

*Vadique Myself*

# PHYSICS *of* ELASTIC CONTINUA

© MMXIX *Vadique*

УДК 539.3 *Механика деформируемых тел. Упругость. Деформации*

УДК 539 *Строение материи*

УДК 53 *Физика*

УДК 5 *Математика. Естественные науки*

UDC 539.3 *Elasticity. Deformation. Mechanics of elastic solids*

UDC 539 *Physical nature of matter*

UDC 53 *Physics*

UDC 5 *Mathematics. Natural sciences*

Представлены все модели упругих сред: нелинейные и линейные, микрополярные и классические безмоментные; трёхмерные, двумерные (оболочки и пластины), одномерные (стержни, в том числе тонкостенные). Для термоупругости и магнитоупругости дана сводка законов термодинамики и электродинамики. Изложены основы динамики — колебания, волны и устойчивость. Описаны теории дефектов, трещин, композитов и периодических структур.

All models of elastic continua are presented: nonlinear and linear, micropolar and classical momentless; three-dimensional, two-dimensional (shells and plates), one-dimensional (rods, including thin-walled ones). For thermoelasticity and magnetoelasticity, summary of laws of thermodynamics and electrodynamics is given. Fundamentals of dynamics — oscillations, waves and stability — are explained. Theories of defects, fractures, composites and periodic structures are described.

## CONTENTS

<i>Chapter 1. Elements of tensor calculus</i>	<b>10</b>
§ 1. Vectors	10
§ 2. Tensor and its components	12
§ 3. Operations with tensors	13
§ 4. Polyadic representation (decomposition)	16
§ 5. Cross product and Levi-Civita tensor	17
§ 6. Symmetric and antisymmetric tensors	21
§ 7. Eigenvectors and eigenvalues of tensor	23
§ 8. Rotation tensor	25
§ 9. Variations	31
§ 10. Polar decomposition	32
§ 11. Tensors in oblique basis	34
§ 12. Tensor functions	40
§ 13. Tensor fields. Differentiation	41
§ 14. Integral theorems	44
§ 15. Curvature tensors	47
<i>Chapter 2. Fundamentals of generic mechanics</i>	<b>50</b>
§ 1. Discrete system of particles	50
§ 2. Absolutely rigid undeformable solid body	51
§ 3. Principle of virtual work	53
§ 4. Balance of momentum, rotational momentum, and energy	55
§ 5. Hamilton's principle and Lagrange's equations	56
§ 6. Statics	58
§ 7. Mechanics of relative motion	61
§ 8. Small oscillations (vibrations)	61

<i>Chapter 3. Nonlinear elastic momentless continuum</i>	<b>62</b>
§ 1. Model of continuum. Descriptions of processes	62
§ 2. Differentiation	63
§ 3. Motion gradient	64
§ 4. Tensors and measures of deformation	65
§ 5. Velocity field	68
§ 6. Area vector. Surface change	69
§ 7. Forces in continuum. Cauchy stress tensor	69
§ 8. Balance of momentum and rotational momentum	70
§ 9. Eigenvalues of Cauchy stress tensor	71
§ 10. Principle of virtual work (without Lagrange multipliers)	72
§ 11. Constitutive relations of elasticity	73
§ 12. Piola–Kirchhoff stress tensors and other measures of stress	75
§ 13. Variation of present configuration	80
§ 14. Internal constraints	80
§ 15. Hollow sphere under pressure	81
§ 16. Stresses as Lagrange multipliers	82
<i>Chapter 4. Classical linear elasticity</i>	<b>84</b>
§ 1. Complete set of equations	84
§ 2. Uniqueness of the solution of a dynamic problem	86
§ 3. Hooke’s ceiiinossttuv law	88
§ 4. Theorems of statics	91
§ 5. Equations for displacements	94
§ 6. Concentrated force in a limitless medium	94
§ 7. Determining displacements from deformations	95
§ 8. Equations for stresses	96
§ 9. Principle of minimum potential energy	96
§ 10. Principle of minimum complementary energy	97
§ 11. Mixed principles of stationarity	97
§ 12. Antiplane shear	98
§ 13. Twisting of rods	99
§ 14. Plane deformation	99

<i>Chapter 5. Micropolar three-dimensional continuum</i>	<b>101</b>
§ 1. Introduction to linear micropolar theory	101
§ 2. Relations of elasticity	105
§ 3. Compatibility equations	106
§ 4. Theorems of statics	106
§ 5. Cosserat pseudo-continuum	107
§ 6. Plane deformation	107
§ 7. Nonlinear theory	107
§ 8. Nonlinear model with constrained rotation	110
<i>Chapter 6. Thermoelasticity</i>	<b>111</b>
§ 1. First law of thermodynamics	111
§ 2. Second law	111
§ 3. Constitutive equations	112
§ 4. Heat equation	112
§ 5. Linear thermoelasticity	112
§ 6. Equations for displacements	112
§ 7. Temperature stresses	113
§ 8. Variational formulations	113
<i>Chapter 7. Magnetoelasticity</i>	<b>114</b>
§ 1. Electromagnetic field	114
§ 2. Electrostatics	114
§ 3. Dielectrics	114
§ 4. Magnetostatics	115
§ 5. Magnetism	115
§ 6. Magnetic rigidity	115
<i>Chapter 8. Perturbation methods (asymptotic methods)</i>	<b>118</b>
§ 1. Asymptotic decompositions	118
§ 2. Splitting in a linear algebraic system	118
§ 3. Poincaré method	119
§ 4. Van der Pol averaging method	119
§ 5. Coalescence of asymptotic decompositions	120

§ 6. Multiple-scale analysis (method of multiple scales) . . . . .	120
§ 7. Equations with slowly varying parameters . . . . .	120
§ 8. Thin bodies . . . . .	120
<b>Chapter 9. Rods</b> . . . . .	<b>122</b>
§ 1. Initial concepts . . . . .	122
§ 2. Kinematics of Cosserat lines . . . . .	123
§ 3. Balance of forces and moments . . . . .	123
§ 4. Principle of virtual work and its consequences . . . . .	123
§ 5. Classical Kirchhoff's model . . . . .	124
§ 6. Euler's problem . . . . .	124
§ 7. Variational equations . . . . .	124
§ 8. Non-shear model with (ex)tension . . . . .	124
§ 9. Mechanics of flexible thread . . . . .	125
§ 10. Linear theory . . . . .	125
§ 11. Case of small thickness . . . . .	125
§ 12. Saint-Venant's problem . . . . .	126
§ 13. Finding stiffness by energy . . . . .	126
§ 14. Variational method of building one-dimensional model . . . . .	127
§ 15. Asymptotic splitting of three-dimensional problem . . . . .	128
§ 16. Thermal deformation and stress . . . . .	128
<b>Chapter 10. Thin-walled rods</b> . . . . .	<b>130</b>
§ 1. Variational approach . . . . .	130
§ 2. Equations with small parameter . . . . .	130
§ 3. First step of the asymptotic procedure . . . . .	130
§ 4. Second step . . . . .	131
§ 5. Third step . . . . .	131
§ 6. Fourth step . . . . .	132
§ 7. Displacements . . . . .	132
§ 8. Results of asymptotic analysis . . . . .	132
<b>Chapter 11. Shells and plates</b> . . . . .	<b>134</b>
§ 1. Surface geometry . . . . .	134

§ 2. Model of a shell .....	135
§ 3. Balance of forces and moments for a shell .....	135
§ 4. Shells: Relations of elasticity .....	135
§ 5. Classical theory of shells .....	135
§ 6. Shells: A plate .....	136
§ 7. Shells: Approach with Lagrange multipliers .....	136
§ 8. Cylindrical shell .....	136
§ 9. Shells: Common theorems .....	137
§ 10. Shells: Boundary conditions .....	137
§ 11. Shells of revolution .....	137
§ 12. Momentless theory of shells .....	137
§ 13. Shells: Nonlinear momentless theory .....	138
§ 14. Shells: Other variant of classical theory .....	138
§ 15. Plates: Overall concepts .....	138
§ 16. Timoshenko-like model of a plate (direct approach) .....	138
§ 17. Kirchhoff's classical theory of plates .....	138
§ 18. Plates: Asymptotic matching of two-dimensional models .....	139
§ 19. Plates: Variational transition from three-dimensional model .....	139
§ 20. Plates: Splitting of three-dimensional bending problem .....	139
§ 21. Circular plates .....	140
§ 22. Plates: Plane stress .....	140
<b>Chapter 12. Oscillations and waves</b> .....	<b>141</b>
§ 1. Vibrations of a three-dimensional body .....	141
§ 2. Vibrations of a rod .....	142
§ 3. Small perturbations of parameters .....	142
§ 4. Vibrations of a shell .....	142
§ 5. Waves in an elastic continuum .....	142
§ 6. Waves in a rod .....	143
§ 7. Nonlinear oscillations .....	143
<b>Chapter 13. Stability</b> .....	<b>144</b>
§ 1. Various approaches to the problem of stability .....	144

§ 2. Classical problems with rods .....	145
§ 3. “Tracking” loads .....	145
§ 4. The role of additional yieldings .....	145
§ 5. Variational formulations .....	145
§ 6. Nonconservative problems .....	146
§ 7. Case of multiple roots .....	146
<b>Chapter 14. Defects</b> .....	<b>147</b>
§ 1. Volterra dislocations .....	147
§ 2. Straight-line dislocations .....	147
§ 3. Action of stress field on dislocation .....	147
§ 4. About movement of dislocations .....	148
§ 5. Point defects .....	148
§ 6. Force acting on point defect .....	148
§ 7. Continuously distributed dislocations .....	148
§ 8. Stress during winding of coil .....	148
<b>Chapter 15. Fractures</b> .....	<b>150</b>
§ 1. Traditional criteria of toughness .....	150
§ 2. Antiplane deformation of continuum with a crack .....	151
§ 3. Crack in plane deformation .....	151
§ 4. Crack driving force .....	152
§ 5. Criterion of crack growth .....	152
§ 6. J-integral .....	152
§ 7. Stress intensity factors .....	152
§ 8. Model of Barenblatt .....	152
§ 9. Deformational criterion .....	153
§ 10. Growth of cracks .....	153
§ 11. Elastic field ahead of a moving crack .....	153
§ 12. Balance of energy for a moving crack .....	154
<b>Chapter 16. Composites</b> .....	<b>155</b>
§ 1. Introductory thoughts .....	155
§ 2. Effective fields .....	155



§ 3. Boundary value problems for representative volume .....	155
§ 4. Hill's fork .....	156
§ 5. Eshelby formulas .....	156
§ 6. Effective moduli for material with spherical inclusions .....	156
§ 7. Self-consistent method .....	156
§ 8. Hashin–Shtrikman principle .....	157
<i>Chapter 17. Periodic structures</i> .....	<b>158</b>
§ 1. One-dimensional problem .....	158
§ 2. Three-dimensional continuum .....	158
§ 3. Fibrous structure .....	158
§ 4. Statics of a periodic rod .....	158
<b>List of publications</b> .....	<b>159</b>

# Chapter 1

## ELEMENTS OF TENSOR CALCULUS

### § 1. Vectors

Mention of tensors may scare away the reader, commonly avoiding needless complications. But tensors are introduced just because of their wonderful property of being invariant — independent of coordinate systems. I propose to begin familiarizing with tensors from reminiscences of vectors.

Meet  $\mathbf{v}$  — a vector; it is fully characterized by its length (modulus, magnitude) and direction in space, but does not depend on units and methods of measurement neither lengths nor directions.

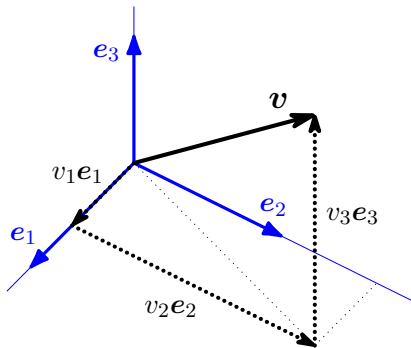


figure 1

Introduce some cartesian coordinate system with mutually perpendicular unit vectors of basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . In such a system, dot products of basis vectors are equal to the Kronecker delta:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Decomposing vector  $\mathbf{v}$  by basis  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), we have components of vector (fig. 1)

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i \equiv v_i \mathbf{e}_i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = |\mathbf{v}| \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i). \quad (1.1)$$

Here and hereinafter, Einstein's summation convention is accepted: having an index repeated twice in a single term implies summation over this index. More than two times in the same term index can't be repeated. And a non-repeating index is called free, it's identical in both parts of equation. There are examples:

$$\sigma = \tau_{ii}, \quad p_j = n_i \tau_{ij}, \quad m_i = e_{ijk} x_j f_k, \quad a_i = \lambda b_i + \mu c_i.$$

But following equations are incorrect

$$a = b_{kkk}, \quad c = f_i + g_k, \quad a_{ij} = k_i \gamma_{ij}.$$

Vector  $\mathbf{v}$  is invariant, it doesn't depend on any coordinate system. Its decomposition in two cartesian systems with basis unit vectors  $\mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{e}'_i$  gives

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_i \mathbf{e}_i = v'_i \mathbf{e}'_i, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k &= \underbrace{v_k}_{v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = v_i \delta_{ik}} = v'_i \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_k = v'_k = v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k. \end{aligned}$$

Connection between basis vectors of an “old” and a “new” — “rotated” — orthonormal systems is represented by a rotation matrix (a matrix of “direction” cosines)  $o_{i'k}$ :

$$\mathbf{e}'_i = o_{i'k} \mathbf{e}_k, \quad (\mathbf{e}_k) \Rightarrow o_{i'k} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k = \cos \angle(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k). \quad (1.2)$$

Matrix of cosines is orthogonal, meaning that it inverses when transposing:

$$o_{i'k} o_{j'k} = o_{k'i} o_{k'j} = \delta_{ij} \quad (1.3)$$

(proof:  $\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = o_{i'k} \mathbf{e}_k \cdot o_{j'n} \mathbf{e}_n = o_{i'k} o_{j'n} \delta_{kn} = o_{i'k} o_{j'k}$ ).

Orthogonal transformation of vector components

$$v'_i = v_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i = o_{i'k} v_k \quad (1.4)$$

can be used to define a vector itself. Suppose that in each orthonormal basis  $\mathbf{e}_i$  a triplet of numbers  $v_i$  is given, and on transition to a new orthonormal basis it is transformed according to (1.4); then this triplet of components represents an invariant object — vector  $\mathbf{v}$ .

Multiplying an orthogonal matrix by components of any vector retains length (modulus) of this vector:

$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v'_i v'_i = o_{i'k} v_k o_{i'n} v_n = v_n v_n$  — this conclusion leans on (1.3).

## § 2. Tensor and its components

When in each orthonormal basis  $\mathbf{e}_i$  we have a set of nine ( $3^2 = 9$ ) numbers  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), which is transformed during transition to a new (rotated) orthonormal basis as

$$B'_{ij} = o_{i'k} o_{j'n} B_{kn}, \quad (2.1)$$

then this set of components represents an invariant object — a tensor of second complexity (of second valence, bivalent)  ${}^2\mathbf{B}$ .

In other words, tensor  ${}^2\mathbf{B}$  reveals in each basis as a set (matrix) of its components  $B_{ij}$ , changing along with a basis according to (2.1). Attempts, widespread in literature, to replace tensors with matrices lead to mistakes if you don't track a basis to which these matrices correspond.

Ключевой пример тензора второй сложности — диада. Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — векторы. В каждом базисе положим  $D_{ij} \equiv a_i b_j$ . Легко убедиться, что преобразование (2.1) для  $D_{ij}$  справедливо. Получившийся тензор  ${}^2\mathbf{D}$  называется диадным произведением (dyadic product) или просто диадой (dyad); его пишут как  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  или  $\mathbf{ab}$ . Предпочтём второе.

Ещё один существенный пример двухвалентного тензора — единичный тензор (он же “метрический”). Для любого декартова (cartesian) базиса положим  $E_{ij} \equiv \delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ . Это действительно компоненты тензора, (2.1) действует. Назовём этот тензор  $\mathbf{E}$ .

Неизменность компонент при повороте базиса делает тензор  $\mathbf{E}$  изотропным. Ненулевых векторов с таким свойством нет (все компоненты нуль-вектора  $\mathbf{0}$  равны нулю в любом базисе).

Третий пример связан с линейным преобразованием векторов:  $\mathbf{b}$  есть линейная функция от  $\mathbf{a}$ . В каждом базисе имеем  $b_i = c_{ij} a_j$ . Коэффициенты преобразования меняются при перемене базиса:

$$b'_i = c'_{ij} a'_j = o_{i'k} b_k = o_{i'k} c_{kn} a_n, \quad a_n = o_{j'n} a'_j \Rightarrow c'_{ij} = o_{i'k} o_{j'n} c_{kn}.$$

Видим, что множество матриц  $c_{ij}$ ,  $c'_{ij}$ , ..., определяющих одно и то же линейное преобразование  $\mathbf{a}$  в  $\mathbf{b}$ , но в разных базисах, сводится к одному инвариантному объекту — тензору второй сложности  ${}^2\mathbf{c}$ . Многие авторы так и определяют тензор через линейное преобразование.

Четвёртый пример — коэффициенты инвариантной квадратичной формы  $F(\mathbf{a}) = f_{ij}a_ia_j$ , где  $a_i$  и  $a_j$  — компоненты векторного аргумента  $\mathbf{a}$ , и результат  $F$  не зависит от базиса. Из равенств  $F' = f'_{ij}a'_ia'_j = F$  следует (2.1) для коэффициентов  $f_{ij}$ .

Обратимся теперь к тензорам бóльших сложностей. Тензор третьей валентности  ${}^3\mathbf{C}$  представляется через совокупность  $3^3 = 27$  чисел  $C_{ijk}$ , преобразующихся как

$$C'_{ijk} = o_{i'p}o_{j'q}o_{k'r}C_{pqr}. \quad (2.2)$$

Простейший пример — триада из векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$C_{ijk} \equiv a_ib_jc_k \Leftrightarrow {}^3\mathbf{C} = \mathbf{abc}.$$

Отметим, что ортогональные преобразования (2.2) и (2.1) — результаты своеобразного “повторения” векторного (1.4). Читатель без труда напишет преобразование компонент тензора любой сложности и для примера приведёт соответствующую полиаду.

Векторы с преобразованием компонент (1.4) суть тензоры первой сложности.

В конце этого параграфа обратимся к самым простым объектам — скалярам, то есть тензорам нулевой сложности. Скаляр это одно ( $3^0 = 1$ ) число, не зависящее от базиса: масса, энергия, температура и др. Но что такое, например, компоненты (1.1) вектора  $\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i$  и  $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ ? Если не скаляры, то что? Односложно ответить невозможно. В каждом фиксированном базисе  $\mathbf{e}_i$ , конечно, векторы, а  $v_i$  — скаляры.

### § 3. Operations with tensors

There're four of them.

The first — linear combination — aggregates addition and multiplication by number. Arguments of this operation and its result are of the same complexity. Combining two tensors looks like this:

$$\lambda a_{ij\dots} + \mu b_{ij\dots} = c_{ij\dots} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{c}. \quad (3.1)$$

Here  $\lambda$  and  $\mu$  are scalar coefficients;  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{c}$  are tensors of same complexity. It's easy to show that components of the result  $\mathbf{c}$  satisfy orthogonal transformation like (2.1).

“Разложение вектора по базису” — представление вектора суммой  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$  — это не что иное, как линейная комбинация векторов базиса  $\mathbf{e}_i$  с коэффициентами  $v_i$ .

Второе действие это умножение. Сложности сомножителей — любые, сложность произведения — суммарная. Примеры:

$$\begin{aligned} v_i a_{jk} &= C_{ijk} \Leftrightarrow \mathbf{v} {}^2\mathbf{a} = {}^3\mathbf{C}, \\ a_{ij} B_{k\ell m} &= D_{ijk\ell m} \Leftrightarrow {}^2\mathbf{a} {}^3\mathbf{B} = {}^5\mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрев преобразование совокупностей  $C_{ijk}$  и  $D_{ijk\ell m}$  при повороте базиса, видим, что это действительно компоненты тензоров. Простейший пример умножения — диадное произведение векторов  ${}^2\mathbf{A} = \mathbf{b}\mathbf{c}$ .

Третье действие называется свёрткой (contraction). Это действие над одним тензором, других “участников” нет. Грубо говоря, свёртка состоит в суммировании компонент по какой-либо паре индексов. В результате свёртки сложность тензора уменьшается на два. Для тензора, например, третьей сложности  ${}^3\mathbf{D}$  возможны следующие варианты свёртки, приводящие к векторам  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$a_i = D_{k\ell i}, \quad b_i = D_{k\ell i}, \quad c_i = D_{i\ell\ell}. \quad (3.3)$$

При повороте базиса

$$a'_i = D'_{k\ell i} = \underbrace{o_{k'p} o_{\ell'q} o_{i'r}}_{\delta_{pq}} D_{pqr} = o_{i'r} D_{ppr} = o_{i'r} a_r,$$

что доказывает тензорный характер результата свёртки.

Для тензора второй сложности возможен лишь один вариант свёртки, приводящий к скаляру, называемому первым инвариантом или следом тензора

$$B_{kk} = \mathbf{I}(\mathbf{B}) \equiv \text{tr } \mathbf{B}.$$

След единичного тензора (“свёртка дельты Кронекера”) есть размерность пространства:

$$\text{tr } \mathbf{E} = \delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

Четвёртое действие именуется по-разному: перестановка индексов, жонглирование индексами, index swap и др. Из компонент тензора образуется новая совокупность величин с другой последовательностью индексов, результатом является тензор той же сложности. Из тензора  ${}^3\mathbf{D}$ , например, можно получить тензоры

${}^3\mathbf{A}$ ,  ${}^3\mathbf{B}$ ,  ${}^3\mathbf{C}$  с компонентами

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{A} &= {}^3\mathbf{D}_{1\rightleftharpoons 2} \Leftrightarrow A_{ijk} = D_{jik}, \\ {}^3\mathbf{B} &= {}^3\mathbf{D}_{1\rightleftharpoons 3} \Leftrightarrow B_{ijk} = D_{kji}, \\ {}^3\mathbf{C} &= {}^3\mathbf{D}_{2\rightleftharpoons 3} \Leftrightarrow C_{ijk} = D_{ikj}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для тензора второй сложности возможна лишь одна перестановка, называемая транспонированием:  $B_{ij} = A_{ji} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^\top$ . Очевидно,  $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$ .

При диадном умножении векторов  $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}^\top$ .

Представленные четыре действия можно комбинировать в разных сочетаниях. Чаще всего встречается комбинация умножения и свёртки — dot product; при этом в инвариантной безындексной записи ставится точка, указывающая на свёртку по соответствующим соседним индексам:

$$a_i = B_{ij}c_j \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}, \quad A_{ij} = B_{ik}C_{kj} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}. \quad (3.5)$$

Определяющее свойство единичного тензора

$${}^n\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{a} = {}^n\mathbf{a} \quad \forall {}^n\mathbf{a} \quad \forall n > 0. \quad (3.6)$$

В коммутативном скалярном произведении двух векторов точка имеет тот же смысл:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = b_i a_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \text{tr } \mathbf{a}\mathbf{b} = \text{tr } \mathbf{b}\mathbf{a}. \quad (3.7)$$

Для dot product'a тензоров второй сложности справедливо следующее

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q} &= (\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{B}^\top)^\top \\ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q})^\top &= \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{B}^\top \end{aligned} \quad (3.8)$$

(например, для диад  $\mathbf{B} = \mathbf{b}\mathbf{d}$  и  $\mathbf{Q} = \mathbf{p}\mathbf{q}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}\mathbf{d} \cdot \mathbf{p}\mathbf{q})^\top &= \mathbf{p}\mathbf{q}^\top \cdot \mathbf{b}\mathbf{d}^\top \\ d_i p_i \mathbf{b}\mathbf{q}^\top &= \mathbf{q}\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}\mathbf{b} \\ d_i p_i \mathbf{q}\mathbf{b} &= p_i d_i \mathbf{q}\mathbf{b} ). \end{aligned}$$

Для вектора и тензора второй сложности

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}^\top. \quad (3.9)$$

Tensor of second valence “squared” is defined as

$$\mathbf{B}^2 \equiv \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.10)$$

Contraction can be repeated:  $A \bullet \bullet B \equiv A_{ij}B_{ji}$ , and here are poco useful equations for tensors of second complexity

$$\begin{aligned} A \bullet \bullet E &= E \bullet \bullet A = \text{tr } A = A_{jj}, \\ A \bullet \bullet B &= B \bullet \bullet A, \quad A \bullet \bullet B^\top = A^\top \bullet \bullet B, \\ A \bullet \bullet B \bullet C &= A \bullet B \bullet \bullet C = C \bullet \bullet A \bullet B = A_{ij}B_{jk}C_{ki}, \\ A \bullet \bullet B \bullet C \bullet D &= A \bullet B \bullet \bullet C \bullet D = A \bullet B \bullet C \bullet \bullet D = \\ &= D \bullet \bullet A \bullet B \bullet C = A_{ij}B_{jk}C_{kn}D_{ni}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

#### § 4. Polyadic representation (decomposition)

In §2, a tensor was presented as some invariant object, showing itself in every basis as a collection of numbers (components). Such representation is typical for majority of books about tensors. Index notation can be constructive, especially when cartesian coordinates are sufficient, but quite often it is not. The relevant case is— physics of elastic continua: it needs more elegant, more powerful and perfect apparatus of direct tensor calculus, operating just with indexless invariant objects.

Relation  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$  from (1.1) links vector  $\mathbf{v}$  with basis  $\mathbf{e}_i$  and vector's components  $v_i$  in that basis. Soon we will get similar relation for a tensor of any complexity.

Consider bivalent tensor  ${}^2\mathbf{B}$ . В каждом базисе имеем девять чисел  $B_{ij}$  и столько же диад  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ . Линейным комбинированием возможно образовать сумму  $B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ . Это тензор, но каковы его компоненты и сохранится ли подобное его представление при повороте базиса?

Компоненты построенной суммы

$$(B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)_{pq} = B_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = B_{pq}$$

это компоненты тензора  ${}^2\mathbf{B}$ . При повороте же базиса

$$B'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = o_{i'p} o_{j'q} B_{pq} o_{i'n} \mathbf{e}_n o_{j'm} \mathbf{e}_m = \delta_{pn} \delta_{qm} B_{pq} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m = B_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q.$$

Сомнения отпали — приходим к диадному представлению тензора второй сложности

$${}^2\mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (4.1)$$



Для единичного тензора

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Polyadic representations like (4.1) помогают проще и с бóльшим пониманием оперировать с тензорами:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot {}^2\mathbf{B} &= v_i \mathbf{e}_i \cdot B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = v_i B_{jk} \delta_{ij} \mathbf{e}_k = v_i B_{ik} \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{e}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_i \cdot B_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_j = B_{pq} \delta_{ip} \delta_{qj} = B_{ij} = {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Последняя строчка весьма интересна: компоненты тензора выражены через сам тензор. Ортогональное преобразование компонент при повороте базиса (2.1) оказывается очевидным следствием (4.2).

Аналогичным образом по базисным полиадам разлагается тензор любой сложности. Например, для трёхвалентного тензора

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{C} &= C_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k, \\ C_{ijk} &= {}^3\mathbf{C} \cdots \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot {}^3\mathbf{C} \cdots \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \cdots {}^3\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_k. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя разложение по полиадам, легко увидеть справедливость свойства (3.6) “единичности” тензора  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} {}^n\mathbf{a} &= a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q, \quad \mathbf{E} = \mathbf{e}_e \mathbf{e}_e \\ {}^n\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} &= a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \underbrace{\mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_e}_{\delta_{eq}} \mathbf{e}_e = a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = {}^n\mathbf{a}, \\ \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{a} &= \mathbf{e}_e \mathbf{e}_e \cdot a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = a_{ij\dots q} \delta_{ei} \mathbf{e}_e \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = {}^n\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Полиадное представление соединяет вместе прямую и индексную записи. Не стоит противопоставлять их. Прямая запись компактна, изящна, и лишь она должна быть в фундаментальных соотношениях. Но и индексная запись полезна: при громоздких выкладках с тензорами мы не встретим трудностей.

## § 5. Cross product and Levi-Civita tensor

By habitual notions, a cross product of two vectors is a vector, направленный перпендикулярно плоскости сомножителей, длина

которого равна площади образуемого сомножителями параллелограмма

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Cross product (векторное произведение)  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  считается псевдовектором, поскольку тройка векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  может быть либо “правой”, либо “левой” (рис. 2).

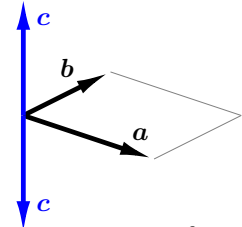


рисунок 2

Различие векторов и псевдовекторов **ограничивает** вид формул: векторы с псевдовекторами не складываются. Формула кинематики абсолютно жёсткого недеформируемого тела  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  корректна, поскольку во втором слагаемом «два “псевдо” взаимно компенсируются».

However, the cross product is not entirely separate operation. Оно сводится к четырём ранее описанным (§3) и обобщается на тензоры любой сложности. Покажем это.

However, the cross product is not entirely separate operation. Оно сводится к четырём ранее описанным (§3) и обобщается на тензоры любой сложности. Покажем это.

Сначала введём символ перестановки (permutation symbol) O.Veblen’a  $e_{ijk}$ :  $e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$ ,  $e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1$ , остальные нули. Символ  $e_{ijk}$  ( $\pm 1$  или  $0$ ) меняет знак при перестановке любых двух индексов, не меняется при двойной (“круговой”) перестановке индексов и обращается в нуль при совпадении какой-либо пары.

Через символ Веблена определитель (детерминант) матрицы  $A_{ij}$  выражается так:

$$\det A_{ij} = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = e_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}.$$

Далее познакомимся с волюметрическим тензором третьей сложности — тензором Levi-Civita’ы

$${}^3\epsilon = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k, \quad \epsilon_{ijk} \equiv \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k. \quad (5.1)$$

Абсолютная величина каждой ненулевой компоненты  $\epsilon_{ijk}$  равна объёму  $\sqrt{g}$  параллелепипеда, натянутого на базис — “смешанному” (“тройному”, “векторно-скалярному”) произведению базисных векторов.

