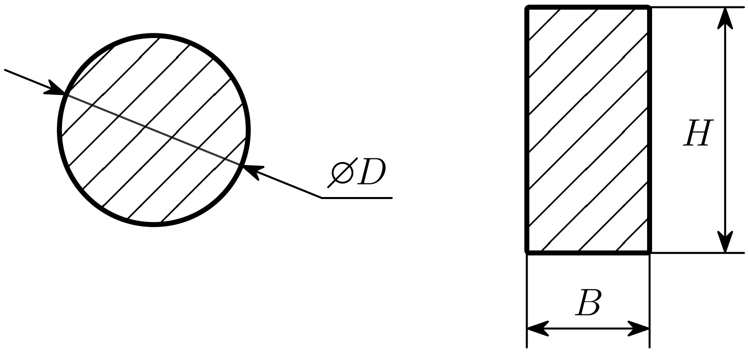
СМ	СМ7–31Б	№ 3	1	Низаметдинов Ф. Р.
МГТУ	Сопротивление материалов			
СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ				
Денисов М. А.		Вариант 8		

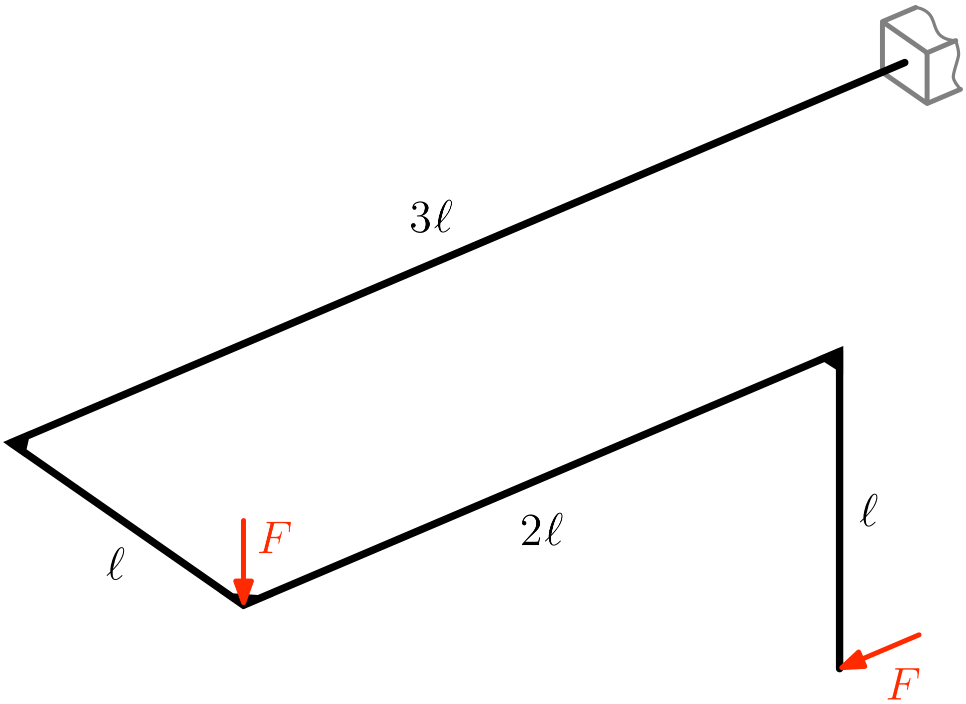
Задача 1я

Определить размер сечения для бруса кругового профиля с диаметром D и для бруса прямоугольного сечения с размерами $H \times B$, B — ширина, $H = 2B$ — высота

