

Vadique Myself

# ФИЗИКА УПРУГИХ КОНТИНУУМОВ



## ВВЕДЕНИЕ

Я представил следующие модели упругого континуума в этой книге: нелинейные и линейные, микрополярные и классические безмоментные; трёхмерные, двумерные (оболочки и пластины) и одномерные (стержни, включая тонкостенные). Также я объяснил основы динамики — колебания, волны и устойчивость. Для термоупругости и магнитоупругости я дал сводку классических теорий термодинамики и электродинамики. Динамика разрушения описана через теории дефектов и трещин. Также показаны подходы к моделированию сделанных человеком неоднородных материалов (“композитов”).

Слово “континуумов” в названии книги говорит, что тело (среда) моделируется здесь не как дискретная коллекция частиц, но как непрерывное поле векторов положения, непрерывная материя. Это даёт большое удобство, потому что аппарат *calculus*’а (исчисления) бесконечно малых может быть использован для таких моделей.

Книга написана с использованием компактной и элегантной прямой безиндексной тензорной записи. Математический аппарат для интерпретирования прямых тензорных соотношений находится в первой главе.

Я пишу эту книгу одновременно на двух языках, английском и русском. Читатель свободен выбрать любой язык из двух.



# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>iii</b>
<i>Глава 1</i> <b>Математический аппарат</b>	<b>1</b>
§ 1. Вектор	4
§ 2. Тензор и его компоненты	9
§ 3. Тензорная алгебра, или операции с тензорами	11
§ 4. Полиадное представление (разложение)	15
§ 5. Матрицы, перестановки и определители	16
§ 6. Векторное произведение	18
§ 7. Симметричные и антисимметричные тензоры	24
§ 8. Полярное разложение	27
§ 9. Собственные векторы и собственные числа	28
§ 10. Коллекции инвариантов симметричного бивалентного тензора	30
§ 11. Тензор поворота	31
§ 12. Вариации	37
§ 13. Полярное разложение	38
§ 14. В косоугловом базисе	40
§ 15. Тензорные функции	46
§ 16. Пространственное дифференцирование	47
§ 17. Интегральные теоремы	50
§ 18. Тензоры кривизны	51
<i>Глава 2</i> <b>Классическая общая механика</b>	<b>56</b>
§ 1. Дискретная совокупность частиц	56
§ 2. Совершенно жёсткое недеформируемое твёрдое тело	60

§ 3. Принцип виртуальной работы .....	65
§ 4. Баланс импульса, момента импульса и энергии .....	68
§ 5. Принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа .....	69
§ 6. Статика .....	71
§ 7. Механика относительного движения .....	74
§ 8. Малые колебания (вибрации) .....	75
<b>Глава 3 Нелинейно-упругая безмоментная среда</b> .....	<b>78</b>
§ 1. Континуум. Два описания процессов .....	78
§ 2. Градиент движения .....	82
§ 3. Меры (тензоры) деформации .....	83
§ 4. Поле скоростей .....	88
§ 5. Вектор площади. Изменение площади .....	90
§ 6. Силы в континууме. Существование тензора напряжения Cauchy .....	90
§ 7. Баланс импульса и момента импульса .....	92
§ 8. Собственные числа тензора напряжения Cauchy. Круги Mohr'a .....	94
§ 9. Принцип виртуальной работы (без множителей Лагранжа) .....	95
§ 10. Определяющие отношения упругости .....	97
§ 11. Тензоры напряжения Piola–Kirchhoff'a и другие меры напряжения .....	99
§ 12. Варьирование текущей конфигурации .....	104
§ 13. Внутренние связи .....	104
§ 14. Полая сфера под давлением .....	105
§ 15. Напряжения как множители Лагранжа .....	106
<b>Глава 4 Классическая линейная упругость</b> .....	<b>108</b>
§ 1. Полный набор уравнений .....	108
§ 2. Уникальность решения в динамике .....	111
§ 3. Закон Hooke'a для изотропного материала .....	113
§ 4. Теоремы статики .....	113
§ 5. Уравнения в смещениях .....	116

§ 6. Сосредоточенная сила в бесконечной среде .....	117
§ 7. Нахождение смещений по деформациям .....	117
§ 8. Уравнения в напряжениях .....	119
§ 9. Принцип минимума потенциальной энергии .....	120
§ 10. Принцип минимума дополнительной энергии .....	123
§ 11. Смешанные принципы стационарности .....	124
§ 12. Антиплоский сдвиг .....	125
§ 13. Кручение стержней .....	127
§ 14. Плоская деформация .....	128
<b>Глава 5 Микрополярная трёхмерная среда</b> .....	<b>130</b>
§ 1. Введение в линейную микрополярную теорию .....	130
§ 2. Отношения упругости .....	137
§ 3. Уравнения совместности .....	139
§ 4. Теоремы статики .....	139
§ 5. Псевдоконтинуум Cosserat .....	139
§ 6. Плоская деформация .....	140
§ 7. Нелинейная теория .....	141
§ 8. Нелинейная модель со стеснённым вращением .....	144
<b>Глава 6 Термоупругость</b> .....	<b>146</b>
§ 1. Первый закон термодинамики .....	146
§ 2. Второй закон .....	149
§ 3. Определяющие уравнения .....	152
§ 4. Уравнение теплопроводности .....	152
§ 5. Линейная термоупругость .....	153
§ 6. Уравнения в смещениях .....	154
§ 7. Температурное напряжение .....	154
§ 8. Вариационные формулировки .....	154
<b>Глава 7 Магнитоупругость</b> .....	<b>156</b>
§ 1. Электромагнитное поле .....	156
§ 2. Электромагнитные волны .....	160
§ 3. Электростатика .....	162

§ 4. Диэлектрики .....	163
§ 5. Магнитостатика .....	163
§ 6. Магнетики .....	163
§ 7. Магнитная жёсткость .....	164

## **Глава 8 Методы возмущений (асимптотические методы) 168**

§ 1. Асимптотические разложения .....	168
§ 2. Расщепление в линейной алгебраической системе .....	172
§ 3. Метод Poincaré .....	173
§ 4. Метод осреднения Ван дер Поля .....	173
§ 5. Сращивание асимптотических разложений .....	174
§ 6. Многоуровневый анализ (метод многих масштабов) .....	175
§ 7. Уравнения с медленно меняющимися параметрами .....	175
§ 8. Тонкие тела .....	175

## **Глава 9 Стержни 177**

§ 1. Исходные представления .....	177
§ 2. Кинематика линий Коссера .....	186
§ 3. Баланс сил и моментов .....	188
§ 4. Принцип виртуальной работы и следствия .....	189
§ 5. Классическая модель Kirchhoff'a .....	189
§ 6. Проблема Euler'a об устойчивости стержней .....	190
§ 7. Вариационные уравнения .....	190
§ 8. Модель без сдвига с растяжением .....	191
§ 9. Механика гибкой нити .....	191
§ 10. Линейная теория .....	192
§ 11. Случай малой толщины .....	192
§ 12. Задача Сэйн-Венана .....	193
§ 13. Нахождение жёсткости по энергии .....	193
§ 14. Вариационный метод построения одномерной модели .....	194
§ 15. Асимптотическое расщепление трёхмерной проблемы .....	196
§ 16. Температурные деформация и напряжение .....	197



<i>Глава 10</i>	<b>Тонкостенные стержни</b>	<b>199</b>
§ 1.	Вариационный подход	199
§ 2.	Уравнения с малым параметром	200
§ 3.	Первый шаг асимптотической процедуры	200
§ 4.	Второй шаг	201
§ 5.	Третий шаг	201
§ 6.	Четвёртый шаг	202
§ 7.	Смещения	202
§ 8.	Результаты асимптотического анализа	202
<i>Глава 11</i>	<b>Оболочки и пластины</b>	<b>204</b>
§ 1.	Геометрия поверхности	204
§ 2.	Модель оболочки	207
§ 3.	Баланс сил и моментов для оболочки	207
§ 4.	Оболочки: Отношения упругости	207
§ 5.	Классическая теория оболочек	207
§ 6.	Оболочки: Пластина	208
§ 7.	Оболочки: Подход с множителями Лагранжа	208
§ 8.	Цилиндрическая оболочка	209
§ 9.	Оболочки: Общие теоремы	209
§ 10.	Оболочки: Краевые условия	209
§ 11.	Оболочки вращения	210
§ 12.	Безмоментная теория оболочек	210
§ 13.	Оболочки: Нелинейная безмоментная теория	211
§ 14.	Оболочки: Иной вариант классической теории	211
§ 15.	Пластины: Общие представления	211
§ 16.	Модель пластины типа Тимошенко (прямой подход)	212
§ 17.	Классическая теория пластин Kirchhoff'a	212
§ 18.	Пластины: Асимптотическое сопоставление двумерных моделей	212
§ 19.	Пластины: Вариационный переход от трёхмерной модели	213
§ 20.	Пластины: Расщепление трёхмерной задачи изгиба	213

§ 21. Круглые пластины .....	214
§ 22. Пластины: Плоское напряжение .....	214
<b>Глава 12 Колебания и волны</b> .....	<b>215</b>
§ 1. Вибрации трёхмерных тел .....	215
§ 2. Вибрации стержней .....	218
§ 3. Малые возмущения параметров .....	218
§ 4. Вибрации оболочек .....	219
§ 5. Волны в упругом континууме .....	219
§ 6. Волны в стержне .....	219
§ 7. Нелинейные колебания .....	219
<b>Глава 13 Устойчивость</b> .....	<b>221</b>
§ 1. Разные подходы к проблеме устойчивости .....	221
§ 2. Классические проблемы со стержнями .....	222
§ 3. “Следящие” нагрузки .....	222
§ 4. Роль добавочных податливостей .....	223
§ 5. Вариационные формулировки .....	223
§ 6. Неконсервативные задачи .....	224
§ 7. Случай кратных корней .....	224
<b>Глава 14 Дефекты</b> .....	<b>225</b>
§ 1. Дислокации Вольтерры .....	225
§ 2. Прямолинейные дислокации .....	225
§ 3. Действие поля напряжений на дислокацию .....	226
§ 4. О движении дислокаций .....	226
§ 5. Точечные дефекты .....	226
§ 6. Сила, действующая на точечный дефект .....	226
§ 7. Непрерывно распределённые дислокации .....	227
§ 8. Напряжение при намотке катушки .....	227
<b>Глава 15 Трещины</b> .....	<b>229</b>
§ 1. Традиционные критерии прочности .....	229
§ 2. Антиплоская деформация среды с трещиной .....	230

§ 3. Трещина при плоской деформации .....	230
§ 4. Трещиноподвижная сила .....	231
§ 5. Критерий роста трещины .....	231
§ 6. J-интеграл .....	231
§ 7. Коэффициенты интенсивности напряжений .....	232
§ 8. Модель Varenblatt'a .....	232
§ 9. Деформационный критерий .....	233
§ 10. Рост трещин .....	233
§ 11. Упругое поле перед движущейся трещиной .....	234
§ 12. Баланс энергии для движущейся трещины .....	234
<b>Глава 16 Композиты</b> .....	<b>235</b>
§ 1. Вводные размышления .....	235
§ 2. Эффективные поля .....	237
§ 3. Краевые задачи для представительного объема .....	237
§ 4. Вилка Hill'a .....	238
§ 5. Формулы Eshelby .....	239
§ 6. Эффективные модули для материала со сферическими включениями .....	239
§ 7. Метод самосогласования .....	239
§ 8. Принцип Хашина–Штрикмана .....	240
<b>Глава 17 Периодические композиты</b> .....	<b>242</b>
§ 1. Одномерная задача .....	242
§ 2. Трёхмерный континуум .....	242
§ 3. Волокнистая структура .....	242
§ 4. Статика периодического стержня .....	242
<b>Список упомянутых публикаций</b> .....	<b>244</b>



## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

### 0.1. *What is abstract? What does math do?*

Math is abstract.

Numbers are not real entities. They are purely imaginary concepts.

When we do math, we are playing a game in a world of imagination.

We cannot experience numbers. One can make up stories about them, such as  $1 + 1 = 2$ . But no one can ever experience such an operation since there's no such thing as *one*.

### 0.2. *Points*

.....

Euclid's Elements

Book I

Definition 1

A point is that which has no part.

The description of a point, “that which has no part”, indicates that Euclid will be treating a point as having no width, length, or breadth, but as an indivisible location.

### 0.3. *Lines, curved and straight (linear)*

Euclid's Elements

Book I

Definition 2

A line is breadthless length.

“Line” is the second primitive term in the Elements. “Breadthless length” says that a line will have one dimension, length, but it won't

have breadth. The terms “length” and “breadth” are not defined in the Elements.

#### *0.4. A relation between lines and points*

Euclid’s Elements

Book I

Definition 3

The ends of a line are points.

This statement doesn’t mention how many ends a line can have.

#### *0.5. Do straight lines exists?*

Гипотеза существования прямых линий.

The existence of Euclidean straight lines in space.

Euclid’s Elements

Book I

Definition 4

A straight line is a line which lies evenly with the points on itself.

Начертить прямую линию рукой абсолютно невозможно.

#### *0.6. The existence of vectors. Do vectors exists?*

##### *0.7. Continuity of line*

##### *0.8. A point of reference*

#### *0.9. Translation as the easiest kind of motion. Translations and vectors*

#### *0.10. Straight line and vector*

Вектор (геометрический) может быть как прямая линия со стрелкой на одном из её концов. **Then** it is fully described (characterized) by the magnitude and the direction.

в абстрактной алгебре слово *вектор* — про любой объект, который может быть суммирован с подобными объектами и умножен (scaled) на скаляры, а векторное пространство — синоним

линейного пространства. Поэтому я поясняю, что в этой книге *вектор* есть не что иное, как трёхмерный геометрический (Ευκλείδειος, Евклидов, Euclidean) вектор.

Why are vectors always straight (linear)?

(a) Vectors are linear (straight), they cannot be curved.

(b) Vectors are neither straight nor curved. A vector has the magnitude and the direction. A vector is not a line or a curve, albeit it can be represented by a straight line.

Vector can't be thought of as a line.

0.11. Изображающая реальные числа линия

often just “числовая прямая”

0.12. What is a distance?

0.13. Плоскость и более многомерное пространство

0.14. Расстояние на плоскости или в более-мерном пространстве

0.15. What is an angle?

angle  $\equiv$  inclination /slope, slant/ of two lines

two lines sharing a common point are usually called intersecting lines

angle  $\equiv$  the amount of rotation of line or plane within space

angle  $\equiv$  the result of the dot product of two unit vectors gives angle's cosine

0.16. Дифференциация непрерывного на малые дифференциальные кусочки

малые дифференциальные кусочки

infinitesimal (infinitely small)

Упоминание тензоров может отпугнуть читателя, обычно избегающего ненужных сложностей. Не бойся: тензоры используются

просто из-за своего чудесного свойства инвариантности — независимости от системы координат.

## §1. Вектор

**Я** предлагаю начать знакомство с тензорами через мемуары о таком феномене как вектор.

- ✓ A *point* has position in space. The only characteristic that distinguishes one point from another is its position.
- ✓ A *vector* has both magnitude and direction, but no specific position in space.

### 1.1. Что такое вектор?

What is “linear”?

- (1) straight
- (2) relating to, resembling, or having a **graph** that is a straight line

All vectors are linear objects.

Examples of vectors:

- ✓ Сила действует на объект.
- ✓ Скорость объекта описывает происходящее с этим объектом за мгновение.

*Умножение вектора на скаляр*

*Умножение на минус единицу*

Принцип Newton’a действия–противодействия “действие равно противодействию по магнитуде и обратно ему по направлению”.

Каждое механическое взаимодействие двух объектов характеризуется двумя силами, которые действуют на оба взаимодействующих объекта. Эти силы могут быть представлены двумя векторами, которые равны по магнитуде и обратны по направлению.

Умножение вектора на отрицательную единицу  $-1$  обращает направление вектора, но не меняет его магнитуду.



## 1.2. The addition and subtraction

The sum (combination) of two or more vectors is the new “resultant” vector. There are two similar methods to calculate the resultant vector geometrically.

“*Method head to tail*” involves lining up the head of one vector with the tail of another. Here the resultant goes from the initial point (the “tail”) of the first addend to the end point (the “head”) of the second addend when the tail (the initial point) of the second one coincides with the head (the end point) of the first one.

[ ... figure here .... ]

“*Метод параллелограмма*” ...

[ ... figure here .... ]

The vector addition is commutative

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}.$$

....

$$\mathbf{p} + \mathbf{q},$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q}) = \mathbf{p} + (-1)\mathbf{q}.$$

For every action, there’s an equal (in magnitude) and opposite (in direction) reaction force.

A vector may be also represented as the sum (combination) of some trio of other vectors, called “basis”, when the each of the three is scaled by a number (coefficient). Such a representation is called a “linear combination” of basis vectors. A list (array, tuple) of coefficients alone, without basis vectors, is not enough and can’t represent a vector.

....

Чтобы получить числовые (co)отношения из векторных, вводится система координат, и на её оси проецируются векторные (co)отношения.

....

У самих по себе векторов как элементов векторного пространства компонент нет. У вектора появляются компоненты лишь когда выбран определённый базис, тогда любой вектор может быть разложен на компоненты. В разных базисах компоненты одного и того же вектора отличаются друг от друга.

Вот он — вектор,  $\mathbf{v}$  выглядит подходящим именем для него.

Как и все геометрические векторы,  $\mathbf{v}$  вполне характеризуется двумя взаимно независимыми свойствами: своей длиной (магнитудой, нормой, модулем) и своим направлением в пространстве. Эта характеристика полная, так что какие-нибудь два вектора с одинаковой магнитудой и одинаковым направлением считаются равными.

Каждый вектор существует объективно сам по себе, независимо от методов и единиц измерения и длин, и направлений (включая любые абстракции таких единиц и методов).

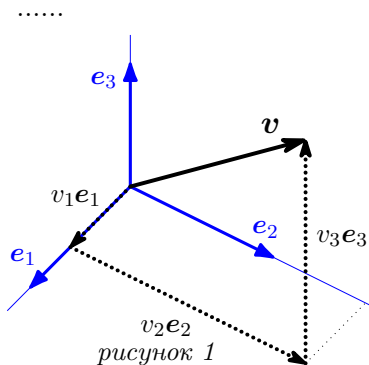
Εὐκλείδης Eūkleídēs Евклид

εὐκλείδειος euclidean евклидово

plane geometry is the two-dimensional Euclidean geometry

The Elements (Στοιχεῖα) (Stoikheía)

### 1.3. Метод координат



Выбрав какие-нибудь взаимно перпендикулярные единичные векторы  $\mathbf{e}_i$  как основу (бáзис) для измерений, я ввожу прямоугольные (“декартовы (cartesian)”) координаты.

Три ( $i = 1, 2, 3$ ) базисных вектора  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  нужны для трёхмерного — 3D — пространства.

В такой системе “ $\cdot$ ”-произведения базисных векторов равны дельте Kronecker’a

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

для любого **ортонормального** базиса.

Разлагая вектор  $\mathbf{v}$  в некотором **ортонормальном** базисе  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), получаем коэффициенты  $v_i$  — компоненты вектора  $\mathbf{v}$  в том базисе (рис. 1)

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \equiv \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i \equiv v_i \mathbf{e}_i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.1)$$

Здесь и далее принимается соглашение о суммировании Einstein’a: повторённый дважды (и не более чем дважды) в одночлене индекс подразумевает суммирование по этому индексу. А неповторяющийся индекс называется “свободным”, и он одинаков в обеих частях равенства. Это примеры:

$$\sigma = \tau_{ii}, \quad p_j = n_i \tau_{ij}, \quad m_i = e_{ijk} x_j f_k, \quad a_i = \lambda b_i + \mu c_i.$$

(Равенства же  $a = b_{kkk}$ ,  $c = f_i + g_k$ ,  $a_{ij} = k_i \gamma_{ij}$  некорректны.)

Имея компоненты вектора в ортонормальном базисе, длина этого вектора возвращается “равенством Пифагора (Πυθαγόρας)”

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i \cdot v_j \mathbf{e}_j = v_i \delta_{ij} v_j = v_i v_i, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_i v_i}. \quad (1.2)$$

*The magnitude represents the length independent of direction.*

Направление вектора в пространстве измеряется тремя углами (косинусами углов) между этим вектором и каждым из базисных:

$$\cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{v_i}{\sqrt{v_j v_j}} \Leftrightarrow \frac{v_i}{\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{v}\|}} = \|\mathbf{v}\| \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i). \quad (1.3)$$

*Измерение углов.* Косинус угла между двумя векторами is the same as the dot product of these vectors if their magnitudes are equal to the one unit of length

When the magnitudes of two vectors are equal to the one unit of length, then the cosine of the least angle between them is the same as the dot product of these vectors. Любой вектор с не-единичной магнитудой (кроме нулевого вектора) может быть “нормализован” делением вектора на его магнитуду.

$$\cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}.$$

To accompany the magnitude, which represents the length independent of direction, there’s a way to represent the direction of a vector independent of its length. For this purpose, the unit vectors (the vectors with the magnitude of 1) are used.

A rotation matrix is just a transform that expresses the basis vectors of the input space in a different orientation. The length of the basis vectors

will be the same, and the origin will not change. Also, the angle between the basis vectors will not change. All that changes is the relative direction of all of the basis vectors.

Therefore, a rotation matrix is not really just a “rotation” matrix; it is an orientation matrix.

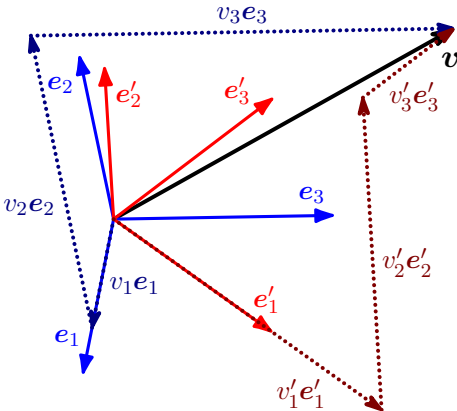
Бывают ещё и псевдовекторы, ждущие читателя ниже в § 6.

*Угол между двумя случайными векторами.* Согласно (1.3)

$$\cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_m) = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{e}_m = \frac{v_m}{\sqrt{v_j v_j}},$$

$$\cos \angle(\mathbf{w}, \mathbf{e}_n) = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \cdot \mathbf{e}_n = \frac{w_n}{\sqrt{w_k w_k}}.$$

Длина (1.2) и направление в пространстве (1.3), которые могут быть измерены посредством трио базисных векторов, описывают вектор. И каждый вектор обладает этими свойствами\*. Однако, этого мало (“не достаточно” на жаргоне книг по математике).



рисунк 2

Вектор ведь не просто совокупность компонент в каком-то базисе.

Тройка попарно перпендикулярных единичных векторов может только поворачиваться и тем самым она может характеризовать угловую ориентацию других векторов.

Разложение одного и того же вектора  $\mathbf{v}$  в двух декартовых системах с базисными ортами  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}'_i$  (рис. 2) даёт

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v'_i \mathbf{e}'_i,$$

где

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = v'_k \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i,$$

$$v'_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_i = v_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i.$$

\* И какое же направление у нуль-вектора (“vanishing”исчезающего вектора)  $\mathbf{0}$  с нулевой длиной  $\|\mathbf{0}\| = 0$ ? (Нулевой вектор без магнитуды кончается точно там же, где он начинается и поэтому он никуда не направлен, его направление *не определено*.)

Возникшие тут двухиндексные объекты (двумерные массивы)  $o_{k'i} \equiv e'_k \cdot e_i$  и  $o_{ki'} \equiv e_k \cdot e'_i$  используются для укорочения формул.

“ $\cdot$ ”-произведение (dot product) двух векторов коммутативно — то есть, обмен местами множителей не меняет результат. Так что

$$o_{k'i} = e'_k \cdot e_i = \cos \angle(e'_k, e_i) = \cos \angle(e_i, e'_k) = e_i \cdot e'_k = o_{ik'}, \quad (1.3a)$$

$$o_{ki'} = e_k \cdot e'_i = \cos \angle(e_k, e'_i) = \cos \angle(e'_i, e_k) = e'_i \cdot e_k = o_{i'k}. \quad (1.3b)$$

Строки равенств (1.3a) и (1.3b) взаимно-обратны по умножению

$$o_{k'i} o_{ki'} = o_{ki'} o_{k'i} = 1, \quad o_{k'i} o_{i'k} = o_{i'k} o_{k'i} = 1.$$

Умножение ортогональной матрицы на компоненты любого вектора сохраняет длину этого вектора:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v'_i v'_i = o_{i'k} v_k o_{i'n} v_n = v_n v_n$$

— этот вывод **опирается на** (??).

Ортогональное преобразование компонент вектора

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_i = v_k e_k \cdot e'_i = e'_i \cdot e_k v_k = o_{i'k} v_k = v'_i \quad (1.4)$$

иногда используется для определения самого вектора. Если в каждом ортонормальном базисе  $e_i$  известна тройка чисел  $v_i$ , и с вращением базиса как целого он преобразуется согласно (1.4). тогда эта тройка компонент представляет инвариантный объект — вектор  $\mathbf{v}$ .

## § 2. Тензор и его компоненты

**К**огда в каждом ортонормальном базисе  $e_i$  имеем набор девяти ( $3^2 = 9$ ) чисел  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), и этот набор преобразуется во время перехода к новому (повёрнутому) ортонормальному базису  $e'_i$  как

$$B'_{ij} = e'_i \cdot e_m B_{mn} e_n \cdot e'_j = e'_i \cdot e_m e'_j \cdot e_n B_{mn} = o_{i'm} o_{j'n} B_{mn}, \quad (2.1)$$

тогда этот набор компонент представляет инвариантный объект — тензор второй сложности (второй валентности, бивалентный)  ${}^2B$ .

Иными словами, тензор  ${}^2B$  проявляется в каждом базисе совокупностью своих компонент  $B_{ij}$ , меняющейся вместе с базисом согласно (2.1).

Ключевой пример тензора второй сложности — диада. Имея два вектора  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ , в каждом базисе  $\mathbf{e}_i$  положим  $d_{ij} \equiv a_i b_j$ . Легко увидеть как компоненты  $d_{ij}$  преобразуются согласно (2.1):

$$a'_i = o_{i'm} a_m, \quad b'_j = o_{j'n} b_n \Rightarrow d'_{ij} = a'_i b'_j = o_{i'm} a_m o_{j'n} b_n = o_{i'm} o_{j'n} d_{mn}.$$

Получающийся тензор  ${}^2\mathbf{d}$  называется диадным произведением (dyadic product) или просто диадой (dyad) и пишется как  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  или  $\mathbf{ab}$ . Я выбираю запись “ ${}^2\mathbf{d} = \mathbf{ab}$ ”, без символа  $\otimes$ .

Существенным экземпляром двухвалентного тензора является единичный тензор (другие именованя — единичная диада, тождественный тензор и метрический тензор). Пусть для любого ортонормального (декартова, cartesian) базиса  $E_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ . Это действительно компоненты тензора, (2.1) актуально:  $E'_{mn} = o_{m'i} o_{n'j} E_{ij} = o_{m'i} o_{n'i} = \delta_{mn}$ . Я пишу этот тензор как  $\mathbf{E}$  (другие популярные варианты —  $\mathbf{I}$  и  ${}^2\mathbf{1}$ ).

Неизменяемость компонент при любом повороте делает тензор  $\mathbf{E}$  изотропным. Ненулевых (неисчезающих) изотропных векторов не бывает (все компоненты нуль-вектора (“vanishing”)исчезающего вектора”)  $\mathbf{0}$  равны нулю в любом базисе).

Следующий пример относится к линейному преобразованию (линейному отображению) векторов.

Если  $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$  есть линейная (сохраняющая сложение и умножение на число) функция от  $\mathbf{a} = a_j \mathbf{e}_j$ , то  $b_i = c_{ij} a_j$  в каждом базисе. Коэффициенты преобразования  $c_{ij}$  меняются, когда базис вращается:

$$b'_i = c'_{ij} a'_j = o_{i'k} b_k = o_{i'k} c_{kn} a_n, \quad a_n = o_{j'n} a'_j \Rightarrow c'_{ij} = o_{i'k} o_{j'n} c_{kn}.$$

Оказывается, множество двухиндексных объектов  $c_{ij}$ ,  $c'_{ij}$ , ..., описывающих одно и то же линейное отображение  $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ , но в разных базисах, представляет один инвариантный объект — тензор второй сложности  ${}^2\mathbf{c}$ . И многие авторы книг вводят тензоры таким путём, посредством линейных отображений (линейных преобразований).

И последний пример — билинейная форма  $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f_{ij} a_i b_j$ , где  $f_{ij}$  — коэффициенты,  $a_i$  и  $b_j$  — компоненты векторных аргументов

$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ . Результат  $F$  инвариантен (независим от базиса) с преобразованием (2.1) для коэффициентов  $f_{ij}$ :

$$F' = f'_{ij} a'_i b'_j = f_{mn} \underbrace{a_m}_{o'_{i'm}} b_n = F \Leftrightarrow f'_{ij} = o'_{i'm} o_{j'n} f_{mn}.$$

Если  $f_{ij} = \delta_{ij}$ , то  $F = \delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i$  — “•”-произведение (dot product, скалярное произведение) двух векторов. Когда оба аргумента одинаковые, такой однородный многочлен (полином) второй степени (квадратный) от компонент одного вектора  $F(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = f_{ij} a_i a_j$  называется квадратичной формой.

Теперь о более сложных тензорах (валентности больше двух). Тензор третьей сложности  ${}^3C$  представляется совокупностью  $3^3 = 27$  чисел  $C_{ijk}$ , меняющихся с поворотом базиса как

$$C'_{ijk} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_p \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_q \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_r C_{pqr} = o'_{i'p} o_{j'q} o_{k'r} C_{pqr}. \quad (2.2)$$

Первичный пример — триада от трёх векторов  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$  и  $\mathbf{c} = c_k \mathbf{e}_k$

$$t_{ijk} \equiv a_i b_j c_k \Leftrightarrow {}^3t = \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}.$$

Видно, что ортогональные преобразования (2.2) и (2.1) — результаты “повторения” векторного (1.4). Читатель легко составит преобразование компонент для тензора любой сложности и напишет соответствующую полиаду как пример.

Векторы с преобразованием (1.4) это тензоры первой сложности (моновалентные тензоры).

Наименее сложные объекты — скаляры или тензоры нулевой сложности. Скаляр это одно ( $3^0 = 1$ ) число, которое не зависит от базиса: энергия, масса, температура и др. Но что такое компоненты, к примеру, вектора  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ ,  $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ ? Если не скаляры, то что? Здесь не может быть простого ответа. В каждом отдельном базисе,  $\mathbf{e}_i$  — векторы и  $v_i$  — скаляры.

### § 3. Тензорная алгебра, или операции с тензорами

Целая тензорная алгебра может быть построена на основе лишь пяти (четырёх без равенства “=”) операций. Этот параграф — про них.

Итак, тензорная алгебра состоит из пяти операций (действий).

### *Равенство*

Эта операция показывает, равен ли один тензор (“слева”) другому тензору (“справа”). Тензоры могут быть равны лишь тогда, когда их сложности (валентности) одинаковы. Тензоры разных валентностей не могут быть равны или не равны.

$$\dots \quad (3.1)$$

....

### *Линейная комбинация*

Первое **линейная комбинация**, оно объединяет сложение и умножение на число. Аргументы этого действия и результат — одинаковой сложности. Для двух тензоров:

$$\lambda a_{ij\dots} + \mu b_{ij\dots} = c_{ij\dots} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{c}. \quad (3.2)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты-скаляры;  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — тензоры одной и той же сложности. Легко показать, что компоненты результата  $\mathbf{c}$  удовлетворяют ортогональному преобразованию типа (2.1).

“Разложение вектора по базису” — представление вектора суммой  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$  — это не что иное как линейная комбинация векторов базиса  $\mathbf{e}_i$  с коэффициентами  $v_i$ .

### *Умножение тензоров*

Второе действие это **умножение (тензорное произведение, прямое произведение)**. Оно принимает аргументы любых сложностей, возвращая результат суммарной сложности. Примеры:

$$\begin{aligned} v_i a_{jk} = C_{ijk} &\Leftrightarrow \mathbf{v}^2 \mathbf{a} = {}^3\mathbf{C}, \\ a_{ij} B_{abc} = D_{ijabc} &\Leftrightarrow {}^2\mathbf{a} {}^3\mathbf{B} = {}^5\mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Преобразование совокупности компонент результата, такой как  $C_{ijk} = v_i a_{jk}$ , при повороте базиса — ортогональное, подобное (2.2), посему тут нет сомнений, что эта совокупность есть набор компонент тензора.



Первичный и уже знакомый (по §2) подвид умножения — диадное произведение двух векторов  ${}^2\mathbf{A} = \mathbf{bc}$ .

### Свёртка

Третье действие называется **свёрткой (contraction)**. Оно применяется к бивалентным и более сложным тензорам. Это действие над одним тензором, без других “участников”. Грубо говоря, свёртывание тензора есть суммирование его компонент по какой-либо паре индексов. В результате сложность тензора уменьшается на два.

Для трёхвалентного тензора  ${}^3\mathbf{D}$  возможны три свёртки. Они дают векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  с компонентами

$$a_i = D_{kki}, \quad b_i = D_{kik}, \quad c_i = D_{ik k}. \quad (3.4)$$

Поворот базиса

$$a'_i = D'_{kki} = \underbrace{o_{k'p} o_{k'q} o_{i'r}}_{\delta_{pq}} D_{pqr} = o_{i'r} D_{ppr} = o_{i'r} a_r$$

показывает “тензорную природу” как результат свёртки.

Для тензора второй сложности возможен лишь один вариант свёртки, дающий скаляр, известный как след (trace)  
 $\mathbf{B}_\bullet \equiv \text{trace } \mathbf{B} \equiv \text{I}(\mathbf{B}) = B_{kk}.$

След единичного тензора (“свёртка дельты Кронекера”) равен размерности пространства

$$\text{trace } \mathbf{E} = \mathbf{E}_\bullet = \delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

### Жонглирование индексами, транспонирование

Четвёртое действие также применимо к одному тензору второй и больших сложностей. Оно именуется как **перестановка индексов (index swap)**, **жонглирование индексами (index juggling)**, **транспонирование (transposing)**. Из компонент тензора возникает новая совокупность с другой последовательностью индексов, сложность результата остаётся той же. Для примера, трёхвалентный тензор  ${}^3\mathbf{D}$  может дать тензоры  ${}^3\mathbf{A}$ ,  ${}^3\mathbf{B}$ ,  ${}^3\mathbf{C}$  с компонентами

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{A} &= {}^3\mathbf{D}_{1\rightleftharpoons 2} \Leftrightarrow A_{ijk} = D_{jik}, \\ {}^3\mathbf{B} &= {}^3\mathbf{D}_{1\rightleftharpoons 3} \Leftrightarrow B_{ijk} = D_{kji}, \\ {}^3\mathbf{C} &= {}^3\mathbf{D}_{2\rightleftharpoons 3} \Leftrightarrow C_{ijk} = D_{ikj}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для бивалентного тензора возможно лишь одно транспонирование:  $\mathbf{A}^\top \equiv \mathbf{A}_{1\rightleftharpoons 2} = \mathbf{B} \Leftrightarrow B_{ij} = A_{ji}$ . Очевидно,  $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$ .

Для диадного умножения двух векторов,  $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}^\top$ .

### Комбинирование операций

Четыре представленных операции (действия) могут быть скомбинированы в разных последовательностях.

Комбинация умножения (3.3) и свёртки (3.4) — “•”-произведение (dot product) — самая часто используемая. В прямой безиндексной записи это обозначается крупной точкой “•”, которая показывает свёртку по соседним индексам:

$$\mathbf{a} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{c} \Leftrightarrow a_i = B_{ij}c_j, \quad \mathbf{A} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{C} \Leftrightarrow A_{ij} = B_{ik}C_{kj}. \quad (3.6)$$

Определяющее свойство единичного тензора — это нейтральный элемент для диадного произведения с последующей свёрткой по соседним индексам (“•”-произведения)

$${}^n\mathbf{a} \bullet \mathbf{E} = \mathbf{E} \bullet {}^n\mathbf{a} = {}^n\mathbf{a} \quad \forall {}^n\mathbf{a} \quad \forall n > 0. \quad (3.7)$$

В коммутативном скалярном произведении двух векторов точка представляет то же самое: диадное произведение и последующая свёртка

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = (\mathbf{a}\mathbf{b})_\bullet = a_ib_i = b_ia_i = (\mathbf{b}\mathbf{a})_\bullet = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}. \quad (3.8)$$

Следующее тождество описывает как обменять местами множители для “•”-произведения (dot product’a) двух тензоров второй сложности

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \bullet \mathbf{Q} &= (\mathbf{Q}^\top \bullet \mathbf{B}^\top)^\top \\ (\mathbf{B} \bullet \mathbf{Q})^\top &= \mathbf{Q}^\top \bullet \mathbf{B}^\top. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для двух диад  $\mathbf{B} = \mathbf{b}\mathbf{d}$  и  $\mathbf{Q} = \mathbf{p}\mathbf{q}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}\mathbf{d} \bullet \mathbf{p}\mathbf{q})^\top &= \mathbf{p}\mathbf{q}^\top \bullet \mathbf{b}\mathbf{d}^\top \\ d_ip_i \mathbf{b}\mathbf{q}^\top &= \mathbf{q}\mathbf{p} \bullet \mathbf{d}\mathbf{b} \\ d_ip_i \mathbf{q}\mathbf{b} &= \mathbf{p}_id_i \mathbf{q}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Для вектора и бивалентного тензора

$$\mathbf{c} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B}^\top \bullet \mathbf{c}, \quad \mathbf{B} \bullet \mathbf{c} = \mathbf{c} \bullet \mathbf{B}^\top. \quad (3.10)$$

Свёртка может повторяться два раза или больше:  
 $(A \cdot B)_{\bullet} = A \cdot B = A_{ij} B_{ji}$ , и вот полезные равенства для тензоров второй сложности

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= B \cdot A, \quad d \cdot A \cdot b = A \cdot bd = bd \cdot A = b_j d_i A_{ij}, \\
 A \cdot B &= A^T \cdot B^T = A_{ij} B_{ji}, \quad A \cdot B^T = A^T \cdot B = A_{ij} B_{ij}, \\
 A \cdot E &= E \cdot A = A_{\bullet} = A_{jj}, \\
 A \cdot B \cdot E &= A_{ij} B_{jk} \delta_{ki} = A \cdot B, \quad A \cdot A \cdot E = A \cdot A, \\
 A \cdot B \cdot C &= A \cdot B \cdot C = C \cdot A \cdot B = A_{ij} B_{jk} C_{ki}, \\
 A \cdot B \cdot C \cdot D &= A \cdot B \cdot C \cdot D = A \cdot B \cdot C \cdot D = \\
 &= D \cdot A \cdot B \cdot C = A_{ij} B_{jk} C_{kh} D_{hi}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

#### § 4. Полиадное представление (разложение)

Ранее в § 2 тензор был представлен как некий инвариантный объект, проявляющий себя в каждом базисе совокупностью чисел (компонент). Такое представление типично для большинства книг о тензорах. Индексная запись может быть удобна, особенно когда используются только прямоугольные координаты, но очень часто это не так. И подходящий случай — физика упругих континуумов: ей нужен более изящный, более мощный и совершенный аппарат прямого тензорного исчисления, оперирующий с безындексными инвариантными объектами.

Линейная комбинация  $v = v_i e_i$  из разложения (1.1) соединяет вектор  $v$  с базисом  $e_i$  и компонентами  $v_i$  вектора в том базисе. Вскоре мы получим похожее соотношение для тензора любой сложности.

Любой бивалентный тензор  ${}^2B$  имеет девять компонент  $B_{ij}$  в каждом базисе. Число различных диад  $e_i e_j$  для одного и того же базиса — тоже девять ( $3^2$ ). Линейное комбинирование этих диад с коэффициентами  $B_{ij}$  даёт сумму  $B_{ij} e_i e_j$ . Это тензор, но каковы его компоненты, и как это представление или не меняется с поворотом базиса?

Компоненты построенной суммы

$$(B_{ij} e_i e_j)_{pq} = B_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = B_{pq}$$

суть компоненты тензора  ${}^2\mathbf{B}$ . И с поворотом базиса

$$B'_{ij}e'_ie'_j = o_{i'p}o_{j'q}B_{pq}o_{i'n}e_n o_{j'm}e_m = \delta_{pn}\delta_{qm}B_{pq}e_ne_m = B_{pq}e_pe_q.$$

Сомнения отпали: тензор второй сложности может быть представлен как линейная комбинация

$${}^2\mathbf{B} = B_{ij}e_ie_j \quad (4.1)$$

— диадное разложение бивалентного тензора.

Для единичного тензора

$$\mathbf{E} = E_{ij}e_ie_j = \delta_{ij}e_ie_j = e_ie_i = e_1e_1 + e_2e_2 + e_3e_3,$$

вот почему  $\mathbf{E}$  называется единичной диадой.

Полиадные представления типа (4.1) помогают оперировать с тензорами намного проще:

$$\begin{aligned} v \cdot {}^2\mathbf{B} &= v_ie_i \cdot e_j B_{jk}e_k = v_i\delta_{ij}B_{jk}e_k = v_iB_{ik}e_k, \\ e_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot e_j &= e_i \cdot B_{pq}e_pe_q \cdot e_j = B_{pq}\delta_{ip}\delta_{qj} = B_{ij} = {}^2\mathbf{B} \cdot \cdot e_j e_i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

## § 5. Матрицы, перестановки и определители

Матрицы это удобный инструмент для решения систем линейных уравнений и для упорядочивания элементов. У любой матрицы одно и то же число элементов в каждой строке и одно и то же число элементов в каждом столбце.

Тебе нужны двумерные массивы? Матрицы могут быть представлены как таблицы, полные строк и столбцов.

Ты хочешь прямоугольное упорядочивание твоих элементов? Матрицы полны чисел и выражений в строках и столбцах.

Ты знаешь, что матрицы иногда называют массивами?

### *Размерности матрицы*

Матрицы бывают всех размеров, которые и есть размерности.

Размерность матрицы состоит из числа строк, затем знака умножения (“ $\times$ ” используется чаще всего) а затем числа столбцов.

Примеры.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \dots\dots$$

Matrix  $[A]$  is a  $3 \times 3$  matrix, because it has 3 rows and 3 columns. Matrix  $[B]$  has 2 rows and 4 columns, so its dimension is  $2 \times 4$ . Matrix  $[C]$  is a column matrix (that is a matrix with just one column), and its dimension is  $3 \times 1$ . And  $[D]$  is a row matrix with dimension  $1 \times 6$ .

### *Матричная алгебра*

Матричная алгебра включает линейные операции — сложение матриц и умножение на скаляр.

Размерность матрицы существенна для бинарных операций, то есть для операций с участием двух матриц.

Сложение или вычитание двух матриц возможно только если они имеют те же размеры.

### *5.1. Умножение матриц*

.....

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} \end{bmatrix}_{m \times n} = \dots$$

Матрица результата, известная как “матричное произведение”, имеет число строк первой матрицы-сомножителя и число столбцов второй матрицы.

.....

### *Квадратные матрицы*

....

### *Матрицы и одномерные массивы*

Два индекса таблицы — больше, чем единственный индекс одномерного массива. Из-за этого одномерный массив может быть представлен как таблица строк или как таблица столбцов.

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \end{bmatrix},$$

либо вертикальные таблицы

$$\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}.$$

$$\det_{i,j} \delta_{ij} = 1$$

...

символы чётности перестановки через детерминант

$$e_{pqr} = e_{ijk} \delta_{pi} \delta_{qj} \delta_{rk} = e_{ijk} \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr},$$

$$e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

...

Определитель не чувствителен к транспонированию:

$$\det_{i,j} A_{ij} = \det_{i,j} A_{ji} = \det_{j,i} A_{ij}.$$

...

“Определитель матричного произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц”

$$\det_{i,k} B_{ik} \det_{k,j} C_{kj} = \det_{i,j} B_{ik} C_{kj} \quad (5.2)$$

$$e_{fgh} \det_{m,n} B_{ms} C_{sn} = e_{pqr} B_{fi} C_{ip} B_{gj} C_{jq} B_{hk} C_{kr}$$

$$e_{fgh} \det_{m,s} B_{ms} = e_{ijk} B_{fi} B_{gj} B_{hk}$$

$$e_{ijk} \det_{s,n} C_{sn} = e_{pqr} C_{ip} C_{jq} C_{kr}$$

$$e_{fgh} e_{ijk} \det_{m,s} B_{ms} \det_{s,n} C_{sn} = e_{ijk} e_{pqr} B_{fi} B_{gj} B_{hk} C_{ip} C_{jq} C_{kr}$$

...

Определитель компонент бивалентного тензора инвариантен, он не меняется с поворотом базиса

$$A'_{ij} = o_{i'm} o_{j'n} A_{mn}$$

## § 6. Векторное произведение

По привычным представлениям, “ $\times$ ”-произведение (“cross product”, “векторное произведение”, иногда “oriented area product”) двух векторов есть вектор, направленный перпендикулярно плоскости

сомножителей, длина которого равна площади параллелограмма, охватываемого сомножителями

$$\| \mathbf{a} \times \mathbf{b} \| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Однако, “ $\times$ ”-произведение — не вполне вектор, поскольку оно не полностью инвариантно.

Сомножители “ $\times$ ”-произведения  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  определяют направление результата в пространстве, с точностью до знака рис. 3.

Как только ты выбираешь как положительное “правостороннюю” или “левостороннюю” ориентацию пространства, одно направление из двух возможных, тогда результаты “ $\times$ ”-произведений становятся полностью определёнными.