Тензор  ${}^3\epsilon$  изотропный, его компоненты при повороте базиса не меняются. Но при изменении ориентации тройки базисных век-

торов (перемене “направления винта”)  ${}^3\epsilon$  меняет знак и поэтому является псевдотензором.

С тензором Лёви-Чивиты  ${}^3\epsilon$  возможно по-новому взглянуть на векторное произведение:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} &= e_i \times e_j \cdot e_k \Leftrightarrow e_i \times e_j = \epsilon_{ijk} e_k, \\ a \times b &= a_i e_i \times b_j e_j = \epsilon_{ijk} a_i b_j e_k = ba \cdot {}^3\epsilon = -a \cdot {}^3\epsilon \cdot b. \quad (5.2)\end{aligned}$$

Это всего лишь dot product — комбинация умножения и свёртки — с участием тензора  ${}^3\epsilon$ .

Такие комбинации возможны с любыми тензорами:

$$\begin{aligned}a \times {}^2B &= a_i e_i \times B_{jk} e_j e_k = \underbrace{a_i B_{jk} \epsilon_{ijn}}_{-a_i \epsilon_{inj} B_{jk}} e_n e_k = -a \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^2B, \\ {}^2C \times db &= C_{ij} e_i e_j \times d_p b_q e_p e_q = e_i C_{ij} d_p \underbrace{\epsilon_{jpk}}_{-\epsilon_{pjk} = -\epsilon_{jpk}} e_k b_q e_q = \\ &= -{}^2C d \cdot {}^3\epsilon b = -{}^2C \cdot {}^3\epsilon \cdot db, \\ E \times E &= e_i e_i \times e_j e_j = \underbrace{-\epsilon_{ijk} e_i e_j e_k}_{+\epsilon_{ijk} e_i e_k e_j} = -{}^3\epsilon. \quad (5.3)\end{aligned}$$

Последнее равенство представляет собой связь изотропных тензоров второй и третьей сложности.

Обобщая на любые тензоры ненулевой сложности

$${}^n\xi \times {}^m\zeta = -{}^n\xi \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^m\zeta \quad \forall {}^n\xi, {}^m\zeta \quad \forall n > 0, m > 0. \quad (5.4)$$

Когда один из тензоров — единичный (“метрический”), из (5.4) и (3.6)  $\forall {}^n\Upsilon \quad \forall n > 0$

$$\begin{aligned}E \times {}^n\Upsilon &= -E \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^n\Upsilon = -{}^3\epsilon \cdot {}^n\Upsilon, \\ {}^n\Upsilon \times E &= -{}^n\Upsilon \cdot {}^3\epsilon \cdot E = -{}^n\Upsilon \cdot {}^3\epsilon.\end{aligned}$$

For any tensor of first complexity (a vector)

$$E \times a = a \times E = -a \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot a. \quad (5.5)$$

For any two vectors  $a$  and  $b$

$$\begin{aligned}a \times b &= a \cdot (b \times E) = (a \times E) \cdot b = -ab \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot ab, \\ b \times a &= b \cdot (a \times E) = (b \times E) \cdot a = -ba \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot ba, \quad (5.6) \\ a \times b &= -ab \cdot {}^3\epsilon = ba \cdot {}^3\epsilon \Rightarrow a \times b = -b \times a.\end{aligned}$$

Когда базис  $e_i$  это “правая” тройка взаимно ортогональных векторов единичной длины, тогда  $\sqrt{g} = 1$ , и компоненты  ${}^3\epsilon$

равны символу Веблена:  $\epsilon_{ijk} = e_{ijk}$ . Если же тройка  $e_i$  “левая”, то  $\epsilon_{ijk} = -e_{ijk}$ .

Справедливо такое соотношение

$$e_{ijk}e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Доказательство начнём с представлений символов Веблена как определителей:

$$e_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix}, \quad e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{bmatrix}.$$

В левой части (5.7) имеем произведение этих определителей. Но  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  — определитель произведения матриц равен произведению определителей. В матрице-произведении элемент  $[\dots]_{11}$  равен  $\delta_{is}\delta_{ps} = \delta_{ip}$ , как и в (5.7); легко проверить и другие фрагменты (5.7).

Свёртка (5.7) приводит к полезным формулам

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \quad e_{ijk}e_{pjk} = 2\delta_{ip}, \quad e_{ijk}e_{ijk} = 6. \quad (5.8)$$

Первая из формул даёт знакомое представление двойного векторного произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_i e_i \times \epsilon_{pqj} b_p c_q e_j = \epsilon_{kij} \epsilon_{pqj} a_i b_p c_q e_k = \\ &= (\delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip}) a_i b_p c_q e_k = a_i b_k c_i e_k - a_i b_i c_k e_k = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{ca} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Тем же путём выводится  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}$ .

И такие тождества для любых двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{E} &= \epsilon_{ijk} a_i b_j e_k \times e_n e_n = a_i b_j \epsilon_{ijk} \epsilon_{knq} e_q e_n = \\ &= a_i b_j (\delta_{in}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jn}) e_q e_n = a_i b_j e_j e_i - a_i b_j e_i e_j = \mathbf{ba} - \mathbf{ab}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon) \cdot (\mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon) = \\ &= a_i \epsilon_{ipn} e_p e_n \cdot b_j \epsilon_{jsk} e_s e_k = a_i b_j \epsilon_{ipn} \epsilon_{nkj} e_p e_k = \\ &= a_i b_j (\delta_{ik}\delta_{pj} - \delta_{ij}\delta_{pk}) e_p e_k = a_i b_j e_j e_i - a_i b_i e_k e_k = \\ &= \mathbf{ba} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ещё одно соотношение между изотропными тензорами второй и третьей сложности:

$${}^3\epsilon \cdot {}^3\epsilon = \epsilon_{ijk} e_i \epsilon_{kjn} e_n = -2\delta_{in} e_i e_n = -2\mathbf{E}. \quad (5.11)$$

## § 6. Symmetric and antisymmetric tensors

Тензор, не меняющийся при перестановке какой-либо пары своих индексов, называется симметричным по этой паре индексов. Если же при перестановке пары индексов тензор меняет свой знак, то он называется антисимметричным (кососимметричным) по этой паре индексов.

Тензор Лёви-Чивиты  $\epsilon^3$  антисимметричен по любой паре индексов, то есть он полностью антисимметричен (абсолютно кососимметричен).

Тензор второй сложности  $B$  симметричен, если  $B = B^T$ . Когда транспонирование меняет знак тензора, то есть  $A^T = -A$ , тогда он антисимметричен (кососимметричен).

Любой тензор второй сложности представим суммой симметричной и антисимметричной частей

$$\begin{aligned} C &= C^S + C^A, \quad C^T = C^S - C^A; \\ C^S &\equiv \frac{1}{2} (C + C^T), \quad C^A \equiv \frac{1}{2} (C - C^T). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Для диады  $cd = cd^S + cd^A = \frac{1}{2} (cd + dc) + \frac{1}{2} (cd - dc)$ .

Произведение двух симметричных тензоров  $C^S \cdot D^S$  симметрично далеко не всегда, но только когда  $D^S \cdot C^S = C^S \cdot D^S$ , ведь по (3.8)  $(C^S \cdot D^S)^T = D^S \cdot C^S$ .

В нечётномерных пространствах любой антисимметричный тензор второй сложности необратим, его определитель  $\det A = 0$ .

Существует взаимно-однозначное соответствие между антисимметричными тензорами второй сложности и (псевдо)векторами. Матрица компонент кососимметричного тензора определяется тройкой чисел (диагональные компоненты — нули, а недиагональные — попарно противоположны). Dot product кососимметричного  $A$  и какого-либо тензора  ${}^n\xi$  однозначно соответствует cross product'у псевдовектора  $a$  и того же тензора  ${}^n\xi$

$$c = A \cdot {}^n\xi \Leftrightarrow a \times {}^n\xi = c \quad \forall A = A^A \quad \forall {}^n\xi \quad \forall n > 0. \quad (6.2)$$

Раскроем это соответствие  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{a})$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot {}^n\boldsymbol{\xi} &= \mathbf{a} \times {}^n\boldsymbol{\xi} \\ A_{hi} \mathbf{e}_h \mathbf{e}_i \cdot \xi_{jk\dots q} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \dots \mathbf{e}_q &= a_i \mathbf{e}_i \times \xi_{jk\dots q} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \dots \mathbf{e}_q \\ A_{hj} \xi_{jk\dots q} \mathbf{e}_h \mathbf{e}_k \dots \mathbf{e}_q &= a_i \in_{ijh} \xi_{jk\dots q} \mathbf{e}_h \mathbf{e}_k \dots \mathbf{e}_q \\ A_{hj} &= -a_i \in_{ijh} \\ \mathbf{A} &= -\mathbf{a} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon}\end{aligned}$$

Так же из  ${}^n\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} = {}^n\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{a}$  получается  $\mathbf{A} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{a}$ .

В общем, для взаимно-однозначного соответствия между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{a}$  имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -\mathbf{a} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \left(-\frac{1}{2} {}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon}\right) = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon}.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Вектор  $\mathbf{a}$  называется сопутствующим тензору  $\mathbf{A}$ .

Компоненты кососимметричного  $\mathbf{A}$  через компоненты сопутствующего ему псевдовектора  $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{a} = -\in_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j a_k, \\ A_{ij} &= -\in_{ijk} a_k = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

и обратно

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} A_{jk} \in_{kji} \mathbf{e}_i, \\ a_i &= \frac{1}{2} \in_{ikj} A_{jk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \in_{123} A_{32} + \in_{132} A_{23} \\ \in_{213} A_{31} + \in_{231} A_{13} \\ \in_{312} A_{21} + \in_{321} A_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{32} - A_{23} \\ A_{13} - A_{31} \\ A_{21} - A_{12} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Легко запоминающийся вспомогательный “псевдовекторный инвариант”  $\mathbf{A}_\times$  получается из тензора  $\mathbf{A}$  заменой диадных произведений на векторные

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\times &\equiv A_{ij} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = -\mathbf{A} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon}, \\ \mathbf{A}_\times &= (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times = -2\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times = -\frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times.\end{aligned}\tag{6.4}$$

Обоснование (6.4):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times \times \mathbf{E} = -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)}_{\in_{ijn} \mathbf{e}_n} \times \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \\
 &= -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{\in_{nij} \in_{nkp}}_{\delta_{jp} \delta_{ik} - \delta_{ip} \delta_{jk}} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = -\frac{1}{2} A_{ij} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \\
 &= -\frac{1}{2} (\mathbf{A}^\Gamma - \mathbf{A}) = \mathbf{A}^\mathbf{A} = \mathbf{A}.
 \end{aligned}$$

Сопутствующий вектор **можно ввести** для любого бивалентного тензора, но лишь антисимметричная часть при этом даёт вклад:  $\mathbf{C}^\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}$ . Для симметричного тензора сопутствующий вектор — нулевой:  $\mathbf{B}_\times = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^\Gamma = \mathbf{B}^\mathbf{S}$ .

С (6.4) разложение какого-либо тензора  $\mathbf{C}$  на симметричную и антисимметричную части выглядит как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^\mathbf{S} - \frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}. \quad (6.5)$$

Для диады же

$$(5.9) \Rightarrow (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E} = \mathbf{dc} - \mathbf{cd} = -2\mathbf{cd}^\mathbf{A}, \quad (\mathbf{cd})_\times = \mathbf{c} \times \mathbf{d},$$

и разложение её

$$\mathbf{cd} = \frac{1}{2} (\mathbf{cd} + \mathbf{dc}) - \frac{1}{2} (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E}. \quad (6.6)$$

## § 7. Eigenvectors and eigenvalues of tensor

Если для тензора  ${}^2\mathbf{B}$  и ненулевого вектора  $\mathbf{a}$

$${}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \quad (7.1)$$

$${}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}, \quad ({}^2\mathbf{B} - \eta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

то  $\eta$  называется собственным числом (собственным значением, eigenvalue, главным значением)  ${}^2\mathbf{B}$ , а определяемая собственным вектором  $\mathbf{a}$  ось (направление) — его собственной (главной, principal) осью (направлением).

В компонентах это матричная задача на собственные значения  $(B_{ij} - \eta \delta_{ij}) a_j = 0$  — однородная линейная алгебраическая система, имеющая ненулевые решения при равенстве нулю определителя  $\det(B_{ij} - \eta \delta_{ij})$ :

$$\det \begin{bmatrix} B_{11} - \eta & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} - \eta & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - \eta \end{bmatrix} = -\eta^3 + \text{I} \eta^2 - \text{II} \eta + \text{III} = 0; \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned}
I &= \text{tr } {}^2\mathbf{B} = B_{kk} = B_{11} + B_{22} + B_{33}, \\
II &= B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} + B_{11}B_{33} - B_{13}B_{31} + B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}, \quad (7.3) \\
III &= \det {}^2\mathbf{B} = \det B_{ij} = e_{ijk}B_{1i}B_{2j}B_{3k} = e_{ijk}B_{i1}B_{j2}B_{k3}.
\end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения (7.2) — собственные числа — не зависят от базиса и потому инвариантны.

Коэффициенты (7.3) тоже не зависят от базиса; они называются первым, вторым и третьим инвариантами тензора. С первым инвариантом  $I$  — следом тензора — мы уже встречались в §3. Второй инвариант  $II$  это след союзной (взаимной, adjugate) матрицы — транспонированной матрицы дополнений:  $II({}^2\mathbf{B}) \equiv \text{tr}(\text{adj } B_{ij})$ . Или он же  $II({}^2\mathbf{B}) \equiv \frac{1}{2}[(\text{tr } {}^2\mathbf{B})^2 - \text{tr}({}^2\mathbf{B} \cdot {}^2\mathbf{B})] = \frac{1}{2}[(B_{kk})^2 - B_{ij}B_{ji}]$ . И третий инвариант  $III$  это определитель (детерминант) компонент тензора:  $III({}^2\mathbf{B}) \equiv \det {}^2\mathbf{B}$ .

Это относилось ко всем тензорам второй сложности. Для случая же симметричного тензора справедливо следующее:

1°. Собственные числа симметричного тензора вещественны.

2°. Собственные оси для разных собственных чисел ортогональны.

Первое утверждение доказывается от противного. Если  $\eta$  — комплексный корень (7.2), определяющий собственный вектор  $\mathbf{a}$ , то сопряжённое число  $\bar{\eta}$  также будет корнем. Ему соответствует собственный вектор  $\bar{\mathbf{a}}$  с сопряжёнными компонентами. При этом

$$\begin{aligned}
(7.1) \Rightarrow (\bar{\mathbf{a}} \cdot) {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} &= \eta \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} \cdot) {}^2\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\eta} \bar{\mathbf{a}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \bar{\mathbf{a}} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}} = (\eta - \bar{\eta}) \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}.
\end{aligned}$$

Но слева здесь — нуль, поскольку  $\mathbf{a} \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot {}^2\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{a}$  и  ${}^2\mathbf{B} = {}^2\mathbf{B}^\top$ . Поэтому  $\eta = \bar{\eta}$ , то есть вещественно.

Столь же просто обосновывается и 2°:

$$\underbrace{\mathbf{a}_2 \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_2}_{=0} = (\eta_1 - \eta_2) \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2, \quad \eta_1 \neq \eta_2 \Rightarrow \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0.$$

При различных собственных числах собственные векторы единичной длины  $\mathbf{e}_i$  образуют ортонормальный базис; каковы же в нём компоненты тензора?



$${}^2B \cdot \mathbf{e}_k = \sum_k \eta_k \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$${}^2B \cdot \underbrace{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k}_E = \sum_k \eta_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k$$

В общем случае  $B_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot {}^2B \cdot \mathbf{e}_j$ , в базисе же  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  единичных взаимно ортогональных  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  собственных осей симметричного тензора:

$$B_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = \eta_1,$$

$$B_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2 = 0,$$

$$\dots$$

Матрица компонент диагональна и  ${}^2B = \sum \eta_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ . Здесь идёт суммирование по трём повторяющимся индексам, ведь используется особенный базис.

Случай кратных главных значений можно рассмотреть с помощью предельного перехода. При  $\eta_2 \rightarrow \eta_1$  любая линейная комбинация  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  в пределе удовлетворяет (7.1); это значит, что любая ось в плоскости  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  становится собственной. Если же совпадают все три собственных числа, то любая ось в пространстве — собственная. При этом  ${}^2B = \eta E$ , такие тензоры называются изотропными или шаровыми.

## § 8. Rotation tensor

Соотношение между двумя “правыми” (или двумя “левыми”) ортонормальными базисами  $\mathbf{e}_i$  и  $\hat{\mathbf{e}}_i$  вполне определено матрицей косинусов (§ 1)

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j \hat{\mathbf{e}}_j}_E = o_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j, \quad o_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j.$$

But one may write like this:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i}_{\delta_{ji}} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{P} \equiv \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (8.1)$$

$\mathbf{P}$  is called rotation tensor.

Компоненты  $\mathbf{P}$  и в начальном  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , и в повернутом  $\mathbf{e}_i$  базисах образуют одну и ту же матрицу, равную транспонированной

матрице косинусов  $o_{ji}^{\circ} = \mathring{e}_i \cdot e_j$ :

$$\begin{aligned} e_i \cdot P \cdot e_j &= \underbrace{e_i \cdot e_k}_{\delta_{ik}} \mathring{e}_k \cdot e_j = \mathring{e}_i \cdot e_j, \\ \mathring{e}_i \cdot P \cdot \mathring{e}_j &= \mathring{e}_i \cdot e_k \underbrace{\mathring{e}_k \cdot \mathring{e}_j}_{\delta_{kj}} = \mathring{e}_i \cdot e_j, \\ P &= o_{ji}^{\circ} e_i e_j = o_{ji}^{\circ} \mathring{e}_i \mathring{e}_j. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Тензор  $P$  связывает два вектора — “до поворота”  $\mathring{r} = \rho_i \mathring{e}_i$  и “после поворота”  $r = \rho_i e_i$  — с теми же компонентами  $\rho_i$  у  $r$  в актуальном повёрнутом базисе  $e_i$ , что и у  $\mathring{r}$  в неподвижном базисе  $\mathring{e}_i$  (“вектор вращается вместе с базисом”): поскольку  $e_i = e_j \mathring{e}_j \cdot \mathring{e}_i \Leftrightarrow \rho_i e_i = e_j \mathring{e}_j \cdot \rho_i \mathring{e}_i$ , то

$$r = P \cdot \mathring{r} \quad (8.3)$$

(эта связь — обобщённая формула поворота Rodrigues’a).

Поворот же тензора второй сложности  $\mathring{C} = C_{ij} \mathring{e}_i \mathring{e}_j$  в текущее (актуальное) положение  $C = C_{ij} e_i e_j$  происходит так:

$$C_{ij} e_i e_j = e_i \mathring{e}_i \cdot C_{pq} \mathring{e}_p \mathring{e}_q \cdot \mathring{e}_j \mathring{e}_j \Leftrightarrow C = P \cdot \mathring{C} \cdot P^{\top}. \quad (8.4)$$

Существенное свойство тензора поворота — ортогональность — выражается равенством

$$\underbrace{P}_{e_i \mathring{e}_i} \cdot \underbrace{P^{\top}}_{\mathring{e}_j e_j} = \underbrace{P}_{\mathring{e}_i e_i} \cdot \underbrace{P}_{e_j \mathring{e}_j} = \underbrace{E}_{\mathring{e}_i \mathring{e}_i}, \quad (8.5)$$

то есть  $P^{\top} = P^{-1} \Leftrightarrow P = P^{-\top}$  — транспонированный тензор совпадает с обратным.

Ортогональный тензор не меняет скалярное произведение векторов, сохраняя длины и углы (“метрику”)

$$(P \cdot a) \cdot (P \cdot b) = a \cdot P^{\top} \cdot P \cdot b = a \cdot E \cdot b = a \cdot b. \quad (8.6)$$

Для всех ортогональных тензоров  $(\det P)^2 = 1$ :

$$1 = \det E = \det (P \cdot P^{\top}) = (\det P) (\det P^{\top}) = (\det P)^2.$$

Тензор поворота это ортогональный тензор с  $\det P = 1$ . Но не только лишь тензоры поворота обладают свойством ортогональности. Когда в (8.1) один из базисов “правый”,

а другой “левый”, имеем комбинацию поворота с отражением, и  $\det(-\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}) = -1$ .

У любого тензора второй сложности в трёхмерном пространстве как минимум одно собственное число — корень (7.2) — действительное (некомплексное). Для тензора поворота оно равно единице

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \underbrace{\mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P}}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{a} \cdot \eta \mathbf{a} \Rightarrow \eta^2 = 1.$$

Соответствующая собственная ось называется осью поворота; теорема Euler’a о конечном повороте в том и состоит, что такая ось существует. Если  $\mathbf{k}$  — орт этой оси, а  $\vartheta$  — величина угла поворота, то тензор поворота представим как

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}, \vartheta) = \mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta). \quad (8.7)$$

Доказывается эта формула так. Направление  $\mathbf{k}$  при повороте не меняется ( $\mathbf{P} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}$ ), поэтому на оси поворота  $\hat{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ . В перпендикулярной плоскости (рис. 3)  $\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \vartheta - \mathbf{e}_2 \sin \vartheta$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 \sin \vartheta + \mathbf{e}_2 \cos \vartheta$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{e}}_i \Rightarrow$  (8.7).

Из (8.7) и (8.3) получаем формулу поворота Родрига в параметрах  $\mathbf{k}$  и  $\vartheta$ :

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{r}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} (1 - \cos \vartheta).$$

В параметрах конечного поворота транспонирование, оно же обращение, тензора  $\mathbf{P}$  эквивалентно перемене направления поворота — знака угла  $\vartheta$

$$\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}|_{\vartheta=-\vartheta} = \mathbf{E} \cos \vartheta - \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta).$$

Пусть теперь тензор поворота меняется со временем:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ . Псевдовектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  вводится через  $\mathbf{P}$  таким путём. Дифференцируем тождество ортогональности (8.5) по времени\*

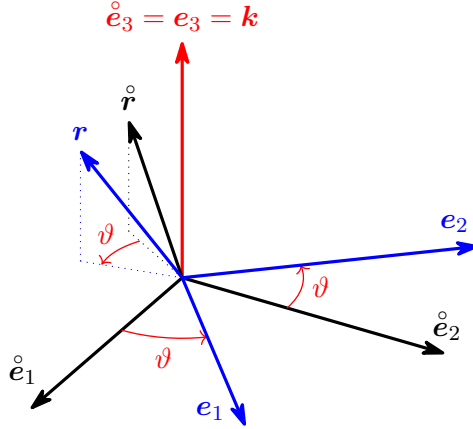
$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top = 2\mathbf{0}.$$

Тензор  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top$  (по (3.8)  $(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top)^\top = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top$ ) оказался антисимметричным, и согласно (6.3) он представим сопутствующим

\* A variety of notations are used to denote the full time derivative. In addition to the Leibniz’s notation  $\frac{dx}{dt}$ , very popular short-hand notation is the “over-dot” Newton’s notation  $\dot{x}$ .

$$\mathring{e}_i = \mathring{e}_i \cdot e_j e_j$$

$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \\ \mathring{e}_2 \\ \mathring{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(90^\circ + \vartheta) & \cos 90^\circ \\ \cos(90^\circ - \vartheta) & \cos \vartheta & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathring{e}_1 = e_1 \cos \vartheta - e_2 \sin \vartheta$$

$$\mathring{e}_2 = e_1 \sin \vartheta + e_2 \cos \vartheta$$

$$\mathring{e}_3 = e_3 = k$$

$$P = e_1 \mathring{e}_1 + e_2 \mathring{e}_2 + e_3 \mathring{e}_3 =$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{e_1 \mathring{e}_1}^{e_1 e_1 \cos \vartheta - e_1 e_2 \sin \vartheta} + \overbrace{e_2 \mathring{e}_2}^{e_2 e_1 \sin \vartheta + e_2 e_2 \cos \vartheta} + \overbrace{e_3 \mathring{e}_3}^{kk} = \\ &= E \cos \vartheta - \underbrace{e_3 e_3}_{kk} \cos \vartheta + \underbrace{(e_2 e_1 - e_1 e_2)}_{e_3 \times e_i e_i = \epsilon_{3ij} e_j e_i} \sin \vartheta + kk = \\ &= E \cos \vartheta + k \times E \sin \vartheta + kk (1 - \cos \vartheta) \end{aligned}$$

рисунок 3  
“Finite rotation”

вектором как  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top$ . То есть

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv -\frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times \quad (8.8)$$

Помимо этого общего представления вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , для него есть и другие. Например, через параметры конечного поворота.

Производная  $\dot{\mathbf{P}}$  в параметрах конечного поворота в общем случае (оба параметра — и единичный вектор  $\mathbf{k}$ , и угол  $\vartheta$  — переменны во времени):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= (\mathbf{P}^S + \mathbf{P}^A)^\bullet = \left( \overbrace{\mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta)}^{\mathbf{P}^S} + \overbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}^{\mathbf{P}^A} \right)^\bullet = \\ &= \underbrace{(\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta)}_{\dot{\mathbf{P}}^S} + \underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}_{\dot{\mathbf{P}}^A}. \end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top &= (\dot{\mathbf{P}}^S + \dot{\mathbf{P}}^A) \cdot (\mathbf{P}^S - \mathbf{P}^A) = \\ &= \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S + \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S - \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A - \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A, \end{aligned}$$

используя

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 = \text{const} &\Rightarrow \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} = 0, \\ \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} &= \mathbf{k} \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}, \\ (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{k} - \mathbf{k} = 0, \quad (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k} \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = 0, \\ (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= -\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k}, \\ (5.10) \Rightarrow (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{E}, \\ (5.9) \Rightarrow \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} &= (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}) \times \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \mathbf{k} - \mathbf{k} (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) = \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S =$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + \\ &\quad + (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) = \\ &= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta)^2 = \\ &= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\ &\quad + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} - 2 \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos^2 \vartheta = \\ &= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta), \end{aligned}$$

$$\dot{P}^A \cdot P^S =$$

$$= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \\ + (\overline{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}) \cdot \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \dot{\vartheta} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\ = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta),$$

$$\dot{P}^S \cdot P^A =$$

$$= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta = \\ = \overline{\mathbf{k} \mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E})) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\ = -\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta),$$

$$\dot{P}^A \cdot P^A = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin^2 \vartheta =$$

$$= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta;$$

$$\dot{P} \cdot P^\Gamma = \dot{P}^S \cdot P^S + \dot{P}^A \cdot P^S - \dot{P}^S \cdot P^A - \dot{P}^A \cdot P^A =$$

$$= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + \\ + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\ + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) - (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta = \\ = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}}) (1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\ = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\ = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) = \\ = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta).$$

Этот результат, подставленный в определение (8.8) псевдовектора  $\omega$ , даёт

$$\omega = \mathbf{k} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} (1 - \cos \vartheta). \quad (8.9)$$

Вектор  $\omega$  получился разложенным по трём взаимно ортогональным направлениям —  $\mathbf{k}$ ,  $\dot{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}$ . При неподвижной оси поворота  $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \Rightarrow \omega = \mathbf{k} \dot{\vartheta}$ .

Ещё одно представление  $\omega$  связано с компонентами тензора поворота (8.2). Поскольку  $P = o_{ji} \circ \hat{e}_i \circ \hat{e}_j$ ,  $P^\Gamma = o_{ij} \circ \hat{e}_i \circ \hat{e}_j$ , а векторы начального базиса  $\hat{e}_i$  неподвижны (со временем не меняются), то

$$\dot{P} = \dot{o}_{ji} \circ \hat{e}_i \circ \hat{e}_j, \quad \dot{P} \cdot P^\Gamma = \dot{o}_{ni} \circ o_{nj} \circ \hat{e}_i \circ \hat{e}_j, \\ \omega = -\frac{1}{2} \dot{o}_{ni} \circ o_{nj} \circ \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} o_{nj} \circ \dot{o}_{ni} \circ \hat{e}_k. \quad (8.10)$$

Отметим и формулы

$$(8.8) \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \dot{\mathbf{e}}_i \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \\ (8.8) \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}_i \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_j)_{\times} = -\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_i)_{\times} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_i \times \dot{\mathbf{e}}_i. \quad (8.11)$$

Comment\*

На самом деле последовательные повороты не складываются, а умножаются.

Можно ли складывать угловые скорости? — Да, потому что угол поворота в  $\dot{\mathcal{V}}$  бесконечно малый. — Но только при вращении вокруг неподвижной оси?

...

## § 9. Variations

Далее повсеместно будет использоваться сходная с дифференцированием операция варьирования. Не отсылая читателя к курсам вариационного исчисления, ограничимся представлениями о вариации  $\delta x$  величины  $x$  как о задаваемом нами бесконечно малом приращении, совместимом с ограничениями — связями (constraints). Если ограничений для  $x$  нет, то  $\delta x$  произвольна (случайна). Но когда  $x = x(y)$  — функция независимого аргумента  $y$ , следует считать  $\delta x = x'(y) \delta y$ .

Here we consider the exact differential of any set of position vectors  $\mathbf{r}_i$ , that are functions of other variables  $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$  and time  $t$ .

The actual displacement is the differential

$$d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} dq^j$$

\* Поворот тела вокруг какой-то оси представляет, казалось бы, вектор, ведь он имеет численное значение, равное углу поворота, и направление, совпадающее с направлением оси вращения, которое определяется по “правилу буравчика”. Однако два таких поворота не складываются как векторы, если только углы поворота не являются бесконечно малыми.

Now, imagine if we have an arbitrary path through the configuration space/manifold. This means it has to satisfy the constraints of the system but not the actual applied forces

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j$$

В записях с вариациями действуют те же правила, что и с дифференциалами. Если, например,  $\delta x$  и  $\delta y$  — вариации  $x$  и  $y$ , а  $u$  и  $v$  — конечные величины, то следует писать  $u\delta x + v\delta y = \delta w$ , а не  $w$  — даже когда  $\delta w$  не является вариацией величины  $w$ ; в этом случае  $\delta w$  это единое обозначение. Разумеется, при  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  и  $\partial_x v = \partial_y u$  ( $\frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial y} u$ ) сумма  $\delta w$  будет вариацией некой  $w$ .