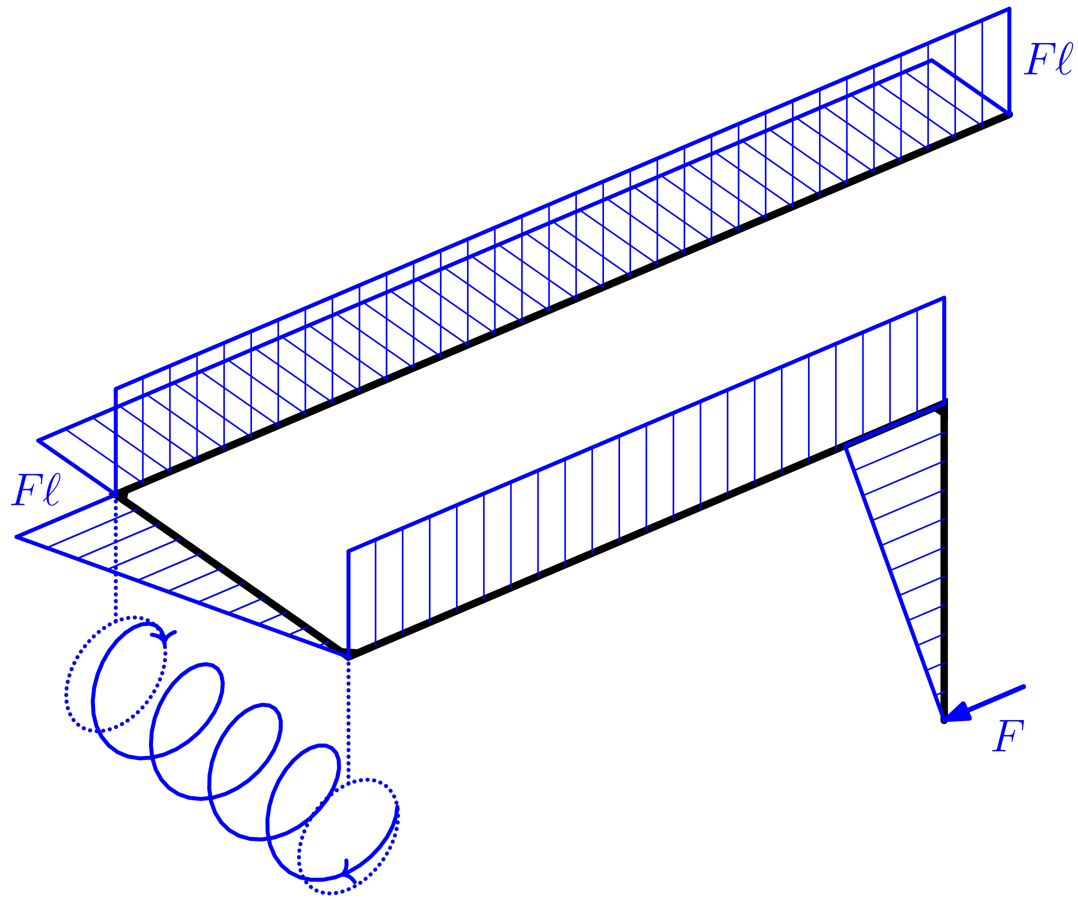


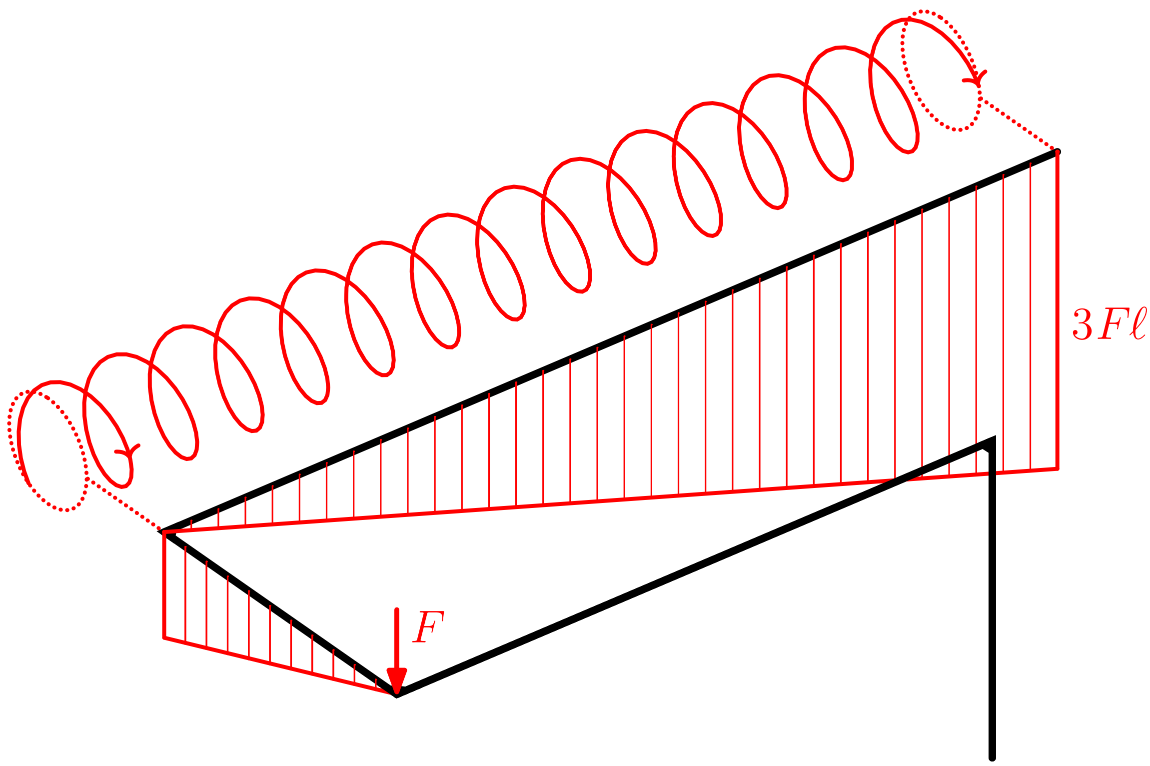
$F = 1$ кН, $\ell = 200$ мм, $\sigma_{\text{Тр}} = \sigma_{\text{Тс}} = 300$ МПа, $n_{\text{Т}} = 2$

Вариант № 8

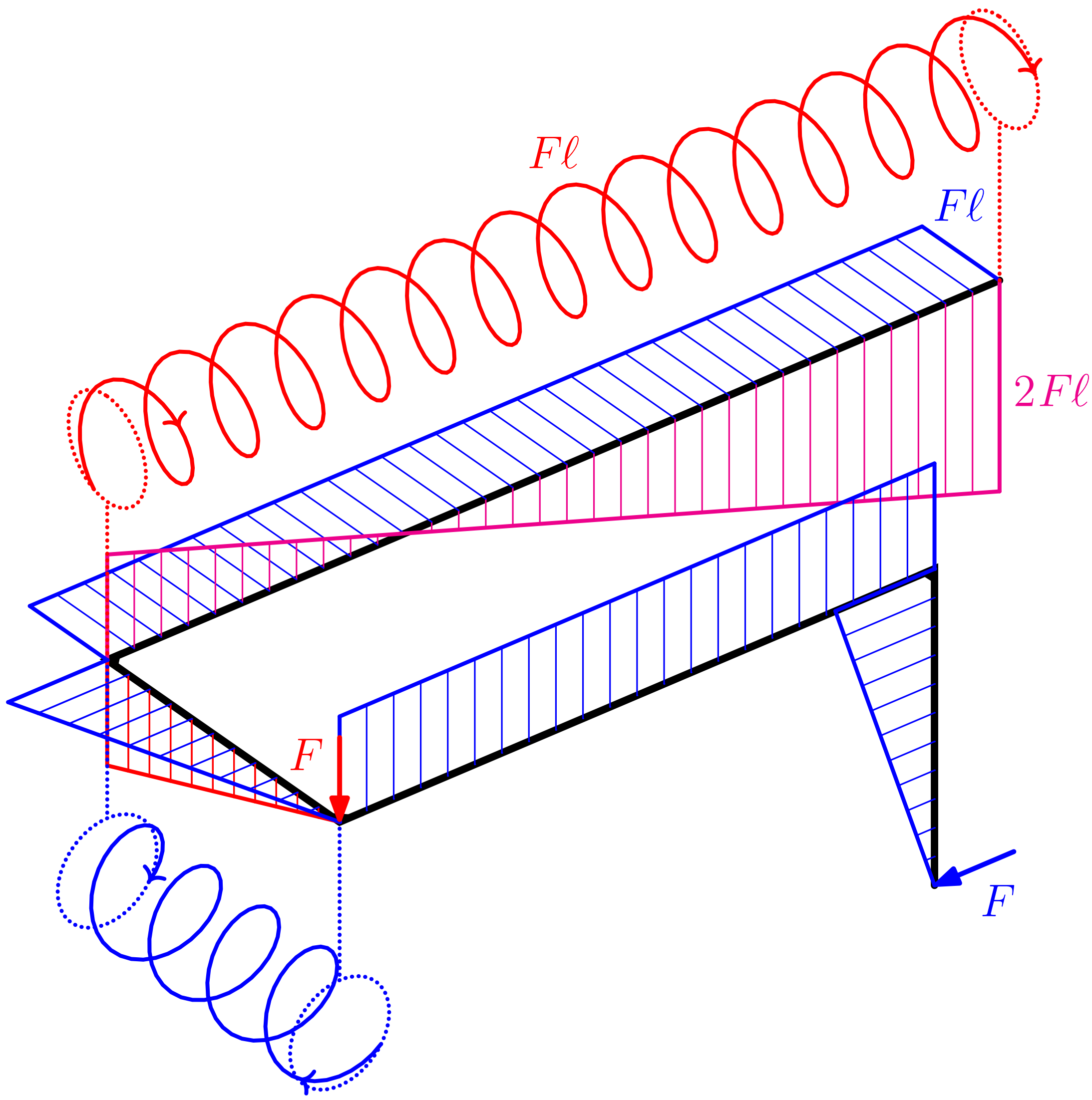


Эпюры внутренних моментов от каждой из внешних сил отдельно:



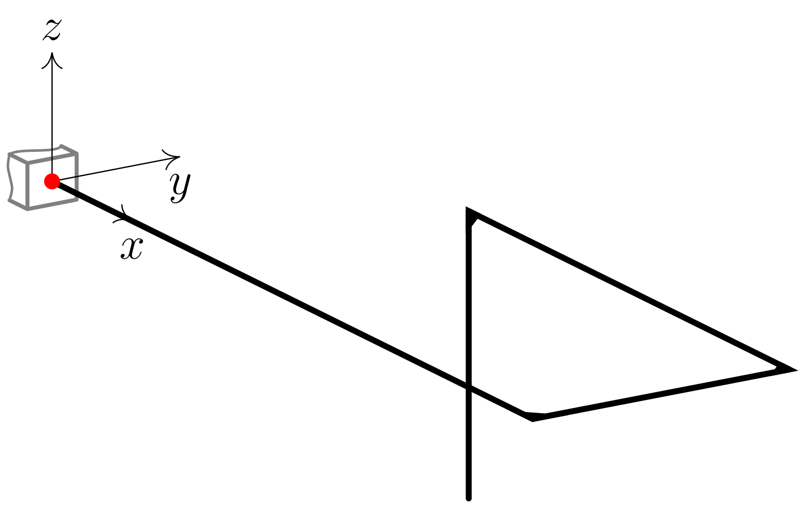


Эпюра внутренних моментов от всех внешних нагрузок:

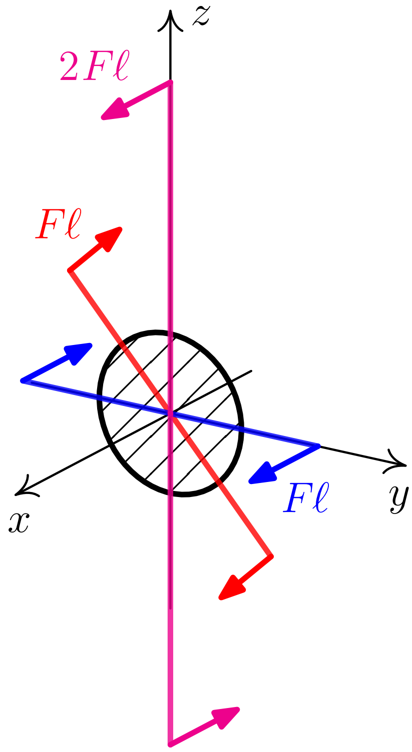


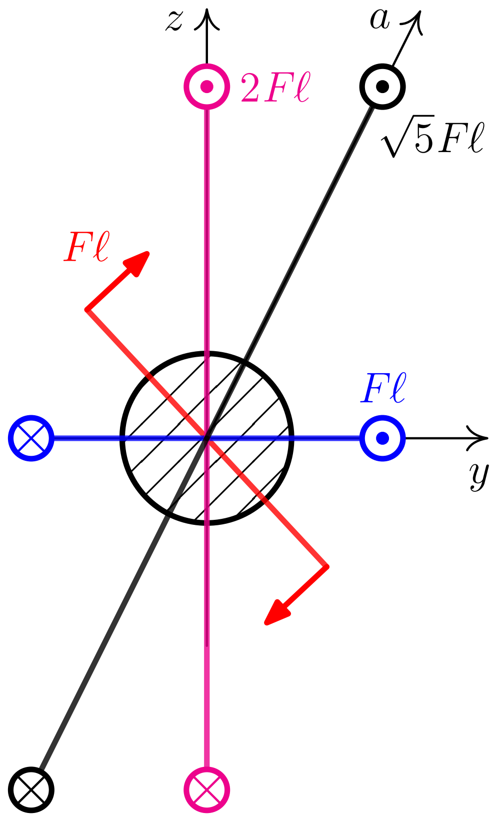
Наиболее нагруженная точка конструкции — у закрепления (заделки). В ней

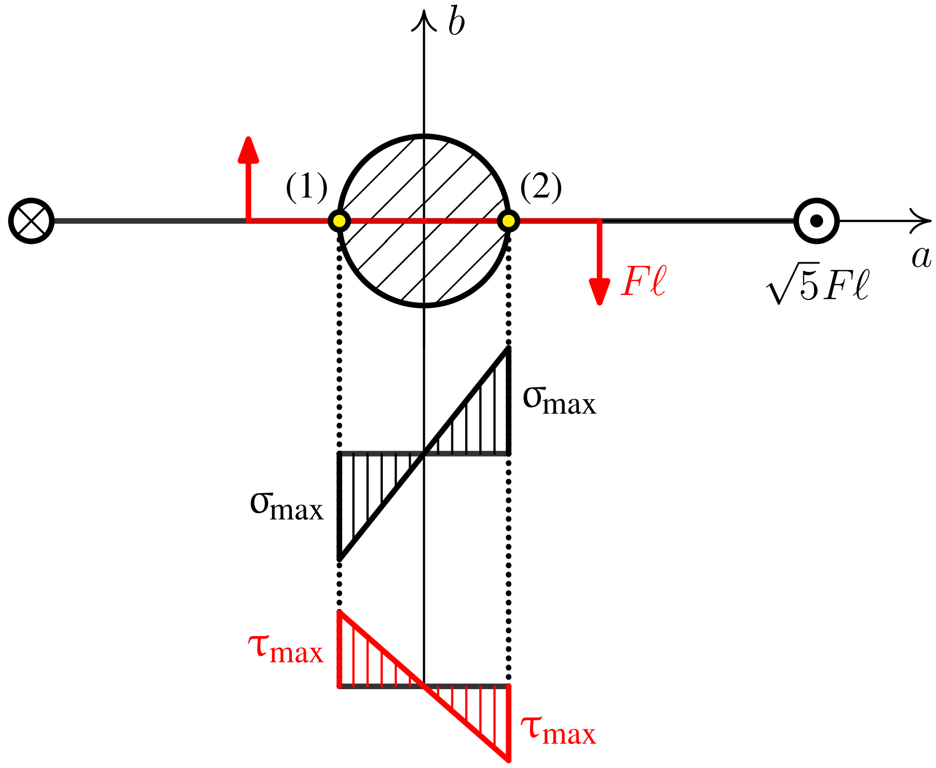
$$M_z = F\ell,\;\; M_y = -2F\ell,\;\; M_x = M_{\text{к}} = F\ell$$



