa} = J \boldsymbol{\tau}$  is called the *Kirchhoff stress tensor* and is used widely in numerical algorithms in metal plasticity (where there's no change in volume during plastic deformation). Another name for it is *weighted Cauchy stress tensor*.

...

Here's balance of forces (of momentum) with tensor  $\mathbf{T}$  for any undeformed volume  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}(\partial \mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\mathcal{O} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} + \int_{\mathcal{O}(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} d\mathcal{O} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) d\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \mathbf{0}$$

or in the local (differential) version

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (11.5)$$

Advantages of this equation in comparison with (7.2) are: here figures the known mass density  $\overset{\circ}{\rho}$  of undeformed volume  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$ , and the operator  $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i$  is defined through known vectors  $\overset{\circ}{\mathbf{r}}^i$ . Appearance of  $\mathbf{T}$  **reflects** the specific property of an elastic solid body — “to remember” its initial configuration. Tensor  $\mathbf{T}$  is unlikely useful in fluid mechanics.

Principle of virtual work for an arbitrary volume  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$  of the elastic ( $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$ ) continuum:

$$\int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} (\overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} - \delta \Pi) d\overset{\circ}{\mathcal{V}} + \int_{o(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{r} do = 0,$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{r}) = \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{T}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r}, \quad \mathbf{T}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r} = \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r}^\top$$

$$\delta \Pi = (\overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r}^\top$$

....

The first one is non-symmetric, it connects forces in the deformed stressed configuration to underformed geometry+mass (initially known volumes, areas, densities), and it is energetically conjugate to the motion gradient (commonly mistakenly called “deformation gradient”, despite comprising of rigid rotations). The first (or sometimes its transpose) is also known as “nominal stress” and “engineering stress”.

The second one is symmetric, it connects loads in the initial undeformed configuration to initial mass+geometry, and it’s conjugate to the right Cauchy–Green deformation tensor (and thus to the Cauchy–Green–Venant measure of deformation).

The first is simpler when you use just motion gradient and is more universal, but the second is simpler when you prefer right Cauchy–Green deformation and its offsprings.

There’s also popular Cauchy stress, which relates forces in the deformed configuration to deformed geometry+mass.

“energetically conjugate” means that their product is energy, here: elastic (potential) energy per unit of volume

...

In the case of finite deformations, the Piola–Kirchhoff stress tensors express the stress relative to the initial configuration. This is in contrast to the Cauchy stress tensor which expresses the stress relative to the present configuration. For infinitesimal deformations and rotations, the Cauchy and Piola–Kirchhoff tensors are identical.

Whereas the Cauchy stress tensor  $\boldsymbol{\tau}$  relates stresses in the current configuration, the motion gradient and strain tensors are described by relating the motion to the initial configuration; thus not all tensors describing the material are in either the initial or current configuration. Describing the stress, strain and deformation either in the initial or current configuration



would make it easier to define constitutive models. For example, the Cauchy stress tensor is variant to a pure rotation, while the deformation strain tensor is invariant; thus creating problems in defining a constitutive model that relates a varying tensor, in terms of an invariant one during pure rotation; as by definition constitutive models have to be invariant to pure rotations.

### *1st Piola–Kirchhoff stress tensor*

The *1st Piola–Kirchhoff stress tensor* is one possible solution to this problem. It defines a family of tensors, which describe the configuration of the body in either the current or the initial configuration.

The 1st Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{T}$  relates forces in the present (“spatial”) configuration with areas in the initial (“material”) configuration

$$\mathbf{T} = J \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

where  $\mathbf{F}$  is the motion gradient and  $J \equiv \det \mathbf{F}$  is the Jacobian determinant.

In terms of components in an orthonormal basis, the first Piola–Kirchhoff stress is given by

$$T_{iL} = J \tau_{ik} F_{Lk}^{-1} = J \tau_{ik} \frac{\partial X_L}{\partial x_k}$$

Because it relates different coordinate systems, the 1st Piola–Kirchhoff stress is a two-point tensor. In common, it’s not symmetric. The 1st Piola–Kirchhoff stress is the 3D generalization of the 1D concept of engineering stress.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 1st Piola–Kirchhoff stress tensor will vary with material orientation.

The 1st Piola–Kirchhoff stress is energy conjugate to the motion gradient.

### *2nd Piola–Kirchhoff stress tensor*

Whereas the 1st Piola–Kirchhoff stress relates forces in the current configuration to areas in the initial configuration, the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{S}$  relates forces in the initial configuration to areas in the initial configuration. The force in the initial configuration is obtained via a mapping that preserves the relative relationship between the force direction and the area normal in the initial configuration.

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

In index notation using an orthonormal basis,

$$S_{IL} = J F_{Ik}^{-1} F_{Lm}^{-T} \tau_{km} = J \frac{\partial X_I}{\partial x_k} \frac{\partial X_L}{\partial x_m} \tau_{km}$$

This tensor, a one-point tensor, is symmetric.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor remain constant, irrespective of material orientation.

The 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor is energy conjugate to the Green–Lagrange finite strain tensor.

...

## § 12. Variation of present configuration

Прежде упругая среда рассматривалась в двух конфигурациях: начальной (отсчётной) с векторами-радиусами  $\mathring{\mathbf{r}}$  и текущей (актуальной) с  $\mathbf{r}$ . Теперь представим себе малое изменение текущей конфигурации с бесконечно малыми приращениями вектора положения  $\delta \mathbf{r}$ , вектора массовых сил  $\delta \mathbf{f}$ , первого тензора напряжения Piola–Kirchhoff  $\delta \mathbf{T}$  и тензора деформации  $\delta \mathbf{C}$ . Варьируя (11.5), (...) <sup>\*</sup> и (...), получаем

$$\begin{aligned} \rho \delta \mathbf{f} + \mathring{\nabla} \cdot \delta \mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{T} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} \right) \cdot \mathbf{F}^\top + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{F}^\top, \\ \delta \mathbf{F}^\top &= \delta \mathring{\nabla} \mathbf{r} = \mathring{\nabla} \delta \mathbf{r} = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla \delta \mathbf{r}, \quad \delta \mathbf{F} = \delta \mathring{\nabla} \mathbf{r}^\top = \nabla \delta \mathbf{r}^\top \cdot \mathbf{F}, \\ \delta \mathbf{C} &= \mathbf{F}^\top \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \delta \mathbf{r}^S. \end{aligned} \quad (12.1)$$

...

$$\begin{aligned} (5.2) \Rightarrow \mathring{n} d\mathcal{O} &= J^{-1} \mathbf{n} d\mathcal{O} \cdot \mathbf{F} \Rightarrow \mathring{n} \cdot \delta \mathbf{T} d\mathcal{O} = J^{-1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{T} d\mathcal{O} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathring{n} \cdot \delta \mathbf{T} d\mathcal{O} = \mathbf{n} \cdot \delta \boldsymbol{\tau} d\mathcal{O}, \quad \delta \boldsymbol{\tau} \equiv J^{-1} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{T} \end{aligned}$$

— введённый так тензор  $\delta \boldsymbol{\tau}$  связан с вариацией  $\delta \mathbf{T}$  как  $\boldsymbol{\tau}$  связан с  $\mathbf{T}$  ( $\boldsymbol{\tau} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ ). Из (12.1) и ...

...

... корректируя коэффициенты линейной функции  $\delta \boldsymbol{\tau}(\nabla \delta \mathbf{r})$ .

## § 13. Internal constraints

До сих пор деформация считалась свободной, мера деформации  $\mathbf{C}$  могла быть любой. Однако, существуют материалы со значительным сопротивлением некоторым видам деформации. Резина, например, изменению формы сопротивляется намного меньше, чем изменению объёма — некоторые виды резины можно считать несжимаемым материалом.

Понятие геометрической связи, развитое в общей механике ...

...

$$\begin{aligned} * \nabla &= \nabla \cdot \mathring{\nabla} \mathring{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^i \partial_i \cdot \mathring{\mathbf{r}}^j \partial_j \mathring{\mathbf{r}} \stackrel{?}{=} \mathbf{r}^i \partial_i \mathring{\mathbf{r}} \cdot \mathring{\mathbf{r}}^j \partial_j = \nabla \mathring{\mathbf{r}} \cdot \mathring{\nabla} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathring{\nabla} \\ \mathring{\nabla} &= \mathring{\nabla} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}}^i \partial_i \cdot \mathbf{r}^j \partial_j \mathbf{r} \stackrel{?}{=} \mathring{\mathbf{r}}^i \partial_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^j \partial_j = \mathring{\nabla} \mathbf{r} \cdot \nabla = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla \end{aligned}$$

for incompressible materials  $\Pi = \Pi(I, II)$

Mooney–Rivlin model of incompressible material

$$\Pi = c_1(I - 3) + c_2(II - 3)$$

incompressible Treloar (neo-Hookean) material

$$c_2 = 0 \Rightarrow \Pi = c_1(I - 3)$$

...

## § 14. Hollow sphere under pressure

Решение этой относительно простой задачи описано во многих книгах. В отсчётной (ненапряжённой) конфигурации имеем сферу с внутренним радиусом  $r_0$  и наружным  $r_1$ . Давление равно  $p_0$  внутри и  $p_1$  снаружи.

Введём удобную для этой задачи сферическую систему координат в отсчётной конфигурации  $q^1 = \theta$ ,  $q^2 = \phi$ ,  $q^3 = r$  (рис. ??). Эти же координаты будут и материальными. Имеем

...

## § 15. Stresses as Lagrange multipliers

Описанному ранее в § 9 использованию принципа виртуальной работы предшествовало введение тензора напряжения Cauchy через баланс сил для бесконечно малого тетраэдра (§ 6). Но тут мы увидим, что сей принцип применим и без рассуждений с тетраэдром.

Рассмотрим тело — не только лишь упругое, с любой виртуальной работой внутренних сил  $\delta W^{(i)}$  per mass unit — нагруженное массовыми  $\mathbf{f} dm$  (для краткости пишем  $\mathbf{f}$  вместо  $\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}$ , так что динамика присутствует) и поверхностными  $\mathbf{p} d\mathcal{O}$  внешними силами. Имеем вариационное уравнение

$$\int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \delta W^{(i)}) dV + \int_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{O} = 0. \quad (15.1)$$

Полагаем, что внутренние силы не совершают работу при виртуальном движении тела как целого — когда от бесконечно малых виртуальных перемещений  $\delta \mathbf{r}$  частиц тела нет деформации  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \delta \mathbf{r}^S = {}^2\mathbf{0} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (15.2)$$

Отбросив  $\delta W^{(i)}$  в (15.1) при условии (15.2), получим вариационное уравнение со связью. Приём с множителями Лагранжа даёт возможность считать вариации  $\delta \mathbf{r}$  независимыми. Поскольку в каждой точке связь представлена симметричным тензором второй сложности, то таким же тензором будут и множители Лагранжа  ${}^2\boldsymbol{\lambda}$ . Приходим к уравнению

$$\int_V \left( \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} - {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S \right) dV + \int_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{O} = 0. \quad (15.3)$$

Благодаря симметрии  ${}^2\boldsymbol{\lambda}$  имеем\*

$$\begin{aligned} {}^2\boldsymbol{\lambda} &= {}^2\boldsymbol{\lambda}^\top \Rightarrow {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S = {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^\top, \\ {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S &= \nabla \cdot ({}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{r}) - \nabla \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{r}. \end{aligned}$$

\*  $\boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X}^\top = \boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X}^S, \quad \nabla \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{B}^\top \cdot \nabla \mathbf{a}$

Подставив это в (15.3) и применив теорему о дивергенции, получаем

$$\int_V (\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta \mathbf{r} dV + \int_{\mathcal{O}(\partial V)} (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{O} = 0.$$

But  $\delta \mathbf{r}$  is random on a surface and inside a volume, thus

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}, \quad \nabla \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

— formally introduced symmetric multiplier  ${}^2\boldsymbol{\lambda}$  happened to be the Cauchy stress tensor.

Similar introduction of stresses was presented in book [49]. Here are no new results, но интересна сама возможность одновременного вывода тех уравнений механики сплошной среды, которые раньше считались независимыми. В следующих главах эта техника используется для построения новых континуальных моделей.

## Bibliography

Глубина изложения нелинейной безмоментной упругости характерна для книг А. И. Лурье [22, 23]. Оригинальность как основных идей, так и стиля присуща книге С. Truesdell'a [57]. Монография Ю. Н. Работнова [49], где напряжения представлены как множители Лагранжа, очень интересна и своеобразна. Много ценной информации можно найти у К. Ф. Черных [64]. Л. М. Зубов's book [15] is worthy of mention too. О применении нелинейной теории упругости в смежных областях рассказано в книге С. Teodosiu [53]. Повышенным математическим уровнем отличается монография Ph. Ciarlet [52].

## CLASSICAL LINEAR ELASTICITY

Geometrically linear model: displacements are small. Operators  $\overset{\circ}{\nabla}$  and  $\nabla$  are indistinguishable,  $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ ,  $\rho = \overset{\circ}{\rho}$  — “equations can be written in the initial configuration”, operators  $\delta$  and  $\nabla$  commute ( $\delta \nabla \mathbf{u} = \nabla \delta \mathbf{u}$ ).

### §1. Complete set of equations

Equations of nonlinear elasticity, even in simplest cases, bring to mathematically complicated problems. Therefore the linear theory of small displacements is applied everywhere. Equations of this theory were derived in the first half of the XIX<sup>th</sup> century by Cauchy, Navier, Lamé, Clapeyron, Poisson, Saint-Venant, George Green and other scientists.

The complete closed set (system) of equations of the classical linear theory in the direct invariant tensor notation is

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S. \quad (1.1)$$

Here  $\boldsymbol{\sigma}$  is linear stress tensor,  $\mathbf{f}$  is vector of volume loads,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  is infinitesimal linear deformation tensor,  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon})$  is potential energy of deformation per volume unit,  ${}^4\mathbf{A}$  is stiffness tensor (tetravalent, with symmetry  ${}^4\mathbf{A}_{12\rightleftharpoons 34} = {}^4\mathbf{A}$ ,  ${}^4\mathbf{A}_{1\rightleftharpoons 2} = {}^4\mathbf{A}$ ,  ${}^4\mathbf{A}_{3\rightleftharpoons 4} = {}^4\mathbf{A}$ ).

Equations (1.1) are exact, they can be derived via variation of equations of the nonlinear theory. Variation from an arbitrary configuration is described in §3.12. The linear theory is the result of variation from the initial unstressed configuration, where

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{C} = {}^2\mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{C} = \nabla \delta \mathbf{r}^S \equiv \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}, \quad \delta \boldsymbol{\tau} = \delta \mathbf{T} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C}, \quad \nabla \cdot \delta \boldsymbol{\tau} + \rho \delta \mathbf{f} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

It remains to change  $\delta \mathbf{r}$  to  $\mathbf{u}$ ,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  to  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\delta \boldsymbol{\tau}$  to  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\partial^2 \Pi / \partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}$  to  ${}^4\mathbf{A}$ , and  $\rho \delta \mathbf{f}$  to  $\mathbf{f}$ .

If derivation (1.2) seems abstruse to the reader, it's possible to proceed from equations

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \\ \boldsymbol{\tau} &= J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^\top, \quad \mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^S + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Assuming displacement  $\mathbf{u}$  is small, we'll move from (1.3) to (1.1).

Или вот как. Вместо  $\mathbf{u}$  взять  $\chi \mathbf{u}$ , тут  $\chi \rightarrow 0$  — некоторый весьма малый параметр. А неизвестные представить рядами по целым степеням  $\chi$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}^{(0)} + \chi \boldsymbol{\tau}^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^{(0)} + \chi \mathbf{C}^{(1)} + \dots, \\ \nabla &= \overset{\circ}{\nabla} + \chi \nabla^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \chi \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \quad J = 1 + \chi J^{(1)} + \dots\end{aligned}$$

Для первых (“нулевых”) членов этих разложений и получается (1.1). В книге [57] сие названо “формальным приближением”.

Невозможно сказать в общем случае, насколько мал должен быть параметр  $\chi$  — ответ зависит от ситуации и определяется лишь тем, описывает линейная модель интересующий эффект или нет. Когда, например, интересна связь частоты свободных колебаний упругого тела с амплитудой, то нужна уже нелинейная модель.

A linear problem is posed in the initial volume  $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ , bounded by surface  $o$  with area vector  $\mathbf{n} d\mathbf{o}$  (“the principle of initial dimensions”).

Boundary conditions most often are: on part  $o_1$  of the surface displacements are known (geometrical/kinematical condition), and on another part  $o_2$  — forces (mechanical condition)

$$\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{o_2} = \mathbf{p}. \quad (1.4)$$

More complex combinations happen too, if we know certain components of both  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  simultaneously. For example, на плоской грани  $x = \text{constant}$  при вдавливании штампа с гладкой поверхностью  $u_x = \nu(y, z)$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$  (функция  $\nu$  определяется формой штампа).

Initial conditions in dynamic problems, when instead of  $\mathbf{f}$  we have  $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ , ставятся как обычно в механике — на положения и на скорости: в условный момент времени  $t=0$  определены  $\mathbf{u}$  и  $\dot{\mathbf{u}}$ .



Плотность потенциальной энергии деформации

$$\delta\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \cdots \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdots \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdots \delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\delta^2\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdots \frac{\partial^2\Pi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \cdots \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdots \delta\boldsymbol{\varepsilon} = 2\Pi(\delta\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\delta\Pi = \frac{1}{2} \delta(\boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdots \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdots \delta\boldsymbol{\varepsilon}) = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdots \delta\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

Как отмечалось в [гл. 2](#), в основу механики может быть положен принцип виртуальной работы (d'Alembert–Lagrange principle). Этот принцип справедлив и в линейной теории (internal forces in an elastic medium are potential:  $\delta W^{(i)} = -\delta\Pi$ )

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ (\boldsymbol{f} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}) \cdot \delta \boldsymbol{u} - \delta\Pi \right] d\mathcal{V} + \int_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{u} do = 0, \quad \boldsymbol{u}|_{o_1} = \mathbf{0}, \quad (1.5)$$

because

$$\delta\Pi = \boldsymbol{\sigma} \cdots \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdots \nabla \delta \boldsymbol{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{u},$$

$$\int_{\mathcal{V}} \delta\Pi d\mathcal{V} = \oint_{o(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{u} do - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{u} d\mathcal{V}$$

и левая часть (1.5) приобретает вид

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}) \cdot \delta \boldsymbol{u} d\mathcal{V} + \int_{o_2} (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \boldsymbol{u} do,$$

что, конечно же, равно нулю. Отметим краевое условие  $\boldsymbol{u}|_{o_1} = \mathbf{0}$ : виртуальные перемещения согласованы с этой связью —  $\delta \boldsymbol{u}|_{o_1} = \mathbf{0}$ .

## § 2. Uniqueness of the solution in dynamics

As is typical for linear mathematical physics, the uniqueness theorem is proven “by contradiction”. Assume there are some two solutions:  $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{r}, t)$  and  $\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{r}, t)$ . If difference  $\boldsymbol{u}^* \equiv \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$  will be equal to  $\mathbf{0}$ , then these solutions coincide, that is the solution is unique.

But first we'll make sure the existence of the energy integral — by deriving the balance of energy equation for the linear model of the small displacement theory

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{K} + \Pi)^\bullet d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{u}} do, \\ \mathbf{u}|_{o_1} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{o_2} = \mathbf{p}, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}^\circ, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}^\circ. \end{aligned} \quad (2.1)$$

For the left-hand side we have

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \frac{1}{2} (\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})^\bullet = \frac{1}{2} \rho (\dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}, \\ \dot{\Pi} &= \frac{1}{2} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^\bullet}_{2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}}_{-(\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}})} = \\ &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

(balance of momentum  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  is used),

$$\dot{\mathbf{K}} + \dot{\Pi} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}}.$$

Applying the divergence theorem

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\mathcal{V} = \oint_{o(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}} do$$

and boundary condition  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}$  on  $o_2$ , we get (2.1).