Варьируя тождество (8.5), получим  $\delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = -\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{P}^\top$ . Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор  $\delta \mathbf{o}$  как  $\delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$ . Приходим к соотношениям

$$\delta \mathbf{P} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{P}, \quad \delta \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times, \quad (9.1)$$

аналогичным (8.8). Вектор бесконечно малого поворота  $\delta \mathbf{o}$  это не “вариация  $\mathbf{o}$ ”, но единый символ (в отличие от  $\delta \mathbf{P}$ ).

Малый поворот определяется вектором  $\delta \mathbf{o}$ , но конечный поворот тоже допускает(?) векторное представление

...

## § 10. Polar decomposition

Любой тензор второй сложности  $\mathbf{F}$  с  $\det F_{ij} \neq 0$  (не сингулярный) может быть представлен как

...



*Example.* Polar decompose tensor  $\mathbf{C} = C_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ , where  $\mathbf{e}_k$  are mutually orthogonal unit vectors of basis, and  $C_{ij}$  are tensor's components

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & 11 \\ 10 & -15 & 23 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O} = O_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{O}_2$$

$$O_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{S}_R, \quad \mathbf{O}^\top \cdot \mathbf{C} = \mathbf{S}_R$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_L \cdot \mathbf{O}, \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{O}^\top = \mathbf{S}_L$$

$$S_{Rij} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -10 \\ 5 & 0 & 25 \\ -10 & 25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$S_{Lij} = \begin{bmatrix} 104/5 & 47/5 & 5 \\ 47/5 & -129/5 & -10 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

...

## § 11. Tensors in oblique basis

До сих пор использовался базис из ортогональной тройки единичных векторов  $\mathbf{e}_i$ . Теперь рассмотрим базис из трёх любых линейно независимых (некомпланарных) векторов  $\mathbf{a}_i$ .

Декомпозиция (разложение) вектора  $\mathbf{v}$  по базису  $\mathbf{a}_i$  (рис. 4) — линейная комбинация

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i. \quad (11.1)$$

Соглашение о суммировании обретает новые положения: повторяющиеся (“немые”) индексы суммирования расположены на разных уровнях, а свободные индексы в обеих частях равенств — на одной высоте ( $a_i = b_{ij}c^j$  — корректно,  $a_i = b_{kk}$  — дважды ошибочно).

В таком базисе уже  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i = v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i \neq v^i$ , ведь тут  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k \neq \delta_{ik}$ .

Дополним же базис  $\mathbf{a}_i$  ещё другой тройкой векторов  $\mathbf{a}^i$ , называемых кобазисом или взаимным базисом, чтобы

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j &= \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{a}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{a}^i. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Это — основное свойство кобазиса. Ортонормированный (орто-нормальный) базис может быть определён как совпадающий со своим кобазисом:  $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ .

Для, к примеру, первого вектора кобазиса  $\mathbf{a}^1$

$$\begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \gamma \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 = 1/\gamma \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \\ \gamma = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 \end{cases}$$

Коэффициент  $\gamma$  получился равным объёму параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}_i$ ; в § 5 тот же объём был представлен как  $\sqrt{g}$ , и это неспроста, поскольку он совпадает с квадратным

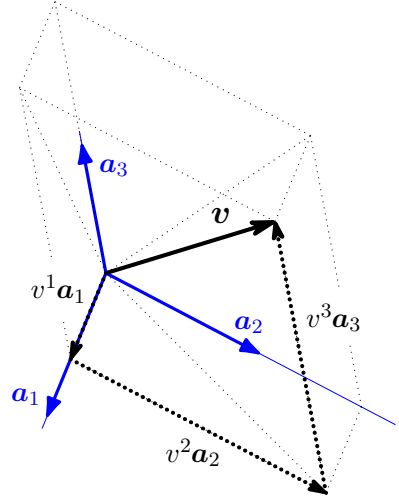


рисунок 4

корнем из грамиана  $g \equiv \det g_{ij}$  — определителя симметричной матрицы J. P. Gram'a  $g_{ij} \equiv \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ .

Доказательство напоминает вывод (5.7). “Тройное” произведение  $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k$  в каком-нибудь ортонормальном базисе  $\mathbf{e}_i$  вычислимо как детерминант (с “—” для “левой” базисной тройки) по строкам

$$\epsilon_{ijk} = \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

или по столбцам

$$\epsilon_{pqr} = \mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{a}_r = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}.$$

Произведение определителей  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr}$  равно определителю произведения матриц, элементы последнего — суммы вида  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_r \end{bmatrix};$$

$$i=p=1, j=q=2, k=r=3 \Rightarrow \epsilon_{123} \epsilon_{123} = \det_{i,j} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = \det_{i,j} g_{ij}.$$

Представляя  $\mathbf{a}^1$  и остальные векторы кобазиса суммой

$$2\sqrt{g} \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \overset{+\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{- \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2},$$

приходим к общей формуле

$$\mathbf{a}^i = \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{ijk} \mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k, \quad \sqrt{g} \equiv \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3. \quad (11.3)$$

Здесь  $e^{ijk}$  — по-прежнему символ Веблена ( $\pm 1$  или 0), и по (5.8)  $e^{ijk} e_{jkn} = 2\delta_n^i$ . Произведение  $\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k = \epsilon_{jkn} \mathbf{a}^n$ , а компоненты тензора Лёви-Чивиты  $\epsilon_{jkn} = \sqrt{g} e_{jkn}$ . Так что

$$\mathbf{a}^1 = 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{a}^2 = 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{a}^3 = 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2).$$

*Example.* Get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$\sqrt{g} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2;$$

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{e}_1 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 1 & 1 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = -\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 1 & 0 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ 1 & 0 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$$

and finally

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^3 = \frac{1}{2} (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

Имея кобазис, возможно не только разложить по нему любой вектор (рис. 5), но и найти коэффициенты разложения (11.1):

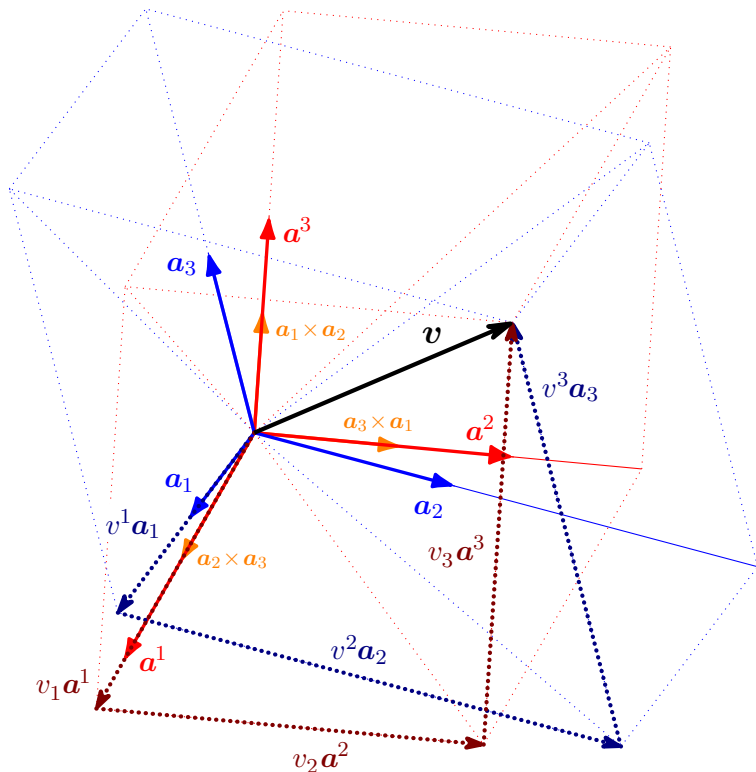
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{a}_i = v_i \mathbf{a}^i, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^i &= v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = v^i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Коэффициенты  $v_i$  называются ковариантными компонентами вектора  $\mathbf{v}$ , а  $v^i$  — его контравариантными\* компонентами.

Есть литература о тензорах, где различают ковариантные и контравариантные... векторы (и “ковекторы”). Не сто́ит вводить читателя в заблуждение: вектор-то один и тот же, просто при разложении по двум разным базисам у него два набора компонент.

От векторов перейдём к тензорам второй сложности. Имеем четыре комплекта диад:  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}_j$ . Согласующиеся

\* Потому что они меняются обратно (contra) изменению длин базисных векторов  $\mathbf{a}_i$ .



$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \sqrt{g} = 0.56274$$

$$1/\sqrt{g} = 1.77703$$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_i^j$$

рисунок 5  
 “Decomposition of vector in oblique basis”

коэффициенты в декомпозиции тензора называются его контравариантными, ковариантными и смешанными компонентами:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} &= B^{ij}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = B_{ij}\mathbf{a}^i\mathbf{a}^j = B_i^j\mathbf{a}_i\mathbf{a}^j = B_i^j\mathbf{a}^i\mathbf{a}_j, \\ B^{ij} &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j, \quad B_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \\ B_i^j &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \quad B_i^j = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Для двух видов смешанных компонент точка в индексе это просто свободное место: у  $B_{\cdot j}^i$  верхний индекс “ $i$ ” — первый, а нижний “ $j$ ” — второй.

Компоненты единичного (“метрического”) тензора

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}^k\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k\mathbf{a}^k = g_{jk}\mathbf{a}^j\mathbf{a}^k = g^{jk}\mathbf{a}_j\mathbf{a}_k: \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \equiv g_{ij}, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j \equiv g^{ij}; \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= g_{ij}\mathbf{a}^i\mathbf{a}^j \cdot g^{nk}\mathbf{a}_n\mathbf{a}_k = g_{ij}g^{jk}\mathbf{a}^i\mathbf{a}_k = \mathbf{E} \Rightarrow g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Вдобавок к (11.2) и (11.3) открылся ещё один способ найти векторы кобазиса — через матрицу  $g^{ij}$ , обратную матрице Грама  $g_{ij}$ . И наоборот:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk}\mathbf{a}_j\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk}\mathbf{a}_j\delta_k^i = g^{ji}\mathbf{a}_j, \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk}\mathbf{a}^j\mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk}\mathbf{a}^j\delta_i^k = g_{ji}\mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (11.7)$$

*Example.* Using reversed Gram matrix, get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det g_{ij} = 4,$$

$$\text{adj } g_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T,$$

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{\text{adj } g_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Using  $\mathbf{a}^i = g^{ij} \mathbf{a}_j$

$$\mathbf{a}^1 = g^{11} \mathbf{a}_1 + g^{12} \mathbf{a}_2 + g^{13} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^2 = g^{21} \mathbf{a}_1 + g^{22} \mathbf{a}_2 + g^{23} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^3 = g^{31} \mathbf{a}_1 + g^{32} \mathbf{a}_2 + g^{33} \mathbf{a}_3 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3.$$

...

Единичный тензор (unit tensor, identity tensor, metric tensor)

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A} = \text{not anymore } A_{jj}$$

Thus for, say, trace of some tensor  $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j$ :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A}$ ,

you have

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k = A_{ij} \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = A_{ij} g^{ij}$$

...

Тензор поворота (rotation tensor)

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}_i \hat{\mathbf{a}}^i = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{-\top}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \hat{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{\top}$$

$$\mathbf{P}^{\top} = \hat{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \hat{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \mathbf{P}^{-1}$$

...

... Характеристическое уравнение (7.2) быстро приводит к тождеству Гамильтона–Кэли (Cayley–Hamilton)

$$-B^3 + IB^2 - IIB + IIIE = {}^20. \quad (11.8)$$

## § 12. Tensor functions

In the popular conception of function  $y=f(x)$  as of mapping (morphism)  $f: x \mapsto y$  an input (argument)  $x$  and an output (result)  $y$  may be tensors of any complexity.

Рассмотрим хотя бы скалярную функцию двухвалентного тензора  $\varphi = \varphi(B)$ . В каждом базисе  $\mathbf{a}_i$  имеем функцию девяти числовых аргументов, компонент  $\varphi(B_{ij})$ ; при переходе к новому базису компоненты  $B_{ij}$  могут изменяться лишь так, чтобы сохранялся результат  $\varphi$ . Дифференцирование  $\varphi$  выглядит так:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} dB_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial B} \bullet \bullet d\mathbf{B}^\top, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial B} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j. \quad (12.1)$$

Тензор ...

...

Но согласно опять-таки (11.8)  $-B^2 + IB - IIE + IIIB^{-1} = {}^20$ , поэтому

...

Скалярная функция  $\varphi(B)$  называется изотропной, если она не чувствительна к повороту аргумента:

$$\varphi(B) = \varphi(\mathring{O} \bullet \mathring{B} \bullet \mathring{O}^\top) = \varphi(\mathring{B}) \quad \forall \mathring{O} = \mathbf{a}_i \mathring{a}^i = \mathbf{a}^i \mathring{a}_i = \mathbf{O}^{-\top}$$

для любого ортогонального тензора  $\mathbf{O}$  (тензора поворота, § 8).

Симметричный тензор  $B^S$  полностью определяется тройкой инвариантов и угловой ориентацией собственных осей (они же взаимно ортогональны, § 7). Ясно, что изотропная функция  $\varphi(B^S)$  симметричного аргумента является функцией лишь инвариантов  $I(B^S)$ ,  $II(B^S)$ ,  $III(B^S)$ ; она дифференцируется согласно (?), где транспонирование излишне.



### § 13. Tensor fields. Differentiation

“*но́ле*” — это тензор, меняющийся от точки к точке  
(переменный по координатам)

Путь в каждой точке некоторой области трёхмерного пространства известна величина  $q$ . Тогда имеем поле  $q = q(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки. Например, поле температуры в среде, поле давления в идеальной жидкости. Величина  $q$  может быть тензором любой сложности. Пример векторного поля — скорости частиц жидкости.

Не только при решении прикладных задач, но нередко и для “чистой теории” вместо аргумента  $\mathbf{r}$  используется какая-либо тройка криволинейных координат  $q^i$ . При этом  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ . Если непрерывно менять лишь одну координату из трёх, получается координатная линия. Каждая точка трёхмерного пространства лежит на пересечении трёх координатных линий (рис. 6).

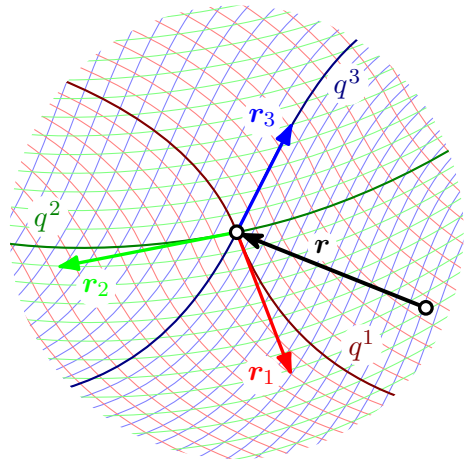


figure 6

Commonly used curvilinear coordinate systems include: rectangular (“cartesian”), spherical, and cylindrical coordinate systems. These coordinates may be derived from a set of cartesian coordinates by using a transformation that is locally invertible (a one-to-one map) at each point. This means that one can convert a point given in a cartesian coordinate system to its curvilinear coordinates and back.

...

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$$

...

Linearity

$$\partial_i(\lambda p + \mu q) = \lambda(\partial_i p) + \mu(\partial_i q) \quad (13.1)$$

“Product rule”

$$\partial_i(p \circ q) = (\partial_i p) \circ q + p \circ (\partial_i q) \quad (13.2)$$

...

Bivalent unit tensor (identity tensor, metric tensor), the one which is neutral (3.6) to dot product operation, can be represented as

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i = \underbrace{\mathbf{r}^i \partial_i}_{\nabla} \mathbf{r} = \nabla \mathbf{r}, \quad (13.3)$$

where appears differential “nabla” operator

$$\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i. \quad (13.4)$$

...

Gradient of cross product of two vectors, applying “product rule” (13.2) and (5.6) for any two vectors (partial derivative  $\partial_i$  of some vector by scalar coordinate  $q^i$  is a vector too):

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{r}^i \partial_i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{r}^i(\partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \partial_i \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{r}^i(\partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \partial_i \mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \\ &= \nabla \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \nabla \mathbf{b} \times \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

...

...

## § 14. Integral theorems

Для векторных полей известны интегральные теоремы Gauss'а и Stokes'а.

Gauss' theorem (divergence theorem) enables an integral taken over a volume to be replaced by one taken over the closed surface bounding that volume, and vice versa.

Stokes' theorem enables an integral taken around a closed curve to be replaced by one taken over *any* surface bounded by that curve. Stokes' theorem relates a line integral around a closed path to a surface integral over what is called a *capping surface* of the path.

Теорема Гаусса о дивергенции — про то, как заменить объёмный интеграл поверхностным (и наоборот). В этой теореме рассматривается поток (ef)flux вектора через ограничивающую объём  $V$  замкнутую поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$  с единичным вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$

$$\oint_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\mathcal{O} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV. \quad (14.1)$$

Объём  $V$  нарезается тремя семействами координатных поверхностей на множество бесконечно малых элементов. Поток через поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$  равен сумме потоков через края получившихся элементов. В бесконечной малости каждый такой элемент — маленький локальный дифференциальный кубик (параллелепипед). ... Поток вектора  $\mathbf{a}$  через грани малого кубика объёма  $dV$  есть  $\sum_{i=1}^6 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a} \mathcal{O}_i$ , а через сам этот объём поток равен  $\nabla \cdot \mathbf{a} dV$ .

Похожая трактовка этой теоремы есть, к примеру, в курсе Richard'а Feynman'а [90].

( рисунок с кубиками )

to dice — нарезать кубиками

small cube, little cube

локально ортонормальные координаты  $\boldsymbol{\xi} = \xi_i \mathbf{n}_i$ ,  $d\boldsymbol{\xi} = d\xi_i \mathbf{n}_i$ ,  
 $\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{n}_i \partial_i$

разложение вектора  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{n}_i$

Теорема Стокса о циркуляции выражается равенством

...

...

## § 15. Curvature tensors

The *Riemann curvature tensor* or *Riemann–Christoffel tensor* (after **Bernhard Riemann** and **Elwin Bruno Christoffel**) is the most common method used to express the curvature of Riemannian manifolds. It's a tensor field, it assigns a tensor to each point of a Riemannian manifold, that measures the extent to which the metric tensor is not locally isometric to that of “flat” space. The curvature tensor can also be defined for any pseudo-Riemannian manifold, or any manifold equipped with an “affine connection” (a choice of such connection makes a manifold look infinitesimally like affine “flat” space).

The *Ricci curvature tensor*, named after **Gregorio Ricci-Curbastro**, represents the amount by which the volume of a narrow conical piece of a small geodesic ball in a curved Riemannian manifold deviates from that of the standard ball in “flat” space.

~ from Wikipedia, the free encyclopedia

*“Мы рассматриваем трёхмерное пространство классической механики, а метрика у нас любая невырожденная без кручения”.*

Рассматривая операции тензорного анализа в криволинейных координатах, мы исходили из представления вектора-радиуса функцией этих координат:  $\mathbf{r}(q^i)$ . Этой зависимостью порождаются выражения векторов локального касательного базиса  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$  ( $\partial_i \equiv \partial/\partial q^i$ ), компонент  $g_{ij} \equiv \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$  и  $g^{ij} \equiv \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = g_{ij}^{-1}$  единичного “метрического” тензора  $\mathbf{E} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i$ , векторов локального взаимного кокасательного базиса  $\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j = \delta_j^i$ ,  $\mathbf{r}^i = g^{ij} \mathbf{r}_j$ , дифференциального набла-оператора Hamilton’a  $\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$ ,  $\mathbf{E} = \nabla \mathbf{r}$ , полного дифференциала  $d\xi = d\mathbf{r} \cdot \nabla \xi$ , частных производных касательного базиса (вторых частных производных  $\mathbf{r}$ )  $\mathbf{r}_{ij} \equiv \partial_i \partial_j \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_j$ , символов “связности” Христоффеля (Christoffel symbols)  $\Gamma_{ij}^k \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}^k$  и  $\Gamma_{ijk} \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k$ .

Представим теперь, что функция  $\mathbf{r}(q^k)$  не известна, но зато в каждой точке пространства определены шесть независимых элементов положительной симметричной метрической матрицы Грама  $g_{ij}(q^k)$ .

Билинейная форма

...

Поскольку шесть функций  $g_{ij}(q^k)$  происходят от векторной функции  $\mathbf{r}(q^k)$ , то между элементами  $g_{ij}$  существуют некие соотношения.

Expression  $d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \overbrace{\nabla}^E \mathbf{r} = \mathbf{r}_k dq^k$  — exact differential. Следовательно, вторые частные производные коммутируют:  $\partial_i \mathbf{r}_j = \partial_j \mathbf{r}_i$  ( $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$ ). Но это необходимое условие уже обеспечено симметрией  $g_{ij}$  (“connection”  $\nabla_i$ , её же часто называют “covariant derivative” — а символы Христоффеля это “components of connection” in local coordinates).

$$\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}^k \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{ij}$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \partial_i (v^j \mathbf{r}_j) = \mathbf{r}^i (\partial_i v^j \mathbf{r}_j + v^j \mathbf{r}_{ij})$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j \nabla_i v^j, \quad \nabla_i v^j \equiv \partial_i v^j + \Gamma_{in}^j v^n$$

$$\nabla \mathbf{r}_i = \mathbf{r}^k \partial_k \mathbf{r}_i = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{ki} = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_n \Gamma_{ki}^n, \quad \nabla_i \mathbf{r}_n = \Gamma_{in}^k \mathbf{r}_k$$

(Добавить) про симметрию  $\Gamma_{ijk} \dots$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^n g_{nk} &= \Gamma_{ijk} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ij} + \mathbf{r}_{ji}) \cdot \mathbf{r}_k + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{jk} - \mathbf{r}_{kj}) \cdot \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ik} - \mathbf{r}_{ki}) \cdot \mathbf{r}_j = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ji} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{jk} \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ki} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_{kj} \cdot \mathbf{r}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_i (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k) + \partial_j (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k) - \partial_k (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \end{aligned} \quad (15.1)$$

Все символы Христоффеля тождественно равны нулю лишь в ортонормальной (декартовой) системе. (А какие они для косоугольной?)

Пойдём дальше:  $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{r}_i = dq^k \partial_k \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{ik} dq^k$  — тоже полные дифференциалы. Поэтому  $\partial_i \partial_j \mathbf{r}_k = \partial_j \partial_i \mathbf{r}_k$  ( $\partial_i \mathbf{r}_{jk} = \partial_j \mathbf{r}_{ik}$ ), и трёхиндексный объект третьих частных производных

$$\mathbf{r}_{ijk} \equiv \partial_i \partial_j \partial_k \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_{jk} \quad (15.2)$$

симметричен по первому и второму индексам (а не только по второму и третьему). И тогда равен нулю <sup>4</sup> $\mathbf{0}$  следующий тензор четвёртой сложности — тензор кривизны Римана–Христоффеля

$${}^4\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{ijkn} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k \mathbf{r}^n, \quad \mathfrak{R}_{ijkn} \equiv (\mathbf{r}_{jik} - \mathbf{r}_{ijk}) \cdot \mathbf{r}_n. \quad (15.3)$$



The curvature tensor is given in terms of the connection  $\nabla$  as  $R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w$  where  $[u, v]$  is the Lie bracket of vector fields. Occasionally, the curvature tensor is defined with the opposite sign.

If  $u = \partial/\partial x^i$  and  $v = \partial/\partial x^j$  are coordinate vector fields then  $[u, v] = 0$  and therefore the formula simplifies to  $R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w$ .

The curvature tensor measures noncommutativity of the covariant derivative, and as such is the integrability obstruction for the existence of an isometry with “flat” space. The linear transformation  $w \mapsto R(u, v)w$  is also called the curvature transformation or endomorphism.

Выразим компоненты  $\mathfrak{R}_{ijkn}$  через метрическую матрицу  $g_{ij}$ . Начнём с дифференцирования локального кобазиса:

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_k = \delta_k^i \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{jk} = 0 \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{r}^k.$$

...

Равенство тензора Риччи нулю:  $\mathcal{R} = {}^2\mathbf{0}$  (в компонентах тут шесть уравнений  $\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_{ji} = 0$ ) — это достаточное условие интегрируемости (“совместности”, “compatibility”) при определении радиуса-вектора  $\mathbf{r}(q^k)$  по полю  $g_{ij}(q^k)$ .

## Bibliography

Существует немало книг, в которых рассматривается лишь аппарат тензорного исчисления [85, 86, 87, 88, 89]. Преобладает “индексный” подход — тензоры трактуются как матрицы компонент, преобразующиеся определённым путём. “Прямой” подход к тензорам излагается, например, в приложениях книг А. И. Лурье [33, 36]. Яркое описание теории векторных полей можно найти у Р. Фейнман’а [90]. Сведения о тензорном исчислении содержатся и в своеобразной и глубокой книге С. Truesdell’a [72].

## FUNDAMENTALS OF GENERIC MECHANICS

## § 1. Discrete system of particles

In generic mechanics, systems of particles (“pointlike masses”, “material points”) are considered. In a system of  $N$  particles each particle has mass  $m_k = \text{const}$  and motion function  $\mathbf{r}_k(t)$ . Function  $\mathbf{r}_k(t)$  is measured relative to some reference system — a solid body with a clock (fig. 7).

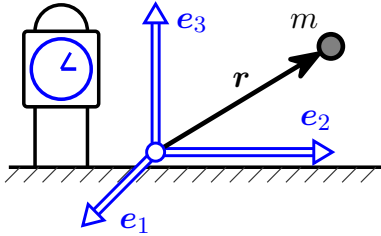


figure 7

Long time ago, some absolute space was accepted as a reference system: empty at first, and then filled with continuous elastic medium — the ether. Later it became clear that within the scope of classical mechanics any reference systems are usable, but preference is given to inertial systems, where a point moves without acceleration

( $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ ) in the absence of external interactions.

The measure of interaction in mechanics is a vector of force  $\mathbf{F}$ . In famous Newton's equation

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (1.1)$$

the right-hand side depends only on position, speed and explicitly presented time, as acceleration is directly proportional to force.

Remind theses of dynamics of a system of particles. Force acting on  $k$ -th particle

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)}, \quad (1.2)$$

where the first addend  $\mathbf{F}_k^{(e)}$  is external force, and the second is sum of internal ones ( $\mathbf{F}_{kj}^{(i)}$  is force from particle with number “ $j$ ”).

Принимая принцип действия и противодействия  $\mathbf{F}_{kj}^{(i)} = -\mathbf{F}_{jk}^{(i)}$ , получаем из (1.1) и (1.2) баланс импульса

$$\left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^\bullet = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.3)$$

Считая также, что внутренние взаимодействия между частицами центральны, то есть

$$\mathbf{F}_{kj}^{(i)} \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) = \mathbf{0},$$

приходим к балансу момента импульса

$$\left( \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^\bullet = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.4)$$

...

## § 2. Absolutely rigid undeformable solid body

### *Discrete and continual approaches*

To define position (location) of absolutely rigid (undeformable) body it's enough to choose some one of its points, to set location of this point, as well as angular orientation of body (fig. 8).

As adjectives the difference between “rigid” and “solid” is that rigid is stiff (rather than flexible) while solid is in the state of a solid (not fluid). As a noun solid is a substance in the fundamental state of matter that retains its size and shape without need of container (as opposed to a liquid or gas).

A rigid body is a solid body in which deformation is zero (or negligibly small, so small it can be neglected). The distance between any two points of a rigid body remains constant, regardless of

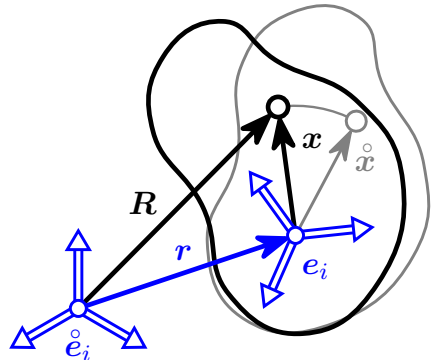


figure 8

external forces exerted on it. A rigid body is usually considered as a continuous distribution of mass (modeled as a continuous mass rather than as discrete particles).

В модели совершенно (абсолютно) жёсткого твёрдого тела расстояние между любыми двумя точками такого тела остаётся постоянным, не завися от внешних сил: деформации нет.

Совершенно жёсткое тело рассматривается либо как дискретная совокупность частиц, либо как непрерывное распределение массы (материальный континуум, сплошная среда).

Для радиуса-вектора некоторой точки тела имеем

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = x_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \quad \dot{\mathbf{x}} = x_i \dot{\mathbf{e}}_i$$

Компоненты  $x_i$  в совершенно жёстком теле не зависят от времени:  $x_i = \text{const}$ .

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{x}}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{x}}$$

$$x_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{P}} \cdot x_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{P}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$$

Вводя псевдовектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , ...

Пусть  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$  — ортогональная тройка базисных ортов, неподвижная относительно системы отсчёта.

Имея неподвижный базис  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$  и движущийся вместе с телом базис  $\mathbf{e}_i$ , ...

Если связать с телом тройку декартовых осей с ортами  $\mathbf{e}_i$  (этот базис движется вместе с телом), тогда угловая ориентация тела может быть задана тензором поворота  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{e}_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$ .

...

Движение тела полностью определяется функциями  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{P}(t)$ .

...

Переход от формул, содержащих суммирование по дискретным точкам, к формулам для сплошного тела осуществляется заменой масс частиц на массу  $\rho dV$  элемента объёма  $dV$  ( $\rho$  — плотность массы), и интегрированием по всему объёму тела.

...

Holonomic constraints are relations between position variables (and possibly time) which can be expressed as

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = 0$$

where  $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$  are  $n$  coordinates which describe the system. For example, the motion of a particle constrained to lie on sphere's surface is subject to a holonomic constraint, but if the particle is able to fall off the sphere under the influence of gravity, the constraint becomes non-holonomic. For the first case the holonomic constraint may be given by the equation:  $r^2 - a^2 = 0$ , where  $r$  is the distance from the centre of a sphere of radius  $a$ . Whereas the second non-holonomic case may be given by:  $r^2 - a^2 \geq 0$ .

Holonomic constraint depends only on coordinates and time. It does not depend on velocities or any higher time derivative. A constraint that cannot be expressed as shown above is nonholonomic.

Velocity-dependent constraints like

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0$$

are mostly not holonomic.