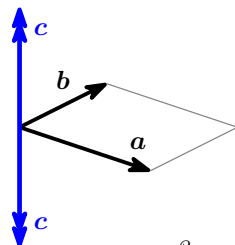


рисунок 3

“Хиральный” значит ассиметричный in such a way that. вещь и её зеркальное отражение не совмещаются, a picture cannot be superposed on its mirror image by any combination of rotations and translations.

Объект хирален, если он отличим от своего отражения.

Векторы обычно измеряются, используя какой-нибудь базис  $\mathbf{e}_i$ . Они раскладываются на линейные комбинации вида  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ . Так что ориентация пространства эквивалентна ориентации последовательной тройки базисных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Это означает, что последовательность базисных векторов становится значимой (для линейных комбинаций последовательность слагаемых ни на что не влияет).

Если два базиса состоят из разных последовательностей одних и тех же векторов в ориентированном пространстве, то их ориентации отличаются некоторой перестановкой.

Ориентация пространства есть (нечто вроде) асимметрии. Эта асимметрия делает невозможным повторение отражения посредством любых вращений\*

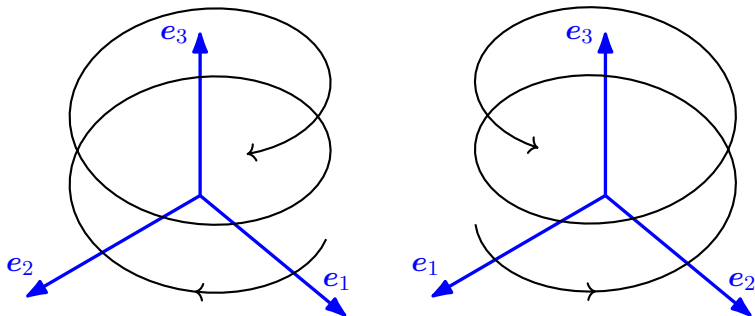


рисунок 4

Псевдовектор это похожий на вектор объект, инвариантный при любом повороте. \*\*.

... put the figure here ...

Кроме редких случаев, направление полностью инвариантного (полярного) вектора поменяется с отражением.

Псевдовектор (аксиальный вектор), в отличие от полярного вектора, не меняет ортогональную плоскости отражения компоненту, и оказывается перевёрнутым относительно полярных векторов и геометрии всего пространства. Это случается из-за того, что знак (и, соответственно, направление) каждого аксиального вектора меняется вместе с изменением знака “ $\times$ ”-произведения — что соответствует отражению.

Инаковость псевдовекторов сужает разнообразие формул: псевдовектор не складывается с вектором. Формула  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

\* Применяя лишь повороты, невозможно заменить левую руку фигуры человека на правую руку. Но это возможно отражением фигуры в зеркале.

\*\* Повороты не могут поменять ориентацию тройки векторов базиса, только отражение может.



корректна, поскольку  $\omega$  там — псевдовектор, и с векторным произведением два “псевдо” дают  $(-1)^2 = 1$  (“взаимно компенсируют друг друга”).

Тензор чётности перестановок, объёмометрический тензор третьей сложности

$${}^3\epsilon = \epsilon_{[ijk]} e_i e_j e_k, \quad \epsilon_{[ijk]} \equiv e_i \times e_j \cdot e_k \quad (6.1)$$

с компонентами  $\epsilon_{[ijk]}$ , равными “тройным” (“смешанным”, “векторно-скалярным”) произведениям векторов базиса.

Абсолютная величина (модуль) всякой ненулевой компоненты тензора  ${}^3\epsilon$  равна объёму  $\sqrt{g}$  параллелепипеда, натянутого на базис. Для базиса  $e_i$  из попарно перпендикулярных векторов единичной длины  $\sqrt{g} = 1$ .

Тензор  ${}^3\epsilon$  изотропен, его компоненты постоянны *enanti* независимы от поворотов базиса. Но отражение — изменение ориентации тройки базисных векторов (перемена “направления винта”) — меняет знак  ${}^3\epsilon$ , так что это псевдотензор (аксиальный тензор).

Если  $e_1 \times e_2 = e_3$ , то  $e_i$  есть ориентированная положительно тройка, произвольно выбираемая из двух вариантов (рис. 3). В таком случае компоненты  ${}^3\epsilon$  равны символу чётности перестановок  $\epsilon_{[ijk]} = e_{ijk}$ . Когда же  $e_1 \times e_2 = -e_3$ , тогда тройка  $e_i$  ориентирована отрицательно (или “зеркальная”). Для зеркальных троек  $\epsilon_{[ijk]} = -e_{ijk}$  (а  $e_{ijk} = -e_i \times e_j \cdot e_k$ ).

С тензором Лёви-Чивиты  ${}^3\epsilon$  возможно по-новому взглянуть на векторное произведение:

$$\begin{aligned} \epsilon_{[ijk]} &= e_i \times e_j \cdot e_k \Leftrightarrow e_i \times e_j = \epsilon_{[ijk]} e_k, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_i e_i \times b_j e_j = a_i b_j e_i \times e_j = a_i b_j \epsilon_{[ijk]} e_k = \\ &= b_j a_i e_j e_i \cdot \epsilon_{[mnk]} e_m e_n e_k = \mathbf{b} \mathbf{a} \cdot \cdot {}^3\epsilon, \\ &= a_i \epsilon_{[ijk]} e_k b_j = -a_i \epsilon_{[ikj]} e_k b_j = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Так что, векторное произведение не есть ещё одно новое, полностью отдельное действие. С тензором Levi-Civita’ы оно сводится к четырём уже описанным (§ 3) и применимо к тензорам любой сложности.

“Векторное произведение” это всего лишь dot product — комбинация умножения и свёртки (§ 3) — с участием тензора  ${}^3\epsilon$ . Такие комбинации возможны с любыми тензорами:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times {}^2\mathbf{B} &= a_i \mathbf{e}_i \times B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \underbrace{a_i B_{jk} \in_{[ijn]} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_k}_{-a_i \in_{[ijn]} B_{jk}} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^2\mathbf{B}, \\
 {}^2\mathbf{C} \times d\mathbf{b} &= C_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \times d_p b_q \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q = \mathbf{e}_i C_{ij} d_p \underbrace{\in_{[jpk]} \mathbf{e}_k b_q \mathbf{e}_q}_{-\in_{[pjk]} = -\in_{[jpk]}} = \\
 &= -{}^2\mathbf{C} d \cdot {}^3\epsilon b = -{}^2\mathbf{C} \cdot {}^3\epsilon \cdot d\mathbf{b}, \\
 \mathbf{E} \times \mathbf{E} &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = \underbrace{-\in_{[ijk]} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k}_{+\in_{[ijk]} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j} = -{}^3\epsilon. \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Последнее равенство связывает изотропные тензоры второй и третьей сложностей.

Обобщая на все тензоры ненулевой сложности

$${}^n\boldsymbol{\xi} \times {}^m\boldsymbol{\zeta} = -{}^n\boldsymbol{\xi} \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^m\boldsymbol{\zeta} \quad \forall {}^n\boldsymbol{\xi}, {}^m\boldsymbol{\zeta} \quad \forall n > 0, m > 0. \quad (6.4)$$

Когда один из операндов — единичный (метрический) тензор, из (6.4) и (3.7)  $\forall {}^n\boldsymbol{\Upsilon} \quad \forall n > 0$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \times {}^n\boldsymbol{\Upsilon} &= -\mathbf{E} \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^n\boldsymbol{\Upsilon} = -{}^3\epsilon \cdot {}^n\boldsymbol{\Upsilon}, \\
 {}^n\boldsymbol{\Upsilon} \times \mathbf{E} &= -{}^n\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\epsilon \cdot \mathbf{E} = -{}^n\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\epsilon.
 \end{aligned}$$

Векторное произведение двух векторов не коммутативно, но антикоммутативно:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} \mathbf{b}, \\
 \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{b} \mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{b} \mathbf{a}, \\
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon = \mathbf{b} \mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.
 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Для любого бивалентного тензора  ${}^2\mathbf{B}$  и тензора первой сложности (вектора)  $\mathbf{a}$

$${}^2\mathbf{B} \times \mathbf{a} = \mathbf{e}_i B_{ij} \mathbf{e}_j \times a_k \mathbf{e}_k = (-a_k \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_j B_{ij} \mathbf{e}_i)^\top = -(\mathbf{a} \times {}^2\mathbf{B}^\top)^\top.$$

Однако, в частном случае единичного тензора  $\mathbf{E}$  и вектора

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \times \mathbf{a} &= -(\mathbf{a} \times \mathbf{E}^\top)^\top = -(\mathbf{a} \times \mathbf{E})^\top = \mathbf{a} \times \mathbf{E}, \\
 \mathbf{E} \times \mathbf{a} &= \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a}.
 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Справедливо такое соотношение

$$e_{ijk}e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

○ Доказательство начнём с представления символов чётности перестановки как определителей (5.1).  $e_{ijk} = \pm \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k$  по строкам,  $e_{pqr} = \pm \mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_r$  по столбцам, с “—” для “левой” тройки

$$e_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix}, \quad e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{q1} & \delta_{r1} \\ \delta_{p2} & \delta_{q2} & \delta_{r2} \\ \delta_{p3} & \delta_{q3} & \delta_{r3} \end{bmatrix}.$$

Левая часть (6.7) есть произведение  $e_{ijk}e_{pqr}$  этих определителей. Но  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  — определитель произведения матриц равен произведению определителей (5.2). В матрице-произведении элемент  $[\dots]_{11}$  равен  $\delta_{is}\delta_{ps} = \delta_{ip}$ , как и в (6.7); **легко проверить и другие фрагменты.** ●

Свёртка (6.7) приводит к полезным формулам

$$\begin{aligned} e_{ijk}e_{pqk} &= \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & 3 \end{bmatrix} = \\ &= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{kp} + \delta_{ik}\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{kp} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jk}\delta_{kq} = \\ &= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} + \delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} = \\ &= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \\ e_{ijk}e_{pjk} &= \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}, \\ e_{ijk}e_{ijk} &= 2\delta_{ii} = 6. \end{aligned}$$

Или коротко

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \quad e_{ijk}e_{pjk} = 2\delta_{ip}, \quad e_{ijk}e_{ijk} = 6. \quad (6.8)$$

Первая из этих формул даёт представление двойного векторно-го произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_i \mathbf{e}_i \times \epsilon_{[pqj]} b_p c_q \mathbf{e}_j = \epsilon_{[kij]} \epsilon_{[pqj]} a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = \\ &= (\delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip}) a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = a_i b_k c_i \mathbf{e}_k - a_i b_i c_k \mathbf{e}_k = \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{cb} - \mathbf{bc}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} - \mathbf{cb} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

По другой интерпретации, dot product диады и вектора не коммутативен:  $\mathbf{bd} \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{c} \cdot \mathbf{bd}$ , и эта разница может быть выражена как

$$\mathbf{bd} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{bd} = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{d}). \quad (6.10)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{cb} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{ca} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{ac}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

Тем же путём выводится

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ba} - \mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}. \quad (6.11)$$

И следующие тождества для любых двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{E} &= \in_{[ijk]} a_i b_j e_k \times e_n e_n = a_i b_j \in_{[ijk]} \in_{[knq]} e_q e_n = \\ &= a_i b_j (\delta_{in} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jn}) e_q e_n = a_i b_j e_j e_i - a_i b_j e_i e_j = \\ &= \mathbf{ba} - \mathbf{ab}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon) \cdot (\mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon) = \\ &= a_i \in_{[ipn]} e_p e_n \cdot b_j \in_{[jsk]} e_s e_k = a_i b_j \in_{[ipn]} \in_{[njk]} e_p e_k = \\ &= a_i b_j (\delta_{ik} \delta_{pj} - \delta_{ij} \delta_{pk}) e_p e_k = a_i b_j e_j e_i - a_i b_i e_k e_k = \\ &= \mathbf{ba} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{bE}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Наконец, ещё одно соотношение между изотропными тензорами второй и третьей сложности:

$${}^3\epsilon \cdot {}^3\epsilon = \in_{[ijk]} e_i \in_{[kjn]} e_n = -2\delta_{in} e_i e_n = -2\mathbf{E}. \quad (6.14)$$

## § 7. Симметричные и антисимметричные тензоры

Тензор, который не изменяется при перестановке какой-либо пары своих индексов, называется симметричным для той пары индексов. А если тензор меняет знак  $(+/-)^*$  при перестановке какой-нибудь пары индексов, то он называется антисимметричным или кососимметричным для той пары индексов.

Тензор чётности перестановок  ${}^3\epsilon$  антисимметричен по любой паре индексов, он полностью (совершенно, абсолютно) антисимметричен (кососимметричен).

\*  $\cdot (-1)$

Тензор второй сложности  $\mathbf{B}$  симметричен, если  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\top$ . Когда транспонирование меняет знак тензора  $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$ , тогда он антисимметричен (кососимметричен).

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{C}^S + \mathbf{C}^A, \quad \mathbf{C}^\top = \mathbf{C}^S - \mathbf{C}^A; \\ \mathbf{C}^S &\equiv \frac{1}{2} (\mathbf{C} + \mathbf{C}^\top), \quad \mathbf{C}^A \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{C}^\top). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для диады  $\mathbf{cd} = \mathbf{cd}^S + \mathbf{cd}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{cd} + \mathbf{dc}) + \frac{1}{2} (\mathbf{cd} - \mathbf{dc})$ .

Произведение двух симметричных тензоров  $\mathbf{C}^S \cdot \mathbf{D}^S$  симметрично далеко не всегда, а лишь когда  $\mathbf{D}^S \cdot \mathbf{C}^S = \mathbf{C}^S \cdot \mathbf{D}^S$ , ведь по (??)  $(\mathbf{C}^S \cdot \mathbf{D}^S)^\top = \mathbf{D}^S \cdot \mathbf{C}^S$ .

В нечётномерных пространствах любой антисимметричный тензор второй сложности необратим, определитель матрицы компонент для него — нулевой.

Существует взаимно-однозначное соответствие между антисимметричными тензорами второй сложности и (псевдо)векторами. Компоненты кососимметричного тензора полностью определяются тройкой чисел (диагональные элементы матрицы компонент — нули, недиагональные — попарно противоположны). Dot product кососимметричного  $\mathbf{A}$  и какого-нибудь тензора  ${}^n\xi$  однозначно соответствует cross product'у псевдовектора  $\mathbf{a}$  и того же тензора  ${}^n\xi$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{A} \cdot {}^n\xi \Leftrightarrow \mathbf{a} \times {}^n\xi = \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{A} = \mathbf{A}^A \quad \forall {}^n\xi \quad \forall n > 0, \\ \mathbf{d} &= {}^n\xi \cdot \mathbf{A} \Leftrightarrow {}^n\xi \times \mathbf{a} = \mathbf{d} \quad \forall \mathbf{A} = \mathbf{A}^A \quad \forall {}^n\xi \quad \forall n > 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Раскроем это соответствие  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{a})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot {}^n\xi &= \mathbf{a} \times {}^n\xi \\ A_{hi} e_h e_i \cdot \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q &= a_i e_i \times \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q \\ A_{hj} \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q &= a_i \in [ijh] \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q \\ A_{hj} &= a_i \in [ijh] \\ A_{hj} &= -a_i \in [ihj] \\ \mathbf{A} &= -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \end{aligned}$$

Так же из  ${}^n\xi \cdot \mathbf{A} = {}^n\xi \times \mathbf{a}$  получается  $\mathbf{A} = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a}$ .

Или проще, согласно (6.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \times \mathbf{a} = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

(Псевдо)вектор  $\mathbf{a}$  называется сопутствующим для тензора  $\mathbf{A}$ .

В общем, для взаимно-однозначного соответствия между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{a}$  имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon = \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \left(-\frac{1}{2} {}^3\epsilon \cdot {}^3\epsilon\right) = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\epsilon.\end{aligned}\quad (7.3)$$

Компоненты кососимметричного тензора  $\mathbf{A}$  через компоненты сопутствующего псевдовектора  $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} = -\epsilon_{[ijk]} e_i e_j a_k, \\ A_{ij} &= -\epsilon_{[ijk]} a_k = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

и наоборот

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\epsilon = \frac{1}{2} A_{jk} \epsilon_{[kji]} e_i, \\ a_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{[ikj]} A_{jk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \epsilon_{[123]} A_{32} + \epsilon_{[132]} A_{23} \\ \epsilon_{[213]} A_{31} + \epsilon_{[231]} A_{13} \\ \epsilon_{[312]} A_{21} + \epsilon_{[321]} A_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{32} - A_{23} \\ A_{13} - A_{31} \\ A_{21} - A_{12} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Легко запоминающийся “псевдовекторный инвариант”  $\mathbf{A}_\times$  происходит из оригинального тензора  $\mathbf{A}$  заменой диадного произведения на векторное произведение

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\times &\equiv A_{ij} e_i \times e_j = -\mathbf{A} \cdot {}^3\epsilon, \\ \mathbf{A}_\times &= (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times = -2\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times = -\frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times.\end{aligned}\quad (7.4)$$

**Объяснение:**

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times \times \mathbf{E} = -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{(e_i \times e_j)}_{\epsilon_{[ijn]} e_n} \times e_k e_k \\ &= -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{\epsilon_{[nij]} \epsilon_{[nkp]}}_{\delta_{jp} \delta_{ik} - \delta_{ip} \delta_{jk}} e_p e_k = -\frac{1}{2} A_{ij} (e_j e_i - e_i e_j) \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}) = \mathbf{A}^\top = \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Сопутствующий вектор может быть введён для любого бивалентного тензора. Но только антисимметричная часть даёт здесь вклад:  $\mathbf{C}^\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}$ .

Для симметричного тензора сопутствующий вектор это ноль:

$$\mathbf{B}_\times = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^\top = \mathbf{B}.$$

С (7.4) разложение какого-либо тензора  $\mathbf{C}$  на симметричную и антисимметричную части выглядит как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^S - \frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}. \quad (7.5)$$

Для диады

$$(6.12) \Rightarrow (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E} = \mathbf{dc} - \mathbf{cd} = -2\mathbf{cd}^A, \quad (\mathbf{cd})_\times = \mathbf{c} \times \mathbf{d},$$

и её разложение

$$\mathbf{cd} = \frac{1}{2} (\mathbf{cd} + \mathbf{dc}) - \frac{1}{2} (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E}. \quad (7.6)$$

## § 8. Полярное разложение

Любой тензор второй сложности  $\mathbf{F}$  с  $\det F_{ij} \neq 0$  (не сингулярный) может быть разложен как

...

*Пример.* Polar decompose tensor  $\mathbf{C} = C_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ , где  $\mathbf{e}_k$  это попарно перпендикулярные единичные векторы и  $C_{ij}$  это компоненты тензора.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & 11 \\ 10 & -15 & 23 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O} = O_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{O}_2$$

$$O_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{S}_R, \quad \mathbf{O}^\top \cdot \mathbf{C} = \mathbf{S}_R$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_L \cdot \mathbf{O}, \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{O}^\top = \mathbf{S}_L$$

$$S_{Rij} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -10 \\ 5 & 0 & 25 \\ -10 & 25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$S_{Lij} = \begin{bmatrix} 104/5 & 47/5 & 5 \\ 47/5 & -129/5 & -10 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

...

## § 9. Собственные векторы и собственные числа

Если для какого-нибудь тензора  ${}^2\mathbf{B}$  и ненулевого вектора  $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} &= \eta \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \\ {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} &= \eta \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}, \quad ({}^2\mathbf{B} - \eta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

то  $\eta$  называется собственным числом (или характеристическим значением, eigenvalue) тензора  ${}^2\mathbf{B}$ , а ось (направление) собственного вектора  $\mathbf{a}$  называется его характеристической осью (направлением).

В компонентах это задача на собственные значения для матрицы. Однородная система линейных уравнений  $(B_{ij} - \eta \delta_{ij}) a_j = 0$  имеет ненулевое решение, если определитель матрицы компонент

$$\det_{i,j} (B_{ij} - \eta \delta_{ij})$$

равен нулю:

$$\det \begin{bmatrix} B_{11} - \eta & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} - \eta & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - \eta \end{bmatrix} = -\eta^3 + \text{chaI} \eta^2 - \text{chaII} \eta + \text{chaIII} = 0; \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} \text{chaI} &= \text{trace } {}^2\mathbf{B} = B_{kk} = B_{11} + B_{22} + B_{33}, \\ \text{chaII} &= B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} + B_{11}B_{33} - B_{13}B_{31} + B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}, \\ \text{chaIII} &= \det {}^2\mathbf{B} = \det_{i,j} B_{ij} = e_{ijk} B_{1i} B_{2j} B_{3k} = e_{ijk} B_{i1} B_{j2} B_{k3}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Корни характеристического уравнения (9.2) — собственные числа — не зависят от базиса и потому инварианты.

Коэффициенты (9.3) тоже не зависят от базиса; они называются первым, вторым и третьим характеристическими инвариантами тензора. Первый инвариант  $\text{chaI}$  это след. Он был описан ранее в § 3. Второй инвариант  $\text{chaII}$  это след присоединённой (взаимной, adjugate) матрицы — транспонированной (матрицы алгебраических дополнений)

$$\text{chaII}({}^2\mathbf{B}) \equiv \text{trace}(\text{adj } B_{ij})$$

(тяжеловато, да). Или

$$\text{chaII}({}^2\mathbf{B}) \equiv \frac{1}{2} \left[ ({}^2\mathbf{B} \cdot) {}^2\mathbf{B} - {}^2\mathbf{B} \cdot {}^2\mathbf{B} \right] = \frac{1}{2} \left[ (B_{kk})^2 - B_{ij} B_{ji} \right].$$



И третий инвариант  $\text{chaIII}$  это определитель (детерминант) матрицы компонент тензора:  $\text{chaIII}({}^2\mathbf{B}) \equiv \det {}^2\mathbf{B}$ .

Это относится ко всем тензорам второй сложности. Кроме того, в случае симметричного тензора истинно следующее:

1° Собственные значения симметричного бивалентного тензора — действительные числа.

2° Характеристические оси (направления) для различных собственных значений ортогональны друг другу.

○ Первое утверждение доказывается от противного. Если  $\eta$  — комплексный корень (9.2), соответствующий собственному вектору  $\mathbf{a}$ , то сопряжённое число  $\bar{\eta}$  тоже будет корнем (9.2). Соответствует ему собственный вектор  $\bar{\mathbf{a}}$  с сопряжёнными компонентами. И тогда

$$\begin{aligned} (9.1) \Rightarrow (\bar{\mathbf{a}} \cdot) {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} &= \eta \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} \cdot) {}^2\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\eta} \bar{\mathbf{a}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{\mathbf{a}} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}} = (\eta - \bar{\eta}) \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

Здесь слева — нуль, поскольку  $\mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot {}^2\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{a}$  и  ${}^2\mathbf{B} = {}^2\mathbf{B}^\top$ . Поэтому  $\eta = \bar{\eta}$ , то есть действительное число.

Так же просто выглядит доказательство 2°:

$$\underbrace{\mathbf{a}_2 \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_2}_{=0} = (\eta_1 - \eta_2) \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2, \quad \eta_1 \neq \eta_2 \Rightarrow \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0. \quad \bullet$$

Если корни характеристического уравнения (собственные числа) различны, то собственные векторы единичной длины  $\mathbf{e}_i$  составляют ортонормальный базис. Каковы же компоненты тензора в таком базисе?

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_k &= \sum_k \eta_k \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3 \\ {}^2\mathbf{B} \cdot \underbrace{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k}_E &= \sum_k \eta_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

В общем случае  $B_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j$ . В базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  взаимно перпендикулярных единичной длины  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  собственных векторов симметричного тензора

$$\begin{aligned} B_{11} &= \mathbf{e}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = \eta_1, \\ B_{12} &= \mathbf{e}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Матрица компонент диагональна и  ${}^2\mathbf{B} = \sum \eta_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ .

Здесь идёт суммирование по трём повторяющимся индексам, ведь используется особенный базис.

Случай кратности собственных значений рассматривается в пределе.

Если попроще  $\eta_2 \rightarrow \eta_1$ , то любая линейная комбинация векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  в пределе удовлетворяет уравнению (9.1).

Тогда любая ось в плоскости  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  становится собственной.

Когда же все три собственных числа совпадают, то любая ось в пространстве собственная.

Тогда  ${}^2\mathbf{B} = \eta \mathbf{E}$ , такие тензоры называются изотропными или “шаровыми”.

## § 10. Коллекции инвариантов симметричного бивалентного тензора

....

*“Алгебраические” инварианты*

...

*“Характеристические” инварианты*

Это коэффициенты характеристического уравнения (9.1).

...

*“Исследовательские” инварианты*

...

*“Гармонические” инварианты*

...

## § 11. Тензор поворота

Соотношение между двумя “правыми” (или двумя “левыми”) ортонормальными базисами  $\mathbf{e}_i$  и  $\hat{\mathbf{e}}_i$  может быть описано двухиндексным массивом, представленным в виде матрицы (§ 1, § 5)

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j \hat{\mathbf{e}}_j}_{\mathbf{E}} = o_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j, \quad o_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$$

(“матрицы косинусов”).

Также, поворот тензора может быть описан другим тензором, называемым тензором поворота  $\mathbf{O}$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i}_{\delta_{ji}} = \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{O} \equiv \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j = e_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + e_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + e_3 \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (11.1)$$

Компоненты  $\mathbf{O}$  и в начальном  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , и в повёрнутом  $\mathbf{e}_i$  базисах одни и те же

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_j &= \underbrace{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k}_{\delta_{ik}} \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{e}_j = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j, \\ \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j &= \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_k \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_j}_{\delta_{kj}} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j. \end{aligned} \quad (11.2)$$

В матричной записи эти компоненты  $\delta_{kj}$  представляют ???транспонированную???? матрицу косинусов  $o_{ji} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j$ :

$$\mathbf{O} = o_{ji} \hat{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_j = o_{ji} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j.$$

Spatial transformations in the 3-dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^3$  are distinguished into active or alibi transformations, and passive or alias transformations. An active transformation is a transformation which actually changes the physical position (alibi, elsewhere) of objects, which can be defined in the absence of a coordinate system; whereas a passive transformation is merely a change in the coordinate system in which the object is described (alias, other name) (change of coordinates, or change of basis). By transformation, math texts usually refer to active transformations.

Тензор  $\mathbf{O}$  соотносит два вектора — “до поворота”  $\hat{\mathbf{r}} = \rho_i \hat{\mathbf{e}}_i$  и “после поворота”  $\mathbf{r} = \rho_i \mathbf{e}_i$ . Компоненты  $\rho_i = \text{constant}$  у  $\mathbf{r}$  в повёрнутом базисе  $\mathbf{e}_i$  — такие же как у  $\hat{\mathbf{r}}$  в неподвижном базисе  $\hat{\mathbf{e}}_i$ . Так что тензор поворота описывает вращение вектора вместе с базисом. И поскольку  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \Leftrightarrow \rho_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \rho_i \hat{\mathbf{e}}_i$ , то

$$\mathbf{r} = \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (11.3)$$

(это формула поворота Rodrigues’a).

**Olinde Rodrigues.** Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendants des causes qui peuvent les produire. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome 5 (1840), pages 380–440.

Для тензора второй сложности  $\overset{\circ}{C} = C_{ij} \overset{\circ}{e}_i \overset{\circ}{e}_j$  поворот в текущую позицию  $C = C_{ij} e_i e_j$  выглядит как

$$e_i C_{ij} e_j = e_i \overset{\circ}{e}_i \cdot \overset{\circ}{e}_p C_{pq} \overset{\circ}{e}_q \cdot \overset{\circ}{e}_j e_j \Leftrightarrow C = O \cdot \overset{\circ}{C} \cdot O^T. \quad (11.4)$$

Существенное свойство тензора поворота — ортогональность — выражается как

$$\underset{e_i \overset{\circ}{e}_i}{O} \cdot \underset{\overset{\circ}{e}_j e_j}{O^T} = \underset{\overset{\circ}{e}_i e_i}{O^T} \cdot \underset{e_j \overset{\circ}{e}_j}{O} = \underset{\overset{\circ}{e}_i \overset{\circ}{e}_i}{E}, \quad (11.5)$$

то есть транспонированный тензор совпадает с обратным тензором:  $O^T = O^{-1} \Leftrightarrow O = O^{-T}$ .

Ортогональный тензор сохраняет длины и углы (метрику), потому что он не меняет “ $\cdot$ ”-произведение векторов

$$(O \cdot a) \cdot (O \cdot b) = a \cdot O^T \cdot O \cdot b = a \cdot E \cdot b = a \cdot b. \quad (11.6)$$

Для всех ортогональных тензоров  $(\det Q)^2 = 1$ :

$$1 = \det E = \det (Q \cdot Q^T) = (\det Q) (\det Q^T) = (\det Q)^2.$$

Тензор поворота это ортогональный тензор с  $\det O = 1$ .

Но не только лишь тензоры поворота обладают свойством ортогональности. Когда в (11.1) первый базис “левый”, а второй “правый”, тогда это комбинация поворота и отражения (“rotoreflection”)  $O = -E \cdot O$  с  $\det (-E \cdot O) = -1$ .

У любого бивалентного тензора в трёхмерном пространстве как минимум одно собственное число — корень (9.2) — некомплексное (действительное, real). Для тензора поворота оно равно единице

$$O \cdot a = \eta a \Rightarrow \overbrace{a \cdot \underset{E}{O^T \cdot O}}^{O \cdot a} = \eta a \cdot \eta a \Rightarrow \eta^2 = 1.$$

Соответствующая собственная ось называется осью поворота. Теорема Euler’a о конечном повороте в том и состоит, что такая

ось существует. Если  $\mathbf{k}$  — орт этой оси, а  $\vartheta$  — конечная величина угла поворота, то тензор поворота представим как

$$\mathbf{O}(\mathbf{k}, \vartheta) = \mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta). \quad (11.7)$$

Доказывается эта формула так. Направление  $\mathbf{k}$  при повороте не меняется ( $\mathbf{O} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}$ ), поэтому на оси поворота  $\mathring{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ . В перпендикулярной плоскости (рис. 5)  $\mathring{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \vartheta - \mathbf{e}_2 \sin \vartheta$ ,  $\mathring{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 \sin \vartheta + \mathbf{e}_2 \cos \vartheta$ ,  $\mathbf{O} = \mathbf{e}_i \mathring{\mathbf{e}}_i \Rightarrow (11.7)$ .

Из (11.7) и (11.3) получаем формулу поворота Родрига в параметрах  $\mathbf{k}$  и  $\vartheta$ :

$$\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathring{\mathbf{r}} \sin \vartheta + \mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathring{\mathbf{r}} (1 - \cos \vartheta).$$

В параметрах конечного поворота транспонирование, оно же обращение, тензора  $\mathbf{O}$  эквивалентно перемене направления поворота — знака угла  $\vartheta$

$$\mathbf{O}^\top = \mathbf{O}|_{\vartheta=-\vartheta} = \mathbf{E} \cos \vartheta - \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta).$$

Пусть теперь тензор поворота меняется со временем:  $\mathbf{O} = \mathbf{O}(t)$ . Псевдовектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  вводится через тензор поворота  $\mathbf{O}$  таким путём. Дифференцируем тождество ортогональности (11.5) по времени\*

$$\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^\top + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^\top = 2\mathbf{0}.$$

Тензор  $\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^\top$  (по (??)  $(\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^\top)^\top = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^\top$ ) оказался антисимметричным. Поэтому согласно (7.3) он представим сопутствующим вектором как  $\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^\top = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top$ . То есть

$$\dot{\mathbf{O}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv -\frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^\top \right)_\times \quad (11.8)$$

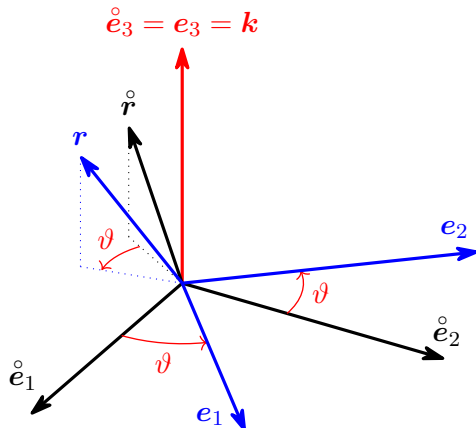
Помимо этого общего представления вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , для него есть и другие. Например, через параметры конечного поворота.

Производная  $\dot{\mathbf{O}}$  в параметрах конечного поворота в общем случае (оба параметра — и единичный вектор  $\mathbf{k}$ , и угол  $\vartheta$  — переменны во времени):

\* Используются различные записи для обозначения производной по времени. Вдобавок к записи Leibniz'a  $dx/dt$ , очень популярна запись “точка-сверху” Newton'a  $\dot{x}$ .

$$\mathring{e}_i = \mathring{e}_i \cdot e_j e_j$$

$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \\ \mathring{e}_2 \\ \mathring{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(90^\circ + \vartheta) & \cos 90^\circ \\ \cos(90^\circ - \vartheta) & \cos \vartheta & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathring{e}_1 = e_1 \cos \vartheta - e_2 \sin \vartheta$$

$$\mathring{e}_2 = e_1 \sin \vartheta + e_2 \cos \vartheta$$

$$\mathring{e}_3 = e_3 = k$$

$$O = e_1 \mathring{e}_1 + e_2 \mathring{e}_2 + e_3 \mathring{e}_3 =$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{e_1 \mathring{e}_1}^{e_1 e_1 \cos \vartheta - e_1 e_2 \sin \vartheta} + \overbrace{e_2 \mathring{e}_2}^{e_2 e_1 \sin \vartheta + e_2 e_2 \cos \vartheta} + \overbrace{e_3 \mathring{e}_3}^{kk} = \\ &= E \cos \vartheta - \underbrace{e_3 e_3}_{kk} \cos \vartheta + \underbrace{(e_2 e_1 - e_1 e_2)}_{e_3 \times e_i e_i = \epsilon_{3ij} e_j e_i} \sin \vartheta + kk = \\ &= E \cos \vartheta + k \times E \sin \vartheta + kk (1 - \cos \vartheta) \end{aligned}$$

рисунок 5  
“Конечный поворот”

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{O}} &= (\mathbf{O}^S + \mathbf{O}^A)^{\cdot} = \left( \overbrace{\mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta)}^{\mathbf{O}^S} + \overbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}^{\mathbf{O}^A} \right)^{\cdot} = \\
&= \underbrace{(\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta)}_{\dot{\mathbf{O}}^S} + \underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}_{\dot{\mathbf{O}}^A}.
\end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^T &= (\dot{\mathbf{O}}^S + \dot{\mathbf{O}}^A) \cdot (\mathbf{O}^S - \mathbf{O}^A) = \\
&= \dot{\mathbf{O}}^S \cdot \mathbf{O}^S + \dot{\mathbf{O}}^A \cdot \mathbf{O}^S - \dot{\mathbf{O}}^S \cdot \mathbf{O}^A - \dot{\mathbf{O}}^A \cdot \mathbf{O}^A,
\end{aligned}$$

используя

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 = \text{constant} \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} = 0,$$

$$\mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \mathbf{k} \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k},$$

$$(\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k} = 0, \quad (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k} \mathbf{k} = 0,$$

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = 0,$$

$$(\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\mathbf{k} \times \mathbf{E},$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k},$$

$$(6.13) \Rightarrow (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{E},$$

$$(6.12) \Rightarrow \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} = (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}) \times \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \mathbf{k} - \mathbf{k} (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) = \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E}$$

$$\dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S =$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + \\
&\quad + (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) =
\end{aligned}$$

$$= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta)^2 =$$

$$= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) +$$

$$+ \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} - 2 \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos^2 \vartheta =$$

$$= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta),$$

$$\dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S =$$

$$= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta +$$

$$+ (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} \dot{\vartheta} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) =$$

$$= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta),$$

$$\dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A =$$

$$= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta =$$

$$= \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + \left( \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \right) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) =$$

$$= -\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta),$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A &= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin^2 \vartheta = \\ &= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top &= \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S + \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S - \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A - \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A = \\ &= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + \\ &\quad + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\ &\quad + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) - (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta = \\ &= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}})(1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\ &= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\ &= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) = \\ &= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta).\end{aligned}$$

Этот результат, подставленный в определение (11.8) псевдовектора  $\boldsymbol{\omega}$ , даёт

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}\dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} (1 - \cos \vartheta). \quad (11.9)$$

Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  получился разложенным по трём взаимно ортогональным направлениям —  $\mathbf{k}$ ,  $\dot{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}$ . При неподвижной оси поворота  $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}\dot{\vartheta}$ .

Ещё одно представление  $\boldsymbol{\omega}$  связано с компонентами тензора поворота (11.2). Поскольку  $\mathbf{P} = o_{ji} \circ \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$ ,  $\mathbf{P}^\top = o_{ij} \circ \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$ , а векторы начального базиса  $\hat{\mathbf{e}}_i$  неподвижны (со временем не меняются), то

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}} &= \dot{o}_{ji} \circ \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j, \quad \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top = \dot{o}_{ni} \circ o_{nj} \circ \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j, \\ \boldsymbol{\omega} &= -\frac{1}{2} \dot{o}_{ni} \circ o_{nj} \circ \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \frac{1}{2} \in [jik] o_{nj} \circ \dot{o}_{ni} \circ \hat{\mathbf{e}}_k.\end{aligned} \quad (11.10)$$

Отметим и формулы

$$\begin{aligned}(11.8) \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{e}}_i \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \\ (11.8) \Rightarrow \boldsymbol{\omega} &= -\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_j)_{\times} = -\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_i)_{\times} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_i \times \dot{\mathbf{e}}_i.\end{aligned} \quad (11.11)$$

Не всё то вектор, что имеет величину и направление. Поворот тела вокруг оси представляет, казалось бы, вектор: его численное значение равно углу поворота, а направление совпадает с направлением оси вращения. Однако, повороты не складываются как векторы\*.

\* Когда углы поворота не бесконечно-малые.



На самом же деле последовательные повороты не складываются, а умножаются.

Можно ли складывать угловые скорости? — Да, ведь угол поворота в  $\dot{\vartheta}$  бесконечно малый. — Но только при вращении вокруг неподвижной оси?

...

Варьируя тождество (11.5), получим  $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = -\mathbf{O} \cdot \delta \mathbf{O}^\top$ . Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор  $\delta \mathbf{o}$  как  $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$ . Приходим к соотношениям

$$\delta \mathbf{O} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{O}, \quad \delta \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top \right)_{\times}, \quad (11.12)$$

аналогичным (11.8). Вектор бесконечно малого поворота  $\delta \mathbf{o}$  это не “вариация  $\mathbf{o}$ ”, но единый символ (в отличие от  $\delta \mathbf{O}$ ).

Малый поворот определяется вектором  $\delta \mathbf{o}$ , но конечный поворот тоже возможно представить как вектор.

...

## § 12. Вариации

Дальше, мы будем довольно часто использовать операцию варьирования. Она похожа на дифференцирование.

Вариации видятся как бесконечно малые смещения, совместимые с ограничениями (“связями”). Если ограничений для переменной  $x$  нет, то вариации  $\delta x$  совершенно случайны. Но когда

$$x = x(y)$$

это функция независимого аргумента  $y$ , тогда

$$\delta x = x'(y) \delta y.$$

Вариации похожи на дифференциалы. Как пример, если  $\delta x$  и  $\delta y$  это вариации  $x$  и  $y$ ,  $u$  и  $v$  — конёчные значения, то мы пишем  $u \delta x + v \delta y = \delta w$  даже если  $\delta w$  это не вариация  $w$ .

В этом случае  $\delta w$  это одиночный символ. Разумеется, если  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  и  $\partial_x v = \partial_y u$  ( $\frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial y} u$ ), то сумма  $\delta w = u \delta x + v \delta y$  будет вариацией некой  $w$ .

Варьируя тождество (11.5), мы получаем

$$\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = -\mathbf{O} \cdot \delta \mathbf{O}^\top.$$

Этот тензор антисимметричен, и потому представляется через свой сопутствующий псевдовектор  $\delta \mathbf{o}$  как

$$\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}.$$

Мы имеем следующие отношения

$$\delta \mathbf{O} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{O}, \quad \delta \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top \right)_{\times}, \quad (12.1)$$

похожие на (11.8). Вектор  $\delta \mathbf{o}$  бесконечно малого поворота это не “вариация  $\mathbf{o}$ ”, но один символ.

Бесконечно малый поворот определяется вектором  $\delta \mathbf{o}$ , но конечный поворот тоже возможно представить как вектор

...

### § 13. Полярное разложение

Любой тензор второй сложности  $\mathbf{F}$  с  $\det F_{ij} \neq 0$ , то есть не сингулярный тензор, может быть разложен как

...

*Example.* Polar decompose tensor  $\mathbf{C} = C_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ , where  $\mathbf{e}_k$  are mutually perpendicular unit vectors of basis, and  $C_{ij}$  are tensor's components

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & 11 \\ 10 & -15 & 23 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O} = O_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{O}_2$$

$$O_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{S}_R, \quad \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{S}_R$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_L \cdot \mathbf{O}, \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{S}_L$$

$$S_{Rij} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -10 \\ 5 & 0 & 25 \\ -10 & 25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$S_{Lij} = \begin{bmatrix} 104/5 & 47/5 & 5 \\ 47/5 & -129/5 & -10 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

...

## § 14. В косоугольном базисе

До сих пор использовался базис из трёх взаимно перпендикулярных единичных векторов  $\mathbf{e}_i$ . Теперь мы возьмём базис из любых трёх линейно независимых (некомпланарных) векторов  $\mathbf{a}_i$ .

Дekomпозиция (разложение) вектора  $\mathbf{v}$  в базисе  $\mathbf{a}_i$  (рис. 6) есть линейная комбинация

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i. \quad (14.1)$$

Соглашение о суммировании обретает новые положения: индекс суммирования повторяется на разных уровнях того же одночлена, а свободный индекс остаётся на одинаковой высоте в каждой части выражения ( $a_i = b_{ij}c^j$  — корректно,  $a_i = b_{ik}^i$  — дважды ошибочно).

В таком базисе уже  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i = v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i \neq v^i$ , ведь тут  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k \neq \delta_{ik}$ .

Дополним же базис  $\mathbf{a}_i$  ещё другой тройкой векторов  $\mathbf{a}^i$ , называемых кобазисом или взаимным базисом, чтобы

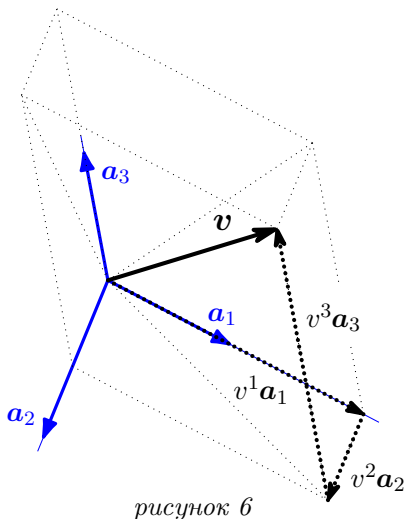
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j &= \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{a}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{a}^i. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Это — основное свойство кобазиса. Ортонормированный (ортонормальный) базис может быть определён как совпадающий со своим кобазисом:  $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ .

Для, к примеру, первого вектора кобазиса  $\mathbf{a}^1$

$$\begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \gamma \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 = 1/\gamma \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \\ \gamma = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 \end{cases}$$

Коэффициент  $\gamma$  получился равным (с точностью до знака для “левой” тройки  $\mathbf{a}_i$ ) объёму параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}_i$ . В § 6 тот же объём был представлен как  $\sqrt{g}$ ,



и это не без причины, ведь он совпадает с квадратным корнем из грамиана  $g \equiv \det g_{ij}$  — определителя симметричной матрицы J. P. Gram'a  $g_{ij} \equiv \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ .

○ Доказательство похоже на вывод (6.7). “Тройное произведение”  $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k$  в каком-нибудь ортонормальном базисе  $\mathbf{e}_i$  вычислимо как детерминант (с “—” для “левой” тройки  $\mathbf{a}_i$ ) по строкам

$$\in_{[ijk]} \equiv \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

или по столбцам

$$\in_{[pqr]} \equiv \mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{a}_r = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}.$$

Произведение определителей  $\in_{[ijk]} \in_{[pqr]}$  равно определителю произведения матриц, а элементы последнего — суммы вида  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_s = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p$ , в результате

$$\in_{[ijk]} \in_{[pqr]} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_r \end{bmatrix};$$

$$i=p=1, j=q=2, k=r=3 \Rightarrow \in_{[123]} \in_{[123]} = \det_{i,j} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = \det_{i,j} g_{ij}. \quad \bullet$$

Представляя  $\mathbf{a}^1$  и другие векторы кобазиса как сумму

$$\pm 2\sqrt{g} \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \pm \overbrace{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2}^{+\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3},$$

приходим к общей формуле (с “—” для “левой” тройки  $\mathbf{a}_i$ )

$$\mathbf{a}^i = \pm \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{ijk} \mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k, \quad \sqrt{g} \equiv \pm \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 > 0. \quad (14.3)$$

Здесь  $e^{ijk}$  по-прежнему символ перестановки Veblen'a ( $\pm 1$  или 0):  $e^{ijk} \equiv e_{ijk}$ . Произведение  $\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k = \in_{[jkn]} \mathbf{a}^n$ , компоненты тензора Лёви-Чивиты  $\in_{[jkn]} = \pm e_{jkn} \sqrt{g}$ , а по (6.8)  $e^{ijk} e_{jkn} = 2\delta_n^i$ . Так что

$$\mathbf{a}^1 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{a}^2 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{a}^3 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2).$$

*Example.* Get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$\sqrt{g} = -\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2;$$

$$-\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_2 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$-\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_2 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2,$$

$$-\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$$

and finally

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^3 = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

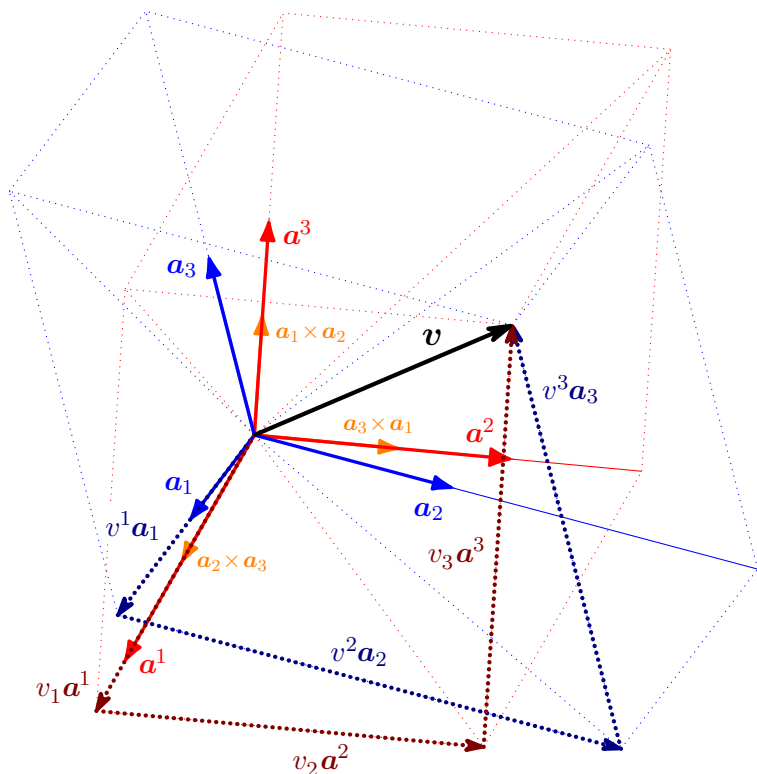
Имея кобазис, возможно не только разложить по нему любой вектор (рис. 7), но и найти коэффициенты разложения (14.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{a}_i = v_i \mathbf{a}^i, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^i &= v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = v^i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Коэффициенты  $v_i$  называются ковариантными компонентами вектора  $\mathbf{v}$ , а  $v^i$  — его контравариантными\* компонентами.

Есть литература о тензорах, где introducing existence and различают ковариантные и контравариантные... векторы (и “ковекторы”, “dual vectors”). Не сто́ит вводить читателя в заблуждение: вектор-то один и тот же, просто разложение по двум разным базисам даёт два набора компонент.

\* Потому что они меняются обратно (contra) изменению длин базисных векторов  $\mathbf{a}_i$ .



$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \sqrt{g} = 0.56274$$

$$1/\sqrt{g} = 1.77703$$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_i^j$$

рисунок 7  
 “Разложение вектора в косоугольном базисе”

От векторов перейдём к тензорам второй сложности. Имеем четыре комплекта диад:  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}_j$ . Сопасаующиеся коэффициенты в декомпозиции тензора называются его контравариантными, ковариантными и смешанными компонентами:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} &= B^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = B_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j = B_j^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = B_i^j \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j, \\ B^{ij} &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j, \quad B_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \\ B_j^i &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \quad B_i^j = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Для двух видов смешанных компонент точка в индексе это просто свободное место: у  $B_j^i$  верхний индекс “ $i$ ” — первый, а нижний “ $j$ ” — второй.

Компоненты единичного (“метрического”) тензора  $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}^k \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k \mathbf{a}^k = g_{jk} \mathbf{a}^j \mathbf{a}^k = g^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k: \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \equiv g_{ij}, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j \equiv g^{ij}; \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= g_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \cdot g^{nk} \mathbf{a}_n \mathbf{a}_k = g_{ij} g^{jk} \mathbf{a}^i \mathbf{a}_k = \mathbf{E} \Rightarrow g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Вдобавок к (14.2) и (14.3) открылся ещё один способ найти векторы кобазиса — через матрицу  $g^{ij}$ , обратную матрице Грама  $g_{ij}$ . И наоборот:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk} \mathbf{a}_j \delta_k^i = g^{ji} \mathbf{a}_j, \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk} \mathbf{a}^j \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk} \mathbf{a}^j \delta_i^k = g_{ji} \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (14.7)$$



*Example.* Using reversed Gram matrix, get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det g_{ij} = 4,$$

$$\text{adj } g_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T,$$

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{\text{adj } g_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Using  $\mathbf{a}^i = g^{ij} \mathbf{a}_j$

$$\mathbf{a}^1 = g^{11} \mathbf{a}_1 + g^{12} \mathbf{a}_2 + g^{13} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^2 = g^{21} \mathbf{a}_1 + g^{22} \mathbf{a}_2 + g^{23} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^3 = g^{31} \mathbf{a}_1 + g^{32} \mathbf{a}_2 + g^{33} \mathbf{a}_3 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3.$$

...

Едини́чный тензор (unit tensor, identity tensor, metric tensor)

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{trace } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{trace } \mathbf{A} \neq \text{not anymore } A_{jj}$$

Thus for, say, trace of some tensor  $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j$ :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{trace } \mathbf{A}$ ,  
you have

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{r}_{\partial k} \mathbf{r}^k = A_{ij} \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = A_{ij} g^{ij}$$

...

Тензор поворота (the rotation tensor)

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}_i \hat{\mathbf{a}}^i = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{-\top}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \hat{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{\top}$$

$$\mathbf{P}^{\top} = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \hat{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \mathbf{P}^{-1}$$

...

... Характеристическое уравнение (9.2) быстро приводит к тождеству Кэли–Гамильтона (Cayley–Hamilton)

$$\begin{aligned} -\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{I} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{II} \mathbf{B} + \mathbf{III} \mathbf{E} &= {}^2\mathbf{0}, \\ -\mathbf{B}^3 + \mathbf{I} \mathbf{B}^2 - \mathbf{II} \mathbf{B} + \mathbf{III} \mathbf{E} &= {}^2\mathbf{0}. \end{aligned} \quad (14.8)$$

## § 15. Тензорные функции

В представлении о функции  $y=f(x)$  как отображении (морфизме)  $f: x \mapsto y$ , прообраз (аргумент)  $x$  и образ (результат)  $y$  могут быть тензорами любых сложностей.

Рассмотрим хотя бы скалярную функцию двухвалентного тензора  $\varphi=\varphi(\mathbf{B})$ . Примеры —  $\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi$  (или  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}$ ) и  $\mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{B}$ . Тогда в каждом базисе  $\mathbf{a}_i$  в паре с кобазисом  $\mathbf{a}^i$  имеем функцию  $\varphi(B_{ij})$  девяти числовых аргументов — компонент  $B_{ij}$  тензора  $\mathbf{B}$ . Для примера

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \cdot \Phi = B_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \cdot \cdot \mathbf{a}_m \mathbf{a}_n \Phi^{mn} = B_{ij} \Phi^{ji} = \varphi(B_{ij}).$$

С любым переходом к новому базису результат не меняется:  $\varphi(B'_{ij}) = \varphi(B'_{ij}) = \varphi(\mathbf{B})$ .

Дифференцирование  $\varphi(\mathbf{B})$  выглядит как

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} dB_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top. \quad (15.1)$$

Тензор  $\partial\varphi/\partial\mathbf{B}$  называется производной функции  $\varphi$  по аргументу  $\mathbf{B}$ ;  $d\mathbf{B}$  — дифференциал тензора  $\mathbf{B}$ ,  $d\mathbf{B} = dB_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$ ;  $\partial\varphi/\partial B_{ij}$  — компоненты (контравариантные)  $\partial\varphi/\partial\mathbf{B}$

$$\mathbf{a}^i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{a}^j = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \cdot \mathbf{a}^j \mathbf{a}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j.$$

...

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \cdot \Phi$$

$$d\varphi = d(\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi) = d\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi = \Phi \cdot \cdot d\mathbf{B} = \Phi^\top \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top, \quad \frac{\partial(\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi)}{\partial \mathbf{B}} = \Phi^\top$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{qp}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{pq}$$

...

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet \mathbf{B}$$

$$d\varphi = d(\mathbf{B} \bullet \mathbf{B}) = d...$$

...

Но согласно опять-таки (14.8)  $-\mathbf{B}^2 + \mathbf{I}\mathbf{B} - \mathbf{II}\mathbf{E} + \mathbf{III}\mathbf{B}^{-1} = {}^2\mathbf{0}$ , поэтому

....

Скалярная функция  $\varphi(\mathbf{B})$  называется изотропной, если она не чувствительна к повороту аргумента:

$$\varphi(\mathbf{B}) = \varphi(\mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{O}^\top) = \varphi(\overset{\circ}{\mathbf{B}}) \quad \forall \mathbf{O} = \mathbf{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i = \mathbf{a}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i = \mathbf{O}^{-\top}$$

для любого ортогонального тензора  $\mathbf{O}$  (тензора поворота, § 11).

Симметричный тензор  $\mathbf{B}^S$  полностью определяется тройкой инвариантов и угловой ориентацией собственных осей (они же взаимно ортогональны, § 9). Ясно, что изотропная функция  $\varphi(\mathbf{B}^S)$  симметричного аргумента является функцией, входные-аргументы которой — только инварианты  $\mathbf{I}(\mathbf{B}^S)$ ,  $\mathbf{II}(\mathbf{B}^S)$ ,  $\mathbf{III}(\mathbf{B}^S)$ . Дифференцируется такая функция согласно (?), где транспонирование излишне.

## § 16. Пространственное дифференцирование

««« rename: remove fields

*Тензорное поле* — это тензор, меняющийся от точки к точке (переменный в пространстве, зависящий от координат).

Пусть в каждой точке некоторой области трёхмерного пространства определена величина  $\varsigma$ . Тогда говорят, что есть тензорное поле  $\varsigma = \varsigma(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  — вектор положения (вектор-радиус) точки пространства.

Величина  $\varsigma$  может быть тензором любой сложности. Пример скалярного поля — поле температуры в среде, векторного поля — скорости частиц жидкости.

Концепт тензорного поля никак не связан с концептом поля с операциями  $+$  и  $*$  с 11 свойствами этих операций.

Не только для решения прикладных задач, но нередко и в “чистой теории” вместо аргумента  $\mathbf{r}$  используется набор (какая-либо тройка) криволинейных координат  $q^i$ . Если непрерывно менять лишь одну координату из трёх, получается координатная линия. Каждая точка трёхмерного пространства лежит на пересечении трёх координатных линий (рис. 8). Вектор положения точки выражается через набор координат как отношение  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ .

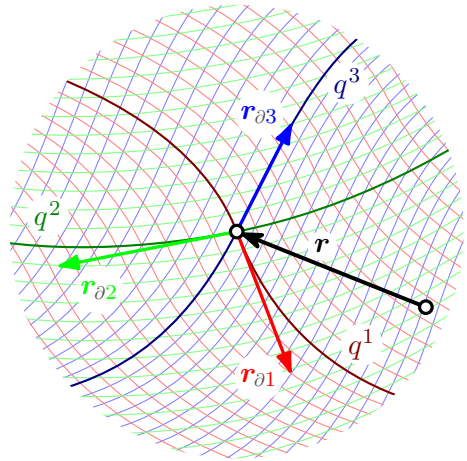


рисунок 8

Commonly used наборы координат «» Прямоугольные (“декартовы”), сферические и цилиндрические координаты —

Curvilinear coordinates may be derived from a set of rectangular (“cartesian”) coordinates by using a transformation that is locally invertible (a one-to-one map) at each point. Поэтому прямоугольные координаты любой точки пространства могут быть преобразованы в какие-либо криволинейные координаты и обратно.

...

The differential of a function presents a change in the linearization of this function.

...

частная производная

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$$

...

дифференциал  $\varsigma(q^i)$

$$d\varsigma = \frac{\partial \varsigma}{\partial q^i} dq^i = \partial_i \varsigma dq^i \quad (16.1)$$

...

Линейность

$$\partial_i(\lambda p + \mu q) = \lambda(\partial_i p) + \mu(\partial_i q) \quad (16.2)$$

“Product rule”

$$\partial_i(p \circ q) = (\partial_i p) \circ q + p \circ (\partial_i q) \quad (16.3)$$

...

Local basis  $\mathbf{r}_{\partial i}$ Дифференциал вектора положения  $\mathbf{r}(q^i)$  есть

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = dq^i \mathbf{r}_{\partial i}, \quad \mathbf{r}_{\partial i} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \mathbf{r} \quad (16.4)$$

...

Local cobasis  $\mathbf{r}^i$ ,  $\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \delta_j^i$ 

...

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varsigma}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial \varsigma}{\partial q^i} \mathbf{r}^i = \partial_i \varsigma \mathbf{r}^i \\ d\varsigma &= \frac{\partial \varsigma}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \partial_i \varsigma \mathbf{r}^i \cdot dq^j \mathbf{r}_{\partial j} = \partial_i \varsigma dq^i \end{aligned} \quad (16.5)$$

...

Бивалентный единичный тензор (метрический тензор)  $\mathbf{E}$ , который нейтрален (3.7) “ $\cdot$ ”-произведению (dot product’y), может быть представлен как

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_{\partial i} = \underbrace{\mathbf{r}^i \partial_i}_{\nabla} \mathbf{r} = \nabla \mathbf{r}, \quad (16.6)$$

где появляется дифференциальный оператор “набла”

$$\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i. \quad (16.7)$$

...

$$d\varsigma = \frac{\partial \varsigma}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \varsigma = \partial_i \varsigma dq^i \quad (16.8)$$

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \underbrace{\mathbf{E}}_{\nabla} \mathbf{r}$$

...

Дивергенция диадного произведения двух векторов

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (ab) &= r^i \partial_i \cdot (ab) = r^i \cdot \partial_i (ab) = r^i \cdot (\partial_i a) b + r^i \cdot a (\partial_i b) = \\ &= (r^i \cdot \partial_i a) b + a \cdot r^i (\partial_i b) = (r^i \partial_i \cdot a) b + a \cdot (r^i \partial_i b) = \\ &= (\nabla \cdot a) b + a \cdot (\nabla b) \quad (16.9)\end{aligned}$$

— тут нет нужды разворачивать векторы  $a$  и  $b$ , развернув лишь дифференциальный оператор  $\nabla$ .

...

Градиент векторного произведения двух векторов, применяя “product rule” (16.3) и соотношение (6.5) для любых двух векторов (частная производная  $\partial_i$  некоторого вектора по скалярной координате  $q^i$  это тоже вектор)

$$\begin{aligned}\nabla(a \times b) &= r^i \partial_i (a \times b) = r^i (\partial_i a \times b + a \times \partial_i b) = \\ &= r^i (\partial_i a \times b - \partial_i b \times a) = r^i \partial_i a \times b - r^i \partial_i b \times a = \\ &= \nabla a \times b - \nabla b \times a. \quad (16.10)\end{aligned}$$

...

Градиент dot product’a двух векторов

$$\begin{aligned}\nabla(a \cdot b) &= r^i \partial_i (a \cdot b) = r^i (\partial_i a) \cdot b + r^i a \cdot (\partial_i b) = \\ &= (r^i \partial_i a) \cdot b + r^i (\partial_i b) \cdot a = (\nabla a) \cdot b + (\nabla b) \cdot a. \quad (16.11)\end{aligned}$$

## § 17. Интегральные теоремы

Для векторных полей известны интегральные теоремы Gauss’a и Stokes’a.

Gauss’ theorem (divergence theorem) enables an integral taken over a volume to be replaced by one taken over the closed surface bounding that volume, and vice versa.

Stokes’ theorem enables an integral taken around a closed curve to be replaced by one taken over *any* surface bounded by that curve. Stokes’ theorem relates a line integral around a closed path to a surface integral over what is called a *capping surface* of the path.

### Теорема Gauss'a о дивергенции

Эта теорема — про то, как заменить объёмный интеграл поверхностным (и наоборот). В этой теореме рассматривается поток (ef)flux вектора через ограничивающую объём  $V$  замкнутую поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$ . Единичный вектор внешней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\mathcal{O}(\partial V)$

$$\oint_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\mathcal{O} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV. \quad (17.1)$$

Объём  $V$  нарезается тремя семействами координатных поверхностей на множество бесконечно малых элементов. Поток через поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$  равен сумме потоков через края получившихся элементов. В бесконечной малости каждый такой элемент — маленький локальный дифференциальный кубик (параллелепипед). ... Поток вектора  $\mathbf{a}$  через грани малого кубика с объёмом  $dV$  равен  $\sum_{i=1}^6 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a} \mathcal{O}_i$ , а поток через сам этот объём равен  $\nabla \cdot \mathbf{a} dV$ .

Похожая трактовка этой теоремы есть, для примера, в курсе Richard'a Feynman'a [85].

( рисунок с кубиками )

to dice — нарезать кубиками

small cube, little cube

локально ортонормальные координаты  $\boldsymbol{\xi} = \xi_i \mathbf{n}_i$ ,  $d\boldsymbol{\xi} = d\xi_i \mathbf{n}_i$ ,  
 $\nabla = \mathbf{n}_i \partial_i$

разложение вектора  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{n}_i$

### Теорема Stokes'a о циркуляции

Эта теорема выражается равенством

...

## § 18. Тензоры кривизны

The *Riemann curvature tensor* or *Riemann–Christoffel tensor* (after **Bernhard Riemann** and **Elwin Bruno Christoffel**) is the most common method used to express the curvature of Riemannian

manifolds. It's a tensor field, it assigns a tensor to each point of a Riemannian manifold, that measures the extent to which the metric tensor is not locally isometric to that of “flat” space. The curvature tensor measures noncommutativity of the covariant derivative, and as such is the integrability obstruction for the existence of an isometry with “flat” space.

Рассматривая тензорные поля в криволинейных координатах (§ 16), мы исходили из представления вектора-радиуса (вектора положения) точки функцией этих координат:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ . Этим отношением порождаются выражения

- ✓ векторов локального касательного базиса  $\mathbf{r}_{\partial i} \equiv \partial \mathbf{r} / \partial q^i \equiv \partial_i \mathbf{r}$ ,
- ✓ компонент  $g_{ij} \equiv \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j}$  и  $g^{ij} \equiv \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = g_{ij}^{-1}$  единичного “метрического” тензора  $\mathbf{E} = \mathbf{r}_{\partial i} \mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_{\partial i} = g_{jk} \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k = g^{jk} \mathbf{r}_{\partial j} \mathbf{r}_{\partial k}$ ,
- ✓ векторов локального взаимного кокасательного базиса  $\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \delta_j^i$ ,  $\mathbf{r}^i = g^{ij} \mathbf{r}_{\partial j}$ ,
- ✓ дифференциального набла-оператора Hamilton’а  $\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$ ,  $\mathbf{E} = \nabla \mathbf{r}$ ,
- ✓ полного дифференциала  $d\boldsymbol{\xi} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}$ ,
- ✓ частных производных касательного базиса (вторых частных производных  $\mathbf{r}$ )  $\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \equiv \partial_i \partial_j \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_{\partial j}$ ,
- ✓ символов “связности” Христоффеля (Christoffel symbols)  $\Gamma_{ij}^k \equiv \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}^k$  и  $\Gamma_{ij\bullet} \equiv \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial \bullet}$ .

Представим теперь, что функция  $\mathbf{r}(q^k)$  не известна, но зато в каждой точке пространства известны шесть независимых компонент положительно определённой (все матрицы Gram’a определены неотрицательно) симметричной метрической матрицы Gram’a  $g_{ij}(q^k)$ .

the Gram matrix (or Gramian)

Билинейная форма ...

...

Поскольку шесть функций  $g_{ij}(q^k)$  происходят от векторной функции  $\mathbf{r}(q^k)$ , то между элементами  $g_{ij}$  существуют некие соотношения.



Дифференциал  $d\mathbf{r}$  (16.4) — полный (точный). Это истинно тогда и только тогда, когда вторые частные производные коммутируют:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\partial k} dq^k \Leftrightarrow \partial_i \mathbf{r}_{\partial j} = \partial_j \mathbf{r}_{\partial i} \text{ или } \mathbf{r}_{\partial i \partial j} = \mathbf{r}_{\partial j \partial i}.$$

Но это условие уже обеспечено симметрией  $g_{ij}$

...

метрическая (“аффинная”) связность  $\nabla_i$ , её же называют “ковариантная производная”

$$\mathbf{r}_{\partial i \partial j} = \underbrace{\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}^k}_{\Gamma_{ij}^k} \mathbf{r}_{\partial k} = \underbrace{\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} \mathbf{r}^k}_{\Gamma_{ij\dot{k}}}$$

$$\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_{\partial k} = \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{\partial k} = \mathbf{r}_{\partial i \partial j}$$

covariant derivative (affine connection) is only defined for vector fields

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \partial_i (v^j \mathbf{r}_{\partial j}) = \mathbf{r}^i (\partial_i v^j \mathbf{r}_{\partial j} + v^j \mathbf{r}_{\partial i \partial j})$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_{\partial j} \nabla_i v^j, \quad \nabla_i v^j \equiv \partial_i v^j + \Gamma_{in}^j v^n$$

$$\nabla \mathbf{r}_{\partial i} = \mathbf{r}^k \partial_k \mathbf{r}_{\partial i} = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{\partial k \partial i} = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{\partial n} \Gamma_{ki}^n, \quad \nabla_i \mathbf{r}_{\partial n} = \Gamma_{in}^k \mathbf{r}_{\partial k}$$

Christoffel symbols describe a metric (“affine”) connection, that is how the basis changes from point to point.

символы Christoffel’я это “компоненты связности” в локальных координатах

...

тензор кручения  ${}^3\mathfrak{T}$  с компонентами

$$\mathfrak{T}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

determines the antisymmetric part of a connection

...

симметрия  $\Gamma_{ij\dot{k}} = \Gamma_{ji\dot{k}}$ , поэтому  $3^3 - 3 \cdot 3 = 18$  разных (независимых)  $\Gamma_{ij\dot{k}}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^n g_{nk} &= \Gamma_{ijk} = \mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} = \\
&= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{\partial i \partial j} + \mathbf{r}_{\partial j \partial i}) \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{\partial j \partial k} - \mathbf{r}_{\partial k \partial j}) \cdot \mathbf{r}_{\partial i} + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{\partial i \partial k} - \mathbf{r}_{\partial k \partial i}) \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \\
&= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{\partial i \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \mathbf{r}_{\partial i \partial k} \cdot \mathbf{r}_{\partial j}) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{\partial j \partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \mathbf{r}_{\partial j \partial k} \cdot \mathbf{r}_{\partial i}) - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{\partial k \partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j} + \mathbf{r}_{\partial k \partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial i}) = \\
&= \frac{1}{2} \left( \partial_i (\mathbf{r}_{\partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k}) + \partial_j (\mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial k}) - \partial_k (\mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j}) \right) = \\
&= \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad (18.1)
\end{aligned}$$

Все символы Christoffel'я тождественно равны нулю лишь в ортонормальной (декартовой) системе. (А какие они для ко-соугольной?)

Дальше:  $d\mathbf{r}_{\partial i} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{r}_{\partial i} = dq^k \partial_k \mathbf{r}_{\partial i} = \mathbf{r}_{\partial k \partial i} dq^k$  — тоже полные дифференциалы.

$$d\mathbf{r}_{\partial k} = \partial_i \mathbf{r}_{\partial k} dq^i = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial k}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial k}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial k}}{\partial q^3} dq^3$$

Поэтому  $\partial_i \partial_j \mathbf{r}_{\partial k} = \partial_j \partial_i \mathbf{r}_{\partial k}$ ,  $\partial_i \mathbf{r}_{\partial j \partial k} = \partial_j \mathbf{r}_{\partial i \partial k}$ , и трёхиндексный объект из векторов третьих частных производных

$$\mathbf{r}_{\partial i \partial j \partial k} \equiv \partial_i \partial_j \partial_k \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_{\partial j \partial k} \quad (18.2)$$

симметричен по первому и второму индексам (а не только по второму и третьему). И тогда равен нулю <sup>4</sup> $\mathbf{0}$  следующий тензор четвёртой сложности — *тензор кривизны Riemann'a* (или *тензор Riemann'a–Christoffel'я*)

$${}^4\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{hijk} \mathbf{r}^h \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k, \quad \mathfrak{R}_{hijk} \equiv \mathbf{r}_{\partial h} \cdot (\mathbf{r}_{\partial j \partial i \partial k} - \mathbf{r}_{\partial i \partial j \partial k}). \quad (18.3)$$

Выразим компоненты  $\mathfrak{R}_{ijkn}$  через метрическую матрицу  $g_{ij}$ . Начнём с дифференцирования локального кобазиса:

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial k} = \delta_k^i \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial k} + \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{\partial j \partial k} = 0 \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{r}^k.$$

...

Шесть независимых компонент:  $\mathfrak{R}_{1212}$ ,  $\mathfrak{R}_{1213}$ ,  $\mathfrak{R}_{1223}$ ,  $\mathfrak{R}_{1313}$ ,  $\mathfrak{R}_{1323}$ ,  $\mathfrak{R}_{2323}$ .

...

Симметричный бивалентный *тензор кривизны Ricci*

$$\mathcal{R} \equiv \frac{1}{4} \mathfrak{R}_{abij} \mathbf{r}^a \times \mathbf{r}^b \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j = \frac{1}{4} \in^{[abp]} \in^{[ijq]} \mathfrak{R}_{abij} \mathbf{r}_{\partial p} \mathbf{r}_{\partial q} = \mathcal{R}^{pq} \mathbf{r}_{\partial p} \mathbf{r}_{\partial q}$$

(коэффициент  $\frac{1}{4}$  используется тут для удобства) с компонентами

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{11} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{2323}, \\ \mathcal{R}^{21} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1323}, \quad \mathcal{R}^{22} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1313}, \\ \mathcal{R}^{31} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1223}, \quad \mathcal{R}^{32} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1213}, \quad \mathcal{R}^{33} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1212}.\end{aligned}$$

Равенство тензора Риччи нулю  $\mathcal{R} = {}^2\mathbf{0}$  (в компонентах это шесть уравнений  $\mathcal{R}^{ij} = \mathcal{R}^{ji} = 0$ ) есть **необходимое** условие интегрируемости (“совместности”, “compatibility”) для нахождения вектора радиуса  $\mathbf{r}(q^k)$  по полю  $g_{ij}(q^k)$ .

## Библиография

Есть много книг, которые описывают только аппарат тензорного исчисления [97, 98, 99, 16, ?, 100].

Однако, индексная запись (это когда тензоры представлены наборами компонент) всё ещё более популярна, чем прямая безиндексная запись.

Прямая запись широко используется, например, в приложениях к книгам Anatoliy’я I. Lurie (Анатолия И. Лурье) [28, 29].

В “Теории упругости” Вениамина Блоха [7] тоже используется прямая безиндексная нотация.

Лекции R. Feynman’а [85] содержат яркое описание теории векторных полей.

Также, информация о тензорном исчислении есть часть необычной и интересной книги C. Truesdell’а [60].

# КЛАССИЧЕСКАЯ ОБЩАЯ МЕХАНИКА

## § 1. Дискретная совокупность частиц

**К**лассическая общая механика моделирует физические объекты, дискретизируя их в совокупность частиц (“точечных масс”, “материальных точек”<sup>\*</sup>).

В совокупности  $N$  частиц каждая  $k$ -ая частица имеет свою ненулевую массу  $m_k = \text{constant} > 0$  и функцию движения  $\mathbf{r}_k(t)$ . Функция  $\mathbf{r}_k(t)$  измеряется относительно выбранной системы отсчёта.

Система отсчёта состоит из (рис. 9)

- ✓ некоторой “нулевой” точки отсчёта  $o$ ,
- ✓ набора координат,
- ✓ часы.

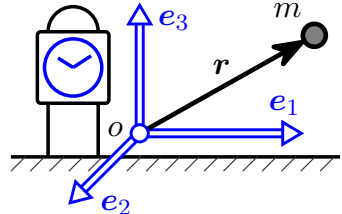


рисунок 9

Когда-то давно, системой отсчёта было некое абсолютное пространство: сначала пустое, а затем заполненное сплошной упругой средой — эфиром (æther). Позже стало ясно, что для классической механики могут быть использованы любые системы отсчёта, но предпочтение отдаётся так называемым “инерциальным” системам, где точка движется с постоянной скоростью без ускорения ( $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{r}} = \text{constant}$ ) в отсутствии внешних взаимодействий.

<sup>\*</sup> Точечная масса (материальная точка) — это концепт объекта, типично материи, который имеет ненулевую массу и является (или мыслится) бесконечно-малым по своему объёму (размерам).

Движение вдоль прямой линии с постоянной скоростью, также известное как свободное движение, предполагает отсутствие внешних взаимодействий (или приложенных сил):

$$\dot{\mathbf{r}} = \text{constant} = \alpha_i \mathbf{e}_i \quad (1.1)$$

$$\alpha_i = \text{constant} \quad (1.2)$$

Мерой взаимодействия в механике является вектор силы  $\mathbf{F}$ . В широко известном\* уравнении Newton'a

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (1.3)$$

правая часть может зависеть лишь от положения, скорости и явно входящего времени, тогда как ускорение  $\ddot{\mathbf{r}}$  прямо пропорционально силе  $\mathbf{F}$  с коэффициентом  $1/m$ .

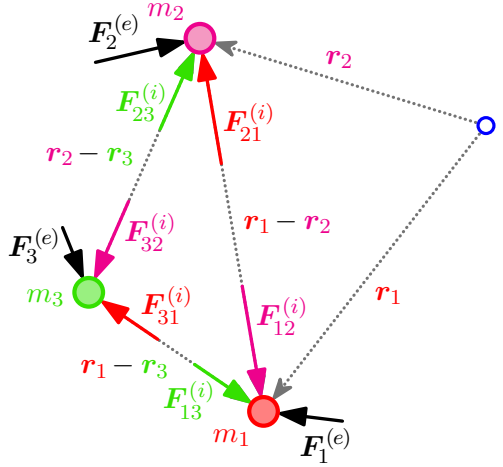
\*“Axiomata sive Leges Motus” (“Axioms or Laws of Motion”) were written by Isaac Newton in his *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, first published in 1687. Reprint (en Latin), 1871. Translated into English by Andrew Motte, 1846.

Вот тезисы динамики совокупности частиц.

Сила, действующая на  $k$ -ую частицу (рис. 10)

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)}. \quad (1.4)$$

$\mathbf{F}_k^{(e)}$  есть внешняя сила — такие силы исходят от объектов вне рассматриваемой системы. Второе слагаемое — сумма внутренних сил (сила  $\mathbf{F}_{kj}^{(i)}$  есть взаимодействие, подаваемое  $j$ -ой частицей на  $k$ -ую частицу). Внутренние взаимодействия случаются только между элементами наблюдаемой системы и не влияют (механически) ни на что другое. Ни одна частица не взаимодействует сама с собой,  $\mathbf{F}_{kk}^{(i)} = \mathbf{0} \forall k$ .



рисунки 10

Из (1.4) вместе с принципом действия–противодействия

$$\mathbf{F}_{kj}^{(i)} = -\mathbf{F}_{jk}^{(i)} \forall k, j \Rightarrow \sum_k \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0},$$

вытекает баланс импульса

$$\left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^\bullet = \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.5)$$

Момент, действующий на  $k$ -ую частицу

$$\mathbf{r}_k \times m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{r}_k \times \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)}. \quad (1.6)$$

It is relative to the reference point.

Когда вдобавок к принципу действия–противодействия, внутренние взаимодействия между частицами центральны, то есть

$$\mathbf{F}_{kj}^{(i)} \parallel (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \Leftrightarrow (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0},$$

баланс момента импульса выходит\*

$$\left( \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^{\bullet} = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.7)$$

Изменения импульса и момента импульса определяются только внешними силами  $\mathbf{F}_k^{(e)}$ .

...

$$\begin{aligned} * \left( \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^{\bullet} &= \sum_k \dot{\mathbf{r}}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k + \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \ddot{\mathbf{r}}_k, \\ \mathbf{F}_{kj}^{(i)} &= -\mathbf{F}_{jk}^{(i)} \text{ и } (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=k+1}^N (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

## § 2. Совершенно жёсткое недеформируемое твёрдое тело

Совершенно жёсткое недеформируемое тело это твёрдое\* тело, в котором деформация нулевая (или пренебрежимо мала — так мала, что ею можно пренебречь). Расстояние между любыми двумя точками недеформируемого жёсткого тела остаётся постоянным независимо от действующих на него внешних сил.

Недеформируемое жёсткое тело моделируется, используя “континуальный подход” как непрерывное распределение массы (материальный континуум, сплошная среда), вместо использования “дискретного подхода” (то есть моделирования тела как дискретной коллекции частиц).

Масса материального континуума непрерывно распределяется в своём объёме

$$dm \equiv \rho dV \quad (2.1)$$

( $\rho$  — объёмная плотность массы и  $dV$  — бесконечномалый объём).

Формула с суммированием по дискретным точкам становится формулой для сплошного тела заменой масс частиц на массу (2.1) бесконечномалого элемента объёма  $dV$ , и с последующим интегрированием по всему объёму тела. В частности, вот формулы для импульса

$$\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \text{ становится } \int_V \dot{\mathbf{r}} dm \quad (2.2)$$

и момента импульса

$$\sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \text{ становится } \int_V \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dm. \quad (2.3)$$

Чтобы полностью описать положение (позицию, место) любого недеформируемого тела со всеми своими точками, достаточно выбрать какую-либо уникальную точку за “полюс”, найти или задать положение  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$  выбранной точки, а также угловую

\* “Жёсткое” это неупругое и не гибкое, а “твёрдое” это не текучее. Твёрдое вещество сохраняет свой размер и форму без контейнера (в отличие от текучего вещества — жидкости или газа).



ориентацию тела относительно полюса (рис. 11). Как результат, любое движение недеформируемого твёрдого тела есть либо поворот вокруг выбранного полюса, либо равное смещение полюса и всех точек тела — трансляция (линейное движение)\*, либо комбинация их обоих.

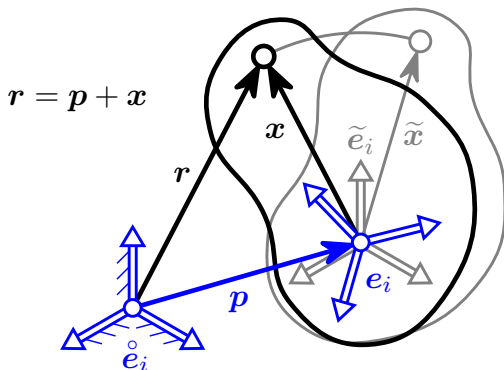


рисунок 11

$\mathring{e}_i$  — тройка ортонормальных базисных векторов, неподвижная относительно абсолютной (или любой инерциальной) системы отсчёта

Имея неподвижный базис  $\mathring{e}_i$  и движущийся вместе с телом базис  $e_i$ , ...

Если добавить базис  $e_i$  (этот базис движется вместе с телом), то угловая ориентация тела может быть определена тензором поворота  $O \equiv e_i \mathring{e}_i$ .

Тогда любое движение тела полностью описывается двумя функциями  $p(t)$  и  $O(t)$ .

Вектор положения некоторой точки тела

$$r = p + x \quad (2.4)$$

$$\tilde{x} = x_i \tilde{e}_i, \quad x = x_i e_i$$

(11.3), § 1.11

\* Трансляция может также быть мыслима как вращение с центром переворота на бесконечности

$$\mathbf{x} = \mathbf{O} \cdot \tilde{\mathbf{x}}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{x}},$$

Для недеформируемого жёсткого тела, компоненты  $x_i$  не зависят от времени:  $x_i = \text{constant}(t)$  и  $\dot{\mathbf{x}} = x_i \dot{\mathbf{e}}_i$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{x}}}$$

$$x_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{O}} \cdot x_i \mathring{\mathbf{e}}_i \Leftrightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathring{\mathbf{e}}_i$$

...

Импульс (количество движения) и момент импульса недеформируемого сплошного тела описываются следующими интегралами

...

...

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{p} dm = \mathbf{p} \int_{\mathcal{V}} dm = \mathbf{p} m$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm = \mathbf{\Xi} m, \quad \mathbf{\Xi} \equiv m^{-1} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm$$

Три инерциальных характеристики тела:

- ✓ интегральная масса  $m = \int_{\mathcal{V}} dm = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$  — масса всего тела,
- ✓ вектор эксцентриситета  $\mathbf{\Xi}$  — измеряет смещение выбранного полюса от “центра масс” тела,
- ✓ тензор инерции  ${}^2\mathfrak{I}$ .

Вектор эксцентриситета равняется нуль-вектору только когда выбранный полюс совпадает с “центром масс” — уникальной точкой внутри тела с вектором положения  $\mathbf{\boldsymbol{\imath}}$ , короче

$$\mathbf{\Xi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{\boldsymbol{\imath}}.$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{p}, \quad \mathbf{\Xi} m = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r} - \mathbf{\boldsymbol{\imath}}) dm = \mathbf{0},$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dm - \mathbf{\boldsymbol{\imath}} \int_{\mathcal{V}} dm = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{\boldsymbol{\imath}} = m^{-1} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dm$$

...

Вводя (псевдо)вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , ...

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i$$

...

тензор инерции  ${}^2\mathfrak{J}$

$${}^2\mathfrak{J} \equiv - \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{x} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{E}) dm = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \mathbf{E} - \mathbf{x} \mathbf{x}) dm$$

It is assumed (can be proven?) that the inertia tensor changes only due to a rotation

$${}^2\mathfrak{J} = \mathbf{O} \cdot {}^2\mathfrak{J}^\circ \cdot \mathbf{O}^\top$$

and its components in basis  $\mathbf{e}_i$  (moving together with a body) don't change over time

$${}^2\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b, \quad \mathfrak{J}_{ab} = \text{constant}(t)$$

thus the time derivative is

$$\begin{aligned} {}^2\dot{\mathfrak{J}} &= \mathfrak{J}_{ab} (\dot{\mathbf{e}}_a \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \dot{\mathbf{e}}_b) = \mathfrak{J}_{ab} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_b) = \\ &= \mathfrak{J}_{ab} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b - \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \times {}^2\mathfrak{J} - {}^2\mathfrak{J} \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

**Подстановка** (....) в (1.5) и (1.7) даёт уравнения баланса — баланс количества движения (импульса) и баланс момента импульса — для модели сплошного недеформируемого жёсткого тела

...

здесь  $\mathbf{f}$  — внешняя сила на единицу массы,  $\mathbf{F}$  — результата внешних сил (также называемая “равнодействующей силой” или “главным вектором”),  $\mathbf{M}$  — результата внешних пар сил (“главная пара”, “главный момент”).

...

— Are there any scenarios for which the center of mass is not almost exactly equivalent to the center of gravity?

— Non-uniform gravity field. In a uniform gravitational field, the center of mass is equal to the center of gravity.

...

*Work*

$$W(\mathbf{F}, \mathbf{u}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$$

as the exact (full) differential

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \cdot d\mathbf{F} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u}$$

by “product rule”

$$dW = d(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{u}, \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{F}$$

...

### *Constraints*

Imposed on the positions and velocities of particles, there are restrictions of a geometrical or kinematical nature, called constraints.

Holonomic constraints are relations between position variables (and possibly time) which can be expressed as equality like

$$f(q^1, q^2, q^3, \dots, q^n, t) = 0,$$

where  $q^1, q^2, q^3, \dots, q^n$  are  $n$  parameters (coordinates) that fully describe the system.

A constraint that cannot be expressed as such is nonholonomic.

Holonomic constraint depends only on coordinates and time. It does not depend on velocities or any higher time derivatives.

Velocity-dependent constraints like

$$f(q^1, q^2, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n, t) = 0$$

are mostly not holonomic.

For example, the motion of a particle constrained to lie on a sphere's surface is subject to a holonomic constraint, but if the particle is able to fall off a sphere under the influence of gravity, the constraint becomes non-holonomic. For the first case the holonomic constraint may be given by the equation:  $r^2 - a^2 = 0$ , where  $r$  is the distance from the centre of a sphere of radius  $a$ . Whereas the second non-holonomic case may be given by:  $r^2 - a^2 \geq 0$ .

Three examples of nonholonomic constraints are: when the constraint equations are nonintegrable, when the constraints have inequalities, or with complicated non-conservative forces like friction.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q^1, q^2, \dots, q^n, t)$$

(assuming  $n$  independent parameters/coordinates)

### § 3. Принцип виртуальной работы

*Mécanique analytique* (1788–89) is a two volume French treatise on analytical mechanics, written by Joseph Louis Lagrange, and published 101 years following Isaac Newton’s *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

**Joseph Louis Lagrange.** *Mécanique analytique*. Nouvelle édition, revue et augmentée par l’auteur. Tome premier. Mme Ve Courcier, Paris, 1811. 490 pages.

**Joseph Louis Lagrange.** *Mécanique analytique*. Troisième édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand. Tome second. Mallet-Bachelier, Paris, 1855. 416 pages.

The historical transition from geometrical methods, as presented in Newton’s *Principia*, to methods of mathematical analysis.

Consider the exact differential of any set of location vectors  $\mathbf{r}_i$ , that are functions of other variable parameters (coordinates)  $q^1, q^2, \dots, q^n$  and time  $t$ .

The actual displacement is the differential

$$d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} dq^j$$

Now, imagine an arbitrary path through the configuration space/manifold. This means it has to satisfy the constraints of the system but not the actual applied forces

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j$$

A virtual infinitesimal displacement of a system of particles refers to a change in the configuration of a system as the result of any arbitrary infinitesimal change of location vectors (or coordinates)  $\delta \mathbf{r}_k$ , consistent with the forces and constraints imposed on the system at the current/given instant  $t$ . This displacement is called “virtual” to distinguish it from an actual displacement of the system occurring in a time interval  $dt$ , during which the forces and constraints may be changing.

Assume the system is in equilibrium, that is the full force on each particle vanishes,  $\mathbf{F}_i = \mathbf{0} \ \forall i$ . Then clearly the term  $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ , which is the virtual work of force  $\mathbf{F}_i$  in displacement  $\delta \mathbf{r}_i$ , also vanishes for each particle,  $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \ \forall i$ . The sum of these vanishing products over all particles is likewise equal to zero:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Decompose the full force  $\mathbf{F}_i$  into the applied (active) force  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  and the force of constraint  $\Phi_i$ ,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \Phi_i$$

We now restrict ourselves to systems for which the net virtual work of the force of every constraint is zero:

$$\sum_i \Phi_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

We therefore have as the condition for equilibrium of a system that the virtual work of all applied forces vanishes:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

— the principle of virtual work.

Note that coefficients  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  can no longer be thought equal to zero: in common  $\mathbf{F}_i^{(a)} \neq 0$ , since  $\delta \mathbf{r}_i$  are not independent but are bound by constraints.

Виртуальным смещением частицы с вектором-радиусом  $\mathbf{r}_k$  это вариация  $\delta \mathbf{r}_k$  — любое бесконечно малое изменение вектора  $\mathbf{r}_k$ , которое совместимо со связями (constraints). Если система свободна, то есть связей нет, тогда виртуальные смещения  $\delta \mathbf{r}_k$  совершенно случайны.

Связи бывают голономные (holonomic, или геометрические), связывающие только положения (смещения) — это функции лишь координат и, возможно, времени

$$c(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{3.1}$$

— и неголономные (или дифференциальные), содержащие производные координат по времени:  $c(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0$  и не интегрируемые до геометрических связей.

Когда все связи голономные, тогда виртуальные смещения частицы “ $k$ ” удовлетворяют уравнению

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial c_j}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (3.2)$$

В несвободных системах все силы делятся на две группы: активные и реакции связей. Реакция  $\Phi_k$  действует со стороны всех материальных ограничителей на частицу “ $k$ ” и меняется согласно уравнению (3.1) для каждой связи. Связи предполагаются идеальными:

$$\sum_k \Phi_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad — \quad (3.3)$$

работа реакций на любых виртуальных смещениях равна нулю.

Принцип виртуальной работы is

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k^{(a)} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{F}_k^{(a)}$  — лишь активные силы, без реакций связей.

Дифференциальное вариационное уравнение (3.4) может показаться тривиальным следствием закона Ньютона (1.3) и условия идеальности связей (3.3). Однако содержание (3.4) несравненно обширнее. Читатель вскоре увидит, что принцип (3.4) может быть положен в основу механики [91]. Разные модели упругих тел, что я описываю в этой книге, основаны на этом принципе.

Для примера рассмотрим совершенно жёсткое (недеформируемое) твёрдое тело.

$$\dots (2.4) \Rightarrow \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{x}$$

(begin copied from § 1.12)

Варьируя тождество (11.5), получим  $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = -\mathbf{O} \cdot \delta \mathbf{O}^\top$ . Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор  $\delta \mathbf{o}$  как  $\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$ . Приходим к соотношениям

$$\delta \mathbf{O} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{O}, \quad \delta \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top \right)_{\times}, \quad (3.5)$$

(end of copied from § 1.12)

...

Проявилась замечательная особенность (3.4): это уравнение эквивалентно системе такого порядка, каково число степеней свободы системы, то есть сколько независимых вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  мы имеем. Если в системе  $N$  точек есть  $m$  связей, то число степеней свободы  $n = 3N - m$ .

...

#### § 4. Баланс импульса, момента импульса и энергии

Эти уравнения баланса могут быть связаны со свойствами пространства и времени [92]. Сохранение импульса (количества движения) в замкнутой (изолированной)\* системе выводится из однородности пространства (*при любом параллельном переносе — трансляции — замкнутой системы как целого свойства этой системы не меняются*). Сохранение момента импульса — следствие изотропии пространства (*свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте этой системы как целого*). Энергия же изолированной системы сохраняется, так как время однородно\*\* (энергия  $E \equiv K(q, \dot{q}) + \Pi(q)$  такой системы не зависит явно от времени).