Круглое сечение







Осевой момент инерции круглого сечения вокруг любой оси, проходящей через центр круга:

$$\mathfrak{I}_z = \mathfrak{I}_y = \mathfrak{I}_b = \mathfrak{I}_a = \frac{\pi D^4}{64}$$

Нормальные напряжения от изгиба

$$\sigma_x = \frac{M_z}{\mathfrak{I}_z}\, y - \frac{M_y}{\mathfrak{I}_y}\, z = \frac{M_b}{\mathfrak{I}_b}\, a, \;\; M_b = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

максимальны в точках контура сечения, где $a = \pm \frac{D}{2}$:

$$\sigma_{\max} = \pm M_b \frac{64}{\pi D^4} \frac{D}{2} = \pm \frac{32}{\pi D^3} \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

Полярный момент инерции круглого сечения:

$$\mathfrak{I}_\rho = \frac{\pi D^4}{32}$$

Касательные напряжения от кручения

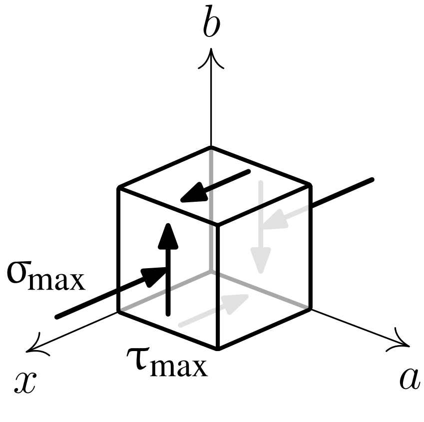
$$\tau_{x\rho} = \frac{M_{\text{к}}}{\mathfrak{I}_\rho}\, \rho$$

максимальны тоже на контуре сечения — в точках с $\rho = \frac{D}{2}$:

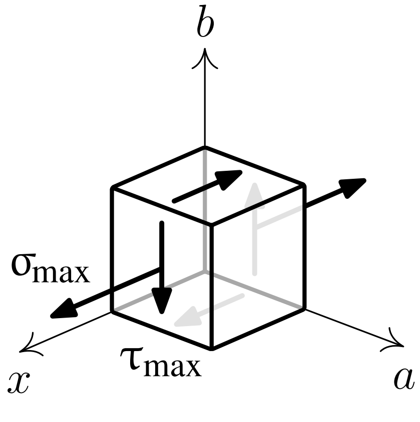
$$\tau_{\max} = M_{\text{к}} \frac{32}{\pi D^4} \frac{D}{2} = \frac{16}{\pi D^3} M_{\text{к}}$$

В самых напряжённых точках сечения — точках (1) и (2) — имеем

точка (1)



точка (2)



По энергетическому критерию прочности эквивалентное одноосное напряжение есть

$$\sigma^{э}_{\max} = \sqrt{\sigma^2_{\max} + 3\tau^2_{\max}}$$

Для круглого сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{32}{\pi D^3}\sqrt{M_z^2 + M_y^2}, \;\; \tau_{\max} = \frac{16}{\pi D^3} M_{\text{К}}$$

и энергетический критерий даёт

$$\sigma^{э}_{\max} = \frac{16}{\pi D^3}\sqrt{4\left(M_z^2 + M_y^2\right) + 3M_{\text{К}}^2}$$

Для рассматриваемой задачи в наиболее нагруженной точке (у заделки)

$$M_z = F\ell, \;\; M_y = -2F\ell, \;\; M_{\text{К}} = F\ell$$

и эквивалентное (по энергетическому критерию прочности) напряжение в точках сечения (1) и (2) равно

$$\begin{aligned}\sigma^{э}_{\max} &= \frac{16}{\pi D^3}\sqrt{4\left(F^2\ell^2 + 4F^2\ell^2\right) + 3F^2\ell^2} \\ &= \frac{16}{\pi D^3}\sqrt{20F^2\ell^2 + 3F^2\ell^2} \\ &= \frac{16\sqrt{23}\,F\ell}{\pi D^3}\end{aligned}$$

По условию прочности

$$\sigma^{э}_{\max} = \frac{\sigma_{\text{Т}}}{n_{\text{Т}}}$$

с данными

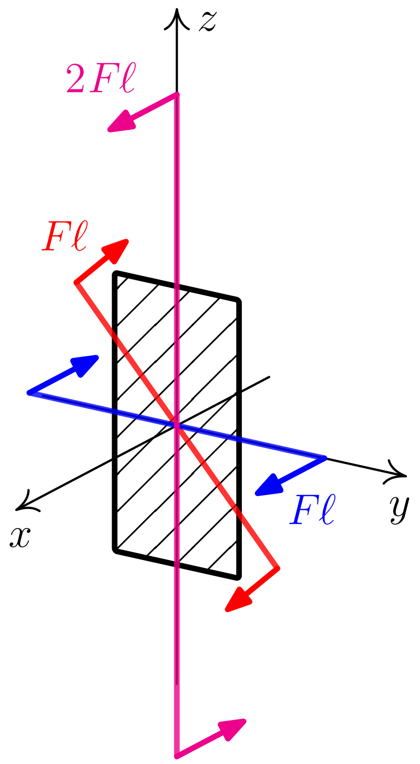
$$F = 1000\text{ Н}, \;\; \ell = 200\text{ мм}, \;\; \sigma_{\text{Т}} = 300\text{ МПа}, \;\; n_{\text{Т}} = 2$$

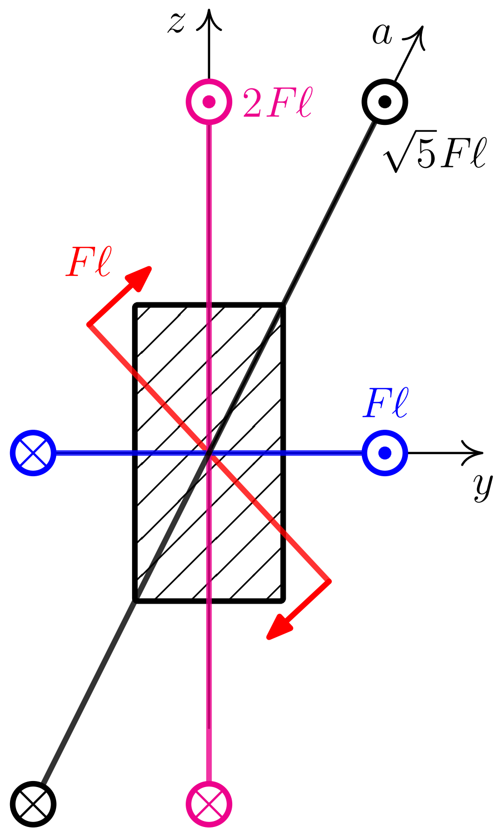
определяем диаметр сечения:

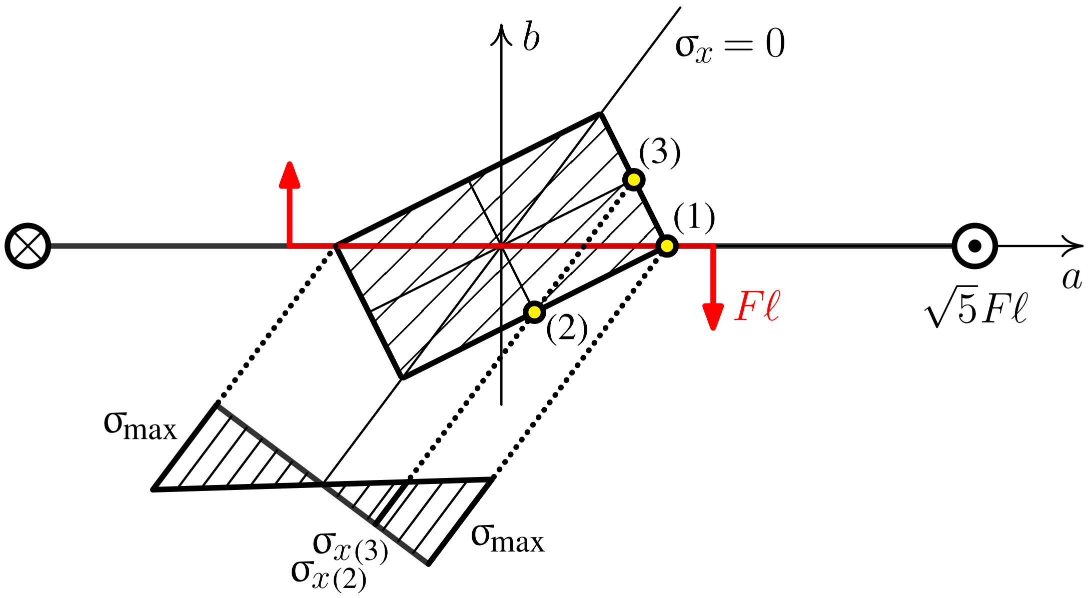
$$\frac{16\sqrt{23}\cdot 1000\text{ Н}\cdot 200\text{ мм}}{\pi D^3} = \frac{300\text{ МПа}}{2}$$

$$\Rightarrow \;\; D^3 = \frac{64\,000\sqrt{23}}{3\pi}\text{ мм}^3 \;\; \Rightarrow \;\; D = 40\sqrt[6]{\frac{23}{9\pi^2}}\text{ мм} \approx 31.9343\text{ мм} \;\; \Rightarrow \;\; D = 32\text{ мм}$$

Прямоугольное сечение







Осевые моменты инерции прямоугольного сечения:

$$\mathfrak{I}_y = \frac{BH^3}{12}, \ \ \mathfrak{I}_z = \frac{HB^3}{12}, \ \ \mathfrak{I}_b = \frac{BH}{12}\left(H^2\cos^2\operatorname{atan}\frac{B}{H} + B^2\sin^2\operatorname{atan}\frac{B}{H}\right)$$

Коэффициент пропорциональности $\mathfrak{I}_{\text{К}}$ («геометрическая жёсткость», «момент инерции для кручения») между внутренним крутящим моментом $M_{\text{К}}$ и $G\Theta$:

$$M_{\text{К}} = \mathfrak{I}_{\text{К}} G\Theta,\ \mathfrak{I}_{\text{К}} = \beta B^3 H,\ \beta = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5}\frac{B}{H}\sum_{j=1,3,..}^{\infty} j^{-5}\tanh\left(\frac{\pi j}{2}\frac{H}{B}\right)$$

(B — меньшая сторона)

Коэффициент пропорциональности $W_{\text{К}}$ между внутренним крутящим моментом $M_{\text{К}}$ и максимальным касательным напряжением в сечении (в точке на контуре посередине бóльшей стороны прямоугольника):

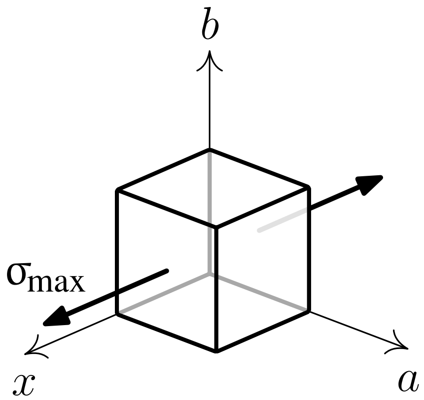
$$M_{\text{К}} = W_{\text{К}}\tau_{\max},\ W_{\text{К}} = \alpha B^2 H,\ \alpha = \frac{\beta\pi^2}{8\sum\limits_{j=1,3,..}^{\infty} j^{-2}\left(1 - \dfrac{1}{\cosh\left(\frac{\pi j}{2}\frac{H}{B}\right)}\right)}$$

Для $\frac{H}{B} = 2$:

$\beta = 0.22868167711958$ (вычислено с точностью 10^{-15} до $j = 1001$)
$\alpha = 0.24587834540483$ (с точностью 10^{-15} до $j = 31622777$)

В рассматриваемом прямоугольном сечении выделяются три точки — (1), (2) и (3) — как кандидаты на самую напряжённую точку сечения. В точке (1) — наибольшее нормальное напряжение от изгиба, касательные же напряжения в угловых точках равны нулю. В точках (2) и (3) — максимальные касательные напряжения от кручения. Напряжённое состояние в угловой точке (1):

точка (1)



Нормальные напряжения от изгиба

$$\sigma_x = \frac{M_z}{\mathfrak{I}_z}\,y - \frac{M_y}{\mathfrak{I}_y}\,z = \frac{M_b}{\mathfrak{I}_b}\,a,\;\; M_b = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

равны нулю на «нулевой линии» («нейтральной оси»), уравнение которой есть

$$\sigma_x = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{M_z}{\mathfrak{I}_z}\,y - \frac{M_y}{\mathfrak{I}_y}\,z = 0 \;\;\Rightarrow\;\; z = \frac{M_z}{M_y}\,\frac{\mathfrak{I}_y}{\mathfrak{I}_z}\,y$$

Отношение моментов в сечении

$$M_z = F\ell,\;\; M_y = -2F\ell \;\;\Rightarrow\;\; \frac{M_z}{M_y} = \frac{1}{-2}\,,$$

отношение осевых моментов инерции для этого сечения

$$\frac{\mathfrak{I}_y}{\mathfrak{I}_z} = \frac{12BH^3}{12HB^3} = \left(\frac{H}{B}\right)^2 = 4$$

и уравнение нулевой линии

$$z = -2y$$

Максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_b}{\mathfrak{I}_b}\,d_{\max}\,,$$

где $d_{\max}$ — расстояние от нулевой линии до наиболее удалённой точки сечения.