### § 3. Principle of virtual work

Виртуальным перемещением частицы с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_k$  называется вариация  $\delta\mathbf{r}_k$  — любое (неопределённое) бесконечно малое приращение  $\mathbf{r}_k$ , происходящее мгновенно и совместимое с ограничениями-связями. Если связей нет, то есть система свободна, тогда виртуальные перемещения  $\delta\mathbf{r}_k$  совершенно любые.

Связи бывают голономные (holonomic, или геометрические), связывающие только положения (перемещения) — это функции лишь координат и, возможно, времени

$$c(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{3.1}$$

— и неголономные (или дифференциальные), содержащие производные координат по времени:  $c(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0$  и не интегрируемые до геометрических связей.

Далее рассматриваем системы, все связи в которых — голономные. В системе с голономной связью виртуальные перемещения должны удовлетворять уравнению

$$\sum_k \frac{\partial c}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (3.2)$$

В несвободных системах все силы делятся на две группы: активные и реакции связей. Реакция  $\mathbf{N}_k$  действует со стороны всех материальных ограничителей на частицу “ $k$ ” и меняется в соответствии с уравнением (3.1) каждой связи. Принимается предложение об идеальности связей:

$$\sum_k \mathbf{N}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad — \quad (3.3)$$

работа реакций на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Принцип виртуальной работы выражается уравнением

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{F}_k$  — лишь активные силы, без реакций связей.

Дифференциальное вариационное уравнение (3.4) может показаться тривиальным следствием закона Ньютона (1.1) и условия идеальности связей (3.3). Однако содержание (3.4) несравненно обширнее. Известно — и читатель вскоре это увидит, — что принцип (3.4) может быть положен в основу механики [96]. Различные модели упругих тел, описываемые в этой книге, построены с опорой на этот принцип.

Для примера рассмотрим совершенно жёсткое (недеформируемое) твёрдое тело.

...

Проявилась замечательная особенность (3.4): это уравнение эквивалентно системе такого порядка, каково число степеней свободы системы, то есть сколько независимых вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  мы имеем. Если в системе  $N$  точек есть  $m$  связей, то число степеней свободы  $n = 3N - m$ .

...

#### § 4. Balance of momentum, rotational momentum, and energy

Эти фундаментальные законы баланса можно связать со свойствами пространства и времени [97]. Сохранение импульса (количества движения) в изолированной\* системе выводится из однородности пространства (*при любом параллельном переносе — трансляции — замкнутой системы как целого свойства этой системы не меняются*). Сохранение момента импульса — следствие изотропии пространства (*свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте этой системы как целого*). Энергия же изолированной системы сохраняется, так как время однородно (энергия  $E \equiv T(q, \dot{q}) + \Pi(q)$  такой системы не зависит явно от времени).

Фундаментальные законы баланса можно вывести из принципа виртуальной работы (3.4). Перепишем его в виде

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k^{(e)} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k + \delta W^{(i)} = 0, \quad (4.1)$$

где выделены внешние силы  $\mathbf{F}_k^{(e)}$  и виртуальная работа внутренних сил  $\delta W^{(i)} = \sum_k \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{r}_k$ .

Предполагается, что внутренние силы не совершают работы на виртуальных перемещениях тела как жёсткого целого ( $\delta \boldsymbol{\rho}$  и  $\delta \mathbf{o}$  — произвольные постоянные векторы, определяющие трансляцию и поворот)

$$\delta \mathbf{r}_k = \delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k, \quad \delta \boldsymbol{\rho} = \text{const}, \quad \delta \mathbf{o} = \text{const} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (4.2)$$

Предпосылки-соображения для этого предположения таковы.

Первое — для случая упругих (потенциальных) внутренних сил. При этом  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$  — вариация потенциала с противоположным знаком. Достаточно очевидно, что  $\Pi$  меняется лишь при деформации.

\* Изолированная (замкнутая) система — это система частиц, взаимодействующих друг с другом, но ни с какими другими телами.

Второе соображение — в том, что суммарный вектор и суммарный момент внутренних сил равен нулю

$$\sum \dots$$

...

Принимая (4.2) и подставляя в (4.1) сначала  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \boldsymbol{\rho}$  (трансляция), а затем  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k$  (поворот), получаем баланс импульса (...) и баланс момента импульса (...).

...

## § 5. Hamilton's principle and Lagrange's equations

Вариационное уравнение (3.4) удовлетворяется в любой момент времени. Проинтегрируем его\* по какому-либо промежутку  $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T + \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (5.1)$$

Без ущерба для общности можно принять  $\delta \mathbf{r}_k(t_1) = \delta \mathbf{r}_k(t_2) = \mathbf{0}$ , тогда внеинтегральный член исчезает.

Вводятся обобщённые координаты  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$  — число степеней свободы). Векторы-радиусы становятся функциями вида  $\mathbf{r}_k(q_i, t)$ , тождественно удовлетворяющими уравнениям связей (3.1). Если связи стационарны, то есть (3.1) не содержат  $t$ , то остаётся  $\mathbf{r}_k(q_i)$ . Кинетическая энергия превращается в функцию  $T(q_i, \dot{q}_i, t)$ , где явно входящее  $t$  характерно лишь для нестационарных связей.

$$\begin{aligned} * \left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) &= \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \underbrace{\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k}_{\delta T} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$



Весьма существенно понятие обобщённых сил  $Q_i$ . Они вводятся через выражение виртуальной работы

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_i Q_i \delta q_i, \quad Q_i \equiv \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \quad (5.2)$$

Стоит подчеркнуть происхождение обобщённых сил через работу. Установив набор обобщённых координат системы, следует сгруппировать приложенные силы  $\mathbf{F}_k$  в комплексы  $Q_i$ .

Если силы потенциальны с энергией  $\Pi = \Pi(q_i, t)$ , то

$$\sum_i Q_i \delta q_i = -\delta \Pi, \quad Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \quad (5.3)$$

Явное присутствие  $t$  может быть при нестационарности связей или зависимости физических полей от времени.

...

Известны уравнения Lagrange'а не только второго, но и первого рода. Рассмотрим их ради методики вывода, много раз применяемой в этой книге.

При наличии связей (3.1) равенство  $\mathbf{F}_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$  не следует из вариационного уравнения (3.4), ведь тогда виртуальные перемещения  $\delta \mathbf{r}_k$  не независимы. Каждое из  $m$  ( $m$  — число связей) условий для вариаций (3.2) умножим на некий скаляр  $\lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) и добавим к (3.4):

$$\sum_{k=1}^N \left( \mathbf{F}_k + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (5.4)$$

Среди  $3N$  компонент вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  зависимых  $m$ . Но столько же и множителей Лагранжа: подберём  $\lambda_\alpha$  так, чтобы коэффициенты (??какие?) при зависимых вариациях обратились в нуль. Но при остальных вариациях коэффициенты (??) также должны быть нулями из-за независимости. Следовательно, все выражения в скобках  $(\dots)$  равны нулю — это и есть уравнения Лагранжа первого рода.

Поскольку для каждой частицы

...

## § 6. Statics

Рассмотрим систему со стационарными (постоянными во времени) связями при статических (не меняющихся со временем) активных силах  $\mathbf{F}_k$ . В равновесии  $\mathbf{r}_k = \text{const}$ , и формулировка принципа виртуальной работы следующая:

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = Q_i = 0. \quad (6.1)$$

Существенны обе стороны этого положения: и вариационное уравнение, и равенство нулю обобщённых сил.

Соотношения (6.1) — это самые общие уравнения статики. В литературе распространено узкое представление об уравнениях равновесия как балансе сил и моментов. Но при этом нужно понимать, что набор уравнений равновесия точно соответствует обобщённым координатам. Resultant force and resultant couple в уравнениях равновесия фигурируют\*, поскольку у системы есть степени свободы трансляции и поворота. Огромная популярность сил и моментов связана не столько с известностью статики совершенно жёсткого твёрдого тела, но с тем, что виртуальная работа внутренних сил на перемещениях системы как жёсткого целого равна нулю в любой среде.

Пусть в системе действуют два вида сил: потенциальные с энергией от обобщённых координат  $\Pi(q_i)$  и дополнительные внешние  $\mathring{Q}_i$ . Из (6.1) следуют уравнения равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \mathring{Q}_i, \quad (6.2)$$

$$d\Pi = \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} dq_i = \sum_i \mathring{Q}_i dq_i.$$

Здесь содержится нелинейная в общем случае задача статики о связи положения равновесия  $q_i$  с нагрузками  $\mathring{Q}_i$ .

\* Since describing composition of any system of forces, acting on the same absolutely rigid body, into a single force and a single couple (about a chosen point) in the book “Éléments de statique” by Louis Poincot.

В линейной системе с квадратичным потенциалом вида

$$\Pi = \frac{1}{2} C_{ik} q_k q_i \quad \sum_k C_{ik} q_k = \overset{\circ}{Q}_i. \quad (6.3)$$

Тут фигурируют матрица жёсткости  $C_{ik}$  и столбцы координат  $q_k$  и нагрузок  $\overset{\circ}{Q}_i$ .

Сказанное возможно обобщить и на континуальные линейные упругие среды.

Матрица жёсткости  $C_{ik}$  обычно бывает положительной (такое свойство конструкций). Тогда  $\det C_{ik} > 0$ , линейная алгебраическая система (6.3) однозначно разрешима, а решение её можно заменить минимизацией квадратичной формы

$$\mathcal{D}(q_j) \equiv \Pi - \sum_i \overset{\circ}{Q}_i q_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} q_i C_{ik} q_k - \sum_i \overset{\circ}{Q}_i q_i \rightarrow \min. \quad (6.4)$$

Бывает однако, что конструкция неудачно спроектирована, тогда матрица жёсткости сингулярна (необратима) и  $\det C_{ik} = 0$  (или же весьма близок к нулю — nearly singular матрица с  $\det C_{ik} \approx 0$ ). Тогда решение линейной проблемы статики (6.3) существует лишь при ортогональности столбца нагрузок  $\overset{\circ}{Q}_i$  всем линейно независимым решениям однородной сопряжённой системы

...

Известные теоремы статики линейно **упругих** систем легко доказываются в случае конечного числа степеней свободы. Теорема Клареуто́на выражается равенством

...

Reciprocal work theorem (“работа  $W_{12}$  сил первого варианта на перемещениях от сил второго равна работе  $W_{21}$  сил второго варианта на перемещениях от сил первого”) мгновенно выводится из (6.3):

(...)

Тут существенна симметрия матрицы жёсткости  $C_{ij}$ , то есть консервативность системы.

...

Но вернёмся к проблеме (6.2), иногда называемой теоремой Lagrange’a. Её можно обратить преобразованием Лежандра Legendre (involution) transform(ation):

$$\begin{aligned}
 d\left(\sum_i \dot{Q}_i q_i\right) &= \sum_i d\left(\dot{Q}_i q_i\right) = \sum_i \left(q_i d\dot{Q}_i + \dot{Q}_i dq_i\right), \\
 d\left(\sum_i \dot{Q}_i q_i\right) - \overbrace{\sum_i \dot{Q}_i dq_i}^{d\Pi} &= \sum_i q_i d\dot{Q}_i, \\
 d\left(\sum_i \dot{Q}_i q_i - \Pi\right) &= \sum_i q_i d\dot{Q}_i = \sum_i \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \dot{Q}_i} d\dot{Q}_i; \\
 q_i &= \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \dot{Q}_i}, \quad \hat{\Pi}(\dot{Q}_i) = \sum_i \dot{Q}_i q_i - \Pi.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Это теорема Castigliano,  $\hat{\Pi}$  называется дополнительной энергией. В линейной системе (6.3)  $\Rightarrow \hat{\Pi} = \Pi$ . Теорема (6.5) бывает очень полезна — когда легко находится  $\hat{\Pi}(\dot{Q}_i)$ . Встречаются так называемые статически определимые системы, в которых все внутренние силы удаётся найти лишь из баланса сил и моментов. Для них (6.5) эффективна.

В отличие от линейной задачи (6.3), нелинейная задача (6.2) может не иметь решений вовсе или же иметь их несколько.

...

Разговор о статике в общей механике закончим принципом д’Аламбера (d’Alembert’s principle): уравнения динамики отличаются от статических лишь наличием дополнительных “фиктивных сил инерции”  $m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$ . Принцип д’Аламбера очевиден, но бездумное его применение может привести к ошибкам. Например, уравнения вязкой жидкости в статике и динамике отличаются не только лишь инерционными членами. Для упругих же сред принцип д’Аламбера полностью справедлив.

## § 7. Mechanics of relative motion

До сих пор не ставился вопрос о системе отсчёта, всё рассматривалось в некой “абсолютной” системе или одной из инерциальных систем (§ 1). Теперь представим себе две системы: “абсолютную” и подвижную

...

## § 8. Small oscillations (vibrations)

Если статика линейной системы описывается уравнением (6.3), то в динамике имеем

$$\sum_k (A_{ik} \ddot{q}_k + C_{ik} q_k) = \ddot{Q}_i(t), \quad (8.1)$$

где  $A_{ik}$  — симметричная и положительная “матрица кинетической энергии”.

Изучение колеблющейся системы чаще всего начинают с нормальных колебаний (гармоник) — собственных (свободных, без воздействий извне) синусоидальных колебаний вида  $q_k(t) = \hat{q}_k \sin \omega_k t$ . Постоянные  $\hat{q}_k$  — формы (или моды) колебаний,  $\omega_k$  — собственные частоты. Этот набор находится из задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_i = 0, \quad \ddot{q}_k &= -\omega_k^2 \hat{q}_k \sin \omega_k t, \quad (8.1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_k (C_{ik} - A_{ik} \omega_k^2) \hat{q}_k \sin \omega_k t &= 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

...

## Bibliography

В длинном списке книг по общей механике можно найти труды не только механиков-профессионалов [91, 92, 98, 99, 100], но и физиков-теоретиков широкой ориентации [97, 93]. Интересен курс Ф.Р. Гантмахера [96] с компактным, но полным изложением основ.

# NONLINEAR ELASTIC MOMENTLESS CONTINUUM

## § 1. Model of continuum. Descriptions of processes

Вещества имеют дискретное строение, и модель системы частиц с массами  $m_k$  и радиусами-векторами  $\mathbf{R}_k(t)$  может показаться подходящей, несмотря на невообразимое число степеней свободы — тем более что объёмы памяти и быстродействие компьютеров характеризуются тоже астрономическими числами.

И всё же предпочтение стоит отдать качественно иной модели — модели сплошной среды (материального континуума), в которой масса распределена по объёму непрерывно: в объёме  $\mathcal{V}$  содержится масса

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}, \quad (1.1)$$

where  $\rho$  is volumetric mass density.

С непрерывным распределением массы связано лишь первое и простое представление о сплошной среде как множестве (пространстве) материальных точек. Возможны и более сложные модели, в которых частицы обладают степенями свободы не только трансляции, но и поворота, внутренней деформации и другими. Отметив, что подобные модели притягивают всё больший интерес, в этой главе ограничимся классическим представлением о среде как состоящей из простых точек.

В каждый момент времени  $t$  деформируемое тело занимает некий объём  $V$  пространства. Вводя какие-либо криволинейные координаты  $q^i$ , считаем  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^i, t)$ .

Но может быть эффективно и иное описание — пространственное (или эйлерово), при котором рассматриваются процессы не в частицах среды, а в точках пространства. Полагая, например,  $\rho = \rho(\mathbf{R}, t)$ , мы следим за происходящим в этом месте и не смущаемся непрерывным уходом и приходом частиц.

## § 2. Differentiation

Имея зависимости  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ , вводится базис  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$  ( $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$ ), взаимный базис  $\mathbf{r}^i$  и оператор Hamilton'a

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i = \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{r} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}, \quad \overset{\circ}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^i \partial_i, \quad (2.1)$$

так что  $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \varphi$ .

Если

...

Пусть  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — какое-либо поле. Найдём скорость изменения интеграла по объёму

$$\Upsilon \equiv \int_{\mathcal{V}} \rho \varphi d\mathcal{V}$$

(“ $\varphi$  есть  $\Upsilon$  на единицу массы”). Кажущееся сложным вычисление  $\dot{\Upsilon}$  ( $\mathcal{V}$  деформируется) оказывается элементарным благодаря (??):

$$\Upsilon = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \varphi d\overset{\circ}{\mathcal{V}} \Rightarrow \dot{\Upsilon} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \dot{\varphi} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\varphi} d\mathcal{V}. \quad (2.2)$$

Не сто́ит противопоставлять материальное и пространственное описание. Далее будут использоваться оба в зависимости от ситуации.

### § 3. Motion gradient

Having motion function  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^i, t)$ ,  $\mathbf{r}(q^i) \equiv \mathbf{R}(q^i, 0)$ , differential “nabla” operators  $\nabla \equiv \mathbf{R}^i \partial_i$ ,  $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$ , and looking at relations for certain infinitesimal vector in two configurations, current  $d\mathbf{R}$  and initial  $d\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= d\mathbf{r} \cdot \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}}_{\substack{\mathbf{F}^\top \\ \mathbf{r}^i \mathbf{R}_i}} = \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top}_{\substack{\mathbf{F} \\ \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i}} \cdot d\mathbf{r} \\ d\mathbf{r} &= d\mathbf{R} \cdot \underbrace{\nabla \mathbf{r}}_{\substack{\mathbf{R}^i \mathbf{r}_i \\ \mathbf{F}^{-\top}}} = \underbrace{\nabla \mathbf{r}^\top}_{\substack{\mathbf{r}_i \mathbf{R}^i \\ \mathbf{F}^{-1}}} \cdot d\mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.1)$$

here comes to mind to introduce the “motion gradient”<sup>\*</sup>, picking one of these tensor multipliers for it:  $\mathbf{F} \equiv \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top = \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i$ .

...

For cartesian coordinates with orthonormal basis  $\mathbf{e}_i = \text{const}$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= X_i(t) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r} = X_i(0) \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}_i, \quad x_i \equiv X_i(0), \\ \overset{\circ}{\nabla} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \overset{\circ}{\partial}_i, \quad \nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial X_i} = \mathbf{e}_i \partial_i, \\ \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \frac{\partial (X_j \mathbf{e}_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \overset{\circ}{\partial}_i X_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \\ \nabla \mathbf{r} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_i} = \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \partial_i x_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

...

По теореме о полярном разложении (§ 1.10), градиент движения разложим на тензор поворота  $\mathbf{O}$  и симметричные положительные тензоры  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ :

...

Когда нет поворота ( $\mathbf{O} = \mathbf{E}$ ), тогда  $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$ .

...

<sup>\*</sup> Tensor  $\mathbf{F}$  doesn't well suit its more popular name “deformation gradient”, because it describes not only the deformation itself, but also the rotation of a body as a whole without deformation.



## § 4. Tensors and measures of deformation

Градиент движения  $\mathbf{F}$  характеризует и деформацию тела, и поворот тела как целого. “Чистыми” же тензорами деформации являются  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ , а также их вторые степени

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^2 &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}, \\ \mathbf{V}^2 &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \equiv \mathbf{\Phi}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Это тензор деформации Green’a (или правый тензор Cauchy–Green’a)  $\mathbf{G}$  и тензор деформации Finger’a (или левый тензор Cauchy–Green’a)  $\mathbf{\Phi}$ . Преимущество  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{\Phi}$  перед  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  — алгебраическая связь с  $\mathbf{F}$ , без извлечения корня.

Компоненты  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{\Phi}$ :

...

### *The right Cauchy–Green deformation tensor*

In 1839 (??publication), George Green introduced a deformation tensor known as the right Cauchy–Green deformation tensor or Green’s deformation tensor, defined as

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \text{or} \quad G_{ij} = F_{k'i} F_{k'j} = \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_i} \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_j}.$$

This tensor gives the “square” of local change in distances due to deformation:  $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{R}$

Invariants of  $\mathbf{G}$  are often used in expressions for strain energy density. The most popular invariants are

$$\begin{aligned} \text{I}(\mathbf{G}) &\equiv \text{tr } \mathbf{G} = G_{ii} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ \text{II}(\mathbf{G}) &\equiv \frac{1}{2} (G_{jj}^2 - G_{ik} G_{ki}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ \text{III}(\mathbf{G}) &\equiv \det \mathbf{G} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

where  $\lambda_i$  are stretch ratios for unit fibers that are initially oriented along directions of eigenvectors of the right stretch tensor  $\mathbf{U}$ .

### *The inverse of Green’s deformation tensor*

It is the inverse of the right Cauchy–Green deformation tensor

$${}^2\mathbf{f} = \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \quad \text{or} \quad f_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_{k'}} \frac{\partial x_j}{\partial X_{k'}}$$

The International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC) recommends that this tensor be called the Finger tensor. However, that isn't universally accepted in applied mechanics.

*The left Cauchy–Green or Finger deformation tensor*

Reversing the order of multiplication in the formula for the right Green–Cauchy deformation tensor leads to the left Cauchy–Green deformation tensor which is defined as:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top = \mathbf{V}^2 \quad \text{or} \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k^\circ} \frac{\partial X_j}{\partial x_k^\circ}$$

The left Cauchy–Green deformation tensor is often called the Finger deformation tensor, named after Josef Finger (1894).

Invariants of  $\mathbf{\Phi}$  are also used in expressions for strain energy density functions. The conventional invariants are defined as

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \Phi_{ii} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &\equiv \frac{1}{2} (\Phi_{ii}^2 - \Phi_{jk} \Phi_{kj}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3 &\equiv \det \mathbf{\Phi} = J^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

where  $J \equiv \det \mathbf{F}$  is determinant of the motion gradient.

*The Cauchy deformation tensor*

Earlier in 1828 ([?publication](#)), Augustin Louis Cauchy introduced deformation tensor defined as the inverse of the left Cauchy–Green deformation tensor,  $\mathbf{\Phi}^{-1}$ . This tensor is also called Piola tensor and Finger tensor in rheology and fluid dynamics literature.

$${}^2\mathbf{c} = \mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{or} \quad c_{ij} = \frac{\partial x_k^\circ}{\partial X_i} \frac{\partial x_k^\circ}{\partial X_j}$$

*Finite strain tensors*

The concept of *strain* is used to evaluate how much a given displacement differs locally from a body displacement as a whole (a “rigid body displacement”). One of such strains for large deformations is the *Green strain tensor*, also called *Green–Lagrangian strain tensor* or *Green–Saint-Venant strain tensor*, defined as

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) \quad \text{or} \quad C_{KL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_j}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_L} - \delta_{KL} \right)$$

or as function of the displacement gradient tensor

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^\top + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top \cdot \nabla \mathbf{u}]$$

or

$$C_{KL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_K}{\partial X_L} + \frac{\partial u_L}{\partial X_K} + \frac{\partial u_M}{\partial X_K} \frac{\partial u_M}{\partial X_L} \right)$$

The Green–Lagrangian strain tensor is a measure of how much  $\mathbf{G}$  differs from  $\mathbf{E}$ .

The *Almansi strain tensor*, referenced to the deformed configuration (Eulerian description), is defined as

$${}^2\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \Phi^{-1}) \quad \text{or} \quad e_{rs} = \frac{1}{2} \left( \delta_{rs} - \frac{\partial X_M}{\partial x_r} \frac{\partial X_M}{\partial x_s} \right)$$

or as function of the displacement gradients

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

### *Seth–Hill family of abstract strain tensors*

B. R. Seth was the first to show that the Green and Almansi strain tensors are special cases of a more abstract strain measure. The idea was further expanded upon by Rodney Hill in 1968 (publication??). The Seth–Hill family of strain measures (also called Doyle–Ericksen tensors) is expressed as

$$\mathbf{D}_{(m)} = \frac{1}{2m} (\mathbf{U}^{2m} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{G}^m - \mathbf{E})$$

For various values of  $m$  it gives

$$\mathbf{D}_{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) \quad \text{Green strain tensor}$$

$$\mathbf{D}_{(1/2)} = \mathbf{U} - \mathbf{E} = \mathbf{G}^{1/2} - \mathbf{E} \quad \text{Biot strain tensor}$$

$$\mathbf{D}_{(0)} = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G} \quad \text{logarithmic strain, Hencky strain}$$

$$\mathbf{D}_{(-1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2}) \quad \text{Almansi strain}$$

The second-order approximation of these tensors is

$$\mathbf{D}_{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u})^\top \cdot \nabla \mathbf{u} - (1 - m) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

where  $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S$  is the infinitesimal strain tensor.

Many other different definitions of measures  $\mathbf{D}$  are possible, provided that they satisfy these conditions:

- ✓  $\mathbf{D}$  vanishes for any movement of a body as a rigid whole
- ✓ dependence of  $\mathbf{D}$  on displacement gradient tensor  $\nabla \mathbf{u}$  is continuous, continuously differentiable and monotonic
- ✓ it's desired that  $\mathbf{D}$  reduces to the infinitesimal strain tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  when  $\nabla \mathbf{u} \rightarrow 0$

For example, tensors from the set

$$\mathbf{D}^{(n)} = (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{-n})/2n$$

aren't from the Seth–Hill family, but for any  $n$  they have the same 2nd-order approximation as Seth–Hill measures with  $m = 0$ .

**Wikipedia, the free encyclopedia** — Finite strain theory

...

Как отмечалось в § 1.10, тензоры

...

## § 5. Velocity field

Этот вопрос рассматривается во всех курсах механики сплошной среды, но в теории упругости можно обойтись и без него. Среди разных моделей материального континуума упругое твёрдое тело выделяется тем, что полная система уравнений для него выводится единой логически стройной процедурой (о ней — ниже). Но чтобы читатель лучше увидел преимущества этой процедуры, мы пока следуем традиционным для механики сплошной среды путём.

Итак, имеем поле скоростей в пространственном описании

...

Для упругих сред дискуссия о поворотах не нужна, истинное представление появляется в ходе логически стройных выкладок без добавочных гипотез.

## § 6. Area vector. Surface change

Take an infinitesimal surface. The area vector by length is equal to surface's area and is directed along normal to surface.

In the reference (undeformed, original, initial, “material”) configuration, the area vector can be represented as  $\mathbf{n}do$ . Surface's area  $do$  is infinitely small, and  $\mathbf{n}$  is unit normal vector.

In the present (actual, deformed, current, “spatial”) configuration, the same surface has area vector  $\mathbf{N}dO$ .

With enough precision these infinitesimal surfaces are parallelograms

$$\begin{aligned}\mathbf{n}do &= d\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j dq^i dq^j, \\ \mathbf{N}dO &= d\mathbf{R}' \times d\mathbf{R}'' = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j dq^i dq^j.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Applying volume transformation (??), we have

$$\begin{aligned}d\mathcal{V} &= Jd\mathcal{V}^\circ \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}_k = J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}_k \mathbf{R}^k &= J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k \mathbf{R}^k \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j = J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{F}^{-1}.\end{aligned}$$

Hence through (6.1) we come to the relation

$$\mathbf{N}dO = J\mathbf{n}do \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (6.2)$$

called Nanson's formula.

## § 7. Forces in continuum. Cauchy stress tensor

Поскольку частицы этой модели континуума — точки лишь с трансляционными степенями свободы, то среди обобщённых сил нет моментов.

На элементарный объём  $d\mathcal{V}$  действует некая сила  $\rho \mathbf{f} d\mathcal{V}$ ; если  $\mathbf{f}$  — массовая сила (действующая на единицу массы), то  $\rho \mathbf{f}$  — объёмная. Такие силы происходят от силовых полей, например: силы тяжести, силы инерции в неинерциальных системах отсчёта, электромагнитные силы при наличии в среде зарядов и токов.

На элементарную поверхность  $dO$  действует поверхностная сила  $\mathbf{p}dO$ . Это может быть давление, трение, электростатическая сила при сосредоточенных на поверхности зарядах.

В сплошной среде, как в любой механической системе, различают силы внешние и внутренние. Со времён Euler'a и Cauchy считают, что внутренние силы в среде — это поверхностные силы близкодействия: на любой бесконечно малой площадке  $NdO$  внутри тела действует сила  $\boldsymbol{\tau}_N dO$ . Уточним: действует с той стороны, куда направлена нормаль  $\mathbf{N}$ .

Вектор  $\boldsymbol{\tau}_N$  называется вектором напряжения на площадке с нормалью  $\mathbf{N}$ . Согласно закону о действии и противодействии,  $\boldsymbol{\tau}_N$  меняет знак, если  $\mathbf{N}$  направить в противоположную сторону. (В некоторых книгах последнее утверждение доказывается через баланс импульса для бесконечно короткого цилиндра с основаниями  $NdO$  и  $-NdO$ .)

В каждой точке среды имеем бесконечно много векторов  $\boldsymbol{\tau}_N$ , поскольку через точку проходят площадки любой ориентации. Но оказывается, множество всех  $\boldsymbol{\tau}_N$  определяется одним тензором второго ранга — тензором напряжения. Рассмотрим содержащийся во многих книгах вывод этого утверждения.

На поверхности элементарного тетраэдра ...

...

## § 8. Balance of momentum and rotational momentum

Рассмотрим какой-либо конечный объём  $\mathcal{V}$  среды, ограниченный поверхностью  $O(\partial\mathcal{V})$ . Формулировка баланса импульса такова

$$\left( \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} dV \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} dV + \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \overbrace{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}}^{\boldsymbol{\tau}_N} dO. \quad (8.1)$$

Импульс слева продифференцируем как в (2.2), а поверхностный интеграл справа превратим в объёмный по теореме о дивергенции. Получим

$$\int_{\mathcal{V}} \left( \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) \right) dV = \mathbf{0}.$$

Но объём  $V$  произволен, поэтому равно нулю подынтегральное выражение. Приходим к уравнению баланса импульса в локальной (дифференциальной) форме

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}. \quad (8.2)$$

...

Переходим к балансу момента импульса. Интегральная формулировка:

$$\left( \int_V \mathbf{R} \times \rho \mathbf{v} dV \right)^{\cdot} = \int_V \mathbf{R} \times \rho \mathbf{f} dV + \oint_{O(\partial V)} \mathbf{R} \times (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) dO. \quad (8.3)$$

Дифференцируя левую часть ( $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}}$ )

$$\left( \int_V \mathbf{R} \times \rho \dot{\mathbf{R}} dV \right)^{\cdot} = \int_V \mathbf{R} \times \rho \ddot{\mathbf{R}} dV + \int_V \dot{\mathbf{R}} \times \rho \dot{\mathbf{R}} dV,$$

применяя теорему о дивергенции к поверхностному интегралу

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) &= -(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{R} = -\mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \oint_{O(\partial V)} \mathbf{R} \times (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) dO = - \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) dV \end{aligned}$$

...

## § 9. Eigenvalues of Cauchy stress tensor

Как и любой симметричный тензор,  $\boldsymbol{\tau}$  имеет три вещественных собственных числа  $\sigma_i$ , называемых главными напряжениями (principal stresses), а также ортогональную тройку собственных векторов единичной длины  $\mathbf{e}_i$ . In representation  $\boldsymbol{\tau} = \sum \sigma_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$  most often indices are sorted as  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , а тройка  $\mathbf{e}_i$  — “правая”.

Известна теорема о кругах Мора (Mohr's circles)\*

...

\* Mohr's circles, named after Christian Otto Mohr, is a two-dimensional graphical representation of transformation for the Cauchy stress tensor.

Чтобы замкнуть систему уравнений модели сплошной среды, нужно добавить определяющие отношения — уравнения состояния, связывающие напряжение с деформацией (и другие необходимые связи). Однако, для упругой среды такой длинный путь построения модели излишен, в чём читатель и убедится далее.

## § 10. Principle of virtual work (without Lagrange multipliers)

According to the principle of virtual work for some finite volume of continuum

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} + \delta W^{(i)}) d\mathcal{V} + \oint_{O(\partial \mathcal{V})} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (10.1)$$

Here  $\delta W^{(i)}$  is work of internal forces per volume unit in current configuration;  $\mathbf{f}$  is mass force, with dynamics  $(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}})$ ;  $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}$  is surface force.

Applying the divergence theorem to surface integral, using

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^T$$

and randomness of  $\mathcal{V}$ , we get the local differential edition of (10.1)

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{R} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^T + \delta W^{(i)} = 0. \quad (10.2)$$

When a body virtually moves as a rigid whole, the work of internal forces nullifies

$$\delta \mathbf{R} = \delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R}, \quad \delta \boldsymbol{\rho} = \mathbf{const}, \quad \delta \mathbf{o} = \mathbf{const} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (10.3)$$

Assuming  $\delta \mathbf{o} = \mathbf{0}$ ,  $\delta \mathbf{R} = \mathbf{const}$  (just translation)  $\Rightarrow \nabla \delta \mathbf{R} = \mathbf{0}$ , from (10.2) and (10.3) ensues balance of forces (of momentum)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

and  $\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^T = 0$

If  $\delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R}$  (just rotation) with  $\delta \mathbf{o} = \mathbf{const}$ , then

$$(13.5, \S 1.13) \Rightarrow \nabla \delta \mathbf{R} = \mathbf{0} - \nabla \mathbf{R} \times \delta \mathbf{o} = -\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o} = -\delta \mathbf{o} \times \mathbf{E},$$

$$\nabla \delta \mathbf{R}^T = \mathbf{E} \times \delta \mathbf{o} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$$

...

In an elastic continuum internal forces are potential:  
 $\delta W^{(i)} = -\rho \delta \tilde{\Pi}$ .



...

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S = -\delta W^{(i)} = \rho \delta \tilde{\Pi} \quad (10.4)$$

...

Вид потенциала  $\tilde{\Pi}$  на единицу массы per mass unit пока неизвестен, но очевидно что  $\tilde{\Pi}$  определяется деформацией.

С помощью баланса массы  $\rho J = \overset{\circ}{\rho} \Leftrightarrow \rho = J^{-1} \overset{\circ}{\rho}$  ( $J \equiv \det \mathbf{F}$  — якобиан, определитель градиента движения) введём потенциал на единицу объёма в отсчётной конфигурации как

$$\Pi \equiv \overset{\circ}{\rho} \tilde{\Pi} \Rightarrow \delta \Pi = \overset{\circ}{\rho} \delta \tilde{\Pi}, \quad \rho \delta \tilde{\Pi} = J^{-1} \delta \Pi. \quad (10.5)$$

Полным аналогом (...) является равенство

...

## § 11. Constitutive relations of elasticity

Fundamental relation of elasticity (??)

...

$$\Pi(C) = \int_0^C \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{C}$$

If the strain energy density is path independent, then it acts as a potential for stress, that is

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi(C)}{\partial \mathbf{C}}$$

For adiabatic processes,  $\Pi$  is equal to the change in internal energy per unit volume.

For isothermal processes,  $\Pi$  is equal to the Helmholtz free energy per unit volume.

The natural configuration of a body is defined as the configuration in which the body is in stable thermal equilibrium with no external loads and zero stress and strain.

When we apply energy methods in elasticity, we implicitly assume that a body returns to its natural configuration after loads are removed. This

implies that the Gibbs' condition is satisfied:

$$\Pi(\mathbf{C}) \geq 0 \quad \text{with} \quad \Pi(\mathbf{C}) = 0 \quad \text{iff} \quad \mathbf{C} = 0$$

...

Начальная конфигурация считается естественной (natural configuration) — недеформированной ненапряжённой:  $\mathbf{C} = {}^2\mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}$ , поэтому в  $\Pi$  нет линейных членов.

Тензор жёсткости  ${}^4\mathbf{A}$

...

Rubber-like material (elastomer)

Материалу типа резины (эластомеру) характерны большие деформации, и функция  $\Pi(\text{I}, \text{II}, \text{III})$  для него бывает весьма сложной\*.

При больших деформациях исчезают преимущества использования  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{C}$  — проще остаться с радиусом-вектором  $\mathbf{R}$  ...

...

\* **Harold Alexander.** A constitutive relation for rubber-like materials // International Journal of Engineering Science, volume 6 (September 1968), pages 549–563.

## § 12. Piola–Kirchhoff stress tensors and other measures of stress

Соотношение Нансона  $NdO = Jndo \cdot \mathbf{F}^{-1}$  между векторами бесконечно малой площадки в отсчётной ( $ndo$ ) и в актуальной ( $NdO$ ) конфигурациях\*

(6.2)  $\Rightarrow NdO \cdot \boldsymbol{\tau} = Jndo \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow N \cdot \boldsymbol{\tau} dO = \mathbf{n} \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} do$   
gives dual expression of surface force

$$N \cdot \boldsymbol{\tau} dO = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} do, \quad \mathbf{T} \equiv J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (12.1)$$

Тензор  $\mathbf{T}$  называется первым (несимметричным) тензором напряжения Пиолы–Кирхгофа, иногда — “номинальным напряжением” (“nominal stress”) или “инженерным напряжением” (“engineering stress”). Бывает и когда какое-либо из этих (на)именований даётся транспонированному тензору

$$\mathbf{T}^\top = J\boldsymbol{\tau}^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} = J\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-1}.$$

Обращение (12.1)

$$J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$$

...

$$\delta\Pi = \mathbf{T} \cdot \delta\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \Rightarrow \Pi = \Pi(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}) \quad (12.2)$$

— этот немного неожиданный результат получился благодаря коммутативности  $\delta$  и  $\overset{\circ}{\nabla}$ :  $\overset{\circ}{\nabla}\delta\mathbf{R}^\top = \delta\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top$  ( $\nabla$  and  $\delta$  don't commute).

Тензор  $\mathbf{T}$  оказался энергетически сопряжённым с  $\mathbf{F} \equiv \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top$

$$\mathbf{T} = \frac{\partial\Pi}{\partial\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{F}}. \quad (12.3)$$

Второй (симметричный) тензор напряжения Пиолы–Кирхгофа  $\mathbf{S}$  энергетически сопряжён с  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$  и  $\mathbf{C} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{C}) &= \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{S} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{C}}, \\ d\mathbf{G} = 2d\mathbf{C} &\Rightarrow \delta\Pi(\mathbf{G}) = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{G}, \quad \mathbf{S} = 2\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{G}}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Связь между первым и вторым тензорами

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^\top \Leftrightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top, \quad \mathbf{T}^\top = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$$

\* По-прежнему  $\mathbf{F}$  — градиент движения и  $J \equiv \det \mathbf{F}$  — якобиан.

и между тензором  $\mathbf{S}$  и тензором напряжения Cauchy  $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \Leftrightarrow J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} = \boldsymbol{\tau}.$$

...

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{\top} = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^{\top} \\ \delta \mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} \\ \delta \mathbf{T} &= \delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{F}^{\top}\end{aligned}$$

...

The quantity  $\boldsymbol{\kappa} = J\boldsymbol{\tau}$  is called the *Kirchhoff stress tensor* and is used widely in numerical algorithms in metal plasticity (where there's no change in volume during plastic deformation). Another name for it is *weighted Cauchy stress tensor*.

...

Here's balance of forces (of momentum) with tensor  $\mathbf{T}$  for any undeformed volume  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$

$$\int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \int_{O(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} dO = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} + \int_{o(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} do = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) d\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \mathbf{0}$$

and its local (differential) variant

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (12.5)$$

Advantages of this equation in comparison with (8.2) are: here figures the known mass density  $\overset{\circ}{\rho}$  of undeformed volume  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$ , and the operator  $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$  is defined through known vectors  $\mathbf{r}^i$ . Appearance of  $\mathbf{T}$  reflects specific property of an elastic solid body — “to preserve” its reference configuration. In fluid mechanics, for example, tensor  $\mathbf{T}$  is unlikely useful.

Principle of virtual work for an arbitrary volume  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$  of elastic ( $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$ ) continuum:

$$\begin{aligned}\int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} - \delta \Pi \right) d\overset{\circ}{\mathcal{V}} + \int_{o(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R} do &= 0, \\ \overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R}) &= \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R} + \mathbf{T}^{\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}, \quad \mathbf{T}^{\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}^{\top} \\ \delta \Pi &= \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) \cdot \delta \mathbf{R} + \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}^{\top}\end{aligned}$$

....

First one is non-symmetric, it connects forces in deformed stressed configuration to underformed geometry+mass (initially known volumes, areas, densities), and it is energetically conjugate to the motion gradient (commonly mistakenly called “deformation gradient”, despite comprising of rigid rotations). First (sometimes its transpose) is also known as “nominal stress” and “engineering stress”.

Second one is symmetric, it connects loads in initial undeformed configuration to initial mass+geometry, and it’s conjugate to the right Cauchy–Green deformation tensor (and thus to the Cauchy–Green–Venant measure of deformation).

The first is simpler when you use just motion gradient and is more universal, but the second is simpler when you prefer right Cauchy–Green deformation and its offsprings.

There’s also popular Cauchy stress, which relates forces in deformed configuration to deformed geometry+mass.

“energetically conjugate” means that their product is energy, here: elastic (potential) energy per unit of volume

...

In the case of finite deformations, the Piola–Kirchhoff stress tensors express the stress relative to the reference configuration. This is in contrast to the Cauchy stress tensor which expresses the stress relative to the present configuration. For infinitesimal deformations and rotations, the Cauchy and Piola–Kirchhoff tensors are identical.

Whereas the Cauchy stress tensor  $\boldsymbol{\tau}$  relates stresses in the current configuration, the motion gradient and strain tensors are described by relating the motion to the reference configuration; thus not all tensors describing the material are in either the reference or current configuration. Describing the stress, strain and deformation either in the reference or current configuration would make it easier to define constitutive models. For example, the Cauchy stress tensor is variant to a pure rotation, while the deformation strain tensor is invariant; thus creating problems in defining a constitutive model that relates a varying tensor, in terms of an invariant one during pure rotation; as by definition constitutive models have to be invariant to pure rotations.

### 1st Piola–Kirchhoff stress tensor

The *1st Piola–Kirchhoff stress tensor* is one possible solution to this problem. It defines a family of tensors, which describe the configuration of the body in either the current or the reference configuration.

The 1st Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{T}$  relates forces in the present (“spatial”) configuration with areas in the reference (“material”) configuration

$$\mathbf{T} = J \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

where  $\mathbf{F}$  is the motion gradient and  $J \equiv \det \mathbf{F}$  is the Jacobian determinant.

In terms of components in an orthonormal basis, the first Piola–Kirchhoff stress is given by

$$T_{iL} = J \tau_{ik} F_{Lk}^{-1} = J \tau_{ik} \frac{\partial X_L}{\partial x_k}$$

Because it relates different coordinate systems, the 1st Piola–Kirchhoff stress is a two-point tensor. In common, it’s not symmetric. The 1st Piola–Kirchhoff stress is the 3D generalization of the 1D concept of engineering stress.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 1st Piola–Kirchhoff stress tensor will vary with material orientation.

The 1st Piola–Kirchhoff stress is energy conjugate to the motion gradient.

### 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor

Whereas the 1st Piola–Kirchhoff stress relates forces in the current configuration to areas in the reference configuration, the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{S}$  relates forces in the reference configuration to areas in the reference configuration. The force in the reference configuration is obtained via a mapping that preserves the relative relationship between the force direction and the area normal in the reference configuration.

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

In index notation using an orthonormal basis,

$$S_{IL} = J F_{Ik}^{-1} F_{Lm}^{-\top} \tau_{km} = J \frac{\partial X_I}{\partial x_k} \frac{\partial X_L}{\partial x_m} \tau_{km}$$

This tensor, a one-point tensor, is symmetric.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor remain constant, irrespective of material orientation.

The 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor is energy conjugate to the Green–Lagrange finite strain tensor.

...

### § 13. Variation of present configuration

Прежде упругая среда рассматривалась в двух конфигурациях: отсчётной с радиусами-векторами  $\mathbf{r}$  и актуальной с  $\mathbf{R}$ . Теперь представим себе малое изменение текущей конфигурации с бесконечно малыми приращениями радиуса-вектора  $\delta\mathbf{R}$ , вектора массовых сил  $\delta\mathbf{f}$ , первого тензора напряжения Пиолы–Кирхгофа  $\delta\mathbf{T}$  и тензора деформации  $\delta\mathbf{C}$ . Варьируя (12.5),  $(\dots)^*$  и  $(\dots)$ , получаем

$$\begin{aligned}\dot{\rho}\delta\mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \delta\mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad \delta\mathbf{T} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta\mathbf{C} \right) \cdot \mathbf{F}^\top + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta\mathbf{F}^\top, \\ \delta\mathbf{F}^\top &= \delta\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \overset{\circ}{\nabla}\delta\mathbf{R} = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla\delta\mathbf{R}, \quad \delta\mathbf{F} = \delta\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top = \nabla\delta\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{F}, \\ \delta\mathbf{C} &= \mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla\delta\mathbf{R}^S.\end{aligned}\tag{13.1}$$

$$\begin{aligned}\dots \\ (6.2) \Rightarrow n d\mathbf{o} &= J^{-1} N d\mathbf{O} \cdot \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{T} d\mathbf{o} = J^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{T} d\mathbf{O} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{T} d\mathbf{o} = \mathbf{N} \cdot \delta\boldsymbol{\tau} d\mathbf{O}, \quad \delta\boldsymbol{\tau} \equiv J^{-1} \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{T}\end{aligned}$$

— введённый так тензор  $\delta\boldsymbol{\tau}$  связан с вариацией  $\delta\mathbf{T}$  как  $\boldsymbol{\tau}$  связан с  $\mathbf{T}$  ( $\boldsymbol{\tau} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ ). Из (13.1) и ...

...

### § 14. Internal constraints

До сих пор деформация считалась свободной, мера деформации  $\mathbf{C}$  могла быть любой. Однако, существуют материалы со значительным сопротивлением некоторым видам деформации. Резина, например, изменению формы сопротивляется намного меньше, чем изменению объёма — некоторые виды резины можно считать несжимаемым материалом.

Понятие геометрической связи, развитое в общей механике ...

...

$$\begin{aligned}^* \nabla &= \nabla \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} = \mathbf{R}^i \partial_i \cdot \mathbf{r}^j \partial_j \mathbf{r} = \mathbf{R}^i \partial_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^j \partial_j = \nabla \mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \\ \overset{\circ}{\nabla} &= \overset{\circ}{\nabla} \cdot \nabla \mathbf{R} = \mathbf{r}^i \partial_i \cdot \mathbf{R}^j \partial_j \mathbf{R} = \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^j \partial_j = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} \cdot \nabla = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla\end{aligned}$$



## § 15. Hollow sphere under pressure

Решение этой относительно простой задачи описано во многих книгах. В отсчётной (ненапряжённой) конфигурации имеем сферу с внутренним радиусом  $r=r_0$  и наружным  $r=r_1$ . Давление равно  $p_0$  внутри и  $p_1$  снаружи.

Введём соответствующую задаче сферическую систему координат в отсчётной конфигурации  $q^1 = \theta$ ,  $q^2 = \phi$ ,  $q^3 = r$  (рис. ??). Эти же координаты будут и материальными. Имеем

...

## § 16. Stresses as Lagrange multipliers

Изложенному в § 10 применению принципа виртуальной работы предшествовало введение тензора напряжения Cauchy через баланс сил для элементарного тетраэдра (§ 7). Но здесь мы увидим, что принцип даёт обойтись и без рассуждений с тетраэдром.

Рассмотрим тело — не только лишь упругое, с любой виртуальной работой внутренних сил  $\delta W^{(i)}$  на единицу массы, — нагруженное массовыми  $\mathbf{f}$  (для краткости пишем  $\mathbf{f}$  вместо  $\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{R}}$ , так что динамика присутствует) и поверхностными  $\mathbf{p}$  внешними силами. Имеем вариационное уравнение

$$\int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} + \delta W^{(i)}) dV + \int_{O(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (16.1)$$

Полагаем, что внутренние силы не совершают работу при виртуальном движении тела как целого — когда нет деформации от бесконечно малых виртуальных перемещений  $\delta \mathbf{R}$  частиц тела:

$$\nabla \delta \mathbf{R}^S = {}^2\mathbf{0} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (16.2)$$

Отбросив  $\delta W^{(i)}$  в (16.1) при условии (16.2), получим вариационное уравнение со связью. Приём с множителями Лагранжа даёт возможность считать вариации  $\delta \mathbf{R}$  независимыми. Поскольку в каждой точке связь представлена симметричным тензором второй сложности, то таким же тензором будут и множители Лагранжа  ${}^2\lambda$ . Приходим к уравнению

$$\int_V (\rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} - {}^2\lambda \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S) dV + \int_{O(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (16.3)$$

Благодаря симметрии  ${}^2\lambda$  имеем\*

$${}^2\lambda \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S = \nabla \cdot ({}^2\lambda \cdot \delta \mathbf{R}) - \nabla \cdot {}^2\lambda \cdot \delta \mathbf{R}.$$

Подставив это в (16.3) и применив теорему о дивергенции, получаем

$$\int_V (\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot {}^2\lambda) \cdot \delta \mathbf{R} dV + \int_{O(\partial V)} (\mathbf{p} - N \cdot {}^2\lambda) \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0.$$

\*  $\Lambda^S \cdot X = \Lambda^S \cdot X^\top = \Lambda^S \cdot X^S$ ,  $\nabla \cdot (B \cdot a) = (\nabla \cdot B) \cdot a + B^\top \cdot \nabla a$

But  $\delta \mathbf{R}$  is random on a surface and inside a volume, thus

$$\mathbf{p} = N \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}, \quad \nabla \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

— formally introduced symmetric multiplier  ${}^2\boldsymbol{\lambda}$  happened to be the Cauchy stress tensor.

Подобное введение напряжений показано в книге [61]. Новых результатов тут нет, но интересна сама возможность одновременного вывода тех уравнений механики сплошной среды, которые традиционно считались независимыми. В следующих главах эта техника используется для построения новых континуальных моделей.

### Bibliography

Глубина изложения нелинейной безмоментной упругости характерна для книг А. И. Лурье [33, 36]. Оригинальность как основных идей, так и стиля присуща книге С. Truesdell’a [72]. Много ценной информации можно найти у К. Ф. Черных [81]. Стоит отметить и книгу Л. М. Зубова [23]. Монография Ю. Н. Работнова [61], где напряжения представлены как множители Лагранжа, очень интересна и своеобразна. О применении нелинейной теории упругости в смежных областях рассказано в книге С. Teodosiu [66]. Повышенным математическим уровнем отличается монография Ph. Ciarlet [65].

## CLASSICAL LINEAR ELASTICITY

Geometrically linear model: displacements are small. Operators  $\overset{\circ}{\nabla}$  and  $\nabla$  are indistinguishable: “equations can be written in the reference configuration”.

### § 1. Complete set of equations

Equations of nonlinear elasticity, even in simplest cases, bring to mathematically complicated problems. Therefore the linear theory is applied everywhere. Its equations were concluded in the first half of the XIX<sup>th</sup> century by Cauchy, Navier, Lamé, Clapeyron, Poisson, Saint-Venant, George Green and other scientists.

The complete set (system) of equations of classical linear theory in direct invariant tensor notation is:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \boldsymbol{u}^S. \quad (1.1)$$

Here  $\boldsymbol{\tau}$  is stress tensor,  $\boldsymbol{f}$  is vector of volume forces,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  is linear deformation tensor,  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon})$  is elastic energy of deformation per volume unit,  ${}^4\mathcal{A}$  is stiffness tensor (tetravalent).

Equations (1.1) are correct, they can be obtained via variation from the nonlinear theory. Variation from arbitrary configuration is described in §3.13. The linear theory is result of variation from unstressed reference configuration. There

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}, \quad \delta \boldsymbol{C} = \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \delta \boldsymbol{R}^S, \quad \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}, \\ \delta \boldsymbol{\tau} = \delta \boldsymbol{T} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \boldsymbol{C} \partial \boldsymbol{C}} \cdot \delta \boldsymbol{C}, \quad \nabla \cdot \delta \boldsymbol{\tau} + \rho \delta \boldsymbol{f} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

It remains to change  $\delta \boldsymbol{R}$  to  $\boldsymbol{u}$ ,  $\delta \boldsymbol{\tau}$  to  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\partial^2 \Pi / \partial \boldsymbol{C} \partial \boldsymbol{C}$  to  ${}^4\mathcal{A}$ , and  $\rho \delta \boldsymbol{f}$  to  $\boldsymbol{f}$ .

Если такой вывод кажется читателю слишком формальным и малонаглядным, возможно исходить из уравнений

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \\ \boldsymbol{\tau} &= J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^\top, \quad \mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^S + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Полагая перемещение  $\mathbf{u}$  малым, перейдём от (1.3) к (1.1).

Или вот как. Вместо  $\mathbf{u}$  взять  $\nu \mathbf{u}$ , тут  $\nu \rightarrow 0$  — некоторый весьма малый параметр. А неизвестные представить рядами по целым степеням  $\nu$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}^{(0)} + \nu \boldsymbol{\tau}^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^{(0)} + \nu \mathbf{C}^{(1)} + \dots, \\ \nabla &= \overset{\circ}{\nabla} + \nu \nabla^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \nu \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \quad J = 1 + \nu J^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Для первых (“нулевых”) членов этих разложений и получается (1.1). В книге [72] сие названо “формальным приближением”.

Невозможно сказать в общем случае, насколько мал должен быть параметр  $\nu$  — ответ зависит от ситуации и определяется лишь тем, описывает линейная модель интересующий эффект или нет. Когда, например, интересна связь частоты свободных колебаний упругого тела с амплитудой, то нужна уже нелинейная модель.

Линейная задача ставится в начальном объёме  $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ , ограниченном поверхностью  $o$  с вектором площади  $\mathbf{n} do$  (“принцип начальных размеров”).

Краевые (граничные) условия чаще всего предполагаются такими: на части  $o_1$  поверхности известны перемещения (кинематическое краевое условие), а на другой части  $o_2$  — силы (статическое краевое условие)

$$\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{o_2} = \mathbf{p}. \quad (1.4)$$

Но встречаются и более сложные комбинации, если знаем одновременно некоторые компоненты как  $\mathbf{u}$ , так и  $\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ . Для примера, на плоской грани  $x = \text{const}$  при вдавливании штампа с гладкой поверхностью  $u_x = v(y, z)$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$  (функция  $v$  определяется формой штампа).

Начальные условия в динамических задачах, когда вместо  $\mathbf{f}$  имеем  $\mathbf{f} - \rho\ddot{\mathbf{u}}$ , ставятся как обычно в механике — на положения и на скорости: в условный момент времени  $t=0$  определены  $\mathbf{u}$  и  $\dot{\mathbf{u}}$ .

Как отмечалось в гл. 2, в основу механики может быть положен принцип виртуальной работы (d'Alembert–Lagrange principle). Этот принцип справедлив и в линейной теории (внутренние силы в упругой среде потенциальны:  $\delta W^{(i)} = -\delta\Pi$ )

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ (\mathbf{f} - \rho\ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta\mathbf{u} - \delta\Pi \right] d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{u} do = 0, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = 0, \quad (1.5)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \frac{1}{2} \delta(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\delta\mathbf{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta\mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta\mathbf{u}, \\ \int_{\mathcal{V}} \delta\Pi d\mathcal{V} &= \oint_{o(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta\mathbf{u} do - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta\mathbf{u} d\mathcal{V} \end{aligned}$$

и левая часть (1.5) приобретает вид

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} - \rho\ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta\mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{o_2} (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta\mathbf{u} do,$$

что, конечно же, равно нулю. Отметим краевое условие  $\mathbf{u}|_{o_1} = 0$ : виртуальные перемещения согласованы с этой связью —  $\delta\mathbf{u}|_{o_1} = 0$ .

## § 2. Uniqueness of the solution of a dynamic problem

Как обычно в линейной математической физике [36, 121], теорема единственности доказывается от противного. Допустим, что есть два решения:  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t)$ . Составим разность  $\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  и докажем, что она равна нулю.

Но сперва убедимся в существовании интеграла энергии — выведем уравнение баланса механической энергии в линейной модели:

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{T} + \Pi) \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{u}} do, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = 0. \quad (2.1)$$

Слева имеем

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \frac{1}{2} (\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})^{\bullet} = \frac{1}{2} \rho (\dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}}, \\ \dot{\Pi} &= \frac{1}{2} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^{\bullet}}_{2 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathcal{A} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}}_{-(\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}})}.\end{aligned}$$

Применяя теорему о дивергенции и используя уравнение баланса импульса  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0$  и краевое условие  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}$  на  $o_2$ , убеждаемся, что (2.1) удовлетворено.

Из (2.1) следует, что при отсутствии объёмных и поверхностных сил (и закреплении на  $o_1$ ) полная механическая энергия постоянна. Если в начальный момент тело находилось в ненапряжённом состоянии покоя, то

$$\int_V (T + \Pi) dV = 0. \quad (2.2)$$

Кинетическая энергия положительна:  $T > 0$  при  $\dot{\mathbf{u}} \neq 0$  и обращается в нуль лишь когда  $\dot{\mathbf{u}} = 0$  — это следует из самого её определения  $T = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ . Потенциальная энергия, при малых деформациях с тензором  $\boldsymbol{\varepsilon}$  представляемая квадратичной формой  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ , тоже положительна:  $\Pi > 0$  при  $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$ . Таково априорное требование положительной определённости к тензору жёсткости  $\mathcal{A}$ . Это одно из “дополнительных неравенств в теории упругости” [33, 72].

And since  $T$  and  $\Pi$  are positive, from (2.2) ensues

$$T = 0, \Pi = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = 0, \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \boldsymbol{\vartheta}^\circ \times \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{u}^\circ$  и  $\boldsymbol{\vartheta}^\circ$  — некоторые константы. При закреплении на  $o_1$   $\mathbf{u}|_{o_1} = 0 \Rightarrow \mathbf{u}^\circ = 0$  и  $\boldsymbol{\vartheta}^\circ = 0$ .

Теперь вспомним о двух решениях  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ . Их разность  $\mathbf{u}^*$  есть решение полностью однородной задачи (в краевых и в начальных условиях — нули, и в объёме  $\mathbf{f} = 0$ ). Поэтому  $\mathbf{u}^* = 0$  — единственность доказана.

Что же касается существования решения, то простыми выкладками его в общем случае не обосновать. Отметим лишь, что задача является эволюционной, то есть определяет развитие

процесса во времени. Из баланса импульса находим ускорение  $\ddot{\mathbf{u}}$ , далее переходим на “следующий временной слой”  $t + dt$ :

...

Разумеется, эти соображения лишены математической стройности, характерной, например, для монографии Philippe Ciarlet [65].

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathcal{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}$$

### § 3. Hooke’s ceiiinossttuv law

То соотношение между напряжением и деформацией, которое Robert Hooke в XVII<sup>ом</sup> веке мог высказать лишь в весьма неопределённой форме\*, в современных обозначениях записано в (1.1) и определяется тензором

$${}^4\mathcal{A} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = A^{ijkl} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l, \quad A^{ijkl} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}. \quad (3.1)$$

Тензор жёсткости, как частная производная упругого потенциала  $\Pi$  дважды по тому же тензору  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , симметричен по первой и второй паре индексов:  $A^{ijkl} = A^{klij}$ , от этого у 36 компонент из  $3^4 = 81$  “есть двойник”, и 45 независимы. К тому же, из-за симметрии тензора линейной деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , тензор  ${}^4\mathcal{A}$  симметричен ещё и внутри каждой пары индек-

\* ceiiinossttuv, that is Ut tensio sic vis; ...



сов:  $A^{ijkl} = A^{jikl} = A^{ijlk} (= A^{jilk})$ . Число независимых компонент при этом снижается до 21:

$$\begin{aligned}
 A^{abcd} &= A^{cdab} = A^{bacd} = A^{abdc} \\
 A^{1111} \\
 A^{1112} &= A^{1121} = A^{1211} = A^{2111} \\
 A^{1113} &= A^{1131} = A^{1311} = A^{3111} \\
 A^{1122} &= A^{2211} \\
 A^{1123} &= A^{1132} = A^{2311} = A^{3211} \\
 A^{1133} &= A^{3311} \\
 A^{1212} &= A^{1221} = A^{2112} = A^{2121} \\
 A^{1213} &= A^{1231} = A^{1312} = A^{1321} = A^{2113} = A^{2131} = A^{3112} = A^{3121} \\
 A^{1222} &= A^{2122} = A^{2212} = A^{2221} \\
 A^{1223} &= A^{1232} = A^{2123} = A^{2132} = A^{2312} = A^{2321} = A^{3212} = A^{3221} \\
 A^{1233} &= A^{2133} = A^{3312} = A^{3321} \\
 A^{1313} &= A^{1331} = A^{3113} = A^{3131} \\
 A^{1322} &= A^{2213} = A^{2231} = A^{3122} \\
 A^{1323} &= A^{1332} = A^{2313} = A^{2331} = A^{3123} = A^{3132} = A^{3213} = A^{3231} \\
 A^{1333} &= A^{3133} = A^{3313} = A^{3331} \\
 A^{2222} \\
 A^{2223} &= A^{2232} = A^{2322} = A^{3222} \\
 A^{2233} &= A^{3322} \\
 A^{2323} &= A^{2332} = A^{3223} = A^{3232} \\
 A^{2333} &= A^{3233} = A^{3323} = A^{3332} \\
 A^{3333}
 \end{aligned}$$

Нередко компоненты тензора жёсткости записывают симметричной матрицей  $6 \times 6$  вида

$$[\mathcal{A}]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A^{1111} & A^{1122} & A^{1133} & A^{1112} & A^{1113} & A^{1123} \\ A^{2211} & A^{2222} & A^{2233} & A^{1222} & A^{1322} & A^{2223} \\ A^{3311} & A^{3322} & A^{3333} & A^{1233} & A^{1333} & A^{2333} \\ A^{1211} & A^{2212} & A^{3312} & A^{1212} & A^{1213} & A^{1223} \\ A^{1311} & A^{2213} & A^{3313} & A^{1312} & A^{1313} & A^{1323} \\ A^{2311} & A^{2322} & A^{3323} & A^{2312} & A^{2313} & A^{2323} \end{bmatrix}$$

Даже в декартовых координатах  $x, y, z$  квадратичная форма упругой энергии  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$  довольно-таки громоздкая:

$$\begin{aligned}
 2\Pi &= a_1 \varepsilon_x^2 + a_2 \varepsilon_y^2 + a_3 \varepsilon_z^2 + a_4 \varepsilon_{xy}^2 + a_5 \varepsilon_{xz}^2 + a_6 \varepsilon_{yz}^2 + \\
 &+ 2 \left[ \varepsilon_x (a_{12} \varepsilon_y + a_{13} \varepsilon_z + a_{14} \varepsilon_{xy} + a_{15} \varepsilon_{xz} + a_{16} \varepsilon_{yz}) + \right. \\
 &\quad + \varepsilon_y (a_{23} \varepsilon_z + a_{24} \varepsilon_{xy} + a_{25} \varepsilon_{xz} + a_{26} \varepsilon_{yz}) + \\
 &\quad + \varepsilon_z (a_{34} \varepsilon_{xy} + a_{35} \varepsilon_{xz} + a_{36} \varepsilon_{yz}) + \\
 &\quad \left. + \varepsilon_{xy} (a_{45} \varepsilon_{xz} + a_{46} \varepsilon_{yz}) + a_{56} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} \right].
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Когда добавляется материальная симметрия, число независимых компонент тензора  $\mathbf{A}$  ещё уменьшается.

Пусть материал имеет плоскость симметрии (упругих свойств)  $z = \text{const}$ . Тогда энергия  $\Pi$  не меняется при перемене знаков у  $\varepsilon_{zx}$  и  $\varepsilon_{zy}$ . А это возможно лишь если

$$\Pi \Big|_{\substack{\varepsilon_{xz} = -\varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{yz}}} = \Pi \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 &= a_{15} = a_{16} = a_{25} = a_{26} = \\ &= a_{35} = a_{36} = a_{45} = a_{46} \end{aligned} \quad (3.3)$$

— число независимых констант упало до 13.

Пусть далее плоскостей симметрии две:  $z = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ . Поскольку  $\Pi$  не чувствительна к знакам  $\varepsilon_{yx}$  и  $\varepsilon_{yz}$ , вдобавок к (3.3) имеем

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{56} = 0 \quad (3.4)$$

— осталось 9 констант.

Ортотропным (ортогонально анизотропным) называется материал с тремя ортогональными плоскостями симметрии — пусть это координатные плоскости  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Легко увидеть, что (3.3) и (3.4) — это весь набор нулевых констант и в этом случае. Итак, ортотропный материал характеризуется девятью константами, и “для ортотропности” достаточно двух перпендикулярных плоскостей симметрии. Вид упругой энергии упрощается до

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}a_1\varepsilon_x^2 + \frac{1}{2}a_2\varepsilon_y^2 + \frac{1}{2}a_3\varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}a_4\varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{2}a_5\varepsilon_{xz}^2 + \frac{1}{2}a_6\varepsilon_{yz}^2 + \\ & + a_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_x\varepsilon_z + a_{23}\varepsilon_y\varepsilon_z. \end{aligned}$$

В ортотропном материале сдвиговые (угловые) деформации  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  никак не влияют на нормальные напряжения  $\sigma_x = \partial\Pi/\partial\varepsilon_x$ ,  $\sigma_y = \partial\Pi/\partial\varepsilon_y$ ,  $\sigma_z = \partial\Pi/\partial\varepsilon_z$  (и наоборот). Популярный ортотропный материал — древесина; её упругие свойства различны по трём взаимно перпендикулярным направлениям: по радиусу, вдоль окружности и по высоте ствола.

Ещё один случай анизотропии — трансверсально изотропный (transversely isotropic) материал. Он характеризуется

...

## § 4. Theorems of statics

### *Clapeyron's theorem*

In equilibrium with external forces, volume ones  $\mathbf{f}$  and surface ones  $\mathbf{p}$ , the work of these forces (“statically frozen” — constant along time) through actual displacements is equal to the doubled\* energy of deformation

$$2 \int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma. \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \bigcirc \quad 2\Pi &= \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}}_{-\mathbf{f}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = \int_{o_2} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}}_{\mathbf{p}} d\sigma + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} \quad \bullet \end{aligned}$$

Из (4.1) следует, что без нагрузки  $\int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = 0$ . Поскольку  $\Pi$  положительна, то и напряжение  $\boldsymbol{\tau}$ , и деформация  $\boldsymbol{\varepsilon}$  без нагрузки — нулевые.

“Paradox of elastostatics”

Накопленная потенциальная энергия деформации равна всего половине работы внешних сил.

Clapeyron's theorem, taken literally, implies that the elastic stored energy accounts for only half of the energy spent to load the body; the remaining half of the work done to the body by the external forces is unaccounted for and is lost somewhere in reaching the equilibrium.

This apparent paradox is reached within the framework of purely conservative linear elasticity. Alternatively, however, within elastostatics the common characterization of the work done to reach equilibrium is conceptually ambiguous, and a novel interpretation may be needed.

**Roger Fosdick and Lev Truskinovsky.** About Clapeyron's Theorem in Linear Elasticity // Journal of Elasticity, Volume 72, July 2003. Pages 145–172.

\* **Benoît Paul Émile Clapeyron.** Mémoire sur le travail des forces élastiques dans un corps solide élastique déformé par l'action de forces extérieures // Comptes rendus, XLVI, Janvier–Juin 1858. 208–212 pp.

Для решения парадокса в теории распространена концепция “бесконечномедленного постепенного статического нагружения” (“infinitely slow gradual application of the load”).

Статика рассматривает “замороженное” равновесие, оно вне времени. Динамика же нагружения до равновесия это предыстория. В линейной теории в равновесии работа внешних сил на актуальных перемещениях, затраченная на деформацию, равна удвоенной внутренней потенциальной энергии деформации. “Запасается” всего половина потраченной энергии. Вторая половина это дополнительная энергия, она теряется до обретения равновесия на динамику — на кинетическую энергию частиц (на “диссипацию”), на колебания и волны. Так в теории. Однако, в реальности не бывает ни моментального “мёртвого” нагружения, ни бесконечномедленного “следящего”. Это две крайности. Реальная динамика нагружения всегда где-то между ними. Посему теоретическая дополнительная энергия всегда больше той реальной “диссипативной” кинетической, которая сопутствовала процессу нагружения, и в линейной теории она численно равна упругому потенциалу — половине работы внешних сил, той самой второй половине.

В области же бесконечномалых вариаций и виртуальных работ, работа реальных внешних сил на виртуальных перемещениях точно равна вариации упругого потенциала. А упругая среда есть такая, в которой вариация работы сил внутренних (напряжений) на виртуальных деформациях это минус вариация потенциала.

$-\delta W^{(i)} = \delta \Pi = \delta W^{(e)}$ , когда варьируются только перемещения (нагрузки не варьируются). Потому в принципе виртуальной работы и варьируются лишь перемещения, чтобы виртуальная работа внешних неварьируемых реальных сил на вариациях перемещений была равна минус вариации внутренней энергии (и, для упругой среды, вариации упругого потенциала).

### *Theorem for the uniqueness of solution*

Как и в динамике (§ 2), допускаем существование двух решений и ищем их разность

...

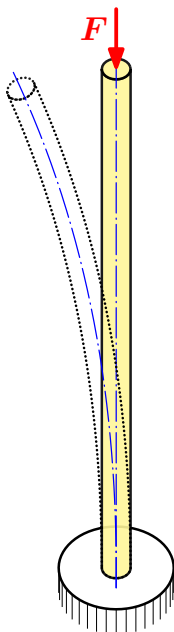


figure 9

The uniqueness of solution, determined by G. Kirchhoff\*, is contrary to, as it seems, the everyday experience. Imagine straight rod, закреплённый на одном конце и сжатый продольной силой на другом (рис. 9). Когда нагрузка достаточно большая, задача статики имеет два решения — “прямое” и “изогнутое”. Но такое противоречие объясняется нелинейностью задачи. При малой же нагрузке решение единственно и может быть описано линейными уравнениями.

#### *Reciprocal work theorem*

Для тела с закреплением на части поверхности  $\sigma_1$  рассматриваются два варианта: первый с нагрузками  $\mathbf{f}_1, \mathbf{p}_1$  и второй с нагрузками  $\mathbf{f}_2, \mathbf{p}_2$ . Словесная формулировка теоремы та же, что и в § 2.6. Метаматическая запись

...

Betti's theorem, also known as reciprocal work theorem, discovered by Enrico Betti in 1872, states that for a linear elastic structure subject to two sets of forces  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) and  $Q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), the work done by the set  $P$  through the displacements produced by the set  $Q$  is equal to the work done by the set  $Q$  through the displacements produced by the set  $P$ . This theorem has applications in structural engineering where it is used to define influence lines and derive the boundary element method.

...

\* **Gustav Robert Kirchhoff.** Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's journal), 56. Band (1859). Seiten 285–313.

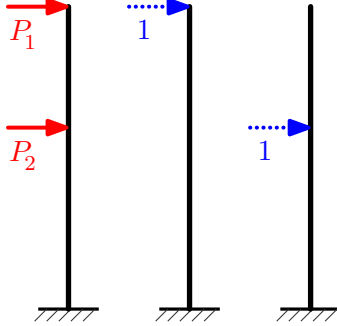


рисунок 10

Теорема о взаимности работ Enrico Betti находит неожиданные и эффективные применения. Как иллюстрацию рассмотрим защемленный одним концом (“консольный”) стержень-балку, изгибаемый силами величиной  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 10). Используя линейность задачи, перемещения возможно найти как

$$u_1 = \dots,$$

$$u_2 = \dots$$

...

## § 5. Equations for displacements

The complete set of equations (1.1) содержит неизвестные  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\mathbf{u}$ . Исключая  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , приходим к постановке в перемещениях (симметризация  $\nabla \mathbf{u}$  тут излишняя, ведь  ${}^4\mathcal{A}_{3\rightleftharpoons 4} = {}^4\mathcal{A}$ )

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{f} &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{u}|_{o_1} &= \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{n} \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{u}|_{o_2} = \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В изотропном теле (5.1) принимает вид

...

Общее решение однородного уравнения (...) нашёл Heinz Neuber

П. Ф. Папкович

...

## § 6. Concentrated force in a limitless medium

Concentrated force is useful mathematical idealization, but cannot be found in the real world, where all forces are either body forces acting over a volume or surface forces acting over an area.

Начнём с риторического вопроса: почему упругое тело сопротивляется приложенной нагрузке, выдерживает её? Удачный ответ можно найти ...

...

## § 7. Determining displacements from deformations

Разложив градиент перемещения на симметричную и антисимметричную части

$$\nabla \mathbf{u} = \overbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\nabla \mathbf{u}^S} - \overbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}}^{\nabla \mathbf{u}^A}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}, \quad (7.1)$$

...

Saint-Venant's compatibility condition is the integrability conditions for a symmetric tensor field to be a strain.

The compatibility conditions in linear elasticity are obtained by observing that there are six strain–displacement relations that are functions of only three unknown displacements. This suggests that the three displacements may be removed from the system of equations without loss of information. The resulting expressions in terms of only the strains provide constraints on the possible forms of a strain field.

A body that deforms without developing any gaps/overlaps is called a compatible body. Compatibility conditions are mathematical conditions that determine whether a particular deformation will leave a body in a compatible state.

...

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^\top$$

Контур здесь произволен, так что приходим к соотношению

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} = {}^2\mathbf{0}, \quad (7.2)$$

называемому уравнением совместности деформаций.

...

Все уравнения линейной теории имеют аналог (первоисточник) в нелинейной. Чтобы найти его для (7.2), вспомним тензор деформации Cauchy–Green'a (§ 3.4) и тензоры кривизны (§ 1.15)

...

## § 8. Equations for stresses

Баланс сил

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

ещё не определяет напряжений. Они должны быть такими, чтобы соответствующие им деформации оказались совместны:

...

## § 9. Principle of minimum potential energy

Начнём с формулировки принципа:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) \equiv \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma \rightarrow \min, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0. \quad (9.1)$$

Этот функционал, называемый потенциальной энергией системы, принимает наименьшее значение на истинных перемещениях — то есть на решении задачи (5.1). При этом функции  $\mathbf{u}$  должны удовлетворять геометрическому условию на  $o_1$  (чтобы не нарушать связи) и быть непрерывными (иначе  $\Pi(\nabla \mathbf{u})$  не будет интегрируемой).

Для обоснования принципа возьмём какое-либо ещё приемлемое поле перемещений  $\mathbf{u}'$  и найдём разность  $\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) =$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}') - \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\sigma.$$

Поскольку  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{o_2} = \mathbf{p}$  и  $(\mathbf{u}' - \mathbf{u})|_{o_1} = \mathbf{0}$ , то

$$\begin{aligned} \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\sigma &= \oint_{o(\partial \mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\sigma = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u})) d\mathcal{V} = \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\tau}^T \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \text{и } \mathcal{J}(\mathbf{u}') - \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \\
& = \int_V \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}') - \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f})}_0 \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) dV - \\
& \quad - \int_V \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u}' - \nabla \mathbf{u}) dV.
\end{aligned}$$

Тут  $\Pi(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^S$ ,  $\Pi(\nabla \mathbf{u}') = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}'^S$ , а благодаря симметрии  $\boldsymbol{\tau}^T = \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{a} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{a}^S \forall \mathbf{a}$ . Поэтому

...

## § 10. Principle of minimum complementary energy

Дополнительной энергией называется следующий функционал над полем напряжений:

...

...

Принцип минимума дополнительной работы очень полезен, например, для получения некоторых оценок приближённых решений. Но для вычислительной практики его роль не столь весома, как принципа Лагранжа.

## § 11. Mixed principles of stationarity

### Prange–Hellinger–Reissner Variational Principle,

named after *Ernst Hellinger*, *Georg Prange* and *Eric Reissner*. Working independently of Hellinger and Prange, Eric Reissner published his famous six-page paper “On a variational theorem in elasticity” in 1950. In this paper he develops — without, however, considering Hamilton–Jacobi theory — a variational principle same to that of Prange and Hellinger.

### Hu–Washizu Variational Principle,

named after *Hu Haichang* and *Kyuichiro Washizu*.

Именами Reissner’a, Prange’a и Hellinger’a назван такой функционал над перемещениями и напряжениями:

$$\mathcal{R}(u, \tau) = \int_V \left[ \tau \cdot \nabla u^S - \hat{\Pi}(\tau) - f \cdot u \right] dV - \int_{o_1} n \cdot \tau \cdot (u - u_0) do - \int_{o_2} p \cdot u do. \quad (11.1)$$

...

Преимущество принципа Рейсснера–Хеллингера — в свободе варьирования. Но есть и изъян: у функционала нет экстремума на истинном решении, а лишь стационарность.

Принцип можно использовать для построения приближённых решений методом Ритца (Ritz method). Задавая аппроксимации

...

Принцип Ху–Васидзу [103] формулируется так:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}(u, \varepsilon, \tau) &= 0, \\ \mathcal{W} &\equiv \int_V \left[ \tau \cdot (\nabla u^S - \varepsilon) + \Pi(\varepsilon) - f \cdot u \right] dV - \\ &\quad - \int_{o_1} n \cdot \tau \cdot (u - u_0) do - \int_{o_2} p \cdot u do. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Как и в принципе Рейсснера–Хеллингера, здесь нет ограничений ни в объёме, ни на поверхности, но добавляется третий независимый аргумент  $\varepsilon$ . Поскольку  $\hat{\Pi} = \tau \cdot \varepsilon - \Pi$ , то (11.1) и (11.2) кажутся почти одним и тем же.

Из принципа Ху–Васидзу вытекает вся полная система уравнений с граничными условиями, так как

...

Об истории открытия вариационных принципов и соотношении их написано, например, у Ю. Н. Работнова [61].

## § 12. Antiplane shear

Это та проблема линейной теории упругости, где простыми выкладками получаются нетривиальные результаты. Нетривиаль-

ное в теории упругости это, например, когда “деление силы на площадь” даёт бесконечно большую погрешность в нахождении напряжения.

Рассматривается изотропная среда в декартовых координатах  $x_i$  ( $x_1$  и  $x_2$  в плоскости,  $x_3$ ) с базисными ортами  $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ . В случае антиплоской деформации (антиплоского сдвига) поле перемещений  $\mathbf{u}$  параллельно координате  $x_3$ :  $\mathbf{u} = \mathbf{v} \mathbf{e}_3$ , и  $\mathbf{v}$  не зависит от  $x_3$ :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2)$ ,  $\partial_3 \mathbf{v} = 0$ .

Деформация

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S = \nabla (\mathbf{v} \mathbf{e}_3)^S = \mathbf{e}_3 \nabla \mathbf{v}^S + \underbrace{\mathbf{v} \nabla \mathbf{e}_3^S}_{=0} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \nabla \mathbf{v})$$

...

Возможна неоднородность среды в плоскости  $x_1, x_2$ :  $\mu = \mu(x_1, x_2)$ ,  $\partial_3 \mu = 0$ .

...

### § 13. Twisting of rods

Эта задача, тщательно изученная Saint-Venant'ом, рассматривается едва ли не в каждой книге по классической теории упругости. Речь идёт о цилиндре какого-либо сечения, нагруженном лишь поверхностными силами на торцах

...

### § 14. Plane deformation

Тут вектор перемещения  $\mathbf{u}$  параллелен плоскости  $x_1, x_2$  и не зависит от третьей координаты  $z$

...

## **Bibliography**

Можно назвать несколько десятков книг по классической теории упругости, представляющих несомненный интерес несмотря на возрастающую отдалённость во времени. Подробные литературные указания содержатся в фундаментальной монографии ...

# MICROPOLAR THREE-DIMENSIONAL CONTINUUM

## § 1. Introduction to linear micropolar theory

Характерная отличительная особенность классических упругих сред (гл. 3 и 4) — то, что они состоят “из простых материальных точек”. Частица классического континуума имеет лишь трансляционные степени свободы, её движение определяется только вектором  $\mathbf{R}(q^i, t)$ . Поэтому нагрузки (“силовые факторы”) в такой среде — только силы, объёмные и поверхностные. Моментов нет.

Но не так уж трудно построить более сложные модели сплошной среды, в которых частицы обладают не только лишь степенями свободы трансляции, но и некоторыми дополнительными. Новые степени свободы связаны и с новыми силовыми факторами, а также новыми уравнениями.

Наиболее естественная из неклассических моделей трёхмерной среды предложена братьями Cosserat в 1909 году [28]. Каждая частица континуума Коссера — это элементарное твёрдое тело с шестью степенями свободы. Силовые факторы в такой среде — силы и моменты. Работа братьев Коссера оставалась незамеченной полвека, но затем возник интерес к этой теме [41, 47].

from **Nowacki W.** *The Linear Theory of Micropolar Elasticity*. In: *Micropolar Elasticity. International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures)*, vol. 151, 1974, pp. 1–43

Woldemar Voigt tried to remove the shortcomings of the classical theory of elasticity [**W. Voigt**. *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Abhandlungen der Königlichen*

*Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 34: 3–51, 1887] by the assumption that the interaction of two parts of the body is transmitted through an area element  $do$  by means not only of the force vector  $\mathbf{p}do$  but also by the moment vector  $\mathbf{m}do$ . Thus, besides the force stresses  $\sigma_{ji}$  also the moment stresses have been defined.

However, the complete theory of asymmetric elasticity was developed by the brothers **François et Eugène Cosserat** who published it in 1909 in the work “*Théorie des corps déformables*”.

They assumed that the body consists of interconnected particles in the form of small rigid bodies. During the deformation each particle is displaced by  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  and rotated by  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ , the functions of the position  $\mathbf{x}$  and time  $t$ .

Thus an elastic continuum has been described such that its points possess the orientation (polar media) and for which we can speak of the rotation of a point. The vectors  $\mathbf{u}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  are mutually independent and determine the deformation of the body. The introduction of the vectors  $\mathbf{u}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  and the assumption that the transmission of forces through an area element  $do$  is carried out by means of the force vector  $\mathbf{p}$  and the moment vector  $\mathbf{m}$  leads in the consequence to asymmetric stress tensors  $\sigma_{ji}$  and  $\mu_{ji}$ .

The theory of the brothers E. and F. Cosserat remained unnoticed and was not duly appreciated during their lifetime. This was so because the presentation was very general (the theory was non-linear, including large deformations) and because its frames exceeded the frames of the theory of elasticity. They attempted to construct the unified field theory, containing mechanics, optics and electrodynamics and combined by a general principle of the least action.

The research in the field of the general theories of continuous media conducted in the last fifteen years, drew the attention of the scientists to Cosserats’ work. Looking for the new models, describing more precisely the behaviour of the real elastic media, the models similar to, or identical with that of Cosserats’ have been encountered. Here, we mention, first of all, the papers by C. Truesdell and R. A. Toupin [**C. Truesdell and R. A. Toupin**. *The classical field theories*. *Encyclopædia of Physics*, Chapter 1, Springer-Verlag, Berlin, 1960], G. Grioli [**Grioli G.** *Elasticité asymétrique*. *Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser. IV*, 50 (1960)], R. D. Mindlin and H. F. Tiersten [**Mindlin, R. D.; Tiersten, H. F.** *Effects of couple-stresses in linear elasticity*. *Arch. Rational Mech. Anal.* 11. 1962. 415–448].

Рассмотрим сначала геометрически линейную модель, то есть случай малых перемещений и поворотов. Векторные поля перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и малых поворотов  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, t)$  независимы. Операторы  $\overset{\circ}{\nabla}$  и  $\nabla$  (§ 3.2) неразличимы, уравнения “можно писать в исходной конфигурации”.

В основу построения модели положим принцип виртуальной работы (“работа реальных внешних сил на виртуальных перемещениях равна с обратным знаком работе внутренних сил — реальных напряжений на виртуальных деформациях”)

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) d\mathcal{V} + \int_o (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) do = - \int_{\mathcal{V}} \delta W^{(i)} d\mathcal{V}.$$

Здесь  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{m}$  — внешние силы и моменты per volume unit;  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{M}$  — они же, но per surface unit (поверхностные нагрузки действуют лишь на некоторой части  $o$  поверхности  $\partial\mathcal{V}$ , ограничивающей объём  $\mathcal{V}$ );  $\delta W^{(i)}$  — работа внутренних сил per volume unit.

По-прежнему полагаем, что  $\delta W^{(i)}$  обнуляется при движении тела как целого без деформации:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} + \text{const}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \text{const} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0,$$

$$\nabla \delta \mathbf{u} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{E} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} = {}^2\mathbf{0}.$$

Вводя тензоры деформации — тензор относительного смещения между частицами (tensor of relative displacement between particles, distortion tensor, strain tensor)  $\boldsymbol{\gamma}$  и тензор искривления-скручивания (curvature-twist tensor, wryness tensor)  $\boldsymbol{\kappa}$  — как

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \nabla \boldsymbol{\varphi}, \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \nabla \times \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\kappa}_{\times} = \nabla \times \boldsymbol{\varphi},$$

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \nabla \delta \mathbf{u} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi},$$

we have the necessary absence of virtual deformations  $\delta \boldsymbol{\gamma} = {}^2\mathbf{0}$  and  $\delta \boldsymbol{\kappa} = {}^2\mathbf{0}$ .

В §3.16 было показано, что напряжения можно рассматривать как множители Lagrange'a в принципе виртуальной работы при  $\delta W^{(i)} = 0$ . Поступим так же и теперь:

$$\int_V \left( \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^\top - \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^\top \right) dV + \int_o \left( \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) do = 0. \quad (1.2)$$

Множители Лагранжа в каждой точке — это несимметричные тензоры второй сложности  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\mu}$ .

Преобразуем  $-\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^\top$  и  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^\top$

$$\delta \boldsymbol{\gamma}^\top = \nabla \delta \mathbf{u}^\top - \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa}^\top = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}^\top,$$

$$-\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^\top = -\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}^\top + \boldsymbol{\tau} \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}), \quad -\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^\top = -\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}^\top.$$

Используя

$$(6.4, \S 1.6) \Rightarrow \mathbf{A}_\times = -\mathbf{A} \cdot \cdot^3 \boldsymbol{\epsilon},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{A} \cdot \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) = \mathbf{A} \cdot \cdot (-^3 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{b}) = \\ &= (-\mathbf{A} \cdot \cdot^3 \boldsymbol{\epsilon}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A}_\times \cdot \mathbf{b} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \end{aligned}$$

и “product rule”

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \nabla \delta \mathbf{u}^\top,$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\mu} \cdot \cdot \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}^\top,$$

получаем

$$-\boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^\top = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{u} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \delta \boldsymbol{\varphi},$$

$$-\boldsymbol{\mu} \cdot \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^\top = (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}).$$

После интегрирования с применением теоремы о дивергенции\*

$$\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u}) dV = \oint_{\partial(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u} do, \quad \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) dV = \oint_{\partial(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} do$$

(1.2) приобретает вид

$$\begin{aligned} \int_V \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dV + \\ + \int_o \left( (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) do = 0. \end{aligned}$$

\*  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}$



Из произвольности вариаций  $\delta u$  и  $\delta \varphi$  (и в объёме, и на поверхности) вытекают уравнения баланса сил и моментов, а также краевые условия:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}. \quad (1.4)$$

Тензор силового напряжения  $\boldsymbol{\tau}$  удовлетворяет тем же дифференциальным “уравнениям равновесия”<sup>\*</sup> и краевым условиям, что и в безмоментной среде. But tensor  $\boldsymbol{\tau}$  is asymmetric: instead of  $\boldsymbol{\tau}_{\times} = \mathbf{0}$  here is  $\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \mathbf{m} = \mathbf{0}$  — couple stresses  $\boldsymbol{\mu}$  appear, and volume moment load  $\mathbf{m}$  is non-zero.

Meaning of components of the couple stress tensor  $\boldsymbol{\mu}$  is revealed similarly as for  $\boldsymbol{\tau}$ . For an orthonormal basis, moment  $\mathbf{M}_i = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\mu} = \mu_{ik} \mathbf{e}_k$  is acting on an area with normal  $\mathbf{e}_i$ . Diagonal components  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{22}$ ,  $\mu_{33}$  are twisting moments, nondiagonal are bending ones (?? рисунок ??).

...

## § 2. Relations of elasticity

В этой книге упругой называем среду с потенциальными внутренними силами:  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$ , где  $\Pi$  — энергия деформации на единицу объёма (по-прежнему рассматриваем геометрически линейную постановку).

Располагая соотношениями

...

\* Кавычки здесь оттого, что *уравнения равновесия* это вообще всё, что вытекает из принципа виртуальной работы в статике.

..., разлагая тензоры деформаций и напряжений на симметричные и антисимметричные части

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}_\times \times \boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\gamma}^S = \nabla \boldsymbol{u}^S, \quad \boldsymbol{\gamma}_\times = \nabla \times \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{\varphi};$$

$$\delta\Pi = \dots$$

(2.1)

...

...

Если устремить  $h$  к нулю, исчезает вклад  $\boldsymbol{\kappa}$  в  $\Pi$ , а с ним и моментные напряжения  $\boldsymbol{\mu}$ . Когда вдобавок нет объёмной моментной нагрузки  $\boldsymbol{m}$ , тогда тензор  $\boldsymbol{\tau}$  становится симметричным:  $\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \boldsymbol{m} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\mu} = {}^2\mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{m} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0}$ , и модель превращается в классическую.

Yet using of micropolar model is natural in case, when the real material has a certain smallest volume, “which is impossible to enter into”. And such situation occurs quite often: composites with “representative” volume, polycrystalline materials, polymers with large molecules (macromolecules).

### § 3. Compatibility equations

Из выражений тензоров деформации (1.1) следует

...

### § 4. Theorems of statics

Теоремы статики линейных консервативных систем, легко выводимые при конечном числе степеней свободы

...

## § 5. Cosserat pseudo-continuum

Так называется упрощённая моментная модель\*, в которой повороты выражаются через перемещения как в классической среде:

$$\varphi = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \Leftrightarrow \gamma_x = \mathbf{0} \Leftrightarrow \gamma = \varepsilon = \nabla \mathbf{u}^S. \quad (5.1)$$

Равенство  $\gamma_x = \mathbf{0}$  (симметрию  $\gamma$ ) возможно понимать как внутреннюю связь (§ 3.14). Аргумент  $\gamma_x$  исчезает из энергии  $\Pi$ , соотношение упругости для  $\tau_x$  не может быть написано. Его место в полной системе занимает уравнение связи.

В классической теории упругости полная система сводится к одному уравнению для вектора  $\mathbf{u}$  (§ 4.5). В моментной теории

...

## § 6. Plane deformation

Все переменные в этой постановке не зависят от декартовой координаты  $z \equiv x_3$  (орт оси —  $\mathbf{k}$ ). Перемещения и силы перпендикулярны оси  $z$ , а повороты и моменты — параллельны ей:

...

Это краткое изложение плоской задачи относится к модели с независимыми поворотами. Псевдоконтинуум Коссера (модель со стеснённым вращением) получается либо при наложении внутренней связи  $\gamma_x = \mathbf{0}$ , либо при предельном переходе ...

Подробнее о плоской моментной задаче написано в книгах Н. Ф. Морозова [42, 43].

## § 7. Nonlinear theory

Кажущееся на первый взгляд чрезвычайно трудным, построение теории конечных деформаций континуума Коссера становится

\* Cosserat brothers called it cas de trièdre caché (case of latent trihedron).

прозрачным, если опираться на общую механику, тензорное исчисление и нелинейную теорию безмоментной среды.

При построении модели упругого континуума обычно проходят четыре этапа:

- ✓ определение степеней свободы частиц,
  - ✓ выявление нагрузок (“силовых факторов”, напряжений) и условий их баланса,
  - ✓ подбор соответствующих мер деформации
- и, наконец,
- ✓ вывод соотношений упругости между напряжением и деформацией.

Этот традиционный путь очень сокращается, если опираться на принцип виртуальной работы.

Как и в гл. 3, среда состоит из частиц с материальными координатами  $q^i$  и вектором-радиусом  $\mathbf{r}(q^i, t)$ . В начальной (исходной, отсчётной) конфигурации  $\mathbf{r}(q^i, 0) \equiv \mathring{\mathbf{r}}(q^i)$ . Но кроме трансляции, частицы имеют независимые степени свободы поворота, описываемого ортогональным тензором

$$\mathbf{O}(q^i, t) \equiv \mathbf{a}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathbf{a}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{O}^{-\top},$$

где тройка векторов  $\mathbf{a}_j(q^i, t)$  жёстко связана с каждой частицей, показывая угловую ориентацию относительно как-либо выбираемых\* векторов  $\mathring{\mathbf{a}}_j(q^i) \equiv \mathbf{a}_j(q^i, 0)$ ,  $\mathbf{a}_j = \mathbf{O} \cdot \mathring{\mathbf{a}}_j$ ;  $\mathbf{a}^j$  — тройка взаимных векторов:  $\mathbf{a}_j \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^j \mathbf{a}_j = \mathbf{E}$  ( $t=0$ ,  $\mathring{\mathbf{a}}^j$ :  $\mathring{\mathbf{a}}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathring{\mathbf{a}}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{E}$ ). Движение среды полностью определяется функциями  $\mathbf{r}(q^i, t)$  и  $\mathbf{O}(q^i, t)$ .

Имея представления  $\mathring{\mathbf{r}}(q^i)$  и  $\mathbf{r}(q^i, t)$ , вводим базис  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$ , взаимный базис  $\mathbf{r}^i$ :  $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}^i = \delta_j^i$ , дифференциальные операторы  $\mathring{\nabla}$  и  $\nabla$ , а также градиент движения  $\mathbf{F}$

$$\mathring{\nabla} \equiv \mathring{\mathbf{r}}^i \partial_i, \quad \nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathring{\nabla}, \quad \mathbf{F} \equiv \mathring{\nabla} \mathbf{r}^\top = \mathbf{r}_i \mathring{\mathbf{r}}^i. \quad (7.1)$$

\* Один из вариантов:  $\mathring{\mathbf{a}}_j = \mathring{\mathbf{r}}_j \equiv \partial_j \mathbf{r}$ . Другое предложение:  $\mathring{\mathbf{a}}_j$  это ортонормальная тройка собственных векторов тензора инерции частицы. Вообще,  $\mathring{\mathbf{a}}_j$  могут быть любой тройкой линейно независимых векторов.

Вариационное уравнение принципа виртуальной работы для континуума с нагрузками в объёме и на поверхности:

$$\int_V \left( \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) + \delta W^{(i)} \right) dV + \int_O \left( \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dO = 0. \quad (7.2)$$

Here  $\rho$  is mass density;  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{m}$  — внешние сила и момент per mass unit;  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{M}$  — они же per surface unit;  $\delta W^{(i)}$  — работа внутренних сил per volume unit в текущей конфигурации. Вектор малого поворота  $\delta \boldsymbol{\varphi}$

$$\begin{aligned} \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \mathbf{E} &\Rightarrow \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = -\mathbf{O} \cdot \delta \mathbf{O}^\top \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top \Rightarrow \delta \mathbf{O} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{O}, \\ \delta \boldsymbol{\varphi} &= -\frac{1}{2} (\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top)_\times \end{aligned}$$

При движении среды как жёсткого целого нет деформаций, и работа  $\delta W^{(i)}$  внутренних сил равна нулю:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} &= \text{const} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \text{const} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0, \\ \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} &= {}^2\mathbf{0}, \quad \nabla \delta \mathbf{r} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{E} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \\ \nabla \delta \mathbf{r} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} &= {}^2\mathbf{0}. \end{aligned}$$

К нагрузкам. Несимметричные тензоры напряжения, силового  $\boldsymbol{\tau}$  и моментного  $\boldsymbol{\mu}$ , введём как множители Lagrange'a:

$$\int_V \left( \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \delta \mathbf{r} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E})^\top - \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}^\top \right) dV + \int_O \left( \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dO = 0. \quad (7.3)$$

После тех же преобразований, что и в § 1, получаем

...

Отсюда вытекают уравнения баланса сил и моментов в объёме и краевые условия в виде формул типа Cauchy. Они по существу те же, что и в линейной теории.

Найдём теперь тензоры деформации. Их можно вводить по-разному, если требовать лишь одного — нечувствительности к движению среды как жёсткого целого. Читатель найдёт не один

вариант таких тензоров. Однако, вид тензоров деформации “подсказывает” принцип виртуальной работы.

...

## § 8. Nonlinear model with constrained rotation

Вспомним переход к модели со стеснённым вращением в линейной теории (§ 5). Разделились соотношения упругости для симметричной части тензора силового напряжения  $\boldsymbol{\tau}^S$  и кососимметричной его части  $\boldsymbol{\tau}_\chi$ . Возникла внутренняя связь  $\boldsymbol{\gamma}_\chi = \mathbf{0}$

...

## Bibliography

Все работы по моментной теории упругости упоминают книгу братьев Eugène et François Cosserat [28], где трёхмерной среде посвящена одна глава из шести. Переведённая монография W. Nowacki [47] была одной из первых книг на русском языке с изложением линейной моментной теории. Ранее эта область представлялась статьями — например, R. D. Mindlin’a и H. F. Tiersten’a [41]. Краткое изложение моментной теории, но с подробным рассмотрением задач содержится в книгах Н. Ф. Морозова [42, 43].

## *Chapter 6*

# THERMOELASTICITY

### § 1. First law of thermodynamics

The first law of thermodynamics is a version of the law of conservation of energy, adapted for thermodynamic systems. The law of conservation of energy states that the total energy of an isolated system is constant; energy can be transformed from one form to another, but can be neither created nor destroyed.

До сих пор мы ограничивались рамками механики и не рассматривали тепловые эффекты. Общеизвестно, однако, что изменение температуры вызывает деформацию тел. Температурные деформации и обусловленные ими напряжения часто играют первостепенную роль и могут приводить к разрушению конструкций.

Принцип виртуальной работы, столь эффективный в механике, не имеет места в термомеханике (хотя ниже мы увидим аналог этого принципа). Вводя в рассмотрение температуру, можно опираться на два закона термодинамики.

Первый закон, открытый ...

...

Тепло поступает в объём двумя путями. Первый — теплопроводность, определяемая вектором потока тепла  $\mathbf{h}$ . Предполагается, что через площадьку

...

### § 2. Second law

В популярных курсах физики распространено следующее представление о законах термодинамики: приращение энергии  $dE$

равно сумме работы внешних сил  $dA$  и подведённого тепла  $dQ$ . Величина  $dQ$  не является полным дифференциалом, но отношение  $dQ/T$  становится таковым — дифференциалом энтропии  $dS$ . Далее тепловые процессы делятся на ...

...

### § 3. Constitutive equations

К законам баланса импульса, момента импульса и термодинамики необходимо добавить ...

...

### § 4. Heat equation

The heat equation is a parabolic partial differential equation that describes the distribution of heat (or variation in temperature) in a given region over time.

В курсах математической физики [121] рассматривается уравнение теплопроводности

...

### § 5. Linear thermoelasticity

Квадратичная аппроксимация свободной энергии наиболее естественна в линейной теории

...

### § 6. Equations for displacements

Полагая поле температуры известным

...



## § 7. Temperature stresses

Эти напряжения сто́ит рассмотреть детально, хотя они и определяются очевидным образом полями перемещений и температуры. При равновесии свободного тела без внешних нагрузок

...

## § 8. Variational formulations

Поскольку при данной???(постоянной??)(конкретной??) температуре уравнения термоупругости выглядят как в механике

...

## Bibliography

В формировании новых взглядов на термодинамику сплошной среды велика роль С. Truesdell'a [72]. Чёткое изложение основных законов

...

## *Chapter 7*

# MAGNETOELASTICITY

### § 1. Electromagnetic field

**П**роблемы, решаемые с использованием моделей упругих сред, обычно уже содержат известные внешние нагрузки. Если в упругом теле протекают электрические токи, то нагрузка создаётся магнитным полем. При деформации тела магнитное поле меняется; при большой чувствительности поля к деформации становится необходимым совместное решение задач упругости и магнетизма.

Вспомним положения теории электромагнетизма. В трёхмерном пространстве имеем два векторных поля: электрическое  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и магнитное  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Смысл этих векторов ясен из выражения силы, действующей на точечный заряд  $q$ :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.1)$$

Острый вопрос о том, в какой системе отсчёта определяется скорость заряда  $\mathbf{v}$ , ведёт к специальной теории относительности

...

### § 2. Electrostatics

Рассмотрение этого вопроса полезно для последующего описания магнетизма. В статике имеем

...

### § 3. Dielectrics

Начнём с рассмотрения электростатического поля

...

## § 4. Magnetostatics

Если поле (а с ним ...)

...

## § 5. Magnetism

Выяснив законы магнитостатики в общем случае, обратимся к веществу — некий опыт у нас уже есть в электростатике диэлектриков.

Начнём с рассмотрения

...

...

Насколько соответствует поведение реальных материалов представленным здесь формальным построениям — сей вопрос is out of scope этой книги.

## § 6. Magnetic rigidity

В электротехнике распространены обмотки всевозможной формы, в которых провод намотан так, что образуется некое массивное тело. Такие обмотки есть в статоре генератора автомобиля (да и в роторе), в больших промышленных электромагнитах и в магнитных системах установок “токама́к” (**т**ороидальная **к**амера с **м**агнитными **к**атушками) для управляемого термоядерного синтеза — примеров много. Сочетание токопровода и изоляции образует периодический композит, и одной из главных нагрузок для него является пондеромоторная магнитная сила. Рассчитывая деформации и механические напряжения в обмотке, начинают с определения магнитных сил. Поскольку распределение токов задано известной геометрией проводов, достаточно интегрирования по формуле Био-Савара (??). Термин “магнитоупругость”

при этом неуместен, так как задачи магнитостатики и упругости решаются раздельно.

Однако при деформации обмотки меняются и поле  $\mathbf{j}$ , и вызываемое им поле  $\mathbf{B}$ . Объёмная сила становится равной

$$\mathbf{f} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_0 + \dots \quad (6.1)$$

Подчёркнутое слагаемое соответствует недеформированному состоянию. Обусловленное деформацией изменение объёмной силы линейно связано с малым перемещением  $\mathbf{u}$ , поэтому матричное (после дискретизации) уравнение в перемещениях можно представить в виде

$$(C + C_m) u = F_0. \quad (6.2)$$

К обычному оператору линейной упругости  $C$  добавилась магнитная жёсткость  $C_m$ ;  $F_0$  — силы в недеформированном состоянии.

Добавка  $C_m$  пропорциональна квадрату тока и может стать весьма существенной в магнитных системах с сильным полем. Учёт её необходим и при недостаточной величине  $C$ ; в номинальном режиме конструкция может держать нагрузку, но дополнительная нагрузка неблагоприятного направления может оказаться “невыносимой”.

Но особенно важна роль магнитной жёсткости в задачах устойчивости. Поскольку магнитные силы потенциальны, матрица  $C_m$  симметрична, и критические параметры могут быть найдены статическим методом Euler’a.

Как иллюстрацию рассмотрим простую задачу о балке в продольном магнитном поле. Балка располагается на декартовой оси  $z$ , концы  $z=0$  и  $z=l$  закреплены, магнитная индукция  $\mathbf{B} = B\mathbf{k} = \text{const}$ , по балке течёт постоянный (по величине) ток  $I$ . В классической модели балки при равных жёсткостях на изгиб для прогиба  $\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j}$  легко получить следующую постановку:

...

Вводя комплексную комбинацию  $u \equiv u_x + iu_y$ , будем иметь

...

с общим решением

...

Подстановка в граничные условия приводит к однородной системе для постоянных  $A_k$ ; приравняв нулю определитель, придём к характеристическому уравнению

...

Наименьший положительный корень  $x_1 = 3.666$ , так что критическая комбинация параметров такова:

$$(IBl^3/a)_* = 394.2.$$

В этом решении поле  $\mathbf{B}$  считалось внешним и не варьировалось. Но если собственное поле тока в стержне сравнимо с  $\mathbf{B}$ , решение изменится и усложнится.

## Bibliography

Основы электродинамики хорошо изложены во многих книгах [95, 90], но для приложений в механике выделяется курс И. Е. Тамма [101]. Растёт список литературы по связанным задачам электромагнетизма и упругости [55, 58]. Как введение в эту область может быть полезна книга В. Новацкого [48].

## **PERTURBATION METHODS (ASYMPTOTIC METHODS)**

Of approximate approaches for analysis of nonlinear systems, perturbation methods are the most often applied. Nayfeh's book [108] is an excellent introduction to these methods.

### **§ 1. Asymptotic decompositions**

До сих пор аргументами рассматриваемых функций были только координаты и время. Размеры тела, упругие модули, характерные масштабы изменения ...

...

В предыдущих главах уже возникали асимптотические проблемы. Линейная теория получается из нелинейной с помощью разложений по масштабу нагрузки (§ 4.1). Безмоментная теория вытекает (с точностью до краевых эффектов) из моментной (гл. 5) при устремлении “моментных” жёсткостей к бесконечности. В термоупругости (гл. 6) использование уравнения теплопроводности вместо полного баланса энергии должно быть обосновано асимптотическими методами.

Уязвимым в какой-то степени местом

...

### **§ 2. Splitting in a linear algebraic system**

Этот простой случай очень познавателен, он хорошо поясняет особенности асимптотических явлений. Рассматривается линей-

ная система

$$C_{ij}u_j = f_i, \quad C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \nu C_{ij}^{(1)} \quad (2.1)$$

с матрицей  $C_{ij}$  и столбцами неизвестных  $u_j$  и нагрузок  $f_i$ . Процесс построения асимптотического решения определяется тем, вырождена матрица  $C_{ij}^{(0)}$  или нет. Возможны три случая.

1°  $\det C_{ij}^{(0)} \neq 0$ . Однородная задача

$$C_{ij}^{(0)} u_j = 0 \quad (2.2)$$

имеет лишь тривиальное (нулевое) решение. Матрица  $C_{ij}^{(0)}$  обратима, неоднородная задача всегда однозначно решима. Решение строится так:

$$u_j = \dots \quad (2.3)$$

...

2°  $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

3°  $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

### § 3. Poincaré method

Этот метод широко известен в теории нелинейных колебаний. Он предназначен, в частности, для определения периодических решений уравнения

$$\ddot{u} + u = \nu f(u, \dot{u}) \quad (3.1)$$

...

### § 4. Van der Pol averaging method

Опять рассматривается уравнение (3.1), но теперь ищутся не только периодические решения. Вводится фазовая плоскость

...

## § 5. Coalescence of asymptotic decompositions

Основоположник метода срачивания внешних и внутренних асимптотических разложений — Ludwig Prandtl. Рассматривая течение вязкой жидкости, он заметил, что влияние малой вязкости локализовано у границы — в тонком приграничном слое. Вдали от границы жидкость ведёт себя как идеальная. Одни и те же уравнения

...

## § 6. Multiple-scale analysis (method of multiple scales)

Этот метод привлекателен, естественен и — как написано

...

## § 7. Equations with slowly varying parameters

Рассмотрим гармонический осциллятор, собственная частота которого медленно меняется во времени

...

## § 8. Thin bodies

Задачи теории упругости часто ставятся для тонких тел — стержней, пластин и оболочек. Таковы многие элементы конструкций, но и в природе вне человека тонкие тела встречаются довольно часто.

Решение задач упругости для тонких тел многие десятилетия основывалось на неких гипотезах о распределении решения по толщине и о порядках одних неизвестных относительно других. Построенные так теории сыграли большую роль в практике инженерных расчётов. Однако, им не хватало логической стройности и убедительности, их хотелось обосновать, уточнить — а в последнее время и уничтожить (в связи с появлением ве-



ликолепных компьютеров). Но открытое **не так давно** явление асимптотического ращепления прояснило картину: в тонком теле трёхмерная задача ращепляется на задачи меньшей размерности. Классические теории тонких тел получили и подтверждение, и развитие.

Рассмотрим задачу о кручении из ...

...

### **Bibliography**

Всё разнообразие асимптотических методов представлено в монографиях ...

## Chapter 9

### RODS

#### § 1. Initial concepts

Стержень — это тонкое длинное тело. Он характеризуется прежде всего своей осью — пространственной кривой, которую “облепляет” материал (рисунок ?? 22 ??). В каждой точке оси имеем плоскую фигуру

...

In approximate applied theories of rods (“strength of materials”) фигурируют сосредоточенные силы  $\mathbf{Q}$  и моменты  $\mathbf{M}$ . С тензором напряжения они связаны соотношениями

$$\mathbf{Q}(s) = \dots, \quad \mathbf{M}(s) = \dots \quad (1.1)$$

...

Наиболее логичный подход к описанию деформации упругих стержней связан с асимптотическим ращеплением трёхмерной задачи при малой толщине. Однако для сложной асимптотической процедуры заранее нужен некий вариант ответа. Такой вариант даёт прямой подход, основанный на одномерной модели стержня как материальной линии. Но какими степенями свободы — кроме трансляции — должны обладать частицы этой линии?

Давно известно, что стержни чувствительны к моментным нагрузкам. А присутствие моментов среди обобщённых сил говорит о наличии вращательных степеней свободы. Следовательно, одномерной моделью стержня должна быть линия Коссера — она состоит из элементарных твёрдых тел. Впрочем, могут проявиться и дополнительные степени свободы — как в тонкостенных стержнях, которым посвящена отдельная глава.

В механике упругих тел стержни занимают особенное место. Во-первых, это моментные модели, и моменты здесь играют главную роль (не роль поправок, как в трёхмерном континууме Коссера). Во-вторых, стержни являются как бы “тестовой площадкой” для моделей с дополнительными степенями свободы, поскольку наличие этих степеней можно достоверно исследовать на трёхмерной модели.

Ну а пока сосредоточимся на простой одномерной модели Коссера.

## § 2. Kinematics of Cosserat lines

Рассматриваемое далее является упрощённым вариантом гл. 5. Вместо тройки материальных координат  $q^i$  имеем одну —  $s$ , это может быть дуговая координата в отсчётной конфигурации. Движение определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}(s, t)$  и тензором поворота  $\mathbf{P}(s, t)$ . Линейная и угловая скорости частицы вводятся равенствами

...

## § 3. Balance of forces and moments

Поскольку частицы стержня (линии Коссера) — твёрдые тела, то нагрузками (“силовыми факторами”) являются силы и моменты: на элемент  $ds$  действуют внешние сила  $\mathbf{q}ds$  и момент  $\mathbf{m}ds$ . Внутренние взаимодействия тоже определяются силой  $\mathbf{Q}(s)$  и моментом  $\mathbf{M}(s)$  — это воздействие от частицы с координатой  $s+0$  к частице с  $s-0$ . Из закона

...

## § 4. Principle of virtual work and its consequences

For a piece of rod  $s_0 \leq s \leq s_1$  formulation of the principle is as follows

...

Conventionally  $\mathbf{a}$  is the tensor of stiffness for bending and twisting,  $\mathbf{b}$  is the tensor of stiffness for (ex)tension and shear, and  $\mathbf{c}$  is the tensor of crosslinks.

Stiffness tensors rotate together with particle:

...

## § 5. Classical Kirchhoff's model

До сих пор функции  $\mathbf{r}(s, t)$  и  $\mathbf{P}(s, t)$  были независимы. В классической теории Кирхгофа существует внутренняя связь

...

## § 6. Euler's problem

Рассматривается прямой стержень, закреплённый на одном конце и нагруженный силой  $\mathbf{Q}$  на другом (рисунок ?? 23 ??). Сила “мёртвая” (не меняется при деформировании)

...

## § 7. Variational equations

В нелинейной механике упругих тел полезны уравнения в вариациях, описывающие малое изменение актуальной конфигурации. Как и в § 3.13, вариации величин

...

## § 8. Non-shear model with (ex)tension

Модель Kirchhoff'a с  $\Gamma = 0$  не описывает наипростейший случай растяжения–сжатия прямого стержня. Эта неприятность исчезнет, если смягчить связь: **запретить** лишь поперечный сдвиг, но **разрешить** растяжение, то есть

...

## § 9. Mechanics of flexible thread

Flexible thread (chain) is simpler than rod: its particles are “simple” material points лишь с трансляционными степенями свободы. Поэтому среди нагрузок нет моментов, только “линейные” силы — внешние распределённые  $\mathbf{q}$  и внутренние сосредоточенные  $\mathbf{Q}$ . Движение нити полностью определяется одним вектором-радиусом  $\mathbf{r}(s, t)$ , а инерционные свойства — линейной плотностью  $\rho(s)$ .

Вот принцип виртуальной работы для куска нити  $s_0 \leq s \leq s_1$

$$\int_{s_0}^{s_1} \left( (\mathbf{q} - \rho \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} - \delta \Pi \right) ds + \left[ \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r} \right]_{s_0}^{s_1} = 0. \quad (9.1)$$

...

Механика нити детально описана в книге [39].

## § 10. Linear theory

В линейной теории внешние воздействия считаются малыми, а отсчётная конфигурация — ненапряжённым состоянием покоя. Уравнения в вариациях в этом случае дают

...

## § 11. Case of small thickness

При малой относительной толщине стержня модель типа Коссера уступает место классической. Понятие “толщина” определяется соотношением жёсткостей:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — разной размерности; полагая  $\mathbf{a} = h^2 \hat{\mathbf{a}}$  и  $\mathbf{c} = h \hat{\mathbf{c}}$ , где  $h$  — некий масштаб длины, получим тензоры

...

Переход модели Коссера в классическую кажется более очевидным при непосредственном интегрировании

...

## § 12. Saint-Venant's problem

Трудно переоценить ту роль, которую играет в механике стержней классическое решение Saint-Venant'a. О нём уже шла речь в § 4.13.

Вместо условий ...

...

## § 13. Finding stiffness by energy

Для определения тензоров жёсткости  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  одномерной модели достаточно решений трёхмерных задач для стержня. Но тут возникают два вопроса: какие именно задачи рассматривать и что нужно взять из решений?

Проблема Saint-Venant'a выделяется среди прочих, ведь отсюда берётся жёсткость на кручение.

Вдобавок есть много точных решений, получаемых таким путём: задаётся поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , определяется  $\hat{\boldsymbol{\tau}} = {}^4\mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u}$ , затем находятся объёмные  $\mathbf{f} = -\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$  и поверхностные  $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$  нагрузки.

Но что делать с решением? Ясно, что  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$  в стержне — это интегралы по сечению (...). И совсем не ясно, что считать перемещением и поворотом в одномерной модели. Если предложить, например, такой вариант (индекс у  $\mathbf{u}$  это размерность модели)

$$\mathbf{u}_1(z) = \Omega^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}_3(\mathbf{x}, z) d\Omega, \quad \boldsymbol{\theta}(z) = \frac{1}{2} \Omega^{-1} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u}_3 d\Omega,$$

то чем другие возможные представления хуже?

Помимо  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$ , есть ещё величина, не вызывающая сомнений — упругая энергия. Естественно потребовать, чтобы в одномерной и в трёхмерной моделях энергии на единицу длины совпали. При этом, чтобы уйти от различий в трактовках  $\mathbf{u}_1$  и  $\boldsymbol{\theta}$ , будем исходить из дополнительной энергии  $\hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$ :

$$\hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) = \int_{\Omega} \Pi_3 d\Omega$$

...

## § 14. Variational method of building one-dimensional model

Мы только что определили жёсткости стержня, полагая, что одномерная модель Коссера правильно отражает поведение трёхмерной модели. “Одномерные” представления ассоциируются со следующей картиной перемещений в сечении:

$$\mathbf{u}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{U}(s) + \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{x}. \quad (14.1)$$

Однако, такое поле  $\mathbf{u}$  не удовлетворяет уравнениям трёхмерной теории(??добавить, каким именно). Невозможно пренебречь возникающими невязками в дифференциальных уравнениях и краевых условиях.

Формально “чистым” является вариационный метод сведения трёхмерной проблемы к одномерной, называемый иногда методом внутренних связей. Аппроксимация (14.1) подставляется в трёхмерную формулировку вариационного принципа минимума потенциальной энергии (§4.9)

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_V \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) dV - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma \rightarrow \min,$$

которая после интегрирования по сечению становится одномерной. Если  $\mathbf{U}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  варьируются независимо, получаем модель типа Коссера. В случае  $\mathbf{U}' = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}$  приходим к классической модели.

Метод внутренних связей привлекателен, его продолжают “переоткрывать”. С его помощью возможно моделировать тела с неоднородностью и анизотропией, он легко обобщается на динамику, если  $\mathbf{f}$  дополнить неварьируемой динамической добавкой до  $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ . Можно рассматривать и стержни переменного сечения, и даже нелинейно упругие, ведь вариационная постановка есть (гл. 3).

Аппроксимацию (14.1) можно дополнить слагаемыми с внутренними степенями свободы. Понимая необходимость учёта депланаций, некоторые авторы

...

...

Для вариационного построения одномерных моделей удобен принцип Рейсснера–Хеллингера (§ 4.11) с независимой аппроксимацией напряжений [20]. Но тогда необходима некая согласованность между  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\tau}$ .

Множеству достоинств вариационного метода противостоит один, но очень большой недостаток. Вводя аппроксимации по сечению, мы навязываем реальности свои упрощённые представления. Вариационный метод более подходит для прикладных расчётов.

### § 15. Asymptotic splitting of three-dimensional problem

В изложении механики стержней асимптотическое ращепление можно считать фундаментальным. Одномерные модели составляют лишь часть картины; другая часть — это двумерные задачи в сечении, а вместе они являются тем решением трёхмерной задачи, которое образуется при малой толщине.

Малый параметр  $\lambda$  в трёхмерную задачу проще всего ввести через представление вектора-радиуса (рисунок ?? 22 ??, § 1):

...

### § 16. Thermal deformation and stress

Прямой подход, столь эффективный при построении одномерных моделей Коссера и Кирхгофа, для проблем термоупругости неприменим. Тут нужно рассматривать трёхмерную модель, что может быть реализовано или вариационным путём, или асимптотическим.

Описанный в § 14 вариационный метод целиком переносится на термоупругость — включая задачи с неоднородностью и анизотропией, переменным сечением, динамические — и даже нелинейные. Достаточно в принципе Лагранжа заменить потенциал

...



### Bibliography

В отличие от других тем теории упругости, стержни в книгах представлены весьма скромно. Преобладает изложение в стиле сопротивления материалов, более точные и совершенные подходы большинству авторов кажутся невозможными или ненужными. Но опубликовано много интересных статей, обзоры которых можно найти у S. Antman'a [1], В. В. Елисеева [20] и А. А. Илюхина [24].

*Chapter 10*

**THIN-WALLED RODS**

**§ 1. Variational approach**

**В** главе 9 рассматривались стержни с массивным сечением. Но в технике широко используются иные стержни — тонкостенные, сечения которых представляют собой узкие полоски различного очертания (уголок, швеллер, двутавр и др.). Если стержни похожи на линии (материальные линии Коссера), то в тонкостенных стержнях и само сечение выглядит как линия. Три размера — толщина и длина сечения, а также длина стержня — имеют различные порядки.

Известны прикладные теории тонкостенных стержней ...

...

**§ 2. Equations with small parameter**

Рассмотрим призматический стержень с односвязным сечением в виде тонкой криволинейной полоски постоянной толщины  $h$ . Радиус-вектор в объёме представим следующим образом:

...

**§ 3. First step of the asymptotic procedure**

*Outer decomposition*

Из системы

...

*Inner decomposition near  $s_0$* 

Выпишем уравнения для

...

*Coalescence*

Стыковка внутреннего и внешнего разложений

...

**§ 4. Second step***Outer decomposition*

Из системы

...

*Inner decomposition near  $s = s_0$* 

Из общей системы

...

*Coalescence*

Поскольку рассматриваются поправочные члены асимптотических разложений

...

**§ 5. Third step***Outer decomposition*

Из системы

....

*Inner decomposition around  $s = s_0$* 

Как уже отмечалось, внутренние разложения нужны для постановки краевых условий на концах

...

*Coalescence*

В плоской задаче имеем следующее двучленное внешнее разложение:

....

**§ 6. Fourth step**

Здесь понадобится лишь внешнее разложение. Более того: в этом приближении мы не будем искать решения уравнений — будет достаточно лишь условий разрешимости. Напомним, что философия наша такова: разыскиваются лишь главные члены асимптотических разложений, но для полного их определения могут понадобиться

...

**§ 7. Displacements**

Расписывая тензорное соотношение

...

**§ 8. Results of asymptotic analysis**

Определение главных членов асимптотики напряжений и перемещений для тонкостенных стержней оказалось намного сложнее, чем в случае массивного сечения. Дадим сводку полученных выше итоговых результатов.

Перемещение:

...

## Bibliography

Помимо известных книг ... Материал главы содержится в [20], где можно найти и обширный список статей.

## Chapter 11

# SHELLS AND PLATES

### § 1. Surface geometry

**П**оверхность в трёхмерном пространстве определяется функцией вектора-радиуса точек поверхности от двух координат  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Непрерывное изменение одной из координат  $q^1$  при постоянной другой  $q^2$  даёт координатную линию  $q^1$ . Пересечение двух координатных линий однозначно определяет точку поверхности. Векторы

$$\mathbf{r}_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{r}, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$$

лежат на касательных к координатным линиям. Они являются базисом для представления любого вектора  $\overset{2}{\mathbf{v}}$  в касательной плоскости как линейной комбинации

$$\overset{2}{\mathbf{v}} = v^\alpha \mathbf{r}_\alpha = v_\alpha \mathbf{r}^\alpha, \quad v^\alpha = \overset{2}{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}^\alpha, \quad v_\alpha = \overset{2}{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}_\alpha$$

(введён взаимный базис в касательной плоскости:  $\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta_\beta^\alpha$ ).

Добавление в каждой точке поверхности единичного вектора нормали  $\mathbf{n}(q^\alpha)$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}$$

даёт разложение для любого вектора (и вообще любого тензора) в пространстве, например  $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{r}_\alpha + u_n \mathbf{n}$ .

Единичные (“метрические”) тензоры  $\mathbf{E}$  в пространстве и  $\overset{2}{\mathbf{e}}$  в касательной плоскости

$$\mathbf{E} = \overset{2}{\mathbf{e}} + \mathbf{n}\mathbf{n}, \quad \overset{2}{\mathbf{e}} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n} = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}^\alpha = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}_\alpha.$$

Представление вектора-радиуса точки пространства на расстоянии  $h$  ( $\frac{\partial h}{\partial q^\alpha} = 0$ ) от поверхности

$$\mathbf{R}(q^\alpha, h) = \mathbf{r}(q^\alpha) + h\mathbf{n}(q^\alpha)$$

определяет базис

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{n} = \mathbf{R}^n,$$

$$\mathbf{R}_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{R} = \partial_\alpha \mathbf{r} + h \partial_\alpha \mathbf{n} = \mathbf{r}_\alpha + h \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n}.$$

...

$$\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \cdot \left( \mathbf{r}^\beta \mathbf{r}_\beta + h \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n} \right) = \mathbf{r}_\alpha \cdot \left( \overset{2}{\mathbf{e}} + h \overset{2}{\nabla} \mathbf{n} \right) = \mathbf{r}_\alpha \cdot \left( \overset{2}{\mathbf{e}} - h \overset{2}{\mathbf{c}} \right)$$

$$\overset{2}{\mathbf{c}} \equiv -\overset{2}{\nabla} \mathbf{n}$$

...

кобазис и дифференциальный оператор “набла”

$$\nabla \equiv \mathbf{R}^i \partial_i$$

$$\overset{2}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha$$

...

## § 2. Model of a shell

Располагая моделями трёхмерного моментного континуума, **стержней и пластин**, не так уж тяжело разобраться в механике оболочек. Как геометрический объект, оболочка определяется ...

...

## § 3. Balance of forces and moments for a shell

При  $\delta \mathbf{u} = \text{const}$  и  $\delta \varphi = \mathbf{0}$  (трансляция) ...

...

## § 4. Shells: Relations of elasticity

Локальное соотношение (??) после вывода уравнений баланса ...

...

## § 5. Classical theory of shells

Вышеизложенная теория (напоминающая балку Тимошенко и континуумы Коссера) рассматривает  $\varphi$  независимо от  $\mathbf{u}$ . Но обыденный опыт подсказывает: материальный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остаётся таковым

и после (кинематическая гипотеза Кирхгофа). В классической теории Кирхгофа, Арона и Лява  $\varphi$  выражается через  $\mathbf{u}$ , что в конце концов позволяет всё свести к одному векторному уравнению для  $\mathbf{u}$ .

Предположим, что в основе классической теории лежит внутренняя связь

...

## § 6. Shells: A plate

Это простейший случай оболочки. Орт  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  направлен по декартовой оси  $z$ , в качестве координат ...

...

## § 7. Shells: Approach with Lagrange multipliers

Уязвимым местом этого изложения теории оболочек являются формулы

...

## § 8. Cylindrical shell

Существуют разные уравнения цилиндрической оболочки. Приводятся громоздкие выкладки с отбрасыванием некоторых малых членов, и не всегда ясно, какие именно члены действительно можно отбросить.

Предлагаемая читателю теория оболочек иного свойства: лишних членов нет, все уравнения записаны в компактной тензорной форме — остаётся лишь грамотно действовать с компонентами тензоров. В качестве иллюстрации рассмотрим цилиндрическую оболочку.

В декартовой системе

...



## § 9. Shells: Common theorems

Пусть край закреплён

...

## § 10. Shells: Boundary conditions

В рамках рассматриваемого прямого подхода к оболочкам как материальным поверхностям наиболее надёжным способом вывода граничных условий представляется вариационный. Исходим из вариационного уравнения:

...

## § 11. Shells of revolution

*Surface of revolution (reference surface of shell of revolution) is created by rotating a plane curve (the meridian, the generatrix) about a straight line in the plane of curve (an axis of rotation).*

Разберёмся в геометрии поверхности вращения (рис. ?? 29 ??). Меридиан можно задать зависимостью декартовых координат

...

## § 12. Momentless theory of shells

В отличие от пластины, оболочка способна выдерживать нормальную распределённую нагрузку без появления внутренних моментов. В безмоментном состоянии напряжения равномерно распределены по толщине оболочки, безмоментные оболочечные конструкции можно считать оптимально спроектированными.

Уравнения безмоментной теории

...

### § 13. Shells: Nonlinear momentless theory

Вышеизложенную безмоментную теорию оболочек возможно просто и корректно обобщить на нелинейную постановку. Материальная поверхность состоит из частиц

...

### § 14. Shells: Other variant of classical theory

Выше при изложении моментной теории оболочек частицы материальной поверхности считались твёрдыми телами с шестью степенями свободы

...

### § 15. Plates: Overall concepts

**П**ластиной называется тонкое трёхмерное тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями и боковой цилиндрической поверхностью (рисунок ?? 26 ???). В декартовых координатах  $x_1, x_2, z$  поперечная координата ...

...

### § 16. Timoshenko-like model of a plate (direct approach)

Пластина рассматривается как материальная плоскость, частицы которой

...

### § 17. Kirchhoff's classical theory of plates

Принимается внутренняя связь

...

## § 18. Plates: Asymptotic matching of two-dimensional models

При малой толщине из теории типа Тимошенко вытекает классическая. Толщина  $h$  определяется отношением жёсткостей. Перепишем

...

## § 19. Plates: Variational transition from three-dimensional model

Используя вариационные принципы Лагранжа или Рейсснера–Хеллингера с аппроксимацией решения по толщине, можно получить двумерные вариационные постановки. Из них вытекают и соотношения внутри области, и естественные краевые условия.

Для примера построим модель типа Тимошенко с аппроксимацией перемещений

...

...

Рассмотренные вариационные переходы легко обобщаются на случаи неоднородности и анизотропии материала, температурных деформаций, динамики. Достоинство принципа Рейсснера–Хеллингера — в явном представлении напряжений. Зато принцип Лагранжа применим к нелинейным задачам (глава 3 содержит трёхмерную постановку).

## § 20. Plates: Splitting of three-dimensional bending problem

Двумерная классическая теория изгиба пластин легко выводится из трёхмерной постановки с малым параметром. Представив радиус-вектор в объёме

...

## § 21. Circular plates

В качестве иллюстрации рассмотрим широко представленный в литературе вопрос об уравнениях теории Кирхгофа в полярных координатах. Имеем

...

## § 22. Plates: Plane stress

Это вторая из двух задач, о которых говорилось в § 15. Силы

...

## Bibliography

Теория оболочек изложена в монографиях А. Л. Гольденвейзера [12], В. В. Новожилова [49], А. И. Лурье [35], В. С. Черниной [79] и ряде других. Достоинства этих книг перекрывают неразвитость формального аппарата. Переход от трёхмерной модели оболочки к двумерной рассмотрен у ...

...

Техническая теория изгиба пластин изложена ...

...

Chapter 12

## OSCILLATIONS AND WAVES

### § 1. Vibrations of a three-dimensional body

Рассмотрим динамическую задачу классической линейной упругости

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\tau} = {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}|_{o_1} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{o_2} = \mathbf{p}, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}^\circ, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}^\circ.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Согласно общей теории (§ 2.8), начинаем с анализа гармоник (нормальных колебаний):

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}) \sin \omega t, \\ \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{U}) &+ \rho \omega^2 \mathbf{U} = \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Значения  $\omega$ , при которых однородная задача имеет нетривиальное решение — это собственные частоты, а  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  — собственные формы, или моды.

(1.2) выглядит как уравнение эластостатики с объёмной нагрузкой  $\omega^2 \rho \mathbf{U}$ . Поверхностная нагрузка на  $o_2$  — нуль. Применяя тождество Клапейрона (§ 4.4), получаем

$$\omega^2 \int_V \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} dV = 2 \int_V \Pi(\nabla \mathbf{U}^S) dV.\tag{1.3}$$

Отсюда следует  $\omega^2 \geq 0$  с нулём для перемещений  $\mathbf{U}$  среды как жёсткого целого. С закреплением хотя бы малой части поверхности все  $\omega_i > 0$ .

Однако тут предполагалось, что  $\omega^2$  и  $\mathbf{U}$  вещественны. Обосновать это возможно “от противного”. Если  $\Im m \omega^2 \neq 0$ , то сопряжённая частота  $\bar{\omega}^2$  также входит в спектр, и мода  $\bar{\mathbf{U}}$  для этой

частоты имеет сопряжённые компоненты. Далее согласно теореме о взаимности работ

...

## § 2. Vibrations of a rod

В линейной динамике стержней имеем следующую систему для сил  $\mathbf{Q}$ , моментов  $\mathbf{M}$ , перемещений  $\mathbf{u}$  и поворотов  $\boldsymbol{\theta}$  (§ 9.??):

...

## § 3. Small perturbations of parameters

Рассмотрим задачу об определении собственных частот и форм с малыми возмущениями масс и жёсткостей:

$$\begin{aligned} (C_{ij} - \omega^2 A_{ij}) U_j &= 0, \\ C_{ij} &= C_{ij}^{(0)} + \nu C_{ij}^{(1)}, \quad A_{ij} = A_{ij}^{(0)} + \nu A_{ij}^{(1)}, \quad \nu \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Находя решение в виде

$$\omega = \omega^{(0)} + \nu \omega^{(1)} + \dots, \quad U_j = U_j^{(0)} + \nu U_j^{(1)} + \dots,$$

получаем последовательность задач

...

## § 4. Vibrations of a shell

Динамика оболочек рассматривалась многими

...

## § 5. Waves in an elastic continuum

Рассмотрим линейные уравнения динамики однородной изотропной среды без объёмных сил

...

## § 6. Waves in a rod

Рассмотрим прямой стержень. Продольная деформация описывается уравнениями

...

## § 7. Nonlinear oscillations

Рассмотрим простой пример: продольные колебания прямого стержня с малой нелинейной добавкой в соотношениях упругости

...

## Bibliography

Методы решения динамических задач упругости представлены в книгах Л. И. Слепяна [64] и В. Б. Поручикова [60]. О малых линейных колебаниях (вибрациях) написано у С. П. Тимошенко, D. Н. Young'a и W. Weaver'a [70], И. М. Бабакова [4], В. Л. Бидермана [8], В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [17]. Асимптотические проблемы колебаний оболочек освещены у ...

## Chapter 13

### STABILITY

#### § 1. Various approaches to the problem of stability

Существует классическая, хорошо развитая теория устойчивости движения [40]. По Ляпунову, процесс устойчив, если малые начальные отклонения остаются малыми и в будущем. Это относится и к состоянию равновесия. Нужно рассмотреть динамику малых отклонений от равновесной конфигурации и убедиться, что они не растут. В этом состоит **динамический подход** к проблеме устойчивости, и он справедливо считается наиболее достоверным.

Однако в задачах устойчивости равновесия упругих систем нашёл распространение иной подход, называемый **статическим** и связываемый с именем Leonhard'a Euler'a. Здесь значения параметров, при которых уравнения статики для малых отклонений приобретают нетривиальное решение, считаются критическими. Иными словами, критическим считается то равновесное состояние, которое перестаёт быть изолированным, — в его окрестности появляется множество смежных равновесных форм. При этом подходе достаточно решить задачу на собственные числа.

Но есть и другие подходы. Например, **метод несовершенств**: если малые случайные изменения начальной формы, жёсткостей, нагрузок и другие приводят лишь к малому изменению равновесной деформированной конфигурации, то имеем устойчивость. Отметим также **энергетический подход**: потеря устойчивости происходит, когда она становится энергетически выгодной, то есть ведёт к уменьшению энергии.



Перечисленные подходы составляют пёструю картину. Но в ней нетрудно разобраться на модели с конечным числом степеней свободы. Большой общностью обладают

...

## § 2. Classical problems with rods

Состояние перед варьированием описывается уравнениями нелинейной теории стержней Kirchhoff'a

...

## § 3. “Tracking” loads

В проблемах устойчивости весьма весомо поведение нагрузки при деформации. Ведь в уравнения входит вариация  $\delta q$ , она равна нулю лишь для “мёртвых” нагрузок. Распространены “следающие” нагрузки, то есть определённым образом меняющиеся при смещениях частиц упругого тела. Статический подход Euler'a

...

## § 4. The role of additional yieldings

Для прямого консольного стержня, сжатого постоянной силой  $F$  на свободном конце, критическая нагрузка определяется формулой Euler'a

...

## § 5. Variational formulations

Во всех разделах линейной теории упругости большую роль играют вариационные постановки. Среди прочего, они составляют основу метода конечных элементов как варианта метода Ritz'a.

Менее развиты вариационные постановки для проблем устойчивости. Здесь получил популярность метод

...

## § 6. Nonconservative problems

В уравнении динамики (...) матрица позиционных сил

...

## § 7. Case of multiple roots

Вернёмся к проблеме устойчивости (...) в случае циркуляционных сил. Как уже отмечалось (где??), критическая ситуация характеризуется

...

## Bibliography

Увлекательные вопросы устойчивости упругих систем освещены в книгах ...

## Chapter 14

### DEFECTS

#### § 1. Volterra dislocations

Рассмотрим классическую линейную трёхмерную среду (гл. 4). Как показано в § 4.7, уравнение совместности деформаций

...

#### § 2. Straight-line dislocations

Линия дислокации может быть любой пространственной кривой, замкнутой в теле или выходящей концами на поверхность. Для дислокации произвольной формы в неограниченной среде не так уж сложно получить соответствующее решение [21]. Мы же ограничимся простейшим случаем прямолинейной дислокации. Ищется решение

...

#### § 3. Action of stress field on dislocation

Рассмотрим тело, содержащее внутри дислокацию с замкнутой линией  $C$ . Тело нагружено объёмными  $\mathbf{f}$  и поверхностными  $\mathbf{p}$  силами. Обозначим

...

#### § 4. About movement of dislocations

Рассмотрим это явление, следуя [29]. Ограничимся случаем прямолинейной винтовой дислокации, движущейся с постоянной скоростью

...

#### § 5. Point defects

Речь пойдёт о континуальной модели таких явлений как вакансии, примесные частицы или междоузельные атомы в кристаллической решётке. В случае дислокации рассматривались

...

#### § 6. Force acting on point defect

Дефект находится в теле, нагруженном объёмными  $f$  и поверхностными  $p$  силами. Суперпозиция

...

#### § 7. Continuously distributed dislocations

Начнём со сложения векторов Бюргерса. При обходе сразу двух дислокаций (рис. ?? 40 ??) по контуру

...

#### § 8. Stress during winding of coil

Не только дислокации и точечные дефекты, но и макроскопические факторы могут быть источниками собственных напряжений. При намотке катушки (рис. ?? 42 ??) в ней возникают напряжения от натяжения ленты. Расчёт этих напряжений очень сложен, если рассматривать детально процесс укладки ленты.

Но существует чёткий алгоритм Southwell'a [62] расчёта напряжений в катушке: укладка каждого нового витка вызывает внутри катушки приращения напряжений, определяемые соотношениями линейной упругости. Здесь два этапа, и первый состоит в решении задачи Lamé о деформации полого цилиндра под внешним давлением (рис. ?? 43 ??)

Lamé problem about deformation of a hollow cylinder under external pressure

...

### Bibliography

Дислокации и точечные дефекты в линейно-упругих телах рассматривали многие авторы: John Eshelby [21], Roland deWit [18], Cristian Teodosiu [66], Alan Cottrell [29]. Теорию собственных напряжений изложил Ekkehart Kröner в [31]. Методику расчёта напряжений при намотке описал Richard Southwell в книге [62].

## Chapter 15

# FRACTURES

### § 1. Traditional criteria of toughness

**К**ак судить о прочности тела после определения напряжения в нём? При одноосном растяжении напряжением  $\sigma$  есть, очевидно, некий предел прочности  $\sigma_*$ , выше которого материал разрушается. Прочность считают достаточной при  $\sigma \leq \sigma_*/k$ , где  $k$  это так называемый коэффициент запаса. Но такой подход не вполне удовлетворяет, поскольку определяемые из опыта значения  $\sigma_*$  имеют большой разброс, а выбор коэффициента запаса нередко **становится административным актом**. Тем не менее подобные взгляды на анализ прочности широко распространены. Воздерживаясь от критики, стоит упомянуть самые популярные из них.

**Критерий максимального нормального напряжения:** разрушение происходит при  $\sigma_1 = \sigma_*$  (наибольшее из главных напряжений достигает предельного значения). Но это положение несправедливо для одноосного сжатия, при котором  $\sigma_1 = 0$ .

**Критерий максимального касательного напряжения (Tresca criterion):** разрушение наступает при  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_*$  ( $\sigma_3$  — наименьшее из главных напряжений). Это более соответствует началу пластического течения.

**Критерий максимального удлинения:** наибольшее из собственных значений тензора деформации  $\varepsilon_1 = \varepsilon_*$ . Это приемлемо и при сжатии с  $\varepsilon_1 > 0$ .

**Критерий энергии деформации:**  $\Pi = \Pi_*$ . Здесь учитывается, что разрушение требует энергии, а источником её может быть лишь само деформированное тело. Однако достаточный запас энергии — необходимое, но не единственное условие разрушения;

должен включиться некий механизм преобразования упругой энергии в работу разрушения.

**Критерий энергии формоизменения (von Mises yield criterion):**  
 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 2\tau_*^2$ ,  $\mathbf{s} \equiv \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3}\mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau}$  (“девиатор напряжений”). Здесь не играет роли энергия объёмной деформации. Richard von Mises предложил\* этот критерий как гладкую аппроксимацию условия Henri Tresca.

**Критерий Mohr’a.** Представим себе множество предельных состояний ...

...

## § 2. Antiplane deformation of continuum with a crack

Любая регулярная функция комплексного переменного  $z = x + iy$  содержит в себе решение какой-либо антиплоской задачи статики без ...

...

## § 3. Crack in plane deformation

Рассмотрим плоскую область произвольного очертания с трещиной внутри; нагрузка приложена и “в объёме”, и на внешней границе. Как и при антиплоской деформации, решение строится в два этапа

...

\* **R. von Mises.** Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1913. Seiten 582–592.

## § 4. Crack driving force

Это едва ли не основное понятие механики трещин. Рассмотрим его, следуя

...

## § 5. Criterion of crack growth

Связанная с энергией  $\mathcal{E}$  трещинодвижущая сила  $F$  — не единственное воздействие на фронт трещины. Должна быть ещё некая сила сопротивления  $F_*$ ; рост трещины начинается при условии

...

## § 6. J-integral

Одно из самых известных понятий в механике трещин выражается интегралом

$$J = \dots \quad (6.1)$$

...

## § 7. Stress intensity factors

Расчёт прочности тела с трещиной сводится к определению коэффициентов интенсивности напряжений. Методы расчёта таких коэффициентов — как аналитические, так и численные — хорошо освещены в литературе.

Рассмотрм ещё один подход к задачам механики трещин, разработанный

...

## § 8. Model of Barenblatt

Неограниченный рост напряжений на фронте трещины вызывает некоторые сомнения. Желательно “дать поддержку” сингуляр-



ным решениям какими-либо дополнительными построениями или использованием иной модели. И эту поддержку дала работа

...

## § 9. Deformational criterion

D. S. Dugdale\*, а также М. Я. Леонов и В. В. Панасюк\*\* предложили модель, напоминающую построения Баренблатта. Также есть силы сцепления  $q$  и равен нулю итоговый коэффициент интенсивности напряжений. Но, во-первых,  $q$  имеет иной вид:

...

Второе отличие рассматриваемой модели — в формулировке критерия прочности: трещина начинает расти, когда расхождение берегов в конце свободного участка достигает критического значения  $\delta_*$  (этот параметр — константа материала), то есть при

...

## § 10. Growth of cracks

Пусть нагрузка на тело с трещиной выросла настолько, что выполняется условие

...

## § 11. Elastic field ahead of a moving crack

Рассмотрим этот вопрос

...

\* **Dugdale, D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1960, Volume 8, Issue 2, pages 100–104.

\*\* **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твёрдом теле // Прикладная механика. 1959, Т. 5, № 4, с. 391–401.

## § 12. Balance of energy for a moving crack

Уравнение баланса энергии в линейной теории ( $\Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathbf{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{T} = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ ):

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{T} + \Pi) \dot{\phantom{x}} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{O}. \quad (12.1)$$

...

## Bibliography

Список книг по механике трещин уже велик. В нём сто́ит отметить работы Л. М. Качанова [25], Н. Ф. Морозова [43], В. З. Партона и Е. М. Морозова [56], Г. П. Черепанова [78]. Обзор статей есть у ... Экспериментальные данные представлены, например, в [26].

## *Chapter 16*

# COMPOSITES

### § 1. Introductory thoughts

**И**спользуя глину как строительный материал, в неё добавляют измельчённую солому. Работая с эпоксидной смолой, полезно до затвердевания ввести наполнитель: порошок, волокна, кусочки ткани. Это примеры композитов (композиционных материалов). Новые виды композитов применяются всё шире, вытесняя сталь, алюминиевые сплавы и другие распространённые материалы.

Композиты могут быть определены как неоднородные материалы, в которых происходит некое осреднение с возникновением новых свойств. Обычная механика сплошной среды применима, разумеется, и к композитам. Но едва ли возможно учесть все детали структуры — и неразумно. Необходимы новые подходы, опирающиеся именно на сложность структуры. Ведь, например, в газе

...

### § 2. Effective fields

Любое поле в композите обычно представляется суммой

...

### § 3. Boundary value problems for representative volume

Как определяются упругие модели для “обычной” среды?

...

#### § 4. Hill's fork

Using Voigt and Reuss theories, Hill derived upper and lower bounds on the effective properties of a composite material [Hill, R. W. The elastic behaviour of a crystalline aggregate // Proceedings of the Physical Society. Section A, Volume 65, Issue 5 (May 1952). Pages 349–354.]

Отметив, что

...

#### § 5. Eshelby formulas

Итак, эффективные модули определяются энергией представительного объёма в первой или второй задачах:

...

#### § 6. Effective moduli for material with spherical inclusions

В однородной матрице случайным образом, но достаточно равномерно, распределены сферические включения радиусом  $a$ . Получившийся композит на макроуровне будет изотропным, его упругие свойства полностью определяются ...

...

#### § 7. Self-consistent method

Мы опирались на две задачи для представительного объёма и определяли эффективные модули из равенства энергий. В основе метода самосогласования лежит новая идея: представительный объём помещается в безграничную среду с эффективными свойствами, на бесконечности состояние считается однородным, эффективные модули находятся из некоторых дополнительных условий самосогласования.

Обратимся снова к вопросу об объёмном модуле среды со сферическими включениями. Задача сферически симметрична; для включения по-прежнему

...

### § 8. Hashin–Shtrikman principle

Hashin and Shtrikman derived upper and lower bounds for the effective elastic properties of quasi-isotropic and quasi-homogeneous multiphase materials using a variational approach [Hashin, Z.; Shtrikman, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. Volume 11, Issue 2 (March–April 1963). Pages 127–140.]

Вилка Hill’a основана на обычных экстремальных принципах теории упругости. Специально для механики композитов Hashin и Shtrikman построили очень своеобразный функционал, который на некотором точном решении может иметь как максимум, так и минимум, давая возможность с двух сторон оценивать эффективные модули [83].

Рассмотрим первую из двух задач для представительного объёма

...

### Bibliography

Книги R. Christensen’a [32] и Б. Е. Победри [57] содержат и основы механики композитов, и постановку не теряющих актуальности проблем. Для самого требовательного читателя представляет интерес монография Т. Д. Шермергора [83]. Немало книг посвящено механике разрушения композитов, здесь стоит отметить труд Г. П. Черепанова [77].

*Chapter 17*

## PERIODIC STRUCTURES

### § 1. One-dimensional problem

**В** одномерной задаче статики имеем уравнение  
...

### § 2. Three-dimensional continuum

Исходим из уравнений в перемещениях  
...

### § 3. Fibrous structure

Тензор <sup>4</sup>**A** в этом случае постоянен вдоль оси  
...

### § 4. Statics of a periodic rod

В уравнениях линейной статики стержня  
...

### Bibliography

Лежащий в основе этой главы асимптотический метод представлен (с разной степенью математической стройности) в книгах [5, 6, 30, 57].

## LIST OF PUBLICATIONS

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Изд. 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е изд. «Дрофа», 2004. 592 с.
5. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.
6. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.
7. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
8. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
9. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
10. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.
11. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
12. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. «Наука», 1976. 512 с.
13. **Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 383 с.

14. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.
15. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.
16. **Григолюк Э. И., Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
17. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
18. *Перевод: Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.
19. **Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.
20. **Елисеев В. В.** Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.
21. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод: Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.
22. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.
23. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.
24. **Илюхин А. А.** О построении соотношений теории упругих стержней // Механика твёрдого тела (Киев), 1990, № 22, С. 82–92.
25. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.
26. **Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
27. *Перевод: Кольский Г.* Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.
28. **Cosserat E. et Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
29. *Перевод: Коттрел А.* Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.



30. **Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.
31. **Kröner, Ekkehart** (i) *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. (ii) *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen* // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод: Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.
32. **Christensen, Richard M.** *Mechanics of composite materials*. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод: Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.
33. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с.
34. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
35. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
36. **Лурье А. И.** Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с.
37. *Перевод: Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
38. *Перевод: Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.
39. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.
40. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е изд. «Наука», 1987. 304 с.
41. **Mindlin, Raymond David and Tiersten, Harry F.** Effects of couplestresses in linear elasticity // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод: Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // *Механика: Сб. переводов*. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.
42. **Морозов Н. Ф.** Избранные двумерные задачи теории упругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 182 с.
43. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.

44. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. «Наука», 1966. 708 с.
45. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.
46. **Новацкий В.** Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.
47. **Новацкий В.** Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.
48. **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.
49. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е изд. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
50. **Пановко Я. Г.** Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы. Изд. 2-е. URSS, 2017. 288 с.
51. **Пановко Я. Г., Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.
52. **Пановко Я. Г., Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е изд. «Наука», 1987. 352 с.
53. **Heinz Parkus.** Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод: Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
54. **Партон В. З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.
55. **Партон В. З., Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.
56. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е изд. «Наука», 1985. 504 с.
57. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
58. **Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.

59. **Понятовский В. В.** Вывод уравнений тонкостенных стержней–оболочек открытого профиля из уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования // Исследования по упругости и пластичности. Изд-во ЛГУ, 1980. Вып. 13. С. 40–48.
60. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.
61. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твёрдого тела. 2-е изд. «Наука», 1988. 712 с.
62. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод: Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.
63. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Том 2. 6-е изд. «Лань», 2004. 560 с.
64. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
65. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B.V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод: Съярле Ф.* Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.
66. **Teodosiu, Cristian.** Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод: Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.
67. **Тимошенко С. П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.
68. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.
69. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости. «Наука», 1979. 560 с.
70. **Timoshenko, Stephen P.; Young, Donovan H.; William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод: Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
71. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.

72. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод: Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.
73. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод: Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.
74. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е изд. «Наука», 1975. 173 с.
75. *Перевод: Хеллан К.* Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.
76. *Перевод: Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.
77. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.
78. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.
79. **Чернина В. С.** Статика тонкостенных оболочек вращения. «Наука», 1968. 456 с.
80. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.
81. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
82. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.
83. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.
84. **Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.

### *Tensors and tensor calculus*

85. **McConnell, Albert Joseph.** Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод: Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

86. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод: Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.
87. **Борисенко А. И., Тарапов И. Е.** Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Изд. 6-е. Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьковском ун-те, 1986. 216 с.
88. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд. 3-е. «Наука», 1967. 664 с.
89. **Сокольников И. С.** Тензорный анализ. «Наука», 1971. 376 с.

*Generic mechanics, thermodynamics, electromagnetism*

90. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew.** The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online: The Feynman Lectures on Physics. Online edition.*
91. **Goldstein, Herbert; Poole, Charles P.; Saffko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison-Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод: Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж.* Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
92. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод: Парс Л. А.* Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.
93. **Ter Haar, Dirk.** Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод: Тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.
94. **Беляев Н. М., Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.
95. **Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.
96. **Гантмахер Ф. Р.** Лекции по аналитической механике. Изд. 2-е. «Наука», 1966. 300 с.
97. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.
98. **Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е изд. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е изд. 719 с.
99. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

100. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е изд. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.
101. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е изд. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

*Variational methods*

102. **Karel Rektorys.** Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation: Rektorys, Karel.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D. Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод: Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
103. **Washizu, Kyuichiro.** Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод: Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
104. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.
105. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Изд. 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

*Perturbation methods (asymptotic methods)*

106. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод: Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.
107. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.
108. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-Interscience, 1973. 425 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Методы возмущений. «Мир», 1976. 456 с.
109. **Бабич В. М., Булдырев В. С.** Искусство асимптотики // Вестник ЛГУ, 1977, № 13, вып. 3, С. 5–12.
110. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.
111. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

112. **Зино И. Е., Тропш Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
113. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е изд. «Наука», 1981. 400 с.

*Other topics of mathematics*

114. **Collatz, Lothar.** Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод: Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.
115. **Dwight, Herbert Bristol.** Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод: Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд. 4-е. «Наука», 1973. 228 с.
116. **Kamke, Erich.** Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод: Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд. «Лань», 2003. 576 с.
117. **Korn, Granino A. and Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод: Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.
118. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. «Наука», 1971. 416 с.
119. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд. «Наука», 1973. 736 с.
120. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Изд. 6-е. «Наука», 1974. 176 с.
121. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. 6-е изд. Изд-во МГУ, 1999. 798 с.