Уравнения баланса могут быть выведены из принципа виртуальной работы (3.4). Перепишем его в виде

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k^{(e)} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k + \delta W^{(i)} = 0, \quad (4.1)$$

где выделены внешние силы  $\mathbf{F}_k^{(e)}$  и виртуальная работа внутренних сил  $\delta W^{(i)} = \sum_k \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{r}_k$ .

\* *Замкнутая (изолированная) система* это такая система частиц, которые взаимодействуют только друг с другом, но ни с какими другими телами.

\*\* Характеристики “однородность” и “изотропность” пространства, “однородность” времени не фигурируют среди аксиом классической механики.



Предполагается, что внутренние силы не совершают работы на виртуальных смещениях тела как жёсткого целого ( $\delta \mathbf{p}$  и  $\delta \mathbf{o}$  — произвольные постоянные векторы, определяющие трансляцию и поворот)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_k &= \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k, \\ \delta \mathbf{p} &= \text{constant}, \delta \mathbf{o} = \text{constant} \end{aligned} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (4.2)$$

Предпосылки-соображения для этого предположения таковы.

Первое — для случая упругих (потенциальных) внутренних сил. Тогда  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$  — вариация потенциала с противоположным знаком. Достаточно очевидно, что только лишь деформирование меняет  $\Pi$ .

Второе соображение — в том, что суммарный вектор и суммарный момент внутренних сил равен нулю

$$\sum \dots$$

...

Принимая (4.2) и подставляя в (4.1) сначала  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{p}$  (трансляция), а затем  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k$  (поворот), получаем баланс импульса (...) и баланс момента импульса (...).

...

## § 5. Принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа

Two branches of analytical mechanics are Lagrangian mechanics (using generalized coordinates and corresponding generalized velocities in configuration space) and Hamiltonian mechanics (using coordinates and corresponding momenta in phase space). Both formulations are equivalent by a Legendre transformation on the generalized coordinates, velocities and momenta, therefore both contain the same information for describing the dynamics of a system.

Вариационное уравнение (3.4) удовлетворяется в любой момент времени. Проинтегрируем его\* по какому-либо промежутку  $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta K + \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (5.1)$$

Без ущерба для общности можно принять  $\delta \mathbf{r}_k(t_1) = \delta \mathbf{r}_k(t_2) = \mathbf{0}$ , тогда внеинтегральный член исчезает.

Вводятся обобщённые координаты  $q^i$  ( $i = 1, \dots, n$  — число степеней свободы). Векторы-радиусы становятся функциями вида  $\mathbf{r}_k(q^i, t)$ , тождественно удовлетворяющими уравнениям связей (3.1). Если связи стационарны, то есть (3.1) не содержат  $t$ , то остаётся  $\mathbf{r}_k(q^i)$ . Кинетическая энергия превращается в функцию  $K(q^i, \dot{q}^i, t)$ , где явно входящее  $t$  характерно лишь для нестационарных связей.

Весьма существенно понятие обобщённых сил  $Q_i$ . Они вводятся через выражение виртуальной работы

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_i Q_i \delta q^i, \quad Q_i \equiv \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^i}. \quad (5.2)$$

Стойит акцентировать происхождение обобщённых сил через работу. Установив набор обобщённых координат системы, следует сгруппировать приложенные силы  $\mathbf{F}_k$  в комплексы  $Q_i$ .

Если силы потенциальны с энергией  $\Pi = \Pi(q^i, t)$ , то

$$\sum_i Q_i \delta q^i = -\delta \Pi, \quad Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}. \quad (5.3)$$

Явное присутствие  $t$  может быть при нестационарности связей или зависимости физических полей от времени.

...

$$\begin{aligned} * \delta K &= \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k, \quad \left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) \dot{\phantom{x}} = \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \underbrace{\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k}_{\delta K} \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta K dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

Известны уравнения Lagrange'а не только второго, но и первого рода. Рассмотрим их ради методики вывода, много раз применяемой в этой книге.

При наличии связей (3.1) равенство  $\mathbf{F}_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$  не следует из вариационного уравнения (3.4), ведь тогда виртуальные смещения  $\delta \mathbf{r}_k$  не независимы. Каждое из  $m$  ( $m$  — число связей) условий для вариаций (3.2) умножим на некий скаляр  $\lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) и добавим к (3.4):

$$\sum_{k=1}^N \left( \mathbf{F}_k + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (5.4)$$

Среди  $3N$  компонент вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  зависимых  $m$ . Но столько же и множителей Лагранжа: подберём  $\lambda_\alpha$  так, чтобы коэффициенты (??какие?) при зависимых вариациях обратились в нуль. Но при остальных вариациях коэффициенты (??) также должны быть нулями из-за независимости. Следовательно, все выражения в скобках  $(\dots)$  равны нулю — это и есть уравнения Lagrange'а первого рода.

Поскольку для каждой частицы

...

## § 6. Статика

Рассмотрим систему со стационарными (постоянными во времени) связями при статических (не меняющихся со временем) активных силах  $\mathbf{F}_k$ . В равновесии  $\mathbf{r}_k = \text{constant}$ , и формулировка принципа виртуальной работы следующая:

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^i} = Q_i = 0. \quad (6.1)$$

Существенны обе стороны этого положения: и вариационное уравнение, и равенство нулю обобщённых сил.

Соотношения (6.1) — это самые общие уравнения статики. В литературе распространено узкое представление об уравнениях равновесия как балансе сил и моментов. Но при этом нужно понимать, что набор уравнений равновесия точно соответству-

ет обобщённым координатам. Результирующая сила (также называемая “равнодействующей силой” или “главным вектором”) и результирующая пара сил (“главный момент”) в уравнениях равновесия фигурируют\*, поскольку у системы есть степени свободы трансляции и поворота. Огромная популярность сил и моментов связана не столько с известностью статики совершенно недеформируемого твёрдого тела, но с тем, что виртуальная работа внутренних сил на смещениях системы как жёсткого целого равна нулю в любой среде.

Пусть в системе действуют два вида сил: потенциальные с энергией от обобщённых координат  $\Pi(q^i)$  и дополнительные внешние  $\mathring{Q}_i$ . Из (6.1) следуют уравнения равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} = \mathring{Q}_i, \quad (6.2)$$

$$d\Pi = \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial q^i} dq^i = \sum_i \mathring{Q}_i dq^i.$$

Здесь содержится нелинейная в общем случае задача статики о связи положения равновесия  $q^i$  с нагрузками  $\mathring{Q}_i$ .

В линейной системе с квадратичным потенциалом вида  $\Pi = \frac{1}{2} C_{ik} q^k q^i$

$$\sum_k C_{ik} q^k = \mathring{Q}_i. \quad (6.3)$$

Тут фигурируют элементы  $C_{ik}$  “матрицы жёсткости”, координаты  $q^k$  и нагрузки  $\mathring{Q}_i$ .

Сказанное возможно обобщить и на континуальные линейные упругие среды.

Матрица жёсткости  $C_{ik}$  обычно бывает положительной (таково свойство конструкций и в природе, и в технике). Тогда  $\det C_{ik} > 0$ ,

\* Со времён описания приведения любой системы сил, действующей на одно и то же совершенно жёсткое тело, к одной силе и одной паре (вокруг выбранной точки) в книге “Éléments de statique” Louis’a Poinso.

линейная алгебраическая система (6.3) однозначно разрешима, а решение её можно заменить минимизацией квадратичной формы

$$\mathcal{E}(q^j) \equiv \Pi - \sum_i \mathring{Q}_i q^i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} q^i C_{ik} q^k - \sum_i \mathring{Q}_i q^i \rightarrow \min. \quad (6.4)$$

Бывает однако, что конструкция неудачно спроектирована, тогда матрица жёсткости сингулярна (необратима) и  $\det C_{ik} = 0$  (или же весьма близок к нулю — nearly singular матрица с  $\det C_{ik} \approx 0$ ). Тогда решение линейной проблемы статики (6.3) существует лишь при ортогональности столбца нагрузок  $\mathring{Q}_i$  всем линейно независимым решениям однородной сопряжённой системы

...

Известные теоремы статики линейно **упругих** систем легко доказываются в случае конечного числа степеней свободы. Теорема Клапейрона выражается равенством

...

Теорема о взаимности работ (“работа  $W_{12}$  сил первого варианта на смещениях от сил второго равна работе  $W_{21}$  сил второго варианта на смещениях от сил первого”) мгновенно выводится из (6.3):

(...)

Тут существенна симметрия матрицы жёсткости  $C_{ij}$ , то есть консервативность системы.

...

Но вернёмся к проблеме (6.2), иногда называемой теоремой Lagrange’a. Её можно обратить преобразованием Лежандра Legendre (involution) transform(ation):

$$\begin{aligned} d\left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i\right) &= \sum_i d\left(\mathring{Q}_i q^i\right) = \sum_i \left(q^i d\mathring{Q}_i + \mathring{Q}_i dq^i\right), \\ d\left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i\right) - \sum_i \mathring{Q}_i dq^i &= \sum_i q^i d\mathring{Q}_i, \\ d\left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i - \Pi\right) &= \sum_i q^i d\mathring{Q}_i = \sum_i \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial \mathring{Q}_i} d\mathring{Q}_i; \end{aligned}$$

$$q^i = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \dot{Q}_i}, \quad \hat{\Pi}(\dot{Q}_i) = \sum_i \dot{Q}_i q^i - \Pi. \quad (6.5)$$

Это теорема Castigliano,  $\hat{\Pi}$  называется дополнительной энергией. В линейной системе (6.3)  $\Rightarrow \hat{\Pi} = \Pi$ . Теорема (6.5) бывает очень полезна — когда легко находится  $\hat{\Pi}(\dot{Q}_i)$ . Встречаются так называемые статически определимые системы, в которых все внутренние силы удаётся найти лишь из баланса сил и моментов. Для них (6.5) эффективна.

В отличие от линейной задачи (6.3), нелинейная задача (6.2) может не иметь решений вовсе или же иметь их несколько.

....

Рассказ о статике в общей механике закончим принципом d'Alembert'a: уравнения динамики отличаются от статических лишь наличием дополнительных “сил инерции”  $m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$ . Принцип d'Alembert'a достаточно очевиден, но бездумное применение может привести к ошибкам. Например, уравнения вязкой жидкости в статике и в динамике отличаются не только лишь инерционными добавками. Но для твёрдых упругих тел принцип d'Alembert'a полностью справедлив.

## § 7. Механика относительного движения

До этого не ставился вопрос о системе отсчёта, всё рассматривалось в некой “абсолютной” системе или одной из инерциальных систем (§ 1). Теперь представим себе две системы: “абсолютную” и “подвижную”

...

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} + \mathbf{x} \\ \mathbf{r} &= \rho_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho}_i \mathbf{e}_i, \quad \dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_i \mathbf{e}_i)^{\bullet} = \dot{x}_i \mathbf{e}_i + x_i \dot{\mathbf{e}}_i \end{aligned}$$

$$x_i \neq \text{constant} \Rightarrow \dot{x}_i \neq 0$$

По (11.11, § 1.11)

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow x_i \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times x_i \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{x}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}}_{\mathbf{v}_e} - \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}}_{\mathbf{v}_{rel}}$$

$$\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = \dot{x}_i \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{v}_{rel} - \text{relative velocity, } \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \equiv \mathbf{v}_e$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_{rel} \quad (7.1)$$

...

$$\dot{\dot{\mathbf{r}}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{w} \equiv \ddot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{x}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho}_i \dot{\mathbf{e}}_i, \quad \ddot{\mathbf{x}} = (x_i \mathbf{e}_i)^{\bullet\bullet} = (\dot{x}_i \mathbf{e}_i + x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} = \ddot{x}_i \mathbf{e}_i + \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow \ddot{\mathbf{e}}_i = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)$$

$$x_i \ddot{\mathbf{e}}_i = x_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times x_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times x_i \mathbf{e}_i) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \dot{x}_i \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}$$

$$\ddot{x}_i \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{w}_{rel} - \text{relative acceleration}$$

$$2\dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} \equiv \mathbf{w}_{Cor} - \text{Coriolis acceleration}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{w}_{rel} + \mathbf{w}_{Cor} + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i$$

$$(x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} = \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{Cor} + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i$$

$$(x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \dot{x}_i \mathbf{e}_i}_{\dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{Cor}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

...

## § 8. Малые колебания (вибрации)

Если статика линейной системы описывается уравнением (6.3), то в динамике мы имеем

$$\sum_k \left( A_{ik} \ddot{q}_k + C_{ik} q^k \right) = \ddot{Q}_i(t), \quad (8.1)$$

где  $A_{ik}$  — симметричная и положительная “матрица кинетической энергии”.

Любое описание колебаний почти всегда включает термин “мода”. Мода вибрации может быть определена как способ вибрирования или паттерн вибрации. Нормальная мода есть паттерн периодического движения, когда все части колеблющейся системы движутся синусоидально одинаковой частотой и с фиксированным соотношением фаз. Свободное движение, описываемое нормальными модами, происходит на фиксированных частотах — натуральных резонансных частотах колеблющейся системы.

Самое общее движение колеблющейся системы есть некоторая суперпозиция нормальных мод этой системы.\*

Изучение колеблющейся системы чаще всего начинается с ортогональных (нормальных) “мод” — гармоник, свободных (без какой-либо движущей или демпфирующей силы) синусоидальных колебаний

$$q^k(t) = q_k^* \sin \omega_k t.$$

Множители  $q_k^* = \text{constant}$  — ортогональные (нормальные) “моды” колебания,  $\omega_k$  — натуральные (резонансные, собственные) частоты. Этот набор, зависящий от структуры колеблющегося объекта, материалов и краевых условий, находится из задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_i = 0, \quad \ddot{q}_k^* &= -\omega_k^2 q_k^* \sin \omega_k t, \quad (8.1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_k (C_{ik} - A_{ik} \omega_k^2) q_k^* \sin \omega_k t &= 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

...

Интервал Duhamel’я is a way of calculating the response линейных систем to an arbitrary time-varying external perturbation.

...

\* Моды “нормальны” в смысле, что они движутся независимо, и возбуждение одной моды никогда не вызовет движение другой моды. В математических терминах нормальные моды ортогональны друг другу. В музыке нормальные моды вибрирующих инструментов (струн, воздушных трубок, перкуссии и других) называются “harmonics” или “overtones”.



## Библиография

В длинном списке книг про классическую механику читатель может найти работы и специалистов по механике [86, 87, 93, 94, 95], и широко ориентированных физиков-теоретиков [92, 88]. Весьма интересна книга Феликса Р. Гантмахер'а [91] с компактным, но полным изложением основ.

# НЕЛИНЕЙНО-УПРУГАЯ БЕЗМОМЕНТАЛЬНАЯ СРЕДА

## § 1. Континуум. Два описания процессов

Согласно атомной теории, вещество состоит из дискретных частиц — атомов. Поэтому модель системы частиц с массами  $m_k$  и векторами положения  $\mathbf{r}_k(t)$  может показаться подходящей даже несмотря на невообразимое число степеней свободы, так как объёмы памяти и быстрота компьютеров характеризуются тоже астрономическими числами.

Но всё же стоит выбрать фундаментально и качественно иную модель — модель сплошной среды (материального континуума), где масса непрерывно распределена в объёме: объём  $\mathcal{V}$  содержит массу

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}, \quad dm = \rho d\mathcal{V}, \quad (1.1)$$

здесь  $\rho$  — объёмная плотность массы и  $d\mathcal{V}$  — бесконечномалый элемент объёма.

Реальная материя моделируется как континуум, который может быть мыслим как бесконечное множество исчезающе малых частиц, соединённых вместе.

Пространство материальных точек — лишь первая и простая идея непрерывного распределения массы. Возможны более сложные модели, где частицы имеют больше степеней свободы: не только трансляции, но также поворота, внутренней деформации и другие. Зная, что такие модели привлекают всё больший интерес, в этой главе мы рассмотрим классический концепт о сплошной среде как “сделанной из простых точек”.

В каждый момент времени  $t$  деформируемый континуум занимает некий объём  $\mathcal{V}$  пространства. Этот объём движется и деформируется, но набор частиц внутри этого объёма постоянен. Это баланс массы (“материя не создаётся и не аннигилируется”)

$$dm = \rho d\mathcal{V} = \rho' d\mathcal{V}' = \overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{\mathcal{V}}, \quad m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' d\mathcal{V}' = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{\mathcal{V}}. \quad (1.2)$$

Вводя какие-либо переменные параметры  $q^i$  — криволинейные координаты, имеем отношение для положений частиц

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i, t). \quad (1.3)$$

...

*Материальное описание*

в начальный момент, в так называемой начальной (оригинальной, отечётной, “материальной”) конфигурации

в какой-то начальный момент  $t=0$

“запоминается” начальная (“материальная”) конфигурация — locations in space of particles at some arbitrarily chosen “initial” moment  $t=0$

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}(q^i) \equiv \mathbf{r}(q^i, 0)$$

Морфизм (функция)  $\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}(q^i)$

isomorphism (bijective mapping) (invertible one-to-one relation) (взаимно однозначное)

Subsequent locations in space of particles are then dependent variables — functions of time and of the initial (material, “Lagrangian”) coordinates/location  $\overset{\circ}{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t).$$

Для пространственного дифференцирования (постоянных во времени) отношений типа  $\varphi = \varphi(\overset{\circ}{\mathbf{r}})$

вводится локальный касательный базис  $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial i}$  и взаимный базис  $\overset{\circ}{\mathbf{r}}^i$

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial i} \equiv \partial_i \overset{\circ}{\mathbf{r}} \left( \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i} \right), \quad \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial j} = \delta_j^i$$

“материальный” оператор Hamilton’a  $\overset{\circ}{\nabla}$

$$\mathbf{E} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial i} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i \overset{\circ}{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{\mathbf{r}}, \quad \overset{\circ}{\nabla} \equiv \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i, \quad (1.4)$$

тогда  $d\varphi = d\overset{\circ}{\mathbf{r}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \varphi$ .

...

Но может быть эффективен ещё иной подход — *пространственное* (или “*эйлерово*”) *описание*, когда вместо фокусирования на том, как частицы континуума движутся из начальной конфигурации в пространстве и времени, процессы рассматриваются в неподвижных точках пространства с течением времени. С отношениями типа  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ , мы следим за происходящим именно в этом месте. Разные частицы, непрерывно уходящие и приходящие сюда, не смущают нас.

...

баланс массы в пространственном описании (уравнение непрерывности (сплошности, неразрывности) для массы)

...

Jaumann derivative (“**corotational** time derivative”) was first introduced by Gustav Jaumann\*

Es sei  $\frac{\partial}{\partial t}$  der Operator der lokalen Fluxion, d. i. der partiellen Fluxion in einem gegen das Koordinatensystem ruhenden Punkte des Raumes. Ferner sei  $\frac{d}{dt}$  der Operator der totalen Fluxion, welcher definiert wird durch

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a,$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \stackrel{3}{=} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla; \mathbf{a} - \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{a},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \stackrel{9}{=} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla; \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v} \times \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \times \text{rot } \mathbf{v}).$$

Endlich verwenden wir die körperliche Fluxion eines Skalars:

$$\frac{\delta}{\delta t} a = \frac{\partial}{\partial t} a + \text{div } a \mathbf{v} = \frac{d}{dt} a + a \text{ div } \mathbf{v}.$$

körperliche — bodily/телесная, material/вещественная(материальная), physical/физическая

\* **Gustav Jaumann.** Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (I. Mitteilung) // Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa, Band CXX, 1911. Seiten 385–530.

$$\nabla \cdot (av) = a \nabla \cdot v + v \cdot \nabla a$$

...

Пусть  $v(\overset{\circ}{r}, t)$  — какое-либо поле (?? только в материальном описании от  $\overset{\circ}{r}$  ??). Найдём скорость изменения интеграла по объёму

$$\Upsilon \equiv \int_{\mathcal{V}} \rho v d\mathcal{V}$$

(“ $v$  есть  $\Upsilon$  на единицу массы”). Кажущееся сложным вычисление  $\dot{\Upsilon}$  (ведь  $\mathcal{V}$  деформируется) на самом деле весьма простое вместе с (1.2):

$$\Upsilon = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} v d\overset{\circ}{\mathcal{V}} \Rightarrow \dot{\Upsilon} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \dot{v} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{v} d\mathcal{V}. \quad (1.5)$$

$$\Psi = \int_{\mathcal{V}} \rho \psi d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \psi d\mathcal{V}' \Rightarrow \dot{\Psi} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\psi} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \dot{\psi} d\mathcal{V}'$$

...

Не сто́ит противопоставлять материальное и пространственное описания. В этой книге используются оба, в зависимости от ситуации.

## §2. Градиент движения

Имея функцию движения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i, t)$ ,  $\overset{\circ}{\mathbf{r}}(q^i) \equiv \mathbf{r}(q^i, 0)$ , операторы “набла”  $\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$ ,  $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i$  и глядя на дифференциальные отношения для какого-либо бесконечно малого вектора в двух конфигурациях, текущей с  $d\mathbf{r}$  и начальной с  $d\overset{\circ}{\mathbf{r}}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d\overset{\circ}{\mathbf{r}} \cdot \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}}_{\substack{\mathbf{F}^\top \\ \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \mathbf{r}_{\partial_i}}} = \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^\top}_{\substack{\mathbf{F} \\ \mathbf{r}_{\partial_i} \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i}} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{r}} \\ d\overset{\circ}{\mathbf{r}} &= d\mathbf{r} \cdot \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{\mathbf{r}}}_{\substack{\mathbf{r}^i \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial_i} \\ \mathbf{F}^{-\top}}} = \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{\mathbf{r}}^\top}_{\substack{\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial_i} \mathbf{r}^i \\ \mathbf{F}^{-1}}} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.1)$$

приходит на ум ввести “градиент движения”\*, взяв one of these tensor multipliers for it:  $\mathbf{F} \equiv \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^\top = \mathbf{r}_{\partial_i} \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i$ .

Почему именно этот? Причина выбрать  $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^\top$  — другое выражение для дифференциала

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{r}} \\ \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}} \\ d\overset{\circ}{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \\ \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}} &= \partial_i \boldsymbol{\zeta} \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i & \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathbf{r}} &= \partial_i \boldsymbol{\zeta} \mathbf{r}^i \end{aligned}$$

...

$$\mathbf{E} = \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{\mathbf{r}}}_{\frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}} = \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}}_{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}}}$$

...

\* Тензору  $\mathbf{F}$  не вполне подходит его более популярное название “градиент деформации”, поскольку этот тензор описывает не только саму деформацию, но и поворот тела как целого без деформации.

Для декартовых координат с ортонормальным базисом  $\mathbf{e}_i = \text{constant}$

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x_i(t) \mathbf{e}_i, \quad \dot{\mathbf{r}} = x_i(0) \mathbf{e}_i = \dot{x}_i \mathbf{e}_i, \quad \dot{x}_i \equiv x_i(0), \\ \dot{\nabla} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} = \mathbf{e}_i \dot{\partial}_i, \quad \nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \partial_i, \\ \dot{\nabla} \mathbf{r} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{x}_i} = \mathbf{e}_i \frac{\partial (x_j \mathbf{e}_j)}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \dot{x}_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \dot{\partial}_i x_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \\ \nabla \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial x_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \partial_i \dot{x}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\end{aligned}$$

...

По теореме о полярном разложении (§ 1.13), градиент движения разложим на тензор поворота  $\mathbf{O}$  и симметричные положительные тензоры искажений  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}$$

...

Когда поворота нет ( $\mathbf{O} = \mathbf{E}$ ), тогда  $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$ .

...

### § 3. Меры (тензоры) деформации

А это — где возникает сверх сложность. Although, the multivariate is often seen as a big gift.

Градиент движения  $\mathbf{F}$  характеризует и деформацию тела, и поворот тела как целого. Тензорами лишь-деформации являются тензоры искажений  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  из полярного разложения  $\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}$ , так же как и другие тензоры, происходящие от  $\mathbf{U}$  или (и)  $\mathbf{V}$ .

Широко используются “квадраты”  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned}(U^2) \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} &= \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}, \\ (V^2) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \equiv \Phi.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Это тензор деформации Green’a (или правый тензор Cauchy–Green’a)  $\mathbf{G}$  и тензор деформации Finger’a (или левый тензор Cauchy–Green’a)  $\Phi$ . У них есть удобная связь с градиентом движения  $\mathbf{F}$ , без вычисления квадратных корней (как это нужно

для  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ ). Такова́ большая́ причина, почему тензоры  $\mathbf{G}$  и  $\Phi$  так широко́ используются.

Тензор  $\mathbf{G}$  впервые использовал George Green\*.

Обращение  $\Phi$  и  $\mathbf{G}$  даёт ещё два тензора деформации

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{-2} &= \Phi^{-1} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top)^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \equiv {}^2\mathbf{c}, \\ \mathbf{U}^{-2} &= \mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F})^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \equiv {}^2\mathbf{f}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

каждый из которых иногда называется тензором Piola или тензором Finger'a. Обратный к левому тензору Cauchy–Green'a  $\Phi$  — тензор деформации Cauchy  ${}^2\mathbf{c}$ .

Компоненты этих тензоров

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathring{\mathbf{r}}^i \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j} \mathring{\mathbf{r}}^j = G_{ij} \mathring{\mathbf{r}}^i \mathring{\mathbf{r}}^j, \quad G_{ij} \equiv \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j}, \\ {}^2\mathbf{f} &= \mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} = G^{ij} \mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j}, \quad G^{ij} \equiv \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j, \\ {}^2\mathbf{c} &= \mathbf{r}^i \mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \cdot \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} \mathbf{r}^j = g_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j, \quad g_{ij} \equiv \mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \cdot \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j}, \\ \Phi &= \mathbf{r}_{\partial i} \mathring{\mathbf{r}}^i \cdot \mathring{\mathbf{r}}^j \mathbf{r}_{\partial j} = g^{ij} \mathbf{r}_{\partial i} \mathbf{r}_{\partial j}, \quad g^{ij} \equiv \mathring{\mathbf{r}}^i \cdot \mathring{\mathbf{r}}^j \end{aligned}$$

совпадают с компонентами единичного (метрического) тензора

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{r}_{\partial i} \mathbf{r}^i = G_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_{\partial i} = G^{ij} \mathbf{r}_{\partial i} \mathbf{r}_{\partial j} \\ &= \mathring{\mathbf{r}}^i \mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} = g^{ij} \mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} = \mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \mathring{\mathbf{r}}^i = g_{ij} \mathring{\mathbf{r}}^i \mathring{\mathbf{r}}^j, \end{aligned}$$

но базисы компонент разные. Пользуясь индексной записью, легко запутаться в различиях между единичным тензором  $\mathbf{E}$  и тензорами деформации  $\mathbf{G}$ ,  $\Phi$ ,  ${}^2\mathbf{f}$ ,  ${}^2\mathbf{c}$ . Прямая безиндексная запись имеет тут явное преимущество.

Как упоминалось в § 1.13, инварианты тензоров искажений  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  одинаковые. Если  $w_i$  это три собственных значения  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ , то есть корни характеристических уравнений для этих тензоров, то вот их инварианты:

$$\text{I}(\mathbf{U}) = \text{I}(\mathbf{V}) = \text{trace } \mathbf{U} = \text{trace } \mathbf{V} = \sum U_{jj} = \sum V_{jj} = \sum w_i,$$

$$\text{II}(\mathbf{U}) = \text{II}(\mathbf{V}) = w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3,$$

$$\text{III}(\mathbf{U}) = \text{III}(\mathbf{V}) = w_1 w_2 w_3.$$

\* **Green, George.** (1839) On the propagation of light in crystallized media. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.* 1842, vol. 7, part II, pages 121–140.



Инварианты  $\mathbf{G}$  и  $\Phi$  тоже совпадают:

$$I(\mathbf{G}) = I(\Phi), \dots$$

Без деформации

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{G} = \Phi = {}^2\mathbf{f} = {}^2\mathbf{c} = \mathbf{E},$$

поэтому как характеристики деформации стоит взять разности типа  $\mathbf{U} - \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{E}$ , ...

...

### *The right Cauchy–Green deformation tensor*

George Green discovered a deformation tensor known as the right Cauchy–Green deformation tensor or Green’s deformation tensor

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \text{или} \quad G_{ij} = F_{k'i} F_{k'j} = \frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_j}.$$

This tensor gives the “square” of local change in distances due to deformation:  $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{G} \cdot d\hat{\mathbf{r}}$

The most popular invariants of  $\mathbf{G}$  are

$$I(\mathbf{G}) \equiv \text{trace } \mathbf{G} = G_{ii} = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$$

$$II(\mathbf{G}) \equiv \frac{1}{2} (G_{jj}^2 - G_{ik} G_{ki}) = \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \gamma_1^2$$

$$III(\mathbf{G}) \equiv \det \mathbf{G} = \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2$$

where  $\gamma_i$  are stretch ratios for unit fibers that are initially oriented along directions of eigenvectors of the right stretch tensor  $\mathbf{U}$ .

### *The inverse of Green’s deformation tensor*

Sometimes called the Finger tensor or the Piola tensor, the inverse of the right Cauchy–Green deformation tensor

$${}^2\mathbf{f} = \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \quad \text{или} \quad f_{ij} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_{k'}} \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial x_{k'}}$$

*The left Cauchy–Green or Finger deformation tensor*

Swapping multipliers in the formula for the right Green–Cauchy deformation tensor leads to the left Cauchy–Green deformation tensor, defined as

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top = \mathbf{V}^2 \quad \text{или} \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial x_j}{\partial \hat{x}_k}$$

The left Cauchy–Green deformation tensor is often called the Finger’s deformation tensor, named after Josef Finger (1894).

Invariants of  $\boldsymbol{\Phi}$  are also used in expressions for strain energy density functions. The conventional invariants are defined as

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \Phi_{ii} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &\equiv \frac{1}{2}(\Phi_{ii}^2 - \Phi_{jk}\Phi_{kj}) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \\ I_3 &\equiv \det \boldsymbol{\Phi} = J^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \end{aligned}$$

( $J \equiv \det \mathbf{F}$  — якобиан, определитель градиента движения)

*The Cauchy deformation tensor*

The Cauchy deformation tensor is defined as the inverse of the left Cauchy–Green deformation tensor

$${}^2\mathbf{c} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{или} \quad c_{ij} = \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_j}$$

$$d\hat{\mathbf{r}} \cdot d\hat{\mathbf{r}} = d\mathbf{r} \cdot {}^2\mathbf{c} \cdot d\mathbf{r}$$

This tensor is also called the Piola tensor or the Finger tensor in rheology and fluid dynamics literature.

*Finite strain tensors*

The concept of *strain* is used to evaluate how much a given displacement differs locally from a body displacement as a whole (a “rigid body displacement”). One of such strains for large deformations is the *Green strain tensor* (*Green–Lagrangian strain tensor*, *Green–Saint-Venant strain tensor*), defined as

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) \quad \text{или} \quad C_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial x_{k'}}{\partial \hat{x}_j} - \delta_{ij} \right)$$

or as the function of the displacement gradient tensor

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top \right)$$

in cartesian coordinates

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial \overset{\circ}{x}_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \overset{\circ}{x}_j} + \frac{\partial u_k}{\partial \overset{\circ}{x}_i} \frac{\partial u_k}{\partial \overset{\circ}{x}_j} \right)$$

The Green strain tensor measures how much  $\mathbf{G}$  differs from  $\mathbf{E}$ .

The *Almansi–Hamel strain tensor*, referenced to the deformed configuration (“Eulerian description”), is defined as

$${}^2\mathbf{a} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} - {}^2\mathbf{c}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \Phi^{-1}) \quad \text{или} \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial \overset{\circ}{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \overset{\circ}{x}_k}{\partial x_j} \right)$$

or as function of the displacement gradient

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{a} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top) \\ a_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

### *Seth–Hill family of abstract strain tensors*

B. R. Seth was the first to show that the Green and Almansi strain tensors are special cases of a more abstract measure of deformation. The idea was further expanded upon by Rodney Hill in 1968 (publication??). The Seth–Hill family of strain measures (also called Doyle–Ericksen tensors) is expressed as

$$\mathbf{D}_{(m)} = \frac{1}{2m} (\mathbf{U}^{2m} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{G}^m - \mathbf{E})$$

Для разных  $m$  это даёт

$\mathbf{D}_{(1)} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{E}) = \frac{1}{2} (\mathbf{G} - \mathbf{E})$	Green strain tensor
$\mathbf{D}_{(1/2)} = \mathbf{U} - \mathbf{E} = \mathbf{G}^{1/2} - \mathbf{E}$	Biot strain tensor
$\mathbf{D}_{(0)} = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G}$	logarithmic strain, Hencky strain
$\mathbf{D}_{(-1)} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2})$	Almansi strain

The second-order approximation of these tensors is

$$\mathbf{D}_{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top - (1 - m) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

where  $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S$  is the infinitesimal deformation tensor.

Many other different definitions of measures  $\mathbf{D}$  are possible, provided that they satisfy these conditions:

- ✓  $\mathbf{D}$  vanishes for any movement of a body as a rigid whole
- ✓ dependence of  $\mathbf{D}$  on displacement gradient tensor  $\nabla \mathbf{u}$  is continuous, continuously differentiable and monotonic
- ✓ it's desired that  $\mathbf{D}$  reduces to the infinitesimal linear deformation tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  when  $\nabla \mathbf{u} \rightarrow 0$

For example, tensors from the set

$$\mathbf{D}^{(n)} = (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{-n}) / 2n$$

aren't from the Seth–Hill family, but for any  $n$  they have the same 2nd-order approximation as Seth–Hill measures with  $m = 0$ .

*Wikipedia, the free encyclopedia* — Finite strain theory

...

*Логарифмическая деформация, деформация Генcky*

**Heinrich Hencky.** Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen. Zeitschrift für technische Physik, Vol. 9 (1928), Seiten 215–220.

....

## § 4. Поле скоростей

Эта тема обсуждается в почти любой книге о механике сплошной среды, однако для твёрдых упругих сред она не столь насущна. Среди разных моделей материального континуума, упругое твёрдое тело выделяется интересной возможностью вывода полного набора (системы) уравнений для него единой логически безупречной процедурой. Но пока мы идём путём, обычным для механики сплошной текучей среды.

Итак, есть поле скоростей в пространственном описании  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . Разложение тензора  $\nabla \mathbf{v} = \nabla \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^i \partial_i \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^i \dot{\mathbf{r}}_{\partial i}^*$  на симметричную и кососимметричную части (§ 1.7)

$$\nabla \dot{\mathbf{r}} = \nabla \dot{\mathbf{r}}^S - \frac{1}{2} (\nabla \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{E}$$

или, вводя тензор скорости деформации (rate of deformation tensor, rate of stretching tensor, strain rate tensor)  $\mathcal{D}$  и тензор вихря (vorticity tensor, rate of rotation tensor, spin tensor)  $\mathcal{W}$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \mathcal{D} - \mathcal{W}, \\ \mathcal{D} \equiv \nabla \mathbf{v}^S &= \nabla \dot{\mathbf{r}}^S = \frac{1}{2} (\mathbf{r}^i \dot{\mathbf{r}}_{\partial i} + \dot{\mathbf{r}}_{\partial i} \mathbf{r}^i), \\ -\mathcal{W} \equiv \nabla \mathbf{v}^A &= -\mathbf{w} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{w} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{r}^i \times \dot{\mathbf{r}}_{\partial i}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где также фигурирует (псевдо)вектор вихря  $\mathbf{w}$ , сопутствующий тензору вихря  $\mathcal{W}$ .

Компоненты тензора скорости деформации в базисе текущей конфигурации

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathcal{D}_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j, \quad \mathcal{D}_{ij} = \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathcal{D} \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{\partial i} \cdot (\mathbf{r}^k \dot{\mathbf{r}}_k + \dot{\mathbf{r}}_k \mathbf{r}^k) \cdot \mathbf{r}_{\partial j} = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j} + \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\partial j}) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j})^{\cdot} \end{aligned}$$

...

$$\dot{G}_{ij}$$

$$G_{ij} \equiv \mathbf{r}_{\partial i} \cdot \mathbf{r}_{\partial j}$$

...

Для упругих твёрдых сред нет нужды в дискуссии о поворотах: истинное представление появляется по пути логически гармоничных выводов без добавочных гипотез.

\* For sufficiently smooth functions, partial derivatives always commute, space and time ones too. Thus

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \quad \text{или} \quad \partial_i \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{\partial i}$$

## § 5. Вектор площади. Изменение площади

Возьмём бесконечно малую площадку. Вектор площади (area vector) по длине равен площади площадки и направлен вдоль нормали к этой площадке.

В начальной (оригинальной, недеформированной, “материальной”, *отечётной*) конфигурации вектор площади может быть представлен как  $\mathring{n}do$ . Площадь  $do$  бесконечно мала, а  $\mathring{n}$  — единичный вектор нормали.

В текущей (актуальной, деформированной, “пространственной”) конфигурации, та же площадка имеет вектор площади  $\mathbf{n}d\mathcal{O}$ .

С дифференциальной точностью, эти бесконечно малые площадки суть параллелограммы, поэтому

$$\begin{aligned}\mathring{n}do &= d\mathring{\mathbf{r}}' \times d\mathring{\mathbf{r}}'' = \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial q^j} dq^j = \mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} dq^i dq^j, \\ \mathbf{n}d\mathcal{O} &= d\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} dq^i dq^j.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Применяя преобразование объёма (??), имеем

$$\begin{aligned}d\mathcal{V} = Jd\mathcal{V} &\Rightarrow \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} = J\mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} \cdot \mathring{\mathbf{r}}_{\partial k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} \cdot \mathbf{r}_{\partial k} \mathbf{r}^k = J\mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} \cdot \mathring{\mathbf{r}}_{\partial k} \mathbf{r}^k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{r}_{\partial i} \times \mathbf{r}_{\partial j} = J\mathring{\mathbf{r}}_{\partial i} \times \mathring{\mathbf{r}}_{\partial j} \cdot \mathbf{F}^{-1}.\end{aligned}$$

Отсюда с (5.1) мы приходим к соотношению

$$\mathbf{n}d\mathcal{O} = J\mathring{n}do \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (5.2)$$

называемому Nanson’формулой Nanson’a.

## § 6. Силы в континууме. Существование тензора напряжения Cauchy

Augustin-Louis Cauchy основал *механику континуума* предположив, что две части континуума взаимодействуют посредством поверхностных плотностей контактных сил, сосредоточенных на разделяющей поверхности.

Полагая, что эти контактные силы зависят только от перпендикуляра (нормали) к разделяющей поверхности и что контактные силы балансируются некоторой объёмной плотностью силы

(включая инерцию), Cauchy поиграл с тетраэдрами и доказал существование тензора напряжений.

De la pression ou tension dans un corps solide. *Exercices de mathématiques*, par M. **Augustin-Louis Cauchy**. Seconde année: 1827. Paris, Chez de Bure frères. Pages 42 à 59.

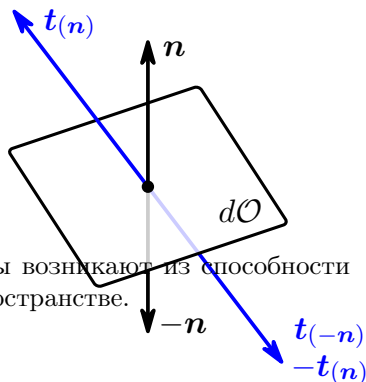
Частицы безмоментной модели континуума суть точки с лишь трансляционными степенями свободы\*. Поэтому среди обобщённых сил нет моментов также как нет внешних пар сил.

Сила  $\rho \mathbf{f} dV$  действует на бесконечно-малый объём  $dV$ . Если  $\mathbf{f}$  — массовая сила (действующая на единицу массы), то  $\rho \mathbf{f}$  — объёмная. Такие силы происходят от силовых полей, например: гравитационные силы (“силы тяжести”), силы инерции в неинерциальной системе отсчёта, электромагнитные силы в среде с зарядами и токами.

Поверхностная сила  $\mathbf{p} dO$  действует на бесконечно-малую поверхность  $dO$ . Это может быть контактное давление или/и трение, электростатическая сила с сосредоточенными на поверхности зарядами.

В материальном континууме, как и в любой механической системе, различаются внешние и внутренние силы. Внутренние силы уравнивают действие внешних сил, и они передаются непрерывно от точки к точке. Со времён Euler’a и Cauchy, внутренние силы предполагаются поверхностными контактными силами близкого действия: на бесконечномалой площадке  $\mathbf{n} dO$  действует сила  $\mathbf{t}(\mathbf{n}) dO$ . Она действует с той?? стороны из двух, куда направлена единичная нормаль  $\mathbf{n}$ .

По принципу действия и противодействия, вектор тракции  $\mathbf{t}(\mathbf{n})$  меняет свой знак с реверсированием направления нормали  $\mathbf{n}$ :  $\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n})$ . (Иногда этот тезис доказывается



\* Трансляционные степени свободы возникают из способности частицы двигаться свободно в пространстве.

через баланс импульса для бесконечно короткого цилиндра с основаниями  $\mathbf{n}d\mathcal{O}$  и  $-\mathbf{n}d\mathcal{O}$ .)

Вектор тракции  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  на площадке с единичной нормалью  $\mathbf{n}$  называется вектором поверхностной тракции (surface traction vector) или вектором силового напряжения. Однако,  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  — **не векторное поле**: тракция  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)$  зависит не только от положения  $\mathbf{r}$  точки, но также от локального направления (определяемой  $\mathbf{n}$ ) элемента поверхности. Бесконечное число площадок любого направления содержат одну и ту же точку, и имеется бесконечно много векторов тяги (тракции)  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  в каждой точке.

Напряжение в точке континуума это *не векторное поле*. Это более сложное поле, бесконечная коллекция всех векторов тяги для любых направлений бесконечно-малых площадок, содержащих эту точку в себе.

На самом деле, бесконечное множество (коллекция) всех векторов тяги  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  в точке полностью определяется одним-единственным тензором второй сложности — тензором напряжения Cauchy  $\boldsymbol{\tau}$ .

Вывод этого тезиса описан во многих книгах. Он известен как теорема о существовании тензора напряжения Cauchy — та самая, с впечатляющим аргументом-тетраэдром.

*Аргумент-тетраэдр Cauchy и доказательство существования тензора напряжений Cauchy.*

На поверхности бесконечномалого материального тетраэдра ...  
...

## § 7. Баланс импульса и момента импульса

Рассмотрим какой-либо случайный конечный объём  $\mathcal{V}$  упругой среды, содержащийся внутри поверхности  $\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})$ . Он нагружен



внешними силами, поверхностными контактными  $\mathbf{p}d\mathcal{O}$  и объёмными (или массовыми)  $\mathbf{f}dm = \rho\mathbf{f}d\mathcal{V}$ .

Интегральная формулировка баланса импульса (количества движения) такова

$$\left( \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \mathbf{p} d\mathcal{O}. \quad (7.1)$$

...  $\mathbf{p} = \mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$  ...

Импульс слева найдём по (1.5), а поверхностный интеграл превратим в объёмный по теореме о дивергенции. Получим

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}})) d\mathcal{V} = \mathbf{0}.$$

Но объём  $\mathcal{V}$  случаен, поэтому равно нулю подынтегральное выражение. Приходим к уравнению баланса импульса в локальной (дифференциальной) форме

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

...

Теперь о балансе момента импульса (момента количества движения). Вот интегральная формулировка:

$$\left( \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \mathbf{r} \times \mathbf{p} d\mathcal{O}. \quad (7.3)$$

Дифференцируя левую часть ( $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$ )

$$\left( \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{r}} d\mathcal{V} \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \ddot{\mathbf{r}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \rho \dot{\mathbf{r}}}_{\mathbf{0}} d\mathcal{V},$$

применяя теорему о дивергенции к поверхностному интегралу ....

(...  $\mathbf{p} = \mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$  ...)

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) = -(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r} = -\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\mathcal{O} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) d\mathcal{V},$$

...

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \ddot{\mathbf{r}} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) d\mathcal{V},$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) d\mathcal{V} = \mathbf{0},$$

...

$$\frac{\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r})}{\mathbf{r}^i \cdot \partial_i (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r})} = \frac{(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r}}{\mathbf{r}^i \cdot (\partial_i \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r}} + \mathbf{r}^i \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \partial_i \mathbf{r})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_i \mathbf{t}_{(i)}, \mathbf{e}_i = \text{constant}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^i \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \partial_i \mathbf{r}) &= \mathbf{r}^i \cdot (\mathbf{e}_j \mathbf{t}_{(j)} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{t}_{(j)} \times \mathbf{r}_i = \\ &= -\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i \times \mathbf{t}_{(j)} = -\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{t}_{(j)} = -\mathbf{e}_j \times \mathbf{t}_{(j)} = -\boldsymbol{\tau}_{\times} \end{aligned}$$

...

## § 8. Собственные числа тензора напряжения Cauchy. Круги Mohr'a

Как любой симметричный бивалентный тензор, тензор напряжения Cauchy  $\boldsymbol{\tau}$  имеет три вещественных собственных числа  $\sigma_i$ , а также тройку взаимно перпендикулярных собственных векторов единичной длины (§ 1.9). Собственные числа тензора  $\boldsymbol{\tau}$  называются главными напряжениями (principal stresses).

В представлении  $\boldsymbol{\tau} = \sum \sigma_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$  чаще всего индексы сортируются по убыванию  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , а тройка  $\mathbf{e}_i$  ориентирована как “правая”.

Известна теорема о кругах Мора (Mohr's circles)\*

...