Если $\frac{H}{B} = 2$, ось a проходит по диагонали прямоугольника, а нулевая линия — по второй диагонали, то

$$d_{\max} = B\cos\operatorname{atan}\frac{1}{2} = B\sqrt{0.8} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,B$$

Момент инерции рассматриваемого сечения вокруг оси b

$$\mathfrak{I}_b = \frac{B^4}{6}\left(4\cos^2\!\operatorname{atan}\frac{1}{2} + \sin^2\!\operatorname{atan}\frac{1}{2}\right) = \frac{B^4}{6}\left(4\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{17}{30}\,B^4$$

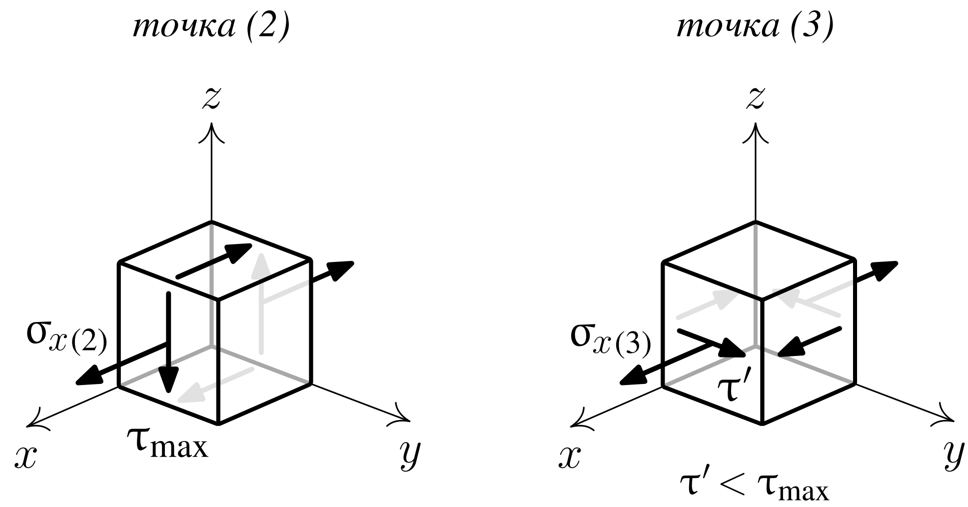
Суммарный изгибающий момент в сечении

$$M_b = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{5} F\ell$$

Максимальное нормальное напряжение в сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{30\sqrt{5} F\ell}{17 B^4} B\sqrt{0.8} = \frac{60}{17} \frac{F\ell}{B^3} = \left(3 + \frac{9}{17}\right) \frac{F\ell}{B^3}$$

Напряжённое состояние в точках с наибольшими касательными напряжениями от кручения:



Имеем

$$\sigma_{x(2)} = \sigma_{x(3)} = \frac{1}{2}\sigma_{\max} = \frac{30}{17}\frac{F\ell}{B^3},$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{к}}}, \;\; W_{\text{к}} = \alpha B^2 H = 2\alpha B^3, \;\; 2\alpha \approx 0.4917566908,$$

$$M_{\text{к}} = F\ell$$

$$\Rightarrow \;\; \tau_{\max} = \frac{F\ell}{2\alpha B^3}, \;\; \frac{1}{2\alpha} \approx 2.0335259666, \;\; \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 \approx 4.1352278567$$

По энергетическому критерию прочности эквивалентное одноосное напряжение будет равно

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{э}}_{(2)} &= \sqrt{\sigma^2_{x(2)} + 3\tau^2_{\max}} \\ &= \frac{F\ell}{B^3}\sqrt{\frac{30^2}{17^2} + 12.4056835702} \\ &\approx 3.9395266748 \frac{F\ell}{B^3} \end{aligned}$$

Самой напряжённой точкой сечения оказалась точка на середине длинной стороны контура прямоугольника — точка (2) — с эквивалентным напряжением

$$\sigma^{э}_{\max} = \nu \frac{F\ell}{B^3}, \quad \nu = 3.9395266748$$

Размер B (ширину) сечения найдём из условия прочности

$$\sigma^{э}_{\max} = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}}$$

$$\nu \frac{F\ell}{B^3} = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}} \;\Rightarrow\; B^3 = \nu F\ell \frac{n_{\text{т}}}{\sigma_{\text{т}}}$$

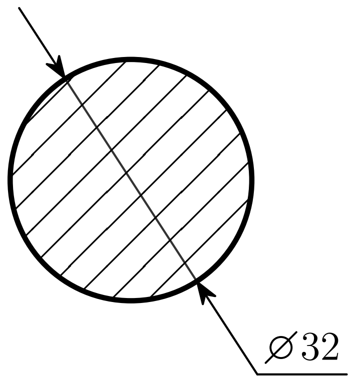
Для данных

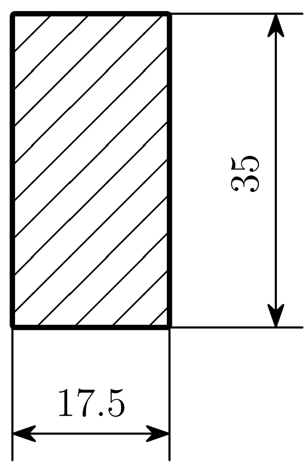
$$F = 1000\ \text{Н},\;\; \ell = 200\ \text{мм},\;\; \sigma_{\text{т}} = 300\ \text{МПа},\;\; n_{\text{т}} = 2$$