From (2.1) it follows that without loads (when there're no external volume nor surface forces), the full mechanical energy doesn't change:

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ and } \mathbf{p} = \mathbf{0} \Rightarrow \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{K} + \Pi) d\mathcal{V} = \text{constant}(t). \quad (2.2)$$

If at the moment  $t=0$  there was unstressed ( $\Pi=0$ ) rest ( $\mathbf{K}=0$ ), then

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{K} + \Pi) d\mathcal{V} = 0. \quad (2.2')$$

Kinetic energy is positive:  $\mathbf{K} > 0$  if  $\dot{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$  and turns to zero only when  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  — this ensues out of the very definition  $\mathbf{K} \equiv \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ . Potential energy, being a quadratic form of infinitesimal linear deformation  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ , is positive too:  $\Pi > 0$  if  $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$ . Such is a priori requirement of the positive definiteness for stiffness tensor  ${}^4\mathcal{A}$ . This is one of “additional inequalities in the theory of elasticity” [22, 57].

Since  $\mathbf{K}$  and  $\mathbf{\Pi}$  are positive-definite, (2.2') gives

$\mathbf{K} = 0, \mathbf{\Pi} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S = {}^2\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \boldsymbol{\omega}^\circ \times \mathbf{r}$  ( $\mathbf{u}^\circ$  and  $\boldsymbol{\omega}^\circ$  are some constants of translation and rotation). With an immobile part of the surface

$$\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}^\circ = \mathbf{0} \text{ and } \boldsymbol{\omega}^\circ = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ everywhere.}$$

Теперь вспомним о двух решениях  $\mathbf{u}_1$  and  $\mathbf{u}_2$ . Разность  $\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  is a solution of an entirely “homogeneous” (with no constant terms at all) linear problem: в объёме  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , в краевых и в начальных условиях — нули. Therefore  $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$  — uniqueness is proven.

Что же касается существования решения, то простыми выкладками его в общем случае не обосновать. Отметим лишь, что динамическая задача является эволюционной, то есть описывает развитие процесса во времени. Из баланса импульса находим ускорение  $\ddot{\mathbf{u}}$ , далее переходим на “следующий временной слой”  $t + dt$ :

...

Разумеется, эти соображения лишены математической точности, характерной, например, для монографии Philippe Ciarlet [52].

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A}$$

### § 3. Hooke's law

That relation between stress and deformation (strain), which in the XVII<sup>th</sup> century Robert Hooke could only phrase pretty vaguely\*, is written in the direct invariant notation in (1.1) and is carried out by the stiffness tensor

$${}^4\mathcal{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = A^{ijkl} \mathbf{r}_{\partial i} \mathbf{r}_{\partial j} \mathbf{r}_{\partial k} \mathbf{r}_{\partial l}, \quad A^{ijkl} = \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}. \quad (3.1)$$

The stiffness tensor, as the partial derivative of the scalar elastic potential energy density  $\mathbf{\Pi}$  twice by the same bivalent tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , is symmetric in pairs of indices:  ${}^4\mathcal{A}_{12\mp 34} = {}^4\mathcal{A} \Leftrightarrow A^{ijkl} = A^{klij}$ . There-

\* “*ceiinnosssttuu, id est, Ut tensio sic vis*” — **Robert Hooke**. Lectures de Potentia Restitutiva, Or of Spring Explaining the Power of Springing Bodies. London, 1678. 56 pages.

from 36 components out of  $3^4 = 81$  “have a twin” and only 45 are independent. Furthermore, due to the symmetry of infinitesimal deformation tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , tensor  ${}^4\mathcal{A}$  is symmetric inside each pair of indices too:  $A^{ijkl} = A^{jikl} = A^{ijlk} (= A^{jilk})$ . This reduces the number of independent components to 21:

$$A^{abcd} = A^{cdab} = A^{bacd} = A^{abdc}$$

$$A^{1111}$$

$$A^{1112} = A^{1121} = A^{1211} = A^{2111}$$

$$A^{1113} = A^{1131} = A^{1311} = A^{3111}$$

$$A^{1122} = A^{2211}$$

$$A^{1123} = A^{1132} = A^{2311} = A^{3211}$$

$$A^{1133} = A^{3311}$$

$$A^{1212} = A^{1221} = A^{2112} = A^{2121}$$

$$A^{1213} = A^{1231} = A^{1312} = A^{1321} = A^{2113} = A^{2131} = A^{3112} = A^{3121}$$

$$A^{1222} = A^{2122} = A^{2212} = A^{2221}$$

$$A^{1223} = A^{1232} = A^{2123} = A^{2132} = A^{2312} = A^{2321} = A^{3212} = A^{3221}$$

$$A^{1233} = A^{2133} = A^{3312} = A^{3321}$$

$$A^{1313} = A^{1331} = A^{3113} = A^{3131}$$

$$A^{1322} = A^{2213} = A^{2231} = A^{3122}$$

$$A^{1323} = A^{1332} = A^{2313} = A^{2331} = A^{3123} = A^{3132} = A^{3213} = A^{3231}$$

$$A^{1333} = A^{3133} = A^{3313} = A^{3331}$$

$$A^{2222}$$

$$A^{2223} = A^{2232} = A^{2322} = A^{3222}$$

$$A^{2233} = A^{3322}$$

$$A^{2323} = A^{2332} = A^{3223} = A^{3232}$$

$$A^{2333} = A^{3233} = A^{3323} = A^{3332}$$

$$A^{3333}$$

Нередко компоненты тензора жёсткости записывают симметричной матрицей  $6 \times 6$  вида

$$[{}^4\mathcal{A}]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_3 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_4 & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_5 & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_6 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A^{1111} & A^{1112} & A^{1133} & A^{1112} & A^{1113} & A^{1123} \\ A^{2211} & A^{2222} & A^{2233} & A^{1222} & A^{1322} & A^{2223} \\ A^{3311} & A^{3322} & A^{3333} & A^{1233} & A^{1333} & A^{2333} \\ A^{1211} & A^{2212} & A^{3312} & A^{1212} & A^{1213} & A^{1223} \\ A^{1311} & A^{2213} & A^{3313} & A^{1312} & A^{1313} & A^{1323} \\ A^{2311} & A^{2322} & A^{3323} & A^{2312} & A^{2313} & A^{2323} \end{bmatrix}$$

Даже в декартовых координатах  $x, y, z$  квадратичная форма упругой энергии  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$  довольно-таки громоздкая:

$$\begin{aligned} 2\Pi = & a_1\varepsilon_x^2 + a_2\varepsilon_y^2 + a_3\varepsilon_z^2 + a_4\varepsilon_{xy}^2 + a_5\varepsilon_{xz}^2 + a_6\varepsilon_{yz}^2 + \\ & + 2\left[\varepsilon_x(a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\varepsilon_{xy} + a_{15}\varepsilon_{xz} + a_{16}\varepsilon_{yz}) + \right. \\ & + \varepsilon_y(a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\varepsilon_{xy} + a_{25}\varepsilon_{xz} + a_{26}\varepsilon_{yz}) + \\ & + \varepsilon_z(a_{34}\varepsilon_{xy} + a_{35}\varepsilon_{xz} + a_{36}\varepsilon_{yz}) + \\ & \left. + \varepsilon_{xy}(a_{45}\varepsilon_{xz} + a_{46}\varepsilon_{yz}) + a_{56}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}\right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Когда добавляется материальная симметрия, число независимых компонент тензора  $\mathbf{A}$  ещё уменьшается.

Пусть материал имеет плоскость симметрии упругих свойств  $z = \text{constant}$ . Тогда энергия  $\Pi$  не меняется при перемене знаков у  $\varepsilon_{zx}$  и  $\varepsilon_{zy}$ . А это возможно лишь если

$$\Pi \Big|_{\substack{\varepsilon_{xz} = -\varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{yz}}} = \Pi \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 = a_{15} = a_{16} = a_{25} = a_{26} = \\ = a_{35} = a_{36} = a_{45} = a_{46} \end{aligned} \quad (3.3)$$

— число независимых констант падает до 13.

Пусть далее плоскостей симметрии две:  $z = \text{constant}$  и  $y = \text{constant}$ . Поскольку  $\Pi$  в таком случае не чувствительна к знакам  $\varepsilon_{yx}$  и  $\varepsilon_{yz}$ , вдобавок к (3.3) имеем

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{56} = 0 \quad (3.4)$$

— осталось 9 констант.

Ортотропным (ортогонально анизотропным) называется материал с тремя ортогональными плоскостями симметрии — пусть это координатные плоскости  $x, y, z$ . Легко увидеть, что (3.3) и (3.4) — это весь набор нулевых констант и в этом случае. Итак, ортотропный материал характеризуется девятью константами, и “для ортотропности” достаточно двух перпендикулярных плоскостей симметрии. Вид упругой энергии упрощается до

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}a_1\varepsilon_x^2 + \frac{1}{2}a_2\varepsilon_y^2 + \frac{1}{2}a_3\varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}a_4\varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{2}a_5\varepsilon_{xz}^2 + \frac{1}{2}a_6\varepsilon_{yz}^2 + \\ & + a_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_x\varepsilon_z + a_{23}\varepsilon_y\varepsilon_z. \end{aligned}$$

В ортотропном материале сдвиговые (угловые) деформации  $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  никак не влияют на нормальные напряжения  $\sigma_x = \partial\Pi/\partial\varepsilon_x$ ,  $\sigma_y = \partial\Pi/\partial\varepsilon_y$ ,  $\sigma_z = \partial\Pi/\partial\varepsilon_z$  (и наоборот). Популярный ортотропный материал — древесина; её упругие свойства различны по трём вза-

имно перпендикулярным направлениям: по радиусу, вдоль окружности и по высоте ствола.

Ещё один случай анизотропии — трансверсально изотропный (transversely isotropic) материал. Он характеризуется

...

æolotropic (anisotropic)

...

$$2\Pi = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \Rightarrow$$

$$2\Pi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.5)$$

...

преобразование Лежандра

Legendre (involution) transform(ation)

плотность потенциальной энергии внутренних сил (напряжений)

complementary energy

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = {}^4\mathcal{B} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot {}^4\mathcal{B}, \quad (3.6)$$

$$\hat{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \Pi(\boldsymbol{\varepsilon})$$

...

В линейной теории дополнительная энергия численно равна энергии деформации (“упругому потенциалу”).

## § 4. Theorems of statics

*Clapeyron’s theorem*

In equilibrium with external forces, volume ones  $\mathbf{f}$  and surface ones  $\mathbf{p}$ , the work of these forces (“statically frozen” — constant along

time) through actual displacements is equal to the doubled\* energy of deformation

$$2 \int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{o}. \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \circ \quad 2\Pi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{-\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = \int_{o_2} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{o} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} \quad \bullet \end{aligned}$$

Из (4.1) следует также, что без нагрузки  $\int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = 0$ . Поскольку  $\Pi$  положительна, то и напряжение  $\boldsymbol{\sigma}$ , и деформация  $\boldsymbol{\varepsilon}$  без нагрузки — нулевые.

$$\begin{aligned} 2\Pi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\ \dot{\Pi} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \delta\Pi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

**Paradox of elastostatics:**  $\Pi$  is equal to only the half of the work of external forces.

The accumulated potential energy of deformation  $\Pi$  is equal to only the half of the work done by external forces, acting through displacements from the unstressed configuration to the equilibrium.

Clapeyron's theorem implies that the accumulated elastic energy accounts for only the half of energy spent on deformation. The remaining half of the work done by external forces is lost somewhere before reaching the equilibrium.

This apparent paradox is reached within the framework of purely conservative linear elasticity. Alternatively, however, within elastostatics

\*“Ce produit représentait d’ailleurs le double de la force vive que le ressort pouvait absorber par l’effet de sa flexion et qui était la mesure naturelle de sa puissance.”—

**Benoît Paul Émile Clapeyron.** Mémoire sur le travail des forces élastiques dans un corps solide élastique déformé par l’action de forces extérieures. *Comptes rendus*, Tome XLVI, Janvier–Juin 1858. Page 208–212.

the common characterization of the work done to reach equilibrium is conceptually ambiguous, and a novel interpretation may be needed.

**Roger Fosdick and Lev Truskinovsky.** About Clapeyron's Theorem in Linear Elasticity. *Journal of Elasticity*, Volume 72, July 2003. Pages 145–172.

There is always heating due to energy dissipation.

Для решения парадокса в теории распространена концепция of “static loading” — infinitely slow gradual application of the load.

Статика рассматривает “замороженное” равновесие вне времени. Динамика нагружения до равновесия — предыстория. In the linear small displacement theory в равновесии затраченная на деформацию работа внешних сил на актуальных перемещениях равна удвоенной потенциальной энергии деформации. “Запасается” всего половина потраченной энергии. Вторая половина есть дополнительная энергия, она теряется до обретения равновесия на динамику — на внутреннюю энергию частиц (“диссипацию”), на колебания и волны. Так в теории. Однако, в реальности не бывает ни моментального “мёртвого” нагружения, ни бесконечно медленного “следящего”. Это две крайности. Реальная динамика нагружения всегда где-то между ними.

В области же бесконечно малых вариаций и виртуальных работ, работа реальных внешних сил на виртуальных перемещениях точно равна вариации упругого потенциала. А упругая среда есть такая, в которой вариация работы сил внутренних (напряжений) на виртуальных деформациях это минус вариация потенциала.

$-\delta W^{(i)} = \delta \Pi = \delta W^{(e)}$ , когда варьируются только перемещения (нагрузки не варьируются). Потому в принципе виртуальной работы и варьируются лишь перемещения, чтобы виртуальная работа внешних неварьируемых реальных сил на вариациях перемещений была равна минус вариации внутренней энергии (в случае упругой среды — вариации упругого потенциала).

### *Uniqueness of solution theorem*

Как и в динамике (§ 2), допускаем существование двух решений и ищем их разность

...



The uniqueness of solution, discovered by G. Kirchhoff for bodies with simply connected contour\*, is contrary to, as it seems, the everyday experience. Imagine a straight rod, clamped at one end (“cantilever”) and compressed at second end with a longitudinal force (fig. 12). When a load is large enough, the problem of statics has two solutions — “straight” and “bent”. But such a contradiction with the uniqueness theorem comes from nonlinearity of this problem. If a load is small, then the solution is described by linear equations and is unique.

...

...

...

...

### Reciprocal work theorem

Proposed by Enrico Betti\*\*.

Для тела с фиксированием части поверхности  $o_1$  рассматриваются два варианта: первый с нагрузками  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{p}_1$  и второй с нагрузками  $\mathbf{f}_2$ ,  $\mathbf{p}_2$ . Словесная формулировка теоремы та же, что и в § 2.6. Математическая запись

$$\overbrace{\int_V \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{u}_2 dV + \int_{o_2} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_2 d\mathbf{o}}^{W_{12}} = \overbrace{\int_V \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{u}_1 dV + \int_{o_2} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_1 d\mathbf{o}}^{W_{21}}. \quad (4.2)$$

...

Reciprocal work theorem, also known as Betti’s theorem, claims that for a linear elastic structure subject to two sets of forces  $P$  and  $Q$ , the work done by set  $P$  through displacements produced by set  $Q$  is equal to the work done by set  $Q$  through displacements produced by set  $P$ . This theorem has

\* **Gustav Robert Kirchhoff**. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle’s journal)*, 56. Band (1859). Seiten 285–313. (Seite 291)

\*\* **Enrico Betti**. Teoria della elasticità. *Il Nuovo Cimento* (1869–1876), VII e VIII (1872). Pagina 69.

applications in structural engineering where it is used to define influence lines and derive the boundary element method.

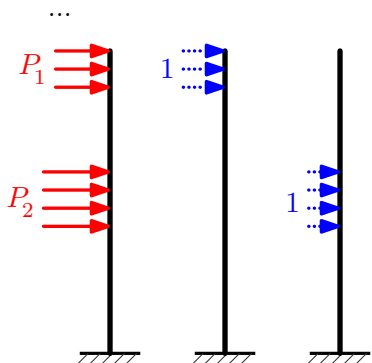


рисунок 13

The reciprocal work theorem находит неожиданные и эффективные применения. For example, consider a rod-beam clamped at one end (“cantilever”) and bent by two forces with integral values  $P_1$  and  $P_2$  (рис. 13). While the linear theory is applied, перемещения-прогибы могут быть представлены в виде

$$u_1 = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2,$$

$$u_2 = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2.$$

## § 5. Equations for displacements

The complete set of equations (1.1) contains unknowns  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  and  $u$ . Excluding  $\sigma$  and  $\varepsilon$ , приходим к постановке в перемещениях (симметризация  $\nabla u$  тут лишняя, ведь  ${}^4\mathcal{A}_{3\rightleftharpoons 4} = {}^4\mathcal{A}$ )

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla u) + f &= 0, \\ u|_{o_1} &= u_0, \quad n \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla u|_{o_2} = p. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В изотропном теле (5.1) принимает вид

...

Общее решение однородного уравнения (...) нашёл Heinz Neuber  
П. Ф. Папкович

...

## § 6. Concentrated force in an infinite medium

Concentrated force is useful mathematical idealization, but cannot be found in the real world, where all forces are either body forces acting over a volume or surface forces acting over an area.

Начнём с риторического вопроса: почему упругое тело сопротивляется приложенной нагрузке, выдерживает её? Удачный ответ можно найти ...

...

## § 7. Finding displacements by deformations

Разложив градиент перемещения на симметричную и антисимметричную части

$$\nabla \mathbf{u} = \overbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\nabla \mathbf{u}^S} - \overbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}}^{-\nabla \mathbf{u}^A}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}, \quad (7.1)$$

...

Saint-Venant's compatibility condition is the integrability conditions for a symmetric tensor field to be a strain.

The compatibility conditions in linear elasticity are obtained by observing that there are six strain–displacement relations that are functions of only three unknown displacements. This suggests that the three displacements may be removed from the system of equations without loss of information.

A body that deforms without developing any gaps/overlaps is called a compatible body. Compatibility conditions are mathematical conditions that determine whether a particular deformation will leave a body in a compatible state.

...

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^T$$

Контур здесь произволен, так что приходим к соотношению

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} = {}^2\mathbf{0}, \quad (7.2)$$

называемому уравнением совместности деформаций.

Resulting expression (7.2) in terms of only deformation/strain provide constraints on possible variants of a deformation/strain field.

...

Тензор  $\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon}$  симметричен вместе с  $\boldsymbol{\varepsilon}$

...

Все уравнения линейной теории имеют аналог (первоисточник) в нелинейной. Чтобы найти его для (7.2), вспомним тензор деформации Cauchy–Green’a (§ 3.3) и тензоры кривизны (§ 1.16)

...

## § 8. Equations for stresses

Balance of forces (of momentum)

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0 \quad (8.1)$$

does not quite yet determine stresses. It’s necessary as well, that deformations/strains  $\varepsilon(\sigma)$  corresponding to stresses (3.6)

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \sigma} = {}^4\mathcal{B} \cdot \sigma \quad (8.2)$$

are compatible (§ 7)

$$\text{inc } \varepsilon(\sigma) \equiv \nabla \times (\nabla \times \varepsilon(\sigma))^T = {}^20. \quad (8.3)$$

Gathered together, (8.1), (8.2) and (8.3) present the complete closed set (system) of equations for stresses.

...

...

## § 9. Principle of minimum potential energy

When the existence of a deformation energy function is assured, and external forces are assumed constant during variation of displacements, the principle of virtual work leads to the principle of minimum potential energy.

Formulation of the principle:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) \equiv \int_{\mathcal{V}} (\Pi(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} do \rightarrow \min, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0. \quad (9.1)$$

Functional  $\mathcal{E}(\mathbf{u})$ , called the (full) potential energy of a linear-elastic body, is minimal when displacements  $\mathbf{u}$  are true — that is for the solution of problem (5.1). Input functions  $\mathbf{u}$  must satisfy the geometrical condition on  $o_1$  (so they don’t break existing constraints) and be continuous (or else  $\Pi(\mathbf{u})$  will not be integrable).

For the true field of displacements  $\mathbf{u}$ , quadratic function

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}$$

becomes equal to the true deformation energy. Then  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\min}$ , which according to the Clapeyron's theorem (4.1) is

$$\mathcal{E}_{\min} = \int_{\mathcal{V}} \Pi(\mathbf{u}) d\mathcal{V} - \left( \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} do \right) = - \int_{\mathcal{V}} \Pi(\mathbf{u}) d\mathcal{V}.$$

Taking some other satisfactory (“admissible”) field of displacements  $\mathbf{u}'$ , have a look at finite difference

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\mathbf{u}') - \Pi(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) do,$$

seeking  $\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) \geq 0$  or (ditto)  $\mathcal{E}(\mathbf{u}') \geq \mathcal{E}(\mathbf{u})$ .

$\mathbf{f}$  = **constant** and  $\mathbf{p}$  = **constant**

$\Pi(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{a} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}$  (but *not* linear  $\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}$  — this means  $\Pi(\mathbf{a}) \neq \frac{1}{2} \sigma \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}$ )

Constraints don't change:  $(\mathbf{u}' - \mathbf{u})|_{o_1} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ . External surface force  $\mathbf{p}|_{o_2} = \mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \sigma$  on  $o_2$  and  $= \mathbf{0}$  elsewhere on  $o(\partial\mathcal{V})$ .  $\sigma = \nabla \mathbf{u} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} = {}^2\mathbf{constant}$  along with constant  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{f}$ . Therefore

$$\begin{aligned} \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) do &= \oint_{o(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) do = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\sigma \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u})) d\mathcal{V} = \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \sigma) \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \sigma^T \cdot \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

Due to symmetry  $\sigma^T = \sigma \Rightarrow \sigma^T \cdot \cdot \nabla \mathbf{a} = \sigma \cdot \cdot \nabla \mathbf{a} = \sigma \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}^S \forall \mathbf{a}$ . Разность преобразуется до

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) &= \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\mathbf{u}') - \Pi(\mathbf{u}) - (\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) - \sigma \cdot \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

And with the balance of momentum  $\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0}$

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\mathbf{u}') - \Pi(\mathbf{u}) - \sigma \cdot \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V}.$$

Here

$$\Pi(\mathbf{u}') = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}', \quad \Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u},$$

$$\Pi(u') - \Pi(u) = \frac{1}{2} \left( \nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' - \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u \right)$$

$${}^4\mathcal{A}_{12 \rightleftharpoons 34} = {}^4\mathcal{A} \Rightarrow \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' = \nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u$$

$$\frac{1}{2} \left( \nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' - \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u + \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' - \nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u \right)$$

dot product is distributive ...

differentiation is linear

$$(\nabla u' - \nabla u) = \nabla(u' - u)$$

... для конечной разности потенциалов

$$\frac{1}{2} \nabla(u' + u) \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla(u' - u) = \Pi(u') - \Pi(u),$$

добавляя к которой

$$-\nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla(u' - u) = -\sigma \cdot \cdot \nabla(u' - u)$$

получаем

$$\frac{1}{2} \nabla(u' - u) \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla(u' - u) = \Pi(u' - u)$$

и в конце-концов\*

$$\mathcal{E}(u') - \mathcal{E}(u) = \int_V \Pi(u' - u) dV.$$

Since  ${}^4\mathcal{A}$  is positive definite (§ 2),  $\Pi(w) = \frac{1}{2} \nabla w \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla w \geq 0 \ \forall w$  (and = 0 only if  $\nabla w = \mathbf{0} \Leftrightarrow w = \text{constant}$ : for a case of translation as a whole without deformation).

...

$$\delta \nabla u = \nabla \delta u$$

...

Ritz method

Задача о минимуме функционала  $\mathcal{E}(u)$  приближённо решается как

...

метод конечных элементов, finite element method

...

$$* \ b^2 - a^2 - 2a(b - a) = (b + a)(b - a) - 2a(b - a) = (b - a)^2$$

## § 10. Principle of minimum complementary energy

When the constitutive stress–strain relations assure the existence of a complementary energy function and the geometrical boundary conditions are assumed constant during variation of stresses, then the principle of minimum complementary energy emerges.

The complementary energy of a linear-elastic body is the following functional over the field of stresses:

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \int_{\mathcal{V}} \hat{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}) d\mathcal{V} - \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_0 do, \quad \mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}|_{o_1}, \quad (10.1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{o_2} = \mathbf{p}.$$

...

$$\delta(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) = \nabla \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ inside volume } \mathcal{V}$$

...

The principle of minimum complementary energy is very useful for estimating inexact (approximate) solutions. But for computations it isn't so essential as the (Lagrange) principle of minimum potential energy (9.1).

## § 11. Mixed principles of stationarity

### Prange–Hellinger–Reissner Variational Principle,

named after *Ernst Hellinger*, *Georg Prange* and *Eric Reissner*.

Working independently of Hellinger and Prange, Eric Reissner published his famous six-page paper “On a variational theorem in elasticity” in 1950. In this paper he develops — without, however, considering Hamilton–Jacobi theory — a variational principle same to that of Prange and Hellinger.

### Hu–Washizu Variational Principle,

named after *Hu Haichang* and *Kyuichiro Washizu*.

The following functional over displacements and stresses

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\mathcal{V}} \left[ \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}^S - \hat{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] d\mathcal{V} -$$

$$- \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) do - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} do \quad (11.1)$$

carries names of Reissner, Prange and Hellinger.

...

Преимущество принципа Reissner’a–Hellinger’a — в свободе варьирования. Но есть и изъян: у функционала нет экстремума на истинном решении, а лишь стационарность.

Принцип можно использовать для построения приближённых решений методом Ритца (Ritz method). Задавая аппроксимации

...

Принцип Hu–Washizu [102] формулируется так:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) &= 0, \\ \mathcal{W} \equiv \int_V & \left[ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u}^S - \boldsymbol{\varepsilon}) + \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] dV - \\ & - \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) d\mathbf{o} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{o}. \quad (11.2) \end{aligned}$$

Как и в принципе Рейсснера–Хеллингера, здесь нет ограничений ни в объёме, ни на поверхности, но добавляется третий независимый аргумент  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Поскольку  $\hat{\Pi} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \Pi$ , то (11.1) и (11.2) кажутся почти одним и тем же.

Из принципа Ху–Васидзу вытекает вся полная система уравнений с граничными условиями, так как

...

Об истории открытия вариационных принципов и соотношении их написано, например, у Ю. Н. Работнова [49].

## § 12. Antiplane shear

Это та проблема линейной теории упругости, где простыми выкладками получаются нетривиальные результаты.\*

Рассматривается изотропная среда в декартовых координатах  $x_i$  ( $x_1$  и  $x_2$  в плоскости,  $x_3$  перпендикулярна плоскости) с базисными ортами  $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ . In case

\* Нетривиальное в теории упругости это, например, когда “деление силы на площадь” даёт бесконечно большую погрешность в нахождении напряжения.



of antiplane deformation/strain (antiplane shear) поле перемещений  $\mathbf{u}$  параллельно координате  $x_3$ :  $\mathbf{u} = v\mathbf{e}_3$ , и  $v$  не зависит от  $x_3$ :  $v = v(x_1, x_2)$ ,  $\partial_3 v = 0$ .

Деформация

$$\varepsilon \equiv \nabla \mathbf{u}^S = \nabla (v\mathbf{e}_3)^S = \mathbf{e}_3 \nabla v^S + v \underbrace{\nabla \mathbf{e}_3}_0^S = \frac{1}{2} (\nabla v \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \nabla v)$$

...

Возможна неоднородность среды в плоскости  $x_1, x_2$ :  $\mu = \mu(x_1, x_2)$ ,  $\partial_3 \mu = 0$ .

...

### § 13. Twisting of rods

**M. de Saint-Venant.** Memoire sur la torsion des prismes (1853)

Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant. Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. 1856. 327 pages.

1. Memoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion, etc. Memoires presentes par divers savants a l'Academie des sciences, t. 14, 1856.

2. Memoire sur la flexion des prismes, etc. Journal de mathematiques pures et appliquees, publie par J. Liouville, 2me serie, t. 1, 1856.

Перевод на русский язык: **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц. стр. 379–494

Эта задача, тщательно изученная Saint-Venant'ом, рассматривается едва ли не в каждой книге по классической упругости. Речь идёт о цилиндре какого-либо сечения, нагруженном лишь поверхностными силами на торцах

...

## § 14. Plane deformation

Тут вектор перемещения  $\mathbf{u}$  параллелен плоскости  $x_1, x_2$  и не зависит от третьей координаты  $z$

...

Для примера рассмотрим полуплоскость с сосредоточенной нормальной силой  $Q$  на краю (?? рисунок ??)

...

## Bibliography

Можно назвать несколько десятков книг по классической теории упругости, представляющих несомненный интерес несмотря на возрастающую отдалённость во времени. Подробные литературные указания содержатся в фундаментальной монографии ...

# MICROPOLAR THREE-DIMENSIONAL CONTINUUM

## §1. Introduction to linear micropolar theory

Характерная отличительная особенность классических упругих сред (гл. 3 и 4) — то, что они состоят “из простых материальных точек”. Частица классического континуума имеет лишь трансляционные степени свободы, её движение определяется только вектором  $\mathbf{r}(q^i, t)$ . Поэтому нагрузки (“силовые факторы”) в такой среде — только силы, объёмные и поверхностные. Моментов нет.

Но не так уж трудно построить более сложные модели сплошной среды, в которых частицы обладают не только лишь степенями свободы трансляции, но и некоторыми дополнительными. Новые степени свободы связаны и с новыми нагрузками.

Наиболее естественная из неклассических моделей трёхмерной среды предложена братьями Cosserat в 1909 году [19]. Каждая частица континуума Cosserat есть бесконечномалое совершенно твёрдое тело с шестью степенями свободы — тремя трансляционными и тремя вращательными. Нагрузки в такой среде — силы и моменты. Работа братьев Cosserat оставалась незамеченной полвека, но затем возник интерес к этой теме [30, 36].

from **Nowacki W.** *The Linear Theory of Micropolar Elasticity*. In: *Micropolar Elasticity. International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures)*, vol. 151, 1974, pp. 1–43

Woldemar Voigt tried to remove the shortcomings of the classical theory of elasticity [**W. Voigt**. *Theoretische Studien über die Elasticitätsver-*

*hältnisse der Krystalle. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, 34: 3–51, 1887]* by the assumption that the interaction of two parts of the body is transmitted through an area element  $do$  by means not only of the force vector  $\mathbf{p}do$  but also by the moment vector  $\mathbf{m}do$ . Thus, besides the force stresses  $\sigma_{ji}$  also the moment stresses have been defined.

However, the complete theory of asymmetric elasticity was developed by the brothers **François et Eugène Cosserat** who published it in 1909 in the work “*Théorie des corps déformables*”.

They assumed that the body consists of interconnected particles in the form of small rigid bodies. During the deformation each particle is displaced by  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  and rotated by  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ , the functions of the position  $\mathbf{x}$  and time  $t$ .

Thus an elastic continuum has been described such that its points possess the orientation (polar media) and for which we can speak of the rotation of a point. The vectors  $\mathbf{u}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  are mutually independent and determine the deformation of the body. The introduction of the vectors  $\mathbf{u}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  and the assumption that the transmission of forces through an area element  $do$  is carried out by means of the force vector  $\mathbf{p}$  and the moment vector  $\mathbf{m}$  leads in the consequence to asymmetric stress tensors  $\sigma_{ji}$  and  $\mu_{ji}$ .

The theory of the brothers E. and F. Cosserat remained unnoticed and was not duly appreciated during their lifetime. This was so because the presentation was very general (the theory was non-linear, including large deformations) and because its frames exceeded the frames of the theory of elasticity. They attempted to construct the unified field theory, containing mechanics, optics and electrodynamics and combined by a general principle of the least action.

The research in the field of the general theories of continuous media conducted in the last fifteen years, drew the attention of the scientists to Cosserats' work. Looking for the new models, describing more precisely the behaviour of the real elastic media, the models similar to, or identical with that of Cosserats' have been encountered. Here, we mention, first of all, the papers by C. Truesdell and R. A. Toupin [**C. Truesdell and R. A. Toupin. The classical field theories. Encyclopædia of Physics, Chapter 1, Springer-Verlag, Berlin, 1960**], G. Grioli [**Grioli G. Elasticité asymétrique. Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser. IV, 50 (1960)**], R. D. Mindlin and H. F. Tiersten [**Mindlin, R. D.; Tiersten, H. F.**

*Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 11. 1962. 415-448].*

In the truly micropolar continuum, vector fields of displacements  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  and rotations  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, t)$  are mutually independent. It is also called the model with free rotation.

Consider at first the geometrically linear model, that's the case of small displacements and small rotations. Here operators  $\overset{\circ}{\nabla}$  and  $\nabla$  are indistinguishable,  $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ ,  $\rho = \overset{\circ}{\rho}$  — equations “can be written in the initial configuration”, operators  $\delta$  and  $\nabla$  commute ( $\delta \nabla \mathbf{u} = \nabla \delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \nabla \boldsymbol{\varphi} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}$ ).

As the foundation for building this model we put the principle of virtual work (“the variation of work of real external forces on virtual displacements is equal with negative sign to the variation of work of internal forces — real stresses on virtual deformations”)

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) d\mathcal{V} + \int_o (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) do = - \int_{\mathcal{V}} \delta W^{(i)} d\mathcal{V}.$$

Here  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{m}$  — внешние силы и моменты per volume unit;  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{M}$  — они же, но per surface unit (поверхностные нагрузки действуют лишь на некоторой части  $o$  поверхности  $\partial \mathcal{V}$ , ограничивающей объём  $\mathcal{V}$ );  $\delta W^{(i)}$  — работа внутренних сил per volume unit.

По-прежнему полагаем, что  $\delta W^{(i)}$  обнуляется при движении тела как целого без деформации:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} + \text{constant}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \text{constant} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0,$$

$$\nabla \delta \mathbf{u} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{E} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} = {}^2\mathbf{0}.$$

Introducing deformation tensors — tensor of relative displacement between particles (distortion tensor, strain tensor)  $\boldsymbol{\gamma}$  and curvature-twist tensor (torsion-flexure tensor, wryness tensor)  $\boldsymbol{\kappa}$  — as

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \nabla \boldsymbol{\varphi}, \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_\times = \nabla \times \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\kappa}_\times = \nabla \times \boldsymbol{\varphi},$$

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \nabla \delta \mathbf{u} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi},$$

having the needed absence of virtual deformations  $\delta \boldsymbol{\gamma} = {}^2\mathbf{0}$  and  $\delta \boldsymbol{\kappa} = {}^2\mathbf{0}$ .

In § 3.15 for the momentless continuum, stresses appear as Lagrange multipliers in the principle of virtual work, when  $\delta W^{(i)} = 0$ . The same here:

$$\int_V \left( f \cdot \delta u + m \cdot \delta \varphi - \tau \cdot \delta \gamma^T - \mu \cdot \delta \kappa^T \right) dV + \int_0 \left( p \cdot \delta u + M \cdot \delta \varphi \right) do = 0. \quad (1.2)$$

Множители Лагранжа в каждой точке — это несимметричные тензоры второй сложности  $\tau$  и  $\mu$ .

Преобразуем  $-\tau \cdot \delta \gamma^T$  и  $-\mu \cdot \delta \kappa^T$

$$\delta \gamma^T = \nabla \delta u^T - \delta \varphi \times E, \quad \delta \kappa^T = \nabla \delta \varphi^T,$$

$$-\tau \cdot \delta \gamma^T = -\tau \cdot \nabla \delta u^T + \tau \cdot (\delta \varphi \times E), \quad -\mu \cdot \delta \kappa^T = -\mu \cdot \nabla \delta \varphi^T.$$

Используя

$$(7.4, \S 1.7) \Rightarrow A_{\times} = -A \cdot \cdot {}^3\epsilon,$$

$$A \cdot \cdot (b \times E) = A \cdot \cdot (E \times b) = A \cdot \cdot (-{}^3\epsilon \cdot b) = \\ = (-A \cdot \cdot {}^3\epsilon) \cdot b = A_{\times} \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau \cdot \cdot (\delta \varphi \times E) = \tau_{\times} \cdot \delta \varphi$$

и “product rule”

$$\nabla \cdot (\tau \cdot \delta u) = (\nabla \cdot \tau) \cdot \delta u + \tau \cdot \cdot \nabla \delta u^T,$$

$$\nabla \cdot (\mu \cdot \delta \varphi) = (\nabla \cdot \mu) \cdot \delta \varphi + \mu \cdot \cdot \nabla \delta \varphi^T,$$

получаем

$$-\tau \cdot \cdot \delta \gamma^T = (\nabla \cdot \tau) \cdot \delta u - \nabla \cdot (\tau \cdot \delta u) + \tau_{\times} \cdot \delta \varphi,$$

$$-\mu \cdot \cdot \delta \kappa^T = (\nabla \cdot \mu) \cdot \delta \varphi - \nabla \cdot (\mu \cdot \delta \varphi).$$

После интегрирования с применением теоремы о дивергенции\*

$$\int_V \nabla \cdot (\tau \cdot \delta u) dV = \oint_{\partial(\partial V)} n \cdot \tau \cdot \delta u do, \quad \int_V \nabla \cdot (\mu \cdot \delta \varphi) dV = \oint_{\partial(\partial V)} n \cdot \mu \cdot \delta \varphi do$$

(1.2) приобретает вид

$$\int_V \left( (\nabla \cdot \tau + f) \cdot \delta u + (\nabla \cdot \mu + \tau_{\times} + m) \cdot \delta \varphi \right) dV + \\ + \int_0 \left( (p - n \cdot \tau) \cdot \delta u + (M - n \cdot \mu) \cdot \delta \varphi \right) do = 0.$$

\*  $a \cdot ({}^2B \cdot c) = (a \cdot {}^2B) \cdot c = a \cdot {}^2B \cdot c$

From randomness of variations  $\delta \mathbf{u}$  and  $\delta \varphi$  inside a volume ensues the balance of forces and moments

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

and from randomness on a surface — boundary conditions

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}. \quad (1.4)$$

Force stress tensor  $\boldsymbol{\tau}$  удовлетворяет тем же дифференциальным “уравнениям равновесия”<sup>\*</sup> и краевым условиям, что и в безмоментной среде. But tensor  $\boldsymbol{\tau}$  is asymmetric: instead of  $\boldsymbol{\tau}_{\times} = \mathbf{0}$  here is  $\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \mathbf{m} = \mathbf{0}$  — couple stresses  $\boldsymbol{\mu}$  appear, and volume moment load  $\mathbf{m}$  is non-zero.

Meaning of components of the couple stress tensor  $\boldsymbol{\mu}$  is revealed similarly as for  $\boldsymbol{\tau}$ . For an orthonormal basis, moment  $\mathbf{M}_i = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\mu} = \mu_{ik} \mathbf{e}_k$  acts on an area with normal  $\mathbf{e}_i$ . Diagonal components  $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$  are twisting moments, nondiagonal are bending ones (?? figure??).

...

eccentricity vector  $\boldsymbol{\alpha}$  and inertia tensor  ${}^2\mathfrak{J}$

For an isotropic medium  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ ,  ${}^2\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\mathbf{E}$ .

...

## § 2. Relations of elasticity

В этой книге упругой называется среда с потенциальными внутренними силами:  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$ , где  $\Pi$  — энергия деформации на единицу объёма (continuing to model the geometrically linear material,  $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ ).

Имея соотношения (...)

...

$$\begin{aligned} \delta \Pi = -\delta W^{(i)} &= \boldsymbol{\tau} \bullet \delta \boldsymbol{\gamma}^{\top} + \boldsymbol{\mu} \bullet \delta \boldsymbol{\kappa}^{\top} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\kappa}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

\* Кавычки здесь оттого, что *уравнения равновесия* это вообще всё, что вытекает из принципа виртуальной работы в статике.

Последние равенства — соотношения упругости (определяющие уравнения, constitutive equations).

Разлагая тензоры деформации и напряжения на симметричные и антисимметричные части

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma^S - \frac{1}{2} \gamma_{\times} \times E, \quad \kappa = \kappa^S - \frac{1}{2} \kappa_{\times} \times E, \\ \delta\gamma^T &= \delta\gamma^S + \frac{1}{2} \delta\gamma_{\times} \times E, \quad \delta\kappa^T = \delta\kappa^S + \frac{1}{2} \delta\kappa_{\times} \times E, \\ \tau &= \tau^S - \frac{1}{2} \tau_{\times} \times E, \quad \mu = \mu^S - \frac{1}{2} \mu_{\times} \times E,\end{aligned}$$

преобразуем выражение  $\delta\Pi = \tau \bullet \delta\gamma^T + \mu \bullet \delta\kappa^T$  как

$$\delta\Pi = \dots \quad (2.2)$$

...

$$\begin{aligned}\gamma_{\times} &= \nabla \times u - 2\varphi, \\ \kappa_{\times} &= \nabla \times \varphi, \\ \varepsilon \equiv \gamma^S &= \nabla u^S,\end{aligned}$$

...

The classical isotropic linear elastic material behavior is described by two material parameters, for example, the Young's modulus and the Poisson's ratio, while the isotropic Cosserat continuum needs six material parameters

even when assumed to be linear, homogeneous and isotropic, it requires six independent material constants, in contrast to only two such constants for the classical continuum

...

Соотношения (2.1) обращаются преобразованием Лежандра

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \tau}, \quad \kappa = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mu}, \\ \hat{\Pi}(\tau, \mu) &= \tau \bullet \gamma^T + \mu \bullet \kappa^T - \Pi(\gamma, \kappa).\end{aligned} \quad (2.3)$$

...

material's intrinsic (internal) length scale  $\ell$

Если устремить  $\ell$  к нулю, то исчезает вклад  $\kappa$  в  $\Pi$ , а с ним и моментные напряжения  $\mu$ . Когда вдобавок нет объёмной моментной нагрузки  $m$ , тогда тензор  $\tau$  становится симметричным:  $\nabla \bullet \mu + \tau_{\times} + m = 0, \mu = {}^2 0, m = 0 \Rightarrow \tau_{\times} = 0$ , и модель превращается в классическую безмоментную.



Yet using of the micropolar model is natural in a case when the real material has a certain smallest volume “which is impossible to enter into”. And such a situation occurs quite often: composites with “representative” volume, polycrystalline materials, polymers with large molecules (macromolecules).

### § 3. Compatibility equations

Having identity  $\nabla \times \nabla \mathbf{a} = {}^2\mathbf{0} \ \forall \mathbf{a}$  and definitions of deformation tensors (1.1),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} &\equiv \nabla \boldsymbol{\varphi} \Rightarrow \nabla \times \boldsymbol{\kappa} = {}^2\mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} &= \nabla \mathbf{u} \Rightarrow \nabla \times (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}) = {}^2\mathbf{0} \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

### § 4. Theorems of statics

Теоремы статики линейных консервативных систем, легко выводимые для конечного числа степеней свободы (минимальность энергии, теорема Клапейрона, reciprocal work theorem et al. — § 2.6), справедливы и для континуальных линейных упругих сред (гл. 4), including the micropolar model of continuum (a medium with force couples, moments).

...

### § 5. Cosserat pseudocontinuum

Besides the model with free rotation (“the truly micropolar continuum”), there is the simplified model of a medium with force couples, in which rotations are expressed via displacements as in the classical momentless continuum:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma}_\times = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S \quad (5.1)$$

— the model with constrained rotation\*.

\* Cosserat brothers called it cas de trièdre caché (case of latent trihedron).

Равенство  $\gamma_x = 0$  (симметрию  $\gamma$ ) возможно понимать как внутреннюю связь (§ 3.13). Аргумент  $\gamma_x$  исчезает из энергии  $\Pi$ , соотношение упругости для  $\tau_x$  не может быть написано. Его место в полной системе занимает уравнение связи.

В классической (линейной безмоментной) теории упругости полная система сводится к одному уравнению для вектора  $u$  (§ 4.5). В моментной теории

...

## § 6. Plane deformation

Все переменные в этой постановке не зависят от декартовой координаты  $z \equiv x_3$  (орт оси —  $k$ ). Перемещения и силы перпендикулярны оси  $z$ , а повороты и моменты — параллельны ей:

...

Это краткое изложение плоской задачи относится к модели с независимыми поворотами. Псевдоконтинуум Коссера (модель со стеснённым вращением) получается либо при наложении внутренней связи  $\gamma_x = 0$ , либо при предельном переходе ...

Подробнее о плоской моментной задаче написано в книгах Н. Ф. Морозова [31, 32].

## § 7. Nonlinear theory

Кажущееся на первый взгляд чрезвычайно трудным, построение теории конечных деформаций континуума Коссера становится прозрачным, если опираться на общую механику, тензорное исчисление и нелинейную теорию безмоментной среды.

При построении модели упругого континуума обычно проходят четыре этапа:

- ✓ определение степеней свободы частиц,
- ✓ выявление нагрузок (“силовых факторов”, напряжений) и условий их баланса,

- ✓ подбор соответствующих мер деформации
- и, наконец,
- ✓ вывод соотношений упругости между напряжением и деформацией.

Этот традиционный путь очень сокращается, если опираться на принцип виртуальной работы.

Как и в гл. 3, среда состоит из частиц с материальными координатами  $q^i$  и вектором-радиусом  $\mathbf{r}(q^i, t)$ . В начальной (исходной, отсчётной) конфигурации  $\mathbf{r}(q^i, 0) \equiv \mathring{\mathbf{r}}(q^i)$ . Но кроме трансляции, частицы имеют независимые степени свободы поворота, описываемого ортогональным тензором

$$\mathbf{O}(q^i, t) \equiv \mathbf{a}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathbf{a}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{O}^{-\top},$$

где тройка векторов  $\mathbf{a}_j(q^i, t)$  жёстко связана с каждой частицей, показывая угловую ориентацию относительно как-либо выбираемых\* векторов  $\mathring{\mathbf{a}}_j(q^i) \equiv \mathbf{a}_j(q^i, 0)$ ,  $\mathbf{a}_j = \mathbf{O} \cdot \mathring{\mathbf{a}}_j$ ;  $\mathbf{a}^j$  — тройка взаимных векторов:  $\mathbf{a}_j \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^j \mathbf{a}_j = \mathbf{E}$  ( $t=0$ ,  $\mathring{\mathbf{a}}^j$ :  $\mathring{\mathbf{a}}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathring{\mathbf{a}}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{E}$ ). Движение среды полностью определяется функциями  $\mathbf{r}(q^i, t)$  and  $\mathbf{O}(q^i, t)$ .

Имея представления  $\mathring{\mathbf{r}}(q^i)$  и  $\mathbf{r}(q^i, t)$ , вводим базис  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$ , взаимный базис  $\mathbf{r}^i$ :  $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}^i = \delta_j^i$ , differential operators  $\mathring{\nabla}$  and  $\nabla$ , а также motion gradient  $\mathbf{F}$

$$\mathring{\nabla} \equiv \mathring{\mathbf{r}}^i \partial_i, \quad \nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathring{\nabla}, \quad \mathbf{F} \equiv \mathring{\nabla} \mathbf{r}^\top = \mathbf{r}_i \mathring{\mathbf{r}}^i. \quad (7.1)$$

Вариационное уравнение принципа виртуальной работы для континуума с нагрузками в объёме и на поверхности:

$$\int_{\mathcal{V}} \left( \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) + \delta W^{(i)} \right) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}} \left( \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) d\mathcal{O} = 0. \quad (7.2)$$

Here  $\rho$  is mass density;  $\mathbf{f}$  and  $\mathbf{m}$  are external force and moment per mass unit;  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{M}$  — они же per surface unit;  $\delta W^{(i)}$  — работа

\* Один из вариантов:  $\mathring{\mathbf{a}}_j = \mathring{\mathbf{r}}_j \equiv \partial_j \mathbf{r}$ . Другое предложение:  $\mathring{\mathbf{a}}_j$  это ортонормальная тройка собственных векторов тензора инерции частицы. Вообще,  $\mathring{\mathbf{a}}_j$  могут быть любой тройкой линейно-независимых векторов.

внутренних сил per volume unit в текущей конфигурации. Вектор мального поворота  $\delta\varphi$

$$\begin{aligned} O \cdot O^T &= E \Rightarrow \delta O \cdot O^T = -O \cdot \delta O^T \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta O \cdot O^T = \delta\varphi \times E = \delta\varphi \times O \cdot O^T \Rightarrow \delta O = \delta\varphi \times O, \\ \delta\varphi &= -\frac{1}{2}(\delta O \cdot O^T)_{\times} \end{aligned}$$

При движении среды как жёсткого целого нет деформаций, и работа  $\delta W^{(i)}$  внутренних сил равна нулю:

$$\begin{aligned} \delta r &= \text{constant} + \delta\varphi \times r, \quad \delta\varphi = \text{constant} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0, \\ \nabla \delta\varphi &= {}^20, \quad \nabla \delta r = \nabla \delta\varphi \times r - \nabla r \times \delta\varphi = -E \times \delta\varphi = -\delta\varphi \times E, \\ \nabla \delta r + \delta\varphi \times E &= {}^20. \end{aligned}$$

К нагрузкам. Несимметричные тензоры напряжения, силового  $\tau$  и моментного  $\mu$ , введём как множители Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \int_V \left( \rho(f \cdot \delta r + m \cdot \delta\varphi) - \tau \cdot (\nabla \delta r + \delta\varphi \times E)^T - \mu \cdot \nabla \delta\varphi^T \right) dV + \\ + \int_O \left( p \cdot \delta r + M \cdot \delta\varphi \right) dO = 0. \quad (7.3) \end{aligned}$$

После тех же преобразований, что и в § 1, получаем

...

Отсюда вытекают уравнения баланса сил и моментов в объёме и краевые условия в виде формул типа Cauchy. Они по существу те же, что и в линейной теории.

Найдём теперь тензоры деформации. Их можно вводить по-разному, если требовать лишь одного — нечувствительности к движению среды как жёсткого целого. Читатель найдёт не один вариант таких тензоров. Однако, вид тензоров деформации “подсказывает” принцип виртуальной работы.

...

## § 8. Nonlinear model with constrained rotation

Вспомним переход к модели со стеснённым вращением в линейной теории (§ 5). Разделились соотношения упругости для симметрич-

ной части тензора силового напряжения  $\boldsymbol{\tau}^S$  и кососимметричной его части  $\boldsymbol{\tau}_\chi$ . Возникла внутренняя связь  $\boldsymbol{\gamma}_\chi = \mathbf{0}$

...

## Bibliography

Все работы по моментной теории упругости упоминают книгу братьев Eugène et François Cosserat [19], где трёхмерной среде посвящена одна глава из шести. Переведённая монография W. Nowacki [36] была одной из первых книг на русском языке с изложением линейной моментной теории. Ранее эта область представлялась статьями — например, R. D. Mindlin’a и H. F. Tiersten’a [30]. Краткое изложение моментной теории, но с подробным рассмотрением задач содержится в книгах Н. Ф. Морозова [31, 32].

## chapter 6

# THERMOELASTICITY

### §1. First law of thermodynamics

**H**itherto modeling was limited to mechanics only. It is widely known, however, that a change in temperature causes deformation. Temperature deformation and stress often play the primary role and can lead to a breakage.

So effective in mechanics, the principle of virtual work is not applicable to thermomechanics\*. Considering thermal effects, it's possible to lean on the two laws of thermodynamics.

The first, discovered by Joule, Mayer, and Helmholtz, is adapted version of the balance of energy: rate of internal energy change  $\dot{E}$  is equal to the sum of power of external forces  $P^{(e)}$  and rate of heat supply  $\dot{Q}$

$$\dot{E} = P^{(e)} + \dot{Q}. \quad (1.1)$$

Internal energy  $E$  is the sum of the kinetic and potential energies of particles. For any finite volume of material continuum

$$E = \int_{\mathcal{V}} \rho \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + e \right) d\mathcal{V}. \quad (1.2)$$

With the balance of mass  $dm = \rho d\mathcal{V} = \rho' d\mathcal{V}'$ ,  $m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' d\mathcal{V}'$  and

$$\Psi = \int_{\mathcal{V}} \rho \psi d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \psi d\mathcal{V}' \Rightarrow \dot{\Psi} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\psi} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \dot{\psi} d\mathcal{V}',$$

it's easy to get the time derivative of internal energy

$$\dot{E} = \int_{\mathcal{V}} \rho \left( \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \dot{e} \right) d\mathcal{V}. \quad (1.3)$$

\* Analogue of the principle of virtual work will be presented below in §8.

The power of external forces for some finite volume of continuum (momentless — in this chapter only the momentless model is considered)

$$P^{(e)} = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{r}} dV + \oint_{O(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}} dO = \int_V \left( \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \right) dV = \int_V \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^S \right) dV. \quad (1.4)$$

As before (chapter 3),  $\boldsymbol{\tau}$  is Cauchy stress tensor,  $\mathbf{f}$  is mass force (without inertial part  $-\ddot{\mathbf{r}}$ , which is included in  $\dot{\mathbf{E}}$ ),  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$  is surface force. The symmetry of  $\boldsymbol{\tau}$  is used for expanding  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}})$ :

$$\boldsymbol{\tau}^T = \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^S \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^T = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^S, \\ \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^T = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^S.$$

Denominating the rate of deformation tensor as  $\mathcal{D} \equiv \nabla \dot{\mathbf{r}}^S$

$$P^{(e)} = \int_V \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathcal{D} \right) dV. \quad (1.4')$$

Heat arrives in a volume of continuum by two ways. The first is a surface heat transfer (heat conduction, thermal conductivity, convection, diffusion), occurring via matter, upon a contact of two media. This can be described by heat flux vector  $\mathbf{q}$ . Through an infinitesimal area in the current configuration towards normal vector  $\mathbf{n}$  per unit of time passes heat flux  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dO$ . For a surface with finite dimensions this expression needs to be integrated. It's usually assumed

$$\mathbf{q} = -^2\mathbf{k} \cdot \nabla \Theta, \quad (1.5)$$

where  $\Theta$  is temperature (temperature field);  $^2\mathbf{k}$  is thermal conductivity tensor as property of the material, for isotropic material  $^2\mathbf{k} = k\mathbf{E}$  and  $\mathbf{q} = -k \nabla \Theta$ .

The second way is a volume heat transfer (thermal radiation). Solar energy, flame of a campfire, a microwave oven are familiar examples of pervasive heating by radiation. Thermal radiation occurs via electromagnetic waves and doesn't need an interjacent medium. Heat is radiated (emitted) by any matter (with temperature above the absolute zero 0 K). The rate of heat transfer by radiation per mass unit  $b$  or per volume unit  $B = \rho b$  is assumed as known.

Therefore, the rate of heat supply for a finite volume is

$$\dot{Q} = - \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dO + \int_{\mathcal{V}} \rho b d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b) d\mathcal{V}. \quad (1.6)$$

Applying (1.3), (1.4') and (1.6) to formulation (1.1) gives the equality of integrals over a volume

$$\int_{\mathcal{V}} \rho (\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{e}}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} ((\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b) d\mathcal{V}.$$

And since volume  $\mathcal{V}$  is random, integrands are equal too

$$\rho \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \rho \dot{\mathbf{e}} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b.$$

With the balance of momentum

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \quad (7.2, \S 3.7)$$

this simplifies to

$$\rho \dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b \quad (1.7)$$

— the local (differential) version of the balance of energy.

...

## § 2. Second law

The following concept of laws of thermodynamics is widespread: change in internal energy  $dE$  is equal to the sum of work of external forces  $\partial W^{(e)}$  and supplied heat  $\partial Q$

$$dE = \partial W^{(e)} + \partial Q.$$

Work  $\partial W^{(e)}$  and heat  $\partial Q$  are inexact differentials\*, but quotient  $\partial Q/\theta$  becomes the exact differential — differential  $dS$  of the entropy.

Further, processes are divided into reversible ones, for which  $dS = \partial Q/\theta$ , and irreversible ones with characteristic Clausius inequality  $dS \geq \partial Q/\theta$ .

But how to adapt this for a continuum with an inhomogeneous temperature field?

\* Because work and heat depend on the path of the process (are path functions), they can't be full (exact) differentials, contrasting with the idea of the exact differential, expressed via the gradient of another function and therefore path independent.



Sometimes a process in an infinitesimal volume is thought of as reversible, then the equality like

$$\rho\theta\dot{s} = -\nabla\cdot\mathbf{q} + \rho b \quad (2.1)$$

is proposed ( $s$  is entropy per mass unit and  $\dot{s}$  is the time derivative of it, that is the rate of entropy change).

However, there's always heat dissipation — an irreversible process, and therefore (2.1) looks disputable.

The most appropriate expression of the second law of thermodynamics for material continuum seems to be the Clausius–Duhem inequality

$$\left( \int_{\mathcal{V}} \rho s d\mathcal{V} \right)^{\cdot} \geq - \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dO + \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho b}{\theta} d\mathcal{V}. \quad (2.2)$$

This inequality as the imbalance of entropy defines the rate of entropy production.

$$\begin{aligned} - \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \theta^{-1} dO &= - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\mathbf{q} \theta^{-1}) d\mathcal{V} \\ - \nabla \cdot (\mathbf{q} \theta^{-1}) &= - (\nabla \cdot \mathbf{q}) \theta^{-1} - \mathbf{q} \cdot \left( \nabla \frac{1}{\theta} \right) \\ - \nabla \frac{1}{\theta} &= \frac{1}{\theta^2} \nabla \theta \\ - \nabla \cdot (\mathbf{q} \theta^{-1}) &= - (\nabla \cdot \mathbf{q}) \theta^{-1} + (\mathbf{q} \cdot \nabla \theta) \theta^{-2} \\ \rho \dot{s} &\geq (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b) \theta^{-1} + (\mathbf{q} \cdot \nabla \theta) \theta^{-2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

The Clausius–Duhem inequality is also called the dissipation inequality. For a real matter, the dissipation is always greater than zero, it can never be negative and can't be zero whenever irreversible processes are present.

...

Helmholtz free energy per mass unit

$$\begin{aligned} a &\equiv e - \theta s, \\ \dot{a} &= \dot{e} - \theta \dot{s} - \dot{\theta} s \end{aligned} \quad (2.4)$$

### § 3. Constitutive equations

К балансу импульса, балансу момента импульса и законам термодинамики нужно добавить определяющие уравнения, выражающие свойства среды. Эти уравнения

...

Термоупругим называется материал, в котором свободная энергия  $a$  и энтропия  $s$  — функции деформации  $\mathbf{C}$  и температуры  $\theta$

$$a = a(\mathbf{C}, \theta)$$

$$\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial a}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

...

### § 4. Heat equation

In mathematical physics, a parabolic differential equation, similar to

$$k \Delta \theta + B = c \dot{\theta}, \quad (4.1)$$

is declared as a “heat equation”. Here  $k$  is thermal conductivity,  $B = \rho b$  is rate of heat transfer by radiation per volume unit,  $c$  is thermal capacity per volume unit. Boundary conditions most often are external temperature  $\theta_1^{(e)}$  on part  $O_1$  of the surface and heat flux  $q^{(e)}$  from the outside of part  $O_2$  of the surface:

$$\theta|_{O_1} = \theta_1^{(e)}, \quad k \partial_n \theta|_{O_2} = q^{(e)}.$$

Sometimes, flux  $q^{(e)}$  is thought to be proportional to the difference between temperature  $\theta^{(e)}$  of the ambient and body temperature  $\theta$

$$k \partial_n \theta + h (\theta - \theta^{(e)}) = 0.$$

If heat transfer coefficient  $h$  is infinitely large, it turns into the first condition  $\theta = \theta^{(e)}$ , and when  $h \rightarrow 0$  — into condition  $\partial_n \theta = 0$  of thermal insulation.

But how is equation (4.1) related to fundamental principles of balance? Since there’s no special “thermal energy”, but there is internal energy, changing according to the first law of thermodynamics

...

...

$$e = a + \theta s \Rightarrow \dot{e} = \dot{a} + \dot{\theta} s + \theta \dot{s}$$

$$\rho \dot{e} = \rho (\dot{a} + \dot{\theta} s + \theta \dot{s}) = \rho \left( \overbrace{\frac{\partial a}{\partial \mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{C}}}^{\dot{a}(\mathbf{C}, \theta)} + \underbrace{\frac{\partial a}{\partial \theta} \dot{\theta} + \dot{\theta} s + \theta \dot{s}}_{=0 \leftarrow s = -\frac{\partial a}{\partial \theta}} \right)$$

...

## § 5. Linear thermoelasticity

Квадратичная аппроксимация свободной энергии наиболее естественна в линейной теории

...

## § 6. Equations for displacements

Полагая поле температуры известным

...

## § 7. Thermal stress

Это напряжение сто́ит рассмотреть детально, хотя оно и определяется очевидным образом полями перемещений и температуры. При равновесии свободного тела без внешних нагрузок

...

## § 8. Variational formulations

Когда температура постоянна, уравнения термоупругости выглядят как в механике.

...

Для переноса вариационного метода на термоупругость достаточно заменить in the (Lagrange) principle of minimum potential energy  $\Pi(\mathbf{C})$  на Helmholtz free energy  $A(\mathbf{C}, \theta)$ , а в принципе Reissner'a–Hellinger'a заменить  $\hat{\Pi}(\boldsymbol{\tau})$  на Gibbs free enthalpy (Gibbs function)  $G(\boldsymbol{\tau}, \theta)$ .

The *Gibbs free energy* (*Gibbs energy* or *Gibbs function* or *free enthalpy* to distinguish it from Helmholtz free energy) is a thermodynamic potential that measures the maximum of reversible work by a thermodynamic system at a constant temperature and pressure.

...

...

Более сложные вариационные постановки для нестационарных задач можно найти, например, в книге [88].

## Bibliography

Шириной и глубиной описания термоупругости выделяются книги W. Nowacki [35, 36], книга E. Melan'a и H. Parkus'a [27] и монография H. Parkus'a [42]. С. Truesdell [57] внёс большой вклад в создание и распространение новых взглядов на термодинамику сплошной среды. Чёткое изложение основных законов есть у С. Teodosiu [53]. Методы расчёта температурных полей представлены у Н. М. Беяева и А. А. Рядно [88].

## chapter 7

# MAGNETOELASTICITY

Problems, solved using models of elastic continua, usually include already known external loads (how to find them is a distinct problem). When electric currents flow in an elastic body, the magnetic field produces a load. With deforming of a body, the magnetic field changes too. If the field's sensitivity to deformation is high, then solving of the integrated problem of elasticity and magnetism is needed.

### §1. Electromagnetic field

Here is the summary of the theory of electromagnetism. This theory describes two vector fields: electric  $\mathbb{E}(\mathbf{r}, t)$  and magnetic  $\mathbb{B}(\mathbf{r}, t)$ . What are vector  $\mathbb{E}$  and pseudovector  $\mathbb{B}$  is seen from the expression of electromagnetic force (Lorentz force)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t, q)$ , acting on a point charge — a particle of infinitesimal size that contains electric charge  $q$  and moves with velocity  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{F} = q(\mathbb{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B}). \quad (1.1)$$

In essence, the part of the electromagnetic force arising from interaction with a moving charge — magnetic force  $q\mathbf{v} \times \mathbb{B}$  — reveals magnetic field  $\mathbb{B}$ , while the other part — electric force  $q\mathbb{E}$  — reveals electric field  $\mathbb{E}$ .

Acute question: in which exactly frame of reference is velocity  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$  of a charged particle measured, leads to the special theory of relativity\*

the classical concept about the existence of absolute space and time as the preferred frame of reference

a vacuum is a space without matter, “free space”

\* **Albert Einstein.** Zur Elektrodynamik bewegter Körper. // Annalen der Physik, IV. Folge, Band 17, 1905. Seiten 891–921.

...

continuous charge distribution

charge density (electric charge per volume unit)  $\varrho(\mathbf{r}, t)$ 

$$dq = \varrho d\mathcal{V}, \quad q = \int_{\mathcal{V}} \varrho d\mathcal{V}$$

the density of electric current is the flux of electric charge  
 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \equiv \varrho \dot{\mathbf{r}} \equiv \varrho \mathbf{v}$

в вакууме нет  $\varrho$  и  $\mathbf{j}$ 

in a region with no charges ( $\varrho = 0$ ) and no currents ( $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ), such  
 as in a vacuum, ...

...

ponderomotive force is electromagnetic force (Lorentz force) per  
 volume unit

In a material continuum with charges and currents acts the volume  
 “ponderomotive” force

$$\mathbf{f} = \varrho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.2)$$

— it is the differential (local, microscopic, continual) version of (1.1).

...

Electromagnetic phenomena are usually described by Maxwell’s  
 equations. Differential versions of Maxwell’s equations are

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad \text{Gauss’s theorem for electricity} \quad (1.3^\alpha)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad \begin{array}{l} \text{Maxwell–Faraday equation} \\ \text{(Faraday’s law of induction)} \end{array} \quad (1.3^\beta)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Gauss’s theorem for magnetism} \quad (1.3^\gamma)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbf{E}} \quad \begin{array}{l} \text{Ampère’s circuital law with} \\ \text{Maxwell’s term } \dot{\mathbf{E}} \text{ for the balance} \\ \text{of electric charge} \end{array} \quad (1.3^\delta)$$

...

speed of light in vacuum  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ “electric constant”, vacuum permittivity  $\varepsilon_0$  $\varepsilon_0 \approx 8.8541878 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  (farads per metre)

“magnetic constant”, vacuum permeability  $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

...

With  $\mu_0$  equation (1.3<sup>δ</sup>) is sometimes written as

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \quad \text{or} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}}.$$

...

The balance of electric charge — the continuity equation for electric charge — mathematically follows from Maxwell's equations

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (1.3^\delta) &\Rightarrow c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} \\ (1.3^\alpha)^\bullet &\Rightarrow \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\varrho}}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= 0 \quad \forall \mathbf{a}, \quad \mathbf{j} \equiv \varrho \dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\varrho \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\varrho} = 0. \quad (1.4)$$

Besides the ponderomotive force vector (1.2), with which the electromagnetic field acts on the continuum, another expression of interaction exists — the bivalent “Maxwell” stress tensor

$${}^2\mathbf{M} \equiv \varepsilon_0 \left( \mathbf{E}\mathbf{E} + c^2 \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E} \right). \quad (1.5)$$

It derives from (1.2) and Maxwell's equations

$$\begin{aligned} (1.3^\alpha) &\Rightarrow \varrho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \\ (1.3^\delta) &\Rightarrow \mathbf{j} = \varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \\ (1.2) &\Rightarrow \mathbf{f} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} + (\varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}) \times \mathbf{B} = \\ &= \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} + \varepsilon_0 c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} \\ (1.3^\beta) &\Rightarrow \dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E} \end{aligned} \left\} \Rightarrow \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^\bullet + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

Then

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} - \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \varepsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^\bullet$$

For the symmetry with  $\nabla \cdot \mathbf{E}\mathbf{E}$ , the null vector

$$(1.3^\gamma) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B}\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad c^2 \nabla \cdot \mathbf{B}\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

is added to  $\mathbf{f}$ .

...

$$\begin{aligned} (14.9, \S 1.14) &\Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{a}\mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a} \\ (14.11, \S 1.14) &\Rightarrow \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2 \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \mathbf{E}) &= \nabla \cdot \mathbf{E} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2 \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot {}^2M &= \varepsilon_0 \left( \nabla \cdot (\mathbb{E}\mathbb{E}) + c^2 \nabla \cdot (\mathbb{B}\mathbb{B}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} \mathbf{E} + c^2 \mathbb{B} \cdot \mathbb{B} \mathbf{E}) \right) = \\
&= \varepsilon_0 \left( \nabla \cdot \mathbb{E}\mathbb{E} + \mathbb{E} \cdot \nabla \mathbb{E} + c^2 \nabla \cdot \mathbb{B}\mathbb{B} + c^2 \mathbb{B} \cdot \nabla \mathbb{B} - \right. \\
&\quad \left. - \nabla \mathbb{E} \cdot \mathbb{E} - c^2 \nabla \mathbb{B} \cdot \mathbb{B} \right) \\
&\dots
\end{aligned}$$

## § 2. Electromagnetic waves

To derive wave equations

$$\begin{aligned}
\nabla \times (1.3^\beta) &\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) = -\nabla \times \dot{\mathbb{B}} \\
\nabla \times (1.3^\delta) &\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) = \nabla \times \left( \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\dot{\mathbb{E}}}{c^2} \right) \\
\nabla \times \dot{\mathbb{E}} &= (\nabla \times \mathbb{E})^\bullet, (1.3^\beta) \Rightarrow \nabla \times \dot{\mathbb{E}} = -\ddot{\mathbb{B}} \\
\nabla \times \dot{\mathbb{B}} &= (\nabla \times \mathbb{B})^\bullet, (1.3^\delta) \Rightarrow \nabla \times \dot{\mathbb{B}} = \frac{\dot{\mathbf{j}}^\bullet}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\ddot{\mathbb{E}}}{c^2}
\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) = \nabla \nabla \cdot \mathbb{E} - \Delta \mathbb{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) = \nabla \nabla \cdot \mathbb{B} - \Delta \mathbb{B}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbb{E} - \underbrace{\nabla \nabla \cdot \mathbb{E}}_{\varrho/\varepsilon_0 (1.3^\alpha)} &= \frac{\ddot{\mathbb{E}}}{c^2} + \frac{\dot{\mathbf{j}}^\bullet}{\varepsilon_0 c^2} \\
\Delta \mathbb{B} - \underbrace{\nabla \nabla \cdot \mathbb{B}}_{0 (1.3^\gamma)} &= \frac{\ddot{\mathbb{B}}}{c^2} - \frac{\nabla \times \dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0 c^2}
\end{aligned}$$

...

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad \forall \mathbf{a}$$

$$\nabla \times \nabla = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \nabla \alpha = \mathbf{0} \quad \forall \alpha$$

vector potential  $\mathbb{A}$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \quad (1.3^\gamma) \Leftrightarrow \mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$$

potential  $\mathbb{A}$  is not unique and has gauge freedom  $\mathbb{A} + \nabla a$

$$\mathbb{B} = \nabla \times (\mathbb{A} + \nabla a) \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \quad (1.3^\gamma)$$



scalar potential  $\phi$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \quad (1.3^\beta) \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla \times (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow -\nabla \phi = \mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla(\phi + \dot{a}) - \dot{\mathbf{A}}. \quad (2.1)\end{aligned}$$

And

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.3^\alpha) \Rightarrow \begin{aligned} -\Delta(\phi + \dot{a}) - \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\Delta \phi - \nabla \cdot (\dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a}) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (2.2)\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

$\nabla \nabla \cdot \nabla a - \nabla \cdot \nabla \nabla a = \mathbf{0}$  (partial derivatives of a smooth function commute)

$$\begin{aligned}c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbf{E}} \quad (1.3^\delta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} - \nabla(\dot{\phi} + \ddot{a}) - \ddot{\mathbf{A}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c^2(\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} - \nabla \dot{\phi} - \nabla \ddot{a} - \ddot{\mathbf{A}}. \quad (2.3)\end{aligned}$$

With a gauge freedom it's possible to simplify wave equations (2.3) and (2.2), assuming that

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \ddot{a} &= \nabla \dot{\phi} + c^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} \Rightarrow \ddot{a} = -\dot{\phi} - c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} \\ -\nabla \cdot (\dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a}) &= \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = -c^2 \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} + c^2 \Delta a - c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = \ddot{a},$$

finally presenting as homogeneous wave equation for  $a$

$$\ddot{a} = c^2 \Delta a. \quad (2.4)$$

A more popular option is even more tight condition

$$\Delta a = 0 \Rightarrow \ddot{a} = 0, \quad \dot{\phi} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

— Lorenz gauge condition, which gives the same effect, being just a particular — harmonic — case of (2.4).

Following from (2.2) and (2.3) with condition (2.4), equations of electromagnetic waves in the potential formulation are

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi + \frac{1}{c^2}\ddot{\Phi} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \\ -c^2\Delta\mathbb{A} &= \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} - \ddot{\mathbb{A}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

...

### § 3. Electrostatics

Рассмотрение этого вопроса полезно и для последующего описания магнетизма. В статике

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbb{B} = \mathbf{0}$$

...

The volume “ponderomotive” force, с которой электростатическое поле действует на среду ...

...

Maxwell stress tensor (1.5) in electrostatics is

$${}^2\mathbf{M} = \varepsilon_0 \left( \mathbb{E}\mathbb{E} - \frac{1}{2} \mathbb{E} \cdot \mathbb{E} \mathbf{E} \right)$$

...

### § 4. Dielectrics

Начнём с рассмотрения электростатического поля

...

В диэлектриках нет свободных зарядов: charge density  $\varrho = 0$ . Здесь вводится плотность дипольного момента

...

### § 5. Magnetostatics

Если поле (а с ним ...)

...

## § 6. Magnetism

Выяснив законы магнитостатики в общем случае, обратимся к веществу — некий опыт у нас уже есть в электростатике диэлектриков.

Начнём с рассмотрения

...

...

Насколько соответствует поведение реальных материалов представленным здесь формальным построениям — сей вопрос is out of scope этой книги.

## § 7. Magnetic rigidity

В электротехнике распространены обмотки всевозможной формы, в которых провод намотан так, что образуется некое массивное тело. Такие обмотки есть в статоре генератора автомобиля (да и в роторе), в больших промышленных электромагнитах и в магнитных системах установок “токама́к” (**тороидальная камера с магнитными катушками**) для управляемого термоядерного синтеза — примеров много. Сочетание токопровода и изоляции образует периодический композит, и одной из главных нагрузок для него является пондеромоторная магнитная сила. Рассчитывая деформации и механические напряжения в обмотке, начинают с определения магнитных сил. Поскольку распределение токов задано известной геометрией проводов, достаточно интегрирования по формуле Био-Савара (??). Термин “магнитоупругость” при этом неуместен, так как задачи магнитостатики и упругости решаются отдельно.

Однако при деформации обмотки меняются и поле  $\mathbf{j}$ , и вызываемое им поле  $\mathbf{B}$ . Объёмная сила становится равной

$$\mathbf{f} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_0 + \dots \quad (7.1)$$

**Подчёркнутое слагаемое** соответствует недеформированному состоянию. Обусловленное деформацией изменение объёмной силы линейно связано с малым перемещением  $\mathbf{u}$ , поэтому матричное (по-

сле дискретизации) уравнение в перемещениях можно представить в виде

$$(C + C_m)u = \overset{\circ}{F}. \quad (7.2)$$

К “обычному” оператору линейной упругости  $C$  добавилась магнитная жёсткость  $C_m$ ;  $\overset{\circ}{F}$  — силы в недеформированном состоянии.

Добавка  $C_m$  пропорциональна квадрату тока и может стать весьма существенной в магнитных системах с сильным полем. Учёт её необходим и при недостаточной величине  $C$ ; в номинальном режиме конструкция может держать нагрузку, но дополнительная нагрузка неблагоприятного направления может оказаться “невыносимой”.

Но особенно важна роль магнитной жёсткости в задачах устойчивости. Поскольку магнитные силы потенциальны, матрица  $C_m$  симметрична, и критические параметры могут быть найдены статическим методом Euler’a.

Как иллюстрацию рассмотрим простую задачу о балке в продольном магнитном поле. Балка располагается на декартовой оси  $z$ , концы  $z=0$  и  $z=l$  закреплены, магнитная индукция  $\mathbb{B} = B\mathbf{k} = \text{constant}$ , по балке течёт постоянный (по величине) ток  $I$ . В классической модели балки при равных жёсткостях на изгиб для прогиба  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$  легко получить следующую постановку:

...

Вводя комплексную комбинацию  $u \equiv u_1 + iu_2$ , будем иметь

...

с общим решением

...

Подстановка в граничные условия приводит к однородной системе для постоянных  $A_k$ ; приравняв нулю определитель, придём к характеристическому уравнению

...

Наименьший положительный корень  $x = 3.666$ , так что критическая комбинация параметров такова:

$$(IBl^3/a)_* = 394.2.$$

В этом решении поле  $\mathbb{B}$  считалось внешним и не варьировалось. Но если собственное поле тока в стержне сравнимо с  $\mathbb{B}$ , решение изменится и усложнится.

## Bibliography

Основы электродинамики хорошо изложены во многих книгах [89, 84], но для приложений в механике выделяется курс И. Е. Тамма [95]. Растёт список литературы по связанным задачам электромагнетизма и упругости [44, 46]. Как введение в эту область может быть полезна книга В. Новацкого [37].

*chapter 8*

## PERTURBATION METHODS (ASYMPTOTIC METHODS)

Of approximate approaches for analysis of nonlinear systems, perturbation methods are the most often applied.

### § 1. Asymptotic decompositions

До сих пор аргументами рассматриваемых функций были только координаты и время. Размеры тела, упругие модули, характерные масштабы изменения ...

...

In previous chapters, asymptotic problems have already arisen. Линейная теория получается из нелинейной с помощью разложений по масштабу нагрузки (§ 4.1). Безмоментная теория вытекает (с точностью до краевых эффектов) из моментной (гл. 5) при устремлении “моментных” жёсткостей к бесконечности. В термоупругости (гл. 6) использование уравнения теплопроводности (4.1, § 6.4) вместо полного баланса энергии должно быть обосновано асимптотическими методами.

Уязвимым в какой-то степени местом

...

### § 2. Splitting in a linear algebraic system

Этот простой случай очень познавателен, он хорошо проясняет/иллюстрирует асимптотические явления. Рассматривается линейная система

$$C_{ij}u_j = f_i, \quad C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)} \quad (2.1)$$

с матрицей  $C_{ij}$  и столбцами неизвестных  $u_j$  и нагрузок  $f_i$ . Процесс построения асимптотического решения определяется тем, вырождена матрица  $C_{ij}^{(0)}$  или нет. Возможны три случая.

1°  $\det C_{ij}^{(0)} \neq 0$ . Однородная задача

$$C_{ij}^{(0)} u_j = 0 \quad (2.2)$$

имеет лишь тривиальное (нулевое) решение. Матрица  $C_{ij}^{(0)}$  обратима, неоднородная задача всегда однозначно решима. Решение строится так:

$$u_j = \dots \quad (2.3)$$

...

2°  $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

3°  $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

### § 3. Poincaré method

Этот метод широко известен в теории нелинейных колебаний. Он предназначен, в частности, для определения периодических решений уравнения

$$\ddot{u} + u = \chi f(u, \dot{u}) \quad (3.1)$$

...

### § 4. Van der Pol averaging method

Опять рассматривается уравнение (3.1), но теперь ищутся не только периодические решения. Вводится фазовая плоскость

...

Процедура осреднения применяется в разных разделах теории упругости (тонкие тела, композиты и др.). Осреднение вне асимптотических методов приводит обычно к незамкнутым системам уравнений; для замыкания приходится принимать некие гипотезы,

что умаляет убедительность теории. Иная ситуация в асимптотике: условия разрешимости для поправочных членов с необходимостью приводят к соответствующим интегральным соотношениям.

## § 5. Coalescence of asymptotic decompositions

Основоположник метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений — Ludwig Prandtl. Рассматривая течение вязкой жидкости, он заметил, что влияние малой вязкости локализовано у границы — в тонком приграничном слое. Вдали от границы жидкость ведёт себя как идеальная. Одни и те же уравнения

...

## § 6. Multiple-scale analysis (method of multiple scales)

Этот метод привлекателен, естественен и — как написано у Ali Hasan Nayfeh

...

## § 7. Equations with slowly varying parameters

Рассмотрим гармонический осциллятор, собственная частота которого медленно меняется во времени

...

## § 8. Thin bodies

Задачи теории упругости часто ставятся для тонких тел — стержней, пластин и оболочек. Таковы многие элементы конструкций, но и в природе вне человека тонкие тела встречаются довольно часто.



Решение задач упругости для тонких тел многие десятилетия основывалось на неких гипотезах о распределении решения по толщине и о порядках одних неизвестных относительно других. Построенные так теории сыграли большую роль в практике инженерных расчётов. Однако, им не хватало логической стройности и убедительности, их хотелось обосновать, уточнить — а в последнее время и уничтожить (в связи с появлением великолепных компьютеров). Но открытие асимптотического расщепления прояснило картину: в тонком теле трёхмерная задача расщепляется на задачи меньшей размерности. Классические теории тонких тел получили и подтверждение, и развитие.

Рассмотрим задачу о кручении из ...

...

## Bibliography

Ali Hasan Nayfeh's book [107] is an excellent introduction to perturbation methods (asymptotic methods).

Всё разнообразие асимптотических методов представлено в монографиях ...

## chapter 9

### RODS

#### §1. Initial concepts

Rod is a thin long body. It is thought of (and modeled) as a spatial curve — the axis of rod, coated with a material ( [a figure](#) ).

The axis of rod is described by parameterizing the location vector of curve's points as a morphism (function) of one variable coordinate  $s$ ,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s). \quad (1.1)$$

Material coating gives at each rod's point a plane figure, perpendicular to the axis — normal section  $\Omega(s)$ .

...

Добавив **единичный??** вектор касательной к оси

$$\mathbf{r}' \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \equiv \mathbf{r}_{\partial s} \equiv \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{k},$$

получим (для каждого  $s$ ) тройку взаимно перпендикулярных единичных векторов, характеризующих угловую ориентацию.

Curvature and torsion of the rod's axis определяются вектором  $\boldsymbol{\psi}$

$$\mathbf{e}'_j = \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{e}_j, \quad \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}'_j. \quad (1.2)$$

...

Moreover, at each point of the rod's axis as a curve line there's another triple of mutually perpendicular unit vectors — with normal and binormal.

Tangent  $\mathbf{T}$ , normal  $\mathbf{N}$  and binormal  $\mathbf{B}$ , together called the *Frenet–Serret frame*, are defined as follows:

- ✓  $\mathbf{T}$  is the unit vector tangent to the curve, pointing where the curve continues further.
- ✓  $\mathbf{N}$  is the normal unit vector, the derivative of  $\mathbf{T}$  by the curve's arc length parameter, divided by its length  $\kappa = \|\mathbf{N}\|$ .
- ✓  $\mathbf{B}$  is the binormal unit vector, the cross product of  $\mathbf{T}$  and  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ .

The Frenet–Serret formulas, describing derivatives of tangent, normal and binormal unit vectors in terms of each other, are

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \kappa \mathbf{N}, \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} &= -\tau \mathbf{N},\end{aligned}$$

where  $d/ds$  denotes the derivative by arc length,  $\kappa$  is the curvature and  $\tau$  is the curve's torsion. The associated collection —  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\kappa$ ,  $\tau$  — is called the *Frenet–Serret apparatus*.

Two scalars  $\kappa$  and  $\tau$  effectively define the curvature and torsion of a space curve. Intuitively, curvature measures the deviation of a curve from a straight line, while torsion measures the deviation of a curve from being planar.

$$\begin{aligned}\kappa &= \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| \\ \kappa &\geq 0\end{aligned}$$

(nonzero curvature  $\kappa \neq 0$  that is  $\kappa > 0$ )

the Frenet–Serret frame is not defined if  $\kappa = 0$

zero curvature implies the curve is a straight line, which lies in a plane, making the torsion zero too

If the curvature is not zero, it is considered as a curve line.

...

$\mathbf{T}$  always has unit magnitude, and since there's no change in length of  $\mathbf{T}$ , then  $\mathbf{N}$  — the derivative of  $\mathbf{T}$  — is always perpendicular to  $\mathbf{T}$  ( $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \Rightarrow \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T} = 0 \Rightarrow \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ ).

Vectors of the Frenet–Serret frame make an orthonormal basis  $\mathbf{f}_i$ :  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{f}_3 = \mathbf{B}$ .

The tensor version of Frenet–Serret formulas

$$\mathbf{f}_i' = {}^2\mathbf{d} \cdot \mathbf{f}_i. \quad (1.3)$$

Frenet–Serret formulas using matrix notation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Tensor  ${}^2\mathbf{d}$  is skew-symmetric, therefore it can be represented by the companion (pseudo)vector (§1.7). This pseudovector is known as the Darboux vector.

$$\mathbf{D} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$$

$$\mathbf{D} = \tau \mathbf{T} + 0 \mathbf{N} + \kappa \mathbf{B}$$

With the Darboux vector, Frenet–Serret formulas turn into

$$\mathbf{T}' = \mathbf{D} \times \mathbf{T},$$

$$\mathbf{N}' = \mathbf{D} \times \mathbf{N},$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

or as the vector version of (1.3)

$$\mathbf{f}_i' = \mathbf{D} \times \mathbf{f}_i. \quad (1.4)$$

The Darboux vector is the angular velocity vector of the Frenet–Serret frame of a curve. It is also called as angular momentum vector, because it is directly proportional to angular momentum (really??).

...

In approximate (“applied”) theories of rods like “strength of materials” figure internal force  $\mathbf{Q}$  and moment  $\mathbf{M}$ . They are connected with the stress tensor via relations

$$\mathbf{Q}(s) = \int_{\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{k}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{M}(s) = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{k}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega. \quad (1.6)$$

$$\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x} = x_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2$$

...

Такие рассуждения о геометрии и о механике (внутренних силе и моменте) относятся только лишь к какой-то одной конфигурации стержня. Продолжать эти соображения is meaningless потому, что плоские нормальные сечения после деформирования не остаются плоскими и нормальными. Добавление же в модель an assumption-hypothesis о том, что депланации нет and “plane sections remain plane”<sup>\*</sup> вносит существенные противоречия с реальностью. Enough to recall just one fact that without deplanation it’s impossible to acceptably describe the torsion of a rod (and not only torsion).

Very reasonable approach to modeling deformations of an elastic rod consists in the asymptotic splitting of the three-dimensional problem with a small thickness. But for a complex asymptotic procedure it would be much simpler to have whatever solution version beforehand. And the direct approach, when the one-dimensional model of a rod is a material line, gives such a version.

The primary question for building the one-dimensional model: what degrees of freedom — besides translation — do particles of a material line possess?

<sup>\*</sup> Two very popular beam models exist with the hypothesis postulating the absence of deplanations. In the Euler–Bernoulli beam theory, shear deformations are neglected, and plane sections remain plane and normal to the axis. In the Timoshenko beam theory, there’s a constant transverse shear along the section, and plane sections still remain plane but are no longer normal to the axis.

Известно, что стержни чувствительны к моментным нагрузкам. А присутствие моментов среди обобщённых сил говорит о наличии вращательных степеней свободы. Следовательно, одномерной моделью стержня должна быть линия Коссера — она состоит из бесконечномалых **твёрдых тел**. Впрочем, могут проявиться и дополнительные степени свободы — как в тонкостенных стержнях, которым посвящена отдельная глава.

В механике упругих тел стержни занимают особенное место. Во-первых, это моментные модели, и моменты здесь играют главную роль (не роль малых добавок, как в трёхмерном континууме Cosserat). Во-вторых, стержни являются как бы “тестовой площадкой” для моделей с дополнительными степенями свободы, поскольку наличие этих степеней можно исследовать на трёхмерной модели.

Ну а пока сосредоточимся на простой одномерной моментной модели типа Cosserat.

## § 2. Kinematics of Cosserat lines

Рассматриваемое далее является упрощённым вариантом [гл. 5](#). Вместо тройки материальных координат  $q^i$  имеем одну —  $s$ , it may be the arc length parameter in the initial configuration. The motion of a particle over time is described by the location vector  $\mathbf{r}(s, t)$  and the rotation tensor  $\mathbf{O}(s, t)$ . Linear and angular (9.8, § 1.9) velocities of a rod's particle are

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{O}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^\top)_\times. \quad (2.2)$$

Деформация стержня как линии Cosserat определяется двумя векторами

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{r}' - \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{r}}', \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = -\frac{1}{2}(\mathbf{O}' \cdot \mathbf{O}^\top)_\times \Leftrightarrow \mathbf{O}' = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{O}. \quad (2.4)$$

$$\left( \dot{\mathbf{r}}(s) \equiv \mathbf{r}(s, 0) \right)$$

(\*) Если  $\overset{\circ}{e}_3$  направить по касательной  $\overset{\circ}{e}_3 \equiv \overset{\circ}{r}'$

$$\overset{\circ}{r}' \equiv \frac{\partial \overset{\circ}{r}}{\partial s} \equiv \overset{\circ}{r}_{\partial s} \equiv \overset{\circ}{e}_3$$

...

То, что (2.3) and (2.4) действительно векторы деформации, следует из равенства их нулю на перемещениях тела как жёсткого целого.

...

The Cosserat model doesn't have a section as a plane figure.

...

### § 3. Balance of forces and moments

Возможные нагрузки для стержня как линии Cosserat — силы и моменты: на бесконечно-малый элемент  $ds$  действуют external force  $qds$  and external moment  $mds$ . Внутренними взаимодействиями будут сила  $Q(s)$  и момент  $M(s)$  — это воздействие от частицы с координатой  $s+0$  к частице с  $s-0$ . The action–reaction principle даёт, что перемена направления  $s$  меняет знаки  $Q$  and  $M$ .

...

### § 4. Principle of virtual work and consequences

For a piece of rod  $s_0 \leq s \leq s_1$  formulation of the principle is as follows

...

Conventionally  $\mathbf{a}$  is the tensor of stiffness for bending and twisting,  $\mathbf{b}$  is the tensor of stiffness for (ex)tension and shear, and  $\mathbf{c}$  is the tensor of crosslinks.

Stiffness tensors rotate together with particle:

...

## § 5. Classical Kirchhoff's model

До сих пор функции  $\mathbf{r}(s, t)$  и  $\mathbf{O}(s, t)$  были независимы. В классической теории Kirchhoff'a существует внутренняя связь

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\partial s} = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial s} \text{ or } \mathbf{r}' = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}'. \quad (5.1)$$

Вспоминая смысл вектора  $\mathbf{\Gamma}$  (какой? где??), делаем выводы: (1) стержень нерастяжим, (2) поперечных сдвигов нет. Если в начальном состоянии единичный вектор  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_3$  был направлен по касательной к оси, то он останется на ней и после деформирования. Частицы стержня поворачиваются лишь вместе с касательной и вокруг неё.

Уравнения баланса сил и моментов (импульса и момента импульса) не меняются от введения связи (5.1). Но локальное вариационное соотношение (...) становится короче:

...

## § 6. Euler's problem

Рассматривается прямой стержень, закреплённый на одном конце и нагруженный силой  $\mathbf{P}$  на другом (рисунок ?? 123 ??). Сила “мёртвая” (не меняется в процессе деформирования)

...

## § 7. Variational equations

В нелинейной механике упругих тел полезны уравнения в вариациях, описывающие малое изменение актуальной конфигурации. Как и в § 3.12, вариации величин

...

## § 8. Non-shear model with (ex)tension

Kirchhoff's model with internal constraint  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$  (5.1) doesn't describe the simplest case of extension/compression for a straight rod. This



nuisance disappears with “softening” of the constraint: adding the possibility of (ex)tension and inhibiting only transverse shear, that is

$$\Gamma = \Gamma e_3 \Leftrightarrow \Gamma_\alpha = 0 \quad (8.1)$$

...

## § 9. Mechanics of flexible thread

A flexible thread (chain) is simpler than a rod: its particles are “simple” material points with only translational degrees of freedom. Поэтому среди нагрузок нет моментов, только “линейные” силы — внешние распределённые  $\mathbf{q}$  и внутренние сосредоточенные  $\mathbf{Q}$ . Движение нити полностью определяется одним вектором-радиусом  $\mathbf{r}(s, t)$ , а инерционные свойства — линейной плотностью  $\rho(s)$ .

Вот принцип виртуальной работы для куска нити  $s_0 \leq s \leq s_1$

$$\int_{s_0}^{s_1} \left( (\mathbf{q} - \rho \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} - \delta \Pi \right) ds + \left[ \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r} \right]_{s_0}^{s_1} = 0. \quad (9.1)$$

...

Механика нити детально описана в книге [28].

## § 10. Linear theory

В линейной теории внешние воздействия считаются малыми, а отсчётная конфигурация — ненапряжённым состоянием покоя. Уравнения в вариациях в этом случае дают

...

## § 11. Case of small thickness

Когда относительная толщина стержня мала, тогда модель типа Cosserat уступает место классической. Понятие “толщина” определяется соотношением жёсткостей:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{c}$  — разных единиц измерения; полагая  $\mathbf{a} = \hbar^2 \hat{\mathbf{a}}$  and  $\mathbf{c} = \hbar \hat{\mathbf{c}}$ , where  $\hbar$  is some scope

of length, получим тензоры  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $\mathbf{b}$  and  $\hat{\mathbf{c}}$  с одной и той же единицей. Подбирая  $h$  так, чтобы сблизилась характерные значения тензоров  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $\mathbf{b}$  and  $\hat{\mathbf{c}}$ , найдём equivalent thickness  $h$  стержня (для реальных трёхмерных стержней  $h$  где-то на уровне диаметра сечения).

Представив  $\mathbf{Q}$  and  $\mathbf{M}$  через векторы бесконечно малой линейной деформации

...

Переход модели типа Cosserat в классическую кажется более очевидным, если непосредственно интегрировать уравнения (...)

...

## § 12. Saint-Venant's problem

Трудно переоценить ту роль, которую играет в механике стержней классическое решение Saint-Venant. О нём уже шла речь в § 4.13.

Вместо условий ...

...

## § 13. Finding stiffness by energy

Для определения тензоров жёсткости  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  одномерной модели достаточно решений трёхмерных задач для стержня. Но тут возникают два вопроса: какие именно задачи рассматривать и что нужно взять из решений?

Saint-Venant's problem выделяется среди прочих, ведь оттуда берётся жёсткость на кручение.

Вдобавок есть много точных решений, получаемых таким путём: задаётся поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , определяется  $\check{\boldsymbol{\tau}} = {}^4\mathbf{C} \bullet \nabla \mathbf{u}$ , затем находятся объёмные  $\mathbf{f} = -\nabla \bullet \check{\boldsymbol{\tau}}$  и поверхностные  $\mathbf{p} = \mathbf{n} \bullet \check{\boldsymbol{\tau}}$  нагрузки.

Но что делать с решением? Ясно, что  $\mathbf{Q}$  and  $\mathbf{M}$  в стержне — это интегралы по сечению (...). И совсем не ясно, что считать пере-

мещением и поворотом в одномерной модели. Если предложить, например, такой вариант (индекс у  $\mathbf{u}$  — размерность модели)

$$\mathbf{u}_1(z) = \Omega^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}_3(\mathbf{x}, z) d\Omega, \quad \boldsymbol{\theta}(z) = \frac{1}{2} \Omega^{-1} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u}_3 d\Omega,$$

то чем другие возможные представления хуже?

Помимо  $\mathbf{Q}$  and  $\mathbf{M}$ , есть ещё величина, не вызывающая сомнений — упругая энергия. Естественно потребовать, чтобы в одномерной и в трёхмерной моделях энергии на единицу длины совпали. При этом, чтобы уйти от различий в трактовках  $\mathbf{u}_1$  и  $\boldsymbol{\theta}$ , будем исходить из complementary energy  $\hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$ :

$$\hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) = \int_{\Omega} \Pi_3 d\Omega$$

...

## § 14. Variational method of building one-dimensional model

Мы только что определили жёсткости стержня, полагая, что одномерная модель линии типа Cosserat адекватно описывает поведение трёхмерной модели. “Одномерные” представления ассоциируются со следующей картиной перемещений в сечении:

$$\mathbf{u}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{U}(s) + \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{x}. \quad (14.1)$$

Однако, такое поле  $\mathbf{u}$  не удовлетворяет уравнениям трёхмерной теории(??добавить, каким именно). Невозможно пренебречь возникающими невязками в дифференциальных уравнениях и краевых условиях.

Формально “чистым” является вариационный метод сведения трёхмерной проблемы к одномерной, называемый иногда методом внутренних связей. Аппроксимация (14.1) подставляется в трёхмерную формулировку вариационного принципа минимума потенциальной энергии (9.1, § 4.9)

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{V}} (\Pi(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{o} \rightarrow \min,$$

которая после интегрирования по сечению становится одномерной. Если  $\mathbf{U}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  варьируются независимо, получаем модель типа Коссера. В случае  $\mathbf{U}' = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}$  приходим к классической модели.

Метод внутренних связей привлекателен, его продолжают “переоткрывать”. С его помощью возможно моделировать тела с неоднородностью и анизотропией, он легко обобщается на динамику, если  $\mathbf{f}$  дополнить неварьируемой динамической добавкой до  $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ . Можно рассматривать и стержни переменного сечения, и даже нелинейно упругие, ведь вариационная постановка есть (гл. 3).

Аппроксимацию (14.1) можно дополнить слагаемыми с внутренними степенями свободы. Понимая необходимость учёта деформаций, некоторые авторы

...

...

Для вариационного построения одномерных моделей удобен принцип Рейсснера–Хеллингера (§ 4.11) с независимой аппроксимацией напряжений [13]. Но тогда необходима некая согласованность между  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\tau}$ .

Множеству достоинств вариационного метода противостоит один, но очень большой недостаток. Вводя аппроксимации по сечению, мы навязываем реальности свои упрощённые представления. Вариационный метод более подходит для прикладных расчётов.

## § 15. Asymptotic splitting of three-dimensional problem

В изложении механики стержней асимптотическое расщепление можно считать фундаментальным. Одномерные модели составляют лишь часть картины; другая часть — это двумерные задачи в сечении, а вместе они являются тем решением трёхмерной задачи, которое получается для малой толщины.

Малый параметр  $\chi$  в трёхмерную задачу проще всего ввести через представление вектора-радиуса (рисунок ?? 22 ??, § 1):

...

## § 16. Thermal deformation and stress

The direct approach, so efficient for making one-dimensional Cosserat and Kirchhoff models, isn't applicable for problems of thermoelasticity. Then the transition from the three-dimensional model to the one-dimensional can be realized either by variational or asymptotic way.

Описанный в § 14 вариационный метод целиком переносится на термоупругость — включая задачи с неоднородностью и анизотропией, переменным сечением, динамические и даже нелинейные. Для этого нужно (§ 6.8) in the Lagrange principle of minimum potential energy заменить потенциал  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon})$  свободной энергией

...

## Bibliography

Unlike other topics of the theory of elasticity, rods are presented in books very modestly. Narration style of “strength of materials” prevails, more exact and perfect approaches seem impossible or unnecessary to many authors.

Но опубликовано много интересных статей, обзоры которых можно найти у S. Antman'a [1], В. В. Елисеева [13] и А. А. Илюхина [16].

*chapter 10*  
**THIN-WALLED RODS**

**§1. Variational approach**

**В** главе 9 рассматривались стержни с массивным сечением. Но в технике широко используются иные стержни — тонкостенные, сечения которых представляют собой узкие полоски различного очертания (уголок, швеллер, двутавр и др.). Если стержни похожи на линии (материальные линии Коссера), то в тонкостенных стержнях и само сечение выглядит как линия. Три размера — толщина и длина сечения, а также длина стержня — имеют различные порядки.

Известны прикладные теории тонкостенных стержней ...

...

**§2. Equations with small parameter**

Рассмотрим призматический стержень с односвязным сечением в виде тонкой криволинейной полоски постоянной толщины  $h$ . Радиус-вектор в объеме представим следующим образом:

...

**§3. First step of the asymptotic procedure**

*Outer decomposition*

Из системы

...

*Inner decomposition near  $s_0$* 

Выпишем уравнения для

...

*Coalescence*

Стыковка внутреннего и внешнего разложений

...

**§ 4. Second step***Outer decomposition*

Из системы

...

*Inner decomposition near  $s = s_0$* 

Из общей системы

...

*Coalescence*

Поскольку рассматриваются поправочные члены асимптотических разложений

...

**§ 5. Third step***Outer decomposition*

Из системы

....

*Inner decomposition around  $s = s_0$* 

Как уже отмечалось, внутренние разложения нужны для постановки краевых условий на концах

...

*Coalescence*

В плоской задаче имеем следующее двучленное внешнее разложение:

....

## § 6. Fourth step

Здесь понадобится лишь внешнее разложение. Более того: в этом приближении мы не будем искать решения уравнений — будет достаточно лишь условий разрешимости. Напомним, что философия наша такова: разыскиваются лишь главные члены асимптотических разложений, но для полного их определения могут понадобиться

...

## § 7. Displacements

Расписывая тензорное соотношение

...

## § 8. Results of asymptotic analysis

Определение главных членов асимптотики напряжений и перемещений для тонкостенных стержней оказалось намного сложнее, чем в случае массивного сечения. Дадим сводку полученных выше итоговых результатов.

Перемещение:

...



Помимо известных книг ... Материал главы содержится в [13], где можно найти и обширный список статей.

# chapter 11

## SHELLS AND PLATES

### §1. Surface geometry

Surface is described by function (morphism)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^\alpha), \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.1)$$

of two mutually independent variable parameters (coordinates)  $q^\alpha$ , then  $\mathbf{r}$  is location vector (radius vector) of surface's points.

#### Examples

- ✓ a linear mapping is a plane  $\mathbf{r}(a, b) = a\mathbf{e}_1 + b(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$
- ✓ a helicoid  $\mathbf{r}(u, v) = u \sin v \mathbf{e}_1 + u \cos v \mathbf{e}_2 + v \mathbf{e}_3$
- ✓ a cone  $\mathbf{r}(u, v) = u \sin v \mathbf{e}_1 + u \cos v \mathbf{e}_2 + u \mathbf{e}_3$
- ✓ a cylinder of radius  $r = \text{constant}$ 

$$\mathbf{r}(u, v) = r(\cos u \mathbf{e}_1 + \sin u \mathbf{e}_2) + v \mathbf{e}_3$$
- ✓ a torus of revolution with radii  $r$  and  $R$ 

$$\mathbf{r}(p, q) = \mathbf{e}_1(r \cos p + R) \cos q + \mathbf{e}_2(r \cos p + R) \sin q + \mathbf{e}_3 r \sin p$$
- ✓ a 2-sphere — a torus with  $R = 0$ 

$$\mathbf{r}(p, q) = r(\cos p \cos q \mathbf{e}_1 + \cos p \sin q \mathbf{e}_2 + \sin p \mathbf{e}_3)$$
- ✓ a paraboloid  $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + (u^2 + v^2)\mathbf{e}_3$  or cylindrical parameterization  $\mathbf{r}(\rho, \vartheta) = \rho \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \rho \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + \rho^2 \mathbf{e}_3$  for paraboloid of revolution.

Continuous change of one coordinate  $q^1$ , while second coordinate  $q^2 = u^* = \text{constant}$  is “frozen”, gives coordinate line  $\overset{(1)}{\mathbf{r}}(q^1) = \mathbf{r}(q^1, u^*)$ . A crossing of two coordinate lines  $q^1 = v^*$  and  $q^2 = w^*$  uniquely identifies a point  $\mathbf{r}(v^*, w^*)$  of the surface.

Vectors

$$\mathbf{r}_{\partial\alpha} \equiv \partial_\alpha \mathbf{r}, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \quad (1.2)$$

are tangent to coordinate lines. If they are linearly independent (that is  $\mathbf{r}_{\partial 1} \times \mathbf{r}_{\partial 2} \neq \mathbf{0}$ )\*, they compose a local basis for representing any vector  $\mathbf{v}^{(2)}$  in the tangent plane as linear combination

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(2)} &= v^\alpha \mathbf{r}_{\partial \alpha} = v_\alpha \mathbf{r}^\alpha, \\ v^\alpha &= \mathbf{v}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^\alpha, \quad v_\alpha = \mathbf{v}^{(2)} \cdot \mathbf{r}_{\partial \alpha}, \quad \mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_{\partial \beta} = \delta_\beta^\alpha. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Here  $\mathbf{r}^\alpha$  is local reciprocal basis in the (co)tangent plane.

Field of unit normal vectors  $\mathbf{n}(q^\alpha)$  adds at every point of the surface ( $\forall \mathbf{r}(q^\alpha) \Leftrightarrow \forall q^\alpha$ ) a unit\*\* normal

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_{\partial 1} \times \mathbf{r}_{\partial 2}}{\|\mathbf{r}_{\partial 1} \times \mathbf{r}_{\partial 2}\|}. \quad (1.4)$$

At non-singular points, three vectors  $\mathbf{r}_{\partial 1}$ ,  $\mathbf{r}_{\partial 2}$  and  $\mathbf{n}$  can be taken as a basis for the entire three-dimensional space, giving a decomposition of any vector (and any tensor too), for example  $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{r}_{\partial \alpha} + u^n \mathbf{n}$ .

$$u^n = u_n$$

for a 2-sphere of unit radius

$$\mathbf{r}_{\partial p} \times \mathbf{r}_{\partial q} = -\det \begin{bmatrix} -\sin p \cos q & \mathbf{e}_1 & -\cos p \sin q \\ -\sin p \sin q & \mathbf{e}_2 & \cos p \cos q \\ \cos p & \mathbf{e}_3 & 0 \end{bmatrix} = \dots$$

Единичные (“метрические”) бивалентные тензоры  $\mathbf{E}$  в пространстве and  $\mathbf{I}$  в касательной плоскости

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} + \mathbf{n}\mathbf{n}, \quad \mathbf{I} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n} = \mathbf{r}_{\partial \alpha} \mathbf{r}^\alpha = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}_{\partial \alpha}.$$

Представление вектора положения  $\mathbf{h}^{(3)}$  любой точки пространства на расстоянии  $h$  от поверхности ( $\partial_\alpha h = 0$ )

$$\mathbf{h}^{(3)}(q^\alpha, h) = \mathbf{r}(q^\alpha) + h \mathbf{n}(q^\alpha) \quad (1.5)$$

\* Sometimes somewhere — at so-called singular points — it is not so.

As example, for a 2-sphere of unit radius

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(p, q) &= \cos p \cos q \mathbf{e}_1 + \cos p \sin q \mathbf{e}_2 + \sin p \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{r}_{\partial p} &= \partial_p \mathbf{r} = -\sin p \cos q \mathbf{e}_1 - \sin p \sin q \mathbf{e}_2 + \cos p \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{r}_{\partial q} &= \partial_q \mathbf{r} = -\cos p \sin q \mathbf{e}_1 + \cos p \cos q \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

a pole  $p = \pm \frac{\pi}{2}$  is a singular point:  $\mathbf{r}_{\partial q}|_{p=\pm\pi/2} = \mathbf{0}$ .

\*\*  $\|\mathbf{a}\| \equiv \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$  is the length of vector  $\mathbf{a}$ .

даёт локальный касательный базис

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\partial n} &\equiv \mathbf{n} = \mathbf{n}^{(3)}, \\ \mathbf{n}_{\partial \alpha} &\equiv \partial_\alpha \mathbf{n} = \partial_\alpha \mathbf{r} + h \partial_\alpha \mathbf{n} = \mathbf{r}_{\partial \alpha} + h \mathbf{r}_{\partial \alpha} \cdot \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n}. \end{aligned}$$

...

дифференциальный оператор “набла”

$$\text{в пространстве } \nabla \equiv \mathbf{n}^i \partial_i$$

$$\text{в касательной плоскости } \nabla \equiv \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha$$

...

$$\mathbf{n}_{\partial \alpha} = \mathbf{r}_{\partial \alpha} \cdot \left( \mathbf{r}^\beta \mathbf{r}_{\partial \beta} + h \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n} \right) = \mathbf{r}_{\partial \alpha} \cdot \left( \mathbf{I} + h \nabla \mathbf{n} \right) = \mathbf{r}_{\partial \alpha} \cdot \left( \mathbf{I} - {}^2\mathbf{c}h \right)$$

Two-coordinate bivalent tensor

$${}^2\mathbf{c} \equiv -\nabla \mathbf{n} = -\mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha \mathbf{n} \quad (1.6)$$

characterizes the surface's curvature.

...

$$\text{кобазис } \mathbf{n}^\alpha \cdot \mathbf{n}_{\partial \beta} = \delta_\beta^\alpha, \quad \mathbf{n}^i \cdot \mathbf{n}_{\partial j} = \delta_j^i$$

$$\mathbf{n}^\alpha = \left( \mathbf{I} + h \nabla \mathbf{n} \right)^{-1} \cdot \mathbf{r}^\alpha, \quad \mathbf{n}^n = \mathbf{n}$$

связь между  $\nabla$  и  $\nabla^{(2)}$

$$\nabla = \left( \mathbf{I} + h \nabla \mathbf{n} \right)^{-1} \cdot \nabla^{(2)} + \mathbf{n} \partial_n$$

...

## § 2. Model of a shell

Располагая моделями трёхмерного моментного континуума, *стержней и пластин*, не так уж тяжело разобратся в механике оболочек.

Как геометрический объект, оболочка определяется срединной поверхностью и толщиной  $h$ , так что в представлении (1.5)  $-h/2 \leq h \leq h/2$ .

...

## § 3. Balance of forces and moments for a shell

При  $\delta u = \text{constant}$  и  $\delta \varphi = 0$  (трансляция) ...

...

## § 4. Shells: Relations of elasticity

Локальное соотношение (??) после вывода уравнений баланса ...

...

## § 5. Classical theory of shells

Вышеизложенная теория (напоминающая балку Тимошенко и континуумы Cosserat) рассматривает rotations  $\varphi$  независимо от displacements  $\mathbf{u}$ . Но обыденный опыт подсказывает: материальный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остаётся таковым и после (кинематическая гипотеза Kirchhoff'a). В классической теории Kirchhoff'a, Арона и Лява поле  $\varphi$  выражается через  $\mathbf{u}$ , что в конце концов даёт свести всё к одному векторному уравнению для  $\mathbf{u}$ .

Предположим, что в основе классической теории лежит внутренняя связь

...

## § 6. Shells: A plate

Plate is the simplest kind of shell. Единичный перпендикуляр  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  направлен по декартовой оси  $z$ , в качестве координат ...

...

## § 7. Shells: Approach with Lagrange multipliers

Уязвимым местом этого изложения теории оболочек являются формулы

...

## § 8. Cylindrical shell

Существуют разные уравнения цилиндрической оболочки. Приводятся громоздкие выкладки с отбрасыванием некоторых малых членов, и не всегда ясно, какие именно члены действительно можно отбросить.

Предлагаемая читателю теория оболочек иного свойства: лишних членов нет, все уравнения записаны в компактной тензорной форме — остаётся лишь **грамотно** действовать с компонентами тензоров. В качестве иллюстрации рассмотрим цилиндрическую оболочку.

В декартовой системе

...

## § 9. Shells: Common theorems

Пусть край закреплён

...

## § 10. Shells: Boundary conditions

В рамках рассматриваемого прямого подхода к оболочкам как материальным поверхностям наиболее надёжным способом вывода граничных условий представляется вариационный. Исходим из вариационного уравнения:

...

## § 11. Shells of revolution

*Surface of revolution (reference surface of shell of revolution) is created by rotating a plane curve (the meridian, the generatrix) about a straight line in the plane of curve (an axis of rotation).*

Разберёмся в геометрии поверхности вращения ( **рисунок** ). Меридиан можно задать зависимостью декартовых координат

...

## § 12. Momentless theory of shells

В отличие от пластины, оболочка способна выдерживать нормальную распределённую нагрузку без появления внутренних моментов. В безмоментном состоянии напряжения равномерно распределены по толщине оболочки, безмоментные оболочечные конструкции можно считать оптимально спроектированными.

Уравнения безмоментной теории

...

## § 13. Shells: Nonlinear momentless theory

Вышеизложенную безмоментную теорию оболочек возможно просто и корректно обобщить на нелинейную постановку. Материальная поверхность состоит из частиц

...

## § 14. Shells: Other variant of classical theory

Выше при изложении моментной теории оболочек частицы материальной поверхности считались твёрдыми телами с шестью степенями свободы

...

## § 15. Plates: Overall concepts

**П**ластиной называется тонкое трёхмерное тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями и боковой цилиндрической поверхностью (?? [рисунок](#) ??). В декартовых координатах  $x_1, x_2, z$  поперечная координата ...

...

В теории пластин рассматриваются двумерные задачи. Переход от трёхмерной задачи наиболее достоверен на пути асимптотики. Но логическая стройность и эффективность присуща и вариационному подходу, основанному на аппроксимации по толщине решения трёхмерной вариационной задачи. Самое же простое корректное изложение теории пластин характерно для прямого подхода к ним как материальным плоскостям.

...

### § 16. Timoshenko-like model of a plate (direct approach)

Пластина рассматривается как материальная плоскость, частицы которой

...

### § 17. Kirchhoff's classical theory of plates

Принимается внутренняя связь

...

### § 18. Plates: Asymptotic matching of two-dimensional models

При малой толщине из теории типа Тимошенко вытекает классическая. Толщина  $h$  определяется отношением жёсткостей. Перепишем

...

### § 19. Plates: Variational transition from three-dimensional model

Используя вариационные принципы Lagrange'a или Рейсснера–Хеллингера с аппроксимацией решения по толщине, можно по-



лучить двумерные вариационные постановки. Из них вытекают и соотношения внутри области, и естественные краевые условия.

Для примера построим модель типа Тимошенко с аппроксимацией перемещений

...

...

Рассмотренные вариационные переходы легко обобщаются на случаи неоднородности и анизотропии материала, температурных деформаций, динамики. Достоинство принципа Рейсснера–Хеллингера — в явном представлении напряжений. Зато принцип Лагранжа применим к нелинейным задачам (глава 3 содержит трёхмерную постановку).

## § 20. Plates: Splitting of three-dimensional bending problem

Двумерная классическая теория изгиба пластин легко выводится из трёхмерной постановки с малым параметром. Представив радиус-вектор в объёме

...

## § 21. Circular plates

В качестве иллюстрации рассмотрим широко представленный в литературе вопрос об уравнениях теории Kirchhoff'a в полярных координатах.

...

## § 22. Plates: Plane stress

Это вторая из двух задач, о которых говорилось в § 15. Силы

...

Теория оболочек изложена в монографиях А. Л. Гольденвейзера [7], В. В. Новожилова [38], А. И. Лурье [25], В. С. Черниной [62] и ряде других. Достоинства этих книг перекрывают неразвитость формального аппарата. Переход от трёхмерной модели оболочки к двумерной рассмотрен у ...

...

Техническая теория изгиба пластин изложена ...

...

chapter 12

## OSCILLATIONS AND WAVES

### § 1. Vibrations of a three-dimensional body

Динамическая задача классической линейной упругости

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \sigma + f &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \sigma = {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}|_{o_1} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma|_{o_2} = \mathbf{p}, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}^0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}^0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Согласно общей теории (§ 2.8), начинаем с анализа of harmonics (orthogonal oscillations):

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}) \sin \omega t, \\ \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{U}) + \rho \omega^2 \mathbf{U} &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Значения  $\omega$ , при которых однородная задача имеет нетривиальное решение — это natural resonant frequencies, and  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  are orthogonal (normal) “modes”.

Time independent (1.2) looks like equation of linear elastostatics (5.1, § 4.5) with the volume load equal to  $\omega^2 \rho \mathbf{U}$ . Поверхностная нагрузка на  $o_2$  — нуль. Тождество Клапейрона (4.1, § 4.4) даёт

$$\omega^2 \int_V \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} dV = 2 \int_V \Pi(\nabla \mathbf{U}^S) dV.\tag{1.3}$$

It also means  $\omega^2 \geq 0$ , with zero for motion  $\mathbf{U}$  of a continuum as a rigid whole. С закреплением хотя бы малой части поверхности all  $\omega_i > 0$ .

But here was assumed that  $\omega^2$  and  $\mathbf{U}$  are real. This can be proven “by contradiction”. If  $\Im \omega^2 \neq 0$ , then conjugate frequency  $\bar{\omega}^2$  is part of the oscillation spectrum too, and “mode”  $\bar{\mathbf{U}}$  for this

frequency has conjugate components. Using then the reciprocal work theorem (4.2, § 4.4) for  $U$  and  $\bar{U}$  as two static variants,

$$\omega^2 \int_V \rho U \cdot \bar{U} dV = \bar{\omega}^2 \int_V \rho \bar{U} \cdot U dV \Rightarrow \omega^2 = \bar{\omega}^2 \Rightarrow \Im \omega^2 = 0.$$

...

## § 2. Vibrations of a rod

В линейной динамике стержней имеем следующую систему для сил  $Q$ , моментов  $M$ , перемещений  $u$  и поворотов  $\theta$  (§ 9.??):

...

## § 3. Small perturbations of parameters

Рассмотрим задачу об определении собственных частот и форм с малыми возмущениями масс и жёсткостей:

$$(C_{ij} - \omega^2 A_{ij}) U_j = 0, \quad (3.1)$$

$$C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)}, \quad A_{ij} = A_{ij}^{(0)} + \chi A_{ij}^{(1)}, \quad \chi \rightarrow 0.$$

Находя решение в виде

$$\omega = \omega^{(0)} + \chi \omega^{(1)} + \dots, \quad U_j = U_j^{(0)} + \chi U_j^{(1)} + \dots,$$

получаем последовательность задач

...

## § 4. Vibrations of a shell

Динамика оболочек рассматривалась многими

...

## § 5. Waves in an elastic continuum

Рассмотрим линейные уравнения динамики однородной изотропной среды без объёмных сил

...

## § 6. Waves in a rod

Рассмотрим прямой стержень. Продольная деформация описывается уравнениями

...

## § 7. Nonlinear oscillations

Рассмотрим простой пример: продольные колебания прямого стержня с малой нелинейной добавкой в соотношениях упругости

...

## Bibliography

Методы решения динамических задач упругости представлены в книгах Л. И. Слепяна [74] и В. Б. Поручикова [48]. О малых линейных колебаниях (вибрациях) написано у С. П. Тимошенко, D. H. Young'a и W. Weaver'a [66], И. М. Бабакова [67], В. Л. Бидермана [68], В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [70]. Асимптотические проблемы колебаний оболочек освещены у ...

## §1. Various approaches to the problem of stability

There's the well developed theory of Ляпунов (Lyapunov) stability. It says that if near initial deviations don't increase in the future and stay near forever, then the process is stable. This applies to the condition of equilibrium too. Consider the dynamics of small deviations from an equilibrium configuration to make sure that these deviations do not rise. This is the **dynamic approach** to the problem of stability, recognized as the most reasonable.

However, for problems about the stability of equilibrium of elastic systems, the different approach has gained popularity, called **static** and associated with Leonhard Euler's name. Здесь значения параметров, при которых уравнения статики для малых отклонений получают a nontrivial solution, are assumed to be "critical". In other words, "критическим" считается такое equilibrium condition, которое перестаёт быть изолированным — в его окрестности появляется множество смежных равновесных форм ("indifferent equilibrium"). With this approach it's enough to solve the eigenvalue problem.

And there are more approaches. For example, the **imperfection method**: если малые случайные изменения начальной формы, жёсткостей, нагрузок и **чего-нибудь ещё** приводят лишь к малому изменению равновесной деформированной конфигурации, то равновесие устойчиво. Or the **energy approach**: потеря устойчивости происходит, когда она становится энергетически выгодной, то есть ведёт к уменьшению энергии.

Mentioned approaches draw a motley picture. Yet that is pretty easy to visualize for a discrete model — a model with finite number of degrees of freedom.

Большой общностью обладают

...

## § 2. Classical problems with rods

Состояние перед варьированием описывается уравнениями нелинейной теории стержней Kirchhoff'a

...

## § 3. "Tracking" loads

В проблемах устойчивости весьма важно поведение нагрузки в процессе деформирования. Ведь в уравнения входит вариация (of what?)  $\delta q$ , она равна нулю лишь для "dead" loads. **Распространены** "tracking" loads, which change in a definite way along with displacements of the particles of an elastic continuum.

Euler's static approach to the problem of stability

...

## § 4. The role of additional pliabilities

Для прямого **консольного** стержня, сжатого постоянной силой  $F$  на свободном конце, критическая нагрузка определяется формулой Euler'a

...

## § 5. Variational formulations

Во всех разделах линейной теории упругости большую роль играют вариационные постановки. Среди прочего, они составляют основу метода конечных элементов как варианта метода Ritz'a.

Менее развиты вариационные постановки для проблем устойчивости. Здесь получил популярность метод

...

## § 6. Nonconservative problems

В уравнении динамики (...) матрица позиционных сил

...

## § 7. Case of multiple roots

Вернёмся к проблеме устойчивости (...) в случае циркуляционных сил. Как уже отмечалось (где??), критическая ситуация характеризуется

...

## Bibliography

Увлекательные вопросы устойчивости упругих систем освещены в книгах ...



## chapter 14

# DEFECTS

### § 1. Volterra dislocations

Рассмотрим классическую линейную трёхмерную среду (гл. 4).  
Как показано в § 4.7, уравнение совместности деформаций

...

### § 2. Straight-line dislocations

Линия дислокации может быть любой пространственной кривой, замкнутой в теле или выходящей концами на поверхность. Для дислокации произвольной формы в неограниченной среде не так уж сложно получить соответствующее решение [14]. Мы же ограничимся простейшим случаем прямолинейной дислокации. Ищется решение

...

### § 3. Action of stress field on dislocation

Рассмотрим тело, содержащее внутри дислокацию с замкнутой линией  $C$ . Тело нагружено объёмными  $\mathbf{f}$  и поверхностными  $\mathbf{p}$  силами. Обозначим

...

## § 4. About movement of dislocations

Рассмотрим это явление, следуя [20]. Ограничимся случаем прямолинейной винтовой дислокации, движущейся с постоянной скоростью

...

## § 5. Point defects

Речь пойдёт о континуальной модели таких явлений как вакансии, примесные частицы или междоузельные атомы в кристаллической решётке. В случае дислокации рассматривались

...

## § 6. Force acting on point defect

Дефект находится в теле, нагруженном объёмными  $f$  и поверхностными  $p$  силами. Суперпозиция

...

## § 7. Continuously distributed dislocations

Начнём со сложения векторов Бюргерса. При обходе сразу двух дислокаций (рис. ?? 40 ??) по контуру

...

## § 8. Stress during winding of coil

Не только дислокации и точечные дефекты, но и макроскопические факторы могут быть источниками собственных напряжений. При намотке катушки (рис. ?? 42 ??) в ней возникают напряжения от натяжения ленты. Расчёт этих напряжений очень сложен, если рассматривать детально процесс укладки ленты.

Но существует чёткий алгоритм Southwell'a [50] расчёта напряжений в катушке: укладка каждого нового витка вызывает внутри катушки приращения напряжений, определяемые соотношениями линейной упругости. Здесь два этапа, и первый состоит в решении задачи Lamé о деформации полого цилиндра под внешним давлением (рис. ?? 43 ??)

Lamé problem about deformation of a hollow cylinder under external pressure

...

## Bibliography

Дислокации и точечные дефекты в линейно-упругих телах рассматривали многие авторы: John Eshelby [14], Roland deWit [11], Cristian Teodosiu [53], Alan Cottrell [20]. Теорию собственных напряжений изложил Ekkehart Kröner в [21]. Методику расчёта напряжений при намотке описал Richard Southwell в книге [50].

## §1. Traditional criteria of toughness

Как судить о прочности тела после определения напряжения в нём? При одноосном растяжении напряжением  $\sigma$  есть, очевидно, некий “предел прочности”  $\sigma_*$ , выше которого материал разрушается. Прочность считают достаточной при  $\sigma \leq \sigma_*/k$ , где  $k$  есть так называемый коэффициент запаса. Но такой подход не вполне удовлетворяет, поскольку получаемые из опытов значения  $\sigma_*$  have a big scatter, а выбор коэффициента запаса sometimes becomes a bureaucratic act.

Тем не менее, подобные взгляды на анализ прочности широко распространены. Воздерживаясь от критики, стоит упомянуть самые популярные из них.

**Критерий максимального нормального напряжения:** разрушение происходит при  $\sigma_1 = \sigma_*$  (наибольшее из главных напряжений достигает предельного значения). Но это положение несправедливо для одноосного сжатия, при котором  $\sigma_1 = 0$ .

**Критерий максимального касательного напряжения (Tresca criterion):** разрушение наступает при  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_*$  ( $\sigma_3$  — наименьшее из главных напряжений). Это более соответствует началу пластического течения.

**Критерий максимального удлинения:** наибольшее из собственных значений тензора деформации  $\varepsilon_1 = \varepsilon_*$ . Это приемлемо и при сжатии с  $\varepsilon_1 > 0$ .

**Критерий энергии деформации:**  $\Pi = \Pi_*$ . Здесь учитывается, что разрушение требует энергии, а источником её может быть лишь само деформированное тело. Однако достаточный запас энергии — необходимое, но не единственное условие разрушения; должен

включиться некий механизм преобразования упругой энергии в работу разрушения.

**Критерий энергии формоизменения (von Mises yield criterion):**  $s \bullet s = 2\tau_*^2$ ,  $s \equiv \tau - \frac{1}{3} E \text{ trace } \tau$  (“девиатор напряжений”). Здесь не играет роли энергия объёмной деформации. Richard von Mises предложил\* этот критерий как гладкую аппроксимацию условия Henri Tresca.

**Критерий Mohr’a.** Представим себе множество предельных состояний ...

...

## § 2. Antiplane deformation of continuum with a crack

Любая регулярная функция комплексного переменного  $z = x + iy$  содержит в себе решение какой-либо антиплоской задачи статики без ...

...

## § 3. Crack in plane deformation

Рассмотрим плоскую область произвольного очертания с трещиной внутри; нагрузка приложена и “в объёме”, и на внешнем крае. Как и при антиплоской деформации, решение строится в два этапа

...

## § 4. Crack-driving force

Это едва ли не основное понятие механики трещин. Рассмотрим его, следуя

\* **R. von Mises.** Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse.* 1913, Seiten 582–592.

...

## § 5. Criterion of crack growth

Связанная с энергией  $\mathcal{E}$  трещинодвижущая сила  $F$  — не единственное воздействие на передний край трещины. Должна быть ещё некая сила сопротивления  $F_*$ ; рост трещины начинается при условии

...

## § 6. J-integral

Одно из самых известных понятий в механике трещин выражается интегралом

$$J = \dots \quad (6.1)$$

...

## § 7. Stress intensity factors

Расчёт прочности тела с трещиной сводится к определению коэффициентов интенсивности напряжений. Методы расчёта таких коэффициентов — как аналитические, так и численные — хорошо освещены в литературе.

Рассмотрим ещё один подход к задачам механики трещин, разработанный

...

## § 8. Barenblatt's model

An unlimited increase of stress at the edge of a crack seems indeed dubious. Singular solutions desire support by some additional reasonings or by using of another model. And such a support дала работа

...

## § 9. Deformational criterion

D. S. Dugdale\*, а также М. Я. Леонов и В. В. Панасюк\*\* предложили модель, напоминающую построения Баренблатта. Также есть силы сцепления  $q$  и равен нулю итоговый коэффициент интенсивности напряжений. Но, во-первых,  $q$  имеет иной вид:

...

Второе отличие рассматриваемой модели — в формулировке критерия прочности: трещина начинает расти, когда расхождение берегов в конце свободного участка достигает критического значения  $\delta_*$  (этот параметр — константа материала), то есть при

...

## § 10. Growth of cracks

Пусть нагрузка на тело с трещиной выросла настолько, что выполняется условие

...

## § 11. Elastic field ahead of a moving crack

Рассмотрим этот вопрос

...

\* **Dugdale, D. S.** Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1960, Volume 8, Issue 2, pages 100–104.

\*\* **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твёрдом теле. *Прикладная механика*. 1959, Т. 5, № 4, с. 391–401.

## § 12. Balance of energy for a moving crack

Уравнение баланса энергии в линейной теории ( $\Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $K = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ ):

$$\int_{\mathcal{V}} (K + \Pi) \dot{\phantom{x}} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{O}. \quad (12.1)$$

...

## Bibliography

Список книг по механике трещин уже велик. В нём сто́ит отметить работы Л. М. Качанова [17], Н. Ф. Морозова [32], В. З. Партона и Е. М. Морозова [45], Г. П. Черепанова [61]. Обзор статей есть у ... Экспериментальные данные представлены, например, в [18].



## chapter 16

# COMPOSITES

### §1. Introductory thoughts

Using clay as a building material, shredded straw is added to it. Working with epoxy gum, it's useful before solidifying to blend with a filler: powder, fibers, pieces of fabric. These are examples of composites (composite materials, composite mixtures). New types of composites are used more and more widely, displacing steel, aluminum alloys and other popular homogeneous materials.

Composites can be defined as (micro-)inhomogeneous materials, в которых происходит некое осреднение с возникновением новых свойств. “Usual” mechanics of continua is applicable, surely, to composites too. But it's barely possible to model each aspect of a composite material — and rather absurd. Some new approach is needed that will deal with the complexity of material structure. As for a gas, when instead of describing dynamics of individual molecules we introduce parameters “pressure”, “temperature” and others.

Mechanics of a homogeneous non-composite continuum features only single — macroscopic — length  $\ell$ , the characteristic dimension of a body (volume divided by surface area), assuming that volumes of any smallness have the same properties as finite ones.

For a composite — divergently, giving here three scopes of length:  $\ell \gg \ell' \gg \ell_0$ . Largest  $\ell$  presents dimensions of a body. Smallest  $\ell_0$  is around the size of elements of material structure (for example, particulates of a filler powder). Intermediate scope  $\ell'$  exposes the size of a so-called “representative” volume, “unit cell”: того минимального объёма, в котором проявляются specific properties of this composite.

In composites, the complex problem for an inhomogeneous body is split into two: for a body in a whole (macrolevel) and for

а “representative” volume (microlevel). На макроуровне (scope  $\ell$ ) композит моделируется однородной средой с “эффективными” свойствами, where “representative” volumes играют роль частиц. На микроуровне (scope  $\ell_0$ ) поля очень неоднородны, но некое осреднение по “представительному” объёму выводит на макроуровень.

...

## § 2. Effective fields

Любое поле в композите обычно представляется суммой

...

## § 3. Boundary value problems for representative volume

Как определяются упругие модели для однородной среды? Without the real possibility to get a relation between  $\sigma$  and  $\varepsilon$  for a point of infinitesimal size, experiments are carried out with bodies of finite volumes under a so-called “homogeneous stress”— when stress is the same at all points of a body. В композитах роль точки играет а “representative” volume.

...

## § 4. Hill's fork

Using Voigt and Reuss theories, Hill derived upper and lower bounds on the effective properties of a composite material [Hill, R. W. The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proceedings of the Physical Society*, Section A, Volume 65, Issue 5 (May 1952). Pages 349–354.]

The scale separation is motivated by the material properties, at both scales continuum mechanics models the underlying system. Such an approach uses energy equivalence at both scales as proposed in Hill (1972).

Hill R (1972) On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain (pages 131–147)

For a composite material, at least two different materials with known material models and parameters, generate a homogenized material modeled with a predetermined constitutive equation. Determination of material parameters of the homogenized material is a challenging task.

Отметив, что

...

## § 5. Eshelby formulas

Итак, эффективные модули определяются энергией представительного объёма в первой или второй задачах:

...

## § 6. Effective moduli for material with spherical inclusions

В однородной матрице случайным образом, но достаточно равномерно, распределены сферические включения радиусом  $a$ . Получившийся композит на макроуровне будет изотропным, его упругие свойства полностью определяются ...

...

## § 7. Self-consistent method

Мы опирались на две задачи для представительного объёма и определяли эффективные модули из равенства энергий. В основе метода самосогласования лежит новая идея: представительный объём помещается в безграничную среду с эффективными свойствами, на бесконечности состояние считается однородным, эффективные модули находятся из некоторых дополнительных условий самосогласования.

Обратимся снова к вопросу об объёмном модуле среды со сферическими включениями. Задача сферически симметрична; для включения по-прежнему

...

## § 8. Hashin–Shtrikman principle

Hashin and Shtrikman derived upper and lower bounds for the effective elastic properties of quasi-isotropic and quasi-homogeneous multiphase materials using a variational approach [Hashin, Z.; Shtrikman, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. Volume 11, Issue 2 (March–April 1963). Pages 127–140.]

Hashin Z, Shtrikman S (1962) On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 10(4): pages 335–342

Вилка Hill’a основана на обычных экстремальных принципах теории упругости. Специально для механики композитов Hashin и Shtrikman построили очень своеобразный функционал, который на некотором точном решении может иметь как максимум, так и минимум, давая возможность с двух сторон оценивать эффективные модули [65].

Рассмотрим первую из двух задач для представительного объёма

...

## Bibliography

Книги R. Christensen’a [76] и Б. Е. Победри [78] содержат и основы механики композитов, и постановку не теряющих актуальности проблем. Для самого требовательного читателя представляет интерес монография Т. Д. Шермергора [65]. Немало книг посвящено механике разрушения композитов, здесь стоит отметить труд Г. П. Черепанова [79].

*chapter 17*

## PERIODIC COMPOSITES

Periodic composite structure is made of a finite or infinite repetition of a unit cell.

### §1. One-dimensional problem

**В** одномерной задаче статики имеем уравнение  
...

### §2. Three-dimensional continuum

Исходим из уравнений в перемещениях  
...

### §3. Fibrous structure

Тензор  $\mathcal{A}$  в этом случае постоянен вдоль оси  
...

### §4. Statics of a periodic rod

В уравнениях линейной статики стержня  
...

### Bibliography

Лежащий в основе этой главы асимптотический метод представлен (с разной степенью математической скрупулёзности) в книгах [80, 81, 77, 78].

## LIST OF REFERENCED PUBLICATIONS

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Издание 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
5. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
6. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
7. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. «Наука», 1976. 512 с.
8. **Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 383 с.
9. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.
10. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.
11. *Перевод: Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.
12. **Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.

13. **Елисеев В. В.** Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.
14. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод: Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.
15. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.
16. **Илюхин А. А.** О построении соотношений теории упругих стержней // Механика твёрдого тела (Киев), 1990, № 22, С. 82–92.
17. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.
18. **Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
19. **Cosserat E. et Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
20. **Cottrell, Alan.** Theory of crystal dislocations. (Documents on Modern Physics) Gordon and Breach, 1964. 94 p. *Перевод: Коттрел А.* Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.
21. **Kröner, Ekkehart** (i) Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. (ii) Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод: Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.
22. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с. *Translation: Lurie, A. I.* Nonlinear Theory of Elasticity: translated from the Russian by K. A. Lurie. Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 617 p.
23. **Лурье А. И.** Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с. *Translation: Lurie, A. I.* Theory of Elasticity (translated by A. Belyaev). Springer-Verlag, 2005. 1050 p.
24. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
25. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.

26. **Augustus Edward Hough Love.** A treatise on the mathematical theory of elasticity. Volume I. Cambridge, 1892. 354 p. Volume II. Cambridge, 1893. 327 p. 4th edition. Cambridge, 1927. Dover, 1944. 643 p. *Перевод: Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
27. **Ernst Melan, Heinz Parkus.** Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод: Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.
28. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.
29. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е издание. «Наука», 1987. 304 с.
30. **Mindlin, Raymond David and Tiersten, Harry F.** Effects of couple-stresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод: Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.
31. **Морозов Н. Ф.** Избранные двумерные задачи теории упругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 182 с.
32. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.
33. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. Издание 5-е. «Наука», 1966. 708 с.
34. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.
35. **Witold Nowacki.** Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation: Nowacki, Witold.* Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод: Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.
36. **Witold Nowacki.** Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод: Новацкий В.* Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.



37. **Witold Nowacki.** Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод: Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.
38. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е издание. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
39. **Пановко Я. Г.** Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы. «Наука», 1985. Издание 2-е. URSS, 2017. 288 с.
40. **Пановко Я. Г., Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.
41. **Пановко Я. Г., Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е издание. «Наука», 1987. 352 с.
42. **Heinz Parkus.** Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод: Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
43. **Партон В. З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.
44. **Партон В. З., Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.
45. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е издание. «Наука», 1985. 504 с.
46. **Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
47. **Понятовский В. В.** Вывод уравнений тонкостенных стержней-оболочек открытого профиля из уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования // Исследования по упругости и пластичности. Изд-во ЛГУ, 1980. Вып. 13. С. 40–48.
48. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.
49. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твёрдого тела. 2-е издание. «Наука», 1988. Издание 3-е. URSS, 2019. 712 с.

50. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод: Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.
51. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Том 2. 6-е издание. «Лань», 2004. 560 с.
52. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B.V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод: Съярле Ф.* Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.
53. **Teodosiu, Cristian.** Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод: Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.
54. **Тимошенко С. П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.
55. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.
56. **Stephen P. Timoshenko and James N. Goodier.** Theory of Elasticity. 2nd edition. McGraw-Hill, 1951. 506 pages. 3rd edition. McGraw-Hill, 1970. 567 pages. *Перевод: Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. 2-е издание. «Наука», 1979. 560 с.
57. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод: Труделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.
58. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е издание. «Наука», 1975. 173 с.
59. *Перевод: Хеллан К.* Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.
60. *Перевод: Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.
61. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.
62. **Чернина В. С.** Статика тонкостенных оболочек вращения. «Наука», 1968. 456 с.
63. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.

64. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
65. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.

### *Oscillations and waves*

66. **Timoshenko, Stephen P.; Young, Donovan H.; William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод: Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
67. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е издание. «Дрофа», 2004. 592 с.
68. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
69. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.
70. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
71. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод: Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.
72. **Kolsky, Herbert.** Stress waves in solids. Oxford, Clarendon Press, 1953. 211 p. 2nd edition. Dover Publications, 2012. 224 p. *Перевод: Кольский Г.* Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.
73. **Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.
74. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
75. **Григолюк Э. И., Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.

### *Composites*

76. **Christensen, Richard M.** Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод: Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.

77. **Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.
78. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
79. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.
80. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.
81. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.

*The finite element method*

82. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.
83. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.

*Mechanics, thermodynamics, electromagnetism*

84. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew.** The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online: The Feynman Lectures on Physics. Online edition.*
85. **Goldstein, Herbert; Poole, Charles P.; Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison–Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод: Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж.* Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
86. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод: Парс Л. А.* Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.
87. **Ter Haar, Dirk.** Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод: Тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.
88. **Беляев Н. М., Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.
89. **Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.

90. **Гантмахер Ф. Р.** Лекции по аналитической механике. Издание 2-е. «Наука», 1966. 300 с.
91. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.
92. **Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е издание. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е издание. 719 с.
93. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
94. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е издание. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.
95. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е издание. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

*Tensors and tensor calculus*

96. **McConnell, Albert Joseph.** Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод: Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
97. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод: Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.
98. **Sokolnikoff, I. S.** Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua. 2nd edition. John Wiley & Sons, 1965. 361 pages. *Перевод: Сокольников И. С.* Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). «Наука», 1971. 376 с.
99. **Борисенко А. И., Тарапов И. Е.** Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Издание 6-е. Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьковском ун-те, 1986. 216 с.
100. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Издание 3-е. «Наука», 1967. 664 с.

101. **Karel Rektorys.** Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation: Rektorys, Karel.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D.Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод: Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
102. **Washizu, Kyuichiro.** Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод: Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
103. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.
104. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Издание 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

*Perturbation methods (asymptotic methods)*

105. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод: Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.
106. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.
107. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-Interscience, 1973. 425 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Методы возмущений. «Мир», 1976. 456 с.
108. **Бабич В. М., Буддырев В. С.** Искусство асимптотики // Вестник ЛГУ, 1977, № 13, вып. 3, С. 5–12.
109. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.
110. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
111. **Зино И. Е., Трош Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
112. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е издание. «Наука», 1981. 400 с.

113. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.

*Other topics of mathematics*

114. **Collatz, Lothar.** Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод: Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.
115. **Dwight, Herbert Bristol.** Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод: Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. Издание 4-е. «Наука», 1973. 228 с.
116. **Kamke, Erich.** Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод: Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. «Лань», 2003. 576 с.
117. **Korn, Granino A. and Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод: Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.
118. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. «Наука», 1971. 416 с.
119. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е издание. «Наука», 1973. 736 с.
120. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Издание 6-е. «Наука», 1974. 176 с.
121. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. 6-е издание. Изд-во МГУ, 1999. 798 с.