Чтобы замкнуть набор (систему) уравнений модели сплошной среды, нужно добавить определяющие отношения (constitutive relations) — уравнения, связывающие напряжение с деформацией (и другие необходимые связи). Однако, для твёрдого упругого

\* Mohr's circles, named after Christian Otto Mohr, is a two-dimensional graphical representation of transformation for the Cauchy stress tensor.

континуума такой длинный путь построения модели излишен, что читатель и увидит ниже.

## § 9. Принцип виртуальной работы (без множителей Лагранжа)

Согласно принципу виртуальной работы для некоего конечного объёма сплошной среды

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \delta W^{(i)}) d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{O}(\partial \mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{O} = 0. \quad (9.1)$$

Здесь  $\delta W^{(i)}$  — работа внутренних сил на единицу объёма в текущей конфигурации;  $\mathbf{f}$  — массовая сила, с динамикой  $(\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}})$ ;  $\mathbf{p} = \mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$  — поверхностная сила.

Применяя к поверхностному интегралу теорему о дивергенции, используя\*

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^T$$

и случайность  $\mathcal{V}$ , получаем локальную дифференциальную версию (9.1)

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^T + \delta W^{(i)} = 0. \quad (9.2)$$

Когда тело виртуально движется как жёсткое целое, работа внутренних сил обнуляется

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} &= \boldsymbol{\delta \rho} + \boldsymbol{\delta \mathbf{o}} \times \mathbf{r} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0, \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot (\boldsymbol{\delta \rho} + \boldsymbol{\delta \mathbf{o}} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\tau}^T \cdot \nabla (\boldsymbol{\delta \rho} + \boldsymbol{\delta \mathbf{o}} \times \mathbf{r}) &= 0, \\ \boldsymbol{\delta \rho} = \text{constant} \Rightarrow \nabla \boldsymbol{\delta \rho} &= {}^2\mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\delta \mathbf{o}} = \text{constant} \Rightarrow \nabla \boldsymbol{\delta \mathbf{o}} = {}^2\mathbf{0}, \\ \nabla (\boldsymbol{\delta \rho} + \boldsymbol{\delta \mathbf{o}} \times \mathbf{r}) &= \nabla (\boldsymbol{\delta \mathbf{o}} \times \mathbf{r}) = \nabla \boldsymbol{\delta \mathbf{o}} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \boldsymbol{\delta \mathbf{o}} = \\ &= -\nabla \mathbf{r} \times \boldsymbol{\delta \mathbf{o}} = -\mathbf{E} \times \boldsymbol{\delta \mathbf{o}} \\ &\dots \end{aligned}$$

\*  $\mathbf{r}^i \cdot \partial_i (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{r}) = \mathbf{r}^i \cdot (\partial_i \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{r}^i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{r}),$   
 $\mathbf{r}^i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{r}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{r}) \mathbf{r}^i = \boldsymbol{\tau} \cdot (r^i \partial_i \delta \mathbf{r})^T$

Полагая  $\delta \mathbf{o} = \mathbf{0}$  (лишь трансляция)  $\Rightarrow \nabla \delta \mathbf{r} = \nabla \delta \rho = {}^2\mathbf{0}$ , оно превращается в баланс сил (импульса)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Если  $\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}$  (лишь поворот) с  $\delta \mathbf{o} = \text{constant}$ , то

$$(16.10, \S 1.16) \Rightarrow \nabla \delta \mathbf{r} = \nabla \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \mathbf{o} = -\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o},$$

$$\nabla \delta \mathbf{r}^\top = \mathbf{E} \times \delta \mathbf{o}$$

With

$$(7.4, \S 1.7) \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_\times = -\boldsymbol{\tau} \cdot \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon},$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \cdot (\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot (-{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \delta \mathbf{o}) = (-\boldsymbol{\tau} \cdot \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \delta \mathbf{o} = \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \delta \mathbf{o}$$

...

В упругой среде внутренние силы потенциальны

$$\delta W^{(i)} = -\rho \delta \tilde{\Pi}$$

...

“The elastic potential energy density per volume unit”, becomes when shorting “The elastic potential ....”

Плотность упругой потенциальной энергии, запасённой|накопленной в единице объёма тела (среды).

Дословный перевод с english на русский фразы “the elastic potential” даёт “упругий потенциал”.

....

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S = -\delta W^{(i)} = \rho \delta \tilde{\Pi} \quad (9.3)$$

...

Вид потенциала  $\tilde{\Pi}$  на единицу массы пока неизвестен, но очевидно что  $\tilde{\Pi}$  определяется деформацией.

С балансом массы  $\rho J = \overset{\circ}{\rho} \Leftrightarrow \rho = J^{-1} \overset{\circ}{\rho}$  ( $J \equiv \det \mathbf{F}$  — Jacobian, определитель градиента движения), потенциал на единицу объёма в недеформированной конфигурации  $\tilde{\Pi}$  имеет вид

$$\overset{\circ}{\Pi} \equiv \overset{\circ}{\rho} \tilde{\Pi} \Rightarrow \delta \overset{\circ}{\Pi} = \overset{\circ}{\rho} \delta \tilde{\Pi},$$

$$\rho \delta \tilde{\Pi} = J^{-1} \delta \overset{\circ}{\Pi}. \quad (9.4)$$

Полным аналогом (...) является равенство

...

## § 10. Определяющие отношения упругости

Фундаментальное соотношение упругости (??)

...

$$\Pi(C) = \int_0^C \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{C}$$

If the strain energy density is path independent, then it acts as a potential for stress, that is

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}$$

For adiabatic processes,  $\Pi$  is equal to the change in internal energy per unit of volume.

For isothermal processes,  $\Pi$  is equal to the Helmholtz free energy per unit of volume.

The natural configuration of a body is defined as the configuration in which the body is in stable thermal equilibrium with no external loads and zero stress and strain.

When we apply energy methods in elasticity, we implicitly assume that a body returns to its natural configuration after loads are removed. This implies that the Gibbs' condition is satisfied:

$$\Pi(\mathbf{C}) \geq 0 \quad \text{with} \quad \Pi(\mathbf{C}) = 0 \quad \text{iff} \quad \mathbf{C} = 0$$

...

Начальная конфигурация считается естественной (natural configuration) — недеформированной ненапряжённой:  $\mathbf{C} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ , поэтому в  $\Pi$  нет линейных членов.

Тензор жёсткости  $\mathcal{A}$

...

A rubber-like material (an elastomer)

Для материала типа резины (эластомера) характерны большие деформации. Функция  $\Pi(I, II, III)$  для такого материала бывает весьма сложной\*.

Преимущества использования  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{C}$  исчезают, если деформации большие (конечные) — проще остаться с вектором-радиусом  $\mathbf{r}$

...

...

\* **Harold Alexander.** A constitutive relation for rubber-like materials // International Journal of Engineering Science, volume 6 (September 1968), pages 549–563.

## § 11. Тензоры напряжения Piola–Kirchhoff'a и другие меры напряжения

Соотношение Nanson'a  $\mathbf{n}d\mathcal{O} = J\mathring{\mathbf{n}}do \cdot \mathbf{F}^{-1}$  между векторами бесконечно малой площадки в начальной ( $\mathring{\mathbf{n}}do$ ) и в текущей ( $\mathbf{n}d\mathcal{O}$ ) конфигурациях\*

$$(5.2) \Rightarrow \mathbf{n}d\mathcal{O} \cdot \boldsymbol{\tau} = J\mathring{\mathbf{n}}do \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}d\mathcal{O} = \mathring{\mathbf{n}} \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}do$$

даёт двойное выражение поверхностной силы

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}d\mathcal{O} = \mathring{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}do, \quad \mathbf{T} \equiv J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (11.1)$$

Тензор  $\mathbf{T}$  называется первым (несимметричным) тензором напряжения Piola–Kirchhoff'a, иногда — “номинальным напряжением” (“nominal stress”) или “инженерным напряжением” (“engineering stress”). Бывает и когда какое-либо из этих (на)именований даётся транспонированному тензору

$$\mathbf{T}^\top = J\boldsymbol{\tau}^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} = J\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}.$$

Обращение (11.1)

$$J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$$

...

$$\delta\Pi = \mathbf{T} \cdot \delta\mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top \Rightarrow \Pi = \Pi(\mathring{\nabla}\mathbf{r}) \quad (11.2)$$

— этот немного неожиданный результат получился благодаря коммутативности  $\delta$  и  $\mathring{\nabla}$ :  $\delta\mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top = \delta\mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top$  ( $\nabla$  и  $\delta$  не коммутируют).

Тензор  $\mathbf{T}$  оказался энергетически сопряжённым с  $\mathbf{F} \equiv \mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top$

$$\mathbf{T} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{F}}. \quad (11.3)$$

Второй (симметричный) тензор напряжения Piola–Kirchhoff'a  $\mathbf{S}$  энергетически сопряжён с  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$  и  $\mathbf{C} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{C}) &= \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{S} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{C}}, \\ d\mathbf{G} &= 2d\mathbf{C} \Rightarrow \delta\Pi(\mathbf{G}) = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{G}, \quad \mathbf{S} = 2\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{G}}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

\* По-прежнему,  $\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{r}^\circ} = \mathbf{r}_{\partial i} \mathring{\mathbf{r}}^i = \mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top$  — градиент движения,  
 $J \equiv \det \mathbf{F}$  — якобиан (определитель Якоби).

Связь между первым и вторым тензорами

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{\top} \Leftrightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top}, \quad \mathbf{T}^{\top} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$$

и между тензором  $\mathbf{S}$  и тензором напряжения Cauchy  $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \Leftrightarrow J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} = \boldsymbol{\tau}.$$

...

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{\top} = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^{\top} \\ \delta \mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} \\ \delta \mathbf{T} &= \delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{F}^{\top} \end{aligned}$$

...

The quantity  $\boldsymbol{\kappa} = J \boldsymbol{\tau}$  is called the *Kirchhoff stress tensor* and is used widely in numerical algorithms in metal plasticity (where there's no change in volume during plastic deformation). Another name for it is *weighted Cauchy stress tensor*.

...

Вот баланс сил (импульса) с тензором  $\mathbf{T}$  для любого недеформированного объёма  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$

$$\int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\mathcal{O} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} + \int_{\mathcal{O}(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} d\mathcal{O} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) d\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \mathbf{0}$$

или в локальной (дифференциальной) версии

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (11.5)$$

Преимущества этого уравнения в сравнении с (7.2): здесь фигурирует известная плотность  $\overset{\circ}{\rho}$  массы недеформированного объёма  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$ , и оператор  $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \overset{\circ}{r}^i \partial_i$  определяется через известные векторы  $\overset{\circ}{r}^i$ . Появление  $\mathbf{T}$  **отражает** специфическое свойство упругого твёрдого тела — “помнить” свою начальную конфигурацию. Тензор  $\mathbf{T}$  едва ли полезен в механике текучих сред.



Принцип виртуальной работы для произвольного объёма  $\overset{\circ}{V}$  упругой ( $\delta W^{(i)} = -\delta\Pi$ ) среды:

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} - \delta\Pi \right) d\overset{\circ}{V} + \int_{o(\partial\overset{\circ}{V})} \overset{\circ}{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{r} do = 0,$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{r}) = \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{T}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r}, \quad \mathbf{T}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r} = \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r}^\top$$

$$\delta\Pi = \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r}^\top$$

....

The first one is non-symmetric, it links forces in the deformed stressed configuration to the underformed geometry and mass (volumes, areas, densities as they were initially), and it is energetically conjugate градиент движения (часто ошибочно называемый “градиент деформации”, забывая о жёстких вращениях). The first (or sometimes its transpose) is also known as “nominal stress” and “engineering stress”.

The second one is symmetric, it links loads in the initial undeformed configuration to the initial mass and geometry, and it is conjugate to the right Cauchy–Green deformation tensor (and thus to the Cauchy–Green–Venant measure of deformation).

The first is simpler when you use just the motion gradient and is more universal, but the second is simpler when you prefer right Cauchy–Green deformation and its offsprings.

There’s also popular Cauchy stress, which relates forces in the deformed configuration to the deformed geometry and mass.

“energetically conjugate” means that their product is kind of energy, here: elastic potential energy per unit of volume

.....

В случае конечных деформаций, тензоры Piola–Kirchhoff’a  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{S}$  описывают напряжение относительно начальной конфигурации. В отличие от них, тензор напряжения Cauchy  $\boldsymbol{\tau}$  описывает напряжение относительно текущей конфигурации. Для бесконечно-малых деформаций тензоры напряжения Cauchy и Piola–Kirchhoff’a идентичны.

### 1st Piola–Kirchhoff stress tensor

The 1st Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{T}$  relates forces in the current (present, “spatial”) configuration with areas in the initial (“material”) configuration

$$\mathbf{T} = J \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

где  $\mathbf{F}$  есть градиент движения и  $J \equiv \det \mathbf{F}$  есть определитель Jacobi, Jacobian.

Because it relates different coordinate systems, the 1st Piola–Kirchhoff stress is a two-point tensor. Commonly, it’s not symmetric.

The 1st Piola–Kirchhoff stress is the 3D generalization of the 1D concept of engineering stress.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 1st Piola–Kirchhoff stress tensor will vary with material orientation.

The 1st Piola–Kirchhoff stress is energy conjugate to the motion gradient.

### 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor

The 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{S}$  relates forces in the initial configuration to areas in the initial configuration. The force in the initial configuration is obtained via mapping that preserves the relative relationship between the force direction and the area normal in the initial configuration.

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

This tensor is a one-point tensor and it is symmetric.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor remain constant, irrespective of material orientation.

The 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor is energy conjugate to the Green–Lagrange finite strain tensor.

...

## § 12. Варьирование текущей конфигурации

Обыкновенно рассматриваются две конфигурации нелинейной упругой среды: начальная с векторами положения  $\mathring{\mathbf{r}}$  и текущая (актуальная) с  $\mathbf{r}$ .

А следующие уравнения описывают малое изменение текущей конфигурации с бесконечно-малыми изменениями вектора положения  $\delta\mathbf{r}$ , вектора массовых сил  $\delta\mathbf{f}$ , первого тензора напряжения Piola–Kirchhoff'a  $\delta\mathbf{T}$  и тензора деформации  $\delta\mathbf{C}$ .

Варьируя (11.5),  $(\dots)^*$  и  $(\dots)$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \mathring{\rho}\delta\mathbf{f} + \mathring{\nabla} \cdot \delta\mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad \delta\mathbf{T} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta\mathbf{C} \right) \cdot \mathbf{F}^\top + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta\mathbf{F}^\top, \\ \delta\mathbf{F}^\top &= \delta\mathring{\nabla}\mathbf{r} = \mathring{\nabla}\delta\mathbf{r} = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla\delta\mathbf{r}, \quad \delta\mathbf{F} = \delta\mathring{\nabla}\mathbf{r}^\top = \nabla\delta\mathbf{r}^\top \cdot \mathbf{F}, \\ \delta\mathbf{C} &= \mathbf{F}^\top \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}, \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla\delta\mathbf{r}^S. \end{aligned} \quad (12.1)$$

...

$$\begin{aligned} (5.2) \Rightarrow \mathring{n}d\mathcal{O} &= J^{-1}n d\mathcal{O} \cdot \mathbf{F} \Rightarrow \mathring{n} \cdot \delta\mathbf{T} d\mathcal{O} = J^{-1}n \cdot \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{T} d\mathcal{O} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathring{n} \cdot \delta\mathbf{T} d\mathcal{O} = n \cdot \delta\boldsymbol{\tau} d\mathcal{O}, \quad \delta\boldsymbol{\tau} \equiv J^{-1}\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{T} \end{aligned}$$

— введённый так тензор  $\delta\boldsymbol{\tau}$  связан с вариацией  $\delta\mathbf{T}$  как  $\boldsymbol{\tau}$  связан с  $\mathbf{T}$  ( $\boldsymbol{\tau} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ ). Из (12.1) и ...

...

... корректируя коэффициенты линейной функции  $\delta\boldsymbol{\tau}(\nabla\delta\mathbf{r})$ .

## § 13. Внутренние связи

До сих пор деформация считалась свободной, мера деформации  $\mathbf{C}$  могла быть любой. Однако, существуют материалы со значительным сопротивлением некоторым видам деформации. Резина, например, изменению формы сопротивляется намного меньше, чем изменению объёма — некоторые виды резины можно считать несжимаемым материалом.

Понятие геометрической связи, развитое в общей механике ...

$$\begin{aligned} * \nabla &= \nabla \cdot \mathring{\nabla}\mathring{\mathbf{r}} = \mathring{r}^i \partial_i \cdot \mathring{r}^j \partial_j \mathring{\mathbf{r}} \stackrel{?}{=} \mathring{r}^i \partial_i \mathring{\mathbf{r}} \cdot \mathring{r}^j \partial_j = \mathring{\nabla}\mathring{\mathbf{r}} \cdot \mathring{\nabla} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathring{\nabla} \\ \mathring{\nabla} &= \mathring{\nabla} \cdot \nabla\mathbf{r} = \mathring{r}^i \partial_i \cdot \mathbf{r}^j \partial_j \mathbf{r} \stackrel{?}{=} \mathring{r}^i \partial_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^j \partial_j = \mathring{\nabla}\mathbf{r} \cdot \nabla = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla \end{aligned}$$

...

for incompressible materials  $\Pi = \Pi(I, II)$

Mooney–Rivlin model of incompressible material

$$\Pi = c_1(I - 3) + c_2(II - 3)$$

incompressible Treloar (neo-Hookean) material

$$c_2 = 0 \Rightarrow \Pi = c_1(I - 3)$$

...

## § 14. Полая сфера под давлением

Решение этой относительно простой задачи описано во многих книгах. В начальной (ненапряжённой) конфигурации имеем сферу с внутренним радиусом  $r_0$  и наружным  $r_1$ . Давление равно  $p_0$  внутри и  $p_1$  снаружи.

Введём удобную для этой задачи сферическую систему координат в отсчётной конфигурации  $q^1 = \theta$ ,  $q^2 = \phi$ ,  $q^3 = r$  (рис. ??). Эти же координаты будут и материальными. Имеем

...

## § 15. Напряжения как множители Лагранжа

Описанному ранее в § 9 использованию принципа виртуальной работы предшествовало введение тензора напряжения Cauchy через баланс сил для бесконечно малого тетраэдра (§ 6). Но теперь мы увидим, что сей принцип применим и без рассуждений с тетраэдром.

Рассмотрим тело — не только лишь упругое, с любой виртуальной работой внутренних сил  $\delta W^{(i)}$  на единицу массы — нагруженное массовыми  $\mathbf{f} dm$  (для краткости пишем  $\mathbf{f}$  вместо  $\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}$ , так что динамика присутствует) и поверхностными  $\mathbf{p} d\mathcal{O}$  внешними силами. Имеем вариационное уравнение

$$\int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \delta W^{(i)}) dV + \int_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{O} = 0. \quad (15.1)$$

Предполагается, что внутренние силы не производят работу, когда континуум (тело) виртуально движется  $\delta \mathbf{r}$  как целое без деформаций ( $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = {}^2\mathbf{0}$ ). Тогда

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \delta \mathbf{r}^S = {}^2\mathbf{0} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (15.2)$$

Отбросив  $\delta W^{(i)}$  в (15.1) при условии (15.2), получим вариационное уравнение со связью. Приём с множителями Лагранжа даёт возможность считать вариации  $\delta \mathbf{r}$  независимыми. Поскольку в каждой точке связь представлена симметричным тензором второй сложности, то таким же тензором будут и множители Лагранжа  ${}^2\boldsymbol{\lambda}$ . Приходим к уравнению

$$\int_V \left( \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} - {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S \right) dV + \int_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} d\mathcal{O} = 0. \quad (15.3)$$

Благодаря симметрии  ${}^2\boldsymbol{\lambda}$  имеем\*

$$\begin{aligned} {}^2\boldsymbol{\lambda} &= {}^2\boldsymbol{\lambda}^\top \Rightarrow {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S = {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^\top, \\ {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}^S &= \nabla \cdot ({}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{r}) - \nabla \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{r}. \end{aligned}$$

\*  $\boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X}^\top = \boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X}^S$ ,  $\nabla \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{B}^\top \cdot \nabla \mathbf{a}$

Подставив это в (15.3) и применив теорему о дивергенции, получаем

$$\int_V (\rho f + \nabla \cdot {}^2\lambda) \cdot \delta r dV + \int_{\mathcal{O}(\partial V)} (p - n \cdot {}^2\lambda) \cdot \delta r d\mathcal{O} = 0.$$

Но  $\delta r$  случайна на поверхности и в объёме, так что

$$p = n \cdot {}^2\lambda, \quad \nabla \cdot {}^2\lambda + \rho f = 0$$

— формально введённый симметричный множитель  ${}^2\lambda$  оказался тензором напряжения Cauchy.

Похожее введение напряжений было представлено в книге [?]. Тут нет новых результатов, но интересна сама возможность одновременного вывода тех уравнений механики сплошной среды, которые раньше считались независимыми. В следующих главах эта техника используется для построения новых континуальных моделей.

## Библиография

Глубина изложения нелинейной безмоментной упругости характерна для книг А. И. Лурье [28, 29]. Оригинальность как основных идей, так и стиля присуща книге С. Truesdell’a [60]. Много ценной информации можно найти у К. Ф. Черных [?]. Книгу Л. М. Зубова [20] тоже сто́ит упомянуть. О применении нелинейной теории упругости в смежных областях рассказано в книге С. Teodosiu [56]. Повышенным математическим уровнем отличается монография Ph. Ciarlet [53].

## КЛАССИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ

Эта глава — про геометрически линейную модель с бесконечно малыми смещениями, где

- ✓  $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \rho = \overset{\circ}{\rho}$  — “уравнения можно писать в начальной конфигурации” (временами это называют “принципом начальных размеров”),
- ✓ операторы  $\overset{\circ}{\nabla}$  и  $\nabla$  неразличимы,
- ✓ операторы  $\delta$  и  $\nabla$  коммутируют, потому для примера  $\delta \nabla u = \nabla \delta u$ .

### §1. Полный набор уравнений

Уравнения нелинейной упругости, даже в самых простых случаях, приводят к математически сложным задачам. Поэтому линейная теория бесконечно малых смещений повсеместно применяется. Уравнения этой теории были выведены в первой половине XIX<sup>го</sup> века Cauchy, Navier, Lamé, Clapeyron’ом, Poisson’ом, Saint-Venant’ом, George Green’ом и другими учёными.

Полный замкнутый набор уравнений классической линейной теории в прямой инвариантной тензорной записи, включающий

- ✓ баланс сил (импульса, количества движения, *vis viva*),
- ✓ соотношения напряжение–деформация для материала,
- ✓  $u \mapsto \varepsilon$ ,

есть

$$\nabla \cdot \sigma + v = 0, \quad \sigma = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} = {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \nabla u^S. \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma$  это линейный тензор напряжений,  $v$  это вектор объёмных нагрузок,  $\varepsilon$  это тензор бесконечномалой линейной деформации,  $\Pi(\varepsilon)$  это потенциальная энергия деформации на единицу объёма и  ${}^4\mathcal{A}$  это тензор жёсткости. Он четырёхвалентный со следующей



симметрией

$${}^4\mathcal{A}_{12\rightleftharpoons 34} = {}^4\mathcal{A}, \quad {}^4\mathcal{A}_{1\rightleftharpoons 2} = {}^4\mathcal{A}, \quad {}^4\mathcal{A}_{3\rightleftharpoons 4} = {}^4\mathcal{A}.$$

Но откуда этот набор (система) уравнений следует?

Уравнения (1.1) точные, они могут быть получены варьированием уравнений нелинейной теории. Варьирование от произвольной конфигурации описано в § 3.12. Линейная теория это результат варьирования от начальной ненапряжённой конфигурации, когда

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{C} = {}^2\mathbf{0}, \quad \delta\mathbf{C} = \nabla\delta\mathbf{r}^S, \\ \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}, \quad \delta\boldsymbol{\tau} = \delta\mathbf{T} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{C}\partial\mathbf{C}} \cdots \delta\mathbf{C}, \quad \nabla \cdot \delta\boldsymbol{\tau} + \rho\delta\mathbf{f} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Остаётся поменять

- ✓  $\delta\mathbf{r}$  на  $\mathbf{u}$ ,
- ✓  $\delta\mathbf{C}$  на  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,
- ✓  $\delta\boldsymbol{\tau}$  на  $\boldsymbol{\sigma}$ ,
- ✓  $\partial^2\Pi/\partial\mathbf{C}\partial\mathbf{C}$  на  ${}^4\mathcal{A}$ ,
- ✓  $\rho\delta\mathbf{f}$  на  $\mathbf{v}$ .

Если вывод (1.2) кажется читателю малопонятным, возможно исходить из следующих уравнений

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^\top, \\ \boldsymbol{\tau} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^\top, \quad \mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^\top. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Полагая смещение  $\mathbf{u}$  малым (бесконечно малым), мы перейдём от (1.3) к (1.1).

Или так. Вместо  $\mathbf{u}$  взять некоторый достаточно малый параметр  $\chi\mathbf{u}$ ,  $\chi \rightarrow 0$ . И представить после этого неизвестные рядами в целых показателях параметра  $\chi$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{(0)} + \chi\boldsymbol{\tau}^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^{(0)} + \chi\mathbf{C}^{(1)} + \dots, \\ \nabla = \overset{\circ}{\nabla} + \chi\nabla^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \chi\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^\top, \quad J = 1 + \chi J^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Полный набор уравнений (1.1) выходит из первых (нулевых) членов этих рядов. В книге [60] это названо “формальным приближением”.

Невозможно сказать однозначно насколько малым параметр  $\chi$  должен быть — ответ зависит от ситуации и определяется тем, описывает ли линейная модель интересующий нас эффект или

нет. Когда, как пример, меня интересует связь между частотой свободно вибрирующего движения после начального смещения, то нужна нелинейная модель.

Линейная задача ставится в начальном объёме  $\mathcal{V} = \mathring{\mathcal{V}}$ , ограниченном поверхностью  $o$  с вектором площади  $\mathbf{n}do$  (“принцип начальных размеров”).

Краевые (граничные) условия чаще всего такие: на части  $o_1$  поверхности известны смещения, а на другой части  $o_2$  известны силы.

$$\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{o_2} = \mathbf{p}. \quad (1.4)$$

Бывают и более сложные комбинации, если мы знаем некоторые компоненты как  $\mathbf{u}$ , так и  $\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  одновременно. Для примера, на плоской грани  $x = \text{constant}$  при вдавливании штампа с гладкой поверхностью  $u_x = \nu(y, z)$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$  (функция  $\nu$  определяется формой штампа).

Для динамических проблем мы имеем  $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$  вместо просто  $\mathbf{f}$ . А начальные условия для динамических задач ставятся как обычно в механике — на положения и на скорости: в данный момент времени  $t=0$  известны  $\mathbf{u}$  и  $\dot{\mathbf{u}}$ . Линейность задач

Линейность даёт принцип суперпозиции (или независимости) действия нагрузок. Когда нагрузок несколько, проблема может быть решена для каждой нагрузки отдельно. И тогда полное решение может быть получено суммированием. Для статики это значит, например, следующее: если внешние нагрузки  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{p}$  растут в  $m$  раз (тело закреплено на  $o_1$ ), то  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  вырастут тоже в  $m$  раз. Плотность потенциальной энергии  $\Pi$  вырастет в  $m^2$  раз. В реальности такое наблюдается лишь когда нагрузки малые.

Плотность потенциальной энергии упругой деформации  $\Pi$

$$\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}$$

и её вариация

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \delta(\boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\delta \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\delta^2 \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdots \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \delta \boldsymbol{\varepsilon} = 2\Pi(\delta \boldsymbol{\varepsilon})$$

Как отмечалось в гл. 2, принцип виртуальной работы (принцип d'Alembert'a–Lagrange'a) может быть положен в основу механики. Этот принцип справедлив и для линейной теории (внутренние силы в упругой среде потенциальны  $\delta W^{(i)} = -\delta\Pi$ )

$$\int_V \left( (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} - \delta \Pi \right) dV + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} d\sigma = 0, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0}, \quad (1.5)$$

потому что

$$\delta \Pi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u},$$

$$\int_V \delta \Pi dV = \oint_{o(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\sigma - \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} dV$$

и левая часть (1.5) становится

$$\int_V \left( \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} \right) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{o_2} (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} d\sigma,$$

что равно нулю. Отметим краевое условие  $\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0}$ : виртуальные смещения совместимы с этой связью  $\delta \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0}$ .

## § 2. Уникальность решения в динамике

Как это типично для линейной математической физики, теорема единственности доказывается “от противного”. Предположим, что существуют два решения:  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t)$ . Если разность  $\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  будет равной  $\mathbf{0}$ , тогда эти решения совпадают, то есть решение единственно.

Но сперва мы убедимся в существовании интеграла энергии — путём вывода уравнения баланса механической энергии для линейной модели теории малых смещений

$$\int_V (\mathbf{K} + \Pi) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\sigma, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{o_2} = \mathbf{p}, \quad \underbrace{\quad}_{\sigma}$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^\circ, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}^\circ.$$

Для левой части мы имеем

$$\dot{K} = \frac{1}{2}(\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})^{\bullet} = \frac{1}{2}\rho(\dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}},$$

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon} \dots \boldsymbol{\mathcal{A}} \dots \boldsymbol{\varepsilon})^{\bullet}}_{2\boldsymbol{\varepsilon} \dots \boldsymbol{\mathcal{A}} \dots \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \boldsymbol{\sigma} \dots \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \dots \nabla \dot{\mathbf{u}}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{-(f - \rho \ddot{\mathbf{u}})} \cdot \dot{\mathbf{u}} =$$

(использован баланс импульса  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ),

$$\dot{K} + \dot{\Pi} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}}.$$

Применяя теорему о дивергенции

$$\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dV = \oint_{o(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\sigma$$

и краевое условие  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}$  на  $o_2$ , получаем (2.1).

Из (2.1) следует, что без нагрузок (когда нет внешних сил, ни объёмных, ни поверхностных), и полная механическая энергия не изменяется:

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ и } \mathbf{p} = \mathbf{0} \Rightarrow \int_V (K + \Pi) dV = \text{constant}(t). \quad (2.2)$$

Если в момент  $t=0$  был ненапряжённый ( $\Pi=0$ ) покой ( $K=0$ ), то

$$\int_V (K + \Pi) dV = 0. \quad (2.2')$$

Кинетическая энергия положительна:  $K > 0$  если  $\dot{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$  и исчезает (обнуляется) лишь когда  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  — это вытекает из её определения  $K \equiv \frac{1}{2}\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ . Потенциальная энергия, будучи квадратичной формой  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \dots \boldsymbol{\mathcal{A}} \dots \boldsymbol{\varepsilon}$ , тоже положительна:  $\Pi > 0$  если  $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$ . Таков априорное требование положительной определённости для тензора жёсткости  $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ . Это одно из “дополнительных неравенств в теории упругости” [28, 60].

Так как  $K$  и  $\Pi$  положительно определены, (2.2') даёт

$K = 0, \Pi = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \boldsymbol{\omega}^\circ \times \mathbf{r}$   
( $\mathbf{u}^\circ$  и  $\boldsymbol{\omega}^\circ$  — некоторые константы трансляции и поворота). С неподвижной частью поверхности

$$\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}^\circ = \mathbf{0} \text{ и } \boldsymbol{\omega}^\circ = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ всюду.}$$

Теперь вспомним о двух решениях  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ . Их разность  $\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  есть решение полностью “однородной” (совсем без постоянных членов) линейной задачи: в объёме  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , в краевых

и в начальных условиях — нули. Поэтому  $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$ , и единственность доказана.

Что же для существования решения — его не обосновать для общего случая простыми выводами. Я могу лишь сказать, что динамическая проблема является эволюционной, она описывает прогресс процесса во времени.

Баланс (сохранение) импульса даёт ускорение  $\ddot{\mathbf{u}}$ . Далее, переходя на “следующий временной слой”  $t + dt$ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t + dt) &= \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) + \ddot{\mathbf{u}}dt, \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + dt) &= \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{u}}dt, \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t + dt) &= (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + dt))^S \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t + dt)\end{aligned}$$

и так далее. Разумеется, эти соображения лишены математической щепетильности. Последнее может быть найдено, для примера, в монографии Philippe’a Ciarlet [53].

### § 3. Закон Hooke’a для изотропного материала

.....

$$= \mathbf{E} \tag{3.1}$$

В компонентах для изотропной среды имеем

$$A_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \tag{3.2}$$

— это компоненты изотропного тензора четвёртой сложности. Эти компоненты не меняются когда базис вращается.

.....

### § 4. Теоремы статики

*Теорема Clapeyron’a*

В равновесии с внешними силами, объёмными  $\mathbf{f}$  и поверхностными  $\mathbf{p}$ , работа этих “статически замороженных” (то есть постоянных

во времени) сил на актуальных смещениях равна удвоенной\* энергии деформации

$$2 \int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} do. \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \circ \quad 2\Pi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}}_{-\mathbf{f}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = \int_{o_2} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}_p \cdot \mathbf{u} do + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} \quad \bullet \end{aligned}$$

Из (4.1) следует также, что без нагрузки  $\int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = 0$ . Поскольку  $\Pi$  положителен, то и напряжение  $\boldsymbol{\sigma}$ , и деформация  $\boldsymbol{\varepsilon}$  без нагрузки равны нулю.

$$\begin{aligned} 2\Pi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\ \dot{\Pi} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \delta\Pi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

$\Pi$  равна лишь половине работы внешних сил.

Накопленная потенциальная энергия деформации  $\Pi$  равна только половине работы, совершённой внешними силами, действующими из ненагруженной конфигурации к равновесию со внешними силами.

Теорема Клапейрона подразумевает, что накопленная упругая энергия составляет лишь половину энергии, потраченной на деформацию. Оставшаяся половина работы, совершённой внешними силами, теряется где-то до достижения равновесия.

\*“Ce produit représentait d’ailleurs le double de la force vive que le ressort pouvait absorber par l’effet de sa flexion et qui était la mesure naturelle de sa puissance.”—

**Benoît Paul Émile Clapeyron.** Mémoire sur le travail des forces élastiques dans un corps solide élastique déformé par l’action de forces extérieures. *Comptes rendus*, Tome XLVI, Janvier–Juin 1858. Page 208–212.

**Roger Fosdick and Lev Truskinovsky.** About Clapeyron's Theorem in Linear Elasticity. *Journal of Elasticity*, Volume 72, July 2003. Pages 145–172.

В теории распространена концепция “статического нагружения”. Это когда внешняя нагрузка применяется бесконечно медленно (звучит как вечность, да).

Работа внешних сил на актуальных смещениях равна удвоенной плотности потенциальной энергии  $2\Pi$ .

Если снять внешние воздействия мгновенно (бесконечно быстро), то тело будет колебаться. Но **из-за сопротивления** спустя некоторое время тело придёт в состояние равновесия.

Да, всего половина линейно упругой энергии запасается. Вторая половина это “дополнительная энергия”, которая теряется до достижения равновесия на динамику — на внутреннюю энергию частиц (диссипацию), на колебания и волны.

Но любое реальное нагружение не будет ни внезапным нагружением, ни бесконечно медленным. Это две крайности. Реальная динамика приложения нагрузок всегда будет отличной от теории.

В области же бесконечно малых вариаций реальные внешние силы, приложенные к упругой среде, работают на виртуальных смещениях и производят работу, которая в точности равна вариации плотности упругой потенциальной энергии.

$$\sigma \bullet \delta \varepsilon = \delta \Pi.$$

Линейная упругая среда это среда, где вариация работы внутренних сил (то есть напряжений) есть вариация плотности потенциальной энергии с противоположным знаком  $-\delta W^{(i)} = \delta \Pi = \delta W^{(e)}$ , когда варьируются только смещения (нагрузки-напряжения не варьируются).

Нужно, чтобы виртуальная работа реальных внешних сил на вариациях смещений была бы равна вариации внутренней энергии с обратным знаком (для упругой среды — вариации внутренней энергии).

Как и в динамике (§ 2), мы допускаем существование двух решений и ищем их разность

.....

Уникальность решения, открытая Gustav'ом Kirchhoff'ом для тел с односвязным контуром \*, противоречит, казалось бы, повседневному опыту. Вообразим прямой стержень зажатый на одном концé (the “ консольный ”) и сжимаемый на втором концé продольной силой (рис. 13). Когда нагрузка достаточно большáя, задача статики имеет два решения, “прямое” и “изогнутое”. такое противоречие с теоремой единственности происходит от нелинейности этой задачи. Если нагрузка малá (бесконечно малá), то решение описывается линейными уравнениями и единственно.

## § 5. Уравнения в смещениях

Полный набор уравнений (1.1) содержит неизвестные  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  и  $u$ . Исключая  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , мы получаем формулировку в смещениях (симметризация  $\nabla u$  лишняя из-за симметрии  ${}^4\mathcal{A}_{3\rightarrow 4} = {}^4\mathcal{A}$ ).

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla u) + f &= 0, \\ u|_{o_1} &= u_0, \quad n \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla u|_{o_2} = p. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В изотропной среде (5.1) принимает вид

...

Общее решение однородного уравнения (...) нашёл Heinz Neuber

П. Ф. Палкович

...



## § 6. Сосредоточенная сила в бесконечной среде

A concentrated force is a useful mathematical idealization, but it cannot be found in the real world, where all forces are either body forces acting over a volume or surface forces acting over an area.

Вот риторический вопрос: *почему упругое тело сопротивляется приложенной нагрузке, “держит” её?* Книга [12] James’a Gordon’a даёт следующий ответ: тело деформируется, и потому появляются внутренние силы, называемые “напряжениями”, которые могут уравновесить внешнюю нагрузку.

...

## § 7. Нахождение смещений по деформациям

Как и всякий бивалентный тензор, градиент смещения может быть разложен на сумму симметричной и антисимметричной частей

$$\nabla \mathbf{u} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \widehat{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}, \quad (7.1)$$

Симметричная часть  $\nabla \mathbf{u}^S$  есть тензор линейной деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Антисимметричную часть  $\nabla \mathbf{u}^A$  обозначим как  $\boldsymbol{\Omega}$  и назовём тензором малых поворотов. Любой антисимметричный бивалентный тензор

может быть представлен вектором (§ 1.7). Итак, чтобы найти смещения  $\mathbf{u}$  по деформациям  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , нужно ещё одно поле — поле поворотов  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ .

....

*Условия совместности в линейной упругости*

Условия совместности Saint-Venant’a представляют условия интегрируемости для симметричного бивалентного тензорного поля. Когда такое тензорное поле совместно, тогда оно описывает какую-то деформацию.

В отношении смещение  $\mapsto$  деформация  $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S$  шесть компонент  $\varepsilon_{ij}$  деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$  происходят из лишь трёх компонент  $u_k$  вектора смещений  $\mathbf{u}$ .

Условия совместности определяют, не является ли эта деформация причиной каких-либо промежутков и/или перекрываний.

( .... add a picture here ..... )

...

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^T$$

Контур здесь произволен, так что имеем отношение

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} = {}^2\mathbf{0}, \quad (7.2)$$

называемому уравнением совместности деформаций.

...

Выражение (7.2) предоставляет ограничения на возможные варианты поля деформации.

( ... the figure with cut squares ... )

...

Тензор  $\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon}$  симметричен вместе с  $\boldsymbol{\varepsilon}$

...

Все уравнения линейной теории имеют аналог (первоисточник) в нелинейной теории. Чтобы найти его для (7.2), вспомним тензор деформации Cauchy–Green’a (§ 3.3) и тензоры кривизны (§ 1.18)

.....

.....

## § 8. Уравнения в напряжениях

Баланс сил (или импульса)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

ещё не определяет напряжения. Необходимо вдобавок, чтобы соответствующие напряжениям деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$  (??)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = {}^4\mathcal{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (8.2)$$

были совместны (§ 7)

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \nabla \times \left( \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \right)^T = {}^2\mathbf{0}. \quad (8.3)$$

Взятые вместе, (8.1), (8.2) and (8.3) представляют полный замкнутый набор (систему) уравнений в напряжениях.

...

## § 9. Принцип минимума потенциальной энергии

Когда существование функции энергии деформации несомненно, и внешние силы считаются постоянными во время варьирования смещений, тогда принцип виртуальной работы приводит к принципу минимума потенциальной энергии.

Формулировка принципа:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) \equiv \int_{\mathcal{V}} (\Pi(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) d\mathcal{V} - \int_{\sigma_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma \rightarrow \min, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U} \quad (9.1)$$

Функционал  $\mathcal{E}(\mathbf{u})$ , называемый (полной) потенциальной энергией  $\text{enof}$  a linear-elastic body линейно-упругого тела, минимален тогда, когда смещения  $\mathbf{u}$  истинны — то есть для решения задачи (5.1). Аргументы-функции  $\mathbf{u}$  должны удовлетворять геометрическому условию на  $\sigma_1$  (так они не рвут существующие связи и могут быть непрерывными иначе  $\Pi(\mathbf{u})$  не будет интегрируемой).

Для истинного поля смещений  $\mathbf{u}$ , квадратичная функция

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \cdot \mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}$$

становится равной истинной потенциальной энергии деформации. Тогда

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\min},$$

которая согласно теореме Клапейрона (4.1) есть

$$\mathcal{E}_{\min} = \int_{\mathcal{V}} \Pi(\mathbf{u}) d\mathcal{V} - \left( \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{\sigma_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma \right) = - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma$$

Взяв какое-то другое приемлемое поле смещений  $\mathbf{u}'$ , взглянем на конечную разность

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\mathbf{u}') - \Pi(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \dots$$

ищя  $\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) \geq 0$  или (то же самое)  $\mathcal{E}(\mathbf{u}') \geq \mathcal{E}(\mathbf{u})$ .

$\mathbf{f} = \text{constant}$  и  $p = \text{constant}$

$\Pi(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{a} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}$  (but *not* the linear  $\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}$  — this means  $\Pi(\mathbf{a}) \neq \frac{1}{2} \sigma \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}$ )

Связи не меняются:  
 $(\mathbf{u}' - \mathbf{u})|_{o_1} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ . Внешняя  
 поверхностная сила  $\mathbf{p}|_{o_2} = \mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \sigma$   
 на  $o_2$  и  $= \mathbf{0}$  где-либо ещё на  $o(\partial\mathcal{V})$ .  
 $\sigma = \nabla \mathbf{u} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} = {}^2\text{constant}$  along with  
 constant  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{f}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) do &= \oint_{o(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) do = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\sigma \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u})) d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \sigma) \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \sigma^T \cdot \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

из-за симметрии  $\sigma^T = \sigma \Rightarrow$   
 $\sigma^T \cdot \cdot \nabla \mathbf{a} = \sigma \cdot \cdot \nabla \mathbf{a} = \sigma \cdot \cdot \nabla \mathbf{a}^S \forall \mathbf{a}$ .

Разность преобразуется до

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) &= \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\mathbf{u}') - \Pi(\mathbf{u}) - (\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) - \sigma \cdot \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

И с балансом импульса  $\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0}$

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\mathbf{u}') - \Pi(\mathbf{u}) - \sigma \cdot \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V}.$$

Тут

$$\Pi(\mathbf{u}') = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}', \quad \Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u},$$

$$\begin{aligned}\Pi(u') - \Pi(u) &= \frac{1}{2} \left( \nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' - \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u \right) \\ {}^4\mathcal{A}_{12 \rightleftharpoons 34} &= {}^4\mathcal{A} \Rightarrow \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' = \nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u \\ \frac{1}{2} \left( \nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' - \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u + \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u' - \nabla u' \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla u \right) \\ &= (\nabla u' - \nabla u) \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot (\nabla u' - \nabla u) = \nabla(u' - u) \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla(u' - u)\end{aligned}$$

для конечной разности потенциалов

$$\frac{1}{2} \nabla(u' + u) \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla(u' - u) = \Pi(u') - \Pi(u),$$

добавляя к которой

$$- \nabla u \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla(u' - u) = - \sigma \cdot \cdot \nabla(u' - u)$$

мы получаем

$$\frac{1}{2} \nabla(u' - u) \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla(u' - u) = \Pi(u' - u)$$

и в конце-концов\*

$$\mathcal{E}(u') - \mathcal{E}(u) = \int_{\mathcal{V}} \Pi(u' - u) d\mathcal{V}.$$

Потому как  ${}^4\mathcal{A}$  положительно определён (§ 2)  $\Pi(w) = \frac{1}{2} \nabla w \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \nabla w \geq 0 \quad \forall w$  (и  $= 0$  только если  $\nabla w = 0 \Leftrightarrow w = \text{constant}$ : для случая трансляции как целого без деформации.

...

$$\delta \nabla u = \nabla \delta u$$

...

метод Ritz'a

Задача о минимуме функционала  $\mathcal{E}(u)$  приближённо решается как

.....

метод конечных элементов (the finite element method)

\*  $b^2 - a^2 - 2a(b - a) = (b + a)(b - a) - 2a(b - a) = (b - a)^2$

## § 10. Принцип минимума дополнительной энергии

Когда отношения напряжения–деформации (закон Hooke'a) assure the existence of a complementary energy function and the geometrical boundary conditions are assumed constant during variation of stresses, then the principle of minimum complementary energy emerges.

Дополнительная энергия линейно-упругого тела есть следующий функционал над полем напряжений:

$$\mathcal{D}(\sigma) \equiv \int_V \hat{\Pi}(\sigma) dV - \int_{o_1} n \cdot \sigma \cdot u_0 do, \quad u_0 \equiv u|_{o_1}, \quad (10.1)$$

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0, \quad n \cdot \sigma|_{o_2} = p.$$

...

Вариация уравнения баланса сил

$$\delta(\nabla \cdot \sigma + f) = \nabla \cdot \delta\sigma = 0$$

...

Принцип минимума дополнительной энергии очень полезен для оценки неточных (приближённых) решений. Но для вычислений он не столь существенен, как принцип (Lagrange'a) минимума потенциальной энергии (9.1).

Для вывода вариационных принципов естественно использовать прин-

цип виртуальной работы (§ 2.3) как фундамент.

## § 11. Смешанные принципы стационарности

### Prange–Hellinger–Reissner Variational Principle,

named after *Ernst Hellinger*, *Georg Prange* and *Eric Reissner*.

Working independently of Hellinger and Prange, Eric Reissner published his famous six-page paper “On a variational theorem in elasticity” in 1950. In this paper he develops — without, however, considering Hamilton–Jacobi theory — a variational principle same to that of Prange and Hellinger.

### Hu–Washizu Variational Principle,

именуемых *Hu Haichang* и *Kyuichiro Washizu*.

Следующий функционал над смещениями и напряжениями

$$\mathcal{R}(u, \sigma) = \int_V [\sigma \cdot \nabla u^S - \hat{\Pi}(\sigma) - f \cdot u] dV - \int_{o_1} n \cdot \sigma \cdot (u - u_0) do - \int_{o_2} p \cdot u do \quad (11.1)$$

нóсит имена Reissner’a, Prange’a и Hellinger’a.

...

Преимущество принципа Reissner’a–Hellinger’a — свобода варьирования. Но у него есть и недостаток: на истинном решении у функционала нет экстремума, а лишь стационарность.

Принцип можно использовать для построения приближённых



решений методом Ritz'a (Ritz method). Задавая аппроксимации

...

Принцип

Hu-Washizu (Ху-Васидзу) [102]

формулируется так:

$$\delta \mathcal{W}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = 0,$$

$$\mathcal{W} \equiv \int_V \left[ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u}^S - \boldsymbol{\varepsilon}) + \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] dV -$$

$$- \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) d\mathbf{o} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{o}.$$

(11.)

Как и в принципе Рейсснера-Хеллингера, здесь нет ограничений ни в объёме, ни на поверхности, но добавляется третий независимый аргумент  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Поскольку  $\hat{\Pi} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \Pi$ , то (11.1) и (11.2) кажутся почти одним и тем же.

Из принципа Hu-Washizu (Ху-Васидзу) вытекает вся полная система уравнений с краевыми условиями, так как

.....

## § 12. Антуплоский сдвиг

Это такая проблема линейной теории упругости, где нетривиальные резуль-

таты получаются простыми выводами<sup>\*</sup>.

Эта проблема — об изотропном упругом континууме в декартовых координатах

$$x_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad x_1 \text{ и } x_2.$$

Плоскость  $x_1, x_2$  — поперечное сечение стержня, третья координата  $x_3$  перпендикулярна сечению. Базисные векторы

$$\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

В случае антиплоской деформации (антиплоского сдвига), поле смещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  параллелен третьей координате  $x_3$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \mathbf{e}_3,$$

и  $\mathbf{v}$  не зависит от  $x_3$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2), \quad \partial_3 \mathbf{v} = 0.$$

Деформация

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S = \nabla (\mathbf{v} \mathbf{e}_3)^S = \mathbf{e}_3 \nabla \mathbf{v}^S + \underbrace{\mathbf{v} \nabla \mathbf{e}_3^S}_{(\text{18.1})} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)$$

В плоскости  $x_1, x_2$  сечения

$$\mu = \mu(x_1, x_2), \quad \partial_3 \mu = 0$$

возможна неоднородность среды.

\* Нетривиальное в теории упругости это, для примера, когда деление силы на площадь даёт бесконечно большую ошибку в вычислении напряжений.

### § 13. Кручение стержней

**M. de Saint-Venant.** Memoire sur la torsion des prismes (1853)

Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant. Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. 1856. 327 pages.

1. Memoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion, etc. Memoires presentes par divers savants a l'Academie des scienees, t. 14, 1856.

2. Memoire sur la flexion des prismes, etc. Journal de mathematiques pures et appliquees, publie par J. Liouville, 2me serie, t. 1, 1856.

Перевод на русский язык:  
**Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.

стр. 379–494

Эта задача, которая была подробно изучена Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant'ом, содержится едва ли не в каждой книге о линейной упругости. В ней рассматривается цилиндр какого-либо сечения, нагруженный лишь поверхностными силами на торцах (... add a figure ...)

$$z = \ell : \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} = p(x_\alpha),$$

$$z = 0 : -\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} = p_0(x_\alpha),$$

где  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $\mathbf{x} \equiv x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ . Координаты —  $x_1, x_2, z$ .

Результанта (сумма) внешних сил равна  $\mathbf{0}$ , а суммарная пара сил направлена вдоль оси  $z$ :

$$\int_o \mathbf{p} d\mathbf{o} = \mathbf{0}, \quad \int_o \mathbf{x} \times \mathbf{p} d\mathbf{o} = M\mathbf{k}.$$

Известно, что кручение даёт касательные компоненты напряжения  $\tau_{z1} \equiv \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_1$  и  $\tau_{z2} \equiv \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_2$ . Полагая, что лишь эти компоненты тензора  $\boldsymbol{\sigma}$  ненулевые

$$\boldsymbol{\sigma} = s\mathbf{k} + \mathbf{k}s, \quad s \equiv \tau_{z\alpha} e_\alpha.$$

Решение этой задачи упрощается, если используются уравнения в напряжениях.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla_\perp \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0} (\nabla_\perp \equiv e_\alpha \partial_\alpha), \partial_z$$

(13.1)

$$\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \boldsymbol{\sigma} = {}^2\mathbf{0} \Rightarrow \Delta_\perp \mathbf{s} = \mathbf{0} (\Delta_\perp \equiv$$

(13.2)

Независимость  $\mathbf{s}$  от  $z$  даёт возможность заменить трёхмерные операторы двумерными.

...

## § 14. Плоская деформация

Тут вектор смещения  $\mathbf{u}$  параллелен плоскости  $x_1, x_2$  и не зависит от третьей координаты  $z$ .

Для примера рассмотрим полуплоскость с сосредоточенной нормальной силой  $Q$  на краю (?? рисунок ??)

...

Существует несколько десятков книг по классической теории упругости, которые представляют некоторую часть всего этого монография Anatoliy I. Lurie (Анатольевич Лурье). Его более ранняя книга [30] посвящена решению статических проблем. Он опубликовал свою работу [40], наполненную динамическим контентом. Автор решил динамические проблемы, связанные с описанием континуума братьев Cosserat. Будучи сложной, теория упругости привлекает математиков. Есть монография [53] Philippe'a G. Ciarlet (Филипп-Габриэль Шарль Черный). Черный описал особенности анизотропии в средах [65].

## МИКРОПОЛЯРНАЯ ТРЁХМЕРНАЯ СРЕДА

### § 1. Введение в линейную микрополярную теорию

**Х**арактерная особенность классических упругих сред (гл. 3 и 4) это то, что они сделаны из “простых точек”. Частица классического континуума имеет лишь трансляционные степени свободы, и только один вектор  $\mathbf{r}(q^i, t)$  описывает её движение. Поэтому внешние нагрузки в такой модели это только силы, объёмные и поверхностные. Моментов нет.

Но не так уж трудно построить более сложные модели сплошной среды, где частицы обладают не только лишь степенями свободы трансляции, но и некоторыми дополнительными. Эти новые степени свободы относятся с новыми нагрузками. Наиболее естественная из неклассических моделей трёхмерной среды была предложена братьями Cosserat в 1909 [24]. Каждая частица континуума Cosserat’ есть бесконечно-малое совершенно жёсткое тело с шестью степенями свободы, тремя трансляционными и тремя вращательными. Нагрузки в такой среде это силы и моменты. Работа братьев Cosserat оставалась незамеченной полвека, но затем возник интерес к этой теме.

Woldemar Voigt пробова-  
 to remove the shortcomings  
 классической теории упругости  
 [*W. Voigt. Theoretische Studien über  
 die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle.  
 Abhandlungen der Königlichen  
 Gesellschaft der Wissenschaften  
 in Göttingen, 34: 3–51, 1887*] by the  
 assumption that взаимодействие of  
 two parts of the body is transmitted  
 through an area element  $do$  by means  
 not only of the force vector  $\mathbf{p}do$ , но  
 также by the moment vector  $\mathbf{m}do$ .  
 Поэтому, besides the force stresses  $\sigma_{ji}$   
 also the moment stresses have been  
 defined.

Однако, the complete theory of  
 asymmetric elasticity was developed  
 by the brothers *François et Eugène  
 Cosserat* who published it in 1909  
 in the work “*Théorie des corps  
 déformables*”.

Они предположили, что тела со-  
 ставлены из соединённых частиц. Эти  
 частицы похожи на маленькие жёст-  
 кие тела.

В течение деформирования каж-  
 дая частица перемещается векто-  
 ром  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и поворачивается векто-  
 ром  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, t)$ , функциями положения  $\mathbf{r}$   
 и времени  $t$ . Поэтому точки (частицы)  
 континуума Cosserat обладают ориен-  
 тацией (это “полярная среда”). Так что  
 мы можем говорить о повороте точки.

взаимно независимые векторы  $\mathbf{u}$  и  $\varphi$  определяют деформации тела.

Введение  $\mathbf{u}$  и  $\varphi$  с предположением, что передача сил через элемент площади  $do$  происходит вектором силы  $\mathbf{p}$  и вектором момента  $\mathbf{m}$  ведёт впоследствии к несимметричным тензорам напряжений  $\sigma_{qp}$  и  $\mu_{qp}$ .

Теория братьев Е. и F. Cosserat оставалась незамеченной в течение времени их жизни. Это было так, потому что их теория была нелинейной и потому включала конечные деформации, потому что рамки их теории были вне рамок классической линейной упругости. Они пробовали сконструировать единую теорию поля, содержащую механику, оптику и электродинамику, объединённых принципом наименьшего действия.

The research in the field of the general theories of continuous media conducted in the last fifteen years, drew the attention of the scientists to the Cosserats' work. Looking for the new models, describing the behaviour of the real elastic media more precisely, the models similar to, or identical with that of Cosserats' have been encountered. Here I want to mention, first of all, the papers by C. Truesdell and R. A. Toupin [ **C. Truesdell and R. A. Toupin.** *The classical field theories. Encyclopædia of Physics, Chapter 1, Springer-Verlag, Berlin,*



1960 ], G. Grioli [**Grioli G.** *Elasticité asymétrique. Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser. IV, 50 (1960)*], R. D. Mindlin and H. F. Tiersten [**Mindlin, R. D.; Tiersten, H. F.** *Effects of couple stresses in linear elasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 11. 1962. 415–448*].

В истинно микрополярном континууме векторное поле смещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и поле поворотов  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, t)$  взаимно независимы. Это также называется моделью со свободным вращением. Также это геометрически линейная модель, то есть случай очень малых, бесконечно малых смещений и бесконечно малых поворотов. Здесь операторы  $\overset{\circ}{\nabla}$  и  $\nabla$  неразличимы.  $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ ,  $\rho = \overset{\circ}{\rho}$  и поэтому уравнения “могут быть написаны в начальной конфигурации”. Также операторы  $\delta$  и  $\nabla$  коммутируют ( $\delta \nabla \mathbf{u} = \nabla \delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \nabla \boldsymbol{\varphi} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}$ ).

Чтобы построить эту модель, я использую принцип виртуальной работы. Этот принцип говорит, что вариация работы реальных внешних сил на виртуальных смещениях равна с обратным знаком вариации работы of the internal forces внутренних сил, реальных напряжений на виртуальных деформациях

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}} (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) d\mathcal{O} = 0$$

Здесь  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{m}$  это внешние силы и моменты “на единицу объёма”,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{M}$  внешние силы тоже, но на единицу

поверхности (поверхностные нагрузки, они действуют лишь на некоторой части  $o$  на граничной поверхности.

$\delta W^{(i)}$  есть работа внутренних сил на единицу объёма

По-прежнему, мы полагаем, что  $\delta W^{(i)}$  обнуляется, когда тело движется как жёсткое целое без деформации:

$$\delta u = \delta \varphi \times r + \text{constant}, \quad \delta \varphi = \text{constant} \Rightarrow \\ \nabla \delta u = \nabla \delta \varphi \times r - \nabla r \times \delta \varphi = -E \times \delta \varphi = -\delta \varphi$$

Вводя тензоры деформации — тензор тензор относительного смещения между частицами  $\gamma$  (тензор дисторсии, дисторсия это относительное смещение между частицами) и тензор искривления-скручивания  $\kappa$  (у него есть и другие имена: the curvature-twist tensor, the torsion-flexure tensor, or the wryness tensor)

$$\gamma \equiv \nabla u + \varphi \times E, \quad \kappa \equiv \nabla \varphi, \quad (1.1)$$

$$\gamma_{\times} = \nabla \times u - 2\varphi, \quad \kappa_{\times} = \nabla \times \varphi,$$

$$\delta \gamma = \nabla \delta u + \delta \varphi \times E, \quad \delta \kappa = \nabla \delta \varphi,$$

с нужным отсутствием любых виртуальных деформаций  $\delta \gamma = {}^2\mathbf{0}$  и  $\delta \kappa = {}^2\mathbf{0}$ .

В § 3.15 для безмоментной среды, напряжения появляются как множители Lagrange'а в принципе виртуальной работы, когда  $\delta W^{(i)} = 0$ . Так же и тут:

$$\int_V \left( f \cdot \delta u + m \cdot \delta \varphi - \tau \cdot \delta \gamma^T - \mu \cdot \delta \kappa^T \right) dV + \\ + \int_o \left( p \cdot \delta u + M \cdot \delta \varphi \right) do = 0. \quad (1.2)$$

Множители Лагранжа в каждой точке — это несимметричные тензоры второй сложности  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\mu}$ .

Преобразуем  $-\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^\top$  и  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^\top$

$$\delta \boldsymbol{\gamma}^\top = \nabla \delta \boldsymbol{u}^\top - \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa}^\top =$$

$$-\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^\top = -\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \boldsymbol{u}^\top + \boldsymbol{\tau} \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}), \quad -\boldsymbol{\mu} \cdot$$

Используя

$$(7.4, \S 1.7) \Rightarrow \boldsymbol{A}_\times = -\boldsymbol{A} \cdot \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{E}) &= \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{A} \cdot (-{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{b}) = \\ &= (-\boldsymbol{A} \cdot \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}_\times \cdot \boldsymbol{b} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}$$

и “product rule”

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{u}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \boldsymbol{u}^\top,$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}^\top,$$

получаем

$$-\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^\top = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \boldsymbol{u} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}$$

$$-\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^\top = (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}).$$

После интегрирования с применением теоремы о дивергенции\*

$$\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{u}) dV = \oint_{\partial(V)} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{u} d\sigma, \quad \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) dV$$

(1.2) приобретает вид

$$\begin{aligned} &\int_V \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f}) \cdot \delta \boldsymbol{u} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \boldsymbol{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dV \\ &+ \int_o \left( (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

Из случайности вариаций  $\delta \boldsymbol{u}$  и  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  в объёме вытекает баланс сил и моментов

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \boldsymbol{m} = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

\*  $\boldsymbol{a} \cdot ({}^2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot {}^2\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot {}^2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{c}$

а из случайности на поверхности — краевые условия

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}. \quad (1.4)$$

Тензор силового напряжения  $\boldsymbol{\tau}$  удовлетворяет тем же дифференциальным “уравнениям равновесия”\* и краевым условиям, что и в безмоментной среде. Но тензор  $\boldsymbol{\tau}$  несимметричен: вместо  $\boldsymbol{\tau}_{\chi} = \mathbf{0}$  тут  $\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\chi} + \mathbf{m} = \mathbf{0}$  — появляются моментные напряжения  $\boldsymbol{\mu}$ , и объёмная моментная нагрузка  $\mathbf{m}$  не нулевая.

Смысл компонент тензора моментного напряжения  $\boldsymbol{\mu}$  раскрывается так же, как и для  $\boldsymbol{\tau}$ . Для ортонормального базиса, момент  $M_i = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\mu} = \mu_{ik} \mathbf{e}_k$  действует на площадке с нормалью  $\mathbf{e}_i$ . Диагональные компоненты  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{22}$ ,  $\mu_{33}$  это крутящие моменты, недиагональные — изгибающие (?? рисунок??).

...

вектор эксцентриситета  $\boldsymbol{\alpha}$  и тензор инерции  ${}^2\mathfrak{J}$

Для изотропной среды  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ ,  ${}^2\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\mathbf{E}$ .

...

\* Кавычки здесь оттого, что *уравнения равновесия* это вообще всё, что вытекает из принципа виртуальной работы в статике.

## § 2. Отношения упругости

В этой книге упругой называется среда с потенциальными внутренними силами:  $\delta W^{(i)} = -\delta\Pi$ , где  $\Pi$  — энергия деформации на единицу объёма (продолжая моделировать геометрически линейный материал,  $\mathcal{V} = \mathring{\mathcal{V}}$ ).

Имея соотношения (...)

...

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= -\delta W^{(i)} = \boldsymbol{\tau} \bullet \delta\boldsymbol{\gamma}^\top + \boldsymbol{\mu} \bullet \delta\boldsymbol{\kappa}^\top \Rightarrow \\ \Rightarrow \boldsymbol{\tau} &= \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\gamma}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\kappa}}.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Последние равенства — соотношения упругости (определяющие уравнения, constitutive equations).

Разлагая тензоры деформации и напряжения на симметричные и антисимметричные части

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \boldsymbol{\gamma}^S - \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^S - \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}_\times \times \boldsymbol{E}, \\ \delta\boldsymbol{\gamma}^\top &= \delta\boldsymbol{\gamma}^S + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\gamma}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \delta\boldsymbol{\kappa}^\top = \delta\boldsymbol{\kappa}^S + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\kappa}_\times \times \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}^S - \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^S - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_\times \times \boldsymbol{E},\end{aligned}$$

преобразуем выражение  $\delta\Pi = \boldsymbol{\tau} \bullet \delta\boldsymbol{\gamma}^\top + \boldsymbol{\mu} \bullet \delta\boldsymbol{\kappa}^\top$  как

$$\delta\Pi = \dots \quad (2.2)$$

...

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_\times &= \nabla \times \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{\varphi}, \\ \boldsymbol{\kappa}_\times &= \nabla \times \boldsymbol{\varphi}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\gamma}^S &= \nabla \boldsymbol{u}^S,\end{aligned}$$

...

The classical isotropic linear elastic material behavior is described by two material parameters, for example, the Young's modulus and the Poisson's ratio, while the isotropic Cosserat continuum needs six material parameters

even when assumed to be linear, homogeneous and isotropic, it requires six independent material constants, in contrast to only two such constants for the classical continuum

...

Соотношения (2.1) обращаются преобразованием Лежандра

$$\gamma = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \tau}, \quad \kappa = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mu},$$

$$\hat{\Pi}(\tau, \mu) = \tau \bullet \gamma^T + \mu \bullet \kappa^T - \Pi(\gamma, \kappa). \quad (2.3)$$

...

material's intrinsic (internal) length scale  $\ell$

Если устремить  $\ell$  к нулю, то исчезает вклад  $\kappa$  в  $\Pi$ , а с ним и моментные напряжения  $\mu$ . Когда вдобавок нет объёмной моментной нагрузки  $m$ , тогда тензор  $\tau$  становится симметричным:  $\nabla \bullet \mu + \tau_{\times} + m = 0$ ,  $\mu = {}^2 0$ ,  $m = 0 \Rightarrow \tau_{\times} = 0$ , и модель превращается в классическую безмоментную.

Использование же микрополярной модели естественно в случае, когда реальный материал имеет некий наименьший объём, “в который невозможно войти”. И такая ситуация возникает весьма часто: композиты с “представительным” объёмом, поликристалличе-

ские материалы, полимеры с большими молекулами (макромолекулами).

### § 3. Уравнения совместности

Имея тождество  $\nabla \times \nabla a = 2\mathbf{0} \quad \forall a$  и определения тензоров деформации (1.1),

$$\kappa \equiv \nabla \varphi \Rightarrow \nabla \times \kappa = 2\mathbf{0},$$

$$\gamma - \varphi \times \mathbf{E} = \nabla u \Rightarrow \nabla \times (\gamma - \varphi \times \mathbf{E}) = 2\mathbf{0} \dots$$

(3.1)

...

### § 4. Теоремы статики

Теоремы статики линейных консервативных систем, легко выводимые для конечного числа степеней свободы (минимальность энергии, теорема Клапейрона, теорема о взаимности работ и др. — § 2.6), справедливые для континуальных линейных упругих сред (гл. 4), включая микрополярную модель континуума (среду с парами сил или моментами).

...

### § 5. Псевдоконтинуум Cosserat

Paul van Dyk - We Are Alive

Помимо модели со свободным вращением (“истинно микрополярного континуума”), существует упрощён-

ная модель среды с парами сил, в которой повороты выражаются через смещения, как в классическом безмоментном континууме:

$$\varphi = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \Leftrightarrow \gamma_{\times} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \gamma = \varepsilon = \nabla \mathbf{u}^S \quad (5.1)$$

— модель со стеснённым вращением (constrained rotation)\*.

Равенство  $\gamma_{\times} = \mathbf{0}$  (симметрию  $\gamma$ ) возможно понимать как внутреннюю связь (§ 3.13). Аргумент  $\gamma_{\times}$  исчезает из энергии  $\Pi$ , соотношение упругости для  $\tau_{\times}$  не может быть написано. Его место в полной системе занимает уравнение связи.

В классической (линейной безмоментной) теории упругости полная система сводится к одному уравнению для вектора  $\mathbf{u}$  (§ 4.??). В моментной теории

...

## § 6. Плоская деформация

Все переменные в этой постановке проблемы не зависят от декартовой координаты  $z \equiv x_3$  (орт оси —  $\mathbf{k}$ ). Смещения и силы перпендикулярны оси  $z$ , а повороты и моменты — параллельны ей:

...

\* Братья Cosserat называли это *cas de trièdre caché* (случай скрытого трёхгранника, *case of latent trihedron*).



Это краткое изложение плоской задачи относится к модели с независимыми поворотами. Псевдоконтинуум Cosserat (модель со стеснённым вращением) получается либо при наложении внутренней связи  $\gamma_{\times} = \mathbf{0}$ , либо при предельном переходе ...

Подробнее о плоской моментной задаче написано в книгах Н. Ф. Морозова [?, 37].

## § 7. Нелинейная теория

Кажущееся на первый взгляд чрезвычайно трудным, построение теории конечных деформаций континуума Cosserat становится прозрачным, если опираться на общую механику, тензорное исчисление и нелинейную теорию безмоментной среды.

Построение модели упругого континуума проходит обычно четыре этапа:

- ✓ определение степеней свободы частиц,
  - ✓ выявление нагрузок (“силовых факторов”, напряжений) и условий их баланса,
  - ✓ подбор соответствующих мер деформации
- и, наконец,
- ✓ вывод соотношений упругости между напряжениями и деформациями.
- Этот путь очень сокращается, если опираться на принцип виртуальной работы.

Как и в гл. 3, среда состоит из частиц с материальными координатами  $q^i$  и вектором-радиусом  $\mathbf{r}(q^i, t)$ . В начальной (исходной, отсчётной) конфигурации  $\mathbf{r}(q^i, 0) \equiv \mathring{\mathbf{r}}(q^i)$ . Но кроме трансляции, частицы имеют независимые степени свободы поворота, описываемого ортогональным тензором

$$\mathbf{O}(q^i, t) \equiv \mathbf{a}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathbf{a}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{O}^{-\top},$$

где тройка векторов  $\mathbf{a}_j(q^i, t)$  жёстко связана с каждой частицей, показывая угловую ориентацию относительно как-либо выбираемых\* векторов  $\mathring{\mathbf{a}}_j(q^i) \equiv \mathbf{a}_j(q^i, 0)$ ,  $\mathbf{a}_j = \mathbf{O} \cdot \mathring{\mathbf{a}}_j$ ;  $\mathbf{a}^j$  — тройка взаимных векторов:  $\mathbf{a}_j \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^j \mathbf{a}_j = \mathbf{E}$  ( $t=0$ ,  $\mathring{\mathbf{a}}^j$ :  $\mathring{\mathbf{a}}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathring{\mathbf{a}}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{E}$ ). Движение среды полностью определяется функциями  $\mathbf{r}(q^i, t)$  и  $\mathbf{O}(q^i, t)$ .

Имея представления  $\mathring{\mathbf{r}}(q^i)$  и  $\mathbf{r}(q^i, t)$ , вводим базис  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$ , взаимный базис  $\mathbf{r}^i$ :  $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}^i = \delta_j^i$ , дифференциальные операторы  $\mathring{\nabla}$  и  $\nabla$ , а также градиент движения  $\mathbf{F}$

$$\mathring{\nabla} \equiv \mathring{\mathbf{r}}^i \partial_i, \quad \nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathring{\nabla}, \quad \mathbf{F} \equiv \mathring{\nabla} \mathbf{r}^\top = \mathbf{r}_i \mathring{\mathbf{a}}^i \quad (7.1)$$

Вариационное уравнение принципа виртуальной работы для континуума

\* Один из вариантов:  $\mathring{\mathbf{a}}_j = \mathring{\mathbf{r}}_j \equiv \partial_j \mathbf{r}$ . Другое предложение:  $\mathring{\mathbf{a}}_j$  это ортонормальная тройка собственных векторов тензора инерции частицы. Вообще,  $\mathring{\mathbf{a}}_j$  могут быть любой тройкой линейно-независимых векторов.

с нагрузками в объёме и на поверхности:

$$\int \left( \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) + \delta W^{(i)} \right) dV + \int_O^V \left( \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dO = 0. \quad (7.2)$$

Здесь  $\rho$  — плотность массы;  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{m}$  — внешние сила и момент на единицу массы;  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{M}$  — они же на единицу поверхности;  $\delta W^{(i)}$  — работа внутренних сил на единицу объёма в текущей конфигурации. Вектор малого поворота  $\delta \boldsymbol{\varphi}$

$$\begin{aligned} \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \mathbf{E} &\Rightarrow \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = -\mathbf{O} \cdot \delta \mathbf{O}^\top \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top &\Rightarrow \delta \mathbf{O} = \delta \boldsymbol{\varphi} \\ \delta \boldsymbol{\varphi} = -\frac{1}{2} (\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top)_\times \end{aligned}$$

При движении среды как жёсткого целого нет деформаций, и работа  $\delta W^{(i)}$  внутренних сил равна нулю:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} = \text{constant} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \text{constant} &\Rightarrow \\ \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} = {}^2\mathbf{0}, \quad \nabla \delta \mathbf{r} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{E} \times & \\ \nabla \delta \mathbf{r} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} = {}^2\mathbf{0}. \end{aligned}$$

К нагрузкам. Несимметричные тензоры напряжения, силового  $\boldsymbol{\tau}$  и моментного  $\boldsymbol{\mu}$ , введём как множители Lagrange'a:

$$\int \left( \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \delta \mathbf{r} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}) \right) + \int_O^V \left( \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dO = 0. \quad (7.3)$$

После тех же преобразований, что и в § 1, получаем

...

Отсюда вытекают уравнения баланса сил и моментов в объёме и краевые условия в виде **формул типа Cauchy**. Они по существу те же, что и в линейной теории.

Найдём теперь тензоры деформации. Их можно вводить по-разному, если требовать лишь одного — нечувствительности к движению среды как жёсткого целого. Читатель найдёт не один вариант таких тензоров. Однако, вид тензоров деформации “подсказывает” принцип виртуальной работы.

...

## § 8. Нелинейная модель со стеснённым вращением

Вспомним переход к модели со стеснённым вращением в линейной теории (§ 5). Разделились соотношения упругости для симметричной части тензора силового напряжения  $\tau^S$  и кососимметричной его части  $\tau_\chi$ . Возникла внутренняя связь  $\gamma_\chi = 0$

...

## Библиография

Все работы по моментной теории упругости упоминают книгу братьев Eugène et François Cosserat [24], где трёхмерной среде посвящена одна глава из шести. Пе-

реведённая монография W. Nowacki [40] была одной из первых книг на русском языке с изложением линейной моментной теории. Ранее эта область представлялась статьями — например, R. D. Mindlin'a и H. F. Tiersten'a [36]. Краткое изложение моментной теории, но с подробным рассмотрением задач содержится в книгах Н. Ф. Морозова [?, 37].

## ТЕРМОУПРУГОСТЬ

В этой главе рассматривается лишь безмоментная модель.

### §1. Первый закон термодинамики

До сих пор моделирование было ограничено только механикой. Широко известно, однако, что изменение температуры вызывает деформацию. Температурная деформация и напряжение часто играют первичную роль и могут приводить к поломке.

Столь эффективный в механике, принцип виртуальной работы не применим к термомеханике\*. Рассматривая тепловые эффекты, возможно опираться на два закона термодинамики.

Первый, открытый Joule'ем, Mayer'ом, и Helmholtz'ем — это есть адаптированная версия баланса энергии: скорость изменения внутренней энергии  $\dot{E}$  равна сумме мощности внешних сил  $P^{(e)}$  и скорости подвода тепла  $\dot{Q}$

$$\dot{E} = P^{(e)} + \dot{Q}. \quad (1.1)$$

Внутренняя энергия  $E$  это сумма кинетической и потенциальной энер-

\* Аналог принципа виртуальной работы будет представлен ниже в §8.

гий частиц. Для любого конечного объёма материального континуума

$$E = \int_{\mathcal{V}} \rho \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + e \right) d\mathcal{V}. \quad (1.2)$$

С балансом массы  $dm = \rho d\mathcal{V} = \rho' d\mathcal{V}'$ ,

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' d\mathcal{V}' \text{ и}$$

$$\Psi = \int_{\mathcal{V}} \rho \psi d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \psi d\mathcal{V}' \Rightarrow \dot{\Psi} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\psi} d\mathcal{V} =$$

легко получить производную внутренней энергии по времени

$$\dot{E} = \int_{\mathcal{V}} \rho \left( \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \dot{e} \right) d\mathcal{V}. \quad (1.3)$$

Мощность внешних сил для некоторого конечного объёма безмоментного континуума

$$\begin{aligned} P^{(e)} &= \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{r}} d\mathcal{V} + \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}} dO = \int_{\mathcal{V}} \left( \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \right) d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}} \right) d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Как и раньше (гл. 3),  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор напряжения Cauchy,  $\mathbf{f}$  — массовая сила (без инерционной части  $-\ddot{\mathbf{r}}$ , которая содержится в  $\dot{E}$ ),  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$  — поверхностная сила. Использована симметрия  $\boldsymbol{\tau}$  для раскрытия  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}})$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^T &= \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^S \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^T = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^S, \\ \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}}) &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^T = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}^S. \end{aligned}$$

Обозначая тензор скорости деформации как  $\mathcal{D} \equiv \nabla \dot{\mathbf{r}}^S$

$$P^{(e)} = \int_{\mathcal{V}} \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathcal{D} \right) d\mathcal{V}. \quad (1.4')$$

Тепло прибывает в объём среды двумя путями. Первый — поверхностная передача тепла (heat conduction, теплопроводность, конвекция, диффузия), происходящая через материю, при контакте двух сред. Это может быть описано вектором потока тепла  $\mathbf{q}$ . Через бесконечно-малую площадку в текущей конфигурации в направлении вектора нормали  $\mathbf{n}$  в единицу времени проходит тепловой поток  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dO$ . Для поверхности конечных размеров это выражение нужно проинтегрировать. Обычно полагают

$$\mathbf{q} = -{}^2\mathbf{k} \cdot \nabla \theta, \quad (1.5)$$

где  $\theta$  — температура (поле температуры);  ${}^2\mathbf{k}$  — тензор коэффициентов теплопроводности как свойство материала, для изотропного материала  ${}^2\mathbf{k} = k\mathbf{E}$  и  $\mathbf{q} = -k\nabla\theta$ .

Второй путь — объёмная передача тепла (тепловое излучение, thermal radiation). Солнечная энергия, пламя костра, микроволновая печь — знакомые примеры проникающего нагрева излучением. Тепловое излучение происходит через электромагнитные волны и не нуждается в промежуточной среде. Тепло излучается (эмитируется) любой материей (с температурой выше абсолютного нуля 0 K). Скорость передачи тепла излучением на единицу массы  $b$  или на единицу объёма  $B = \rho b$  считается известной.



В результате, скорость подвода тепла для конечного объёма есть

$$\dot{Q} = - \oint_{O(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dO + \int_V \rho b dV = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b) dV. \quad (1.6)$$

Применение (1.3), (1.4') и (1.6) к формулировке (1.1) даёт равенство интегралов по объёму

$$\int_V \rho (\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \dot{\epsilon}) dV = \int_V ((\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b) dV.$$

И поскольку объём  $V$  случаен, подынтегральные выражения тоже равны

$$\rho \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \rho \dot{\epsilon} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b.$$

С балансом импульса

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \quad (7.2, \S 3.7)$$

это упрощается до

$$\rho \dot{\epsilon} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b \quad (1.7)$$

— локальная (дифференциальная) версия баланса энергии.

...

## § 2. Второй закон

Распространено следующее представление о законах термодинамики: изменение внутренней энергии  $dE$  равно сумме работы внешних сил  $\partial W^{(e)}$  и подведённого тепла  $\partial Q$

$$dE = \partial W^{(e)} + \partial Q.$$

Работа  $\partial W^{(e)}$  и теплота  $\partial Q$  суть неполные дифференциалы\*, но частное  $\partial Q/\theta$  становится полным дифференциалом — дифференциалом  $dS$  энтропии.

Далее процессы делятся на обратимые, для которых  $dS = \partial Q/\theta$ , и необратимые с характерным неравенством Clausius'a  $dS \geq \partial Q/\theta$ .

Но как адаптировать это для континуума с неоднородным полем температуры?

Иногда процесс в бесконечномалом объёме мыслится обратимым, тогда предлагается равенство типа

$$\rho\theta\dot{s} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b \quad (2.1)$$

( $s$  — энтропия на единицу массы и  $\dot{s}$  — производная от неё по времени, то есть скорость изменения энтропии).

Однако, всегда есть тепловое рассеивание (диссипация) — необратимый процесс, и поэтому (2.1) выглядит спорно.

Наиболее подходящим выражением второго закона термодинамики для

\* Так как работа и теплота зависят от пути протекания процесса (являются функциями пути), они не могут быть полными (точными) дифференциалами, контрастируя с идеей полного дифференциала, выражаемого через градиент другой функции и потому независимого от пути.

материального континуума видится  
неравенство Clausius'a–Duhem'a

$$\left( \int_V \rho s dV \right) \geq - \oint_{O(\partial V)} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dO + \int_V \frac{\rho b}{\theta} dV. \quad (2.2)$$

Это неравенство как дисбаланс энтропии определяет скорость производства энтропии.

$$\begin{aligned} - \oint_{O(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \theta^{-1} dO &= - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{q} \theta^{-1}) dV \\ - \nabla \cdot (\mathbf{q} \theta^{-1}) &= - (\nabla \cdot \mathbf{q}) \theta^{-1} - \mathbf{q} \cdot \left( \nabla \frac{1}{\theta} \right) \\ - \nabla \frac{1}{\theta} &= \frac{1}{\theta^2} \nabla \theta \\ - \nabla \cdot (\mathbf{q} \theta^{-1}) &= - (\nabla \cdot \mathbf{q}) \theta^{-1} + (\mathbf{q} \cdot \nabla \theta) \theta^{-2} \\ \rho \dot{s} &\geq (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b) \theta^{-1} + (\mathbf{q} \cdot \nabla \theta) \theta^{-2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Неравенство Clausius'a–Duhem'a is also called неравенством диссипации. For a real matter, the dissipation is always greater than zero, it can never be negative and can't be zero whenever irreversible processes are present.

...

свободная энергия Helmholtz'a на единицу массы

$$a \equiv e - \theta s, \quad (2.4)$$

$$\dot{a} = \dot{e} - \theta \dot{s} - \dot{\theta} s$$

### § 3. Определяющие уравнения

К балансу импульса, балансу момента импульса и законам термодинамики нужно добавить определяющие уравнения, выражающие свойства среды. Эти уравнения

...

Термоупругим называется материал, в котором свободная энергия  $a$  и энтропия  $s$  — функции деформации  $C$  и температуры  $\theta$

$$a = a(C, \theta)$$

$$\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial C} \cdot \dot{C} + \frac{\partial a}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

...

### § 4. Уравнение теплопроводности

В математической физике параболическое дифференциальное уравнение, похожее на

$$k \Delta \theta + B = c \dot{\theta}, \quad (4.1)$$

объявляется “уравнением теплопроводности”. Здесь  $k$  — теплопроводность,  $B = \rho b$  — скорость передачи тепла излучением на единицу объёма,  $c$  — теплоёмкость на единицу объёма. Краевые условия чаще всего — внешняя температура  $\theta_1^{(e)}$  на части  $O_1$  поверхности и поток тепла  $q^{(e)}$  снаружи части  $O_2$  поверхности:

$$\theta|_{O_1} = \theta_1^{(e)}, \quad k \partial_n \theta|_{O_2} = q^{(e)}.$$

Иногда поток  $q^{(e)}$  считается пропорциональным разности между температурой  $\theta^{(e)}$  внешней среды и температурой тела  $\theta$

$$k \partial_n \theta + h (\theta - \theta^{(e)}) = 0.$$

Если коэффициент теплообмена  $h$  бесконечно большой, оно превращается в первое условие  $\theta = \theta^{(e)}$ , а когда  $h \rightarrow 0$  — в условие  $\partial_n \theta = 0$  теплоизоляции.

Но как уравнение (4.1) связано с фундаментальными принципами баланса? Ведь нет никакой особенной “тепловой энергии”, но есть внутренняя энергия, меняющаяся согласно первому закону термодинамики ...

...

$$\begin{aligned} e = a + \theta s &\Rightarrow \dot{e} = \dot{a} + \dot{\theta} s + \theta \dot{s} \\ &\quad \dot{a}(C, \theta) \\ \rho \dot{e} = \rho (\dot{a} + \dot{\theta} s + \theta \dot{s}) &= \rho \left( \overbrace{\frac{\partial a}{\partial C} \dot{C} + \frac{\partial a}{\partial \theta} \dot{\theta} + \theta \dot{s}}^{\dot{a}(C, \theta)} \right) \\ &= 0 \Leftarrow s = -\frac{\partial a}{\partial \theta} \end{aligned}$$

...

## § 5. Линейная термоупругость

Квадратичная аппроксимация свободной энергии наиболее естественна в линейной теории

...

## § 6. Уравнения в смещениях

Полагая поле температуры известным

...

## § 7. Температурное напряжение

Это напряжение стоит рассмотреть детально, хотя оно и определяется очевидным образом полями смещений и температуры. Для равновесия свободного тела без внешних нагрузок

...

## § 8. Вариационные формулировки

Когда температура постоянна, уравнения термоупругости выглядят так же, как в механике.

...

Для переноса вариационного метода на термоупругость достаточно заменить в принципе (Lagrange'a) минимума потенциальной энергии  $\Pi(\mathbf{C})$  на свободную энергию Helmholtz'a  $A(\mathbf{C}, \Theta)$ , а в принципе Reissner'a–Hellinger'a заменить  $\hat{\Pi}(\boldsymbol{\tau})$  на свободную энтальпию Gibbs'a (функцию Gibbs'a)  $G(\boldsymbol{\tau}, \Theta)$ .

Свободная энергия *Gibbs'a* (энергия *Gibbs'a* или функция *Gibbs'a* или

*свободная энтальпия*\*) это термодинамический потенциал, который измеряет максимум обратимой работы, произведённой с постоянными температурой и давлением.

...

...

Более сложные вариационные постановки для нестационарных задач можно найти, например, в книге [89].

### Библиография

Шириной и глубиной описания термоупругости выделяются книги W. Nowacki [39, 40], книга E. Melan'a и H. Parkus'a [33] и монография H. Parkus'a [45]. С. Truesdell [60] внёс большой вклад в создание и распространение новых взглядов на термодинамику сплошной среды. Чёткое изложение основных законов есть у С. Teodosiu [56]. Методы расчёта температурных полей представлены у Н. М. Беляева и А. А. Рядно [89].

\* To distinguish её от свободной энергии Helmholtz'a.

## МАГНИТОУПРУГОСТЬ

Проблемы, которые решаются используя модели упругих континуумов, обыкновенно включают уже известные внешние нагрузки. Как найти эти внешние нагрузки это другая проблема. Когда электрические токи текут в теле, магнитное поле создаёт нагрузку. Магнитное поле изменяется из-за деформации тела. Если чувствительность поля к деформациям высока, тогда возникает проблема упругости вместе с магнетизмом.

## §1. Электромагнитное поле

**В**от краткое изложение теории электромагнетизма.

Эта теория описывает два векторных поля, электрическое  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и магнитное  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Что такое вектор  $\mathbf{E}$  и псевдовектор  $\mathbf{B}$  можно понять из выражения электромагнитной силы (силы Lorentz'a)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t, q)$ , действующей на точечный заряд — частицу бесконечно-маленьких размеров, содержащую электрический заряд  $q$  и движущуюся со скоростью  $\dot{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \quad (1.1)$$

По сути, часть электромагнитной силы, возникающая от взаимодействия с движущимся зарядом — магнитная



сила  $q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$  — являет магнитное поле  $\mathbf{B}$ , в то время как другая часть — электрическая сила  $q\mathbf{E}$  — являет электрическое поле  $\mathbf{E}$ .

Острый вопрос “в какой же именно системе отсчёта измеряется скорость  $\dot{\mathbf{r}}$  заряжённой частицы?” ведёт к специальной теории относительности\*.

the classical concept about the existence of absolute space and time as the preferred frame of reference

a vacuum is space without matter, “free space”

...

непрерывное распределение заряда  
плотность заряда  $\varrho(\mathbf{r}, t)$  это электрический заряд на единицу объёма

$$dq = \varrho dV, \quad q = \int_V \varrho dV$$

плотность электрического тока  
есть поток электрического заряда  
 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \equiv \varrho \dot{\mathbf{r}}$

в вакууме нет  $\varrho$  и  $\mathbf{j}$

in a region with no charges ( $\varrho = 0$ )  
and no currents ( $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ), such as  
a vacuum, ...

...

пондеромоторная сила is the  
electromagnetic force (the Lorentz  
force) per volume unit

\* **Albert Einstein.** Zur Elektrodynamik bewegter Körper. // Annalen der Physik, IV. Folge, Band 17, 1905. Seiten 891–921.

В материальном континууме с зарядами и токами действует объёмная “пондеромоторная” (“ponderomotive”) сила

$$\mathbf{f} = \varrho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (1.2)$$

это дифференциальная (локальная, микроскопическая, континуальная) версия (1.1).

...

Электромагнитные явления обыкновенно описываются уравнениями Maxwell’а. Дифференциальные версии этих уравнений суть

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad \text{теорема Gauss’а для ства}$$

$$(1.3^\alpha)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad \begin{array}{l} \text{уравнение Maxwell’а} \\ \text{(закон индукции Faraday)} \end{array}$$

$$(1.3^\beta)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{теорема Gauss’а для магнетизма} \\ \text{(1.3}^\gamma\text{)} \end{array}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbf{E}} \quad \begin{array}{l} \text{циркуляционный закон} \\ \text{со слагаемым Maxwell’а} \\ \text{баланса электрического поля} \end{array}$$

$$(1.3^\delta)$$

....

скорость света в вакууме  
 $c = 299\,792\,458 \text{ м/с}$

“electric constant”, vacuum permittivity  $\varepsilon_0$

$\varepsilon_0 \approx 8.8541878 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$  (фарад на метр)

“magnetic constant”, vacuum permeability  $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

...

С  $\mu_0$  уравнение (1.3 <sup>$\delta$</sup> ) иногда пишется как

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \quad \text{или} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}}.$$

...

Баланс электрического заряда — уравнение непрерывности (сплошности, неразрывности) для электрического заряда — математически следует из уравнений Maxwell'a

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (1.3^\delta) &\Rightarrow c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} \\ (1.3^\alpha)^\bullet &\Rightarrow \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\varrho}}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= 0 \quad \forall \mathbf{a}, \quad \mathbf{j} \equiv \varrho \dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow \nabla \cdot (\varrho \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\varrho} = 0. \quad (1.4)$$

Электромагнитное поле действует на континуум с вектором пондеромоторной силы (1.2).

Но есть также и другое выражение взаимодействия, бивалентный тензор напряжения “Maxwell'a”

$${}^2M \equiv \varepsilon_0 \left( \mathbf{E} \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E} \right). \quad (1.5)$$

Он выводится из (1.2) и уравнений Maxwell'a

$$\begin{aligned} (1.3^\alpha) &\Rightarrow \varrho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \\ (1.3^\delta) &\Rightarrow \mathbf{j} = \varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \\ (1.2) &\Rightarrow \mathbf{f} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} + (\varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}) \times \mathbf{B} = \\ &= \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} + \varepsilon_0 c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} \\ &\quad \left. \begin{aligned} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^\bullet &= \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \dot{\mathbf{B}} \\ (1.3^\beta) &\Rightarrow \dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} = (\mathbf{E} \times \dot{\mathbf{B}}) \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} - \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \varepsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \varepsilon_0 c^2 (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

Для симметрии с  $\nabla \cdot \mathbf{E} \mathbf{E}$ , нуль-вектор

$$(1.3^\gamma) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad c^2 \nabla \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

добавляется к  $\mathbf{f}$ .

...

$$(16.9, \S 1.16) \Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{a} \mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a}$$

$$(16.11, \S 1.16) \Rightarrow \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2 \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \mathbf{a} \mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{E} (\mathbf{a} \mathbf{a}) = \nabla (\mathbf{a} \mathbf{a}) = 2 \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 M &= \varepsilon_0 \left( \nabla \cdot (\mathbf{E} \mathbf{E}) + c^2 \nabla \cdot (\mathbf{B} \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{E} \mathbf{E} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{B} \mathbf{B}) \right) \\ &= \varepsilon_0 \left( \nabla \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} + c^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \right. \\ &\quad \left. - \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - c^2 \nabla \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) \end{aligned}$$

...

## § 2. Электромагнитные ВОЛНЫ

To derive wave equations

$$\nabla \times (1.3^\beta) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}$$

$$\nabla \times (1.3^\delta) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\dot{\mathbf{E}}}{c^2} \right)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = (\nabla \times \mathbf{E})^\bullet, \quad (1.3^\beta) \Rightarrow \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -\ddot{\mathbf{B}}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{B}} = (\nabla \times \mathbf{B})^\bullet, \quad (1.3^\delta) \Rightarrow \nabla \times \dot{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{j}^\bullet}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\ddot{\mathbf{E}}}{c^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B}$$

$$\Delta \mathbf{E} - \underbrace{\nabla \nabla \cdot \mathbf{E}}_{\varrho/\varepsilon_0 (1.3^\alpha)} = \frac{\ddot{\mathbf{E}}}{c^2} + \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0 c^2}$$

$$\Delta \mathbf{B} - \underbrace{\nabla \nabla \cdot \mathbf{B}}_{0 (1.3^\gamma)} = \frac{\ddot{\mathbf{B}}}{c^2} - \frac{\nabla \times \dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0 c^2}$$

...

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad \forall \mathbf{a}$$

$$\nabla \times \nabla = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \nabla \alpha = \mathbf{0} \quad \forall \alpha$$

vector potential  $\mathbf{A}$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3^\gamma) \Leftrightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

potential  $\mathbf{A}$  is not unique and has gauge freedom  $\mathbf{A} + \nabla a$

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla a) \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3^\gamma)$$

scalar potential  $\phi$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \quad (1.3^\beta) \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a}) \\ \Rightarrow \nabla \times (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a}) &= \mathbf{0} \Rightarrow -\nabla \phi = \mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a} \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= -\nabla (\phi + \dot{a}) - \dot{\mathbf{A}}. \quad (2.1) \end{aligned}$$

And

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad (1.3^\alpha) \Rightarrow \begin{aligned} &-\Delta (\phi + \dot{a}) - \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\ &-\Delta \phi - \nabla \cdot (\dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a}) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

$\nabla \nabla \cdot \nabla a - \nabla \cdot \nabla \nabla a = \mathbf{0}$  (partial derivatives of a smooth function commute)

$$\begin{aligned} c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbf{E}} \quad (1.3^\delta) \Rightarrow \\ \Rightarrow c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} - \nabla (\dot{\phi} + \ddot{a}) - \ddot{\mathbf{A}} \Rightarrow \\ \Rightarrow c^2 (\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}) &= \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} - \nabla \dot{\phi} - \nabla \ddot{a} - \ddot{\mathbf{A}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Со свободой калибровки возможно упростить волновые уравнения (2.3)

и (2.2), положив

$$\begin{aligned} -\nabla\ddot{a} &= \nabla\dot{\Phi} + c^2 \nabla\nabla \cdot \mathbb{A} \Rightarrow \ddot{a} = -\dot{\Phi} - c^2 \nabla \cdot \mathbb{A} \\ -\nabla \cdot (\dot{\mathbb{A}} + \nabla\dot{a}) &= \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} \Rightarrow \dot{\Phi} = -c^2 \nabla \cdot (\mathbb{A} + \\ &\Rightarrow c^2 \nabla \cdot \mathbb{A} + c^2 \Delta a - c^2 \nabla \cdot \mathbb{A} = \ddot{a}, \end{aligned}$$

наконец становясь однородным волновым уравнением для  $a$

$$\ddot{a} = c^2 \Delta a. \quad (2.4)$$

Более популярное условие — ещё более жёсткое

$$\Delta a = 0 \Rightarrow \ddot{a} = 0, \quad \dot{\Phi} + c^2 \nabla \cdot \mathbb{A} = 0.$$

Это условие калибровки Lorenz'а даёт такой же эффект, будучи лишь частным — гармоническим — случаем (2.4).

Следующие из (2.2) и (2.3) с условием (2.4), уравнения электромагнитных волн в потенциальной формулировке

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi + \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ -c^2 \Delta \mathbb{A} &= \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} - \ddot{\mathbb{A}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

...

### § 3. Электростатика

Рассмотрение этого вопроса полезно и для последующего описания магнетизма. В статике

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

...

Объёмная “пондеромоторная” сила, с которой электростатическое поле действует на среду ...

...

Тензор напряжения Махвелл’а (1.5) в электростатике

$$^2M = \varepsilon_0 \left( \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} \right)$$

...

## § 4. Диэлектрики

Начнём с рассмотрения электростатического поля

...

В диэлектриках нет свободных зарядов: плотность заряда  $\varrho = 0$ . Здесь вводится плотность дипольного момента

...

## § 5. Магнитостатика

Если поле (а с ним ...)

...

## § 6. Магнетики

Выяснив законы магнитостатики в общем случае, обратимся к веществу — некий опыт у нас уже есть в электростатике диэлектриков.

Начнём с рассмотрения

...

...

Насколько соответствует поведение реальных материалов представленным здесь формальным построениям — сей вопрос is out of scope этой книги.

## § 7. Магнитная жёсткость

В электротехнике распространены обмотки всевозможной формы, в которых провод намотан так, что образуется некое массивное тело. Такие обмотки есть в статоре генератора автомобиля (да и в роторе), в больших промышленных электромагнитах и в магнитных системах установок “токама́к” (тороидальная **камера** с **магнитными катушками**) для управляемого термоядерного синтеза — примеров много. Сочетание токопровода и изоляции образует периодический композит, и одной из главных нагрузок для него является пондеромоторная магнитная сила. Рассчитывая деформации и механические напряжения в обмотке, начинают с определения магнитных сил. Поскольку распределение токов задано известной геометрией проводов, достаточно интегрирования по формуле Био-Савара (??). Термин “магнитоупругость” при этом неуместен, так как задачи магнитостатики и упругости решаются раздельно.



Однако при деформации обмотки меняются и поле  $\mathbf{j}$ , и вызываемое им поле  $\mathbf{B}$ . Объёмная сила становится равной

$$\mathbf{f} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_0 + \dots \quad (7.1)$$

**Подчёркнутое слагаемое** соответствует недеформированному состоянию. Обусловленное деформацией изменение объёмной силы линейно связано с малым смещением  $\mathbf{u}$ , поэтому матричное (после дискретизации) уравнение в смещениях можно представить в виде

$$(C + C_m)u = \mathring{F}. \quad (7.2)$$

К “обычному” оператору линейной упругости  $C$  добавилась магнитная жёсткость  $C_m$ ,  $\mathring{F}$  — силы в недеформированном состоянии.

Добавка  $C_m$  пропорциональна квадрату тока и может стать весьма существенной в магнитных системах с сильным полем. Учёт её необходим и при недостаточной величине  $C$ . В номинальном **режиме** конструкция может держать нагрузку, но дополнительная нагрузка неблагоприятного направления может оказаться “невыносимой”.

Роль магнитной жёсткости очень важна в задачах устойчивости. Матрица  $C_m$  симметрична, так как магнитные силы потенциальны. Критиче-

ские параметры могут быть найдены используя статический метод Euler'a.

Как иллюстрацию рассмотрим простую задачу о балке в продольном магнитном поле. Балка располагается на декартовой оси  $z$ , концы  $z=0$  и  $z=l$  закреплены, магнитная индукция  $\mathbf{B} = B\mathbf{k} = \text{constant}$ , по балке течёт постоянный (по величине) ток  $I$ . В классической модели балки при равных жёсткостях на изгиб для прогиба  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$  легко получить следующую постановку:

...

Вводя комплексную комбинацию  $u \equiv u_1 + iu_2$ , будем иметь

...

с общим решением

...

Подстановка в граничные условия приводит к однородной системе для постоянных  $A_k$ . Приравняв нулю определитель, придём к характеристическому уравнению

...

Наименьший положительный корень  $x = 3.666$ , так что критическая комбинация параметров такова:

$$(IBl^3/a)_* = 394.2.$$

Поле  $\mathbf{B}$  в этом решении считалось внешним и не варьировалось. Но если собственное поле тока в стержне сравнимо с  $\mathbf{B}$ , то решение изменится и усложнится.

## Библиография

Основы электродинамики хорошо изложены во многих книгах [90, 85], но для приложений в механике выделяется книга И. Е. Тамма [96]. Растёт список литературы по связанным задачам электромагнетизма и упругости [47, 49]. Как введение в эту область может быть полезна монография В. Новацкого [41].

## МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ (АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ)

Из приближённых подходов к анализу нелинейных систем, методы возмущений применяются чаще всего.

### §1. Асимптотические разложения

До сих пор аргументами функций были только координаты и время. Размеры тела, упругие модули, диапазоны изменений воздействия в пространстве и времени — все эти параметры считались известными. Все асимптотические методы основаны на изучении как решение зависит от параметров.

Разложение возмущения обычно состоит из первых двух слагаемых. Если задача с неизвестной  $u$  содержит параметр  $a$ , то, полагая

$$a = a_0 + \chi a_1,$$

решение ищется в виде ряда

$$u = u_0 + \chi u_1 + \chi^2 u_2 + \dots \quad (1.1)$$

Дополнительный аргумент  $\chi$  называется формальным малым параметром.

Разложение возмущения может расходиться, но в то же время оно может быть более полезным описанием решения, чем представление, которое сходится равномерно и абсолютно.

Разложение (1.1) выглядит как обычный степенной ряд. Однако, мето-

ды возмущений используют иной подход: ряды рассматриваются как асимптотические со сходимостью  $\chi \rightarrow 0$ , не  $n \rightarrow \infty$  (п **показывает** как много членов удерживать).

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\chi), \quad \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\phi - \sum_{k=0}^n \phi_k}{\phi_n} = 0. \quad (1.2)$$

Иначе говоря, остаток ряда есть бесконечно-малая высшего порядка по сравнению с последним удержанным членом. Очевидно, степенной ряд (1.1) сходится и как асимптотический ряд.

Но разлагаемые неизвестные обычно также зависят от “главных” аргументов — от координат и времени. Сходимость для  $\chi \rightarrow 0$  должна быть равномерной по этим “главным” аргументам — это требование к эффективному использованию асимптотических разложений. Например  $\sin(1+\chi)t = \sin t + \chi t \cos t - \frac{1}{2}\chi^2 t^2 \sin t + \dots$  не удовлетворяет требованию равномерности, поскольку с  $t \rightarrow \infty$  последующие члены преобладают над предыдущими.

Чем же асимптотические методы так привлекательны? Как пример возьмём решение уравнения

$$f(u, \chi) = 0.$$

Подставив разложение (1.1) в (1.2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\chi$ , получим

$$\begin{aligned} f(u_0, 0) &= 0, \\ (\partial_u f)_0 + u_1 (\partial_\chi f)_0 &= 0, \\ (\partial_u f)_0 u_2 + \frac{1}{2} (\partial_u^2 f)_0 u_1^2 + \frac{1}{2} (\partial_\chi^2 f)_0 + (\partial_u \partial_\chi f)_0 u_1 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Если проблема для  $u_0$  однозначна и разрешима на первом шаге, то последующие шаги дадут поправки  $u_1, u_2, \dots$ . Малые поправки едва ли важны и  $u_0$  достаточно, но тогда исчезает асимптотический анализ, ведь формально малые члены в (1.2) просто отбрасываются. Впрочем, бывает так, что эти поправки содержат в себе некую важную информацию, отсутствующую в  $u_0$  — тогда они играют главную роль. Стоит упомянуть, что все поправки следуют из линейной проблемы с одним и тем же оператором  $(\partial_u f)_0$ .

Но все нетривиальные и эффективные решения получаются иными способами, неединственность решения на первом шаге характеризует их. **Об этом — в следующих секциях.**

И да, асимптотические методы меняют первоначальную сложную постановку задачи (1.2) на более простую. Существенно то, что это не происходит “простым” отбрасыванием членов, но вполне корректно — равенства остаются равенствами. Однако,

сходимость не доказывается, так что полной математической точности нет.

В предыдущих главах асимптотические проблемы уже возникали. Линейная теория следует из нелинейной теории через асимптотическое разложение по величине нагрузки (§ 4.1). Безмоментная теория происходит (с точностью до краевых эффектов) из моментной (микрополярной) теории (гл. 5), когда “моментные” жёсткости приближаются к бесконечности. В термоупругости (гл. 6) использование уравнения теплопроводности (4.1, § 6.4) вместо всего целого баланса энергии нужно доказать асимптотическими методами.

В какой-то степени введение малого параметра  $\chi \rightarrow 0$  является слабостью всех асимптотических подходов. Возражение типа “бесконечно-малых параметров не бывает, все величины конечны” едва ли конструктивно здесь. Более актуален вопрос: что такое малый параметр? Обычно проблема переформулируется в “безразмерных” величинах, тогда тот “безразмерный” параметр берётся за малый параметр  $\chi$ , который оказывается малым. Но возможен и другой путь: если известно, что некий параметр  $\omega$  лишь немного влияет на решение, то, переобозначив его как  $\chi\omega$ , сделать асимптотический анализ для  $\chi \rightarrow 0$ .

Разумеется, это не “законы” асимптотики, не рекомендации, а лишь соображения. Нет общей теории асимптотических методов, их применение есть в какой-то степени искусство.

Более глубокое описание асимптотических методов написано в книгах Ali Hasan'a Nayfeh [106, 107].

## § 2. Расщепление в линейной алгебраической системе

Этот простой случай хорошо иллюстрирует асимптотические методы.

Рассматривается линейная система

$$C_{ij} u_j = f_i, \quad C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)} \quad (2.1)$$

с матрицей  $C_{ij}$  и столбцами неизвестных  $u_j$  и нагрузок  $f_i$ . Процесс построения асимптотического решения определяется тем, вырождена матрица  $C_{ij}^{(0)}$  или нет. Возможны три случая.

1°  $\det C_{ij}^{(0)} \neq 0$ . Однородная задача

$$C_{ij}^{(0)} u_j = 0 \quad (2.2)$$

имеет лишь тривиальное (нулевое) решение. Матрица  $C_{ij}^{(0)}$  обратима, неоднородная задача всегда однозначно решима. Решение строится так:

$$u_j = \dots \quad (2.3)$$

...

2°  $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...



$$3^\circ \det C_{ij}^{(0)} = 0$$

...

### § 3. Метод Poincaré

Этот метод, ассоциируемый с именем Jules Henri Poincaré, широко известен в теории нелинейных колебаний. Он предназначен, в частности, для определения периодических решений уравнения

$$\ddot{u} + u = \chi f(u, \dot{u}) \quad (3.1)$$

....

### § 4. Метод осреднения Ван дер Поля

Опять рассматривается уравнение (3.1), но теперь ищутся не только периодические решения. Вводится фазовая плоскость

...

Процедура осреднения применяется в разных разделах теории упругости (тонкие тела, композиты и др.). Осреднение вне асимптотических методов приводит обычно к незамкнутым системам уравнений; для замыкания приходится принимать некие гипотезы, что умаляет убедительность теории. Иная ситуация в асимптотике: условия разрешимости для поправочных членов с необходимостью при-

водят к соответствующим интегральным соотношениям.

## § 5. Сращивание асимптотических разложений

Основоположник метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений — Ludwig Prandtl. Рассматривая течение вязкой жидкости, он заметил, что влияние малой вязкости локализовано у края — в тонком слое на краю. Вдали от края жидкость ведёт себя как идеальная. Одни и те же уравнения Navier–Stokes’a по-разному упрощаются вдали от края и около него [...]

Метод сращивания состоит из трёх процедур: построения внешнего разложения, построения внутренних разложений и сращивания внешнего разложения с внутренними. Метод предназначен для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Вдали от края решение меняется плавно, формально малые члены можно отбросить, уравнение имеет пониженный порядок — всё это характерно для внешнего разложения. У края наоборот: решение меняется быстро, первостепенную роль играют старшие производные, хотя имеют малые коэффициенты. Но внешнее и внутреннее разложения —

мер.

это разные формы одного решения, они должны быть состыкованы процедурой сращивания. Рассмотрим при-

Задача о прогибе  $u(x)$  натянутой струны с закреплёнными концами под действием равномерно распределённой нагрузки может быть поставлена так:

...

## § 6. Многоуровневый анализ (метод многих масштабов)

Этот метод привлекателен, естественен и — как написано у Ali Hasan Nayfeh

...

## § 7. Уравнения с медленно меняющимися параметрами

Рассмотрим гармонический осциллятор, собственная частота которого медленно меняется во времени

...

## § 8. Тонкие тела

Задачи теории упругости часто ставятся для тонких тел — стержней, пластин и оболочек. Таковы многие элементы конструкций, но и в природе

вне человека тонкие тела встречаются довольно часто.

Решение задач упругости для тонких тел многие десятилетия основывалось на неких гипотезах о распределении решения по толщине и о порядках одних неизвестных относительно других. Построенные так теории сыграли большую роль в практике инженерных расчётов. Однако, им не хватало логической стройности и убедительности, их хотелось обосновать, уточнить — а в последнее время и уничтожить (в связи с появлением великолепных компьютеров). Но открытие асимптотического расщепления прояснило картину: в тонком теле трёхмерная задача расщепляется на задачи меньшей размерности. Классические теории тонких тел получили и подтверждение, и развитие.

Рассмотрим задачу о кручении  
из ...

...

## Библиография

Ali Hasan Nayfeh's book [107] is an excellent introduction to perturbation methods (asymptotic methods).

Всё разнообразие асимптотических методов представлено в монографиях ...

## глава 9

# СТЕРЖНИ

### §1. Исходные представления

Стержень — это тонкое длинное тело. Он мыслится (и моделируется) как пространственная кривая — ось стержня, покрытая материалом ( [рисунок](#) ).

Ось стержня описывается как кривая параметризацией вектора положения точек кривой. Это морфизм (функция) одной переменной координаты  $s$ ,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s). \quad (1.1)$$

Покрытие материалом даёт в каждой точке стержня плоскую фигуру, перпендикулярную оси — нормальное сечение  $\Omega(s)$ .

...

$\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$  — параметрическая кривая, параметризованная параметром  $t$ . Если  $dt \neq d\ell$ , то параметризация не натуральная. Для натуральной параметризации  $dt = d\ell$ , где

$$d\ell = \sqrt{(dq^1)^2 + (dq^2)^2 + (dq^3)^2}.$$

Многие разные функции рисуют одну и ту же кривую. Но среди различных параметризаций кривой, параметризация длиной дуги особенная,

её также называют *естественной параметризацией*.

Длина бесконечно-малого кусочка кривой описывается Пυθαγόρας-формулой

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

где  $dx \equiv dq^1$ ,  $dy \equiv dq^2$ ,  $dz \equiv dq^3$  — бесконечно-малые изменения координат.  $d\ell$  называется дифференциальной длиной, то есть длиной почти прямого очень малаго куска кривой.

$\mathbf{c}(s)$  is a parametric curve parameterized by the arc length (the natural parametrization), its derivative by the arc length parameter is denoted as  $\mathbf{c}' \equiv \frac{d\mathbf{c}}{ds}$ .

Если используется параметризация длиной дуги (естественная)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , то длина производной  $\mathbf{r}'(s) \equiv \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$  (касательного вектора) всегда равна одной единице длины:

$$\mathbf{r}(s) = q_i(s) \mathbf{e}_i(s) = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \frac{dq_i(s)}{ds} \mathbf{e}_i(s) = q'_i(s) \mathbf{e}_i(s),$$

$$\|\mathbf{r}'(s)\|^2 \equiv \mathbf{r}'(s) \cdot \mathbf{r}'(s) = q'_i(s) \mathbf{e}_i \cdot q'_j(s) \mathbf{e}_j = q'_i(s)$$

$$ds = \sqrt{(dq_1)^2 + (dq_2)^2 + (dq_3)^2} \Rightarrow ds^2 = \sum_{i=1}^3 (dq_i(s)$$

$$\|\mathbf{r}'(s)\|^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 (dq_i(s))^2}{(ds)^2} = 1 \Rightarrow \|\mathbf{r}'(s)\| = 1.$$

...

В каждом сечении мы выбираем две перпендикулярные оси  $x_\alpha$  с со-

направленными единичными векторами  $\mathbf{e}_\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ). Причина выбора для всех сечений стержня одна и та же, для примера, главные оси инерции сечения выбираются везде.

Актуальная ось и начальная ось  
 Когда вектор  $\dot{\mathbf{e}}_3$  направлен к начальной оси, то он пишется как  $\dot{\mathbf{r}}'$   
 Вектор  $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{k}$  перпендикулярен к актуальной (тангенциальной) оси.

Вместе с единичным вектором, касательным к актуальной оси

$$\mathbf{r}' \equiv \frac{d\mathbf{r}}{ds} \equiv \mathbf{r}_{\partial s} \equiv \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{k},$$

мы получим для каждого  $s$  тройку взаимно перпендикулярных единичных векторов.

Кривизна и кручение оси стержня могут быть описаны вектором  $\boldsymbol{\psi} = \psi_j \mathbf{e}_j$ :

$$\mathbf{e}'_j = \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{e}_j, \quad \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}'_j. \quad (1.2)$$

Для цилиндрического (призматического) стержня  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$ .

Однако, (1.2) есть лишь первоначальное понятие о векторе  $\boldsymbol{\psi}$  как о геометрических характеристиках. Далее в § 2, после принятия материальной структуры стержня, понятие о  $\boldsymbol{\psi}$  изменится.

Кроме этого, в каждой точке оси стержня, мыслимой как кривая, есть

также другая тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов, та что с нормальным и бинормальным векторами.

Касательный  $\mathbf{T}$ , нормальный  $\mathbf{N}$  и бинормальный  $\mathbf{B}$  векторы, вместе называемые *системой Frenet–Serret*, определяются как:

- ✓  $\mathbf{T}$  — единичный вектор, касательный к кривой. Длина касательного вектора всегда одна единица, если используется естественная параметризация кривой (длиной дуги). Касательный вектор указывает туда, где кривая продолжается дальше.
- ✓  $\mathbf{N}$  — нормальный единичный вектор, производная  $\mathbf{T}$  по параметру кривой (например, the arc length of a curve). Нормальный вектор всегда перпендикулярен касательному вектору и направлен к центру кривизны. Он поделён на свою длину  $\|\mathbf{N}\|$ , чтобы быть длиной в одну единицу.
- ✓  $\mathbf{B}$  — бинормальный единичный вектор, “ $\times$ ”-произведение (“cross product”)  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ .

Формулы Frenet–Serret описывают производные касательного, нормального и бинормального единичных векторов через отношения друг с другом.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \kappa\mathbf{N}, \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} &= -\tau\mathbf{N},\end{aligned}$$



где  $d/ds$  обозначает производную по длине дуги,  $\kappa$  есть кривизна и  $\tau$  есть кручение кривой. Соединённая коллекция —  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\kappa$ ,  $\tau$  — называется аппаратом Frenet–Serret.

Два скаляра  $\kappa$  и  $\tau$  эффективно определяют кривизну и кручение пространственной кривой. Интуитивно, кривизна измеряет отклонение кривой от прямой линии, тогда как кручение измеряет отклонение кривой от плоской.

Две функции  $\kappa(s)$  и  $\tau(s)$  полностью определяют геометрию кривой, потому что это коэффициенты системы обыкновенных дифференциальных уравнений для  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{B}$ . Зная  $\mathbf{T}(s)$ , мы получим  $\mathbf{r}(s)$  интегрированием **чего?** с точностью до постоянного жёсткого движения без деформаций.

...

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \text{или} \quad \mathbf{T} = \mathbf{r}'$$

Производная  $\mathbf{T}$  состоит из двух множителей — кривизны  $\kappa$  и единичного нормального вектора  $\mathbf{N}$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N} \quad \text{или} \quad \mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$$

Кривизна  $\kappa$  равна magnitude (длине) вектора  $\mathbf{N}$  (производной вектора  $\mathbf{T}$ , второй производной вектора положения  $\mathbf{r}$ )

$$\kappa = \|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{T}'\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{r}''\| = \left\| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right\|$$

Сам вектор  $N$  поделён на свою длину, поэтому его длина равна одной единице.

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left\| \frac{dT}{ds} \right\|} \quad \text{или} \quad N = \frac{T'}{\|T'\|}$$

Радиус кривизны — число, обратное кривизне.

$$\frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} = N \quad \text{или} \quad \frac{1}{\kappa} T' = N$$

...

$$\kappa \geq 0$$

Система Frenet–Serret определена лишь если кривизна отлична от нуля ( $\kappa > 0$ ), она не определена, если  $\kappa = 0$ .

Линия с ненулевой кривизной  $\kappa \neq 0$  считается кривой.

Нулевая кривизна предполагает, что линия прямая, и она лежит в плоскости, делая кручение тоже равным нулю ( $\tau = 0$ ).

...

$T$  всегда имеет единичную магнитуду (длину). Поскольку длина  $T$  постоянна, то  $N$  — производная  $T$  и вторая производная вектора положения  $r$  — всегда перпендикулярна  $T$   
 $T \cdot T = 1 \Rightarrow T' \cdot T = 0 \Rightarrow N \cdot T = 0$ .

Векторы системы Frenet–Serret составляют ортонормальный базис  $f_i$ :

$$f_1 = T, \quad f_2 = N, \quad f_3 = B.$$

Вектор положения в базисе  
Frenet–Serret

$$\mathbf{r}(s) = q_j(s) \mathbf{f}_j(s) = q_1(s) \underbrace{\mathbf{f}_1(s)}_T + q_2(s) \underbrace{\mathbf{f}_2(s)}_N + q_3(s)$$

Тензорная версия формул  
Frenet–Serret

$$\mathbf{f}_i' = {}^2\mathbf{d} \cdot \mathbf{f}_i. \quad (1.3)$$

Формулы Frenet–Serret, написанные с использованием матричных обозначений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Тензор  ${}^2\mathbf{d}$  — кососимметричный, так что он может быть представлен через сопутствующий псевдовектор (§ 1.7). Этот псевдовектор известен как вектор Darboux.

$$\mathbf{D} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$$

$$\mathbf{D} = \tau \mathbf{T} + 0\mathbf{N} + \kappa \mathbf{B}$$

С вектором Darboux, формулы Frenet–Serret превращаются в следующее:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{D} \times \mathbf{T},$$

$$\mathbf{N}' = \mathbf{D} \times \mathbf{N},$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

или как векторная версия (1.3)

$$\mathbf{f}_i' = \mathbf{D} \times \mathbf{f}_i. \quad (1.4)$$

Вектор Darboux есть вектор угловой скорости системы Frenet–Serret.

...

Приближённые прикладные теории стержней вроде “сопротивления

материалов” используют такие понятия как внутренняя сила  $Q$  и внутренний момент  $M$ . Следующие соотношения связывают их с тензором напряжения

$$Q(s) = \int_{\Omega} t_{(k)} d\Omega = \int_{\Omega} k \cdot \tau d\Omega, \quad (1.5)$$

$$M(s) = \int_{\Omega} x \times t_{(k)} d\Omega = \int_{\Omega} x \times k \cdot \tau d\Omega. \quad (1.6)$$

$$k \equiv e_3, \quad x = x_{\alpha} e_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2$$

...

Эти мысли о геометрии и о механике — в частности, о внутренней силе (1.5) и внутреннем моменте (1.6) — касаются только какой-то уникальной единственной конфигурации стержня. Продолжать эти мысли бессмысленно, потому что в реальности плоские и нормальные сечения не остаются плоскими и нормальными после деформирования.

*synonyms for*

warp, warping =  
deformation, strain  
ние (distort, distort)  
перекосить, перекос  
покоробить, коробо  
become twisted or

А добавление некоторых предположений-гипотез в модель, подобных “искривления (депланаций) нет” и первоначально плоские

сечения остаются плоскими\* вносит существенные противоречия с реальностью. Достаточно вспомнить лишь один факт, что без деформаций невозможно приемлемо описать кручение стержня (и не только кручение).

Очень резонный подход к моделированию деформаций упругого стержня состоит в асимптотическом расщеплении трёхмерной проблемы с малой толщиной. Но для сложной асимптотической процедуры было бы намного проще иметь какую-нибудь версию решения заранее. И прямой подход, когда одномерная модель стержня — материальная линия, даёт такую версию.

Первичный вопрос для построения одномерной модели: какими степенями свободы — помимо трансляции — обладают частицы материальной линии?

Известно, что стержни чувствительны к моментным нагрузкам. А присутствие моментов среди обобщённых сил показывает наличие вращательных степеней свободы. Поэто-

\* Существуют две очень популярные модели балки, которые постулируют гипотезу об отсутствии деформаций. В теории балок Euler'a–Bernoulli, сдвиговыми деформациями пренебрегают, плоские сечения остаются плоскими и перпендикулярными оси. В теории балок Timoshenko имеется постоянный поперечный сдвиг вдоль сечения, так что плоские сечения всё ещё остаются плоскими, но они больше не перпендикулярны оси.

му как одномерную модель стержня разумно взять линию Cosserat — она состоит из бесконечно-малых абсолютно жёстких тел. Впрочем, другие новые степени свободы могут тоже появиться — как для тонкостенных стержней, описанных в отдельной главе (гл. 10).

В механике сплошных упругих сред у стержней — специальное место. Во-первых, моменты играют здесь главную роль, а не роль малых добавок как в трёхмерном континууме Cosserat. Во-вторых, стержни могут быть использованы для тестирования моделей с дополнительными степенями свободы, прежде, чем наличие этих степеней будет исследовано для трёхмерных моделей.

Следующая секция представляет и описывает простую одномерную моментную модель типа Cosserat.

## § 2. Кинематика линий Коссера

Модель, описанная далее — упрощённая версия гл. 5.

Больше нет тройки материальных координат  $q_i$ , но лишь одна —  $s$ . Это может быть параметр длины дуги в начальной конфигурации. Движение частицы со временем описывается вектором положения  $\mathbf{r}(s, t)$  и тензором поворота  $\mathbf{O}(s, t)$ . Линейная и уг-

ловая (11.8, § 1.11) скорости частицы стержня суть

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{O}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^\top)_\times. \quad (2.2)$$

Деформация стержня как линии Cosserat определяется двумя векторами

$$\boldsymbol{\Gamma} \equiv \mathbf{r}' - \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{r}}', \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \equiv -\frac{1}{2}(\mathbf{O}' \cdot \mathbf{O}^\top)_\times \Leftrightarrow \mathbf{O}' = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{O}. \quad (2.4)$$

$$\left( \dot{\mathbf{r}}(s) \equiv \mathbf{r}(s, 0) \right)$$

$$\|\mathbf{e}_3\| = \|\dot{\mathbf{e}}_3\| = 1 = \text{constant}$$

(2.3) и (2.4) реально векторы деформации, это следует из равенства их нулю на движениях тела как жёсткого целого (... add some equation(s) here describing movements as a rigid whole ....).

Дальше мы проясним идею первого вектора деформации  $\boldsymbol{\Gamma}$ . Без потери универсальности, параметр  $s$  это начальная длина дуги, третий начальный базисный вектор  $\dot{\mathbf{e}}_3$  направлен вдоль касательной в начальной конфигурации:  $\dot{\mathbf{e}}_3 = \dot{\mathbf{r}}'$ . И тогда

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma} &\equiv \mathbf{r}' - \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{r}}', \quad \dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{e}}_3, \quad \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3 \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{r}' - \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{e}_3, \quad \|\mathbf{r}'\|^2 = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = (\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{e}_3) \cdot (\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{e}_3) \\ &= \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} + 2\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{r}'\| = \sqrt{\|\boldsymbol{\Gamma}\|^2 + 2\boldsymbol{\Gamma}_3 + 1},$$

$$\|\mathbf{r}'\| - 1 = \sqrt{\|\mathbf{\Gamma}\|^2 + 2\Gamma_3 + 1} - 1 = \Gamma_3 + \infty^{-1}(\|\mathbf{\Gamma}\|^2) \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) описывает относительное удлинение. Грубо говоря, компоненту  $\Gamma_3 \equiv \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_3$  можно считать удлинением, а компоненты  $\Gamma_1 \equiv \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_1$ ,  $\Gamma_2 \equiv \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_2$  представляют поперечный сдвиг. Более точно полагаться на формулы (2.5) и (2.6).

.....

В модели стержня типа Cosserat нет сечения как плоской фигуры.

....

### § 3. Баланс сил и моментов

Возможные нагрузки, действующие на стержень как линию Cosserat — силы и моменты: на бесконечно-малый элемент  $ds$  стержня действуют внешняя сила  $\mathbf{q}ds$  и внешний момент  $\mathbf{m}ds$ . Внутренними взаимодействиями будут сила  $\mathbf{Q}(s)$  и момент  $\mathbf{M}(s)$  — это действие частицы с координатой  $s+0$  на частицу с  $s-0$ . Принцип действия–противодействия даёт, что реверс (перемена направления) координаты  $s$  меняет знаки  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$ .

...



## § 4. Принцип виртуальной работы и следствия

Для кускá стержня  $s_0 \leq s \leq s_1$  формулировка принципа таковá

.....

Условно  $\mathbf{a}$  есть тензор жёсткости на изгиб и кручение,  $\mathbf{b}$  — тензор жёсткости на растяжение и сдвиг, а  $\mathbf{c}$  — тензор перекрёстных связей.

Тензоры жёсткости поворачиваются вместе с частицей:

...

## § 5. Классическая модель Kirchhoff'a

Её ещё называют *теорией стержней Kirchhoff'a*.

До сих пор функции  $\mathbf{r}(s, t)$  и  $\mathbf{O}(s, t)$  были независимы. Классическая теория Kirchhoff'a постулирует внутреннюю связь

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{\partial s} = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\partial s} \text{ или } \mathbf{r}' = \mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}'. \quad (5.1)$$

Имея идею вектора  $\mathbf{\Gamma}$  (2.5), здесь мы можем сказать, что: (1) стержень нерастяжим, (2) поперечных сдвигов нет.

Если базисный вектор  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_3$  был направлен вдоль касательной к оси в начальной конфигурации, то он будет оставаться на касательной также после деформирования. Частицы стерж-

ния вращаются лишь вместе с касательной к оси и вокруг неё.

Уравнения баланса сил и моментов (импульса и момента импульса) не меняются от введения связи (5.1). Но локальное вариационное соотношение (...) становится короче:

...

## § 6. Проблема Euler'a об устойчивости стержней

Рассматривается прямой стержень, закреплённый на одном конце и нагруженный силой  $\mathbf{P}$  на другом (рисунок ?? 123 ??). Сила “мёртвая” (не меняется в процессе деформирования)

...

## § 7. Вариационные уравнения

В нелинейной механике упругих сред полезны вариационные уравнения, которые описывают малое изменение текущей конфигурации (§ 3.12).

Варьируя уравнения полной системы модели Cosserat, мы получаем

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{Q}' + \delta \mathbf{q} &= \rho (\mathbf{u} + \delta \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\varepsilon})^{**}, \\ \delta \mathbf{M}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{r}' \times \delta \mathbf{Q} + \delta \mathbf{m} &= \dots\end{aligned}$$

...

## § 8. Модель без сдвига с растяжением

Модель Kirchhoff'a с внутренней связью  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$  (5.1) не описывает простейший случай растяжения/сжатия прямого стержня. Эта неприятность исчезает со “смягчением” связи, например добавляя возможность растяжения и подавляя лишь поперечный сдвиг

$$\mathbf{\Gamma} = \Gamma e_3 \Leftrightarrow \Gamma_\alpha = 0 \quad (8.1)$$

...

## § 9. Механика гибкой нити

Нить — это безмоментный стержень.

Гибкая нить (цепь) проще стержня, потому что её частицы суть “простые” материальные точки с лишь трансляционными степенями свободы. Поэтому среди нагрузок нет моментов, только “линейные” силы — внешние распределённые  $\mathbf{q}$  и внутренние сосредоточенные  $\mathbf{Q}$ . Движение нити полностью определяется одним вектором-радиусом  $\mathbf{r}(s, t)$ , а инерционные свойства — линейной плотностью  $\rho(s)$ .

Вот принцип виртуальной работы для куска нити  $s_0 \leq s \leq s_1$

$$\int_{s_0}^{s_1} \left( (\mathbf{q} - \rho \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} - \delta \Pi \right) ds + \left[ \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r} \right]_{s_0}^{s_1} = 0. \quad (9.1)$$

...

Механика нити детально описана в книге [34].

## § 10. Линейная теория

В линейной теории внешние воздействия считаются малыми, а отсчётная конфигурация — ненапряжённым состоянием покоя. Уравнения в вариациях в этом случае дают

...

## § 11. Случай малой толщины

Когда относительная толщина стержня мала, тогда модель типа Cosserat уступает место классической. Понятие “толщина” определяется соотношением жёсткостей:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — разных единиц измерения; полагая  $\mathbf{a} = \hbar^2 \hat{\mathbf{a}}$  и  $\mathbf{c} = \hbar \hat{\mathbf{c}}$ , где  $\hbar$  — некий диапазон длины, получим тензоры  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\hat{\mathbf{c}}$  с одной и той же единицей. Подбирая  $\hbar$  так, чтобы сблизилась характерные значения тензоров  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\hat{\mathbf{c}}$ , найдём эквивалентную толщину  $h$  стержня (для реальных трёхмерных стержней  $h$  где-то на уровне диаметра сечения).

Представив  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$  через векторы бесконечномалой линейной деформации

...

Переход модели типа Cosserat в классическую кажется более очевидным, если непосредственно интегрировать уравнения (...)

...

## § 12. Задача Сэйнт-Венана

Трудно переоценить ту роль, которую играет в механике стержней классическое решение Saint-Venant'a. О нём уже шла речь в § 4.13.

Вместо условий ...

...

## § 13. Нахождение жёсткости по энергии

Для определения тензоров жёсткости  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  одномерной модели достаточно решений трёхмерных задач для стержня. Но тут возникают два вопроса: какие именно задачи рассматривать и что нужно взять из решений?

Проблема Saint-Venant'a выделяется среди прочих, ведь оттуда берётся жёсткость на кручение.

Вдобавок есть много точных решений, получаемых таким путём: задаётся поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , определяется  $\check{\boldsymbol{\tau}} = {}^4\mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u}$ , затем находятся объёмные  $\check{\mathbf{f}} = -\nabla \cdot \check{\boldsymbol{\tau}}$  и поверхностные  $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \check{\boldsymbol{\tau}}$  нагрузки.

Но что делать с решением? Ясно, что  $Q$  и  $M$  в стержне — это интегралы по сечению (...). И совсем не ясно, что принять за смещение и поворот в одномерной модели. Если взять, например, такую версию (индекс  $u$  показывает размерность модели)

$$u_1(z) = \Omega^{-1} \int_{\Omega} u_3(x, z) d\Omega, \quad \theta(z) = \frac{1}{2} \Omega^{-1} \int_{\Omega} \nabla \times u$$

то чем другие возможные представления хуже?

Помимо  $Q$  и  $M$ , есть ещё величина, не вызывающая сомнений — упругая энергия. Естественно потребовать, чтобы в одномерной и в трёхмерной моделях энергии на единицу длины совпали. При этом, чтобы уйти от различий в трактовках  $u_1$  и  $\theta$ , будем исходить из дополнительной энергии  $\hat{\Pi}(M, Q)$ :

$$\hat{\Pi}(M, Q) = \int_{\Omega} \Pi_3 d\Omega$$

...

## § 14. Вариационный метод построения одномерной модели

Мы только что определили жёсткости стержня, полагая, что одномерная модель линии типа Cosserat адекватно описывает поведение трёхмерной модели. “Одномерные” представления

ассоциируются со следующей картиной смещений в сечении:

$$\mathbf{u}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{U}(s) + \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{x}. \quad (14.1)$$

Однако, такое поле  $\mathbf{u}$  не удовлетворяет уравнениям трёхмерной теории(??добавить, **каким именно**). Невозможно пренебречь возникающими невязками в дифференциальных уравнениях и краевых условиях.

Формально “чистым” является вариационный метод сведения трёхмерной проблемы к одномерной, называемый иногда методом внутренних связей. Аппроксимация (14.1) подставляется в трёхмерную формулировку вариационного принципа минимума потенциальной энергии (9.1, § 4.9)

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_V (\Pi(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) dV - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma \rightarrow \min,$$

которая после интегрирования по сечению становится одномерной. Если  $\mathbf{U}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  варьируются независимо, получаем модель типа Коссера. В случае  $\mathbf{U}' = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}$  приходим к классической модели.

Метод внутренних связей привлекателен, его продолжают “переоткрывать”. С его помощью возможно моделировать тела с неоднородностью и анизотропией, он легко обобщается на динамику, если  $\mathbf{f}$  дополнить неварьируемой динамической добавкой до  $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ . Можно рассматривать и стержни

переменного сечения, и даже нелинейно упругие, ведь вариационная постановка есть (гл. 3).

Аппроксимацию (14.1) можно дополнить слагаемыми с внутренними степенями свободы. Понимая необходимость учёта депланаций, некоторые авторы

...

...

Для вариационного построения одномерных моделей удобно использовать принцип Reissner'a–Hellinger'a (§ 4.11) с независимой аппроксимацией напряжений [17]. В этом случае нужна некоторая согласованность между  $u$  и  $\tau$ .

Множеству достоинств вариационного метода противостоит один, но значительный недостаток. Вводя приближения в сечениях, мы навязываем наши нереальные упрощения реальности. Вариационный метод более подходит для прикладных расчётов.

## § 15. Асимптотическое расщепление трёхмерной проблемы

Асимптотическое расщепление можно считать фундаментальным для описания механики стержней. Одномерные модели рисуют лишь часть картины, двумерные проблемы в поперечных се-



чениях рисуют другую часть, а вместе они представляют решение трёхмерной проблемы для малой толщины.

Как ввести малый параметр  $\chi$  в трёхмерную проблему? Проще всего сделать это через представление вектора положения (§ 1):

$$\mathbf{R}(x_\alpha, s) = \chi^{-1} \mathbf{r}(s) + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \equiv x_\alpha \mathbf{e}_\alpha(s), \quad \alpha = 1, 2$$

Для ортонормального базиса, верхние и нижние индексы не различаются

$$q_i = q^i, \quad \mathbf{R}^i = \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{\partial i} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i}.$$

Три координаты —

$$q^1 = x_1, \quad q^2 = x_2, \quad q^3 = s.$$

Векторы базиса суть

$$\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{t} \equiv \mathbf{e}_3.$$

Представление оператора  
Hamilton'a  $\nabla$

$$\nabla = \mathbf{R}^i \frac{\partial}{\partial q^i} = \nabla_\perp + v^{-1} \mathbf{t} (\partial_s - \psi_t D), \quad \nabla_\perp \equiv \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

$$v \equiv \mathbf{R}_{\partial 1} \times \mathbf{R}_{\partial 2} \cdot \mathbf{R}_{\partial 3} = \chi^{-1} + \mathbf{t} \cdot \psi_\perp \times \mathbf{x}, \quad D \equiv \mathbf{t} \cdot \nabla$$

$$\psi_\perp + \psi_t \mathbf{t} = \psi$$

(смысл вектора  $\psi$  тот же как и в § 1).

Тензор напряжения Cauchy

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_\perp + \sigma_t \mathbf{t} \mathbf{t} + 2 \mathbf{t} \boldsymbol{\tau}_\parallel^S, \quad \boldsymbol{\tau}_\perp \equiv \tau_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta, \quad \boldsymbol{\tau}_\parallel \equiv \tau_{33}$$

...

## § 16. Температурные деформация и напряжение

Прямой подход, столь эффективный для создания одномерных моделей Cosserat и Kirchhoff'a, для проблем

термоупругости неприменим. Переход от трёхмерной модели к одномерной может быть реализован или вариационным путём, или асимптотическим.

Описанный в § 14 вариационный метод целиком переносится на термоупругость — включая задачи с неоднородностью и анизотропией, переменным сечением, динамические и даже нелинейные. Для этого нужно (§ 6.8) в принципе Lagrange’а минимума потенциальной энергии заменить потенциал  $\Pi(\varepsilon)$  свободной энергией

...

## Библиография

В отличие от других тем теории упругости, стержни представлены в книгах очень скромно. Стиль изложения “сопротивления материалов” преобладает, более точные и совершенные подходы кажутся невозможными или ненужными многим авторам.

Но было опубликовано много интересных статей, их обзоры представлены, например, у S. Antman’a [1], В. В. Елисеева [17] и А. А. Илюхина [?].

## ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ

### §1. Вариационный подход

**В** главе 9 были описаны стержни с массивными сечениями. Но широко используются и иные стержни — тонкостенные, с сечениями из узких полосок разных очертаний: уголок, Z-балка, швеллер (С-балка), двутавр, ... Если стержни похожи на линии, то в тонкостенном стержне само сечение тоже выглядит как линия. Три размера — толщина и длина сечения, а также длина стержня — имеют разные десятичные порядки.

Известны прикладные теории тонкостенных стержней, они описаны, например, в книгах ...

Есть также точная теория, основанная на асимптотическом расщеплении трёхмерной проблемы [17]. В итоге, сложный асимптотический анализ подтвердил большинство из гипотез прикладных теорий.

Как введение в механику тонкостенных стержней, вот следующая вариационная процедура с искажением (депланацией) поперечных сечений.

Рассмотрим простейший случай цилиндрического стержня с тонким односвязным сечением (... рисунок ...). Площадь сечения  $do$ , боковая поверхность свободна, нагрузка в объёме —

$\mathbf{f}$ , на торце  $z = z_1$  известны поверхностные силы  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ ), торец  $z = z_0$  закреплён.

...

## § 2. Уравнения с малым параметром

Рассмотрим призматический стержень с односвязным сечением в виде тонкой криволинейной полоски постоянной толщины  $h$ . Радиус-вектор в объёме представим следующим образом:

...

## § 3. Первый шаг асимптотической процедуры

*Внешнее разложение*

Из системы

...

*Внутреннее разложение вблизи  $s_0$*

Выпишем уравнения для

...

*Сращивание*

Стыковка внутреннего и внешнего разложений

...

## § 4. Второй шаг

*Внешнее разложение*

Из системы

...

*Внутреннее разложение вблизи  $s=s_0$*

Из общей системы

...

*Срацивание*

Поскольку рассматриваются поправочные члены асимптотических разложений

...

## § 5. Третий шаг

*Внешнее разложение*

Из системы

....

*Внутреннее разложение около  $s=s_0$*

Как уже отмечалось, внутренние разложения нужны для постановки краевых условий на концах

...

*Срацивание*

В плоской задаче имеем следующее двучленное внешнее разложение:

....

## § 6. Четвёртый шаг

Здесь понадобится лишь внешнее разложение. Более того: в этом приближении мы не будем искать решения уравнений — будет достаточно лишь условий разрешимости. Напомним, что философия наша такова: разыскиваются лишь главные члены асимптотических разложений, но для полного их определения могут понадобиться

...

## § 7. Смещения

Расписывая тензорное соотношение

...

## § 8. Результаты асимптотического анализа

Нахождение главных членов асимптоти напряжений и смещений для тонкостенных стержней оказалось намного сложнее, чем для массивных сечений. Дадим сводку полученных выше итоговых результатов.

Смещение:

$$\mathbf{u}_\perp = \lambda^{-4} (\mathbf{U}_\perp(z) + \theta(z) \mathbf{k} \times \mathbf{r}) + \infty^{-1} (\lambda^{-3}), \quad (8.1)$$

$$u_{[z]} = \lambda^{-3} (-\dot{\mathbf{U}}_\perp \cdot \mathbf{r} + \dot{\theta} \omega(s) + U_z(z)) + \infty^{-1} (\lambda^{-2}). \quad (8.2)$$

Напряжения:

...

Помимо книг В.З. Власов'а [8],  
и Я.Г. Пановко [15], отметим статьи  
и Е.А. Бейлина [43].

Материал этой главы содержится в диссертации  
ра В.Елисеева [17], там также есть обширный материал по  
тему тонкостенных стержней.

# ОБОЛОЧКИ И ПЛАСТИНЫ

## §1. Геометрия поверхности

**П**оверхность описывается функцией (морфизмом)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^\alpha), \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.1)$$

двух взаимно независимых переменных параметров (координат)  $q^\alpha$ , тогда  $\mathbf{r}$  — вектор положения (вектор-радиус) точек поверхности.

### Примеры

- ✓ линейное отображение есть плоскость  $\mathbf{r}(a, b) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$
- ✓ геликоид  $\mathbf{r}(u, v) = u \sin v \mathbf{e}_1 + u \cos v \mathbf{e}_2 + v \mathbf{e}_3$
- ✓ конус  $\mathbf{r}(u, v) = u \sin v \mathbf{e}_1 + u \cos v \mathbf{e}_2 + u \mathbf{e}_3$
- ✓ цилиндр радиуса  $r = \text{constant}$   

$$\mathbf{r}(u, v) = r(\cos u \mathbf{e}_1 + \sin u \mathbf{e}_2) + v \mathbf{e}_3$$
- ✓ тор вращения с радиусами  $r$  и  $R$   

$$\mathbf{r}(p, q) = \mathbf{e}_1(r \cos p + R) \cos q + \mathbf{e}_2(r \cos p + R) \sin q + p \mathbf{e}_3$$
- ✓ 2-сфера — тор с  $R = 0$   

$$\mathbf{r}(p, q) = r(\cos p \cos q \mathbf{e}_1 + \cos p \sin q \mathbf{e}_2 + \sin p \mathbf{e}_3)$$
- ✓ параболоид  $\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + (u^2 + v^2) \mathbf{e}_3$   
 ская параметризация  $\mathbf{r}(\rho, \vartheta) = \rho \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \rho \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + \rho^2 \mathbf{e}_3$   
 параболоида вращения.

Непрерывное изменение одной координаты  $q^1$ , пока вторая координата  $q^2 = u^* = \text{constant}$  “заморожена”, даёт координатную линию  $\mathbf{r}^{(1)}(q^1) = \mathbf{r}(q^1, u^*)$ . Пересечение двух координатных ли-



ний  $q^1 = v^*$  и  $q^2 = w^*$  однозначно определяет точку  $\mathbf{r}(v^*, w^*)$  поверхности.

$$\text{Векторы} \quad \mathbf{r}_{\partial\alpha} \equiv \partial_\alpha \mathbf{r}, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \quad (1.2)$$

касательны к координатным линиям. Если они линейно независимы (то есть  $\mathbf{r}_{\partial 1} \times \mathbf{r}_{\partial 2} \neq \mathbf{0}$ )\*, они составляют локальный базис для представления любого вектора  $\mathbf{v}$  в касательной плоскости как линейной комбинации

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(2)} &= v^\alpha \mathbf{r}_{\partial\alpha} = v_\alpha \mathbf{r}^\alpha, \\ v^\alpha &= \mathbf{v}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^\alpha, \quad v_\alpha = \mathbf{v}^{(2)} \cdot \mathbf{r}_{\partial\alpha}, \quad \mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_{\partial\beta} = \delta_\beta^\alpha. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{r}^\alpha$  — локальный взаимный базис в (ко)касательной плоскости.

Поле единичных нормальных векторов  $\mathbf{n}(q^\alpha)$  добавляет в каждой точке поверхности ( $\forall \mathbf{r}(q^\alpha) \Leftrightarrow \forall q^\alpha$ ) единичную\*\* нормаль

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_{\partial 1} \times \mathbf{r}_{\partial 2}}{\|\mathbf{r}_{\partial 1} \times \mathbf{r}_{\partial 2}\|}. \quad (1.4)$$

В несингулярных точках, три вектора  $\mathbf{r}_{\partial 1}$ ,  $\mathbf{r}_{\partial 2}$  и  $\mathbf{n}$  могут быть взяты как базис для всего трёхмерного пространства, давая разложение любого вектора (и любого тензора тоже), например  $\mathbf{u}^{(3)} = u^\alpha \mathbf{r}_{\partial\alpha} + u^n \mathbf{n}$ .

$$u^n = u_n$$

\* Иногда где-нибудь — в так называемых сингулярных точках — это не так. Как пример, для 2-сферы единичного радиуса

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(p, q) &= \cos p \cos q \mathbf{e}_1 + \cos p \sin q \mathbf{e}_2 + \sin p \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{r}_{\partial p} = \partial_p \mathbf{r} &= -\sin p \cos q \mathbf{e}_1 - \sin p \sin q \mathbf{e}_2 + \cos p \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{r}_{\partial q} = \partial_q \mathbf{r} &= -\cos p \sin q \mathbf{e}_1 + \cos p \cos q \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

полюс  $p = \pm \frac{\pi}{2}$  — сингулярная точка:  $\mathbf{r}_{\partial q}|_{p=\pm\pi/2} = \mathbf{0}$ .

\*\*  $\|\mathbf{a}\| \equiv \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$  — длина вектора  $\mathbf{a}$ .

для 2-сферы единичного радиуса

$$\mathbf{r}_{\partial p} \times \mathbf{r}_{\partial q} = -\det \begin{bmatrix} -\sin p \cos q & \mathbf{e}_1 & -\cos p \\ -\sin p \sin q & \mathbf{e}_2 & \cos p \\ \cos p & \mathbf{e}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Единичные (“метрические”) бивалентные тензоры  $\mathbf{E}$  в пространстве и  $\mathbf{I}$  в касательной плоскости

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} + \mathbf{n}\mathbf{n}, \mathbf{I} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n} = \mathbf{r}_{\partial\alpha} \mathbf{r}^\alpha = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}_{\partial\alpha}.$$

Представление вектора положения  $\mathbf{h}$  любой точки пространства на расстоянии  $h$  от поверхности ( $\partial_\alpha h = 0$ )

$$\mathbf{h}^{(3)}(q^\alpha, h) = \mathbf{r}(q^\alpha) + h\mathbf{n}(q^\alpha) \quad (1.5)$$

даёт локальный касательный базис

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\partial n}^{(3)} &= \mathbf{n} = \mathbf{h}^{(3)n}, \\ \mathbf{h}_{\partial\alpha}^{(3)} &\equiv \partial_\alpha \mathbf{h} = \partial_\alpha \mathbf{r} + h \partial_\alpha \mathbf{n} = \mathbf{r}_{\partial\alpha} + h \mathbf{r}_{\partial\alpha} \cdot \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n} \\ &\dots \end{aligned}$$

дифференциальный оператор “набла”

$$\text{в пространстве } \nabla \equiv \mathbf{h}^{(3)i} \partial_i$$

$$\text{в касательной плоскости } \nabla \equiv \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha$$

...

$$\mathbf{h}_{\partial\alpha}^{(3)} = \mathbf{r}_{\partial\alpha} \cdot \left( \mathbf{r}^\beta \mathbf{r}_{\partial\beta} + h \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n} \right) = \mathbf{r}_{\partial\alpha} \cdot \left( \mathbf{I} + h \nabla \mathbf{n} \right) =$$

Двухкоординатный бивалентный тензор

$${}^{2(2)}\mathbf{c} \equiv -\nabla \mathbf{n} = -\mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha \mathbf{n} \quad (1.6)$$

характеризует кривизну поверхности.

...

$$\text{кобазис } \mathbf{h}^{(3)\alpha} \cdot \mathbf{h}_{\partial\beta}^{(3)} = \delta_\beta^\alpha, \mathbf{h}^{(3)i} \cdot \mathbf{h}_{\partial j}^{(3)} = \delta_j^i$$

$$\mathbf{h}^{(3)\alpha} = \left( \mathbf{I} + h {}^{(2)}\nabla \mathbf{n} \right)^{-1} \cdot \mathbf{r}^\alpha, \mathbf{h}^{(3)n} = \mathbf{n}$$

связь между  $\nabla$  и  $\nabla^{(2)}$

$$\nabla = \left( \mathbf{I} + h {}^{(2)}\nabla \mathbf{n} \right)^{-1} \cdot \nabla^{(2)} + \mathbf{n} \partial_n$$

...

## § 2. Модель оболочки

С моделями трёхмерного моментного континуума и одномерных стержней не так уж тяжело to figure out в механике оболочек.

Как геометрический объект, оболочка определяется срединной поверхностью и толщиной  $h$ , так что в формуле (1.5)

$$-h/2 \leq \ell \leq h/2.$$

...

## § 3. Баланс сил и моментов для оболочки

При  $\delta u = \text{constant}$  и  $\delta \varphi = 0$  (трансляция) ...

...

## § 4. Оболочки: Отношения упругости

Локальное соотношение (??) после вывода уравнений баланса ...

...

## § 5. Классическая теория оболочек

Вышеизложенная теория (напоминающая балку Тимошенко и континуумы

Cosserat) рассматривает повороты  $\varphi$  независимо от смещений  $\mathbf{u}$ . Но опыт подсказывает, что материальный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остаётся таким и после деформации (кинематическая гипотеза Kirchhoff'a). В классической теории Kirchhoff'a, Арона и Love'a поле  $\varphi$  выражается через  $\mathbf{u}$ , что в конце концов даёт свести всё к одному векторному уравнению для  $\mathbf{u}$ .

Предположим, что в основе классической теории лежит внутренняя связь

...

## § 6. Оболочки: Пластина

Пластина есть простейший вид оболочки. Единичный перпендикуляр  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  направлен по декартовой оси  $z$ , в качестве координат ...

...

## § 7. Оболочки: Подход с множителями Лагранжа

Уязвимым местом этого изложения теории оболочек являются формулы

...

## § 8. Цилиндрическая оболочка

Существуют разные уравнения цилиндрической оболочки. Приводятся громоздкие выкладки с отбрасыванием некоторых малых членов, и не всегда ясно, какие именно члены действительно можно отбросить.

Предлагаемая читателю теория оболочек иного свойства: лишних членов нет, все уравнения записаны в компактной тензорной форме — остаётся лишь грамотно действовать с компонентами тензоров. В качестве иллюстрации рассмотрим цилиндрическую оболочку.

В декартовой системе

...

## § 9. Оболочки: Общие теоремы

Пусть край закреплён

...

## § 10. Оболочки: Краевые условия

В рамках рассматриваемого прямого подхода к оболочкам как материальным поверхностям наиболее надёжным способом вывода граничных условий представляется вариацион-

ный. Исходим из вариационного уравнения:

...

## § 11. Оболочки вращения

*Surface of revolution (reference surface of shell of revolution) is created by rotating a plane curve (the meridian, the generatrix) about a straight line in the plane of curve (an axis of rotation).*

Разберёмся в геометрии поверхности вращения ( [рисунок](#) ). Меридиан можно задать зависимостью декартовых координат

...

## § 12. Безмоментная теория оболочек

В отличие от пластины, оболочка способна выдерживать нормальную распределённую нагрузку без появления внутренних моментов. В безмоментном состоянии напряжения равномерно распределены по толщине оболочки, безмоментные оболочечные конструкции можно считать оптимально спроектированными.

Уравнения безмоментной теории

...

### § 13. Оболочки: Нелинейная безмоментная теория

Вышеизложенную безмоментную теорию оболочек возможно просто и корректно обобщить на нелинейную постановку. Материальная поверхность состоит из частиц

...

### § 14. Оболочки: Иной вариант классической теории

Выше при изложении моментной теории оболочек частицы материальной поверхности считались твёрдыми телами с шестью степенями свободы

...

### § 15. Пластины: Общие представления

**П**ластиной называется тонкое трёхмерное тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями и боковой цилиндрической поверхностью (?? [рисунок](#) ??). В декартовых координатах  $x_1, x_2, z$  поперечная координата ...

...

В теории пластин рассматриваются двумерные задачи. Переход от трёхмерной задачи наиболее достоверен на пути асимптотики. Но логическая стройность и эффективность присуща и вариационному подходу, основан-

ному на аппроксимации по толщине решения трёхмерной вариационной задачи. Самое же простое корректное изложение теории пластин характерно для прямого подхода к ним как материальным плоскостям.

...

### § 16. Модель пластины типа Тимошенко (прямой подход)

Пластина рассматривается как материальная плоскость, частицы которой

...

### § 17. Классическая теория пластин Kirchhoff'a

Принимается внутренняя связь

...

### § 18. Пластины: Асимптотическое сопоставление двумерных моделей

При малой толщине из теории типа Тимошенко следует классическая теория. Толщина  $h$  определяется отношением жёсткостей. Перепишем

...



## § 19. Пластины: Вариационный переход от трёхмерной модели

Используя вариационные принципы Lagrange'a или Hellinger'a и Reissner'a с аппроксимацией решения по толщине, можно получить двумерные вариационные формулировки проблем. Из этих вариационных принципов вытекают и соотношения внутри области, и натуральные краевые условия.

Для примера вот модель типа Тимошенко с аппроксимацией смещений

...

...

Вариационные переходы могут быть легко обобщены для случаев температурных деформаций, неоднородности (гетерогенности) и анизотропии of the material, динамики. Преимущество принципа Hellinger'a–Reissner'a состоит в явном представлении напряжений. Зато принцип Лагранжа применим и к нелинейным задачам (в [главе 3](#) описана трёхмерная постановка).

## § 20. Пластины: Расщепление трёхмерной задачи изгиба

Двумерная классическая теория изгиба пластин легко выводится из трёх-

мерной постановки с малым параметром. Представив радиус-вектор в объёме

...

## § 21. Круглые пластины

В качестве иллюстрации рассмотрим широко представленный в литературе вопрос об уравнениях теории Kirchhoff'a в полярных координатах.

...

## § 22. Пластины: Плоское напряжение

Это вторая из двух задач, о которых говорилось в § 15. Силы

...

Теория оболочек изложена в монографиях А. Л. В. В. Новожилова [42], А. И. Лурье [31], В. С. и других. Достоинства этих книг перекрывают недостатки другого аппарата. Переход от трёхмерной модели к двумерной рассмотрен у ...

...

Техническая теория изгиба пластин изложена

...

глава 12

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### §1. Вибрации трёхмерных тел

Динамическая задача классической линейной упругости есть

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \sigma + f &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \sigma = {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}|_{o_1} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma|_{o_2} = \mathbf{p}, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}^\circ, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}^\circ.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Согласно общей теории (§ 2.8), мы начинаем с анализа гармоник (ортогональных колебаний):

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}) \sin \omega t, \\ \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{U}) + \rho \omega^2 \mathbf{U} &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Если однородная задача имеет нетривиальное решение, то значения  $\omega$  это натуральные резонансные частоты, а  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  — ортогональные (нормальные) “моды”.

Независимое от времени уравнение (1.2) выглядит как уравнение линейной эластостатики (§ 4.??), когда объемная нагрузка равна  $\omega^2 \rho \mathbf{U}$ . Поверхностная нагрузка

на  $o_2$  равна нулю. Тождество Клапейрона (4.1, § 4.4) даёт

$$\omega^2 \int_V \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} dV = 2 \int_V \Pi(\nabla \mathbf{U}^S) dV. \quad (1.3)$$

Это также значит, что  $\omega^2 \geq 0$ . Здесь нуль значит, что континуум движется  $\mathbf{U}$  как жёсткое целое. Когда даже малая часть поверхности закреплена, тогда все  $\omega_i > 0$ .

И тут мы предполагаем, что  $\omega^2$  и  $\mathbf{U}$  это вещественные числа. Это может быть доказано “от противного”. Если  $\Im \omega^2 \neq 0$ , то сопряжённая частота  $\bar{\omega}^2$  — тоже часть спектра колебания, и “мода”  $\bar{\mathbf{U}}$  для этой частоты имеет сопряжённые компоненты. Используя далее теорему о взаимности работ (??, § 4.4) для  $\mathbf{U}$  и  $\bar{\mathbf{U}}$ , мы имеем

$$\omega^2 \int_V \rho \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{U}} dV = \bar{\omega}^2 \int_V \rho \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U} dV \Rightarrow \omega^2 = \bar{\omega}^2 \Rightarrow \Im$$

...

Однако, яркая картина с разложением по модам малопригодна для практических расчётов колебаний (вибраций) трёхмерного упругого тела. Причина — густота спектра, вынужденные колебания возбуждают много мод. Когда плотность собственных частот высокая, даже малое трение качественно меняет резонансную кривую. Демпфирование (уменьшение амплитуд) в реальных телах тоже важно. Вдобавок, волновая природа нестационарных процессов меша-ет просто перенести теорию колеба-

ний дискретных систем на континуум: в случае внезапного локального возбуждения корректнее рассматривать волны вместо наложения мод.

Путь от непрерывной динамической модели к дискретной проходит через вариационный подход.

$$\int_V \left( (f - \rho \ddot{u}) \cdot \delta u - \sigma \cdot \delta \varepsilon \right) dV + \int_{o_2} p \cdot \delta u \, do = 0. \quad (1.4)$$

Это принцип виртуальной работы с силами инерции. Разыскивая приближённое решение в рядах

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(t) \varphi_k(r),$$

где  $\varphi_k$  даются  $(\varphi_k|_{o_1} = 0)$ , а  $\alpha_k(t)$  варьируются. Решение???? — система обыкновенных уравнений

...

Вместо принципа виртуальной работы (1.4) можно использовать смешанную формулировку Hellinger'a–Reissner'a с независимой аппроксимацией напряжений.

В динамической теории упругости часто применяется интегральное преобразование Laplace'a. Для тел простой формы иногда возможно найти аналитическое решение в трансформах. Оригинал может быть найден численным обращением, но иногда возможно взять интеграл

Riemann'a–Mellin'a\*, используя “метод перевала” (or “метод крутых спусков”) с деформацией контура в комплексной плоскости [50, 75].

## § 2. Вибрации стержней

В линейной динамике стержней мы имеем следующую систему для сил  $Q$ , пар сил (моментов)  $M$ , смещений  $u$  и поворотов  $\theta$  (§ 9.10):

$$Q' + q = \rho(\ddot{u} + \ddot{\theta} \times \varepsilon), \quad M' + r' \times Q + m = J \cdot \quad (2.1)$$

$$\dots \quad (2.2)$$

...

## § 3. Малые возмущения параметров

Рассмотрим задачу об определении собственных частот и форм с малыми возмущениями масс и жёсткостей:

$$(C_{ij} - \omega^2 A_{ij}) U_j = 0, \\ C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)}, \quad A_{ij} = A_{ij}^{(0)} + \chi A_{ij}^{(1)}, \quad \chi \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Находя решение в виде

$$\omega = \omega^{(0)} + \chi \omega^{(1)} + \dots, \quad U_j = U_j^{(0)} + \chi U_j^{(1)} + \dots,$$

получаем последовательность задач

...

\* Интеграл Riemann'a–Mellin'a определяет обратное преобразование Лапласа  $F(s) \mapsto f(t)$ .

## § 4. Вибрации оболочек

Динамика оболочек рассматривалась многими

...

## § 5. Волны в упругом континууме

Рассмотрим линейные уравнения динамики однородной изотропной среды без объёмных сил

...

## § 6. Волны в стержне

Рассмотрим прямой стержень. Продольная деформация описывается уравнениями

...

## § 7. Нелинейные колебания

Рассмотрим простой пример: продольные колебания прямого стержня с малой нелинейной добавкой в соотношениях упругости

...

## Библиография

Методы решения динамических задач упругости представлены в книгах Л. И. Слепiana [75]

и В. Б. Поручикова [50]. О малых линейных колебаниях (вибрациях) написано у С. П. Тимошенко, D. H. Young'a и W. Weaver'a [67], И. М. Бабакова [68], В. Л. Бидермана [69], В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [71]. Асимптотические проблемы колебаний оболочек освещены у ...



## УСТОЙЧИВОСТЬ

### § 1. Разные подходы к проблеме устойчивости

Есть весьма развита́я теория устойчивости по Ляпунову. Она говорит, что если начальные отклонения\* “достаточно близкие (мáлые)”, и впоследствии они не растут, оставаясь “достаточно близкими” навсегда, то процесс устойчив. Это применимо и к состоянию равновесия. Таков **динамический подход** к проблеме устойчивости, и этот подход самый обоснованный.

Однако, для задач об устойчивости равновесия, обрёл популярность другой подход. Он называется **статическим** подходом, имя Leonhard’a Euler’a ассоциируется с ним. Когда уравнения статики дают нетривиальное решение для мáлых отклонений-смещений, тогда тогда значения параметров предполагаются “критическими”. Иными словами, если равновесие не изолированное, то оно считается “критическим”. В то же время, много смежных форм равновесия появляется\*\* Используя этот подход, достаточно решить задачу о собственных числах.

\* От равновесной конфигурации.

\*\* Это известно как “безразличное равновесие”.

Есть ещё больше подходов. Для примера, **метод несовершенств**: если малые случайные изменения начального облика, жёсткостей, нагрузок и других переменных вызывают лишь малое изменение деформированной конфигурации, то это равновесие устойчиво. Или **энергетический подход**: когда потеря устойчивости становится энергетически выгодной, то есть когда она ведёт к уменьшению энергии, тогда эта потеря устойчивости случается.

Упомянутые подходы рисуют пёструю картину. Но её довольно просто визуализировать для модели с конечным числом степеней свободы.

Большой общностью обладают

...

## § 2. Классические проблемы со стержнями

Состояние перед варьированием описывается уравнениями нелинейной теории стержней Kirchhoff'a

...

## § 3. "Следящие" нагрузки

В проблемах устойчивости весьма важно поведение нагрузки в процессе деформирования. Ведь в уравнения входит вариация (of what?)  $\delta q$ , она

равна нулю лишь для “мёртвых” нагрузок. **Распространены** “следящие” нагрузки, которые меняются определённым путём вместе с отклонениями (смещениями) частиц.

Статический подход Euler’a к проблеме устойчивости

...

#### § 4. Роль добавочных податливостей

Для прямого **консольного** стержня, сжатого постоянной силой  $F$  на свободном конце, критическая нагрузка определяется формулой Euler’a

...

#### § 5. Вариационные формулировки

Во всех разделах линейной теории упругости большую роль играют вариационные постановки. Среди прочего, они составляют основу метода конечных элементов как варианта метода Ritz’a.

Менее развиты вариационные постановки для проблем устойчивости. Здесь получил популярность метод

...

## § 6. Неконсервативные задачи

В уравнении динамики (...) матрица позиционных сил

...

## § 7. Случай кратных корней

Вернёмся к проблеме устойчивости (...) в случае циркуляционных сил. Как уже отмечалось (где??), критическая ситуация характеризуется

...

## Библиография

Увлекательные вопросы устойчивости упругих систем освещены в книгах ...

*глава 14*  
**ДЕФЕКТЫ**

**§ 1. Дислокации  
Вольтерры**

**Р**ассмотрим классическую линейную трёхмерную упругую среду (гл. 4). Как показано в § 4.7, уравнение совместности деформаций

...

**§ 2. Прямолинейные  
дислокации**

Линия дислокации может быть любой кривой, замкнутой внутри тела или с концами на поверхности. Для дислокации случайной формы в неограниченной среде не так уж сложно получить подходящее решение [18]. Мы же ограничимся простейшим случаем прямолинейной дислокации. Ищется решение

...

### § 3. Действие поля напряжений на дислокацию

Рассмотрим среду, содержащую внутри себя дислокацию с замкнутой линией  $C$ . Тело нагружено объёмными  $\nu$  и поверхностными  $p$  силами. Обозначим

...

### § 4. О движении дислокаций

Рассмотрим это явление, следуя [25]. Ограничимся случаем прямолинейной винтовой дислокации, движущейся с постоянной скоростью

...

### § 5. Точечные дефекты

Речь пойдёт о континуальной модели таких явлений как вакансии, примесные частицы или междоузельные атомы в кристаллической решётке. В случае дислокации рассматривались

...

### § 6. Сила, действующая на точечный дефект

Дефект находится в континууме, нагруженном объёмными  $\nu$  и поверхностными  $p$  силами. Суперпозиция

...

## § 7. Непрерывно распределённые дислокации

Начнём со сложения векторов Бюргерса. При обходе сразу двух дислокаций (рис. ?? 40 ??) по контуру

...

## § 8. Напряжение при намотке катушки

Не только дислокации и точечные дефекты, но и макроскопические факторы могут быть источниками собственных напряжений. При намотке катушки (рис. ?? 42 ??) в ней возникают напряжения от натяжения ленты. Расчёт этих напряжений очень сложен, если рассматривать детально процесс укладки ленты.

Но существует чёткий алгоритм Southwell'a [51] расчёта напряжений в катушке: укладка каждого нового витка вызывает внутри катушки приращения напряжений, определяемые соотношениями линейной упругости. Здесь два этапа, и первый состоит в решении задачи Lamé о деформации полого цилиндра под внешним давлением (рис. ?? 43 ??)

...

## Библиография

Дислокации и точечные дефекты в линейно-упругих телах рассматривались многими авторами: John Eshelby [18], Roland deWit [14], Cristian Teodosiu [56], Alan Cottrell [25]. Теория собственных напряжений (eigenspannungen) объясняется Ekkehart Kröner в [26]. Расчёт напряжений при намотке катушки описан Richard Southwell'ом в своей книге [51].



## §1. Традиционные критерии прочности

**К**ак судить о прочности тела после определения напряжения в нём? При одноосном растяжении напряжением  $\sigma$  есть, очевидно, некий “предел прочности”  $\sigma_*$ , выше которого материал разрушается. Прочность считают достаточной при  $\sigma \leq \sigma_*/k$ , где  $k$  есть так называемый коэффициент запаса. Но такой подход не вполне удовлетворяет, поскольку получаемые из опытов значения  $\sigma_*$  имеют большой разброс, а выбор коэффициента запаса временами становится бюрократическим актом.

Тем не менее, подобные взгляды на анализ прочности широко распространены. Воздерживаясь от критики, стоит упомянуть самые популярные из них.

**Критерий максимального нормального напряжения:** разрушение происходит при  $\sigma_1 = \sigma_*$  (наибольшее из главных напряжений достигает предельного значения). Но это положение несправедливо для одноосного сжатия, при котором  $\sigma_1 = 0$ .

**Критерий максимального касательного напряжения (Tresca criterion):** разрушение наступает при  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_*$  ( $\sigma_3$  — наименьшее из главных напряжений). Это более соответствует началу пластического течения.

**Критерий максимального удлинения:** наибольшее из собственных значений тензора деформации  $\varepsilon_1 = \varepsilon_*$ . Это приемлемо и при сжатии с  $\varepsilon_1 > 0$ .

**Критерий энергии деформации:**  $\Pi = \Pi_*$ . Здесь учитывается, что разрушение требует энергии, а источником её может быть лишь само деформированное тело. Однако достаточный запас энергии — необходимое, но не единственное условие разрушения; должен включиться некий механизм преобразования упругой энергии в работу разрушения.

**Критерий энергии формоизменения (von Mises yield criterion):**  $s \bullet s = 2\tau_*^2$ ,  $s \equiv \tau - \frac{1}{3}E \operatorname{trace} \tau$  (“девиатор напряжений”). Здесь не играет роли энергия объёмной деформации. Richard von Mises предложил\* этот критерий как гладкую аппроксимацию условия Henri Tresca.

**Критерий Mohr’а.** Представим себе множество предельных состояний ...

...

## § 2. Антиплоская деформация среды с трещиной

Любая регулярная функция комплексного переменного  $z = x + iy$  содержит в себе решение какой-либо антиплоской задачи статики без ...

...

## § 3. Трещина при плоской деформации

Рассмотрим плоскую область произвольного очертания с трещиной внут-

\* **R. von Mises.** Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse.* 1913, Seiten 582–592.

ри; нагрузка приложена и “в объёме”, и на внешнем крае. Как и при антиплоской деформации, решение строится в два этапа

...

#### § 4. Трещинодвижущая сила

Это едва ли не основное понятие механики трещин. Рассмотрим его, следуя

...

#### § 5. Критерий роста трещины

Связанная с энергией  $\mathcal{E}$  трещинодвижущая сила  $F$  — не единственное воздействие на передний край трещины. Должна быть ещё некая сила сопротивления  $F_*$ ; рост трещины начинается при условии

...

#### § 6. J-интеграл

Одно из самых известных понятий в механике трещин выражается интегралом

$$J = \dots \quad (6.1)$$

...

## § 7. Коэффициенты интенсивности напряжений

Расчёт прочности тела с трещиной сводится к определению коэффициентов интенсивности напряжений. Методы расчёта таких коэффициентов — как аналитические, так и численные — хорошо освещены в литературе.

Рассмотрим ещё один подход к задачам механики трещин, разработанный

...

## § 8. Модель Barenblatt'a

Неограниченный рост напряжения на краю трещины кажется конечно же сомнительным. Сингулярные решения желают поддержки какими-либо дополнительными рассуждениями или использованием иной модели. И такую поддержку дала работа

...

## § 9. Деформационный критерий

D. S. Dugdale\*, а также М. Я. Леонов и В. В. Панасюк\*\* предложили модель, напоминающую построения Баренблатта. Также есть силы сцепления  $q$  и равен нулю итоговый коэффициент интенсивности напряжений. Но, во-первых,  $q$  имеет иной вид:

...

Второе отличие рассматриваемой модели — в формулировке критерия прочности: трещина начинает расти, когда расхождение берегов в конце свободного участка достигает критического значения  $\delta_*$  (этот параметр — константа материала), то есть при

...

## § 10. Рост трещин

Пусть нагрузка на тело с трещиной выросла настолько, что выполняется условие

...

\* **Dugdale, D. S.** Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1960, Volume 8, Issue 2, pages 100–104.

\*\* **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твёрдом теле. *Прикладная механика*. 1959, Т. 5, № 4, с. 391–401.

## § 11. Упругое поле перед движущейся трещиной

Рассмотрим этот вопрос

...

## § 12. Баланс энергии для движущейся трещины

Уравнение баланса энергии в линейной теории ( $\Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $K = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ ):

$$\int_{\mathcal{V}} (K + \Pi)^\bullet d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{O}. \quad (12.1)$$

...

## Библиография

Список книг по механике трещин уже велик. В нём стоит отметить работы Л. М. Качанова [22], Н. Ф. Морозова [37], В. З. Партон и Е. М. Морозова [48], Г. П. Черепанова [64]. Обзор статей есть у ... Экспериментальные данные представлены, например, в [23].

*глава 16*

## КОМПОЗИТЫ

### §1. Вводные размышления

**К**огда глина используется как строительный материал, в неё добавляют измельчённую солому. Работая с эпоксидной смолой, полезно смешать с наполнителем до отвердевания, который может быть порошком, волокнами, кусочками ткани. Это были примеры композитов (композитных материалов, композитных смесей). Новые типы композитов применяются всё шире и шире, заменяя сталь, алюминиевые сплавы и другие популярные однородные материалы.

Композиты могут быть определены как микро-неоднородные материалы, где происходит некое осреднение вместе с новыми свойствами. “Обычная” механика континуумов применима, конечно же, и к композитным материалам тоже. Но едва ли возможно и абсурдно смоделировать каждый аспект композитного материала. Нужен новый подход, который будет иметь дело со сложностью структуры материала. Как для газа, когда вместо описания динамики отдельных молекул мы вводим параметры, такие как “давление”, “температура” и другие.

Механика однородного некомпозитного континуума использует лишь

одну, макроскопическую длину  $\ell$ . Поэтому характерный размер это объём, делённый на площадь поверхности), полагая что любые малые объёмы имеют те же свойства, как и конечные объёмы.

Для композита это иначе, там у нас есть три диапазона длины:  $\ell \gg \ell' \gg \ell_0$ . Наибольший  $\ell$  представляет макроскопические размеры тела. Наименьший  $\ell_0$  близок к размеру элементов структуры материала, например частиц порошка-наполнителя). Промежуточный диапазон  $\ell'$  показывает размер так-называемого “представительного” объёма, “единичной ячейки”: того довольно малого объёма, где мы можем увидеть специфические свойства этого композита.

В композитах сложная проблема с неоднородным телом расщепляется на две: для тела как целого (макроуровень) и для “представительного” объёма (микроуровень). На макроуровне (диапазон  $\ell$ ) композит моделируется как однородная среда с “**эффективными** свойствами”, и “представительные” объёмы играют там роль частиц. На микроуровне (диапазон  $\ell_0$ ) поля очень неоднородны, но некое осреднение по “представительному” объёму ведёт на макроуровень. Сложная задача для композита как неоднородного тела расщепляется на две: для представительного объёма (мик-



роуровень) и для тела в целом (макроуровень).

Эти мысли, однако, не идеально убедительны. Чтобы убедить больше, мы можем использовать “теорию случайных полей”

...

Механика композитов появилась не очень давно, но нынче она развивается весьма быстро. Из-за высокой трещиностойкости, механика **разрушения** композитов очень популярна.

## § 2. Эффективные поля

Любое поле в композите обычно представляется суммой  $u = u * + u'$ , где  $u*$  — некоторое сглаженное “эффективное” поле, а  $u'$  — быстро осциллирующая флуктуация. Часто предполагается

$$u * (A) = \langle u \rangle \equiv \mathcal{V}^{-1} \int_{\mathcal{V}} u d\mathcal{V}, \quad (2.1)$$

где  $\langle u \rangle$  есть среднее внутри представительного объема с центром в точке  $A$ . Осреднение (2.1)

...

## § 3. Краевые задачи для представительного объема

Как упругие модули определяются для однородной среды? Без реальной возможности получить отношение

между  $\sigma$  и  $\varepsilon$  для точки бесконечно-малого размера, эксперименты проводятся с телами конечных объёмов при так называемом “однородном напряжении” — когда напряжение одно и то же во всех точках тела. В композитах роль точки играет “представительный” объём.

...

#### § 4. Вулка Hill'a

Using Voigt and Reuss theories, Hill derived upper and lower bounds on the effective properties of a composite material [Hill, R. W. The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proceedings of the Physical Society*, Section A, Volume 65, Issue 5 (May 1952). Pages 349–354.]

The scale separation is motivated by the material properties, at both scales continuum mechanics models the underlying system. Such an approach uses energy equivalence at both scales as proposed in Hill (1972).

Hill R (1972) On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain (pages 131–147)

For a composite material, at least two different materials with known material models and parameters, generate a homogenized material modeled with a predetermined constitutive equation. Determination of material parameters of the homogenized material is a challenging task.

Отметив, что

...

## § 5. Формулы Eshelby

Итак, эффективные модули определяются энергией представительного объёма в первой или второй задачах:

...

## § 6. Эффективные модули для материала со сферическими включениями

В однородной матрице случайным образом, но достаточно равномерно, распределены сферические включения радиусом  $a$ . Получившийся композит на макроуровне будет изотропным, его упругие свойства полностью определяются ...

...

## § 7. Метод самосогласования

Выше мы опирались на две задачи для представительного объёма и определяли эффективные модули из равенства энергий. В основе метода самосогласования лежит новая идея: представительный объём помещается в безграничную среду с эффективными свойствами, на бесконечности состояние

считается однородным, эффективные модули находятся из некоторых дополнительных условий самосогласования.

Обратимся снова к вопросу об объёмном модуле среды со сферическими включениями. Задача сферически симметрична; для включения по-прежнему

...

## § 8. Принцип Хашина–Штрикмана

Hashin и Shtrikman derived upper and lower bounds for the effective elastic properties of quasi-isotropic and quasi-homogeneous multiphase materials using a variational approach [Hashin, Z.; Shtrikman, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. Volume 11, Issue 2 (March–April 1963). Pages 127–140.]

Hashin Z., Shtrikman S. (1962) On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 10(4): pages 335–342

Вилка Hill'a основана на обычных экстремальных принципах теории упругости. Специально для механики композитов Hashin и Shtrikman построили очень своеобразный функционал, который на некотором точном решении может иметь как максимум, так и минимум, давая возможность

с двух сторон оценивать эффективные модули [66].

Рассмотрим первую из двух задач для представительного объёма

...

## Библиография

Книги R. Christensen'a [77] и Б. Е. Победри [79] содержат и основы механики композитов, и постановку не теряющих актуальности проблем. Для самого требовательного читателя представляет интерес монография Т. Д. Шермергора [66]. Немало книг посвящено механике разрушения композитов, здесь стоит отметить труд Г. П. Черепанова [80].

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОМПОЗИТЫ

Периодический композит сделан из повторения, конечного или бесконечного, единичной ячейки.

### § 1. Одномерная задача

**В** одномерной задаче статики имеем уравнение

...

### § 2. Трёхмерный континуум

Исходим из уравнений в смещениях

...

### § 3. Волокнистая структура

Тензор  ${}^4\mathcal{A}$  в этом случае постоянен вдоль оси

...

### § 4. Статика периодического стержня

В уравнениях линейной статики стержня

...

## Библиография

Лежащий в основе этой главы асимптотический метод представлен с разной степенью математической скрупулёзности в книгах [81, 82, 78, 79].

## СПИСОК УПОМЯНУТЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Издание 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Ахтырец Г. П., Короткин В. И.** Использование МКЭ при решении контактной задачи теории упругости с переменной зоной контакта // Известия северокавказского научного центра высшей школы (СКНЦ ВШ). Серия естественные науки. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1984. № 1. С. 38–42.
5. **Ахтырец Г. П., Короткин В. И.** К решению контактной задачи с помощью метода конечных элементов // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1988. С. 43–48.
6. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.



7. **Вениамин И. Блох.** Теория упругости. Харьков: Издательство Харьковского Государственного Университета, 1964. 484 с.
8. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
9. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. «Наука», 1976. 512 с.
10. **Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 383 с.
11. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.
12. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.
13. **Александр Н. Гузь.** Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: “Наукова думка”, 1973. 271 с.
14. *Перевод: Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.
15. **Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.
16. **Димитриенко Ю. И.** Тензорное исчисление: Учебное пособие для вузов. М.: “Высшая школа”, 2001. 575 с.
17. **Владимир В. Елисеев** Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.

18. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод: Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.
19. **Журавлёв В. Ф.** Основы теоретической механики. 3-е издание, переработанное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 304 с.
20. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.
21. **Кац, Арнольд М.** Теория упругости. 2-е издание, стереотипное. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2002. 208 с.
22. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.
23. **Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
24. **Cosserat E. et Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
25. **Cottrell, Alan.** Theory of crystal dislocations. Gordon and Breach (Documents on Modern Physics), 1964. 94 p. *Перевод: Коттрел А.* Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.
26. **Kröner, Ekkehart** (i) Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. (ii) Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод: Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.

27. **Augustus Edward Hough Love.** A treatise on the mathematical theory of elasticity. Volume I. Cambridge, 1892. 354 p. Volume II. Cambridge, 1893. 327 p. 4th edition. Cambridge, 1927. Dover, 1944. 643 p. *Перевод: Аугустус Ляв* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
28. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с. *Translation: Lurie, A. I.* Nonlinear Theory of Elasticity: translated from the Russian by K. A. Lurie. Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 617 p.
29. **Лурье А. И.** Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с. *Translation: Lurie, A. I.* Theory of Elasticity (translated by A. Belyaev). Springer-Verlag, 2005. 1050 p.
30. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
31. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
32. **George E. Mase.** Schaum's outline of theory and problems of continuum mechanics (Schaum's outline series). McGraw-Hill, 1970. 221 p. *Перевод: Джордж Мейз.* Теория и задачи механики сплошных сред. Издание 3-е. URSS, 2010. 320 с.
33. **Ernst Melan,** **Heinz Parkus.** Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод: Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.

34. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.
35. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е издание. «Наука», 1987. 304 с.
36. **Mindlin, Raymond David** and **Tiersten, Harry F.** Effects of couplestresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод: Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.
37. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.
38. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.
39. **Witold Nowacki.** Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation: Nowacki, Witold.* Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод: Витольд Новацкий.* Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.

40. **Witold Nowacki.** Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод: Новацкий Витольд.* Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.
41. **Witold Nowacki.** Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод: Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.
42. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е издание. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
43. **Пановко Я. Г., Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.
44. **Пановко Я. Г., Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е издание. «Наука», 1987. 352 с.
45. **Heinz Parkus.** Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод: Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
46. **Партон В. З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.
47. **Партон В. З., Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.

48. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е издание. «Наука», 1985. 504 с.
49. **Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
50. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.
51. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод: Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.
52. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Том 2. 6-е издание. «Лань», 2004. 560 с.
53. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B.V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод: Филипп Сьярле* Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.
54. **Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant.** Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. Memoires presentes par divers savants a l'Academie des sciences, t. 14, année 1856. 327 pages. *Перевод на русский язык: Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.

55. **Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant.** Mémoire sur la flexion des prismes ..... Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. 2me serie, t. 1, année 1856. *Перевод на русский язык: Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.
56. **Cristian Teodosiu.** Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод: Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.
57. **Тимошенко Степан П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.
58. **Тимошенко Степан П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.
59. **Stephen P. Timoshenko and James N. Goodier.** Theory of Elasticity. 2nd edition. McGraw-Hill, 1951. 506 pages. 3rd edition. McGraw-Hill, 1970. 567 pages. *Перевод: Тимошенко Степан П., Джеймс Гудьер.* Теория упругости. 2-е издание. «Наука», 1979. 560 с.
60. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод: Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.
61. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е издание. «Наука», 1975. 173 с.
62. *Перевод: Хеллан К.* Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.

63. *Перевод: Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.
64. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.
65. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.
66. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.

*Колебания и волны*

67. **Timoshenko, Stephen P.; Young, Donovan H.; William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод: Тимошенко Степан П., Янг Донован Х., Уильям Уивер.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
68. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е издание. «Дрофа», 2004. 592 с.
69. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
70. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.
71. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
72. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод: Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.
73. **Kolsky, Herbert.** Stress waves in solids. Oxford, Clarendon Press, 1953. 211 p. 2nd edition. Dover Publications, 2012. 224 p. *Перевод: Кольский Г.* Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.



74. **Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.
75. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
76. **Григолюк Э. И., Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.

*Композиты*

77. **Christensen, Richard M.** Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод: Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.
78. **Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.
79. **Победра Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
80. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.
81. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.
82. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.

83. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.
84. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.

*Механика,  
термодинамика, электромагнетизм*

85. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew.** The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online: The Feynman Lectures on Physics. Online edition.*
86. **Goldstein, Herbert; Poole, Charles P.; Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison–Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод: Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж.* Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
87. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод: Парс Л. А.* Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.
88. **Ter Haar, Dirk.** Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод: Тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.
89. **Беляев Н. М., Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.

90. **Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.
91. **Феликс Р. Гантмахер** Лекции по аналитической механике. Издание 2-е. «Наука», 1966. 300 с.
92. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.
93. **Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е издание. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е издание. 719 с.
94. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
95. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е издание. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.
96. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е издание. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

*Тензоры и тензорное исчисление*

97. **McConnell, Albert Joseph.** Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод: Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
98. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод: Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.

99. **Sokolnikoff, I. S.** Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua. 2nd edition. John Wiley & Sons, 1965. 361 pages. *Перевод: Сокольников И. С.* Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). «Наука», 1971. 376 с.
100. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Издание 3-е. «Наука», 1967. 664 с.

*Вариационные методы*

101. **Karel Rektorys.** Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation: Rektorys, Karel.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D. Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод: Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
102. **Washizu, Kyuichiro.** Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод: Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
103. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.
104. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Издание 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

*Методы возмущений*  
(асимптотические методы)

105. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод: Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.
106. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.
107. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-VCH, 2004. 425 pages.
108. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.
109. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
110. **Зино И. Е., Тропп Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
111. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е издание. «Наука», 1981. 400 с.
112. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.

113. **Collatz, Lothar.** Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод: Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.
114. **Dwight, Herbert Bristol.** Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод: Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. Издание 4-е. «Наука», 1973. 228 с.
115. **Kamke, Erich.** Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод: Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. «Лань», 2003. 576 с.
116. **Korn, Granino A. and Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод: Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.
117. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е издание. «Наука», 1973. 736 с.
118. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Издание 6-е. «Наука», 1974. 176 с.