окончательно находим

$$B = \sqrt[3]{\nu F\ell \frac{n_{\text{т}}}{\sigma_{\text{т}}}} = \sqrt[3]{\frac{3.9395266748 \cdot 1000\ \text{Н} \cdot 200\ \text{мм} \cdot 2}{300\ \text{МПа}}} \approx 17.3831\ \text{мм}$$

$$\Rightarrow\; B = 17.5\ \text{мм}$$

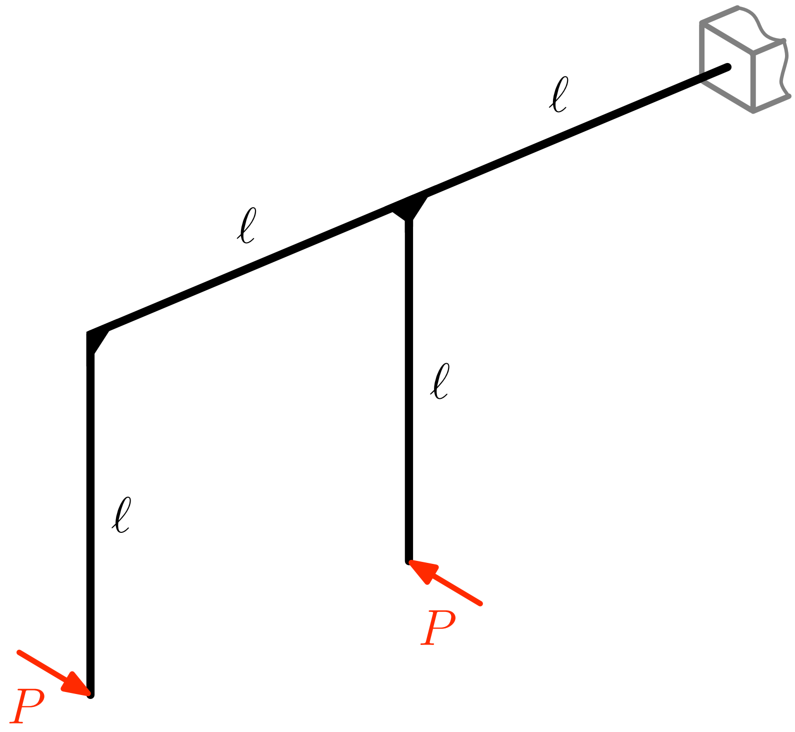




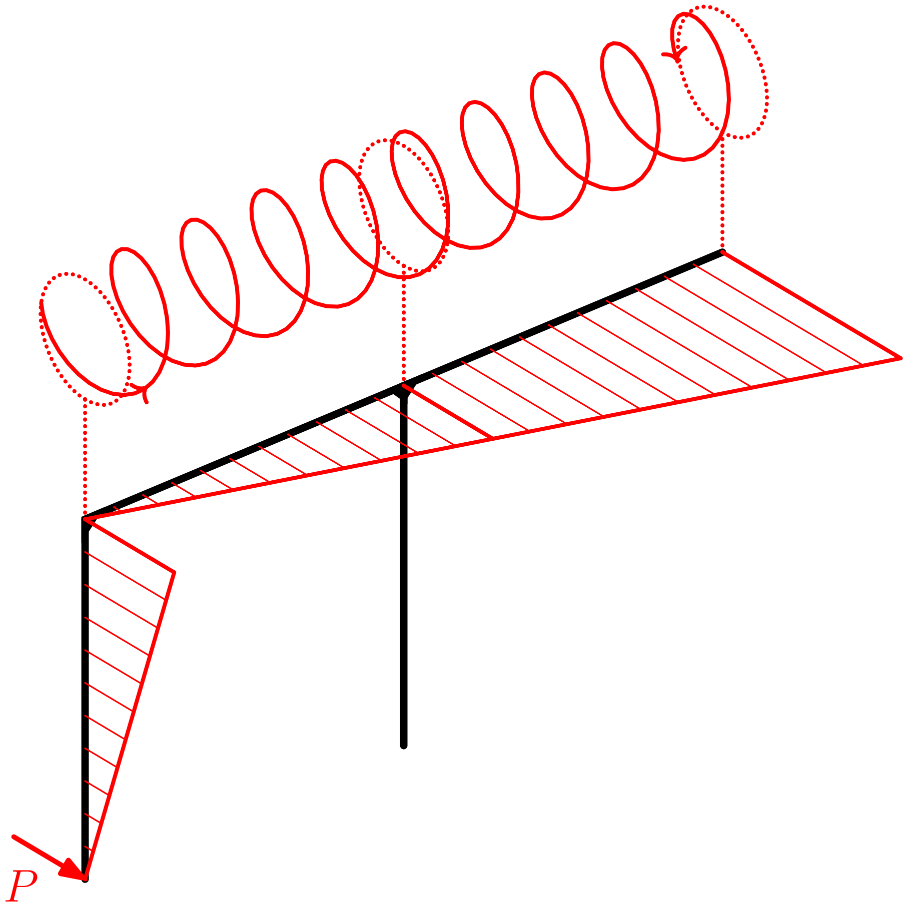
Задача 2^{я}

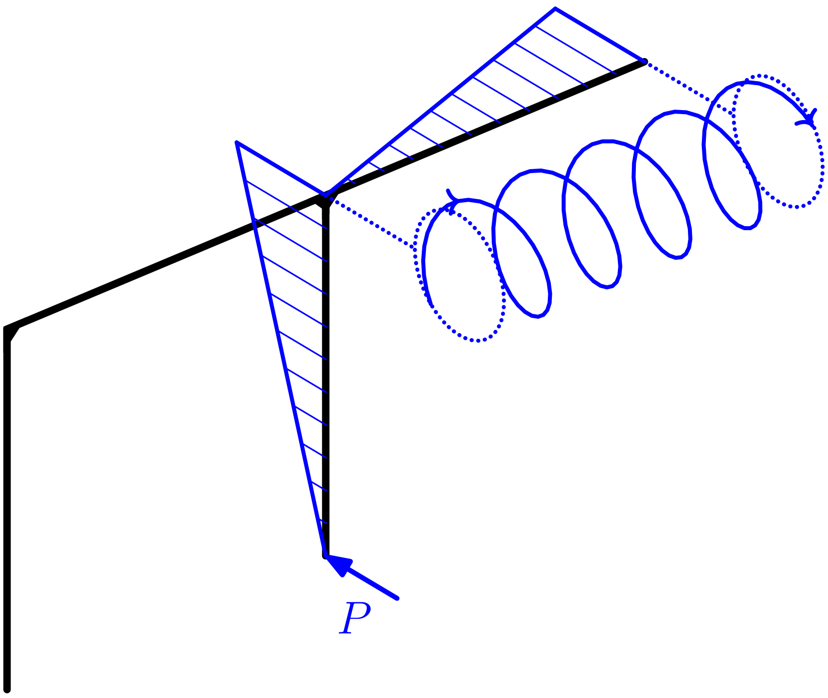
Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов

Вариант № 8

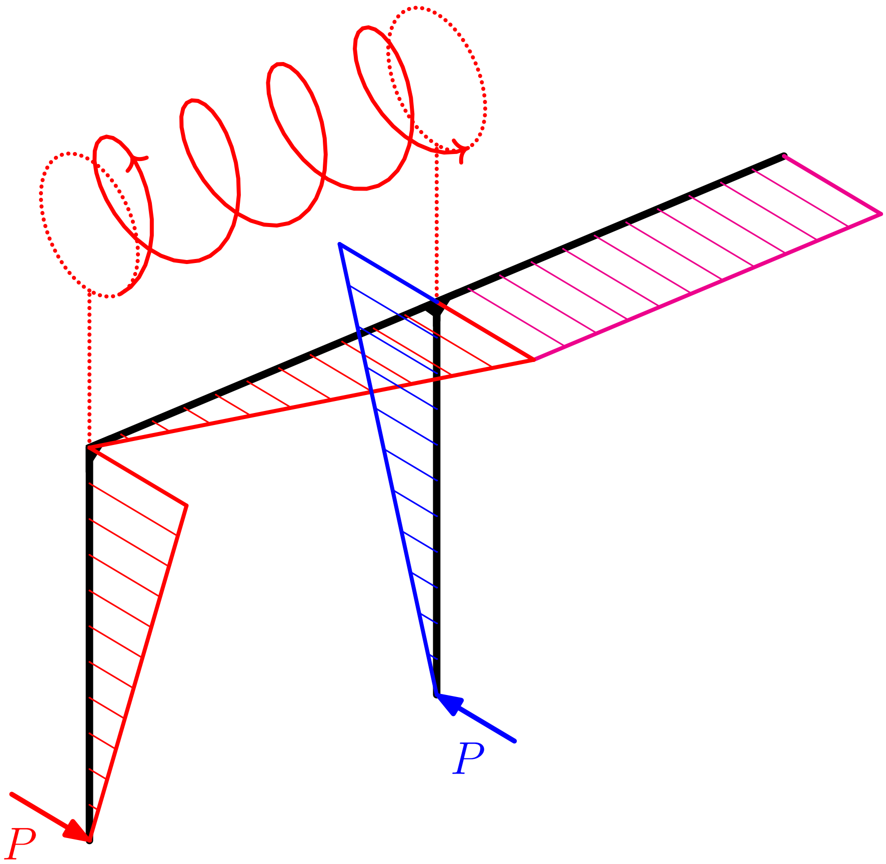


Для линейно-упругих систем примени́м принцип независимости действия сил, согласно которому результат от действия *всех* нагрузок аналогичен сумме действий от *каждой* из нагрузок. Поэтому, для решения задачи найдём внутренний момент от каждой внешней силы по отдельности.


P


P

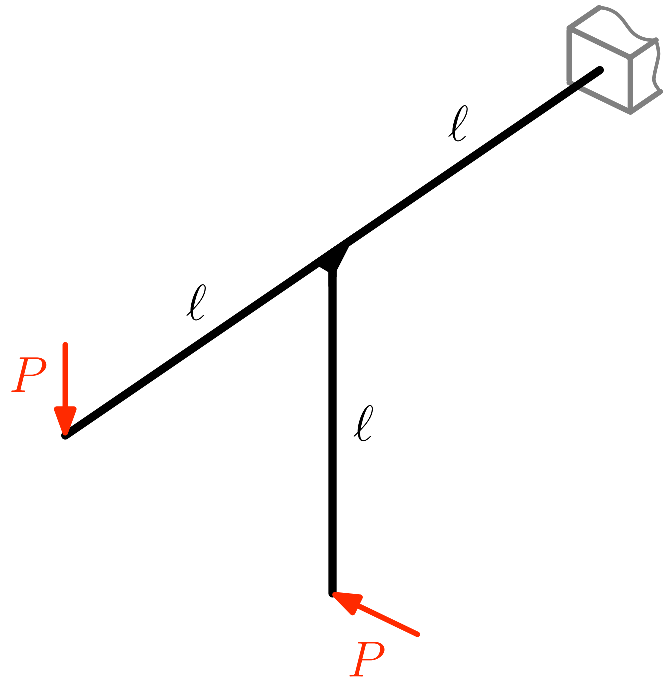
Сложение эпюр от отдельных внешних сил даёт суммарную эпюру от всех сил, действующих на конструкцию. Суммарная эпюра:



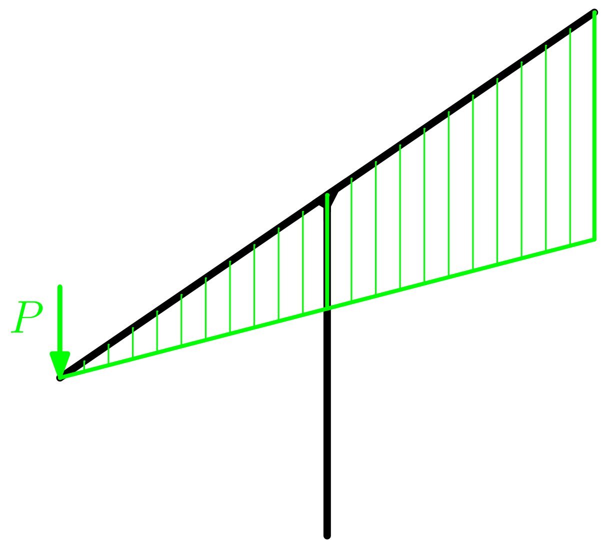
Задача 3^{я}

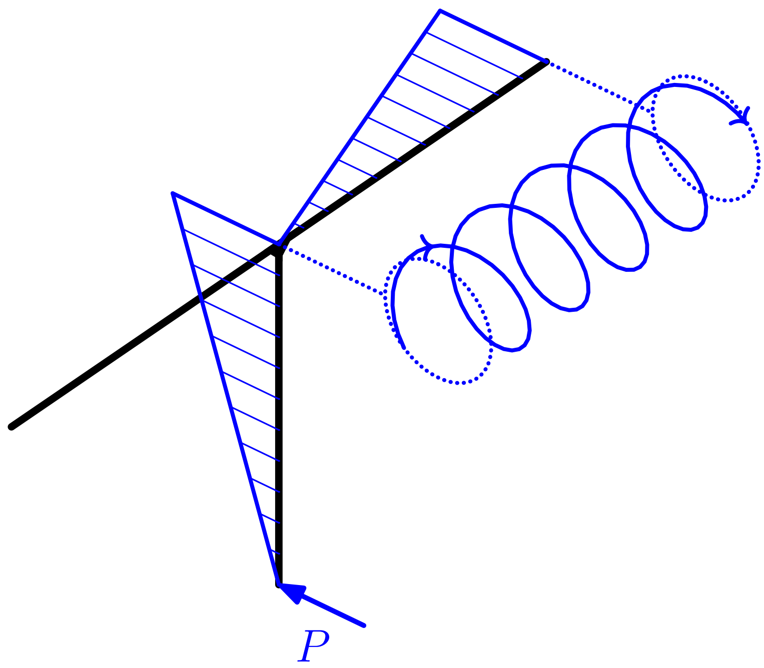
Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов

Вариант № 8



Для решения, как и в предыдущей задаче, используется принцип независимости действия сил.


P


P

Суммарная эпюра: