

Vadique Myself

# PHYSICS *of* ELASTIC CONTINUA

© MMXIX-MMXX *Vadique*

УДК 539.3 *Механика деформируемых тел. Упругость. Деформации*  
УДК 539 *Строение материи*  
УДК 53 *Физика*  
УДК 5 *Математика. Естественные науки*

UDC 539.3 *Elasticity. Deformation. Mechanics of elastic solids*  
UDC 539 *Physical nature of matter*  
UDC 53 *Physics*  
UDC 5 *Mathematics. Natural sciences*

All models of elastic continua are presented: nonlinear and linear, micropolar and classical momentless; three-dimensional, two-dimensional (shells and plates), one-dimensional (rods, including thin-walled ones). For thermoelasticity and magnetoelasticity, summary of laws of thermodynamics and electrodynamics is given. Fundamentals of dynamics — oscillations, waves and stability — are explained. Theories of defects, fractures, composites and periodic structures are described.

Представлены все модели упругих сред: нелинейные и линейные, микрополярные и классические безмоментные; трёхмерные, двумерные (оболочки и пластины), одномерные (стержни, в том числе тонкостенные). Для термоупругости и магнитоупругости дана сводка законов термодинамики и электродинамики. Изложены основы динамики — колебания, волны и устойчивость. Описаны теории дефектов, трещин, композитов и периодических структур.

# CONTENTS

<i>Chapter 1</i>	<b>Elements of tensor calculus</b>	<b>10</b>
§ 1.	Vectors	10
§ 2.	Tensor and its components	12
§ 3.	Operations with tensors	14
§ 4.	Polyadic representation (decomposition)	16
§ 5.	Matrices, permutations and determinants	18
§ 6.	Cross product and Levi-Civita tensor	20
§ 7.	Symmetric and antisymmetric tensors	25
§ 8.	Eigenvectors and eigenvalues of tensor	28
§ 9.	Rotation tensor	30
§ 10.	Variations	35
§ 11.	Polar decomposition	36
§ 12.	Tensors in oblique basis	38
§ 13.	Tensor functions	44
§ 14.	Tensor fields. Differentiation	45
§ 15.	Integral theorems	49
§ 16.	Curvature tensors	52
<i>Chapter 2</i>	<b>Fundamentals of generic mechanics</b>	<b>56</b>
§ 1.	Discrete collection of particles	56
§ 2.	Absolutely rigid undeformable solid body	58
§ 3.	Principle of virtual work	61
§ 4.	Balance of momentum, rotational momentum, and energy	62
§ 5.	Hamilton's principle and Lagrange's equations	64
§ 6.	Statics	65

§ 7. Mechanics of relative motion . . . . .	68
§ 8. Small oscillations (vibrations) . . . . .	69
<i>Chapter 3</i> <b>Nonlinear elastic momentless continuum</b> . . . . .	<b>71</b>
§ 1. Model of continuum. Descriptions of processes . . . . .	71
§ 2. Differentiation . . . . .	72
§ 3. Motion gradient . . . . .	74
§ 4. Measures (tensors) of deformation . . . . .	75
§ 5. Velocity field . . . . .	79
§ 6. Area vector. Surface change . . . . .	81
§ 7. Forces in continuum. Cauchy stress tensor . . . . .	81
§ 8. Balance of momentum and rotational momentum . . . . .	82
§ 9. Eigenvalues of Cauchy stress tensor . . . . .	84
§ 10. Principle of virtual work (without Lagrange multipliers) . . . . .	85
§ 11. Constitutive relations of elasticity . . . . .	86
§ 12. Piola–Kirchhoff stress tensors and other measures of stress . . . . .	88
§ 13. Variation of present configuration . . . . .	93
§ 14. Internal constraints . . . . .	93
§ 15. Hollow sphere under pressure . . . . .	94
§ 16. Stresses as Lagrange multipliers . . . . .	95
<i>Chapter 4</i> <b>Classical linear elasticity</b> . . . . .	<b>97</b>
§ 1. Complete set of equations . . . . .	97
§ 2. Uniqueness of the solution in dynamics . . . . .	99
§ 3. Hooke’s law . . . . .	101
§ 4. Theorems of statics . . . . .	104
§ 5. Equations for displacements . . . . .	107
§ 6. Concentrated force in an infinite medium . . . . .	108
§ 7. Finding displacements by deformations . . . . .	108
§ 8. Equations for stresses . . . . .	109
§ 9. Principle of minimum potential energy . . . . .	109
§ 10. Principle of minimum complementary energy . . . . .	110
§ 11. Mixed principles of stationarity . . . . .	111
§ 12. Antiplane shear . . . . .	112

§ 13. Twisting of rods .....	112
§ 14. Plane deformation .....	113
<b>Chapter 5 Micropolar three-dimensional continuum</b> .....	<b>114</b>
§ 1. Introduction to linear micropolar theory .....	114
§ 2. Relations of elasticity .....	118
§ 3. Compatibility equations .....	120
§ 4. Theorems of statics .....	120
§ 5. Cosserat pseudocontinuum .....	120
§ 6. Plane deformation .....	121
§ 7. Nonlinear theory .....	121
§ 8. Nonlinear model with constrained rotation .....	123
<b>Chapter 6 Thermoelasticity</b> .....	<b>125</b>
§ 1. First law of thermodynamics .....	125
§ 2. Second law .....	127
§ 3. Constitutive equations .....	128
§ 4. Heat equation .....	128
§ 5. Linear thermoelasticity .....	129
§ 6. Equations for displacements .....	129
§ 7. Thermal stress .....	129
§ 8. Variational formulations .....	129
<b>Chapter 7 Magnetoelasticity</b> .....	<b>131</b>
§ 1. Electromagnetic field. Electromagnetic waves .....	131
§ 2. Electrostatics .....	134
§ 3. Dielectrics .....	135
§ 4. Magnetostatics .....	135
§ 5. Magnetism .....	135
§ 6. Magnetic rigidity .....	135
<b>Chapter 8 Perturbation methods (asymptotic methods)</b> .....	<b>138</b>
§ 1. Asymptotic decompositions .....	138
§ 2. Splitting in a linear algebraic system .....	138

§ 3. Poincaré method .....	139
§ 4. Van der Pol averaging method .....	139
§ 5. Coalescence of asymptotic decompositions .....	140
§ 6. Multiple-scale analysis (method of multiple scales) .....	140
§ 7. Equations with slowly varying parameters .....	140
§ 8. Thin bodies .....	140
<b>Chapter 9 Rods</b> .....	<b>142</b>
§ 1. Initial concepts .....	142
§ 2. Kinematics of Cosserat lines .....	143
§ 3. Balance of forces and moments .....	143
§ 4. Principle of virtual work and its consequences .....	143
§ 5. Classical Kirchhoff's model .....	144
§ 6. Euler's problem .....	144
§ 7. Variational equations .....	144
§ 8. Non-shear model with (ex)tension .....	144
§ 9. Mechanics of flexible thread .....	145
§ 10. Linear theory .....	145
§ 11. Case of small thickness .....	145
§ 12. Saint-Venant's problem .....	146
§ 13. Finding stiffness by energy .....	146
§ 14. Variational method of building one-dimensional model .....	147
§ 15. Asymptotic splitting of three-dimensional problem .....	148
§ 16. Thermal deformation and stress .....	148
<b>Chapter 10 Thin-walled rods</b> .....	<b>150</b>
§ 1. Variational approach .....	150
§ 2. Equations with small parameter .....	150
§ 3. First step of the asymptotic procedure .....	150
§ 4. Second step .....	151
§ 5. Third step .....	151
§ 6. Fourth step .....	152
§ 7. Displacements .....	152
§ 8. Results of asymptotic analysis .....	152

<i>Chapter 11</i>	<b>Shells and plates</b>	<b>154</b>
§ 1.	Surface geometry	154
§ 2.	Model of a shell	155
§ 3.	Balance of forces and moments for a shell	155
§ 4.	Shells: Relations of elasticity	155
§ 5.	Classical theory of shells	155
§ 6.	Shells: A plate	156
§ 7.	Shells: Approach with Lagrange multipliers	156
§ 8.	Cylindrical shell	156
§ 9.	Shells: Common theorems	157
§ 10.	Shells: Boundary conditions	157
§ 11.	Shells of revolution	157
§ 12.	Momentless theory of shells	157
§ 13.	Shells: Nonlinear momentless theory	158
§ 14.	Shells: Other variant of classical theory	158
§ 15.	Plates: Overall concepts	158
§ 16.	Timoshenko-like model of a plate (direct approach)	159
§ 17.	Kirchhoff's classical theory of plates	159
§ 18.	Plates: Asymptotic matching of two-dimensional models	159
§ 19.	Plates: Variational transition from three-dimensional model	159
§ 20.	Plates: Splitting of three-dimensional bending problem	160
§ 21.	Circular plates	160
§ 22.	Plates: Plane stress	160
<i>Chapter 12</i>	<b>Oscillations and waves</b>	<b>161</b>
§ 1.	Vibrations of a three-dimensional body	161
§ 2.	Vibrations of a rod	162
§ 3.	Small perturbations of parameters	162
§ 4.	Vibrations of a shell	162
§ 5.	Waves in an elastic continuum	162
§ 6.	Waves in a rod	163
§ 7.	Nonlinear oscillations	163

<i>Chapter 13</i>	<b>Stability</b>	<b>164</b>
§ 1.	Various approaches to the problem of stability	164
§ 2.	Classical problems with rods	165
§ 3.	“Tracking” loads	165
§ 4.	The role of additional pliabilities	165
§ 5.	Variational formulations	165
§ 6.	Nonconservative problems	166
§ 7.	Case of multiple roots	166
<i>Chapter 14</i>	<b>Defects</b>	<b>167</b>
§ 1.	Volterra dislocations	167
§ 2.	Straight-line dislocations	167
§ 3.	Action of stress field on dislocation	167
§ 4.	About movement of dislocations	168
§ 5.	Point defects	168
§ 6.	Force acting on point defect	168
§ 7.	Continuously distributed dislocations	168
§ 8.	Stress during winding of coil	168
<i>Chapter 15</i>	<b>Fractures</b>	<b>170</b>
§ 1.	Traditional criteria of toughness	170
§ 2.	Antiplane deformation of continuum with a crack	171
§ 3.	Crack in plane deformation	171
§ 4.	Crack-driving force	171
§ 5.	Criterion of crack growth	172
§ 6.	J-integral	172
§ 7.	Stress intensity factors	172
§ 8.	Barenblatt’s model	172
§ 9.	Deformational criterion	173
§ 10.	Growth of cracks	173
§ 11.	Elastic field ahead of a moving crack	173
§ 12.	Balance of energy for a moving crack	174



<i>Chapter 16</i>	<b>Composites</b>	<b>175</b>
§ 1.	Introductory thoughts	175
§ 2.	Effective fields	176
§ 3.	Boundary value problems for representative volume	176
§ 4.	Hill's fork	176
§ 5.	Eshelby formulas	177
§ 6.	Effective moduli for material with spherical inclusions	177
§ 7.	Self-consistent method	177
§ 8.	Hashin–Shtrikman principle	177
<i>Chapter 17</i>	<b>Periodic composites</b>	<b>179</b>
§ 1.	One-dimensional problem	179
§ 2.	Three-dimensional continuum	179
§ 3.	Fibrous structure	179
§ 4.	Statics of a periodic rod	179
	<b>List of publications</b>	<b>180</b>

# chapter 1

## ELEMENTS OF TENSOR CALCULUS

### §1. Vectors

Mention of tensors may scare away the reader, commonly avoiding needless complications. Don't be afraid: tensors are introduced just because of their wonderful property of being invariant — independent of coordinate systems. I propose to begin familiarizing with tensors via reminiscences about such a phenomenon as a vector.

Here's vector  $\mathbf{v}$ , it is pretty well characterized by its length (modulus, magnitude) and direction in space, but does not depend on methods and units of measurements of neither lengths nor directions.

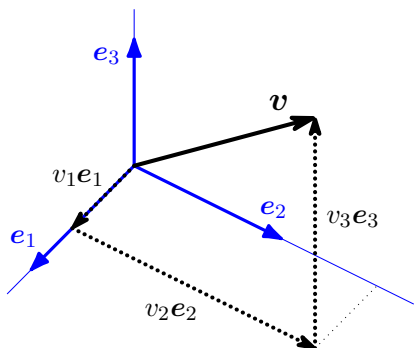


figure 1

Introduce cartesian coordinates with mutually perpendicular unit vectors  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  as a basis. With such a system, “ $\cdot$ ”-products of basis vectors are equal to the Kronecker delta:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Decomposing vector  $\mathbf{v}$  in basis  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), we get components of  $\mathbf{v}$  in that basis (fig. 1)

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i \equiv v_i \mathbf{e}_i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = |\mathbf{v}| \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i). \quad (1.1)$$

Here and hereinafter, Einstein's summation convention is accepted: having an index repeated twice in a single term implies summation over this index. Such an index can't be repeated more than twice in the same term. And a non-repeating index is called “free”, it's identical in both parts of equation. These are examples:

$$\sigma = \tau_{ii}, \quad p_j = n_i \tau_{ij}, \quad m_i = e_{ijk} x_j f_k, \quad a_i = \lambda b_i + \mu c_i.$$

But next equations are incorrect

$$a = b_{kkk}, \quad c = f_i + g_k, \quad a_{ij} = k_i \gamma_{ij}.$$

Vector  $\mathbf{v}$  is invariant, it doesn't depend on any coordinate system. Decomposition in two cartesian systems with basis unit vectors  $\mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{e}'_i$  (fig. 2) gives

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v'_i \mathbf{e}'_i,$$

where

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k = \underbrace{v_k}_{v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = v_i \delta_{ik}} = v'_i \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_k = v'_k = v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k.$$

Orthonormal basis vectors of an “old” and a “new” — rotated — cartesian coordinates are

connected via rotation matrix (matrix of “direction” cosines)  $o_{i'k}$ :

$$\mathbf{e}'_i = o_{i'k} \mathbf{e}_k, \quad (\cdot \mathbf{e}_k) \Rightarrow o_{i'k} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k = \cos \angle(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k). \quad (1.2)$$

Matrix of cosines is orthogonal, meaning that it inverses on transposing:

$$o_{i'k} o_{j'k} = o_{k'i} o_{k'j} = \delta_{ij} \quad (1.3)$$

(proof:  $\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = o_{i'k} \mathbf{e}_k \cdot o_{j'n} \mathbf{e}_n = o_{i'k} o_{j'n} \delta_{kn} = o_{i'k} o_{j'k}$ ).

Multiplying an orthogonal matrix by components of any vector retains the length (modulus) of this vector:

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v'_i v'_i = o_{i'k} v_k o_{i'n} v_n = v_n v_n$$

— this conclusion leans on (1.3).

Orthogonal transformation of vector components

$$v'_i = v_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i = o_{i'k} v_k \quad (1.4)$$

is sometimes used to define a vector itself. Suppose that in each orthonormal basis  $\mathbf{e}_i$  a triplet of numbers  $v_i$  is known, and with a transition to a new orthonormal basis it's transformed according

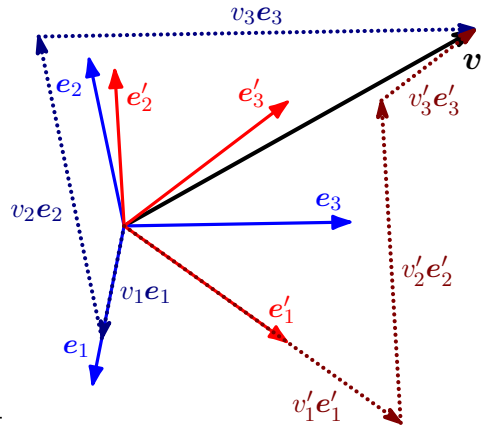


figure 2

to (1.4); then this triplet of components represents an invariant object — vector  $\mathbf{v}$ .

## § 2. Tensor and its components

When in each orthonormal basis  $\mathbf{e}_i$  we have a set of nine ( $3^2 = 9$ ) numbers  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), which is transformed during transition to a new (rotated) orthonormal basis as

$$B'_{ij} = o_{i'm} o_{j'n} B_{mn}, \quad (2.1)$$

then this set of components represents an invariant object — tensor of second complexity (of second valence, bivalent)  ${}^2\mathbf{B}$ .

In other words, tensor  ${}^2\mathbf{B}$  reveals in every basis as a collection of its components  $B_{ij}$ , changing along with a basis according to (2.1).

The key example of second complexity tensor is a dyad. Having two vectors  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ , in each basis  $\mathbf{e}_i$  assume  $d_{ij} \equiv a_i b_j$ . It's easy to see how components  $d_{ij}$  transform according to (2.1):

$$a'_i = o_{i'm} a_m, \quad b'_j = o_{j'n} b_n \Rightarrow d'_{ij} = a'_i b'_j = o_{i'm} a_m o_{j'n} b_n = o_{i'm} o_{j'n} d_{mn}.$$

Resulting tensor  ${}^2\mathbf{d}$  is called a dyadic product or just dyad and is written as  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  or  $\mathbf{ab}$ . I choose notation  ${}^2\mathbf{d} = \mathbf{ab}$  without symbol  $\otimes$ .

Essential example of a bivalent tensor is the unit dyad (other names are unit tensor, identity tensor and metric tensor). Let for any orthonormal (cartesian) basis  $E_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ . These are really components of tensor, (2.1) is actual:  $E'_{mn} = o_{m'i} o_{n'j} E_{ij} = o_{m'i} o_{n'i} = \delta_{mn}$ . I write this tensor as  $\mathbf{E}$  (other popular choices are  $\mathbf{I}$  and  ${}^2\mathbf{1}$ ).

Immutability of components upon any rotation makes tensor  $\mathbf{E}$  isotropic. There are no non-null vectors with such property (all components of null vector  $\mathbf{0}$  are zero in any basis).

The next example is related to a linear transformation (linear mapping) of vectors. If  $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$  is linear (preserving addition and multiplication by number) function of  $\mathbf{a} = a_j \mathbf{e}_j$ , then  $b_i = c_{ij} a_j$  in every basis. Transformation coefficients  $c_{ij}$  alter when a basis rotates:

$$b'_i = c'_{ij} a'_j = o_{i'k} b_k = o_{i'k} c_{kn} a_n, \quad a_n = o_{j'n} a'_j \Rightarrow c'_{ij} = o_{i'k} o_{j'n} c_{kn}.$$

It turns out that a set of matrices  $c_{ij}$ ,  $c'_{ij}$ ,  $\dots$ , describing the same linear mapping  $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ , but in various bases, represents a single invariant

object — tensor of second complexity <sup>2</sup> $\mathbf{c}$ . And many book authors introduce tensors in that way, by means of linear mappings (linear transformations).

And the last example is about a bilinear form  $F = f_{ij}a_ib_j$ , where  $f_{ij}$  are coefficients,  $a_i$  and  $b_j$  are components of vector arguments  $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{b} = b_j\mathbf{e}_j$ . The result  $F$  is invariant (independent from basis),  $F' = f'_{ij}a'_ib'_j = F$ , this gives transformation (2.1) for coefficients  $f_{ij}$ :

$$f'_{ij}a'_ib'_j = f_{mn}\underbrace{a_m}_{o_{i'm}a'_{i'n}}\underbrace{b_n}_{o_{j'n}b'_j} \Rightarrow f'_{ij} = o_{i'm}o_{j'n}f_{mn}.$$

If  $f_{ij} = \delta_{ij}$ , then  $F = \delta_{ij}a_ib_j = a_ib_i$  — scalar product (inner product, dot product) of two vectors. When both arguments are the same ( $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ ), such homogeneous polynomial of second degree (quadratic) of vector components  $F = f_{ij}a_ia_j$  is called a quadratic form.

Now for more complex tensors (of valence larger than two). Tensor of third complexity <sup>3</sup> $\mathbf{C}$  is represented by a collection of  $3^3 = 27$  numbers  $C_{ijk}$ , transforming as

$$C'_{ijk} = o_{i'p}o_{j'q}o_{k'r}C_{pqr}. \quad (2.2)$$

The primary example is a triad of three vectors  $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{b} = b_j\mathbf{e}_j$  and  $\mathbf{c} = c_k\mathbf{e}_k$ :

$$t_{ijk} \equiv a_ib_jc_k \Leftrightarrow {}^3\mathbf{t} = \mathbf{abc}.$$

It is seen that orthogonal transformations (2.2) and (2.1) are results of “repeating” vector’s (1.4). The reader will easily compose a transformation of components for tensor of any complexity and will write a corresponding polyad as an example.

Vectors with transformation (1.4) are tensors of first complexity.

In the end consider the least complex objects — scalars, they are tensors of zeroth complexity. A scalar is a single ( $3^0 = 1$ ) number, which doesn’t depend on a basis: energy, mass, temperature et al. But what are components, for example, of vector  $\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i$ ,  $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ ? If not scalars, then what? Here could be no simple answer. In each particular basis,  $\mathbf{e}_i$  are vectors and  $v_i$  are scalars.

### § 3. Operations with tensors

There're four of them.

The first — **linear combination** — aggregates addition and multiplication by number. Arguments of this operation and the result are of the same complexity. For two tensors it looks like this:

$$\lambda a_{ij\dots} + \mu b_{ij\dots} = c_{ij\dots} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{c}. \quad (3.1)$$

Here  $\lambda$  and  $\mu$  are scalar coefficients;  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{c}$  are tensors of the same complexity. It's easy to show that components of result  $\mathbf{c}$  satisfy the orthogonal transformation like (2.1).

“Decomposition of a vector in a basis” — representation of a vector as the sum  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$  — is nothing else but the linear combination of basis vectors  $\mathbf{e}_i$  with coefficients  $v_i$ .

The second operation is **multiplication (tensor product, direct product)**. It takes arguments of any complexities, returning the result of cumulative complexity. Examples:

$$\begin{aligned} v_i a_{jk} &= C_{ijk} \Leftrightarrow \mathbf{v}^2 \mathbf{a} = {}^3\mathbf{C}, \\ a_{ij} B_{abc} &= D_{ijabc} \Leftrightarrow {}^2\mathbf{a} {}^3\mathbf{B} = {}^5\mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Transformation of a collection of result's components, such as  $C_{ijk} = v_i a_{jk}$ , during rotation of basis is orthogonal, similar to (2.2), thus here's no doubt that this collection is a set of tensor components.

Primary and already known (from § 2) subtype of multiplication is the dyadic product of two vectors  ${}^2\mathbf{A} = \mathbf{b}\mathbf{c}$ .

The third operation is called **contraction**. It applies to bivalent and more complex tensors. This operation acts upon a single tensor, without other “participants”. Roughly speaking, contracting a tensor is summing of its components over some pair of indices. As a result, tensor's complexity decreases by two.

For trivalent tensor  ${}^3\mathbf{D}$ , three variants of contraction are possible, giving vectors  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{c}$  with components

$$a_i = D_{kki}, \quad b_i = D_{kik}, \quad c_i = D_{ikk}. \quad (3.3)$$

A rotation of basis

$$a'_i = D'_{kki} = \underbrace{o_{k'p} o_{k'q}}_{\delta_{pq}} o_{i'r} D_{pqr} = o_{i'r} D_{ppr} = o_{i'r} a_r$$

shows “the tensorial nature” of the result of contraction.

For a tensor of second complexity, the only one variant of contraction is possible, giving a scalar called the trace or the first invariant

$$\mathbf{B}_\bullet \equiv \text{tr } \mathbf{B} \equiv \text{I}(\mathbf{B}) = B_{kk}.$$

The trace of the unit tensor (“contraction of the Kronecker delta”) is equal to the dimension of space

$$\text{tr } \mathbf{E} = \mathbf{E}_\bullet = \delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

The fourth operation is also applicable to a single tensor of second and larger complexities. It is named as **index swap, index juggling, transposing**. Из компонент тензора образуется новая совокупность величин с другой последовательностью индексов, результатом является тензор той же сложности. Из тензора  ${}^3\mathbf{D}$ , например, могут быть получены тензоры  ${}^3\mathbf{A}$ ,  ${}^3\mathbf{B}$ ,  ${}^3\mathbf{C}$  с компонентами

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{A} &= {}^3\mathbf{D}_{1\rightleftharpoons 2} \Leftrightarrow A_{ijk} = D_{jik}, \\ {}^3\mathbf{B} &= {}^3\mathbf{D}_{1\rightleftharpoons 3} \Leftrightarrow B_{ijk} = D_{kji}, \\ {}^3\mathbf{C} &= {}^3\mathbf{D}_{2\rightleftharpoons 3} \Leftrightarrow C_{ijk} = D_{ikj}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

For a bivalent tensor, the only one transposition is possible:  $\mathbf{A}^\top \equiv \mathbf{A}_{1\rightleftharpoons 2} = \mathbf{B} \Leftrightarrow B_{ij} = A_{ji}$ . Obviously  $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$ .

В диадном умножении векторов  $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}^\top$ .

Представленные четыре действия комбинируются в разных сочетаниях. Комбинация умножения и свёртки — dot product — самая частая, в инвариантной безындексной записи она обозначается точкой, показывающей свёртку по соседним индексам:

$$a_i = B_{ij}c_j \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}, \quad A_{ij} = B_{ik}C_{kj} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}. \quad (3.5)$$

Определяющее свойство единичного тензора

$${}^n\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{a} = {}^n\mathbf{a} \quad \forall {}^n\mathbf{a} \quad \forall n > 0. \quad (3.6)$$

В коммутативном скалярном произведении двух векторов точка имеет тот же смысл:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{ab})_\bullet = \text{tr } \mathbf{ab} = a_ib_i = b_ia_i = \text{tr } \mathbf{ba} = (\mathbf{ba})_\bullet = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.7)$$

Для dot product’a тензоров второй сложности справедливо следующее

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q} &= (\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{B}^\top)^\top \\ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q})^\top &= \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{B}^\top \end{aligned} \quad (3.8)$$

(например, для диад  $B = bd$  и  $Q = pq$

$$\begin{aligned} (bd \cdot pq)^\top &= pq^\top \cdot bd^\top \\ d_i p_i b q^\top &= q p \cdot db \\ d_i p_i q b &= p_i d_i q b \end{aligned}$$

For a vector and a bivalent tensor

$$c \cdot B = B^\top \cdot c, \quad B \cdot c = c \cdot B^\top. \quad (3.9)$$

Contraction can be repeated:  $A \cdot\cdot B = A_{ij} B_{ji}$ , and here are useful equations for second complexity tensors

$$\begin{aligned} A \cdot\cdot B &= B \cdot\cdot A, \quad d \cdot A \cdot b = A \cdot\cdot bd = bd \cdot\cdot A = b_j d_i A_{ij}, \\ A \cdot\cdot B &= A^\top \cdot\cdot B^\top = A_{ij} B_{ji}, \quad A \cdot\cdot B^\top = A^\top \cdot\cdot B = A_{ij} B_{ij}, \\ A \cdot\cdot E &= E \cdot\cdot A = A_\bullet = A_{jj}, \\ A \cdot B \cdot\cdot E &= A_{ij} B_{jk} \delta_{ki} = A \cdot\cdot B, \quad A \cdot A \cdot\cdot E = A \cdot\cdot A, \\ A \cdot\cdot B \cdot C &= A \cdot B \cdot\cdot C = C \cdot\cdot A \cdot B = A_{ij} B_{jk} C_{ki}, \\ A \cdot\cdot B \cdot C \cdot D &= A \cdot B \cdot\cdot C \cdot D = A \cdot B \cdot C \cdot\cdot D = \\ &= D \cdot\cdot A \cdot B \cdot C = A_{ij} B_{jk} C_{kh} D_{hi}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

## § 4. Polyadic representation (decomposition)

In § 2, a tensor was presented as some invariant object, showing itself in every basis as a collection of numbers (components). Such a representation is typical for majority of books about tensors. Index notation can be constructive, especially when cartesian coordinates are sufficient, but quite often it is not. And the relevant case is physics of elastic continua: it needs more elegant, more powerful and perfect apparatus of the direct tensor calculus, operating just with indexless invariant objects.

Linear combination  $v = v_i e_i$  from (1.1) connects vector  $v$  with basis  $e_i$  and vector's components  $v_i$  in that basis. Soon we will get the similar relation for a tensor of any complexity.

Any bivalent tensor  ${}^2B$  is described by nine components  $B_{ij}$  in each basis. The number of various dyads  $e_i e_j$  in the same basis is nine ( $3^2$ ) too. Linear combining of these dyads with coefficients  $B_{ij}$  gives the sum  $B_{ij} e_i e_j$ . This is tensor,— but what are its components,



and how does this representation change (or doesn't change) with a rotation of basis?

Components of the constructed sum

$$(B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)_{pq} = B_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = B_{pq}$$

are components of tensor  ${}^2\mathbf{B}$ . And with a rotation of basis

$$B'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = o_{i'p} o_{j'q} B_{pq} o_{i'n} o_{j'm} \mathbf{e}_n o_{j'm} \mathbf{e}_m = \delta_{pn} \delta_{qm} B_{pq} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m = B_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q.$$

Сомнения отпали — приходим к диадному представлению тензора второй сложности

$${}^2\mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (4.1)$$

Для единичной диады (единичного тензора) (that's why it is called the unit dyad)

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Polyadic representations like (4.1) помогают проще и с бóльшим пониманием оперировать с тензорами:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot {}^2\mathbf{B} &= v_i \mathbf{e}_i \cdot B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = v_i B_{jk} \delta_{ij} \mathbf{e}_k = v_i B_{ik} \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{e}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_i \cdot B_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_j = B_{pq} \delta_{ip} \delta_{jq} = B_{ij} = {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Последняя строчка весьма интересна: компоненты тензора выражены через сам тензор. Ортогональное преобразование компонент при повороте базиса (2.1) оказывается очевидным следствием (4.2).

Аналогичным образом по базисным полиадам разлагается тензор любой сложности. Например, для трёхвалентного тензора

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{C} &= C_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k, \\ C_{ijk} &= {}^3\mathbf{C} \cdots \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot {}^3\mathbf{C} \cdots \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \cdots {}^3\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_k. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Using decomposition into polyads, легко увидеть справедливость свойства (3.6) “единичности” тензора  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} {}^n\mathbf{a} &= a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q, \quad \mathbf{E} = \mathbf{e}_e \mathbf{e}_e \\ {}^n\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} &= a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \underbrace{\mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_e}_{\delta_{eq}} \mathbf{e}_e = a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = {}^n\mathbf{a}, \\ \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{a} &= \mathbf{e}_e \mathbf{e}_e \cdot a_{ij\dots q} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = a_{ij\dots q} \delta_{ei} \mathbf{e}_e \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_q = {}^n\mathbf{a}. \end{aligned}$$

A polyadic representation connects direct and index notations together. It's not worth contraposing one another. The direct notation

is compact, elegant, it much more than others suits for final relations. Но и индексная запись бывает удобна, например, при громоздких выкладках с тензорами.

## § 5. Matrices, permutations and determinants

It's sometimes pretty convenient to represent the set of components of a bivalent tensor in some basis as matrix

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

...

Widespread in literature substitution of tensors for matrices of components leads to mistakes — without tracking the basis to which these matrices correspond.

...

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

...

... Вводится символ перестановки (permutation symbol) O. Veblen'a  $e_{ijk}$ \*

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \quad e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1,$$

остальные нули. Символ  $e_{ijk}$  ( $\pm 1$  или 0) меняет знак при перестановке любых двух индексов, не меняется при двойной (“круговой”) перестановке, а при совпадении какой-либо пары индексов обращается в нуль.

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{when there is a repeated index in } ijk, \\ +1 & \text{when an even number of permutations of } ijk \text{ is present,} \\ -1 & \text{when an odd number of permutations of } ijk \text{ is present.} \end{cases}$$

...

\* The number of indices in  $e$ -symbols is equal to the dimension of space.

Используя  $e$ -symbols Веблена, the determinant of a matrix is expressed as

$$e_{pqr} \det_{m,n} A_{mn} = e_{ijk} A_{pi} A_{qj} A_{rk} = e_{ijk} A_{ip} A_{jq} A_{kr}. \quad (5.1)$$

... for 123

$$\det_{m,n} A_{mn} = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = e_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$$

$$\det_{m,n} A_{mn} = A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23} A_{32} - A_{12} A_{21} A_{33} + \\ + A_{12} A_{23} A_{31} + A_{13} A_{21} A_{32} - A_{13} A_{22} A_{31}$$

...

$$e_{pqr} \det_{m,n} A_{mn} = \det \begin{bmatrix} A_{1p} & A_{1q} & A_{1r} \\ A_{2p} & A_{2q} & A_{2r} \\ A_{3p} & A_{3q} & A_{3r} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_{p1} & A_{p2} & A_{p3} \\ A_{q1} & A_{q2} & A_{q3} \\ A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} \end{bmatrix}$$

...

$$\det_{i,j} \delta_{ij} = 1$$

...

А символ перестановки через детерминант — как

$$e_{pqr} = e_{ijk} \delta_{pi} \delta_{qj} \delta_{rk} = e_{ijk} \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr} \\ e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

...

Определитель не чувствителен к транспонированию:

$$\det_{i,j} A_{ij} = \det_{i,j} A_{ji} = \det_{j,i} A_{ij}.$$

...

“Определитель произведения равен произведению определителей”

$$\det_{i,k} B_{ik} \det_{k,j} C_{kj} = \det_{i,j} B_{ik} C_{kj} \quad (5.3)$$

$$e_{fgh} \det_{m,n} B_{ms} C_{sn} = e_{pqr} B_{fi} C_{ip} B_{gj} C_{jq} B_{hk} C_{kr}$$

$$e_{fgh} \det_{m,s} B_{ms} = e_{ijk} B_{fi} B_{gj} B_{hk}$$

$$e_{ijk} \det_{s,n} C_{sn} = e_{pqr} C_{ip} C_{jq} C_{kr}$$

$$e_{fgh} e_{ijk} \det_{m,s} B_{ms} \det_{s,n} C_{sn} = e_{ijk} e_{pqr} B_{fi} B_{gj} B_{hk} C_{ip} C_{jq} C_{kr}$$

...

Определитель компонент of a bivalent tensor is the invariant, он не меняется с поворотом базиса

$$A'_{ij} = o_{i'm} o_{j'n} A_{mn}$$

...

## § 6. Cross product and Levi-Civita tensor

By habitual notions, a “cross product” (“vector product”, sometimes “oriented area product”) of two vectors is a vector, heading perpendicular to the plane of multipliers, whose length is equal to the area of parallelogram, spanned by multipliers

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

However, a cross product isn't quite a vector, since it is not completely invariant.

To begin with, a cross product may be oriented in either of two possible ways (fig. 3). Since the orientation of product  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  is determined — yet except a sign — by multipliers, the sequential triple of vectors  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{c}$  is what is going to be oriented: one direction out of two is to be chosen as “positive”.

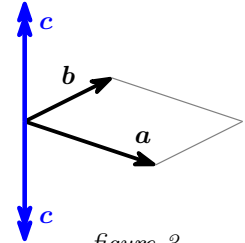


figure 3

And when vectors are measured using some basis  $\mathbf{e}_i$  thus represented as linear combinations like  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ , then the sequential triple of basis vectors  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  is what is going to be oriented. This means that the sequence of vectors in a basis is significant. Two bases with different sequences of the same basis vectors differ by some permutation.

The orientation of a basis in the space is the (kind of) asymmetry that makes a reflection impossible to replicate by means of a rotation in that space (without lifting to a more-dimensional space). It's impossible to turn the left hand of a human figure into the right hand by applying a rotation, only by reflecting the figure in a mirror.

An orientation of the space is an arbitrary choice of which sequences of basis vectors are “positively” oriented and which are “negatively” oriented.

In the three-dimensional Euclidean space, the two possible basis orientations are commonly called right-handed (right-chiral) and left-handed (left-chiral).

... chiral (adjective) = asymmetric in such a way that the thing and its mirror image are not superimposable, cannot be superposed on its mirror image by any combination of rotations and translations

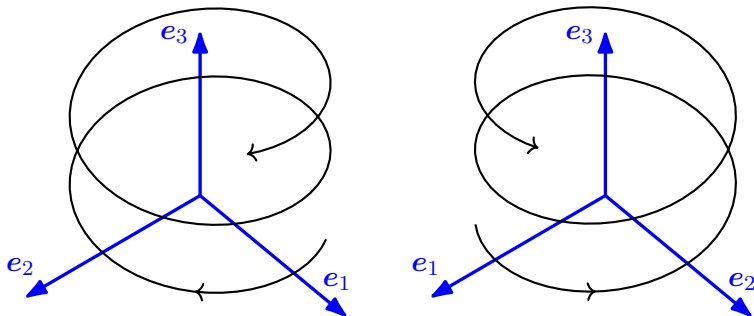


figure 4

A pseudovector (axial vector) is a vector-like three-dimensional object that is invariant under any rotation, but under a reflection it additionally flips its direction backwards.

Кроме редких случаев, направление полностью инвариантного (полярного) вектора, как и все пространство, при отражении изменяется.

Псевдовектор (аксиальный вектор), в отличие от (полярного) вектора, не меняет при отражении компоненту, ортогональную плоскости отражения, и оказывается “перевёрнутым” относительно полярных векторов и геометрии всего пространства. Это происходит потому, что при изменении знака каждого векторного произведения (что соответствует отражению) меняется знак/направление и каждого аксиального вектора.

The otherness of pseudovectors narrows the variety of formulas: a pseudovector is not additive with a vector. Formula  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  for an absolutely rigid undeformable body's kinematics is correct, because  $\boldsymbol{\omega}$  is pseudovector there, and with the cross product two “pseudo” mutually compensate each other.

Поворот (вращение, rotation) не может поменять ориентацию тройки.

However, the cross product is not another new, entirely distinct operation. Оно сводится к четырём ранее описанным (§3) и обобщается на тензоры любой сложности. Покажем это.

A nonsingular linear mapping is orientation-preserving if its determinant is positive.

Для этого познакомимся с волюметрическим тензором третьей сложности — тензором Levi-Civita’ы

$${}^3\epsilon = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k, \quad \epsilon_{ijk} \equiv \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \quad (6.1)$$

with components  $\epsilon_{ijk}$  equal to “triple” (“mixed”, “cross-dot”) products of basis vectors.

The absolute value (modulus) of each nonzero component of tensor  ${}^3\epsilon$  is equal to the volume  $\sqrt{g}$  of a parallelepiped, drew upon a basis. For basis  $\mathbf{e}_i$  of mutually orthogonal one-unit long vectors  $\sqrt{g} = 1$ .

Тензор  ${}^3\epsilon$  изотропен, его компоненты не меняются при любом повороте базиса. Но отражение — изменение ориентации тройки базисных векторов (перемена “направления винта”) — меняет знак  ${}^3\epsilon$ , и поэтому он является псевдотензором.

Если  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ , то  $\mathbf{e}_i$  — произвольно выбираемая из двух вариантов (рис. 3) как ориентированная положительно (“правая”) тройка, и компоненты  ${}^3\epsilon$  равны символу Веблена:  $\epsilon_{ijk} = e_{ijk}$ . Когда же  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3$ , тогда тройка  $\mathbf{e}_i$  ориентирована отрицательно (“левая”, “зеркальная”), для неё  $\epsilon_{ijk} = -e_{ijk}$  (а  $e_{ijk} = -\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k$ ).

С тензором Лёви-Чивиты  ${}^3\epsilon$  возможно по-новому взглянуть на векторное произведение:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_i \mathbf{e}_i \times b_j \mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = a_i b_j \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k = \\ &= b_j a_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \cdot \epsilon_{mnk} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \mathbf{e}_k = \mathbf{b} \mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon, \\ &= a_i \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k b_j = -a_i \epsilon_{ikj} \mathbf{e}_k b_j = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

“Векторное произведение” это всего лишь dot product — комбинация умножения и свёртки, §3 — с участием тензора  ${}^3\epsilon$ .

Такие комбинации возможны с любыми тензорами:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times {}^2\mathbf{B} &= a_i \mathbf{e}_i \times B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \underbrace{a_i B_{jk} \epsilon_{ijn} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_k}_{-a_i \epsilon_{ijn} B_{jk}} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot {}^2\mathbf{B}, \\
 {}^2\mathbf{C} \times d\mathbf{b} &= C_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \times d_p b_q \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q = \underbrace{\mathbf{e}_i C_{ij} d_p \epsilon_{jpk} \mathbf{e}_k b_q \mathbf{e}_q}_{-\epsilon_{pjk} = -\epsilon_{jkp}} = \\
 &= -{}^2\mathbf{C} d \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} b = -{}^2\mathbf{C} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot d\mathbf{b}, \\
 \mathbf{E} \times \mathbf{E} &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = \underbrace{-\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k}_{+\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon}. \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Последнее равенство представляет собой связь изотропных тензоров второй и третьей сложности.

Обобщая на все тензоры ненулевой сложности

$${}^n\boldsymbol{\xi} \times {}^m\boldsymbol{\zeta} = -{}^n\boldsymbol{\xi} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot {}^m\boldsymbol{\zeta} \quad \forall {}^n\boldsymbol{\xi}, {}^m\boldsymbol{\zeta} \quad \forall n > 0, m > 0. \quad (6.4)$$

Когда один из тензоров — единичный (“метрический”), из (6.4) и (3.6)  $\forall {}^n\boldsymbol{\Upsilon} \quad \forall n > 0$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \times {}^n\boldsymbol{\Upsilon} &= -\mathbf{E} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot {}^n\boldsymbol{\Upsilon} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot {}^n\boldsymbol{\Upsilon}, \\
 {}^n\boldsymbol{\Upsilon} \times \mathbf{E} &= -{}^n\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = -{}^n\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon}.
 \end{aligned}$$

A cross product is not commutative but anticommutative. For any two vectors  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b}, \\
 \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{b} \mathbf{a} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{b} \mathbf{a}, \quad (6.5) \\
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{b} \mathbf{a} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.
 \end{aligned}$$

For any bivalent tensor  ${}^2\mathbf{B}$  and a tensor of first complexity (vector)  $\mathbf{a}$

$${}^2\mathbf{B} \times \mathbf{a} = \mathbf{e}_i B_{ij} \mathbf{e}_j \times a_k \mathbf{e}_k = (-a_k \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_j B_{ij} \mathbf{e}_i)^\top = -(\mathbf{a} \times {}^2\mathbf{B}^\top)^\top.$$

However, in the particular case of the unit tensor  $\mathbf{E}$  and a vector

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \times \mathbf{a} &= -(\mathbf{a} \times \mathbf{E}^\top)^\top = -(\mathbf{a} \times \mathbf{E})^\top = \mathbf{a} \times \mathbf{E}, \\
 \mathbf{E} \times \mathbf{a} &= \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{a}. \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

Справедливо такое соотношение

$$e_{ijk} e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

○ Доказательство начнём с представлений символов Веблена как определителей ( $e_{ijk} = \pm \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k$  по строкам,  $e_{pqr} = \pm \mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_r$  по столбцам, с “−” для “левой” тройки)

$$e_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix}, \quad e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{q1} & \delta_{r1} \\ \delta_{p2} & \delta_{q2} & \delta_{r2} \\ \delta_{p3} & \delta_{q3} & \delta_{r3} \end{bmatrix}.$$

В левой части (6.7) стоит произведение  $e_{ijk}e_{pqr}$  этих определителей. Но  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  — определитель произведения матриц равен произведению определителей. В матрице-произведении элемент  $[\dots]_{11}$  равен  $\delta_{is}\delta_{ps} = \delta_{ip}$ , как и в (6.7); легко проверить и другие фрагменты (6.7). ●

Contraction of (6.7) приводит к полезным формулам

$$\begin{aligned} e_{ijk}e_{pqk} &= \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & 3 \end{bmatrix} = \\ &= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{kp} + \delta_{ik}\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{kp} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jk}\delta_{kq} = \\ &= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} + \delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} = \\ &= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \\ e_{ijk}e_{pjk} &= \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}, \\ e_{ijk}e_{ijk} &= 2\delta_{ii} = 6. \end{aligned}$$

Or in short

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \quad e_{ijk}e_{pjk} = 2\delta_{ip}, \quad e_{ijk}e_{ijk} = 6. \quad (6.8)$$

Первая из этих формул даёт представление двойного векторного произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_i \mathbf{e}_i \times \epsilon_{pqj} b_p c_q \mathbf{e}_j = \epsilon_{kij} \epsilon_{pqj} a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = \\ &= (\delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip}) a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = a_i b_k c_i \mathbf{e}_k - a_i b_i c_k \mathbf{e}_k = \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{cb} - \mathbf{bc}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} - \mathbf{cb} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

By another interpretation, the dot product of a dyad and a vector is not commutative:  $\mathbf{bd} \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{c} \cdot \mathbf{bd}$ , and this difference can be expressed as

$$\mathbf{bd} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{bd} = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{d}). \quad (6.10)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{cb} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{ca} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{ac}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$



The same way it may be derived that

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ba} - \mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}. \quad (6.11)$$

И такие тождества для любых двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{E} &= \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n = a_i b_j \epsilon_{ijk} \epsilon_{knq} \mathbf{e}_q \mathbf{e}_n = \\ &= a_i b_j (\delta_{in} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jn}) \mathbf{e}_q \mathbf{e}_n = a_i b_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \\ &= \mathbf{ba} - \mathbf{ab}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon) \cdot (\mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon) = \\ &= a_i \epsilon_{ipn} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_n \cdot b_j \epsilon_{jsk} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k = a_i b_j \epsilon_{ipn} \epsilon_{njk} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = \\ &= a_i b_j (\delta_{ik} \delta_{pj} - \delta_{ij} \delta_{pk}) \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = a_i b_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - a_i b_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \\ &= \mathbf{ba} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ещё одно соотношение между изотропными тензорами второй и третьей сложности:

$${}^3\epsilon \cdot {}^3\epsilon = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \epsilon_{kjm} \mathbf{e}_m = -2\delta_{in} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_n = -2\mathbf{E}. \quad (6.14)$$

## § 7. Symmetric and antisymmetric tensors

Тензор, не меняющийся при перестановке какой-либо пары своих индексов, называется симметричным по этой паре индексов. Если же при перестановке пары индексов тензор меняет свой знак, то он называется антисимметричным (кососимметричным) по этой паре индексов.

Тензор Лёви-Чивиты  ${}^3\epsilon$  антисимметричен по любой паре индексов, то есть он полностью антисимметричен (абсолютно кососимметричен).

Тензор второй сложности  $\mathbf{B}$  симметричен, если  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\top$ . Когда транспонирование меняет знак тензора, то есть  $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$ , тогда он антисимметричен (кососимметричен).

Любой тензор второй сложности представим суммой симметричной и антисимметричной частей

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{C}^S + \mathbf{C}^A, \quad \mathbf{C}^\top = \mathbf{C}^S - \mathbf{C}^A; \\ \mathbf{C}^S &\equiv \frac{1}{2} (\mathbf{C} + \mathbf{C}^\top), \quad \mathbf{C}^A \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{C}^\top). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для диады  $\mathbf{cd} = \mathbf{cd}^S + \mathbf{cd}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{cd} + \mathbf{dc}) + \frac{1}{2} (\mathbf{cd} - \mathbf{dc})$ .

Произведение двух симметричных тензоров  $C^S \cdot D^S$  симметрично далеко не всегда, но только когда  $D^S \cdot C^S = C^S \cdot D^S$ , ведь по (3.8)  $(C^S \cdot D^S)^T = D^S \cdot C^S$ .

В нечётномерных пространствах любой антисимметричный тензор второй сложности необратим, определитель матрицы компонент для него — нулевой.

Существует взаимно-однозначное соответствие между антисимметричными тензорами второй сложности и (псевдо)векторами. Компоненты кососимметричного тензора полностью определяются тройкой чисел (диагональные элементы матрицы компонент — нули, а недиагональные — попарно противоположны). Dot product кососимметричного  $A$  и какого-либо тензора  ${}^n\xi$  однозначно соответствует cross product'у псевдовектора  $a$  и того же тензора  ${}^n\xi$

$$\begin{aligned} b = A \cdot {}^n\xi &\Leftrightarrow a \times {}^n\xi = b \quad \forall A = A^A \quad \forall {}^n\xi \quad \forall n > 0, \\ d = {}^n\xi \cdot A &\Leftrightarrow {}^n\xi \times a = d \quad \forall A = A^A \quad \forall {}^n\xi \quad \forall n > 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Раскроем это соответствие  $A = A(a)$ :

$$\begin{aligned} A \cdot {}^n\xi &= a \times {}^n\xi \\ A_{hi} e_h e_i \cdot \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q &= a_i e_i \times \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q \\ A_{hj} \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q &= a_i \in_{ijh} \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q \\ A_{hj} &= a_i \in_{ijh} \\ A_{hj} &= -a_i \in_{ihj} \\ A &= -a \cdot {}^3\epsilon \end{aligned}$$

Так же из  ${}^n\xi \cdot A = {}^n\xi \times a$  получается  $A = -{}^3\epsilon \cdot a$ .

Или проще, согласно (6.4)

$$\begin{aligned} A &= A \cdot E = a \times E = -a \cdot {}^3\epsilon, \\ A &= E \cdot A = E \times a = -{}^3\epsilon \cdot a. \end{aligned}$$

В общем, для взаимно-однозначного соответствия между  $A$  и  $a$  имеем

$$\begin{aligned} A &= -a \cdot {}^3\epsilon = a \times E = -{}^3\epsilon \cdot a = E \times a, \\ a &= a \cdot E = a \cdot \left(-\frac{1}{2} {}^3\epsilon \cdot {}^3\epsilon\right) = \frac{1}{2} A \cdot {}^3\epsilon. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Компоненты кососимметричного  $\mathbf{A}$  через компоненты сопутствующего ему псевдовектора  $\mathbf{a}$  ( $\mathbf{a}$  называется **сопутствующим для  $\mathbf{A}$** )

$$\mathbf{A} = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} = -\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j a_k,$$

$$A_{ij} = -\epsilon_{ijk} a_k = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

и наоборот

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \cdot {}^3\epsilon = \frac{1}{2} A_{jk} \epsilon_{kji} \mathbf{e}_i,$$

$$a_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} A_{jk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \epsilon_{123} A_{32} + \epsilon_{132} A_{23} \\ \epsilon_{213} A_{31} + \epsilon_{231} A_{13} \\ \epsilon_{312} A_{21} + \epsilon_{321} A_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{32} - A_{23} \\ A_{13} - A_{31} \\ A_{21} - A_{12} \end{bmatrix}.$$

Легко запоминающийся вспомогательный “псевдовекторный инвариант”  $\mathbf{A}_\times$  получается из тензора  $\mathbf{A}$  заменой диадного произведения на векторное

$$\mathbf{A}_\times \equiv A_{ij} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = -\mathbf{A} \cdot \cdot {}^3\epsilon, \quad (7.4)$$

$$\mathbf{A}_\times = (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times = -2\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times = -\frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times.$$

Обоснование (7.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times \times \mathbf{E} = -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)}_{\epsilon_{ijn} \mathbf{e}_n} \times \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \\ &= -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{\epsilon_{nij} \epsilon_{nkp}}_{\delta_{jp} \delta_{ik} - \delta_{ip} \delta_{jk}} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = -\frac{1}{2} A_{ij} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}) = \mathbf{A}^\mathbf{A} = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Сопутствующий вектор **можно ввести** для любого бивалентного тензора, но лишь антисимметричная часть при этом даёт вклад:  $\mathbf{C}^\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}$ . Для симметричного тензора сопутствующий вектор — нулевой:  $\mathbf{B}_\times = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^\top = \mathbf{B}^\mathbf{S}$ .

С (7.4) разложение какого-либо тензора  $\mathbf{C}$  на симметричную и антисимметричную части выглядит как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^\mathbf{S} - \frac{1}{2} \mathbf{C}_\times \times \mathbf{E}. \quad (7.5)$$

Для диады же

$$(6.12) \Rightarrow (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E} = \mathbf{dc} - \mathbf{cd} = -2\mathbf{cd}^\mathbf{A}, \quad (\mathbf{cd})_\times = \mathbf{c} \times \mathbf{d},$$

и разложение её

$$\mathbf{cd} = \frac{1}{2} (\mathbf{cd} + \mathbf{dc}) - \frac{1}{2} (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E}. \quad (7.6)$$

## § 8. Eigenvectors and eigenvalues of tensor

Если для тензора  ${}^2\mathbf{B}$  и ненулевого вектора  $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} &= \eta \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \\ {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} &= \eta \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}, \quad ({}^2\mathbf{B} - \eta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

то  $\eta$  называется собственным числом (собственным значением, eigenvalue, proper value, главным значением)  ${}^2\mathbf{B}$ , а определяемая собственным вектором  $\mathbf{a}$  ось (направление) — его собственной (главной, principal) осью (направлением).

В компонентах это матричная задача на собственные значения  $(B_{ij} - \eta \delta_{ij}) a_j = 0$  — однородная линейная алгебраическая система, имеющая ненулевые решения при равенстве нулю определителя  $\det_{i,j} (B_{ij} - \eta \delta_{ij})$ :

$$\det \begin{bmatrix} B_{11} - \eta & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} - \eta & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - \eta \end{bmatrix} = -\eta^3 + \text{I} \eta^2 - \text{II} \eta + \text{III} = 0; \quad (8.2)$$

$$\text{I} = \text{tr } {}^2\mathbf{B} = B_{kk} = B_{11} + B_{22} + B_{33},$$

$$\text{II} = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} + B_{11}B_{33} - B_{13}B_{31} + B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}, \quad (8.3)$$

$$\text{III} = \det {}^2\mathbf{B} = \det_{i,j} B_{ij} = e_{ijk} B_{1i} B_{2j} B_{3k} = e_{ijk} B_{i1} B_{j2} B_{k3}.$$

Roots of characteristic equation (8.2) — собственные числа — не зависят от базиса и потому инвариантны.

Коэффициенты (8.3) тоже не зависят от базиса; они называются первым, вторым и третьим инвариантами тензора. С первым инвариантом  $\text{I}$  — следом тензора — мы уже встречались в § 3. Второй инвариант  $\text{II}$  это след союзной (взаимной, adjugate) матрицы — транспонированной матрицы дополнений:  $\text{II}({}^2\mathbf{B}) \equiv \text{tr}(\text{adj } B_{ij})$ . Или он же

$$\text{II}({}^2\mathbf{B}) \equiv \frac{1}{2} [(\text{tr } {}^2\mathbf{B})^2 - \text{tr}({}^2\mathbf{B} \cdot {}^2\mathbf{B})] = \frac{1}{2} [(\text{tr } {}^2\mathbf{B})^2 - {}^2\mathbf{B} \cdot {}^2\mathbf{B}] = \frac{1}{2} [(B_{kk})^2 - B_{ij} B_{ji}].$$

И третий инвариант  $\text{III}$  это определитель (детерминант) компонент тензора:  $\text{III}({}^2\mathbf{B}) \equiv \det {}^2\mathbf{B}$ .

Это относилось ко всем тензорам второй сложности. Для случая же симметричного тензора справедливо следующее:

1° Собственные числа симметричного тензора вещественны.

2° Собственные оси для разных собственных чисел ортогональны.

○ Первое утверждение доказывается от противного. Если  $\eta$  — комплексный корень (8.2), определяющий собственный вектор  $\mathbf{a}$ , то сопряжённое число  $\bar{\eta}$  также будет корнем. Ему соответствует собственный вектор  $\bar{\mathbf{a}}$  с сопряжёнными компонентами. При этом

$$\begin{aligned} (8.1) \Rightarrow (\bar{\mathbf{a}} \cdot)^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} &= \eta \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} \cdot)^2 \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\eta} \bar{\mathbf{a}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{\mathbf{a}} \cdot^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot^2 \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{a}} = (\eta - \bar{\eta}) \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

Но слева здесь — нуль, поскольку  $\mathbf{a} \cdot^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot^2 \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{a}$  и  ${}^2\mathbf{B} = {}^2\mathbf{B}^\top$ . Поэтому  $\eta = \bar{\eta}$ , то есть вещественно.

Столь же просто обосновывается и 2°:

$$\underbrace{\mathbf{a}_2 \cdot^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \cdot^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_2}_{=0} = (\eta_1 - \eta_2) \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2, \quad \eta_1 \neq \eta_2 \Rightarrow \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0. \quad \bullet$$

При различных собственных числах собственные векторы единичной длины  $\mathbf{e}_i$  образуют ортонормальный базис. Каковы же в нём компоненты тензора?

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_k &= \sum_k \eta_k \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3 \\ {}^2\mathbf{B} \cdot \underbrace{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k}_E &= \sum_k \eta_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

В общем случае  $B_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j$ , в базисе же  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  единичных взаимно ортогональных  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  собственных осей симметричного тензора:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \mathbf{e}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = \eta_1, \\ B_{12} &= \mathbf{e}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Матрица компонент диагональна и  ${}^2\mathbf{B} = \sum \eta_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ . Здесь идёт суммирование по трём повторяющимся индексам, ведь используется особенный базис.

Случай кратных главных значений можно рассмотреть с помощью предельного перехода. При  $\eta_2 \rightarrow \eta_1$  любая линейная комбинация  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  в пределе удовлетворяет (8.1); это значит, что любая ось в плоскости  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  становится собственной. Если же совпадают все три собственных числа, то любая ось в пространстве — собственная. При этом  ${}^2\mathbf{B} = \eta \mathbf{E}$ , такие тензоры называются изотропными или шаровыми.

## § 9. Rotation tensor

Соотношение между двумя “правыми” (или двумя “левыми”) ортонормальными базисами  $\mathbf{e}_i$  и  $\hat{\mathbf{e}}_i$  вполне определено матрицей косинусов (§ 1)

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j \hat{\mathbf{e}}_j}_{\mathbf{E}} = o_{ij}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_j, \quad o_{ij}^{\circ} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j.$$

But one may write like this:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i}_{\delta_{ji}} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{P} \equiv \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j = e_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + e_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + e_3 \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (9.1)$$

$\mathbf{P}$  is called rotation tensor.

Компоненты  $\mathbf{P}$  и в начальном  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , и в повернутом  $\mathbf{e}_i$  базисах образуют одну и ту же матрицу, равную транспонированной матрице косинусов  $o_{ji}^{\circ} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j &= \underbrace{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k}_{\delta_{ik}} \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{e}_j = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j, \\ \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j &= \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_k \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_j}_{\delta_{kj}} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{P} &= o_{ji}^{\circ} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = o_{ji}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Тензор  $\mathbf{P}$  связывает два вектора — “до поворота”  $\hat{\mathbf{r}} = \rho_i \hat{\mathbf{e}}_i$  и “после поворота”  $\mathbf{r} = \rho_i \mathbf{e}_i$  — с теми же компонентами  $\rho_i$  у  $\mathbf{r}$  в актуальном повернутом базисе  $\mathbf{e}_i$ , что и у  $\hat{\mathbf{r}}$  в неподвижном базисе  $\hat{\mathbf{e}}_i$  (“вектор вращается вместе с базисом”): поскольку  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \Leftrightarrow \rho_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \rho_i \hat{\mathbf{e}}_i$ , то

$$\mathbf{r} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (9.3)$$

(эта связь — обобщённая формула поворота Rodrigues’a).

Поворот же тензора второй сложности  $\hat{\mathbf{C}} = C_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$  в текущее (актуальное) положение  $\mathbf{C} = C_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  происходит так:

$$C_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{e}}_i \cdot C_{pq} \hat{\mathbf{e}}_p \hat{\mathbf{e}}_q \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_j \Leftrightarrow \mathbf{C} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{P}^{\top}. \quad (9.4)$$

Essential property of a rotation tensor — orthogonality — is expressed as

$$\underbrace{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_i \hat{\mathbf{e}}_i} \cdot \underbrace{\mathbf{P}^{\top}}_{\hat{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_j} = \underbrace{\mathbf{P}^{\top}}_{\hat{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_i} \cdot \underbrace{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}_j \hat{\mathbf{e}}_j} = \underbrace{\mathbf{E}}_{\hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i}, \quad (9.5)$$

that is the transposed tensor coincides with the reciprocal tensor:  $\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-\top}$ .

Ортогональный тензор не меняет скалярное произведение векторов, сохраняя длины и углы (“метрику”)

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (9.6)$$

Для всех ортогональных тензоров  $(\det \mathbf{O})^2 = 1$ :

$$1 = \det \mathbf{E} = \det (\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top) = (\det \mathbf{O}) (\det \mathbf{O}^\top) = (\det \mathbf{O})^2.$$

Тензор поворота это ортогональный тензор with  $\det \mathbf{P} = 1$ . Но не только лишь тензоры поворота обладают свойством ортогональности. When в (9.1) один из базисов “правый”, а другой “левый”, then it’s combination of a rotation and a reflection (“rotoreflexion”)  $\mathbf{O} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$  with  $\det (-\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}) = -1$ .

У любого бивалентного тензора в трёхмерном пространстве как минимум одно собственное число — корень (8.2) — действительное (некомплексное). Для тензора поворота оно равно единице

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{a} \Rightarrow \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P}}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{a} \cdot \eta \mathbf{a} \Rightarrow \eta^2 = 1.$$

Соответствующая собственная ось называется осью поворота; теорема Euler’a о конечном повороте в том и состоит, что такая ось существует. Если  $\mathbf{k}$  — орт этой оси, а  $\vartheta$  — величина угла поворота, то тензор поворота представим как

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}, \vartheta) = \mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta). \quad (9.7)$$

Доказывается эта формула так. Направление  $\mathbf{k}$  при повороте не меняется ( $\mathbf{P} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}$ ), поэтому на оси поворота  $\mathring{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ . В перпендикулярной плоскости (рис. 5)  $\mathring{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \vartheta - \mathbf{e}_2 \sin \vartheta$ ,  $\mathring{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 \sin \vartheta + \mathbf{e}_2 \cos \vartheta$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{e}_i \mathring{\mathbf{e}}_i \Rightarrow$  (9.7).

Из (9.7) и (9.3) получаем формулу поворота Родрига в параметрах  $\mathbf{k}$  и  $\vartheta$ :

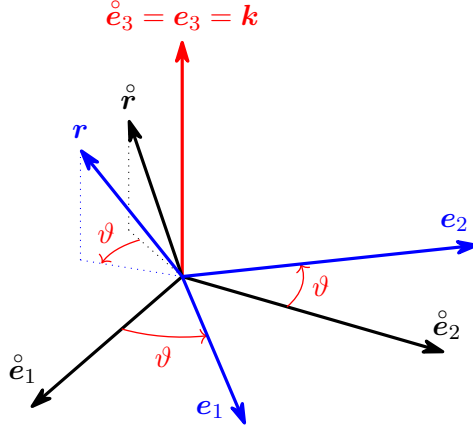
$$\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathring{\mathbf{r}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathring{\mathbf{r}} (1 - \cos \vartheta).$$

В параметрах конечного поворота транспонирование, оно же обращение, тензора  $\mathbf{P}$  эквивалентно перемене направления поворота — знака угла  $\vartheta$

$$\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}|_{\vartheta=-\vartheta} = \mathbf{E} \cos \vartheta - \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta).$$

$$\mathring{e}_i = \mathring{e}_i \cdot e_j e_j$$

$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \\ \mathring{e}_2 \\ \mathring{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(90^\circ + \vartheta) & \cos 90^\circ \\ \cos(90^\circ - \vartheta) & \cos \vartheta & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathring{e}_1 = e_1 \cos \vartheta - e_2 \sin \vartheta$$

$$\mathring{e}_2 = e_1 \sin \vartheta + e_2 \cos \vartheta$$

$$\mathring{e}_3 = e_3 = k$$

$$P = e_1 \mathring{e}_1 + e_2 \mathring{e}_2 + e_3 \mathring{e}_3 =$$

$$= \overbrace{e_1 \mathring{e}_1}^{e_1 e_1 \cos \vartheta - e_1 e_2 \sin \vartheta} + \overbrace{e_2 \mathring{e}_2}^{e_2 e_1 \sin \vartheta + e_2 e_2 \cos \vartheta} + \overbrace{e_3 \mathring{e}_3}^{k k} =$$

$$= E \cos \vartheta - \underbrace{e_3 e_3}_{k k} \cos \vartheta + \underbrace{(e_2 e_1 - e_1 e_2)}_{e_3 \times e_i e_i = \epsilon_{3ij} e_j e_i} \sin \vartheta + k k =$$

$$= E \cos \vartheta + k \times E \sin \vartheta + k k (1 - \cos \vartheta)$$

рисунок 5  
“Finite rotation”



Пусть теперь тензор поворота меняется со временем:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ . Псевдовектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  вводится через  $\mathbf{P}$  таким путём. Дифференцируем тождество ортогональности (9.5) по времени\*

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top = {}^2\mathbf{0}.$$

Тензор  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top$  (по (3.8)  $(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top)^\top = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top$ ) оказался антисимметричным. Поэтому согласно (7.3) он представим сопутствующим вектором как  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top$ . То есть

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv -\frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times \quad (9.8)$$

Помимо этого общего представления вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , для него есть и другие. Например, через параметры конечного поворота.

Производная  $\dot{\mathbf{P}}$  в параметрах конечного поворота в общем случае (оба параметра — и единичный вектор  $\mathbf{k}$ , и угол  $\vartheta$  — переменны во времени):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= (\mathbf{P}^S + \mathbf{P}^A)^\bullet = \left( \overbrace{\mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta)}^{\mathbf{P}^S} + \overbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}^{\mathbf{P}^A} \right)^\bullet = \\ &= \underbrace{(\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta)}_{\dot{\mathbf{P}}^S} + \underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}_{\dot{\mathbf{P}}^A}. \end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top &= (\dot{\mathbf{P}}^S + \dot{\mathbf{P}}^A) \cdot (\mathbf{P}^S - \mathbf{P}^A) = \\ &= \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S + \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S - \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A - \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A, \end{aligned}$$

используя

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 = \text{constant} \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} = 0, \\ \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} &= \mathbf{k} \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\ (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{k} - \mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \quad (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k} \mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\ \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = {}^2\mathbf{0}, \\ (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= -\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k}, \\ (6.13) \Rightarrow (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{E}, \\ (6.12) \Rightarrow \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} &= (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}) \times \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \mathbf{k} - \mathbf{k} (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) = \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

\* Various notations are used to denote the full time derivative. In addition to the Leibniz's notation  $\frac{dx}{dt}$ , the very popular short-hand one is the “over-dot” Newton's notation  $\dot{x}$ .

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S &= \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k})(1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + \\
&\quad + (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k})(1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k}) \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta)^2 = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\
&\quad + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} - 2 \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos^2 \vartheta = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S &= \\
&= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \\
&\quad + (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} \dot{\vartheta} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A &= \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k})(1 - \cos \vartheta) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta = \\
&= \mathbf{k}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + (\mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E})) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= -\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A &= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin^2 \vartheta = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T &= \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S + \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S - \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A - \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A = \\
&= (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}}\mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + \\
&\quad + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\
&\quad + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) - (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \sin^2 \vartheta = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + (\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}})(1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k}\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) = \\
&= \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta).
\end{aligned}$$

Этот результат, подставленный в определение (9.8) псевдовектора  $\boldsymbol{\omega}$ , даёт

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} (1 - \cos \vartheta). \quad (9.9)$$

Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  получился разложенным по трём взаимно ортогональным направлениям —  $\mathbf{k}$ ,  $\dot{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}$ . При неподвижной оси поворота  $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \dot{\vartheta}$ .

Ещё одно представление  $\omega$  связано с компонентами тензора поворота (9.2). Поскольку  $P = o_{ji} \circ \dot{e}_i \dot{e}_j$ ,  $P^\Gamma = o_{ij} \circ \dot{e}_i \dot{e}_j$ , а векторы начального базиса  $\dot{e}_i$  неподвижны (со временем не меняются), то

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{o}_{ji} \circ \dot{e}_i \dot{e}_j, \quad \dot{P} \cdot P^\Gamma = \dot{o}_{ni} \circ o_{nj} \circ \dot{e}_i \dot{e}_j, \\ \omega &= -\frac{1}{2} \dot{o}_{ni} \circ o_{nj} \circ \dot{e}_i \times \dot{e}_j = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} o_{nj} \circ \dot{o}_{ni} \circ \dot{e}_k. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Отметим и формулы

$$\begin{aligned} (9.8) &\Rightarrow \dot{e}_i \dot{e}_i = \omega \times e_i \dot{e}_i \Rightarrow \dot{e}_i = \omega \times e_i, \\ (9.8) &\Rightarrow \omega = -\frac{1}{2} (\dot{e}_i \dot{e}_i \cdot \dot{e}_j e_j)_\times = -\frac{1}{2} (\dot{e}_i e_i)_\times = \frac{1}{2} e_i \times \dot{e}_i. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Не всё то вектор, что имеет величину и направление. Поворот тела вокруг оси представляет, казалось бы, вектор, имеющий численное значение, равное углу поворота, и направление, совпадающее с направлением оси вращения. Однако, два таких поворота не складываются как векторы, когда углы поворота не бесконечно малые. На самом же деле последовательные повороты не складываются, а умножаются.

Можно ли складывать угловые скорости? — Да, ведь угол поворота в  $\mathcal{V}$  бесконечно малый. — Но только при вращении вокруг неподвижной оси?

...

## § 10. Variations

Далее повсеместно будет использоваться сходная с дифференцированием операция варьирования. Не отсылая читателя к **курсам** вариационного исчисления, ограничимся представлениями о вариации  $\delta x$  величины  $x$  как о задаваемом нами бесконечно малом приращении, совместимом с ограничениями — связями (constraints). Если ограничений для  $x$  нет, то  $\delta x$  произвольна (случайна). Но когда  $x = x(y)$  — функция независимого аргумента  $y$ , тогда  $\delta x = x'(y) \delta y$ .

Here we consider the exact differential of any set of position vectors  $\mathbf{r}_i$ , that are functions of other variables  $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$  and time  $t$ .

The actual displacement is the differential

$$d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} dq^j$$

Now, imagine if we have an arbitrary path through the configuration space/manifold. This means it has to satisfy the constraints of the system but not the actual applied forces

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j$$

Записям с вариациями характерны те же особенности, что и с дифференциалами. Если, например,  $\delta x$  и  $\delta y$  — вариации  $x$  и  $y$ , а  $u$  и  $v$  — конечные величины, то пишем  $u\delta x + v\delta y = \delta w$ , а не  $w$  — даже когда  $\delta w$  не является вариацией величины  $w$ ; в этом случае  $\delta w$  это единое обозначение. Разумеется, при  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  и  $\partial_x v = \partial_y u$  ( $\frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial y} u$ ) сумма  $\delta w$  будет вариацией некой  $w$ .

Варьируя тождество (9.5), получим  $\delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = -\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{P}^\top$ . Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор  $\delta \mathbf{o}$  как  $\delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$ . Приходим к соотношениям

$$\delta \mathbf{P} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{P}, \quad \delta \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times, \quad (10.1)$$

аналогичным (9.8). Вектор бесконечно малого поворота  $\delta \mathbf{o}$  это не “вариация  $\mathbf{o}$ ”, но единый символ (в отличие от  $\delta \mathbf{P}$ ).

Малый поворот определяется вектором  $\delta \mathbf{o}$ , но конечный поворот тоже допускает(?) векторное представление

...

## § 11. Polar decomposition

Любой тензор второй сложности  $\mathbf{F}$  с  $\det F_{ij} \neq 0$  (не сингулярный) может быть представлен как

...

*Example.* Polar decompose tensor  $\mathbf{C} = C_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ , where  $\mathbf{e}_k$  are mutually orthogonal unit vectors of basis, and  $C_{ij}$  are tensor's components

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & 11 \\ 10 & -15 & 23 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O} = O_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{O}_2$$

$$O_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{S}_R, \quad \mathbf{O}^\top \cdot \mathbf{C} = \mathbf{S}_R$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_L \cdot \mathbf{O}, \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{O}^\top = \mathbf{S}_L$$

$$S_{Rij} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -10 \\ 5 & 0 & 25 \\ -10 & 25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$S_{Lij} = \begin{bmatrix} 104/5 & 47/5 & 5 \\ 47/5 & -129/5 & -10 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

...

## § 12. Tensors in oblique basis

Until now a basis of three mutually orthogonal unit vectors  $\mathbf{e}_i$  was used. Presently take a basis of any three linearly independent (non-coplanar) vectors  $\mathbf{a}_i$ .

Decomposition of vector  $\mathbf{v}$  in basis  $\mathbf{a}_i$  (fig. 6) is linear combination

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i. \quad (12.1)$$

Соглашение о суммировании обретает новые положения: повторяющиеся (“немые”) индексы суммирования находятся на разных уровнях, а свободные индексы в обеих частях равенства — на одной высоте ( $a_i = b_{ij}c^j$  is correct,  $a_i = b_{kk}^i$  is wrong twice).

В таком базисе уже  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i = v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i \neq v^i$ , ведь тут  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k \neq \delta_{ik}$ .

Дополним же базис  $\mathbf{a}_i$  ещё другой тройкой векторов  $\mathbf{a}^i$ , называемых кобазисом или взаимным базисом, чтобы

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j &= \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{a}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{a}^i. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Это — основное свойство кобазиса. Ортонормированный (ортонормальный) базис может быть определён как совпадающий со своим кобазисом:  $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ .

Для, к примеру, первого вектора кобазиса  $\mathbf{a}^1$

$$\begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \gamma \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 = 1/\gamma \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \\ \gamma = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 \end{cases}$$

Коэффициент  $\gamma$  получился равным (с точностью до знака для “левой” тройки  $\mathbf{a}_i$ ) объёму параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}_i$ . В § 6 тот же объём был представлен как  $\sqrt{g}$ , и это неспроста,

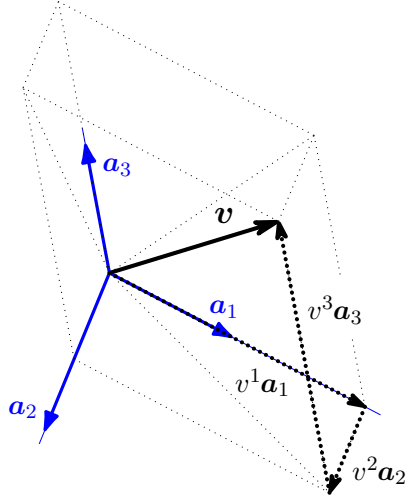


figure 6

ведь он совпадает с квадратным корнем из грамиана  $g \equiv \det g_{ij}$  — определителя симметричной матрицы J. P. Gram'a  $g_{ij} \equiv \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ .

○ Доказательство напоминает вывод (6.7). “Тройное” произведение  $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k$  в каком-нибудь ортонормальном базисе  $\mathbf{e}_i$  вычислимо как детерминант (с “—” для “левой” тройки  $\mathbf{a}_i$ ) по строкам

$$\in_{ijk} \equiv \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

или по столбцам

$$\in_{pqr} \equiv \mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{a}_r = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}.$$

Произведение определителей  $\in_{ijk} \in_{pqr}$  равно определителю произведения матриц, and elements of the latter are sums like  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_s = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p$ , в результате

$$\in_{ijk} \in_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_r \end{bmatrix};$$

$$i=p=1, j=q=2, k=r=3 \Rightarrow \in_{123} \in_{123} = \det_{i,j} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = \det_{i,j} g_{ij}. \quad \bullet$$

Представляя  $\mathbf{a}^1$  и остальные векторы кобазиса суммой

$$\pm 2\sqrt{g} \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 + \overbrace{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}^{\pm 2\sqrt{g} \mathbf{a}^1} - \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2,$$

приходим к общей формуле (с “—” для “левой” тройки  $\mathbf{a}_i$ )

$$\mathbf{a}^i = \pm \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{ijk} \mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k, \quad \sqrt{g} \equiv \pm \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 > 0. \quad (12.3)$$

Здесь  $e^{ijk}$  по-прежнему символ перестановки Veblen'a ( $\pm 1$  или 0):  $e^{ijk} \equiv e_{ijk}$ . Произведение  $\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k = \in_{jkn} \mathbf{a}^n$ , компоненты тензора Лёви-Чивиты  $\in_{jkn} = \pm e_{jkn} \sqrt{g}$ , and by (6.8)  $e^{ijk} e_{jkn} = 2\delta_n^i$ . Thus

$$\mathbf{a}^1 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{a}^2 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{a}^3 = \pm 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2).$$

*Example.* Get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$\sqrt{g} = -\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2;$$

$$-\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_2 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$-\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_2 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2,$$

$$-\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$$

and finally

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^3 = \frac{1}{2} (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

Имея кобазис, возможно не только разложить по нему любой вектор (рис. 7), но и найти коэффициенты разложения (12.1):

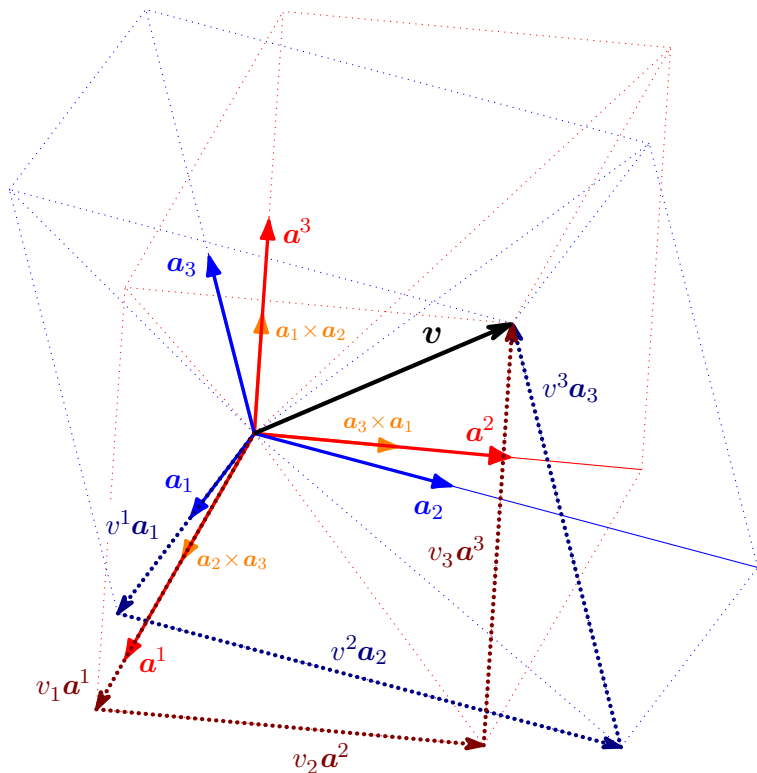
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{a}_i = v_i \mathbf{a}^i, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^i &= v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = v^i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Коэффициенты  $v_i$  называются ковариантными компонентами вектора  $\mathbf{v}$ , а  $v^i$  — его контравариантными\* компонентами.

Есть литература о тензорах, где различают ковариантные и контравариантные... векторы (and “covectors”, “dual vectors”). Не сто́ит вводить читателя в заблуждение: вектор-то один и тот же, просто при разложении по двум разным базисам у него два набора компонент.

\* Потому что они меняются обратно (contra) изменению длин базисных векторов  $\mathbf{a}_i$ .





$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \sqrt{g} = 0.56274$$

$$1/\sqrt{g} = 1.77703$$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_i^j$$

рисунок 7  
 “Decomposition of vector in oblique basis”

От векторов перейдём к тензорам второй сложности. Имеем четыре комплекта диад:  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}_j$ . Согласующиеся коэффициенты в декомпозиции тензора называются его контра-вариантными, ковариантными и смешанными компонентами:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} &= B^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = B_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j = B_j^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = B_i^j \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j, \\ B^{ij} &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j, \quad B_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \\ B_j^i &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \quad B_i^j = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Для двух видов смешанных компонент точка в индексе это просто свободное место: у  $B_j^i$  верхний индекс “ $i$ ” — первый, а нижний “ $j$ ” — второй.

Компоненты единичного (“метрического”) тензора

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}^k \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k \mathbf{a}^k = g_{jk} \mathbf{a}^j \mathbf{a}^k = g^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k: \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \equiv g_{ij}, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j \equiv g^{ij}; \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= g_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \cdot g^{nk} \mathbf{a}_n \mathbf{a}_k = g_{ij} g^{jk} \mathbf{a}^i \mathbf{a}_k = \mathbf{E} \Rightarrow g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Вдобавок к (12.2) и (12.3) открылся ещё один способ найти векторы кобазиса — через матрицу  $g^{ij}$ , обратную матрице Грама  $g_{ij}$ . И наоборот:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk} \mathbf{a}_j \delta_k^i = g^{ji} \mathbf{a}_j, \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk} \mathbf{a}^j \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk} \mathbf{a}^j \delta_i^k = g_{ji} \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (12.7)$$

*Example.* Using reversed Gram matrix, get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det g_{ij} = 4,$$

$$\text{adj } g_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T,$$

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{\text{adj } g_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Using  $\mathbf{a}^i = g^{ij} \mathbf{a}_j$

$$\mathbf{a}^1 = g^{11} \mathbf{a}_1 + g^{12} \mathbf{a}_2 + g^{13} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^2 = g^{21} \mathbf{a}_1 + g^{22} \mathbf{a}_2 + g^{23} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^3 = g^{31} \mathbf{a}_1 + g^{32} \mathbf{a}_2 + g^{33} \mathbf{a}_3 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3.$$

...

Единичный тензор (unit tensor, identity tensor, metric tensor)

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A} = \text{not anymore } A_{jj}$$

Thus for, say, trace of some tensor  $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j$ :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A}$ ,  
you have

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k = A_{ij} \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = A_{ij} g^{ij}$$

...

Тензор поворота (rotation tensor)

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i = \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{-\top}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{\top}$$

$$\mathbf{P}^{\top} = \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \mathbf{P}^{-1}$$

...

... Характеристическое уравнение (8.2) быстро приводит к тождеству Кэли–Гамильтона (Cayley–Hamilton)

$$\begin{aligned} -\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{I} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{II} \mathbf{B} + \mathbf{III} \mathbf{E} &= {}^2\mathbf{0}, \\ -\mathbf{B}^3 + \mathbf{I} \mathbf{B}^2 - \mathbf{II} \mathbf{B} + \mathbf{III} \mathbf{E} &= {}^2\mathbf{0}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

### § 13. Tensor functions

In the conception of function  $y=f(x)$  as of mapping (morphism)  $f: x \mapsto y$ , an input (argument)  $x$  and an output (result)  $y$  may be tensors of any complexities.

Consider at least a scalar function of a bivalent tensor  $\varphi = \varphi(\mathbf{B})$ . Examples are  $\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi$  (or  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}$ ) and  $\mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{B}$ . Then in each basis  $\mathbf{a}_i$  paired with cobasis  $\mathbf{a}^i$  we have function  $\varphi(B_{ij})$  of nine numeric arguments — components  $B_{ij}$  of tensor  $\mathbf{B}$ . For example

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \cdot \Phi = B_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \cdot \cdot \mathbf{a}_m \mathbf{a}_n \Phi^{mn} = B_{ij} \Phi^{ji} = \varphi(B_{ij}).$$

With any transition to a new basis, the result doesn't change:  $\varphi(B_{ij}) = \varphi(B'_{ij}) = \varphi(\mathbf{B})$ .

Differentiation of  $\varphi(\mathbf{B})$  looks like

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} dB_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top. \quad (13.1)$$

Tensor  $\partial\varphi/\partial\mathbf{B}$  is called the derivative of function  $\varphi$  by argument  $\mathbf{B}$ ;  $d\mathbf{B}$  is the differential of tensor  $\mathbf{B}$ ,  $d\mathbf{B} = dB_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$ ;  $\partial\varphi/\partial B_{ij}$  are components (contravariant ones) of  $\partial\varphi/\partial\mathbf{B}$

$$\mathbf{a}^i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{a}^j = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \cdot \mathbf{a}^j \mathbf{a}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j.$$

...

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \cdot \Phi$$

$$d\varphi = d(\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi) = d\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi = \Phi \cdot \cdot d\mathbf{B} = \Phi^\top \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \cdot d\mathbf{B}^\top, \quad \frac{\partial(\mathbf{B} \cdot \cdot \Phi)}{\partial \mathbf{B}} = \Phi^\top$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{qp}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{pq}$$

...

$$\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet \mathbf{B}$$

$$d\varphi = d(\mathbf{B} \bullet \mathbf{B}) = d\ldots$$

...

Но согласно опять-таки (12.8)  $-\mathbf{B}^2 + \mathbf{I}\mathbf{B} - \mathbf{II}\mathbf{E} + \mathbf{III}\mathbf{B}^{-1} = {}^2\mathbf{0}$ , поэтому

...

Скалярная функция  $\varphi(\mathbf{B})$  называется изотропной, если она не чувствительна к повороту аргумента:

$$\varphi(\mathbf{B}) = \varphi(\mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{O}^\top) = \varphi(\overset{\circ}{\mathbf{B}}) \quad \forall \mathbf{O} = \mathbf{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i = \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{O}^{-\top}$$

для любого ортогонального тензора  $\mathbf{O}$  (тензора поворота, § 9).

Симметричный тензор  $\mathbf{B}^S$  полностью определяется тройкой инвариантов и угловой ориентацией собственных осей (они же взаимно ортогональны, § 8). Ясно, что изотропная функция  $\varphi(\mathbf{B}^S)$  симметричного аргумента является функцией лишь инвариантов  $\mathbf{I}(\mathbf{B}^S)$ ,  $\mathbf{II}(\mathbf{B}^S)$ ,  $\mathbf{III}(\mathbf{B}^S)$ ; она дифференцируется согласно (??), где транспонирование излишне.

## § 14. Tensor fields. Differentiation

*Tensor field* is a tensor, varying from point to point (variable in space, coordinate dependent)

Путь в каждой точке некоторой области трёхмерного пространства известна величина  $\varsigma$ . Тогда имеем поле  $\varsigma = \varsigma(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки. Например, поле температуры в среде, поле давления в идеальной жидкости. Величина  $\varsigma$  может быть тензором любой сложности. Пример векторного поля — скорости частиц жидкости.

Не только при решении прикладных задач, но нередко и для “чистой теории” вместо аргумента  $\mathbf{r}$  используется какая-либо тройка криволинейных координат  $q^i$ . При этом  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ . Если непрерывно менять лишь одну координату из трёх, получается координатная линия. Каждая точка трёхмерного пространства лежит на пересечении трёх координатных линий (рис. 8).

Commonly used curvilinear coordinate systems include: rectangular (“cartesian”), spherical, and cylindrical coordinate systems. These coordinates may be derived from a set of cartesian coordinates by using a transformation that is locally invertible (a one-to-one map) at each point. This means that one can convert a point given in a cartesian coordinate system to its curvilinear coordinates and back.

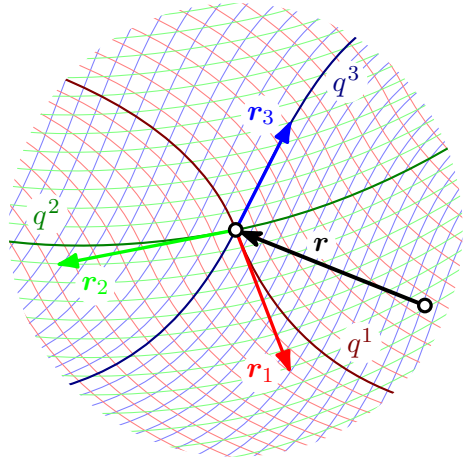


figure 8

...

The differential represents a change in the linearization of a function.

...

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$$

...

Linearity

$$\partial_i(\lambda p + \mu q) = \lambda(\partial_i p) + \mu(\partial_i q) \quad (14.1)$$

“Product rule”

$$\partial_i(p \circ q) = (\partial_i p) \circ q + p \circ (\partial_i q) \quad (14.2)$$

...

Bivalent unit tensor (identity tensor, metric tensor), the one which is neutral (3.6) to dot product operation, can be represented as

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i = \underbrace{\mathbf{r}^i \partial_i}_{\nabla} \mathbf{r} = \nabla \mathbf{r}, \quad (14.3)$$

where appears differential “nabla” operator

$$\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i. \quad (14.4)$$

...

Divergence of the dyadic product of two vectors

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}) &= \mathbf{r}^i \partial_i \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{r}^i \cdot \partial_i (\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{r}^i \cdot (\partial_i \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{a} (\partial_i \mathbf{b}) = \\
 &= (\mathbf{r}^i \cdot \partial_i \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{b}) = (\mathbf{r}^i \partial_i \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{b}) = \\
 &= (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b}) \quad (14.5)
 \end{aligned}$$

— here's no need to expand vectors  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$ , expanding just differential operator nabla  $\nabla$ .

...

Gradient of cross product of two vectors, applying “product rule” (14.2) and relation (6.5) for any two vectors (partial derivative  $\partial_i$  of some vector by scalar coordinate  $q^i$  is a vector too)

$$\begin{aligned}
 \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{r}^i \partial_i (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \partial_i \mathbf{b}) = \\
 &= \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \partial_i \mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \\
 &= \nabla \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \nabla \mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (14.6)
 \end{aligned}$$

...

Gradient of dot product of two vectors

$$\begin{aligned}
 \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \mathbf{r}^i \partial_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{r}^i \mathbf{a} \cdot (\partial_i \mathbf{b}) = \\
 &= (\mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{r}^i (\partial_i \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}. \quad (14.7)
 \end{aligned}$$

...



...

## §15. Integral theorems

Для векторных полей известны интегральные теоремы Gauss'а и Stokes'а.

Gauss' theorem (divergence theorem) enables an integral taken over a volume to be replaced by one taken over the closed surface bounding that volume, and vice versa.

Stokes' theorem enables an integral taken around a closed curve to be replaced by one taken over *any* surface bounded by that curve. Stokes' theorem relates a line integral around a closed path to a surface integral over what is called a *capping surface* of the path.

Теорема Гаусса о дивергенции — про то, как заменить объёмный интеграл поверхностным (and vice versa). В этой теореме рассматривается поток (ef)flux вектора через ограничивающую объём  $V$  замкнутую поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$  с единичным вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$

$$\oint_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\mathcal{O} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV. \quad (15.1)$$

Объём  $V$  нарезается тремя семействами координатных поверхностей на множество бесконечно малых элементов. Поток через поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$  равен сумме потоков через края получившихся элементов. В бесконечной малости каждый такой элемент — маленький локальный дифференциальный кубик (параллелепипед). ... Поток вектора  $\mathbf{a}$  через грани малого кубика объёма  $dV$  есть  $\sum_{i=1}^6 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a} \mathcal{O}_i$ , а через сам этот объём поток равен  $\nabla \cdot \mathbf{a} dV$ .

Похожая трактовка этой теоремы есть, к примеру, в курсе Richard'а Feynman'а [90].

( рисунок с кубиками )

to dice — нарезать кубиками

small cube, little cube

локально ортонормальные координаты  $\boldsymbol{\xi} = \xi_i \mathbf{n}_i$ ,  $d\boldsymbol{\xi} = d\xi_i \mathbf{n}_i$ ,  
 $\nabla = \mathbf{n}_i \partial_i$

разложение вектора  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{n}_i$

Теорема Стокса о циркуляции выражается равенством

...

...

## §16. Curvature tensors

The *Riemann curvature tensor* or *Riemann–Christoffel tensor* (after **Bernhard Riemann** and **Elwin Bruno Christoffel**) is the most common method used to express the curvature of Riemannian manifolds. It’s a tensor field, it assigns a tensor to each point of a Riemannian manifold, that measures the extent to which the metric tensor is not locally isometric to that of “flat” space. The curvature tensor measures noncommutativity of the covariant derivative, and as such is the integrability obstruction for the existence of an isometry with “flat” space. The curvature tensor can also be defined for any pseudo-Riemannian manifold, or any manifold equipped with an “affine connection” (a choice of such connection makes a manifold look infinitesimally like affine “flat” space).

The *Ricci curvature tensor*, named after **Gregorio Ricci-Curbastro**, represents the amount by which the volume of a narrow conical piece of a small geodesic ball in a curved Riemannian manifold deviates from that of the standard ball in “flat” space.

~ from Wikipedia, the free encyclopedia

Рассматривая операции тензорного анализа в криволинейных координатах, мы исходили из представления вектора-радиуса функцией этих координат:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ . Этой зависимостью порождаются выражения векторов локального касательного базиса  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$  ( $\partial_i \equiv \partial/\partial q^i$ ), компонент  $g_{ij} \equiv \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$  и  $g^{ij} \equiv \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = g_{ij}^{-1}$  единичного “метрического” тензора  $\mathbf{E} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i$ , векторов локального взаимного кокасательного базиса  $\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j = \delta_j^i$ ,  $\mathbf{r}^i = g^{ij} \mathbf{r}_j$ , дифференциального набла-оператора Hamilton’a  $\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$ ,  $\mathbf{E} = \nabla \mathbf{r}$ , полного дифференциала  $d\xi = d\mathbf{r} \cdot \nabla \xi$ , частных производных касательного базиса (вторых частных производных  $\mathbf{r}$ )  $\mathbf{r}_{ij} \equiv \partial_i \partial_j \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_j$ , символов “связности” Христовфеля (Christoffel symbols)  $\Gamma_{ij}^k \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}^k$  и  $\Gamma_{ijk} \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k$ .

Представим теперь, что функция  $\mathbf{r}(q^k)$  не известна, но зато в каждой точке пространства определены шесть независимых элементов положительной симметричной метрической матрицы Грама  $g_{ij}(q^k)$ .

Билинейная форма

...

Поскольку шесть функций  $g_{ij}(q^k)$  происходят от векторной функции  $\mathbf{r}(q^k)$ , то между элементами  $g_{ij}$  существуют некие соотношения.

Expression  $d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \overbrace{\nabla \mathbf{r}}^E = \mathbf{r}_k dq^k$  is exact differential. Следовательно, вторые частные производные коммутируют:  $\partial_i \mathbf{r}_j = \partial_j \mathbf{r}_i$  ( $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$ ). Но это необходимое условие уже обеспечено симметрией  $g_{ij}$  (“connection”  $\nabla_i$ , её же часто называют “covariant derivative” — а символы Христоффеля это “components of connection” in local coordinates).

$$\mathbf{r}_{ij} = \underbrace{\mathbf{r}_{ij} \cdot \overbrace{\mathbf{r}^k}^E}_{\Gamma_{ij}^k} \mathbf{r}_k = \underbrace{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k}_{\Gamma_{ijk}} \overbrace{\mathbf{r}^k}^E$$

$$\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}^k \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{ij}$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \partial_i (v^j \mathbf{r}_j) = \mathbf{r}^i (\partial_i v^j \mathbf{r}_j + v^j \mathbf{r}_{ij})$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j \nabla_i v^j, \quad \nabla_i v^j \equiv \partial_i v^j + \Gamma_{in}^j v^n$$

$$\nabla \mathbf{r}_i = \mathbf{r}^k \partial_k \mathbf{r}_i = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{ki} = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_n \Gamma_{ki}^n, \quad \nabla_i \mathbf{r}_n = \Gamma_{in}^k \mathbf{r}_k$$

Christoffel symbols describe a metric connection, that is how the basis changes from point to point.

**добавить:** симметрия  $\Gamma_{ij\dot{k}} = \Gamma_{ji\dot{k}}$ , поэтому  $3^3 - 3 \cdot 3 = 18$  разных (независимых)  $\Gamma_{ij\dot{k}}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^n g_{nk} &= \Gamma_{ij\dot{k}} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ij} + \mathbf{r}_{ji}) \cdot \mathbf{r}_k + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{jk} - \mathbf{r}_{kj}) \cdot \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ik} - \mathbf{r}_{ki}) \cdot \mathbf{r}_j = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ji} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{jk} \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ki} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_{kj} \cdot \mathbf{r}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_i (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k) + \partial_j (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k) - \partial_k (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad (16.1) \end{aligned}$$

Все символы Христоффеля тождественно равны нулю лишь в ортонормальной (декартовой) системе. (А какие они для косоугольной?)

Пойдём дальше:  $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{r}_i = dq^k \partial_k \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{ik} dq^k$  — тоже полные дифференциалы. Поэтому  $\partial_i \partial_j \mathbf{r}_k = \partial_j \partial_i \mathbf{r}_k$  ( $\partial_i \mathbf{r}_{jk} = \partial_j \mathbf{r}_{ik}$ ), и трёхиндексный объект из векторов третьих частных производных

$$\mathbf{r}_{ijk} \equiv \partial_i \partial_j \partial_k \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_{jk} \quad (16.2)$$

симметричен по первому и второму индексам (а не только по второму и третьему). И тогда равен нулю  ${}^4\mathbf{0}$  следующий тензор четвёртой сложности — тензор кривизны Римана–Христоффеля

$${}^4\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{hijk} \mathbf{r}^h \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k, \quad \mathfrak{R}_{hijk} \equiv \mathbf{r}_h \cdot (\mathbf{r}_{jik} - \mathbf{r}_{ijk}). \quad (16.3)$$

Выразим компоненты  $\mathfrak{R}_{ijkn}$  через метрическую матрицу  $g_{ij}$ . Начнём с дифференцирования локального кобазиса:

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_k = \delta_k^i \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{jk} = 0 \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{r}^k.$$

...

Шесть независимых компонент:  $\mathfrak{R}_{1212}$ ,  $\mathfrak{R}_{1213}$ ,  $\mathfrak{R}_{1223}$ ,  $\mathfrak{R}_{1313}$ ,  $\mathfrak{R}_{1323}$ ,  $\mathfrak{R}_{2323}$ .

...

Symmetric bivalent Ricci curvature tensor

$$\mathcal{R} \equiv \frac{1}{4} \mathfrak{R}_{abij} \mathbf{r}^a \times \mathbf{r}^b \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j = \frac{1}{4} \epsilon^{abp} \epsilon^{ijq} \mathfrak{R}_{abij} \mathbf{r}_p \mathbf{r}_q = \mathcal{R}^{pq} \mathbf{r}_p \mathbf{r}_q$$

(coefficient  $\frac{1}{4}$  is used here for convenience) with components

$$\mathcal{R}^{11} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{2323},$$

$$\mathcal{R}^{21} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1323}, \quad \mathcal{R}^{22} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1313},$$

$$\mathcal{R}^{31} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1223}, \quad \mathcal{R}^{32} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1213}, \quad \mathcal{R}^{33} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1212}.$$

Равенство тензора Риччи нулю  $\mathcal{R} = {}^2\mathbf{0}$  (в компонентах это шесть уравнений  $\mathcal{R}^{ij} = \mathcal{R}^{ji} = 0$ ) is the necessary condition of integrability (“compatibility”) для нахождения вектора радиуса  $\mathbf{r}(q^k)$  по полю  $g_{ij}(q^k)$ .

## Bibliography

There’re many books, where only the apparatus of tensor calculus is described [85, 86, 87, 88, 89]. However, “the index approach” prevails — tensors are treated as matrices of components, transforming in a known way. “The direct approach” to tensors is explicated, for

instance, в приложениях книг А. И. Лурье [33, 34]. Яркое описание теории векторных полей можно найти у Р. Феупман'а [90]. Сведения о тензорном исчислении содержатся и в своеобразной и глубокой книге С. Truesdell'a [72].

## FUNDAMENTALS OF GENERIC MECHANICS

## §1. Discrete collection of particles

Generic mechanics models physical objects by discretizing them into a collection of particles (“pointlike masses”, “material points”<sup>\*</sup>). In a collection of  $N$  particles, each  $k$ -th particle has its nonzero mass  $m_k = \text{constant} > 0$  and motion function  $\mathbf{r}_k(t)$ . Function  $\mathbf{r}_k(t)$  is measured relative to some reference system — a solid body with a clock (fig. 9).

Long time ago, the reference system was some absolute space: empty at first, and then filled with the continuous elastic medium — the ether. Later it became clear that in classical mechanics any reference systems can be used, but the preference is given to so called “inertial” systems, where a point moves without acceleration ( $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ ) in the absence of external interactions.

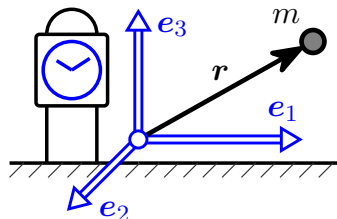


figure 9

The measure of interaction in mechanics is a vector of force  $\mathbf{F}$ . In the widely known Newton’s equation

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (1.1)$$

the right-hand side can depend only on position, velocity and explicitly presented time, whereas acceleration  $\ddot{\mathbf{r}}$  is directly proportional to force  $\mathbf{F}$ .

Here’re theses of dynamics of a collection of particles.

<sup>\*</sup> Point mass (pointlike mass, material point) is the concept of an object, typically matter, that has nonzero mass and is (or is being thought of as) infinitesimal in its volume (dimensions).



Force acting on  $k$ -th particle (fig. 10)

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)}, \quad (1.2)$$

where the first addend  $\mathbf{F}_k^{(e)}$  is external force, and the second is sum of internal ones ( $\mathbf{F}_{kj}^{(i)}$  is force from particle with number “ $j$ ”).

From (1.1) and (1.2) together with the action–reaction principle

$$\mathbf{F}_{kj}^{(i)} = -\mathbf{F}_{jk}^{(i)}, \quad (1.3)$$

ensues the balance of momentum

$$\left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^{\bullet} = \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.4)$$

Assuming also that internal interactions between particles are central, that is

$$\mathbf{F}_{kj}^{(i)} \parallel (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \Leftrightarrow (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \mathbf{0},$$

we come to the balance of rotational momentum

$$\left( \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^{\bullet} = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.5)$$

...

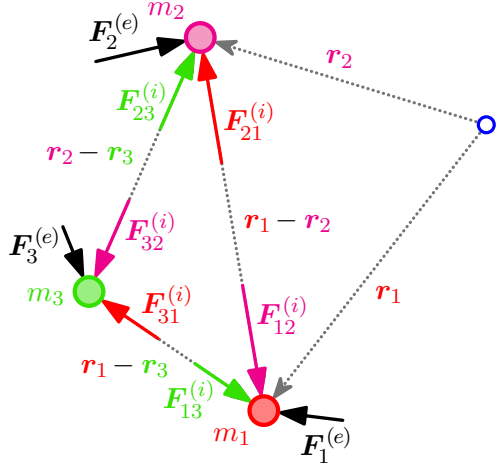


figure 10

## § 2. Absolutely rigid undeformable solid body

The distance between any two points of an absolutely rigid solid body remains constant, regardless of external forces exerted on it: there's no deformation.

The difference between “rigid” and “solid” is that rigid is stiff (not flexible) while solid is in the state of a solid (not fluid). Solid is a substance in the fundamental state of matter that retains its size and shape without need of container (as opposed to a fluid).

An absolutely rigid body is a solid body in which deformation is zero (or negligibly small, so small it can be neglected).

To define position (location) of an absolutely rigid undeformable body it's enough to choose some one of its points — “the pole”, to set location  $\mathbf{r}(t)$  of this point, as well as angular orientation of a body (fig. 11).

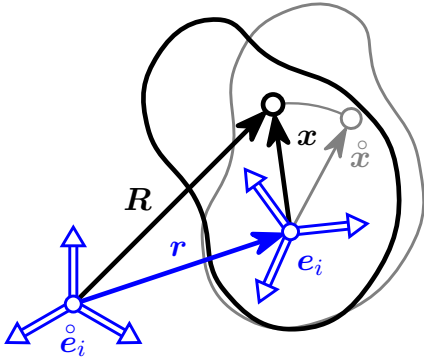


figure 11

An absolutely rigid body is mostly modeled using “the continual approach” — as a continuous distribution of mass (material continuum), rather than using “the discrete approach” — modeling as a discrete collection of body's particles.

A formula with summation over discrete points turns into a formula for a continuous body by replacing masses of particles with mass  $dm = \rho dV$  of volume

element  $dV$  ( $\rho$  is mass density) and integrating over the whole volume of a body.

$\hat{\mathbf{e}}_i$  — ортонормальная тройка векторов базиса, неподвижная относительно системы отсчёта

Any movement of an absolutely rigid body is a rotation, a translation\*, or a combination of both.

Имея неподвижный базис  $\mathring{\mathbf{e}}_i$  и движущийся вместе с телом базис  $\mathbf{e}_i$ , ...

Если связать с телом тройку декартовых осей с ортами  $\mathbf{e}_i$  (этот базис движется вместе с телом), тогда угловая ориентация тела может быть задана тензором поворота  $\mathbf{O} \equiv \mathbf{e}_i \mathring{\mathbf{e}}_i$ .

Motion of a body is completely defined by functions  $\mathbf{r}(t)$  and  $\mathbf{O}(t)$ .

Вектор-радиус некоторой точки тела

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{x},$$

$$\mathring{\mathbf{x}} = x_i \mathring{\mathbf{e}}_i, \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

$$(9.3), \S 1.9$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{O} \cdot \mathring{\mathbf{x}}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}},$$

For an absolutely rigid body, components  $x_i$  don't depend on time ( $x_i = \text{constant}$ ) and  $\dot{\mathbf{x}} = x_i \dot{\mathbf{e}}_i$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathring{\mathbf{x}}$$

$$x_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{O}} \cdot x_i \mathring{\mathbf{e}}_i \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathring{\mathbf{e}}_i$$

...

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dm = \mathbf{r} \int_{\mathcal{V}} dm = \mathbf{r} m$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm = \mathbf{\Xi} m, \mathbf{\Xi} \equiv m^{-1} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm$$

$$\text{mass of a whole body } m = \int_{\mathcal{V}} dm = \int_{\mathcal{V}} \rho dV$$

eccentricity vector  $\mathbf{\Xi}$

$\mathbf{\Xi}$  becomes the null vector when the chosen “pole” is the center of mass (the unique point within a body)

$$\mathbf{\Xi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_c$$

\* a translation can be thought of as a rotation with the revolution center at infinity

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} - \mathbf{r}, \quad \Xi m = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{R} - \mathbf{r}) dm = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r} = m^{-1} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{R} dm$$

...

Introducing (pseudo)vector of angular velocity  $\boldsymbol{\omega}$ , ...

...

inertia tensor  ${}^2\mathfrak{J}$

$${}^2\mathfrak{J} \equiv \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \mathbf{E} - \mathbf{x} \mathbf{x}) dm$$

$${}^2\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b, \quad {}^2\dot{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}_{ab} (\dot{\mathbf{e}}_a \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \dot{\mathbf{e}}_b) = \mathfrak{J}_{ab} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_b)$$

...

*Work*

$$W(\mathbf{F}, \mathbf{u}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$$

by “product rule”

$$dW = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}$$

by definition of full differential

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \cdot d\mathbf{F} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{u}, \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{F}$$

...

Holonomic constraints are relations between position variables (and possibly time) which can be expressed as

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = 0$$

where  $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$  are  $n$  coordinates which describe the system. For example, the motion of a particle constrained to lie on sphere’s surface is subject to a holonomic constraint, but if the particle is able to fall off the sphere under the influence of gravity, the constraint becomes non-holonomic. For the first case the holonomic constraint may be given by the equation:  $r^2 - a^2 = 0$ , where  $r$  is the distance from the centre of a sphere of radius  $a$ . Whereas the second non-holonomic case may be given by:  $r^2 - a^2 \geq 0$ .

Holonomic constraint depends only on coordinates and time. It does not depend on velocities or any higher time derivative. A constraint that cannot be expressed as shown above is nonholonomic.

Velocity-dependent constraints like

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0$$

are mostly not holonomic.

### § 3. Principle of virtual work

Виртуальным перемещением частицы с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_k$  называется вариация  $\delta \mathbf{r}_k$  — любое (неопределённое) бесконечно малое приращение  $\mathbf{r}_k$ , происходящее мгновенно и совместимое с ограничениями-связями. Если связей нет, то есть система свободна, тогда виртуальные перемещения  $\delta \mathbf{r}_k$  совершенно любые.

Связи бывают голономные (holonomic, или геометрические), связывающие только положения (перемещения) — это функции лишь координат и, возможно, времени

$$c(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.1)$$

— и неголономные (или дифференциальные), содержащие производные координат по времени:  $c(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0$  и не интегрируемые до геометрических связей.

Далее рассматриваем системы, все связи в которых — голономные. В системе с голономной связью виртуальные перемещения должны удовлетворять уравнению

$$\sum_k \frac{\partial c}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (3.2)$$

В несвободных системах все силы делятся на две группы: активные и реакции связей. Реакция  $\mathbf{N}_k$  действует со стороны всех материальных ограничителей на частицу “ $k$ ” и меняется в соответствии с уравнением (3.1) каждой связи. Принимается предложение об идеальности связей:

$$\sum_k \mathbf{N}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad — \quad (3.3)$$

работа реакций на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Принцип виртуальной работы выражается уравнением

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{F}_k$  — лишь активные силы, без реакций связей.

Дифференциальное вариационное уравнение (3.4) может показаться тривиальным следствием закона Ньютона (1.1) и условия идеальности связей (3.3). Однако содержание (3.4) несравненно обширнее. Известно — и читатель вскоре это увидит, — что принцип (3.4) может быть положен в основу механики [96]. Различные модели упругих тел, описываемые в этой книге, построены с опорой на этот принцип.

Для примера рассмотрим совершенно жёсткое (недеформируемое) твёрдое тело.

...

Проявилась замечательная особенность (3.4): это уравнение эквивалентно системе такого порядка, каково число степеней свободы системы, то есть сколько независимых вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  мы имеем. Если в системе  $N$  точек есть  $m$  связей, то число степеней свободы  $n = 3N - m$ .

...

## § 4. Balance of momentum, rotational momentum, and energy

Эти уравнения баланса можно связать со свойствами пространства и времени [97]. Сохранение импульса (количества движения) в изолированной\* системе выводится из однородности пространства (*при любом параллельном переносе — трансляции — замкнутой системы как целого свойства этой системы не меняются*). Сохранение момента импульса — следствие изотропии пространства (*свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте этой системы как целого*). Энергия же изолированной системы сохраняется, так как время однородно (энергия  $E \equiv T(q, \dot{q}) + \Pi(q)$  такой системы не зависит явно от времени).

\* Изолированная (замкнутая) система — это система частиц, взаимодействующих друг с другом, но ни с какими другими телами.

Уравнения баланса можно вывести из принципа виртуальной работы (3.4). Перепишем его в виде

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k^{(e)} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k + \delta W^{(i)} = 0, \quad (4.1)$$

где выделены внешние силы  $\mathbf{F}_k^{(e)}$  и виртуальная работа внутренних сил  $\delta W^{(i)} = \sum_k \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{r}_k$ .

Предполагается, что внутренние силы не совершают работы на виртуальных перемещениях тела как жёсткого целого ( $\delta \boldsymbol{\rho}$  и  $\delta \mathbf{o}$  — произвольные постоянные векторы, определяющие трансляцию и поворот)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_k &= \delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k, \\ \delta \boldsymbol{\rho} &= \text{constant}, \quad \delta \mathbf{o} = \text{constant} \end{aligned} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (4.2)$$

Предпосылки-соображения для этого предположения таковы.

Первое — для случая упругих (потенциальных) внутренних сил. При этом  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$  — вариация потенциала с противоположным знаком. Достаточно очевидно, что  $\Pi$  меняется лишь при деформации.

Второе соображение — в том, что суммарный вектор и суммарный момент внутренних сил равен нулю

$$\sum \dots$$

...

Принимая (4.2) и подставляя в (4.1) сначала  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \boldsymbol{\rho}$  (трансляция), а затем  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k$  (поворот), получаем баланс импульса (...) и баланс момента импульса (...).

...

## § 5. Hamilton's principle and Lagrange's equations

Вариационное уравнение (3.4) удовлетворяется в любой момент времени. Проинтегрируем его\* по какому-либо промежутку  $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T + \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (5.1)$$

Без ущерба для общности можно принять  $\delta \mathbf{r}_k(t_1) = \delta \mathbf{r}_k(t_2) = \mathbf{0}$ , тогда внеинтегральный член исчезает.

Вводятся обобщённые координаты  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$  — число степеней свободы). Векторы-радиусы становятся функциями вида  $\mathbf{r}_k(q_i, t)$ , тождественно удовлетворяющими уравнениям связей (3.1). Если связи стационарны, то есть (3.1) не содержат  $t$ , то остаётся  $\mathbf{r}_k(q_i)$ . Кинетическая энергия превращается в функцию  $T(q_i, \dot{q}_i, t)$ , где явно входящее  $t$  характерно лишь для нестационарных связей.

Весьма существенно понятие обобщённых сил  $Q_i$ . Они вводятся через выражение виртуальной работы

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_i Q_i \delta q_i, \quad Q_i \equiv \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \quad (5.2)$$

Стоит подчеркнуть происхождение обобщённых сил через работу. Установив набор обобщённых координат системы, следует сгруппировать приложенные силы  $\mathbf{F}_k$  в комплексы  $Q_i$ .

Если силы потенциальны с энергией  $\Pi = \Pi(q_i, t)$ , то

$$\sum_i Q_i \delta q_i = -\delta \Pi, \quad Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \quad (5.3)$$

Явное присутствие  $t$  может быть при нестационарности связей или зависимости физических полей от времени.

$$\begin{aligned} * \left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) &= \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \underbrace{\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k}_{\delta T} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$



...

Известны уравнения Lagrange’a не только второго, но и первого рода. Рассмотрим их ради методики вывода, много раз применяемой в этой книге.

При наличии связей (3.1) равенство  $\mathbf{F}_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$  не следует из вариационного уравнения (3.4), ведь тогда виртуальные перемещения  $\delta \mathbf{r}_k$  не независимы. Каждое из  $m$  ( $m$  — число связей) условий для вариаций (3.2) умножим на некий скаляр  $\lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) и добавим к (3.4):

$$\sum_{k=1}^N \left( \mathbf{F}_k + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (5.4)$$

Среди  $3N$  компонент вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  зависимых  $m$ . Но столько же и множителей Лагранжа: подберём  $\lambda_\alpha$  так, чтобы коэффициенты (??какие?) при зависимых вариациях обратились в нуль. Но при остальных вариациях коэффициенты (??) также должны быть нулями из-за независимости. Следовательно, все выражения в скобках  $(\dots)$  равны нулю — это и есть уравнения Лагранжа первого рода.

Поскольку для каждой частицы

...

## § 6. Statics

Рассмотрим систему со стационарными (постоянными во времени) связями при статических (не меняющихся со временем) активных силах  $\mathbf{F}_k$ . В равновесии  $\mathbf{r}_k = \text{constant}$ , и формулировка принципа виртуальной работы следующая:

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = Q_i = 0. \quad (6.1)$$

Существенны обе стороны этого положения: и вариационное уравнение, и равенство нулю обобщённых сил.

Соотношения (6.1) — это самые общие уравнения статики. В литературе распространено узкое представление об уравнениях равновесия как балансе сил и моментов. Но при этом нужно

понимать, что набор уравнений равновесия точно соответствует обобщённым координатам. Resultant force and resultant couple в уравнениях равновесия фигурируют\*, поскольку у системы есть степени свободы трансляции и поворота. Огромная популярность сил и моментов связана не столько с известностью статики совершенно жёсткого твёрдого тела, но с тем, что виртуальная работа внутренних сил на перемещениях системы как жёсткого целого равна нулю в любой среде.

Пусть в системе действуют два вида сил: потенциальные с энергией от обобщённых координат  $\Pi(q_i)$  и дополнительные внешние  $\mathring{Q}_i$ . Из (6.1) следуют уравнения равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \mathring{Q}_i, \quad (6.2)$$

$$d\Pi = \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} dq_i = \sum_i \mathring{Q}_i dq_i.$$

Здесь содержится нелинейная в общем случае задача статики о связи положения равновесия  $q_i$  с нагрузками  $\mathring{Q}_i$ .

В линейной системе с квадратичным потенциалом вида  $\Pi = \frac{1}{2} C_{ik} q_k q_i$

$$\sum_k C_{ik} q_k = \mathring{Q}_i. \quad (6.3)$$

Тут фигурируют матрица жёсткости  $C_{ik}$  и столбцы координат  $q_k$  и нагрузок  $\mathring{Q}_i$ .

Сказанное возможно обобщить и на континуальные линейные упругие среды.

Матрица жёсткости  $C_{ik}$  обычно бывает положительной (таково свойство конструкций). Тогда  $\det C_{ik} > 0$ , линейная алгебраическая система (6.3) однозначно разрешима, а решение её можно заменить минимизацией квадратичной формы

$$\mathfrak{Q}(q_j) \equiv \Pi - \sum_i \mathring{Q}_i q_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} q_i C_{ik} q_k - \sum_i \mathring{Q}_i q_i \rightarrow \min. \quad (6.4)$$

\* Since describing a composition of any system of forces, acting on the same absolutely rigid body, into a single force and a single couple (about a chosen point) in the book “Éléments de statique” by Louis Poinso.

Бывает однако, что конструкция неудачно спроектирована, тогда матрица жёсткости сингулярна (необратима) и  $\det C_{ik} = 0$  (или же весьма близок к нулю — nearly singular матрица с  $\det C_{ik} \approx 0$ ). Тогда решение линейной проблемы статики (6.3) существует лишь при ортогональности столбца нагрузок  $\dot{Q}_i$  всем линейно независимым решениям однородной сопряжённой системы

...

Известные теоремы статики линейно упругих систем легко доказываются в случае конечного числа степеней свободы. Теорема Клапейрон'а выражается равенством

...

Reciprocal work theorem (“работа  $W_{12}$  сил первого варианта на перемещениях от сил второго равна работе  $W_{21}$  сил второго варианта на перемещениях от сил первого”) мгновенно выводится из (6.3):

(...)

Тут существенна симметрия матрицы жёсткости  $C_{ij}$ , то есть консервативность системы.

...

Но вернёмся к проблеме (6.2), иногда называемой теоремой Lagrange'а. Её можно обратить преобразованием Лежандра Legendre (involution) transform(ation):

$$\begin{aligned}
 d\left(\sum_i \dot{Q}_i q_i\right) &= \sum_i d(\dot{Q}_i q_i) = \sum_i (q_i d\dot{Q}_i + \dot{Q}_i dq_i), \\
 d\left(\sum_i \dot{Q}_i q_i\right) - \overbrace{\sum_i \dot{Q}_i dq_i}^{d\Pi} &= \sum_i q_i d\dot{Q}_i, \\
 d\left(\sum_i \dot{Q}_i q_i - \Pi\right) &= \sum_i q_i d\dot{Q}_i = \sum_i \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \dot{Q}_i} d\dot{Q}_i; \\
 q_i &= \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \dot{Q}_i}, \quad \hat{\Pi}(\dot{Q}_i) = \sum_i \dot{Q}_i q_i - \Pi.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Это теорема Castigliano,  $\hat{\Pi}$  называется дополнительной энергией. В линейной системе (6.3)  $\Rightarrow \hat{\Pi} = \Pi$ . Теорема (6.5) бывает очень

полезна — когда легко находится  $\hat{\Pi}(\overset{\circ}{Q}_i)$ . Встречаются так называемые статически определимые системы, в которых все внутренние силы удаётся найти лишь из баланса сил и моментов. Для них (6.5) эффективна.

В отличие от линейной задачи (6.3), нелинейная задача (6.2) может не иметь решений вовсе или же иметь их несколько.

...

Разговор о статике в общей механике закончим принципом д’Аламбера (d’Alembert’s principle): уравнения динамики отличаются от статических лишь наличием дополнительных “фиктивных сил инерции”  $m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$ . Принцип д’Аламбера очевиден, но бездумное его применение может привести к ошибкам. Например, уравнения вязкой жидкости в статике и в динамике отличаются не только лишь инерционными членами. Для упругих же сред принцип д’Аламбера полностью справедлив.

## § 7. Mechanics of relative motion

До этого не ставился вопрос о системе отсчёта, всё рассматривалось в некой “абсолютной” системе или одной из инерциальных систем (§ 1). Теперь представим себе две системы: “абсолютную” и “подвижную”

...

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{x}$$

$$\mathbf{r} = \rho_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i, \quad \dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_i \mathbf{e}_i)^{\bullet} = \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i$$

$$x_i \neq \text{constant} \Rightarrow \dot{x}_i \neq 0$$

By (9.11, § 1.9)

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow x_i \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times x_i \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{x}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}}_{\mathbf{v}_e} - \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}}_{\mathbf{v}_{rel}}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} &= \dot{x}_i \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{v}_{rel} - \text{relative velocity, } \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \equiv \mathbf{v}_e \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_{rel}\end{aligned}\quad (7.1)$$

...

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}} &= \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{w} &\equiv \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\rho}_i \mathbf{e}_i, \quad \ddot{\mathbf{x}} = (x_i \mathbf{e}_i)^{\bullet\bullet} = (\dot{x}_i \mathbf{e}_i + x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} = \ddot{x}_i \mathbf{e}_i + \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i \\ \dot{\mathbf{e}}_i &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow \ddot{\mathbf{e}}_i = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) \\ x_i \ddot{\mathbf{e}}_i &= x_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times x_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times x_i \mathbf{e}_i) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{e}}_i &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \Rightarrow \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \dot{x}_i \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}\end{aligned}$$

$$\ddot{x}_i \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{w}_{rel} - \text{relative acceleration}$$

$$2\dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} \equiv \mathbf{w}_{Cor} - \text{Coriolis acceleration}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{w}_{rel} + \mathbf{w}_{Cor} + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i \\ (x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} &= \dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{Cor} + x_i \ddot{\mathbf{e}}_i \\ (x_i \dot{\mathbf{e}}_i)^{\bullet} &= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \dot{x}_i \mathbf{e}_i}_{\dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{Cor}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})\end{aligned}$$

...

## § 8. Small oscillations (vibrations)

Если статика линейной системы описывается уравнением (6.3), то в динамике имеем

$$\sum_k \left( A_{ik} \ddot{q}_k + C_{ik} q_k \right) = \ddot{Q}_i(t), \quad (8.1)$$

где  $A_{ik}$  — симметричная и положительная “матрица кинетической энергии”.

A normal mode of an oscillating system is a pattern of motion in which all parts of the system move sinusoidally with the same frequency and with a fixed phase relation. The free motion described by the normal modes takes place at fixed frequencies. These fixed frequencies of the normal modes of a system are known as its natural resonant frequencies.

In music, normal modes of vibrating instruments (strings, air pipes, drums, etc.) are called “harmonics” or “overtones”.

The most general motion of a system is a superposition of its normal modes. The modes are normal in the sense that they can move independently, that is to say that an excitation of one mode will never cause motion of a different mode. In mathematical terms, normal modes are orthogonal to each other.

A research of an oscillating system most often begins with orthogonal (normal) “modes”—harmonics, собственных (свободных, без воздействий извне) sinusoidal oscillations like

$$q_k(t) = \hat{q}_k \sin \omega_k t.$$

Multipliers  $\hat{q}_k = \text{constant}$  are orthogonal (normal) “modes” of oscillation,  $\omega_k$  are natural (resonant, eigen-) frequencies. This set, dependent on the structure of an oscillating object, materials and boundary conditions, находится из задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_i &= 0, \quad \ddot{q}_k = -\omega_k^2 \hat{q}_k \sin \omega_k t, \quad (8.1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_k (C_{ik} - A_{ik} \omega_k^2) \hat{q}_k \sin \omega_k t = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

...

## Bibliography

В длинном списке книг по общей механике можно найти труды не только механиков-профессионалов [91, 92, 98, 99, 100], но и физиков-теоретиков широкой ориентации [97, 93]. Интересен курс Ф. Р. Гантмахера [96] с компактным, но полным изложением основ.

*chapter 3*

## NONLINEAR ELASTIC MOMENTLESS CONTINUUM

### §1. Model of continuum. Descriptions of processes

Вещества имеют дискретное строение, и модель системы частиц с массами  $m_k$  и радиусами-векторами  $\mathbf{R}_k(t)$  может показаться подходящей, несмотря на невообразимое число степеней свободы — тем более что объёмы памяти и быстродействие компьютеров характеризуются тоже астрономическими числами.

И всё же предпочтение сто́ит отдать качественно иной модели — модели сплошной среды (материального континуума), в которой масса распределена по объёму непрерывно: в объёме  $\mathcal{V}$  содержится масса

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}, \quad (1.1)$$

where  $\rho$  is volume(tric) mass density.

Real matter is modelled as a continuum, which can be thought of as an infinite set of vanishingly small particles, joined together.

С непрерывным распределением массы связано лишь первое и простое представление о сплошной среде как множестве (пространстве) материальных точек. Возможны и более сложные модели, в которых частицы обладают степенями свободы не только трансляции, но и поворота, внутренней деформации и другими. Отметив, что подобные модели притягивают всё больший интерес, в этой главе ограничимся классическим представлением о среде как состоящей из “простых точек”.

В каждый момент времени  $t$  среда (деформируемый континуум) занимает некий объём  $\mathcal{V}$  пространства. Этот объём движется

и деформируется, но набор частиц в нём постоянен — the balance of mass (“matter is neither created nor annihilated”)

$$dm = \rho d\mathcal{V} = \overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{\mathcal{V}}, \quad m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{\mathcal{V}}, \quad (1.2)$$

where  $\overset{\circ}{\rho}$  and  $d\overset{\circ}{\mathcal{V}}$  are mass density and infinitesimal volume at the initial moment, in the so-called initial (original, reference, “material”) configuration.

Вводя какие-либо криволинейные координаты  $q^i$ , считаем

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^i, t). \quad (1.3)$$

...

Но может быть эффективно и иное описание — пространственное (или эйлерово), при котором процессы рассматриваются не в движущихся частицах среды, а в неподвижных точках пространства. Полагая, например,  $\rho = \rho(\mathbf{R}, t)$ , мы следим за происходящим в этом месте и не смущаемся непрерывным уходом и приходом частиц.

## § 2. Differentiation

Имея зависимости  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ , вводится базис  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$  ( $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$ ), взаимный базис  $\mathbf{r}^i$  и оператор Hamilton’a

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i = \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{r} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}, \quad \overset{\circ}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^i \partial_i, \quad (2.1)$$

так что  $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \varphi$ .

Если

...

Jaumann derivative (“corotational time derivative”). The corotational time derivative was first introduced by Jaumann\*

\* **Gustav Jaumann.** Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (I. Mitteilung) // Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa, Band CXX, 1911. Seiten 385–530.



Es sei  $\frac{\partial}{\partial t}$  der Operator der lokalen Fluxion, d.i. der partiellen Fluxion in einem gegen das Koordinatensystem ruhenden Punkte des Raumes. Ferner sei  $\frac{d}{dt}$  der Operator der totalen Fluxion, welcher definiert wird durch

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a,$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla; \mathbf{a} - \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{a},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla; \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v} \times \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \times \text{rot } \mathbf{v}).$$

Endlich verwenden wir die körperliche Fluxion eines Skalars:

$$\frac{\delta}{\delta t} a = \frac{\partial}{\partial t} a + \text{div } a\mathbf{v} = \frac{d}{dt} a + a \text{div } \mathbf{v}.$$

körperliche — bodily/телесная, material/вещественная(материальная),  
physical/физическая

$$\nabla \cdot (a\mathbf{v}) = a \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla a$$

...

Пусть  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — какое-либо поле. Найдём скорость изменения интеграла по объёму

$$\Upsilon \equiv \int_{\mathcal{V}} \rho \varphi d\mathcal{V}$$

(“ $\varphi$  есть  $\Upsilon$  на единицу массы”). Кажущееся сложным вычисление  $\dot{\Upsilon}$  (ведь  $\mathcal{V}$  деформируется) на самом деле весьма простое благодаря (1.2):

$$\Upsilon = \int_{\mathring{\mathcal{V}}} \mathring{\rho} \varphi d\mathring{\mathcal{V}} \Rightarrow \dot{\Upsilon} = \int_{\mathring{\mathcal{V}}} \mathring{\rho} \dot{\varphi} d\mathring{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\varphi} d\mathcal{V}. \quad (2.2)$$

Не сто́ит противопоставлять материальное и пространственное описания. Далее будут использоваться оба в зависимости от ситуации.

### §3. Motion gradient

Having motion function  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^i, t)$ ,  $\mathbf{r}(q^i) \equiv \mathbf{R}(q^i, 0)$ , “nabla” operators  $\nabla \equiv \mathbf{R}^i \partial_i$ ,  $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$  and looking at differential relations for a certain infinitesimal vector in two configurations, current with  $d\mathbf{R}$  and initial with  $d\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= d\mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \cdot d\mathbf{r} \\ d\mathbf{r} &= d\mathbf{R} \cdot \underset{\mathbf{F}^{-\top}}{\mathbf{R}^i \mathbf{r}_i} = \underset{\mathbf{F}^{-1}}{\mathbf{r}_i \mathbf{R}^i} \cdot d\mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.1)$$

here comes to mind to introduce the “motion gradient”<sup>\*</sup>, picking one of these tensor multipliers for it:  $\mathbf{F} \equiv \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top = \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i$ .

Why this one? The reason to choose  $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top$  is another expression for the differential

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \\ \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} \\ d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} \cdot d\mathbf{R} \\ \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathbf{r}} &= \partial_i \boldsymbol{\zeta} \mathbf{r}^i & \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathbf{R}} &= \partial_i \boldsymbol{\zeta} \mathbf{R}^i \end{aligned}$$

...

$$\mathbf{E} = \underset{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}}}{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}} = \underset{\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}}}{\mathbf{r}^\top \nabla}$$

...

For cartesian coordinates with orthonormal basis  $\mathbf{e}_i$  = **constant**

$$\mathbf{R} = X_i(t) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r} = X_i(0) \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}_i, \quad x_i \equiv X_i(0),$$

<sup>\*</sup> Tensor  $\mathbf{F}$  doesn't well suit its more popular name “deformation gradient”, because this tensor describes not only the deformation itself, but also the rotation of a body as a whole without deformation.

$$\begin{aligned}\dot{\nabla} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \dot{\partial}_i, \quad \nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial X_i} = \mathbf{e}_i \partial_i, \\ \dot{\nabla} \mathbf{R} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \frac{\partial (X_j \mathbf{e}_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \dot{\partial}_i X_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \\ \nabla \mathbf{r} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_i} = \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \partial_i x_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\end{aligned}$$

...

По теореме о полярном разложении (§ 1.11), градиент движения разложим на rotation tensor  $\mathbf{O}$  и симметричные положительные stretch tensors  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}$$

...

Когда нет поворота ( $\mathbf{O} = \mathbf{E}$ ), тогда  $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$ .

...

#### § 4. Measures (tensors) of deformation

Motion gradient  $\mathbf{F}$  characterizes both the deformation of a body and the rotation of a body as a whole. “Pure” deformation tensors are stretch tensors  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{V}$  from polar decomposition  $\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}$ , as well as other tensors, originating from  $\mathbf{U}$  or (and)  $\mathbf{V}$ .

Widely used ones are “squares” of  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{U}^2 =) \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} &= \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}, \\ (\mathbf{V}^2 =) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \equiv \mathbf{\Phi}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

These are Green’s deformation tensor (or right Cauchy–Green tensor)  $\mathbf{G}$  and Finger’s deformation tensor (or left Cauchy–Green tensor)  $\mathbf{\Phi}$ . The convenient relation to  $\mathbf{F}$  — without extracting roots as with  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{V}$  — explains the big popularity of tensors  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{\Phi}$ . Tensor  $\mathbf{G}$  was first used by George Green\*.

\* **Green, George.** (1839) On the propagation of light in crystallized media // Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1842, vol. 7, part II, pages 121–140.

Inversion of  $\Phi$  and  $\mathbf{G}$  gives two more deformation tensors

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{-2} &= \Phi^{-1} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top)^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \equiv {}^2\mathbf{c}, \\ \mathbf{U}^{-2} &= \mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F})^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \equiv {}^2\mathbf{f}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

each of which is sometimes called Piola tensor or Finger tensor. The inverse of left Cauchy–Green tensor  $\Phi$  is Cauchy deformation tensor  ${}^2\mathbf{c}$ .

Components of the presented deformation tensors

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{r}^i \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j \mathbf{r}^j = G_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j, \quad G_{ij} \equiv \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j, \\ {}^2\mathbf{f} &= \mathbf{r}_i \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j \mathbf{r}_j = G^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad G^{ij} \equiv \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j, \\ {}^2\mathbf{c} &= \mathbf{R}^i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \mathbf{R}^j = g_{ij} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j, \quad g_{ij} \equiv \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \\ \Phi &= \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j \mathbf{R}_j = g^{ij} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j, \quad g^{ij} \equiv \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j \end{aligned} \quad (4.3)$$

coincide with components of the unit (“metric”) tensor

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{R}_i \mathbf{R}^i = G_{ij} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j = \mathbf{R}^i \mathbf{R}_i = G^{ij} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j = \\ &= \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i = g^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i = g_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j, \end{aligned}$$

but ... lorem ipsum dolor sit amet where are the flowers gone wo sind sie geblieben

...

### *The right Cauchy–Green deformation tensor*

George Green discovered a deformation tensor known as the right Cauchy–Green deformation tensor or Green’s deformation tensor

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \text{or} \quad G_{ij} = F_{k'i} F_{k'j} = \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_i} \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_j}.$$

This tensor gives the “square” of local change in distances due to deformation:  $d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$

Invariants of  $\mathbf{G}$  are used in expressions for (density of) isotropic body’s potential energy of deformation. The most popular invariants are

$$\begin{aligned} \text{I}(\mathbf{G}) &\equiv \text{tr } \mathbf{G} = G_{ii} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ \text{II}(\mathbf{G}) &\equiv \frac{1}{2} (G_{jj}^2 - G_{ik} G_{ki}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ \text{III}(\mathbf{G}) &\equiv \det \mathbf{G} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

where  $\lambda_i$  are stretch ratios for unit fibers that are initially oriented along directions of eigenvectors of the right stretch tensor  $\mathbf{U}$ .

### The inverse of Green's deformation tensor

Sometimes called Finger tensor or Piola tensor, the inverse of the right Cauchy–Green deformation tensor

$${}^2\mathbf{f} = \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \quad \text{or} \quad f_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_{k'}} \frac{\partial x_j}{\partial X_{k'}}$$

### The left Cauchy–Green or Finger deformation tensor

Reversing the order of multiplication in the formula for the right Green–Cauchy deformation tensor leads to the left Cauchy–Green deformation tensor, defined as

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\top} = \mathbf{V}^2 \quad \text{or} \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k^{\circ}} \frac{\partial X_j}{\partial x_k^{\circ}}$$

The left Cauchy–Green deformation tensor is often called the Finger's deformation tensor, named after Josef Finger (1894).

Invariants of  $\mathbf{\Phi}$  are also used in expressions for strain energy density functions. The conventional invariants are defined as

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \Phi_{ii} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &\equiv \frac{1}{2} (\Phi_{ii}^2 - \Phi_{jk} \Phi_{kj}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3 &\equiv \det \mathbf{\Phi} = J^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

where  $J \equiv \det \mathbf{F}$  is determinant of the motion gradient.

### The Cauchy deformation tensor

The Cauchy deformation tensor is defined as the inverse of left Cauchy–Green deformation tensor  $\mathbf{\Phi}^{-1}$

$${}^2\mathbf{c} = \mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{or} \quad c_{ij} = \frac{\partial x_k^{\circ}}{\partial X_i} \frac{\partial x_k^{\circ}}{\partial X_j}$$

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{c} \cdot d\mathbf{R}$$

This tensor is also called Piola tensor and Finger tensor in rheology and fluid dynamics literature.

### Finite strain tensors

The concept of *strain* is used to evaluate how much a given displacement differs locally from a body displacement as a whole (a “rigid

body displacement”). One of such strains for large deformations is the *Green strain tensor*, also called *Green–Lagrangian strain tensor* or *Green–Saint-Venant strain tensor*, defined as

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) \quad \text{or} \quad C_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_i} \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right)$$

or as function of the displacement gradient tensor

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top \right)$$

in cartesian coordinates

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

The Green strain tensor measures how much  $\mathbf{G}$  differs from  $\mathbf{E}$ .

The *Almansi–Hamel strain tensor*, referenced to the deformed configuration (“Eulerian description”), is defined as

$${}^2\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - {}^2\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}^{-1}) \quad \text{or} \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial x_{\circ k}}{\partial X_i} \frac{\partial x_{\circ k}}{\partial X_j} \right)$$

or as function of the displacement gradient

$${}^2\mathbf{a} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top \right)$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} - \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

### *Seth–Hill family of abstract strain tensors*

B. R. Seth was the first to show that the Green and Almansi strain tensors are special cases of a more abstract strain measure. The idea was further expanded upon by Rodney Hill in 1968 (publication??). The Seth–Hill family of strain measures (also called Doyle–Ericksen tensors) is expressed as

$$\mathbf{D}_{(m)} = \frac{1}{2m} (\mathbf{U}^{2m} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{G}^m - \mathbf{E})$$

For various  $m$  it gives

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{(1)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) && \text{Green strain tensor} \\ \mathbf{D}_{(1/2)} &= \mathbf{U} - \mathbf{E} = \mathbf{G}^{1/2} - \mathbf{E} && \text{Biot strain tensor} \\ \mathbf{D}_{(0)} &= \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G} && \text{logarithmic strain, Hencky strain} \\ \mathbf{D}_{(-1)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2}) && \text{Almansi strain} \end{aligned}$$

The second-order approximation of these tensors is

$$\mathbf{D}_{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T - (1 - m) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

where  $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S$  is the infinitesimal strain tensor.

Many other different definitions of measures  $\mathbf{D}$  are possible, provided that they satisfy these conditions:

- ✓  $\mathbf{D}$  vanishes for any movement of a body as a rigid whole
- ✓ dependence of  $\mathbf{D}$  on displacement gradient tensor  $\nabla \mathbf{u}$  is continuous, continuously differentiable and monotonic
- ✓ it's desired that  $\mathbf{D}$  reduces to the infinitesimal strain tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  when  $\nabla \mathbf{u} \rightarrow 0$

For example, tensors from the set

$$\mathbf{D}^{(n)} = (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{-n}) / 2n$$

aren't from the Seth–Hill family, but for any  $n$  they have the same 2nd-order approximation as Seth–Hill measures with  $m = 0$ .

*Wikipedia, the free encyclopedia* — Finite strain theory

...

Как отмечалось в § 1.11, тензоры

...

## § 5. Velocity field

This topic is discussed in nearly any book about continuum mechanics, however for solid elastic continua it's not very vital. Among various models of material continuum, an elastic solid body is distinguished by interesting possibility of deriving the complete set (system) of equations

for it via single logically flawless procedure. But now we follow the way, usual for fluid continuum mechanics.

So, there's velocity field in spatial description  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$ . Decomposition of tensor  $\nabla \mathbf{v} = \nabla \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^i \partial_i \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^i \dot{\mathbf{R}}_i^*$  into symmetric and skew-symmetric parts (§ 1.7)

$$\nabla \dot{\mathbf{R}} = \nabla \dot{\mathbf{R}}^S - \frac{1}{2} (\nabla \times \dot{\mathbf{R}}) \times \mathbf{E}$$

or, introducing strain rate tensor  $\mathcal{S}$  and vorticity tensor  $\mathcal{W}$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathcal{S} - \mathcal{W},$$

$$\mathcal{S} \equiv \nabla \mathbf{v}^S = \nabla \dot{\mathbf{R}}^S = \frac{1}{2} (\mathbf{R}^i \dot{\mathbf{R}}_i + \dot{\mathbf{R}}_i \mathbf{R}^i), \quad (5.1)$$

$$-\mathcal{W} \equiv \nabla \mathbf{v}^A = -\mathbf{w} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{w} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^i \times \dot{\mathbf{R}}_i,$$

where figures vorticity (pseudo)vector  $\mathbf{w}$ , the companion of vorticity tensor  $\mathcal{W}$ .

Components of the strain rate tensor in current configuration's basis

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \mathcal{S}_{ij} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j, \quad \mathcal{S}_{ij} = \mathbf{R}_i \cdot \mathcal{S} \cdot \mathbf{R}_j &= \frac{1}{2} \mathbf{R}_i \cdot (\mathbf{R}^k \dot{\mathbf{R}}_k + \dot{\mathbf{R}}_k \mathbf{R}^k) \cdot \mathbf{R}_j = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{R}}_i \cdot \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_j) = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j)^\bullet \end{aligned}$$

...

$$\dot{G}_{ij}$$

$$G_{ij} \equiv \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j$$

...

Для упругих сред дискуссия о поворотах не нужна, истинное представление появляется в ходе логически стройных выкладок without additional hypotheses.

\* For sufficiently smooth functions, partial derivatives always commute, space and time ones too. Thus

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \quad \text{or} \quad \partial_i \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_i$$



## § 6. Area vector. Surface change

Take an infinitesimal surface. The area vector by length is equal to the surface's area and is directed along the normal to this surface.

In the undeformed (reference, original, initial, “material”) configuration, the area vector can be represented as  $\mathbf{n}do$ . Surface's area  $do$  is infinitely small, and  $\mathbf{n}$  is unit normal vector.

In the present (current, actual, deformed, “spatial”) configuration, the same surface has area vector  $\mathbf{N}dO$ .

With enough precision these infinitesimal surfaces are parallelograms

$$\begin{aligned}\mathbf{n}do &= d\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j dq^i dq^j, \\ \mathbf{N}dO &= d\mathbf{R}' \times d\mathbf{R}'' = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j dq^i dq^j.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Applying transformation of volume (??), we have

$$\begin{aligned}d\mathcal{V} &= Jd\mathcal{V}^{\circ} \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}_k = J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}_k \mathbf{R}^k &= J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k \mathbf{R}^k \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j = J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{F}^{-1}.\end{aligned}$$

Hence through (6.1) we come to the relation

$$\mathbf{N}dO = J\mathbf{n}do \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (6.2)$$

called Nanson's formula.

## § 7. Forces in continuum. Cauchy stress tensor

Since particles of this model of continuum are points with only translational degrees of freedom\*, there're no moments among generalized forces, there're no applied external couples neither in volume nor on surface.

На бесконечно малый объём  $d\mathcal{V}$  действует сила  $\rho \mathbf{f} d\mathcal{V}$ ; если  $\mathbf{f}$  — массовая сила (действующая на единицу массы), то  $\rho \mathbf{f}$  — объёмная. Такие силы происходят от силовых полей, например: гравитационные силы (“силы тяжести”), силы инерции в неинерциальных

\* Translational degrees of freedom arise from a particle's ability to move freely in space.

системах отсчёта, электромагнитные силы при наличии в среде зарядов и токов.

На бесконечно малую поверхность  $dO$  действует поверхностная сила  $\mathbf{p}dO$ . Это может быть contact pressure or/and friction, электростатическая сила при сосредоточенных на поверхности зарядах.

In the material continuum, as in any mechanical system, external and internal forces are distinguished. Со времён Euler'a и Cauchy принимают, что внутренние силы в среде — это поверхностные силы близкодействия: на любой бесконечно малой площадке  $NdO$  внутри тела действует сила  $\boldsymbol{\tau}_N dO$ . Уточняя: действует с той стороны, куда направлена единичная нормаль  $\mathbf{N}$ .

Vector  $\boldsymbol{\tau}_N$  на площадке с нормалью  $\mathbf{N}$  называется вектором тракции (traction vector) or force-stress vector. By the action–reaction principle,  $\boldsymbol{\tau}_N$  меняет знак с переменной направления  $\mathbf{N}$  на противоположную сторону:  $\boldsymbol{\tau}_{-\mathbf{N}} = -\boldsymbol{\tau}_N$ . (Sometimes the last thesis is proved via the balance of momentum for an infinitely short cylinder with bases  $NdO$  and  $-NdO$ .)

В каждой точке среды имеем бесконечно много векторов  $\boldsymbol{\tau}_N$ , поскольку через точку проходят площадки любой ориентации. Thereby, stress at a point of continuum is not a vector, but совокупность (множество) of all traction vectors для любых по-всякому ориентированных площадок, содержащих в себе эту точку. And it turns out, the infinite set of all vectors  $\boldsymbol{\tau}_N$  is completely determined by the only one second complexity tensor — Cauchy stress tensor  $\boldsymbol{\tau}$ . Рассмотрим содержащийся во многих книгах вывод этого утверждения.

На поверхности бесконечномалого материального тетраэдра ...

...

## § 8. Balance of momentum and rotational momentum

Рассмотрим какой-либо конечный объём  $\mathcal{V}$  среды, ограниченный поверхностью  $O(\partial\mathcal{V})$ , нагруженный поверхностными  $\mathbf{p}dO$  и массо-

выми/объёмными  $\mathbf{f}dm = \rho \mathbf{f}d\mathcal{V}$  внешними силами. Формулировка баланса импульса такова

$$\left( \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \mathbf{p} dO. \quad (8.1)$$

...  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\tau}_N = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}$  ...

Импульс слева найдём по (2.2), а поверхностный интеграл справа превратим в объёмный по теореме о дивергенции. Получим

$$\int_{\mathcal{V}} \left( \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) \right) d\mathcal{V} = \mathbf{0}.$$

Но объём  $\mathcal{V}$  произволен, поэтому равно нулю подынтегральное выражение. Приходим к уравнению баланса импульса в локальной (дифференциальной) форме

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}. \quad (8.2)$$

...

Теперь к балансу момента импульса. Интегральная формулировка:

$$\left( \int_{\mathcal{V}} \mathbf{R} \times \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{R} \times \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \mathbf{R} \times \mathbf{p} dO. \quad (8.3)$$

Дифференцируя левую часть ( $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}}$ )

$$\left( \int_{\mathcal{V}} \mathbf{R} \times \rho \dot{\mathbf{R}} d\mathcal{V} \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{R} \times \rho \ddot{\mathbf{R}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\dot{\mathbf{R}} \times \rho \dot{\mathbf{R}}}_{\mathbf{0}} d\mathcal{V},$$

применяя теорему о дивергенции к поверхностному интегралу (...  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\tau}_N = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}$  ...)

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) &= -(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{R} = -\mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \mathbf{R} \times (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) dO = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) d\mathcal{V}, \end{aligned}$$

...

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{R} \times \rho \ddot{\mathbf{R}} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{R} \times \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) d\mathcal{V},$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{R} \times \rho(\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{R}}) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) d\mathcal{V} = \mathbf{0},$$

...

$$\frac{\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R})}{\mathbf{R}^i \cdot \partial_i (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R})} = \frac{(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{R}}{\mathbf{R}^i \cdot (\partial_i \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{R}} + \mathbf{R}^i \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \partial_i \mathbf{R})$$

$$\boldsymbol{\tau} = e_i \boldsymbol{\tau}_i, \quad e_i = \text{constant}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^i \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \partial_i \mathbf{R}) &= \mathbf{R}^i \cdot (e_j \boldsymbol{\tau}_j \times \mathbf{R}_i) = \mathbf{R}^i \cdot e_j \boldsymbol{\tau}_j \times \mathbf{R}_i = \\ &= -e_j \cdot \mathbf{R}^i \mathbf{R}_i \times \boldsymbol{\tau}_j = -e_j \cdot \mathbf{E} \times \boldsymbol{\tau}_j = -e_j \times \boldsymbol{\tau}_j = -\boldsymbol{\tau}_{\times} \end{aligned}$$

...

## §9. Eigenvalues of Cauchy stress tensor

Как и любой симметричный тензор,  $\boldsymbol{\tau}$  имеет три вещественных собственных числа  $\sigma_i$ , называемых главными напряжениями (principal stresses), а также ортогональную тройку собственных векторов единичной длины  $e_i$ . In representation  $\boldsymbol{\tau} = \sum \sigma_i e_i e_i$  most often indices are sorted as  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , а тройка  $e_i$  — “правая”.

Известна теорема о кругах Мора (Mohr's circles)\*

...

Чтобы замкнуть набор (систему) уравнений модели сплошной среды, нужно добавить определяющие отношения (constitutive relations) — уравнения, связывающие напряжение с деформацией (и другие необходимые связи). Однако, for a solid elastic continuum такой длинный путь построения модели излишен, что читатель и увидит ниже.

\* Mohr's circles, named after Christian Otto Mohr, is a two-dimensional graphical representation of transformation for the Cauchy stress tensor.

## § 10. Principle of virtual work (without Lagrange multipliers)

According to the principle of virtual work for some finite volume of continuum

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} + \delta W^{(i)}) d\mathcal{V} + \oint_{O(\partial \mathcal{V})} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (10.1)$$

Here  $\delta W^{(i)}$  is work of internal forces per volume unit in the current configuration;  $\mathbf{f}$  is mass force, with dynamics  $(\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{R}})$ ;  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\tau}_N = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}$  is surface force.

Applying the divergence theorem to the surface integral, using\*

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^T$$

and randomness of  $\mathcal{V}$ , we get the local differential edition of (10.1)

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{R} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^T + \delta W^{(i)} = 0. \quad (10.2)$$

When a body virtually moves as a rigid whole, the work of internal forces nullifies

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R} &= \delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0, \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot (\delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R}) + \boldsymbol{\tau}^T \cdot \nabla (\delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R}) &= 0, \\ \delta \boldsymbol{\rho} = \text{constant} \Rightarrow \nabla \delta \boldsymbol{\rho} = {}^2\mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{o} = \text{constant} \Rightarrow \nabla \delta \mathbf{o} = {}^2\mathbf{0}, \\ \nabla (\delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R}) &= \nabla (\delta \mathbf{o} \times \mathbf{R}) = \nabla \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R} - \nabla \mathbf{R} \times \delta \mathbf{o} = \\ &= -\nabla \mathbf{R} \times \delta \mathbf{o} = -\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o} \\ &\dots \end{aligned}$$

Assuming  $\delta \mathbf{o} = \mathbf{0}$  (just translation)  $\Rightarrow \nabla \delta \mathbf{R} = \nabla \delta \boldsymbol{\rho} = {}^2\mathbf{0}$ , it turns into the balance of forces (of momentum)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

If  $\delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R}$  (just rotation) with  $\delta \mathbf{o} = \text{constant}$ , then

$$\begin{aligned} (14.6, \S 1.14) \Rightarrow \nabla \delta \mathbf{R} &= \nabla \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R} - \nabla \mathbf{R} \times \delta \mathbf{o} = -\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o}, \\ \nabla \delta \mathbf{R}^T &= \mathbf{E} \times \delta \mathbf{o} \end{aligned}$$

\*  $R^i \cdot \partial_i (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R}) = R^i \cdot (\partial_i \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{R} + R^i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{R}),$   
 $R^i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{R}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \mathbf{R}) R^i = \boldsymbol{\tau} \cdot (R^i \partial_i \delta \mathbf{R})^T$

With

$$(7.4, \S 1.7) \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_\times = -\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^3,$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\delta o}) = \boldsymbol{\tau} \cdot (-\boldsymbol{\epsilon}^3 \cdot \boldsymbol{\delta o}) = (-\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^3) \cdot \boldsymbol{\delta o} = \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \boldsymbol{\delta o}$$

...

In an elastic continuum, internal forces are potential

$$\delta W^{(i)} = -\rho \delta \tilde{\Pi}$$

...

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S = -\delta W^{(i)} = \rho \delta \tilde{\Pi} \quad (10.3)$$

...

Вид потенциала  $\tilde{\Pi}$  per mass unit пока неизвестен, но очевидно что  $\tilde{\Pi}$  определяется деформацией.

With the balance of mass  $\rho J = \overset{\circ}{\rho} \Leftrightarrow \rho = J^{-1} \overset{\circ}{\rho}$  ( $J \equiv \det \mathbf{F}$  — якобиан, определитель градиента движения), потенциал на единицу объёма в недеформированной конфигурации  $\overset{\circ}{\Pi}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Pi} \equiv \overset{\circ}{\rho} \tilde{\Pi} &\Rightarrow \delta \overset{\circ}{\Pi} = \overset{\circ}{\rho} \delta \tilde{\Pi}, \\ \rho \delta \tilde{\Pi} &= J^{-1} \delta \overset{\circ}{\Pi}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Полным аналогом (...) является равенство

...

## § 11. Constitutive relations of elasticity

Fundamental relation of elasticity (??)

...

$$\Pi(C) = \int_0^C \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{C}$$

If the strain energy density is path independent, then it acts as a potential for stress, that is

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi(C)}{\partial \mathbf{C}}$$

For adiabatic processes,  $\Pi$  is equal to the change in internal energy per unit volume.

For isothermal processes,  $\Pi$  is equal to the Helmholtz free energy per unit volume.

The natural configuration of a body is defined as the configuration in which the body is in stable thermal equilibrium with no external loads and zero stress and strain.

When we apply energy methods in elasticity, we implicitly assume that a body returns to its natural configuration after loads are removed. This implies that the Gibbs' condition is satisfied:

$$\Pi(\mathbf{C}) \geq 0 \quad \text{with} \quad \Pi(\mathbf{C}) = 0 \quad \text{iff} \quad \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

...

Начальная конфигурация считается естественной (natural configuration) — недеформированной ненапряжённой:  $\mathbf{C} = {}^2\mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}$ , поэтому в  $\Pi$  нет линейных членов.

Тензор жёсткости  ${}^4\mathbf{A}$

...

Rubber-like material (elastomer)

Материалу типа резины (эластомеру) характерны большие деформации, и функция  $\Pi(\text{I}, \text{II}, \text{III})$  для него бывает весьма сложной\*.

При больших деформациях исчезают преимущества использования  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{C}$  — проще остаться с радиусом-вектором  $\mathbf{R}$  ...

...

\* **Harold Alexander.** A constitutive relation for rubber-like materials // International Journal of Engineering Science, volume 6 (September 1968), pages 549–563.

## § 12. Piola–Kirchhoff stress tensors and other measures of stress

Соотношение Нансона  $NdO = Jndo \cdot \mathbf{F}^{-1}$  между векторами бесконечно малой площадки в отсчётной ( $ndo$ ) и в актуальной ( $NdO$ ) конфигурациях\*

$$(6.2) \Rightarrow NdO \cdot \boldsymbol{\tau} = Jndo \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow N \cdot \boldsymbol{\tau} dO = \mathbf{n} \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} do$$

gives the dual expression of a surface force

$$N \cdot \boldsymbol{\tau} dO = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} do, \quad \mathbf{T} \equiv J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (12.1)$$

Тензор  $\mathbf{T}$  называется первым (несимметричным) тензором напряжения Piola–Kirchhoff, иногда — “номинальным напряжением” (“nominal stress”) или “инженерным напряжением” (“engineering stress”). Бывает и когда какое-либо из этих (на)именований даётся транспонированному тензору

$$\mathbf{T}^\top = J\boldsymbol{\tau}^\top \cdot \mathbf{F}^{-\top} = J\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}.$$

Обращение (12.1)

$$J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$$

...

$$\delta\Pi = \mathbf{T} \cdot \delta\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \Rightarrow \Pi = \Pi(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}) \quad (12.2)$$

— этот немного неожиданный результат получился благодаря коммутативности  $\delta$  и  $\overset{\circ}{\nabla}$ :  $\overset{\circ}{\nabla}\delta\mathbf{R}^\top = \delta\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top$  ( $\nabla$  and  $\delta$  don't commute).

Тензор  $\mathbf{T}$  оказался энергетически сопряжённым с  $\mathbf{F} \equiv \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top$

$$\mathbf{T} = \frac{\partial\Pi}{\partial\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{F}}. \quad (12.3)$$

Второй (симметричный) тензор напряжения Piola–Kirchhoff  $\mathbf{S}$  энергетически сопряжён с  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$  и  $\mathbf{C} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{C}) &= \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{S} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{C}}, \\ d\mathbf{G} &= 2d\mathbf{C} \Rightarrow \delta\Pi(\mathbf{G}) = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{G}, \quad \mathbf{S} = 2\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{G}}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

\* Like before,  $\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{R}_i\mathbf{r}^i = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top$  is motion gradient,  $J \equiv \det \mathbf{F}$  is Jacobian (Jacobian determinant).



Связь между первым и вторым тензорами

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\top} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^\top \Leftrightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top, \mathbf{T}^\top = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$$

и между тензором  $\mathbf{S}$  и тензором напряжения Cauchy  $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \Leftrightarrow J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top = \boldsymbol{\tau}.$$

...

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^\top = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^\top \\ \delta \mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} \\ \delta \mathbf{T} &= \delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{F}^\top \end{aligned}$$

...

The quantity  $\boldsymbol{\kappa} = J\boldsymbol{\tau}$  is called the *Kirchhoff stress tensor* and is used widely in numerical algorithms in metal plasticity (where there's no change in volume during plastic deformation). Another name for it is *weighted Cauchy stress tensor*.

...

Here's balance of forces (of momentum) with tensor  $\mathbf{T}$  for any undeformed volume  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$

$$\int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \int_{O(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} dO = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} + \int_{o(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} do = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) d\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \mathbf{0}$$

and its local (differential) variant

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (12.5)$$

Advantages of this equation in comparison with (8.2) are: here figures the known mass density  $\overset{\circ}{\rho}$  of undeformed volume  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$ , and the operator  $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$  is defined through known vectors  $\mathbf{r}^i$ . Appearance of  $\mathbf{T}$  reflects specific property of an elastic solid body — “to preserve” its reference configuration. In fluid mechanics, for example, tensor  $\mathbf{T}$  is unlikely useful.

Principle of virtual work for an arbitrary volume  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$  of the elastic  $(\delta W^{(i)} = -\delta \Pi)$  continuum:

$$\int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} - \delta \Pi \right) d\overset{\circ}{\mathcal{V}} + \int_{o(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R} d\sigma = 0,$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R}) = \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R} + \mathbf{T}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}, \quad \mathbf{T}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}^\top$$

$$\delta \Pi = \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) \cdot \delta \mathbf{R} + \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}^\top$$

....

First one is non-symmetric, it connects forces in deformed stressed configuration to underformed geometry+mass (initially known volumes, areas, densities), and it is energetically conjugate to the motion gradient (commonly mistakenly called “deformation gradient”, despite comprising of rigid rotations). First (sometimes its transpose) is also known as “nominal stress” and “engineering stress”.

Second one is symmetric, it connects loads in initial undeformed configuration to initial mass+geometry, and it’s conjugate to the right Cauchy–Green deformation tensor (and thus to the Cauchy–Green–Venant measure of deformation).

The first is simpler when you use just motion gradient and is more universal, but the second is simpler when you prefer right Cauchy–Green deformation and its offsprings.

There’s also popular Cauchy stress, which relates forces in deformed configuration to deformed geometry+mass.

“energetically conjugate” means that their product is energy, here: elastic (potential) energy per unit of volume

...

In the case of finite deformations, the Piola–Kirchhoff stress tensors express the stress relative to the reference configuration. This is in contrast to the Cauchy stress tensor which expresses the stress relative to the present configuration. For infinitesimal deformations and rotations, the Cauchy and Piola–Kirchhoff tensors are identical.

Whereas the Cauchy stress tensor  $\boldsymbol{\tau}$  relates stresses in the current configuration, the motion gradient and strain tensors are described by relating the motion to the reference configuration; thus not all tensors describing the material are in either the reference or current configuration. Describing the stress, strain and deformation either in the reference or

current configuration would make it easier to define constitutive models. For example, the Cauchy stress tensor is variant to a pure rotation, while the deformation strain tensor is invariant; thus creating problems in defining a constitutive model that relates a varying tensor, in terms of an invariant one during pure rotation; as by definition constitutive models have to be invariant to pure rotations.

### *1st Piola–Kirchhoff stress tensor*

The *1st Piola–Kirchhoff stress tensor* is one possible solution to this problem. It defines a family of tensors, which describe the configuration of the body in either the current or the reference configuration.

The 1st Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{T}$  relates forces in the present (“spatial”) configuration with areas in the reference (“material”) configuration

$$\mathbf{T} = J \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

where  $\mathbf{F}$  is the motion gradient and  $J \equiv \det \mathbf{F}$  is the Jacobian determinant.

In terms of components in an orthonormal basis, the first Piola–Kirchhoff stress is given by

$$T_{iL} = J \tau_{ik} F_{Lk}^{-1} = J \tau_{ik} \frac{\partial X_L}{\partial x_k}$$

Because it relates different coordinate systems, the 1st Piola–Kirchhoff stress is a two-point tensor. In common, it’s not symmetric. The 1st Piola–Kirchhoff stress is the 3D generalization of the 1D concept of engineering stress.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 1st Piola–Kirchhoff stress tensor will vary with material orientation.

The 1st Piola–Kirchhoff stress is energy conjugate to the motion gradient.

### *2nd Piola–Kirchhoff stress tensor*

Whereas the 1st Piola–Kirchhoff stress relates forces in the current configuration to areas in the reference configuration, the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{S}$  relates forces in the reference configuration to areas in the reference configuration. The force in the reference configuration is obtained via a mapping that preserves the relative relationship between the force direction and the area normal in the reference configuration.

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

In index notation using an orthonormal basis,

$$S_{IL} = J F_{Ik}^{-1} F_{Lm}^{-T} \tau_{km} = J \frac{\partial X_I}{\partial x_k} \frac{\partial X_L}{\partial x_m} \tau_{km}$$

This tensor, a one-point tensor, is symmetric.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor remain constant, irrespective of material orientation.

The 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor is energy conjugate to the Green–Lagrange finite strain tensor.

...

### § 13. Variation of present configuration

Прежде упругая среда рассматривалась в двух конфигурациях: отсчётной с радиусами-векторами  $\mathbf{r}$  и актуальной с  $\mathbf{R}$ . Теперь представим себе малое изменение текущей конфигурации с бесконечно-малыми приращениями радиуса-вектора  $\delta\mathbf{R}$ , вектора массовых сил  $\delta\mathbf{f}$ , первого тензора напряжения Piola–Kirchhoff  $\delta\mathbf{T}$  и тензора деформации  $\delta\mathbf{C}$ . Варьируя (12.5),  $(\dots)^*$  и  $(\dots)$ , получаем

$$\begin{aligned} \rho\delta\mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \delta\mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad \delta\mathbf{T} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta\mathbf{C} \right) \cdot \mathbf{F}^\top + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta\mathbf{F}^\top, \\ \delta\mathbf{F}^\top &= \delta\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \overset{\circ}{\nabla}\delta\mathbf{R} = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla\delta\mathbf{R}, \quad \delta\mathbf{F} = \delta\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top = \nabla\delta\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{F}, \\ \delta\mathbf{C} &= \mathbf{F}^\top \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}, \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla\delta\mathbf{R}^S. \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$\begin{aligned} \dots \\ (6.2) \Rightarrow \mathbf{n}d\mathbf{o} &= J^{-1}N d\mathbf{O} \cdot \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{T}d\mathbf{o} = J^{-1}\mathbf{N} \cdot \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{T}d\mathbf{O} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{T}d\mathbf{o} = \mathbf{N} \cdot \delta\boldsymbol{\tau}d\mathbf{O}, \quad \delta\boldsymbol{\tau} \equiv J^{-1}\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{T} \end{aligned}$$

— введённый так тензор  $\delta\boldsymbol{\tau}$  связан с вариацией  $\delta\mathbf{T}$  как  $\boldsymbol{\tau}$  связан с  $\mathbf{T}$  ( $\boldsymbol{\tau} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ ). Из (13.1) и ...

...

... корректируя коэффициенты линейной функции  $\delta\boldsymbol{\tau}(\nabla\delta\mathbf{R})$ .

### § 14. Internal constraints

До сих пор деформация считалась свободной, мера деформации  $\mathbf{C}$  могла быть любой. Однако, существуют материалы со значительным сопротивлением некоторым видам деформации. Резина, например, изменению формы сопротивляется намного меньше, чем изменению объёма — некоторые виды резины можно считать несжимаемым материалом.

Понятие геометрической связи, развитое в общей механике ...

...

for incompressible materials  $\Pi = \Pi(\mathbf{I}, \mathbf{II})$

$$\begin{aligned} * \nabla &= \nabla \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r} = \mathbf{R}^i \partial_i \cdot \mathbf{r}^j \partial_j \mathbf{r} \stackrel{?}{=} \mathbf{R}^i \partial_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^j \partial_j = \nabla \mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \\ \overset{\circ}{\nabla} &= \overset{\circ}{\nabla} \cdot \nabla \mathbf{R} = \mathbf{r}^i \partial_i \cdot \mathbf{R}^j \partial_j \mathbf{R} \stackrel{?}{=} \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^j \partial_j = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} \cdot \nabla = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla \end{aligned}$$

Mooney–Rivlin model of incompressible material

$$\Pi = c_1(I - 3) + c_2(\Pi - 3)$$

incompressible Treloar (neo-Hookean) material

$$c_2 = 0 \Rightarrow \Pi = c_1(I - 3)$$

...

## § 15. Hollow sphere under pressure

Решение этой относительно простой задачи описано во многих книгах. В отсчётной (ненапряжённой) конфигурации имеем сферу с внутренним радиусом  $r_0$  и наружным  $r_1$ . Давление равно  $p_0$  внутри и  $p_1$  снаружи.

Введём удобную для этой задачи сферическую систему координат в отсчётной конфигурации  $q^1 = \theta$ ,  $q^2 = \phi$ ,  $q^3 = r$  (рис. ??). Эти же координаты будут и материальными. Имеем

...

## § 16. Stresses as Lagrange multipliers

Описанному ранее в § 10 использованию принципа виртуальной работы предшествовало введение тензора напряжения Cauchy через баланс сил для бесконечно малого тетраэдра (§ 7). Но тут мы увидим, что сей принцип применим и без рассуждений с тетраэдром.

Рассмотрим тело — не только лишь упругое, с любой виртуальной работой внутренних сил  $\delta W^{(i)}$  per mass unit — нагруженное массовыми  $\mathbf{f} dm$  (для краткости пишем  $\mathbf{f}$  вместо  $\mathbf{f} - \dot{\mathbf{R}}$ , так что динамика присутствует) и поверхностными  $\mathbf{p} dO$  внешними силами. Имеем вариационное уравнение

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \left( \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} + \delta W^{(i)} \right) d\mathcal{V} + \int_{O(\partial\mathcal{V})} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (16.1)$$

Полагаем, что внутренние силы не совершают работу при виртуальном движении тела как целого — когда от бесконечно малых виртуальных перемещений  $\delta \mathbf{R}$  частиц тела нет деформации  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{R}^S = {}^2\mathbf{0} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (16.2)$$

Отбросив  $\delta W^{(i)}$  в (16.1) при условии (16.2), получим вариационное уравнение со связью. Приём с множителями Лагранжа даёт возможность считать вариации  $\delta \mathbf{R}$  независимыми. Поскольку в каждой точке связь представлена симметричным тензором второй сложности, то таким же тензором будут и множители Лагранжа  ${}^2\boldsymbol{\lambda}$ . Приходим к уравнению

$$\int_{\mathcal{V}} \left( \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} - {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{R}^S \right) d\mathcal{V} + \int_{O(\partial\mathcal{V})} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (16.3)$$

Благодаря симметрии  ${}^2\boldsymbol{\lambda}$  имеем\*

$$\begin{aligned} {}^2\boldsymbol{\lambda} &= {}^2\boldsymbol{\lambda}^T \Rightarrow {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{R}^S = {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{R}^T, \\ {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{R}^S &= \boldsymbol{\nabla} \cdot ({}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{R}) - \boldsymbol{\nabla} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{R}. \end{aligned}$$

\*  $\boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X}^T = \boldsymbol{\Lambda}^S \cdot \mathbf{X}^S, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{a}$

Подставив это в (16.3) и применив теорему о дивергенции, получаем

$$\int_V (\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta \mathbf{R} dV + \int_{O(\partial V)} (\mathbf{p} - \mathbf{N} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0.$$

But  $\delta \mathbf{R}$  is random on a surface and inside a volume, thus

$$\mathbf{p} = \mathbf{N} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}, \quad \nabla \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

— formally introduced symmetric multiplier  ${}^2\boldsymbol{\lambda}$  happened to be the Cauchy stress tensor.

Подобное введение напряжений was described in book [61]. Новых результатов тут нет, но интересна сама возможность одновременного вывода тех уравнений механики сплошной среды, которые раньше считались независимыми. В следующих главах эта техника используется для построения новых континуальных моделей.

## Bibliography

Глубина изложения нелинейной безмоментной упругости характерна для книг А. И. Лурье [33, 34]. Оригинальность как основных идей, так и стиля присуща книге С. Truesdell'a [72]. Много ценной информации можно найти у К. Ф. Черных [81]. Стоит отметить и книгу Л. М. Зубова [23]. Монография Ю. Н. Работнова [61], где напряжения представлены как множители Лагранжа, очень интересна и своеобразна. О применении нелинейной теории упругости в смежных областях рассказано в книге С. Teodosiu [66]. Повышенным математическим уровнем отличается монография Ph. Ciarlet [65].



## chapter 4

# CLASSICAL LINEAR ELASTICITY

Geometrically linear model: displacements are small. Operators  $\overset{\circ}{\nabla}$  and  $\nabla$  are indistinguishable, “equations can be written in the reference configuration”.

### §1. Complete set of equations

**E**quations of nonlinear elasticity, even in simplest cases, bring to mathematically complicated problems. Therefore the linear theory is applied everywhere. Its equations were derived in the first half of the XIX<sup>th</sup> century by Cauchy, Navier, Lamé, Clapeyron, Poisson, Saint-Venant, George Green and other scientists.

The complete closed set (system) of equations of the classical linear theory in the direct invariant tensor notation is

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0, \quad \sigma = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} = {}^4\mathcal{A} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \nabla u^S. \quad (1.1)$$

Here  $\sigma$  is linear stress tensor,  $f$  is vector of volume loads,  $\varepsilon$  is infinitesimal linear deformation tensor,  $\Pi(\varepsilon)$  is potential energy of deformation per volume unit,  ${}^4\mathcal{A}$  is stiffness tensor (tetravalent, with symmetry  ${}^4\mathcal{A}_{12\rightleftharpoons 34} = {}^4\mathcal{A}$ ,  ${}^4\mathcal{A}_{1\rightleftharpoons 2} = {}^4\mathcal{A}$ ,  ${}^4\mathcal{A}_{3\rightleftharpoons 4} = {}^4\mathcal{A}$ ).

Equations (1.1) are exact, they can be derived via variation of equations of the nonlinear theory. Variation from an arbitrary configuration is described in §3.13. The linear theory is the result of variation from the initial unstressed configuration, where

$$\begin{aligned} F &= E, \quad C = {}^20, \quad \delta C = \nabla \delta R^S \equiv \delta \varepsilon, \\ \tau &= {}^20, \quad \delta \tau = \delta T = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial C \partial C} \cdot \delta C, \quad \nabla \cdot \delta \tau + \rho \delta f = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

It remains to change  $\delta R$  to  $u$ ,  $\delta \varepsilon$  to  $\varepsilon$ ,  $\delta \tau$  to  $\sigma$ ,  $\partial^2 \Pi / \partial C \partial C$  to  ${}^4\mathcal{A}$ , and  $\rho \delta f$  to  $f$ .

Если такой вывод кажется читателю малонаглядным, возможно исходить из уравнений

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \\ \boldsymbol{\tau} &= J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^\top, \quad \mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^S + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Полагая перемещение  $\mathbf{u}$  малым, перейдём от (1.3) к (1.1).

Или вот как. Вместо  $\mathbf{u}$  взять  $\chi \mathbf{u}$ , тут  $\chi \rightarrow 0$  — некоторый весьма малый параметр. А неизвестные представить рядами по целым степеням  $\chi$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}^{(0)} + \chi \boldsymbol{\tau}^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^{(0)} + \chi \mathbf{C}^{(1)} + \dots, \\ \nabla &= \overset{\circ}{\nabla} + \chi \nabla^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \chi \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \quad J = 1 + \chi J^{(1)} + \dots\end{aligned}$$

Для первых (“нулевых”) членов этих разложений и получается (1.1). В книге [72] сие названо “формальным приближением”.

Невозможно сказать в общем случае, насколько мал должен быть параметр  $\chi$  — ответ зависит от ситуации и определяется лишь тем, описывает линейная модель интересующий эффект или нет. Когда, например, интересна связь частоты свободных колебаний упругого тела с амплитудой, то нужна уже нелинейная модель.

Линейная задача ставится в начальном объёме  $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ , ограниченном поверхностью  $o$  с вектором площади  $\mathbf{n}do$  (“the principle of initial dimensions”).

Краевые (граничные) условия чаще всего такие: на части  $o_1$  поверхности известны перемещения (kinematic boundary condition), а на другой части  $o_2$  — силы (static boundary condition)

$$\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{o_2} = \mathbf{p}. \quad (1.4)$$

Но встречаются и более сложные комбинации, если знаем одновременно некоторые компоненты как  $\mathbf{u}$ , так и  $\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ . Для примера, на плоской грани  $x = \text{constant}$  при вдавливании штампа с гладкой поверхностью  $u_x = v(y, z)$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$  (функция  $v$  определяется формой штампа).

Начальные условия в динамических задачах, когда вместо  $\mathbf{f}$  имеем  $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ , ставятся как обычно в механике — на положения и на скорости: в условный момент времени  $t=0$  определены  $\mathbf{u}$  и  $\dot{\mathbf{u}}$ .

Как отмечалось в гл. 2, в основу механики может быть положен принцип виртуальной работы (d'Alembert–Lagrange principle). Этот принцип справедлив и в линейной теории (внутренние силы в упругой среде потенциальны:  $\delta W^{(i)} = -\delta\Pi$ )

$$\int_V \left[ (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} - \delta\Pi \right] dV + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} do = 0, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0}, \quad (1.5)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \frac{1}{2} \delta(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}, \\ \int_V \delta\Pi dV &= \oint_{o(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} do - \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} dV \end{aligned}$$

и левая часть (1.5) приобретает вид

$$\int_V \left( \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} \right) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{o_2} (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} do,$$

что, конечно же, равно нулю. Отметим краевое условие  $\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0}$ : виртуальные перемещения согласованы с этой связью —  $\delta \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0}$ .

## § 2. Uniqueness of the solution in dynamics

As is typical for linear mathematical physics [34, 121], the uniqueness theorem is proven “by contradiction”. Assume there are some two solutions:  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$  and  $\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t)$ . If difference  $\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  will be equal to  $\mathbf{0}$ , then these solutions coincide, that is the solution is unique.

But first we'll make sure the existence of the energy integral — by deriving the balance of energy equation for the classical linear model

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{T} + \Pi) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV &= \int_V \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{u}} do, \quad (2.1) \\ \mathbf{u}|_{o_1} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{o_2} = \mathbf{p}, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}^\circ, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}^\circ. \end{aligned}$$

For the left-hand side we have

$$\dot{T} = \frac{1}{2} (\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})^{\bullet} = \frac{1}{2} \rho (\dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}},$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} &= \frac{1}{2} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathcal{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon})^{\bullet}}_{2\boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathcal{A} \cdots \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \boldsymbol{\sigma} \cdots \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \cdots \nabla \dot{\mathbf{u}}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}}_{-(\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}})} = \\ &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

(balance of momentum  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  is used),

$$\dot{T} + \dot{\Pi} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}}.$$

Applying the divergence theorem

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\mathcal{V} = \oint_{o(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\sigma$$

and boundary condition  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}$  on  $o_2$ , we get (2.1).

Из (2.1) следует, что без нагрузок (when there're no volume nor surface forces), the full mechanical energy is constant:

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ and } \mathbf{p} = \mathbf{0} \Rightarrow \int_{\mathcal{V}} (T + \Pi) d\mathcal{V} = \text{constant}. \quad (2.2)$$

If at the initial moment there was unstressed rest, then

$$\int_{\mathcal{V}} (T + \Pi) d\mathcal{V} = 0. \quad (2.2')$$

Kinetic energy is positive:  $T > 0$  if  $\dot{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$  and turns to zero only when  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  — this follows from the very definition  $T \equiv \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ . Potential energy, при малых деформациях с тензором  $\boldsymbol{\varepsilon}$  представляемая квадратичной формой  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdots {}^4\mathcal{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}$ , is positive too:  $\Pi > 0$  if  $\boldsymbol{\varepsilon} \neq {}^2\mathbf{0}$ . Such is a priori requirement of the positive definiteness for stiffness tensor  ${}^4\mathcal{A}$ . Это одно из “дополнительных неравенств в теории упругости” [33, 72].

And since  $T$  and  $\Pi$  are positive, from (2.2') ensues

$$T = 0, \Pi = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S = {}^2\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \boldsymbol{\vartheta}^\circ \times \mathbf{r},$$

where  $\mathbf{u}^\circ$  and  $\boldsymbol{\vartheta}^\circ$  are some constants. With fixing on  $o_1$

$$\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}^\circ = \mathbf{0} \text{ and } \boldsymbol{\vartheta}^\circ = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ everywhere.}$$

Теперь вспомним о двух решениях  $\mathbf{u}_1$  and  $\mathbf{u}_2$ . Разность  $\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  есть решение полностью однородной задачи (в объёме  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , в краевых и в начальных условиях — нули). Therefore  $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$  — единственность доказана.

Что же касается существования решения, то простыми выкладками его в общем случае не обосновать. Отметим лишь, что динамическая задача является эволюционной, то есть описывает развитие процесса во времени. Из баланса импульса находим ускорение  $\ddot{\mathbf{u}}$ , далее переходим на “следующий временной слой”  $t + dt$ :

...

Разумеется, эти соображения лишены математической точности, характерной, например, для монографии Philippe Ciarlet [65].

$$\sigma = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} = {}^4\mathcal{A} \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot {}^4\mathcal{A} \quad \S 3. \text{ Hooke's ceiiinossttuv law}$$

То соотношение между напряжением и деформацией, которое Robert Hooke в XVII<sup>ом</sup> веке мог высказать лишь в весьма неопределённой форме\*, в современных обозначениях записано в (1.1) и определяется тензором

$${}^4\mathcal{A} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon} = A^{ijkl} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l, \quad A^{ijkl} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}. \quad (3.1)$$

Тензор жёсткости, как частная производная упругого потенциала  $\Pi$  дважды по тому же тензору  $\varepsilon$ , симметричен по первой и второй паре индексов:  ${}^4\mathcal{A}_{12 \rightleftharpoons 34} = {}^4\mathcal{A} \Leftrightarrow A^{ijkl} = A^{kl ij}$ , от этого у 36 компонент из  $3^4 = 81$  “есть двойник”, а лишь 45 независимы. К тому же, из-за симметрии тензора линейной деформации  $\varepsilon$ , тензор  ${}^4\mathcal{A}$  симметричен ещё и внутри каждой пары индек-

\* “ceiiinossttuv, that is Ut tensio sic vis; ...”

сов:  $A^{ijkl} = A^{jikl} = A^{ijlk} (= A^{jilk})$ . Число независимых компонент при этом снижается до 21:

$$\begin{aligned}
 A^{abcd} &= A^{cdab} = A^{bacd} = A^{abdc} \\
 A^{1111} & \\
 A^{1112} &= A^{1121} = A^{1211} = A^{2111} \\
 A^{1113} &= A^{1131} = A^{1311} = A^{3111} \\
 A^{1122} &= A^{2211} \\
 A^{1123} &= A^{1132} = A^{2311} = A^{3211} \\
 A^{1133} &= A^{3311} \\
 A^{1212} &= A^{1221} = A^{2112} = A^{2121} \\
 A^{1213} &= A^{1231} = A^{1312} = A^{1321} = A^{2113} = A^{2131} = A^{3112} = A^{3121} \\
 A^{1222} &= A^{2122} = A^{2212} = A^{2221} \\
 A^{1223} &= A^{1232} = A^{2123} = A^{2132} = A^{2312} = A^{2321} = A^{3212} = A^{3221} \\
 A^{1233} &= A^{2133} = A^{3312} = A^{3321} \\
 A^{1313} &= A^{1331} = A^{3113} = A^{3131} \\
 A^{1322} &= A^{2213} = A^{2231} = A^{3122} \\
 A^{1323} &= A^{1332} = A^{2313} = A^{2331} = A^{3123} = A^{3132} = A^{3213} = A^{3231} \\
 A^{1333} &= A^{3133} = A^{3313} = A^{3331} \\
 A^{2222} & \\
 A^{2223} &= A^{2232} = A^{2322} = A^{3222} \\
 A^{2233} &= A^{3322} \\
 A^{2323} &= A^{2332} = A^{3223} = A^{3232} \\
 A^{2333} &= A^{3233} = A^{3323} = A^{3332} \\
 A^{3333} &
 \end{aligned}$$

Нередко компоненты тензора жёсткости записывают симметричной матрицей  $6 \times 6$  вида

$$[\mathcal{A}]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A^{1111} & A^{1122} & A^{1133} & A^{1112} & A^{1113} & A^{1123} \\ A^{2211} & A^{2222} & A^{2233} & A^{1222} & A^{1322} & A^{2223} \\ A^{3311} & A^{3322} & A^{3333} & A^{1233} & A^{1333} & A^{2333} \\ A^{1211} & A^{2212} & A^{3312} & A^{1212} & A^{1213} & A^{1223} \\ A^{1311} & A^{2213} & A^{3313} & A^{1312} & A^{1313} & A^{1323} \\ A^{2311} & A^{2322} & A^{3323} & A^{2312} & A^{2313} & A^{2323} \end{bmatrix}$$

Даже в декартовых координатах  $x, y, z$  квадратичная форма упругой энергии  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$  довольно-таки громоздкая:

$$\begin{aligned}
 2\Pi &= a_1 \varepsilon_x^2 + a_2 \varepsilon_y^2 + a_3 \varepsilon_z^2 + a_4 \varepsilon_{xy}^2 + a_5 \varepsilon_{xz}^2 + a_6 \varepsilon_{yz}^2 + \\
 &+ 2 \left[ \varepsilon_x (a_{12} \varepsilon_y + a_{13} \varepsilon_z + a_{14} \varepsilon_{xy} + a_{15} \varepsilon_{xz} + a_{16} \varepsilon_{yz}) + \right. \\
 &\quad + \varepsilon_y (a_{23} \varepsilon_z + a_{24} \varepsilon_{xy} + a_{25} \varepsilon_{xz} + a_{26} \varepsilon_{yz}) + \\
 &\quad + \varepsilon_z (a_{34} \varepsilon_{xy} + a_{35} \varepsilon_{xz} + a_{36} \varepsilon_{yz}) + \\
 &\quad \left. + \varepsilon_{xy} (a_{45} \varepsilon_{xz} + a_{46} \varepsilon_{yz}) + a_{56} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} \right]. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Когда добавляется материальная симметрия, число независимых компонент тензора  $\mathbf{A}$  ещё уменьшается.

Пусть материал имеет плоскость симметрии (упругих свойств)  $z = \text{constant}$ . Тогда энергия  $\Pi$  не меняется при перемене знаков у  $\varepsilon_{zx}$  и  $\varepsilon_{zy}$ . А это возможно лишь если

$$\Pi \Big|_{\substack{\varepsilon_{xz} = -\varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy}}} = \Pi \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 &= a_{15} = a_{16} = a_{25} = a_{26} = \\ &= a_{35} = a_{36} = a_{45} = a_{46} \end{aligned} \quad (3.3)$$

— число независимых констант упало до 13.

Пусть далее плоскостей симметрии две:  $z = \text{constant}$  и  $y = \text{constant}$ . Поскольку  $\Pi$  в таком случае не чувствительна к знакам  $\varepsilon_{yx}$  и  $\varepsilon_{yz}$ , вдобавок к (3.3) имеем

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{56} = 0 \quad (3.4)$$

— осталось 9 констант.

Ортотропным (ортогонально анизотропным) называется материал с тремя ортогональными плоскостями симметрии — пусть это координатные плоскости  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Легко увидеть, что (3.3) и (3.4) — это весь набор нулевых констант и в этом случае. Итак, ортотропный материал характеризуется девятью константами, и “для ортотропности” достаточно двух перпендикулярных плоскостей симметрии. Вид упругой энергии упрощается до

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2}a_1\varepsilon_x^2 + \frac{1}{2}a_2\varepsilon_y^2 + \frac{1}{2}a_3\varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}a_4\varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{2}a_5\varepsilon_{xz}^2 + \frac{1}{2}a_6\varepsilon_{yz}^2 + \\ + a_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_x\varepsilon_z + a_{23}\varepsilon_y\varepsilon_z. \end{aligned}$$

В ортотропном материале сдвиговые (угловые) деформации  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  никак не влияют на нормальные напряжения  $\sigma_x = \partial\Pi/\partial\varepsilon_x$ ,  $\sigma_y = \partial\Pi/\partial\varepsilon_y$ ,  $\sigma_z = \partial\Pi/\partial\varepsilon_z$  (и наоборот). Популярный ортотропный материал — древесина; её упругие свойства различны по трём взаимно перпендикулярным направлениям: по радиусу, вдоль окружности и по высоте ствола.

Ещё один случай анизотропии — трансверсально изотропный (transversely isotropic) материал. Он характеризуется

...

æolotropic (anisotropic)

...

$$\begin{aligned}
2\Pi &= \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon}, \\
\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = {}^4\mathcal{B} \bullet \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \bullet {}^4\mathcal{B}, \\
\hat{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}) &= \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} - \Pi(\boldsymbol{\varepsilon})
\end{aligned} \tag{3.5}$$

...

## §4. Theorems of statics

### *Clapeyron's theorem*

In equilibrium with external forces, volume ones  $\mathbf{f}$  and surface ones  $\mathbf{p}$ , the work of these forces (“statically frozen” — constant along time) through actual displacements is equal to the doubled\* energy of deformation

$$2 \int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \bullet \mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \bullet \mathbf{u} do. \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\bigcirc \quad 2\Pi &= \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \bullet \nabla \mathbf{u}^S = \nabla \bullet (\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{u}) - \underbrace{\nabla \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{u}}_{-\mathbf{f}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2 \int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = \int_{o_2} \underbrace{\mathbf{n} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{u}}_{\mathbf{p}} do + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \bullet \mathbf{u} d\mathcal{V} \quad \bullet
\end{aligned}$$

Из (4.1) следует также, что без нагрузки  $\int_{\mathcal{V}} \Pi d\mathcal{V} = 0$ . Поскольку  $\Pi$  положительна, то и напряжение  $\boldsymbol{\sigma}$ , и деформация  $\boldsymbol{\varepsilon}$  без нагрузки — нулевые.

**Paradox of elastostatics:**  $\Pi$  is equal to only the half of the work of external forces.

The accumulated potential energy of deformation  $\Pi$  is equal to only the half of the work done by external forces, acting through displacements from the unstressed configuration to the equilibrium.

\* **Benoît Paul Émile Clapeyron.** Mémoire sur le travail des forces élastiques dans un corps solide élastique déformé par l'action de forces extérieures // Comptes rendus, XLVI, Janvier–Juin 1858. 208–212 pp.



Clapeyron's theorem implies that the accumulated elastic energy accounts for only the half of energy spent on deformation. The remaining half of the work done by external forces is lost somewhere before reaching the equilibrium.

This apparent paradox is reached within the framework of purely conservative linear elasticity. Alternatively, however, within elastostatics the common characterization of the work done to reach equilibrium is conceptually ambiguous, and a novel interpretation may be needed.

**Roger Fosdick and Lev Truskinovsky.** About Clapeyron's Theorem in Linear Elasticity // Journal of Elasticity, Volume 72, July 2003. Pages 145–172.

There is always heating due to energy dissipation.

Для решения парадокса в теории распространена концепция of “static loading” — infinitely slow gradual application of the load.

Статика рассматривает “замороженное” равновесие, оно вне времени. Динамика нагружения до равновесия — предыстория. В линейной теории в равновесии работа внешних сил на актуальных перемещениях, затраченная на деформацию, равна удвоенной потенциальной энергии деформации. “Запасается” всего половина потраченной энергии. Вторая половина есть дополнительная энергия, она теряется до обретения равновесия на динамику — на внутреннюю энергию частиц (“диссипацию”), на колебания и волны. Так в теории. Однако, в реальности не бывает ни моментального “мёртвого” нагружения, ни бесконечно медленного “следающего”. Это две крайности. Реальная динамика нагружения всегда где-то между ними. Посему теоретическая дополнительная энергия всегда больше реальной сопровождающей процесс нагружения “диссипативной”, и в линейной теории она численно равна упругому потенциалу — половине работы внешних сил, той самой второй половине.

В области же бесконечномалых вариаций и виртуальных работ, работа реальных внешних сил на виртуальных перемещениях точно равна вариации упругого потенциала. А упругая среда есть такая, в которой вариация работы сил внутренних (напряжений) на виртуальных деформациях это минус вариация потенциала.

$-\delta W^{(i)} = \delta \Pi = \delta W^{(e)}$ , когда варьируются только перемещения (нагрузки не варьируются). Потому в принципе виртуальной работы и варьируются лишь перемещения, чтобы виртуальная работа внешних неварьируемых реальных сил на вариациях перемещений была равна минус вариации внутренней энергии (в случае упругой среды — вариации упругого потенциала).

*Theorem for the uniqueness of solution*

Как и в динамике (§ 2), допускаем существование двух решений и ищем их разность

...

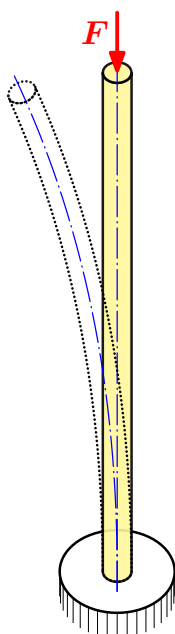


figure 12

The uniqueness of solution, determined by G. Kirchhoff\*, is contrary to, as it seems, the everyday experience. Imagine a straight rod, закреплённый на одном конце и сжатый продольной силой на другом (рис. 12). Когда нагрузка достаточно большая, задача статики имеет два решения — “прямое” и “изогнутое”. Но такое противоречие объясняется нелинейностью задачи. При малой же нагрузке решение единственно и может быть описано линейными уравнениями.

*Reciprocal work theorem*

Для тела с закреплением на части поверхности  $o_1$  рассматриваются два варианта: первый с нагрузками  $\mathbf{f}_1, \mathbf{p}_1$  и второй с нагрузками  $\mathbf{f}_2, \mathbf{p}_2$ . Словесная формулировка теоремы та же, что и в § 2.6. Математическая запись

$$\overbrace{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{u}_2 d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_2 d\mathbf{o}}^{W_{12}} = \overbrace{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{u}_1 d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_1 d\mathbf{o}}^{W_{21}}. \quad (4.2)$$

...

\* **Gustav Robert Kirchhoff.** Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's journal), 56. Band (1859). Seiten 285–313.

Reciprocal work theorem, also known as Betti's theorem, discovered by Enrico Betti in 1872, claims that for a linear elastic structure subject to two sets of forces  $P$  and  $Q$ , the work done by set  $P$  through displacements produced by set  $Q$  is equal to the work done by set  $Q$  through displacements produced by set  $P$ . This theorem has applications in structural engineering where it is used to define influence lines and derive the boundary element method.

...

Betti's reciprocal work theorem находит неожиданные и эффективные применения. For example, consider a rod-beam clamped at one end ("cantilever") and bent by two forces with integral values  $P_1$  and  $P_2$  (рис. 13). Из-за линейности задачи, перемещения могут быть найдены как

$$u_1 = \dots,$$

$$u_2 = \dots$$

...

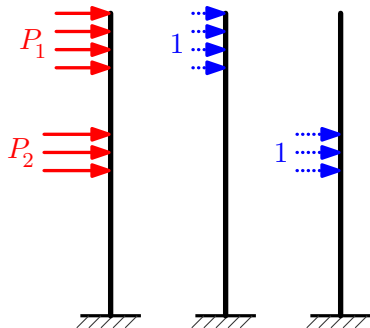


рисунок 13

## § 5. Equations for displacements

The complete set of equations (1.1) contains unknowns  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  and  $u$ . Excluding  $\sigma$  and  $\varepsilon$ , приходим к постановке в перемещениях (симметризация  $\nabla u$  тут лишняя, ведь  ${}^4\mathcal{A}_{3\rightleftharpoons 4} = {}^4\mathcal{A}$ )

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla u) + f &= 0, \\ u|_{o_1} &= u_0, \quad n \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla u|_{o_2} = p. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В изотропном теле (5.1) принимает вид

...

Общее решение однородного уравнения (...) нашёл Heinz Neuber  
П. Ф. Папкович

...

## § 6. Concentrated force in an infinite medium

Concentrated force is useful mathematical idealization, but cannot be found in the real world, where all forces are either body forces acting over a volume or surface forces acting over an area.

Начнём с риторического вопроса: почему упругое тело сопротивляется приложенной нагрузке, выдерживает её? Удачный ответ можно найти ...

...

## § 7. Finding displacements by deformations

Разложив градиент перемещения на симметричную и антисимметричную части

$$\nabla \mathbf{u} = \overbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\nabla \mathbf{u}^S} - \overbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}}^{\nabla \mathbf{u}^A}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}, \quad (7.1)$$

...

Saint-Venant's compatibility condition is the integrability conditions for a symmetric tensor field to be a strain.

The compatibility conditions in linear elasticity are obtained by observing that there are six strain–displacement relations that are functions of only three unknown displacements. This suggests that the three displacements may be removed from the system of equations without loss of information. The resulting expressions in terms of only the strains provide constraints on the possible forms of a strain field.

A body that deforms without developing any gaps/overlaps is called a compatible body. Compatibility conditions are mathematical conditions that determine whether a particular deformation will leave a body in a compatible state.

...

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^T$$

Контур здесь произволен, так что приходим к соотношению

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} = {}^2\mathbf{0}, \quad (7.2)$$

называемому уравнением совместности деформаций.

...

Тензор  $\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon}$  симметричен вместе с  $\boldsymbol{\varepsilon}$

...

Все уравнения линейной теории имеют аналог (первоисточник) в нелинейной. Чтобы найти его для (7.2), вспомним тензор деформации Cauchy–Green’a (§ 3.4) и тензоры кривизны (§ 1.16)

...

## § 8. Equations for stresses

Balance of forces (of momentum)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

does not quite yet determine stresses. It’s necessary as well, that deformations/strains  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$  corresponding to stresses (3.5)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = {}^4\mathcal{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (8.2)$$

are compatible (§ 7)

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}))^{\top} = {}^2\mathbf{0}. \quad (8.3)$$

Gathered together, (8.1), (8.2) and (8.3) present the complete closed set (system) of equations for stresses.

...

...

## § 9. Principle of minimum potential energy

Начнём с формулировки принципа:

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) \equiv \int_{\mathcal{V}} (\Pi(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{o} \rightarrow \min, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0. \quad (9.1)$$

Этот функционал, называемый потенциальной энергией of a linear-elastic body, принимает наименьшее значение на истинных перемещениях — то есть на решении задачи (5.1). При этом функции  $\mathbf{u}$  должны удовлетворять геометрическому условию на  $o_1$  (чтобы не нарушать связи) и быть непрерывными (иначе  $\Pi(\nabla \mathbf{u})$  не будет интегрируемой).

Для обоснования принципа возьмём какое-либо ещё приемлемое поле перемещений  $\mathbf{u}'$  и найдём разность  $\mathcal{Z}(\mathbf{u}') - \mathcal{Z}(\mathbf{u}) =$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}') - \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\sigma.$$

Поскольку  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{o_2} = \mathbf{p}$  и  $(\mathbf{u}' - \mathbf{u})|_{o_1} = \mathbf{0}$ , то

$$\begin{aligned} \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\sigma &= \oint_{o(\partial \mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\sigma = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u})) d\mathcal{V} = \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V} \end{aligned}$$

и  $\mathcal{Z}(\mathbf{u}') - \mathcal{Z}(\mathbf{u}) =$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}') - \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f})}_0 \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V} - \\ &\quad - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot (\nabla \mathbf{u}' - \nabla \mathbf{u}) d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

Тут  $\Pi(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}^S$ ,  $\Pi(\nabla \mathbf{u}') = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}'^S$ , а благодаря симметрии  $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{a}^S \forall \mathbf{a}$ . Поэтому

...

## § 10. Principle of minimum complementary energy

The complementary energy of a linear-elastic body is the following functional over the field of stresses:

$$\mathcal{Z}(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \int_{\mathcal{V}} \hat{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}) d\mathcal{V} - \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_0 d\sigma, \quad \mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}|_{o_1}, \quad (10.1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{o_2} = \mathbf{p}.$$

...

$$\delta(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) = \nabla \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ inside volume } \mathcal{V}$$

...

The principle of minimum complementary energy is very useful, as example, for estimation of inexact (approximate) solutions. But

for computations it isn't so essential as the (Lagrange) principle of minimum potential energy (9.1).

## § 11. Mixed principles of stationarity

### Prange–Hellinger–Reissner Variational Principle,

named after *Ernst Hellinger*, *Georg Prange* and *Eric Reissner*. Working independently of Hellinger and Prange, Eric Reissner published his famous six-page paper “On a variational theorem in elasticity” in 1950. In this paper he develops — without, however, considering Hamilton–Jacobi theory — a variational principle same to that of Prange and Hellinger.

### Hu–Washizu Variational Principle,

named after *Hu Haichang* and *Kyūichirō Washizu*.

Именами Reissner’a, Prange’a и Hellinger’a назван такой функционал над перемещениями и напряжениями:

$$\mathcal{R}(u, \sigma) = \int_V \left[ \sigma \cdot \nabla u^S - \hat{\Pi}(\sigma) - f \cdot u \right] dV - \int_{o_1} n \cdot \sigma \cdot (u - u_0) do - \int_{o_2} p \cdot u do. \quad (11.1)$$

...

Преимущество принципа Рейсснера–Хеллингера — в свободе варьирования. Но есть и изъян: у функционала нет экстремума на истинном решении, а лишь стационарность.

Принцип можно использовать для построения приближённых решений методом Ритца (Ritz method). Задавая аппроксимации

...

Принцип Ху–Васидзу [103] формулируется так:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}(u, \varepsilon, \sigma) &= 0, \\ \mathcal{W} \equiv \int_V &\left[ \sigma \cdot (\nabla u^S - \varepsilon) + \Pi(\varepsilon) - f \cdot u \right] dV - \\ &- \int_{o_1} n \cdot \sigma \cdot (u - u_0) do - \int_{o_2} p \cdot u do. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Как и в принципе Рейсснера–Хеллингера, здесь нет ограничений ни в объёме, ни на поверхности, но добавляется третий

независимый аргумент  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Поскольку  $\hat{\Pi} = \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} - \Pi$ , то (11.1) и (11.2) кажутся почти одним и тем же.

Из принципа Ху–Васидзу вытекает вся полная система уравнений с граничными условиями, так как

...

Об истории открытия вариационных принципов и соотношении их написано, например, у Ю. Н. Работнова [61].

## § 12. Antiplane shear

Это та проблема линейной теории упругости, где простыми выкладками получаются нетривиальные результаты.\*

Рассматривается изотропная среда в декартовых координатах  $x_i$  ( $x_1$  и  $x_2$  в плоскости,  $x_3$  перпендикулярна плоскости) с базисными ортами  $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ . In case of antiplane deformation/strain (antiplane shear) поле перемещений  $\mathbf{u}$  параллельно координате  $x_3$ :  $\mathbf{u} = \mathbf{v} \mathbf{e}_3$ , и  $\mathbf{v}$  не зависит от  $x_3$ :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2)$ ,  $\partial_3 \mathbf{v} = 0$ .

Деформация

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S = \nabla (\mathbf{v} \mathbf{e}_3)^S = \mathbf{e}_3 \nabla \mathbf{v}^S + \underbrace{\mathbf{v} \nabla \mathbf{e}_3^S}_{2_0} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \nabla \mathbf{v})$$

...

Возможна неоднородность среды в плоскости  $x_1, x_2$ :  $\mu = \mu(x_1, x_2)$ ,  $\partial_3 \mu = 0$ .

...

## § 13. Twisting of rods

Эта задача, тщательно изученная Saint-Venant’ом, рассматривается едва ли не в каждой книге по классической упругости. Речь идёт

\* Нетривиальное в теории упругости это, например, когда “деление силы на площадь” даёт бесконечно большую погрешность в нахождении напряжения.



о цилиндре какого-либо сечения, нагруженном лишь поверхностными силами на торцах

...

## § 14. Plane deformation

Тут вектор перемещения  $\mathbf{u}$  параллелен плоскости  $x_1, x_2$  и не зависит от третьей координаты  $z$

...

Для примера рассмотрим полуплоскость с сосредоточенной нормальной силой  $Q$  на краю (?? рисунок ??)

...

## Bibliography

Можно назвать несколько десятков книг по классической теории упругости, представляющих несомненный интерес несмотря на возрастающую отдалённость во времени. Подробные литературные указания содержатся в фундаментальной монографии ...

*chapter 5*

## MICROPOLAR THREE-DIMENSIONAL CONTINUUM

### §1. Introduction to linear micropolar theory

**Х**арактерная отличительная особенность классических упругих сред (гл. 3 и 4) — то, что они состоят “из простых материальных точек”. Частица классического континуума имеет лишь трансляционные степени свободы, её движение определяется только вектором  $\mathbf{R}(q^i, t)$ . Поэтому нагрузки (“силовые факторы”) в такой среде — только силы, объёмные и поверхностные. Моментов нет.

Но не так уж трудно построить более сложные модели сплошной среды, в которых частицы обладают не только лишь степенями свободы трансляции, но и некоторыми дополнительными. Новые степени свободы связаны и с новыми нагрузками.

Наиболее естественная из неклассических моделей трёхмерной среды предложена братьями Cosserat в 1909 году [28]. Каждая частица континуума Коссера есть бесконечномалое твёрдое тело с шестью степенями свободы, тремя трансляционными и тремя вращательными. Нагрузки в такой среде — силы и моменты. Работа братьев Коссера оставалась незамеченной полвека, но затем возник интерес к этой теме [41, 47].

*from Nowacki W. The Linear Theory of Micropolar Elasticity. In: Micropolar Elasticity. International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures), vol. 151, 1974, pp. 1–43*

Woldemar Voigt tried to remove the shortcomings of the classical theory of elasticity [W. Voigt. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Abhandlungen der Königlich Gesellschaft

*der Wissenschaften in Göttingen*, 34: 3–51, 1887] by the assumption that the interaction of two parts of the body is transmitted through an area element  $do$  by means not only of the force vector  $\mathbf{p}do$  but also by the moment vector  $\mathbf{m}do$ . Thus, besides the force stresses  $\sigma_{ji}$  also the moment stresses have been defined.

However, the complete theory of asymmetric elasticity was developed by the brothers **François et Eugène Cosserat** who published it in 1909 in the work “*Théorie des corps déformables*”.

They assumed that the body consists of interconnected particles in the form of small rigid bodies. During the deformation each particle is displaced by  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  and rotated by  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ , the functions of the position  $\mathbf{x}$  and time  $t$ .

Thus an elastic continuum has been described such that its points possess the orientation (polar media) and for which we can speak of the rotation of a point. The vectors  $\mathbf{u}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  are mutually independent and determine the deformation of the body. The introduction of the vectors  $\mathbf{u}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  and the assumption that the transmission of forces through an area element  $do$  is carried out by means of the force vector  $\mathbf{p}$  and the moment vector  $\mathbf{m}$  leads in the consequence to asymmetric stress tensors  $\sigma_{ji}$  and  $\mu_{ji}$ .

The theory of the brothers E. and F. Cosserat remained unnoticed and was not duly appreciated during their lifetime. This was so because the presentation was very general (the theory was non-linear, including large deformations) and because its frames exceeded the frames of the theory of elasticity. They attempted to construct the unified field theory, containing mechanics, optics and electrodynamics and combined by a general principle of the least action.

The research in the field of the general theories of continuous media conducted in the last fifteen years, drew the attention of the scientists to Cosserats' work. Looking for the new models, describing more precisely the behaviour of the real elastic media, the models similar to, or identical with that of Cosserats' have been encountered. Here, we mention, first of all, the papers by C. Truesdell and R. A. Toupin [**C. Truesdell and R. A. Toupin**. *The classical field theories. Encyclopædia of Physics*, Chapter 1, Springer-Verlag, Berlin, 1960], G. Grioli [**Grioli G.** *Elasticité asymétrique. Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser. IV*, 50 (1960)], R. D. Mindlin and H. F. Tiersten [**Mindlin, R. D.; Tiersten, H. F.** *Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rational Mech. Anal.* 11. 1962. 415–448].

In the truly micropolar continuum, vector fields of displacements  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  and rotations  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, t)$  are mutually independent. It is also called the model with free rotation.

Consider at first geometrically linear model, that's the case of small displacements and small rotations. Here operators  $\overset{\circ}{\nabla}$  and  $\nabla$  are indistinguishable, equations “can be written in the initial configuration” ( $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ ,  $\rho = \overset{\circ}{\rho}$ ),  $\delta$  and  $\nabla$  commute ( $\delta \nabla \mathbf{u} = \nabla \delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \nabla \boldsymbol{\varphi} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}$ ).

As foundation for building this model we put the principle of virtual work (“the variation of work of real external forces on virtual displacements is equal with negative sign to the variation of work of internal forces — real stresses on virtual deformations”)

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) d\mathcal{V} + \int_o (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) do = - \int_{\mathcal{V}} \delta W^{(i)} d\mathcal{V}.$$

Здесь  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{m}$  — внешние силы и моменты per volume unit;  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{M}$  — они же, но per surface unit (поверхностные нагрузки действуют лишь на некоторой части  $o$  поверхности  $\partial \mathcal{V}$ , ограничивающей объём  $\mathcal{V}$ );  $\delta W^{(i)}$  — работа внутренних сил per volume unit.

По-прежнему полагаем, что  $\delta W^{(i)}$  обнуляется при движении тела как целого без деформации:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} + \text{constant}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \text{constant} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0,$$

$$\nabla \delta \mathbf{u} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{E} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} = {}^2\mathbf{0}.$$

Introducing deformation tensors — tensor of relative displacement between particles (distortion tensor, strain tensor)  $\boldsymbol{\gamma}$  and curvature-twist tensor (torsion-flexure tensor, wryness tensor)  $\boldsymbol{\kappa}$  — as

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \nabla \boldsymbol{\varphi}, \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \nabla \times \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\kappa}_{\times} = \nabla \times \boldsymbol{\varphi},$$

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \nabla \delta \mathbf{u} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi},$$

having the needed absence of virtual deformations  $\delta \boldsymbol{\gamma} = {}^2\mathbf{0}$  and  $\delta \boldsymbol{\kappa} = {}^2\mathbf{0}$ .

In §3.16 for the momentless continuum, stresses appear as Lagrange multipliers in the principle of virtual work, when  $\delta W^{(i)} = 0$ . The same here:

$$\int_{\mathcal{V}} \left( \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^T - \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^T \right) d\mathcal{V} + \int_o \left( \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) do = 0. \quad (1.2)$$

Множители Лагранжа в каждой точке — это несимметричные тензоры второй сложности  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\mu}$ .

Преобразуем  $-\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^T$  и  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^T$

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\gamma}^T &= \nabla \delta \mathbf{u}^T - \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa}^T = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}^T, \\ -\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^T &= -\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}^T + \boldsymbol{\tau} \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}), \quad -\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^T = -\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}^T. \end{aligned}$$

Используя

$$(7.4, \S 1.7) \Rightarrow \mathbf{A}_{\times} = -\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{\epsilon}^3,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{A} \cdot \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) = \mathbf{A} \cdot \cdot (-\mathbf{\epsilon}^3 \cdot \mathbf{b}) = \\ &= (-\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{\epsilon}^3) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A}_{\times} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\tau}_{\times} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \end{aligned}$$

и “product rule”

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u}) &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}^T, \\ \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}^T, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^T &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{u} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}_{\times} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}, \\ -\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^T &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}). \end{aligned}$$

После интегрирования с применением теоремы о дивергенции\*

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u}) d\mathcal{V} = \oint_{\partial(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u} do, \quad \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) d\mathcal{V} = \oint_{\partial(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} do$$

(1.2) приобретает вид

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \mathbf{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) d\mathcal{V} + \\ + \int_o \left( (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) do = 0. \end{aligned}$$

\*  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{\epsilon}^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{\epsilon}^2 \mathbf{B}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{\epsilon}^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}$

From randomness of variations  $\delta \mathbf{u}$  and  $\delta \varphi$  inside a volume ensues the balance of forces and moments

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

and from randomness on a surface — boundary conditions

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}. \quad (1.4)$$

Force stress tensor  $\boldsymbol{\tau}$  удовлетворяет тем же дифференциальным “уравнениям равновесия”<sup>\*</sup> и краевым условиям, что и в безмоментной среде. But tensor  $\boldsymbol{\tau}$  is asymmetric: instead of  $\boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0}$  here is  $\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{m} = \mathbf{0}$  — couple stresses  $\boldsymbol{\mu}$  appear, and volume moment load  $\mathbf{m}$  is non-zero.

Meaning of components of the couple stress tensor  $\boldsymbol{\mu}$  is revealed similarly as for  $\boldsymbol{\tau}$ . For an orthonormal basis, moment  $\mathbf{M}_i = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\mu} = \mu_{ik} \mathbf{e}_k$  acts on an area with normal  $\mathbf{e}_i$ . Diagonal components  $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$  are twisting moments, nondiagonal are bending ones (?? figure??).

...

eccentricity vector  $\boldsymbol{\alpha}$  and inertia tensor  ${}^2\mathfrak{I}$

For an isotropic medium  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ ,  ${}^2\mathfrak{I} = \mathfrak{I}\mathbf{E}$ .

...

## § 2. Relations of elasticity

В этой книге упругой называется среда с потенциальными внутренними силами:  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$ , где  $\Pi$  — энергия деформации на единицу объёма (continuing to model the geometrically linear material,  $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ ).

Имея соотношения (...)

...

$$\begin{aligned} \delta \Pi = -\delta W^{(i)} &= \boldsymbol{\tau} \cdots \delta \boldsymbol{\gamma}^\top + \boldsymbol{\mu} \cdots \delta \boldsymbol{\kappa}^\top \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\kappa}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

<sup>\*</sup> Кавычки здесь оттого, что *уравнения равновесия* это вообще всё, что вытекает из принципа виртуальной работы в статике.

Последние равенства — соотношения упругости (определяющие уравнения, constitutive equations).

Разлагая тензоры деформации и напряжения на симметричные и антисимметричные части

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \boldsymbol{\gamma}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}_\times \times \boldsymbol{E}, \\ \delta \boldsymbol{\gamma}^\top &= \delta \boldsymbol{\gamma}^S + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\gamma}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa}^\top = \delta \boldsymbol{\kappa}^S + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\kappa}_\times \times \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_\times \times \boldsymbol{E},\end{aligned}$$

преобразуем выражение  $\delta \Pi = \boldsymbol{\tau} \bullet \bullet \delta \boldsymbol{\gamma}^\top + \boldsymbol{\mu} \bullet \bullet \delta \boldsymbol{\kappa}^\top$  как

$$\delta \Pi = \dots \quad (2.2)$$

...

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_\times &= \nabla \times \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{\varphi}, \\ \boldsymbol{\kappa}_\times &= \nabla \times \boldsymbol{\varphi}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &\equiv \boldsymbol{\gamma}^S = \nabla \boldsymbol{u}^S,\end{aligned}$$

...

The classical isotropic linear elastic material behavior is described by two material parameters, for example, the Young's modulus and the Poisson's ratio, while the isotropic Cosserat continuum needs six material parameters

even when assumed to be linear, homogeneous and isotropic, it requires six independent material constants, in contrast to only two such constants for the classical continuum

...

Соотношения (2.1) обращаются преобразованием Лежандра

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\mu}}, \\ \hat{\Pi}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}) &= \boldsymbol{\tau} \bullet \bullet \boldsymbol{\gamma}^\top + \boldsymbol{\mu} \bullet \bullet \boldsymbol{\kappa}^\top - \Pi(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}).\end{aligned} \quad (2.3)$$

...

material's intrinsic (internal) length scale  $\ell$

Если устремить  $\ell$  к нулю, то исчезает вклад  $\boldsymbol{\kappa}$  в  $\Pi$ , а с ним и моментные напряжения  $\boldsymbol{\mu}$ . Когда вдобавок нет объёмной моментной нагрузки  $\boldsymbol{m}$ , тогда тензор  $\boldsymbol{\tau}$  становится симметричным:  $\nabla \bullet \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \boldsymbol{m} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\mu} = {}^2\mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{m} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0}$ , и модель превращается в классическую безмоментную.

Yet using of the micropolar model is natural in a case when the real material has a certain smallest volume “which is impossible to enter into”. And such a situation occurs quite often: composites with “representative” volume, polycrystalline materials, polymers with large molecules (macromolecules).

### § 3. Compatibility equations

Having identity  $\nabla \times \nabla \mathbf{a} = {}^2\mathbf{0} \ \forall \mathbf{a}$  and definitions of deformation tensors (1.1),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} &\equiv \nabla \boldsymbol{\varphi} \Rightarrow \nabla \times \boldsymbol{\kappa} = {}^2\mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} &= \nabla \mathbf{u} \Rightarrow \nabla \times (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}) = {}^2\mathbf{0} \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

### § 4. Theorems of statics

Теоремы статики линейных консервативных систем, легко выводимые для конечного числа степеней свободы (минимальность энергии, теорема Клапейрона, reciprocal work theorem et al. — § 2.6), справедливы и для континуальных линейных упругих сред (гл. 4), including the micropolar model of continuum (a medium with force couples, moments).

### § 5. Cosserat pseudocontinuum

Besides the model with free rotation (“the truly micropolar continuum”), there is the simplified model of a medium with force couples, in which rotations are expressed via displacements as in the classical momentless continuum:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma}_\times = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S \quad (5.1)$$

— the model with constrained rotation\*.

\* Cosserat brothers called it cas de trièdre caché (case of latent trihedron).



Равенство  $\gamma_{\chi} = \mathbf{0}$  (симметрию  $\gamma$ ) возможно понимать как внутреннюю связь (§3.14). Аргумент  $\gamma_{\chi}$  исчезает из энергии  $\Pi$ , соотношение упругости для  $\tau_{\chi}$  не может быть написано. Его место в полной системе занимает уравнение связи.

В классической теории упругости полная система сводится к одному уравнению для вектора  $\mathbf{u}$  (§4.5). В моментной теории

...

## § 6. Plane deformation

Все переменные в этой постановке не зависят от декартовой координаты  $z \equiv x_3$  (орт оси —  $\mathbf{k}$ ). Перемещения и силы перпендикулярны оси  $z$ , а повороты и моменты — параллельны ей:

...

Это краткое изложение плоской задачи относится к модели с независимыми поворотами. Псевдоконтинуум Коссера (модель со стеснённым вращением) получается либо при наложении внутренней связи  $\gamma_{\chi} = \mathbf{0}$ , либо при предельном переходе ...

Подробнее о плоской моментной задаче написано в книгах Н. Ф. Морозова [42, 43].

## § 7. Nonlinear theory

Кажущееся на первый взгляд чрезвычайно трудным, построение теории конечных деформаций континуума Коссера становится прозрачным, если опираться на общую механику, тензорное исчисление и нелинейную теорию безмоментной среды.

При построении модели упругого континуума обычно проходят четыре этапа:

- ✓ определение степеней свободы частиц,
- ✓ выявление нагрузок (“силовых факторов”, напряжений) и условий их баланса,
- ✓ подбор соответствующих мер деформации и, наконец,

✓ вывод соотношений упругости между напряжением и деформацией.

Этот традиционный путь очень сокращается, если опираться на принцип виртуальной работы.

Как и в гл. 3, среда состоит из частиц с материальными координатами  $q^i$  и вектором-радиусом  $\mathbf{r}(q^i, t)$ . В начальной (исходной, отсчётной) конфигурации  $\mathbf{r}(q^i, 0) \equiv \mathring{\mathbf{r}}(q^i)$ . Но кроме трансляции, частицы имеют независимые степени свободы поворота, описываемого ортогональным тензором

$$\mathbf{O}(q^i, t) \equiv \mathbf{a}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathbf{a}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{O}^{-\top},$$

где тройка векторов  $\mathbf{a}_j(q^i, t)$  жёстко связана с каждой частицей, показывая угловую ориентацию относительно как-либо выбираемых\* векторов  $\mathring{\mathbf{a}}_j(q^i) \equiv \mathbf{a}_j(q^i, 0)$ ,  $\mathbf{a}_j = \mathbf{O} \cdot \mathring{\mathbf{a}}_j$ ;  $\mathbf{a}^j$  — тройка взаимных векторов:  $\mathbf{a}_j \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^j \mathbf{a}_j = \mathbf{E}$  ( $t=0$ ,  $\mathring{\mathbf{a}}^j: \mathring{\mathbf{a}}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathring{\mathbf{a}}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{E}$ ). Движение среды полностью определяется функциями  $\mathbf{r}(q^i, t)$  and  $\mathbf{O}(q^i, t)$ .

Имея представления  $\mathring{\mathbf{r}}(q^i)$  и  $\mathbf{r}(q^i, t)$ , вводим базис  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$ , взаимный базис  $\mathbf{r}^i$ :  $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}^i = \delta_j^i$ , differential operators  $\mathring{\nabla}$  and  $\nabla$ , а также motion gradient  $\mathbf{F}$

$$\mathring{\nabla} \equiv \mathring{\mathbf{r}}^i \partial_i, \quad \nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathring{\nabla}, \quad \mathbf{F} \equiv \mathring{\nabla} \mathbf{r}^\top = \mathbf{r}_i \mathring{\mathbf{r}}^i. \quad (7.1)$$

Вариационное уравнение принципа виртуальной работы для континуума с нагрузками в объёме и на поверхности:

$$\int_{\mathcal{V}} \left( \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) + \delta W^{(i)} \right) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}} \left( \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) d\mathcal{O} = 0. \quad (7.2)$$

Here  $\rho$  is mass density;  $\mathbf{f}$  and  $\mathbf{m}$  are external force and moment per mass unit;  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{M}$  — они же per surface unit;  $\delta W^{(i)}$  — работа

\* Один из вариантов:  $\mathring{\mathbf{a}}_j = \mathring{\mathbf{r}}_j \equiv \partial_j \mathbf{r}$ . Другое предложение:  $\mathring{\mathbf{a}}_j$  это ортонормальная тройка собственных векторов тензора инерции частицы. Вообще,  $\mathring{\mathbf{a}}_j$  могут быть любой тройкой линейно-независимых векторов.

внутренних сил per volume unit в текущей конфигурации. Вектор мáлого поворота  $\delta\varphi$

$$\begin{aligned} O \cdot O^T = E &\Rightarrow \delta O \cdot O^T = -O \cdot \delta O^T \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta O \cdot O^T = \delta\varphi \times E = \delta\varphi \times O \cdot O^T \Rightarrow \delta O = \delta\varphi \times O, \\ \delta\varphi &= -\frac{1}{2}(\delta O \cdot O^T)_{\times} \end{aligned}$$

При движении среды как жёсткого целого нет деформаций, и работа  $\delta W^{(i)}$  внутренних сил равна нулю:

$$\begin{aligned} \delta r = \text{constant} + \delta\varphi \times r, \quad \delta\varphi = \text{constant} &\Rightarrow \delta W^{(i)} = 0, \\ \nabla \delta\varphi = {}^20, \quad \nabla \delta r = \nabla \delta\varphi \times r - \nabla r \times \delta\varphi = -E \times \delta\varphi = -\delta\varphi \times E, \\ \nabla \delta r + \delta\varphi \times E &= {}^20. \end{aligned}$$

К нагрузкам. Несимметричные тензоры напряжения, силового  $\tau$  и моментного  $\mu$ , введём как множители Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \int_V \left( \rho(f \cdot \delta r + m \cdot \delta\varphi) - \tau \cdot (\nabla \delta r + \delta\varphi \times E)^T - \mu \cdot \nabla \delta\varphi^T \right) dV + \\ + \int_O \left( p \cdot \delta r + M \cdot \delta\varphi \right) dO = 0. \quad (7.3) \end{aligned}$$

После тех же преобразований, что и в § 1, получаем

...

Отсюда вытекают уравнения баланса сил и моментов в объёме и краевые условия в виде **формул типа Cauchy**. Они по существу те же, что и в линейной теории.

Найдём теперь тензоры деформации. Их можно вводить по-разному, если требовать лишь одного — нечувствительности к движению среды как жёсткого целого. Читатель найдёт не один вариант таких тензоров. Однако, вид тензоров деформации “подсказывает” принцип виртуальной работы.

...

## § 8. Nonlinear model with constrained rotation

Вспомним переход к модели со стеснённым вращением в линейной теории (§ 5). Разделились соотношения упругости для симметрич-

ной части тензора силового напряжения  $\boldsymbol{\tau}^S$  и кососимметричной его части  $\boldsymbol{\tau}_\chi$ . Возникла внутренняя связь  $\boldsymbol{\gamma}_\chi = \mathbf{0}$

...

## Bibliography

Все работы по моментной теории упругости упоминают книгу братьев Eugène et François Cosserat [28], где трёхмерной среде посвящена одна глава из шести. Переведённая монография W. Nowacki [47] была одной из первых книг на русском языке с изложением линейной моментной теории. Ранее эта область представлялась статьями — например, R. D. Mindlin'a и H. F. Tiersten'a [41]. Краткое изложение моментной теории, но с подробным рассмотрением задач содержится в книгах Н. Ф. Морозова [42, 43].

## chapter 6

# THERMOELASTICITY

### §1. First law of thermodynamics

Hitherto modeling was limited to mechanics only. It is widely known, however, that a change in temperature causes deformation. Temperature deformation and stress often play the primary role and can lead to a breakage.

So effective in mechanics, the principle of virtual work is not applicable to thermomechanics\*. Considering thermal effects, it's possible to lean on the two laws of thermodynamics.

The first, discovered by Joule, Mayer, and Helmholtz, is adapted version of the balance of energy: rate of internal energy change  $\dot{E}$  is equal to the sum of power of external forces  $P^{(e)}$  and rate of heat supply  $\dot{Q}$

$$\dot{E} = P^{(e)} + \dot{Q}. \quad (1.1)$$

Internal energy  $E$  is the sum of the kinetic and potential energies of particles. For any finite volume of material continuum

$$E = \int_{\mathcal{V}} \rho \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} + e \right) d\mathcal{V}. \quad (1.2)$$

With the balance of mass  $dm = \rho d\mathcal{V} = \rho' d\mathcal{V}'$ ,  $m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' d\mathcal{V}'$  and

$$\Psi = \int_{\mathcal{V}} \rho \psi d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \psi d\mathcal{V}' \Rightarrow \dot{\Psi} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\psi} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \dot{\psi} d\mathcal{V}',$$

it's easy to get the time derivative of internal energy

$$\dot{E} = \int_{\mathcal{V}} \rho \left( \ddot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \dot{e} \right) d\mathcal{V}. \quad (1.3)$$

\* Analogue of the principle of virtual work will be presented below.

The power of external forces for some finite volume of continuum (momentless — in this chapter only the momentless model is considered)

$$P^{(e)} = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{R}} dV + \oint_{O(\partial V)} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{R}} dO = \int_V \left( \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{R}}) \right) dV = \int_V \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{R}}^S \right) dV. \quad (1.4)$$

As before (chapter 3)  $\boldsymbol{\tau}$  is Cauchy stress tensor,  $\mathbf{f}$  is mass force (without inertial part  $-\ddot{\mathbf{R}}$ , which is included in  $\dot{\mathbf{E}}$ ),  $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}$  is surface force. For expanding divergence  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{R}})$  the symmetry of  $\boldsymbol{\tau}$  is used. Denominating velocity as  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}}$  and strain rate tensor as  $\boldsymbol{\mathcal{S}} \equiv \nabla \mathbf{v}^S$ ,

$$P^{(e)} = \int_V \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}} \right) dV. \quad (1.4')$$

Heat arrives in a volume of continuum by two ways. The first is a surface heat transfer (heat conduction, thermal conductivity, convection, diffusion), occurring via matter, upon a contact of two media. This can be described by heat flux vector  $\mathbf{q}$ . Through an infinitesimal area in the current configuration towards normal vector  $\mathbf{N}$  per unit of time passes heat flux  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{N} dO$ . For a surface with finite dimensions this expression needs to be integrated. It's usually assumed

$$\mathbf{q} = -{}^2\mathbf{k} \cdot \nabla \Theta, \quad (1.5)$$

where  $\Theta$  is temperature (temperature field);  ${}^2\mathbf{k}$  is thermal conductivity tensor as property of the material, for isotropic material  ${}^2\mathbf{k} = k\mathbf{E}$  and  $\mathbf{q} = -k \nabla \Theta$ .

The second way is a volume heat transfer (thermal radiation). Solar energy, flame of a bonfire, a microwave oven are familiar examples of pervasive heating by radiation. Thermal radiation occurs via electromagnetic waves and doesn't need an interjacent medium. Heat is radiated (emitted) by any matter (with temperature above the absolute zero 0 K). Rate of heat transfer by radiation per mass unit  $b$  or per volume unit  $B = \rho b$  is assumed as known.

Therefore, the rate of heat supply for a finite volume is

$$\dot{Q} = - \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} dO + \int_{\mathcal{V}} \rho b d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b) d\mathcal{V}. \quad (1.6)$$

Applying (1.3), (1.4') and (1.6) to formulation (1.1) gives the equality of integrals over a volume

$$\int_{\mathcal{V}} \rho (\ddot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \dot{e}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} ((\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{S} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b) d\mathcal{V}.$$

And since volume  $\mathcal{V}$  is random, integrands are equal too

$$\rho \ddot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v} + \rho \dot{e} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{S} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b.$$

With the balance of momentum (8.2, §3.8), it simplifies to

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{S} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho b \quad (1.7)$$

— the balance of energy in local (differential) form.

...

## §2. Second law

The following concept of laws of thermodynamics is widespread: change in internal energy  $dE$  is equal to the sum of work of external forces  $\partial W^{(e)}$  and supplied heat  $\partial Q$

$$dE = \partial W^{(e)} + \partial Q.$$

Work  $\partial W^{(e)}$  and heat  $\partial Q$  are inexact differentials\*, but quotient  $\partial Q/\Theta$  becomes the exact differential — differential  $dS$  of the entropy.

Further, processes are divided into reversible ones, for which  $dS = \partial Q/\Theta$ , and irreversible ones with characteristic Clausius inequality  $dS \geq \partial Q/\Theta$ . Но как ...

...

Helmholtz free energy per mass unit

$$a \equiv e - \Theta s, \quad (2.1)$$

\* Because work and heat depend on the path of the process (are path functions), they can't be full (exact) differentials, contrasting with the concept of the exact differential, expressed via the gradient of another function and therefore path independent.

$$\dot{a} = \dot{e} - \Theta \dot{s} - \dot{\Theta} s$$

### § 3. Constitutive equations

К балансу импульса, балансу момента импульса и законам термодинамики нужно добавить определяющие уравнения, выражающие свойства среды. Эти уравнения

...

Термоупругим называется материал, в котором свободная энергия  $a$  и энтропия  $s$  — функции деформации  $C$  и температуры  $\Theta$

$$a = a(C, \Theta)$$

$$\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial C} \cdot \dot{C} + \frac{\partial a}{\partial \Theta} \dot{\Theta}$$

...

### § 4. Heat equation

In mathematical physics, a parabolic differential equation, similar to

$$k \Delta \Theta + B = c \dot{\Theta}, \quad (4.1)$$

is declared as a “heat equation”. Here  $k$  is thermal conductivity,  $B = \rho b$  is rate of heat transfer by radiation per volume unit,  $c$  is thermal capacity per volume unit. Boundary conditions most often are external temperature  $\Theta_1^{(e)}$  on part  $O_1$  of the surface and heat flux  $q^{(e)}$  from the outside of part  $O_2$  of the surface:

$$\Theta|_{O_1} = \Theta_1^{(e)}, \quad k \partial_n \Theta|_{O_2} = q^{(e)}.$$

Sometimes, flux  $q^{(e)}$  is thought to be proportional to the difference between temperature  $\Theta^{(e)}$  of the ambient and body temperature  $\Theta$

$$k \partial_n \Theta + h (\Theta - \Theta^{(e)}) = 0.$$

If heat transfer coefficient  $h$  is infinitely large, it turns into the first condition  $\Theta = \Theta^{(e)}$ , and when  $h \rightarrow 0$  — into condition  $\partial_n \Theta = 0$  of thermal insulation.

But how is equation (4.1) related to fundamental principles of balance? Since there’s no special “thermal energy”, but there is



internal energy, changing according to the first law of thermodynamics

...

...

$$e = a + \Theta s \Rightarrow \dot{e} = \dot{a} + \dot{\Theta}s + \Theta\dot{s}$$

$$\dot{a}(C, \Theta)$$

$$\rho \dot{e} = \rho (\dot{a} + \dot{\Theta}s + \Theta\dot{s}) = \rho \left( \overbrace{\left( \frac{\partial a}{\partial C} \cdot \dot{C} + \frac{\partial a}{\partial \Theta} \dot{\Theta} \right)}_{=0 \Leftarrow s = -\frac{\partial a}{\partial \Theta}} + \Theta\dot{s} \right)$$

...

## § 5. Linear thermoelasticity

Квадратичная аппроксимация свободной энергии наиболее естественна в линейной теории

...

## § 6. Equations for displacements

Полагая поле температуры известным

...

## § 7. Thermal stress

Это напряжение сто́ит рассмотреть детально, хотя оно и определяется очевидным образом полями перемещений и температуры. При равновесии свободного тела без внешних нагрузок

...

## § 8. Variational formulations

(Поскольку) при фиксированной температуре уравнения термоупругости выглядят как в механике

...

...

Более сложные вариационные постановки для нестационарных задач можно найти, например, в книге [94].

## Bibliography

Шириной и глубиной описания термоупругости выделяются книги W. Nowacki [46, 47], книга E. Melan'a и H. Parkus'a [38] и монография H. Parkus'a [53]. С. Truesdell [72] внёс большой вклад в создание и распространение новых взглядов на термодинамику сплошной среды. Чёткое изложение основных законов есть у С. Teodosiu [66]. Методы расчёта температурных полей представлены у Н. М. Беляева и А. А. Рядно [94].

## chapter 7

# MAGNETOELASTICITY

Problems, solved using models of elastic continua, usually include already known external loads (how to find them is a distinct problem). When electric currents flow in an elastic body, the magnetic field produces a load. With deforming of a body, the magnetic field changes too. If the field's sensitivity to deformation is high, then solving of the integrated problem of elasticity and magnetism is needed.

### §1. Electromagnetic field. Electromagnetic waves

**H**ere is an overview of the theory of electromagnetism. This theory considers two vector fields: electric  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  and magnetic  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . What are vector  $\mathbf{E}$  and pseudovector  $\mathbf{B}$  is seen from the expression of electromagnetic force (**Lorentz force**)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, q)$ , acting on a point charge — a particle of infinitesimal size, that contains electric charge  $q$  and moves with velocity  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.1)$$

In essence, the part of the electromagnetic force arising from interaction with a moving charge — magnetic force  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  — reveals magnetic field  $\mathbf{B}$ , while the other part — electric force  $q\mathbf{E}$  — reveals electric field  $\mathbf{E}$ .

Acute question: in which exactly frame of reference is velocity  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$  of a charged particle measured, leads to the special theory of relativity.

the classical concept about the existence of absolute space and time as the preferred frame of reference

...

charge density  $\rho(\mathbf{r}, t)$

vector of density of a current  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$

...

In a continuum with charges and currents acts the volume “ponderomotive” force

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.2)$$

— the continual version of (1.1).

Plus another description exists — the so-called Maxwell stress tensor

$$^2\mathbf{M} \equiv \varepsilon_0 \left( \mathbf{E}\mathbf{E} + c^2 \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E} \right) \quad (1.3)$$

...

Electromagnetic phenomena are usually described by Maxwell’s equations. Maxwell’s equations are

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbf{E}}$$

...

speed of light in vacuum  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$

“electric constant”, vacuum permittivity  $\varepsilon_0$

$\varepsilon_0 \approx 8.8541878 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  (farads per metre)

“magnetic constant”, vacuum permeability  $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$$

...

Ampère’s circuital law (with Maxwell’s addition) (with Maxwell’s additional time-dependent term)

...

$$(1.4.5, \S 1.14) \Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{a}\mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a}$$

$$(1.4.7, \S 1.14) \Rightarrow \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2 \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{E} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2 \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot {}^2M &= \varepsilon_0 \left( \nabla \cdot (\mathbb{E}\mathbb{E}) + c^2 \nabla \cdot (\mathbb{B}\mathbb{B}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} \mathbf{E} + c^2 \mathbb{B} \cdot \mathbb{B} \mathbf{E}) \right) = \\ &= \varepsilon_0 \left( \nabla \cdot \mathbb{E}\mathbb{E} + \mathbb{E} \cdot \nabla \mathbf{E} + c^2 \nabla \cdot \mathbb{B}\mathbb{B} + c^2 \mathbb{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \right. \\ &\quad \left. - \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - c^2 \nabla \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right)\end{aligned}$$

...

to derive wave equations

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla \times \dot{\mathbf{B}} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\dot{\mathbf{E}}}{c^2} \right)\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

...

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad \forall \mathbf{a}$$

$$\nabla \times \nabla \alpha = \mathbf{0} \quad \forall \alpha$$

vector potential  $\mathbb{A}$ 

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbb{A}$$

potential  $\mathbb{A}$  is not unique and has gauge freedom  $\mathbb{A} + \nabla \alpha$ 

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbb{A} + \nabla \alpha) \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

scalar potential  $\phi$ 

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\dot{\mathbb{A}} + \nabla \dot{\alpha}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla \times (\mathbf{E} + \dot{\mathbb{A}} + \nabla \dot{\alpha}) = \mathbf{0} \Rightarrow -\nabla \phi = \mathbf{E} + \dot{\mathbb{A}} + \nabla \dot{\alpha} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla (\phi + \dot{\alpha}) - \dot{\mathbb{A}}. \quad (1.5)\end{aligned}$$

And

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \begin{aligned} -\Delta (\phi + \dot{\alpha}) - \nabla \cdot \dot{\mathbb{A}} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\Delta \phi - \nabla \cdot (\dot{\mathbb{A}} + \nabla \dot{\alpha}) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (1.6)\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \nabla \nabla \cdot \mathbb{A} - \Delta \mathbb{A}$$

$\nabla\nabla\cdot\nabla a - \nabla\cdot\nabla\nabla a = 0$  (partial derivatives of a smooth function commute)

$$\begin{aligned} c^2 \nabla \times \mathbb{B} &= \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbb{E}} \Rightarrow c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} - \nabla(\dot{\Phi} + \ddot{a}) - \ddot{\mathbb{A}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c^2 (\nabla\nabla\cdot\mathbb{A} - \Delta\mathbb{A}) = \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} - \nabla\dot{\Phi} - \nabla\ddot{a} - \ddot{\mathbb{A}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

With a gauge freedom it's possible to simplify wave equations (1.7) and (1.6), assuming that

$$\left. \begin{aligned} -\nabla\ddot{a} &= \nabla\dot{\Phi} + c^2 \nabla\nabla\cdot\mathbb{A} \Rightarrow \ddot{a} = -\dot{\Phi} - c^2 \nabla\cdot\mathbb{A} \\ -\nabla\cdot(\dot{\mathbb{A}} + \nabla\dot{a}) &= \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} \Rightarrow \dot{\Phi} = -c^2 \nabla\cdot(\mathbb{A} + \nabla a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 \nabla\cdot\mathbb{A} + c^2 \Delta a - c^2 \nabla\cdot\mathbb{A} = \ddot{a},$$

finally presenting as homogeneous wave equation for  $a$

$$\ddot{a} = c^2 \Delta a. \quad (1.8)$$

A more popular option is even more tight condition

$$\Delta a = 0 \Rightarrow \ddot{a} = 0, \quad \dot{\Phi} + c^2 \nabla\cdot\mathbb{A} = 0$$

— Lorenz gauge condition, which gives the same effect, being just a particular — harmonic — case of (1.8).

Following from (1.6) and (1.7) with condition (1.8), equations of electromagnetic waves in the potential formulation are

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi + \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ -c^2 \Delta\mathbb{A} &= \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} - \ddot{\mathbb{A}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

...

## § 2. Electrostatics

Рассмотрение этого вопроса полезно для последующего описания магнетизма. В статике

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbb{B} = \mathbf{0}$$

...

Объёмная (пондеромоторная, ponderomotive) сила, с которой электростатическое поле действует на среду ...

Maxwell stress tensor (1.3) in electrostatics

$$^2\mathbf{M} = \epsilon_0 \left( \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} \right)$$

...

### § 3. Dielectrics

Начнём с рассмотрения электростатического поля

...

В диэлектриках нет свободных зарядов: charge density  $\rho = 0$ .  
Здесь вводится плотность дипольного момента

...

### § 4. Magnetostatics

Если поле (а с ним ...)

...

### § 5. Magnetics

Выяснив законы магнитостатики в общем случае, обратимся к веществу — некий опыт у нас уже есть в электростатике диэлектриков.

Начнём с рассмотрения

...

...

Насколько соответствует поведение реальных материалов представленным здесь формальным построениям — сей вопрос is out of scope этой книги.

### § 6. Magnetic rigidity

В электротехнике распространены обмотки всевозможной формы, в которых провод намотан так, что образуется некое массивное

тело. Такие обмотки есть в статоре генератора автомобиля (да и в роторе), в больших промышленных электромагнитах и в магнитных системах установок “токамак” (тороидальная камера с магнитными катушками) для управляемого термоядерного синтеза — примеров много. Сочетание токопровода и изоляции образует периодический композит, и одной из главных нагрузок для него является пондеромоторная магнитная сила. Рассчитывая деформации и механические напряжения в обмотке, начинают с определения магнитных сил. Поскольку распределение токов задано известной геометрией проводов, достаточно интегрирования по формуле Био-Савара (??). Термин “магнитоупругость” при этом неуместен, так как задачи магнитостатики и упругости решаются раздельно.

Однако при деформации обмотки меняются и поле  $\mathbf{j}$ , и вызываемое им поле  $\mathbf{B}$ . Объёмная сила становится равной

$$\mathbf{f} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_0 + \dots \quad (6.1)$$

Подчёркнутое слагаемое соответствует недеформированному состоянию. Обусловленное деформацией изменение объёмной силы линейно связано с малым перемещением  $\mathbf{u}$ , поэтому матричное (после дискретизации) уравнение в перемещениях можно представить в виде

$$(C + C_m)u = \overset{\circ}{F}. \quad (6.2)$$

К обычному оператору линейной упругости  $C$  добавилась магнитная жёсткость  $C_m$ ;  $\overset{\circ}{F}$  — силы в недеформированном состоянии.

Добавка  $C_m$  пропорциональна квадрату тока и может стать весьма существенной в магнитных системах с сильным полем. Учёт её необходим и при недостаточной величине  $C$ ; в номинальном режиме конструкция может держать нагрузку, но дополнительная нагрузка неблагоприятного направления может оказаться “невыносимой”.

Но особенно важна роль магнитной жёсткости в задачах устойчивости. Поскольку магнитные силы потенциальны, матрица  $C_m$  симметрична, и критические параметры могут быть найдены статическим методом Euler’a.



Как иллюстрацию рассмотрим простую задачу о балке в продольном магнитном поле. Балка располагается на декартовой оси  $z$ , концы  $z=0$  и  $z=l$  закреплены, магнитная индукция  $\mathbb{B} = B\mathbf{k} = \text{constant}$ , по балке течёт постоянный (по величине) ток  $I$ . В классической модели балки при равных жёсткостях на изгиб для прогиба  $\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j}$  легко получить следующую постановку:

...

Вводя комплексную комбинацию  $u \equiv u_x + iu_y$ , будем иметь

...

с общим решением

...

Подстановка в граничные условия приводит к однородной системе для постоянных  $A_k$ ; приравняв нулю определитель, придём к характеристическому уравнению

...

Наименьший положительный корень  $x_1 = 3.666$ , так что критическая комбинация параметров такова:

$$(IBl^3/a)_* = 394.2.$$

В этом решении поле  $\mathbb{B}$  считалось внешним и не варьировалось. Но если собственное поле тока в стержне сравнимо с  $\mathbb{B}$ , решение изменится и усложнится.

## Bibliography

Основы электродинамики хорошо изложены во многих книгах [95, 90], но для приложений в механике выделяется курс И. Е. Тамма [101]. Растёт список литературы по связанным задачам электромагнетизма и упругости [55, 58]. Как введение в эту область может быть полезна книга В. Новацкого [48].

*chapter 8*

## PERTURBATION METHODS (ASYMPTOTIC METHODS)

Of approximate approaches for analysis of nonlinear systems, perturbation methods are the most often applied.

### §1. Asymptotic decompositions

До сих пор аргументами рассматриваемых функций были только координаты и время. Размеры тела, упругие модули, характерные масштабы изменения ...

...

В предыдущих главах уже возникали асимптотические проблемы. Линейная теория получается из нелинейной с помощью разложений по масштабу нагрузки (§ 4.1). Безмоментная теория вытекает (с точностью до краевых эффектов) из моментной (гл. 5) при устремлении “моментных” жёсткостей к бесконечности. В термоупругости (гл. 6) использование уравнения теплопроводности вместо полного баланса энергии должно быть обосновано асимптотическими методами.

Уязвимым в какой-то степени местом

...

### §2. Splitting in a linear algebraic system

Этот простой случай очень познавателен, он хорошо поясняет особенности асимптотических явлений. Рассматривается линейная система

$$C_{ij}u_j = f_i, \quad C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)} \quad (2.1)$$

с матрицей  $C_{ij}$  и столбцами неизвестных  $u_j$  и нагрузок  $f_i$ . Процесс построения асимптотического решения определяется тем, вырождена матрица  $C_{ij}^{(0)}$  или нет. Возможны три случая.

1°  $\det C_{ij}^{(0)} \neq 0$ . Однородная задача

$$C_{ij}^{(0)} u_j = 0 \quad (2.2)$$

имеет лишь тривиальное (нулевое) решение. Матрица  $C_{ij}^{(0)}$  обратима, неоднородная задача всегда однозначно решима. Решение строится так:

$$u_j = \dots \quad (2.3)$$

...

2°  $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

3°  $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

### § 3. Poincaré method

Этот метод широко известен в теории нелинейных колебаний. Он предназначен, в частности, для определения периодических решений уравнения

$$\ddot{u} + u = \chi f(u, \dot{u}) \quad (3.1)$$

...

### § 4. Van der Pol averaging method

Опять рассматривается уравнение (3.1), но теперь ищутся не только периодические решения. Вводится фазовая плоскость

...

## § 5. Coalescence of asymptotic decompositions

Основоположник метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений — Ludwig Prandtl. Рассматривая течение вязкой жидкости, он заметил, что влияние малой вязкости локализовано у границы — в тонком приграничном слое. Вдали от границы жидкость ведёт себя как идеальная. Одни и те же уравнения

...

## § 6. Multiple-scale analysis (method of multiple scales)

Этот метод привлекателен, естественен и — как написано

...

## § 7. Equations with slowly varying parameters

Рассмотрим гармонический осциллятор, собственная частота которого медленно меняется во времени

...

## § 8. Thin bodies

Задачи теории упругости часто ставятся для тонких тел — стержней, пластин и оболочек. Таковы многие элементы конструкций, но и в природе вне человека тонкие тела встречаются довольно часто.

Решение задач упругости для тонких тел многие десятилетия основывалось на неких гипотезах о распределении решения по толщине и о порядках одних неизвестных относительно других. Построенные так теории сыграли большую роль в практике инженерных расчётов. Однако, им не хватало логической стройности и убедительности, их хотелось обосновать, уточнить — а в последнее время и уничтожить (в связи с появлением великолепных

компьютеров). Но открытое **не так давно** явление асимптотического ращепления прояснило картину: в тонком теле трёхмерная задача ращепляется на задачи меньшей размерности. Классические теории тонких тел получили и подтверждение, и развитие.

Рассмотрим задачу о кручении из ...

...

## Bibliography

Ali Hasan Nayfeh's book [108] is an excellent introduction to perturbation methods (asymptotic methods).

Всё разнообразие асимптотических методов представлено в монографиях ...

## §1. Initial concepts

Стержень — это тонкое длинное тело. Он характеризуется прежде всего своей осью — пространственной кривой, которую “облепляет” материал (рисунок ?? 22 ??). В каждой точке оси имеем плоскую фигуру

...

In approximate applied theories of rods (“strength of materials”) фигурируют сосредоточенные силы  $\mathbf{Q}$  и моменты  $\mathbf{M}$ . С тензором напряжения они связаны соотношениями

$$\mathbf{Q}(s) = \dots, \quad \mathbf{M}(s) = \dots \quad (1.1)$$

...

Наиболее логичный подход к описанию деформации упругих стержней связан с асимптотическим ращеплением трёхмерной задачи при малой толщине. Однако для сложной асимптотической процедуры заранее нужен некий вариант ответа. Такой вариант даёт прямой подход, основанный на одномерной модели стержня как материальной линии. Но какими степенями свободы — кроме трансляции — должны обладать частицы этой линии?

Давно известно, что стержни чувствительны к моментным нагрузкам. А присутствие моментов среди обобщённых сил говорит о наличии вращательных степеней свободы. Следовательно, одномерной моделью стержня должна быть линия Коссера — она состоит из элементарных твёрдых тел. Впрочем, могут проявиться и дополнительные степени свободы — как в тонкостенных стержнях, которым посвящена отдельная глава.

В механике упругих тел стержни занимают особенное место. Во-первых, это моментные модели, и моменты здесь играют главную роль (не роль поправок, как в трёхмерном континууме Коссера). Во-вторых, стержни являются как бы “тестовой площадкой” для моделей с дополнительными степенями свободы, поскольку наличие этих степеней можно достоверно исследовать на трёхмерной модели.

Ну а пока сосредоточимся на простой одномерной модели Коссера.

## § 2. Kinematics of Cosserat lines

Рассматриваемое далее является упрощённым вариантом гл. 5. Вместо тройки материальных координат  $q^i$  имеем одну —  $s$ , это может быть дуговая координата в отсчётной конфигурации. Движение определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}(s, t)$  и тензором поворота  $\mathbf{P}(s, t)$ . Линейная и угловая скорости частицы вводятся равенствами

...

## § 3. Balance of forces and moments

Поскольку частицы стержня (линии Коссера) — твёрдые тела, то нагрузками (“силовыми факторами”) являются силы и моменты: на элемент  $ds$  действуют внешние сила  $\mathbf{q}ds$  и момент  $\mathbf{m}ds$ . Внутренние взаимодействия тоже определяются силой  $\mathbf{Q}(s)$  и моментом  $\mathbf{M}(s)$  — это воздействие от частицы с координатой  $s+0$  к частице с  $s-0$ . Из закона

...

## § 4. Principle of virtual work and its consequences

For a piece of rod  $s_0 \leq s \leq s_1$  formulation of the principle is as follows

...

Conventionally  $\mathbf{a}$  is the tensor of stiffness for bending and twisting,  $\mathbf{b}$  is the tensor of stiffness for (ex)tension and shear, and  $\mathbf{c}$  is the tensor of crosslinks.

Stiffness tensors rotate together with particle:

...

## § 5. Classical Kirchhoff's model

До сих пор функции  $\mathbf{r}(s, t)$  и  $\mathbf{P}(s, t)$  были независимы. В классической теории Кирхгофа существует внутренняя связь

...

## § 6. Euler's problem

Рассматривается прямой стержень, закреплённый на одном конце и нагруженный силой  $\mathbf{Q}$  на другом (рисунок ?? 23 ??). Сила “мёртвая” (не меняется при деформировании)

...

## § 7. Variational equations

В нелинейной механике упругих тел полезны уравнения в вариациях, описывающие малое изменение актуальной конфигурации. Как и в § 3.13, вариации величин

...

## § 8. Non-shear model with (ex)tension

Kirchhoff's model with internal constraint  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$  doesn't describe the simplest case of extension/compression for a straight rod. This nuisance disappears with “softening” of the constraint: adding the possibility of (ex)tension and inhibiting only transverse shear, id est

...



## § 9. Mechanics of flexible thread

A flexible thread (chain) is simpler than a rod: its particles are “simple” material points with only translational degrees of freedom. Поэтому среди нагрузок нет моментов, только “линейные” силы — внешние распределённые  $\mathbf{q}$  и внутренние сосредоточенные  $\mathbf{Q}$ . Движение нити полностью определяется одним вектором-радиусом  $\mathbf{r}(s, t)$ , а инерционные свойства — линейной плотностью  $\rho(s)$ .

Вот принцип виртуальной работы для куска нити  $s_0 \leq s \leq s_1$

$$\int_{s_0}^{s_1} \left( (\mathbf{q} - \rho \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} - \delta \Pi \right) ds + \left[ \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r} \right]_{s_0}^{s_1} = 0. \quad (9.1)$$

...

Механика нити детально описана в книге [39].

## § 10. Linear theory

В линейной теории внешние воздействия считаются малыми, а отсчётная конфигурация — ненапряжённым состоянием покоя. Уравнения в вариациях в этом случае дают

...

## § 11. Case of small thickness

При малой относительной толщине стержня модель типа Коссера уступает место классической. Понятие “толщина” определяется соотношением жёсткостей:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — разной размерности; полагая  $\mathbf{a} = h^2 \hat{\mathbf{a}}$  и  $\mathbf{c} = h \hat{\mathbf{c}}$ , где  $h$  — некий масштаб длины, получим тензоры

...

Переход модели Коссера в классическую кажется более очевидным при непосредственном интегрировании

...

## § 12. Saint-Venant's problem

Трудно переоценить ту роль, которую играет в механике стержней классическое решение Saint-Venant'a. О нём уже шла речь в § 4.13.

Вместо условий ...

...

## § 13. Finding stiffness by energy

Для определения тензоров жёсткости  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  одномерной модели достаточно решений трёхмерных задач для стержня. Но тут возникают два вопроса: какие именно задачи рассматривать и что нужно взять из решений?

Saint-Venant's problem выделяется среди прочих, ведь отсюда берётся жёсткость на кручение.

Вдобавок есть много точных решений, получаемых таким путём: задаётся поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , определяется  $\hat{\boldsymbol{\tau}} = {}^4\mathcal{C} \bullet \nabla \mathbf{u}$ , затем находятся объёмные  $\mathbf{f} = -\nabla \bullet \hat{\boldsymbol{\tau}}$  и поверхностные  $\mathbf{p} = \mathbf{n} \bullet \hat{\boldsymbol{\tau}}$  нагрузки.

Но что делать с решением? Ясно, что  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$  в стержне — это интегралы по сечению (...). И совсем не ясно, что считать перемещением и поворотом в одномерной модели. Если предложить, например, такой вариант (индекс у  $\mathbf{u}$  — размерность модели)

$$\mathbf{u}_1(z) = \Omega^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}_3(\mathbf{x}, z) d\Omega, \quad \boldsymbol{\theta}(z) = \frac{1}{2} \Omega^{-1} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u}_3 d\Omega,$$

то чем другие возможные представления хуже?

Помимо  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$ , есть ещё величина, не вызывающая сомнений — упругая энергия. Естественно потребовать, чтобы в одномерной и в трёхмерной моделях энергии на единицу длины совпали. При этом, чтобы уйти от различий в трактовках  $\mathbf{u}_1$  и  $\boldsymbol{\theta}$ , будем исходить из complementary energy  $\hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$ :

$$\hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) = \int_{\Omega} \Pi_3 d\Omega$$

...

## § 14. Variational method of building one-dimensional model

Мы только что определили жёсткости стержня, полагая, что одномерная модель Коссера правильно отражает поведение трёхмерной модели. “Одномерные” представления ассоциируются со следующей картиной перемещений в сечении:

$$\mathbf{u}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{U}(s) + \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{x}. \quad (14.1)$$

Однако, такое поле  $\mathbf{u}$  не удовлетворяет уравнениям трёхмерной теории(??добавить, каким именно). Невозможно пренебречь возникающими невязками в дифференциальных уравнениях и краевых условиях.

Формально “чистым” является вариационный метод сведения трёхмерной проблемы к одномерной, называемый иногда методом внутренних связей. Аппроксимация (14.1) подставляется в трёхмерную формулировку вариационного принципа минимума потенциальной энергии (§ 4.9)

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_V \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) dV - \int_{\sigma_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma \rightarrow \min,$$

которая после интегрирования по сечению становится одномерной. Если  $\mathbf{U}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  варьируются независимо, получаем модель типа Коссера. В случае  $\mathbf{U}' = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}$  приходим к классической модели.

Метод внутренних связей привлекателен, его продолжают “переоткрывать”. С его помощью возможно моделировать тела с неоднородностью и анизотропией, он легко обобщается на динамику, если  $\mathbf{f}$  дополнить неварьируемой динамической добавкой до  $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ . Можно рассматривать и стержни переменного сечения, и даже нелинейно упругие, ведь вариационная постановка есть (гл. 3).

Аппроксимацию (14.1) можно дополнить слагаемыми с внутренними степенями свободы. Понимая необходимость учёта деформаций, некоторые авторы

...

...

Для вариационного построения одномерных моделей удобен принцип Рейсснера–Хеллингера (§ 4.11) с независимой аппроксимацией напряжений [20]. Но тогда необходима некая согласованность между  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\tau}$ .

Множеству достоинств вариационного метода противостоит один, но очень большой недостаток. Вводя аппроксимации по сечению, мы навязываем реальности свои упрощённые представления. Вариационный метод более подходит для прикладных расчётов.

## § 15. Asymptotic splitting of three-dimensional problem

В изложении механики стержней асимптотическое ращепление можно считать фундаментальным. Одномерные модели составляют лишь часть картины; другая часть — это двумерные задачи в сечении, а вместе они являются тем решением трёхмерной задачи, которое образуется при малой толщине.

Малый параметр  $\lambda$  в трёхмерную задачу проще всего ввести через представление вектора-радиуса (рисунок ?? 22 ??, § 1):

...

## § 16. Thermal deformation and stress

Прямой подход, столь эффективный при построении одномерных моделей Коссера и Кирхгофа, для проблем термоупругости неприменим. Тут нужно рассматривать трёхмерную модель, что может быть реализовано или вариационным путём, или асимптотическим.

Описанный в § 14 вариационный метод целиком переносится на термоупругость — включая задачи с неоднородностью и анизотропией, переменным сечением, динамические — и даже нелинейные. Достаточно в принципе Лагранжа заменить потенциал

...

## Bibliography

В отличие от других тем теории упругости, стержни в книгах представлены весьма скромно. Преобладает изложение в стиле сопротивления материалов, более точные и совершенные подходы большинству авторов кажутся невозможными или ненужными. Но опубликовано много интересных статей, обзоры которых можно найти у S. Antman'a [1], В. В. Елисеева [20] и А. А. Илюхина [24].

*chapter 10*  
**THIN-WALLED RODS**

**§1. Variational approach**

**В** главе 9 рассматривались стержни с массивным сечением. Но в технике широко используются иные стержни — тонкостенные, сечения которых представляют собой узкие полоски различного очертания (уголок, швеллер, двутавр и др.). Если стержни похожи на линии (материальные линии Коссера), то в тонкостенных стержнях и само сечение выглядит как линия. Три размера — толщина и длина сечения, а также длина стержня — имеют различные порядки.

Известны прикладные теории тонкостенных стержней ...

...

**§2. Equations with small parameter**

Рассмотрим призматический стержень с односвязным сечением в виде тонкой криволинейной полоски постоянной толщины  $h$ . Радиус-вектор в объёме представим следующим образом:

...

**§3. First step of the asymptotic procedure**

*Outer decomposition*

Из системы

...

*Inner decomposition near  $s_0$* 

Выпишем уравнения для

...

*Coalescence*

Стыковка внутреннего и внешнего разложений

...

**§ 4. Second step***Outer decomposition*

Из системы

...

*Inner decomposition near  $s = s_0$* 

Из общей системы

...

*Coalescence*

Поскольку рассматриваются поправочные члены асимптотических разложений

...

**§ 5. Third step***Outer decomposition*

Из системы

....

*Inner decomposition around  $s = s_0$* 

Как уже отмечалось, внутренние разложения нужны для постановки краевых условий на концах

...

*Coalescence*

В плоской задаче имеем следующее двучленное внешнее разложение:

....

## § 6. Fourth step

Здесь понадобится лишь внешнее разложение. Более того: в этом приближении мы не будем искать решения уравнений — будет достаточно лишь условий разрешимости. Напомним, что философия наша такова: разыскиваются лишь главные члены асимптотических разложений, но для полного их определения могут понадобиться

...

## § 7. Displacements

Расписывая тензорное соотношение

...

## § 8. Results of asymptotic analysis

Определение главных членов асимптотики напряжений и перемещений для тонкостенных стержней оказалось намного сложнее, чем в случае массивного сечения. Дадим сводку полученных выше итоговых результатов.

Перемещение:

...



## Bibliography

Помимо известных книг ... Материал главы содержится в [20], где можно найти и обширный список статей.

# chapter 11

## SHELLS AND PLATES

### §1. Surface geometry

**П**оверхность в трёхмерном пространстве определяется функцией вектора-радиуса точек поверхности от двух координат  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Непрерывное изменение одной из координат  $q^1$  при постоянной другой  $q^2$  даёт координатную линию  $q^1$ . Пересечение двух координатных линий однозначно определяет точку поверхности. Векторы

$$\mathbf{r}_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{r}, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$$

лежат на касательных к координатным линиям. Они являются базисом для представления любого вектора  $\overset{2}{\mathbf{v}}$  в касательной плоскости как линейной комбинации

$$\overset{2}{\mathbf{v}} = v^\alpha \mathbf{r}_\alpha = v_\alpha \mathbf{r}^\alpha, \quad v^\alpha = \overset{2}{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}^\alpha, \quad v_\alpha = \overset{2}{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}_\alpha$$

(введён взаимный базис в касательной плоскости:  $\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta^\alpha_\beta$ ).

Добавление в каждой точке поверхности единичного вектора нормали  $\mathbf{n}(q^\alpha)$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}$$

даёт разложение для любого вектора (и вообще любого тензора) в пространстве, например  $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{r}_\alpha + u_n \mathbf{n}$ .

Единичные (“метрические”) тензоры  $\mathbf{E}$  в пространстве и  $\overset{2}{\mathbf{e}}$  в касательной плоскости

$$\mathbf{E} = \overset{2}{\mathbf{e}} + \mathbf{n}\mathbf{n}, \quad \overset{2}{\mathbf{e}} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n} = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}^\alpha = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}_\alpha.$$

Представление вектора-радиуса точки пространства на расстоянии  $h$  ( $\frac{\partial h}{\partial q^\alpha} = 0$ ) от поверхности

$$\mathbf{R}(q^\alpha, h) = \mathbf{r}(q^\alpha) + h \mathbf{n}(q^\alpha)$$

определяет базис

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{n} = \mathbf{R}^n,$$

$$\mathbf{R}_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{R} = \partial_\alpha \mathbf{r} + h \partial_\alpha \mathbf{n} = \mathbf{r}_\alpha + h \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n}.$$

...

$$\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \cdot \left( \mathbf{r}^\beta \mathbf{r}_\beta + h \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n} \right) = \mathbf{r}_\alpha \cdot \left( \overset{2}{\mathbf{e}} + h \overset{2}{\nabla} \mathbf{n} \right) = \mathbf{r}_\alpha \cdot \left( \overset{2}{\mathbf{e}} - h \overset{2}{\mathbf{c}} \right)$$

$$\overset{2}{\mathbf{c}} \equiv -\overset{2}{\nabla} \mathbf{n}$$

...

кобазис и дифференциальный оператор “набла”

$$\overset{2}{\nabla} \equiv \mathbf{R}^i \partial_i$$

$$\overset{2}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha$$

...

## § 2. Model of a shell

Располагая моделями трёхмерного моментного континуума, **стержней и пластин**, не так уж тяжело разобраться в механике оболочек. Как геометрический объект, оболочка определяется ...

...

## § 3. Balance of forces and moments for a shell

При  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{constant}$  и  $\delta \varphi = \mathbf{0}$  (трансляция) ...

...

## § 4. Shells: Relations of elasticity

Локальное соотношение (??) после вывода уравнений баланса ...

...

## § 5. Classical theory of shells

Вышеизложенная теория (напоминающая балку Тимошенко и континуумы Коссера) рассматривает  $\varphi$  независимо от  $\mathbf{u}$ . Но обычный опыт подсказывает: материальный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остаётся таковым и после

(кинематическая гипотеза Кирхгофа). В классической теории Кирхгофа, Арона и Лява  $\varphi$  выражается через  $\mathbf{u}$ , что в конце концов позволяет всё свести к одному векторному уравнению для  $\mathbf{u}$ .

Предположим, что в основе классической теории лежит внутренней связь

...

## § 6. Shells: A plate

Это простейший случай оболочки. Орт  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  направлен по декартовой оси  $z$ , в качестве координат ...

...

## § 7. Shells: Approach with Lagrange multipliers

Уязвимым местом этого изложения теории оболочек являются формулы

...

## § 8. Cylindrical shell

Существуют разные уравнения цилиндрической оболочки. Приводятся громоздкие выкладки с отбрасыванием некоторых малых членов, и не всегда ясно, какие именно члены действительно можно отбросить.

Предлагаемая читателю теория оболочек иного свойства: лишних членов нет, все уравнения записаны в компактной тензорной форме — остаётся лишь грамотно действовать с компонентами тензоров. В качестве иллюстрации рассмотрим цилиндрическую оболочку.

В декартовой системе

...

## § 9. Shells: Common theorems

Пусть край закреплён

...

## § 10. Shells: Boundary conditions

В рамках рассматриваемого прямого подхода к оболочкам как материальным поверхностям наиболее надёжным способом вывода граничных условий представляется вариационный. Исходим из вариационного уравнения:

...

## § 11. Shells of revolution

*Surface of revolution (reference surface of shell of revolution) is created by rotating a plane curve (the meridian, the generatrix) about a straight line in the plane of curve (an axis of rotation).*

Разберёмся в геометрии поверхности вращения (рис. ?? 29 ??). Меридиан можно задать зависимостью декартовых координат

...

## § 12. Momentless theory of shells

В отличие от пластины, оболочка способна выдерживать нормальную распределённую нагрузку без появления внутренних моментов. В безмоментном состоянии напряжения равномерно распределены по толщине оболочки, безмоментные оболочечные конструкции можно считать оптимально спроектированными.

Уравнения безмоментной теории

...

### § 13. Shells: Nonlinear momentless theory

Вышеизложенную безмоментную теорию оболочек возможно просто и корректно обобщить на нелинейную постановку. Материальная поверхность состоит из частиц

...

### § 14. Shells: Other variant of classical theory

Выше при изложении моментной теории оболочек частицы материальной поверхности считались твёрдыми телами с шестью степенями свободы

...

### § 15. Plates: Overall concepts

**П**ластиной называется тонкое трёхмерное тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями и боковой цилиндрической поверхностью (рисунок ?? 26 ???). В декартовых координатах  $x_1, x_2, z$  поперечная координата ...

...

В теории пластин рассматриваются двумерные задачи. Переход от трёхмерной задачи наиболее достоверен на пути асимптотики. Но логическая стройность и эффективность присуща и вариационному подходу, основанному на аппроксимации по толщине решения трёхмерной вариационной задачи. Самое же простое корректное изложение теории пластин характерно для прямого подхода к ним как материальным плоскостям.

...

## § 16. Timoshenko-like model of a plate (direct approach)

Пластина рассматривается как материальная плоскость, частицы которой

...

## § 17. Kirchhoff's classical theory of plates

Принимается внутренняя связь

...

## § 18. Plates: Asymptotic matching of two-dimensional models

При малой толщине из теории типа Тимошенко вытекает классическая. Толщина  $h$  определяется отношением жёсткостей. Перепишем

...

## § 19. Plates: Variational transition from three-dimensional model

Используя вариационные принципы Лагранжа или Рейсснера–Хеллингера с аппроксимацией решения по толщине, можно получить двумерные вариационные постановки. Из них вытекают и соотношения внутри области, и естественные краевые условия.

Для примера построим модель типа Тимошенко с аппроксимацией перемещений

...

...

Рассмотренные вариационные переходы легко обобщаются на случаи неоднородности и анизотропии материала, температурных деформаций, динамики. Достоинство принципа Рейсснера–Хеллингера — в явном представлении напряжений. Зато принцип

Лагранжа применим к нелинейным задачам (глава 3 содержит трёхмерную постановку).

## § 20. Plates: Splitting of three-dimensional bending problem

Двумерная классическая теория изгиба пластин легко выводится из трёхмерной постановки с малым параметром. Представив радиус-вектор в объёме

...

## § 21. Circular plates

В качестве иллюстрации рассмотрим широко представленный в литературе вопрос об уравнениях теории Кирхгофа в полярных координатах. Имеем

...

## § 22. Plates: Plane stress

Это вторая из двух задач, о которых говорилось в § 15. Силы

...

## Bibliography

Теория оболочек изложена в монографиях А. Л. Гольденвейзера [12], В. В. Новожилова [49], А. И. Лурье [36], В. С. Черниной [79] и ряде других. Достоинства этих книг перекрывают неразвитость формального аппарата. Переход от трёхмерной модели оболочки к двумерной рассмотрен у ...

...

Техническая теория изгиба пластин изложена ...

...



chapter 12

## OSCILLATIONS AND WAVES

### §1. Vibrations of a three-dimensional body

Динамическая задача классической линейной упругости

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \sigma + f &= \rho \ddot{u}, \quad \sigma = {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla u, \\ u|_{o_1} &= 0, \quad n \cdot \sigma|_{o_2} = p, \\ u|_{t=0} &= u^\circ, \quad \dot{u}|_{t=0} = \dot{u}^\circ.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Согласно общей теории (§2.8), начинаем с анализа of harmonics (orthogonal oscillations):

$$\begin{aligned}f &= 0, \quad p = 0, \quad u(r, t) = U(r) \sin \omega t, \\ \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla U) + \rho \omega^2 U &= 0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Значения  $\omega$ , при которых однородная задача имеет нетривиальное решение — это natural resonant frequencies, and  $U(r)$  are orthogonal (normal) “modes”.

Time independent (1.2) looks like equation of linear elastostatics (5.1, §4.5) with the volume load equal to  $\omega^2 \rho U$ . Поверхностная нагрузка на  $o_2$  — нуль. Тождество Клапейрона (4.1, §4.4) даёт

$$\omega^2 \int_V \rho U \cdot U dV = 2 \int_V \Pi(\nabla U^S) dV.\tag{1.3}$$

It also means  $\omega^2 \geq 0$ , with zero for motion  $U$  of a continuum as a rigid whole. С закреплением хотя бы малой части поверхности all  $\omega_i > 0$ .

But here was assumed that  $\omega^2$  and  $U$  are real. This can be proven “by contradiction”. If  $\Im m \omega^2 \neq 0$ , then conjugate frequency  $\bar{\omega}^2$  is part of the oscillation spectrum too, and “mode”  $\bar{U}$  for this

frequency has conjugate components. Using then the reciprocal work theorem (4.2, § 4.4) for  $\mathbf{U}$  and  $\bar{\mathbf{U}}$  as two static variants,

$$\omega^2 \int_V \rho \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{U}} dV = \bar{\omega}^2 \int_V \rho \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U} dV \Rightarrow \omega^2 = \bar{\omega}^2 \Rightarrow \Im \omega^2 = 0.$$

...

## § 2. Vibrations of a rod

В линейной динамике стержней имеем следующую систему для сил  $\mathbf{Q}$ , моментов  $\mathbf{M}$ , перемещений  $\mathbf{u}$  и поворотов  $\boldsymbol{\theta}$  (§ 9.??):

...

## § 3. Small perturbations of parameters

Рассмотрим задачу об определении собственных частот и форм с малыми возмущениями масс и жёсткостей:

$$\begin{aligned} (C_{ij} - \omega^2 A_{ij}) U_j &= 0, \\ C_{ij} &= C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)}, \quad A_{ij} = A_{ij}^{(0)} + \chi A_{ij}^{(1)}, \quad \chi \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Находя решение в виде

$$\omega = \omega^{(0)} + \chi \omega^{(1)} + \dots, \quad U_j = U_j^{(0)} + \chi U_j^{(1)} + \dots,$$

получаем последовательность задач

...

## § 4. Vibrations of a shell

Динамика оболочек рассматривалась многими

...

## § 5. Waves in an elastic continuum

Рассмотрим линейные уравнения динамики однородной изотропной среды без объёмных сил

...

## § 6. Waves in a rod

Рассмотрим прямой стержень. Продольная деформация описывается уравнениями

...

## § 7. Nonlinear oscillations

Рассмотрим простой пример: продольные колебания прямого стержня с малой нелинейной добавкой в соотношениях упругости

...

## Bibliography

Методы решения динамических задач упругости представлены в книгах Л. И. Слепяна [64] и В. Б. Поручикова [60]. О малых линейных колебаниях (вибрациях) написано у С. П. Тимошенко, D. Н. Young'a и W. Weaver'a [70], И. М. Бабакова [4], В. Л. Бидермана [8], В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [17]. Асимптотические проблемы колебаний оболочек освещены у ...

## §1. Various approaches to the problem of stability

Существует классическая, хорошо развитая теория устойчивости движения [40]. По Ляпунову, процесс устойчив, если малые начальные отклонения остаются малыми и в будущем. Это относится и к состоянию равновесия. Нужно рассмотреть динамику малых отклонений от равновесной конфигурации и убедиться, что они не растут. В этом состоит **динамический подход** к проблеме устойчивости, и он справедливо считается наиболее достоверным.

Однако в задачах устойчивости равновесия упругих систем нашёл распространение иной подход, называемый **статическим** и связываемый с именем Leonhard'a Euler'a. Здесь значения параметров, при которых уравнения статики для малых отклонений приобретают нетривиальное решение, считаются критическими. Иными словами, критическим считается то равновесное состояние, которое перестаёт быть изолированным, — в его окрестности появляется множество смежных равновесных форм. При этом подходе достаточно решить задачу на собственные числа.

Но есть и другие подходы. Например, **метод несовершенств**: если малые случайные изменения начальной формы, жёсткостей, нагрузок и другие приводят лишь к малому изменению равновесной деформированной конфигурации, то имеем устойчивость. Отметим также **энергетический подход**: потеря устойчивости происходит, когда она становится энергетически выгодной, то есть ведёт к уменьшению энергии.

Перечисленные подходы составляют пёструю картину. Но в ней нетрудно разобраться на модели с конечным числом степеней свободы. Большой общностью обладают

...

## § 2. Classical problems with rods

Состояние перед варьированием описывается уравнениями нелинейной теории стержней Kirchhoff'a

...

## § 3. "Tracking" loads

В проблемах устойчивости весьма важно поведение нагрузки при деформации. Ведь в уравнения входит вариация  $\delta q$ , она равна нулю лишь для "dead" loads. Распространены "tracking" loads, то есть определённым образом меняющиеся при смещениях частиц упругого тела. Статический подход Euler'a

...

## § 4. The role of additional pliabilities

Для прямого консольного стержня, сжатого постоянной силой  $F$  на свободном конце, критическая нагрузка определяется формулой Euler'a

...

## § 5. Variational formulations

Во всех разделах линейной теории упругости большую роль играют вариационные постановки. Среди прочего, они составляют основу метода конечных элементов как варианта метода Ritz'a.

Менее развиты вариационные постановки для проблем устойчивости. Здесь получил популярность метод

...

## § 6. Nonconservative problems

В уравнении динамики (...) матрица позиционных сил

...

## § 7. Case of multiple roots

Вернёмся к проблеме устойчивости (...) в случае циркуляционных сил. Как уже отмечалось (где??), критическая ситуация характеризуется

...

## Bibliography

Увлекательные вопросы устойчивости упругих систем освещены в книгах ...

## §1. Volterra dislocations

Рассмотрим классическую линейную трёхмерную среду (гл. 4). Как показано в §4.7, уравнение совместности деформаций

...

## §2. Straight-line dislocations

Линия дислокации может быть любой пространственной кривой, замкнутой в теле или выходящей концами на поверхность. Для дислокации произвольной формы в неограниченной среде не так уж сложно получить соответствующее решение [21]. Мы же ограничимся простейшим случаем прямолинейной дислокации. Ищется решение

...

## §3. Action of stress field on dislocation

Рассмотрим тело, содержащее внутри дислокацию с замкнутой линией  $C$ . Тело нагружено объёмными  $\mathbf{f}$  и поверхностными  $\mathbf{p}$  силами. Обозначим

...

## § 4. About movement of dislocations

Рассмотрим это явление, следуя [29]. Ограничимся случаем прямолинейной винтовой дислокации, движущейся с постоянной скоростью

...

## § 5. Point defects

Речь пойдёт о континуальной модели таких явлений как вакансии, примесные частицы или междоузельные атомы в кристаллической решётке. В случае дислокации рассматривались

...

## § 6. Force acting on point defect

Дефект находится в теле, нагруженном объёмными  $f$  и поверхностными  $p$  силами. Суперпозиция

...

## § 7. Continuously distributed dislocations

Начнём со сложения векторов Бюргерса. При обходе сразу двух дислокаций (рис. ?? 40 ??) по контуру

...

## § 8. Stress during winding of coil

Не только дислокации и точечные дефекты, но и макроскопические факторы могут быть источниками собственных напряжений. При намотке катушки (рис. ?? 42 ??) в ней возникают напряжения от натяжения ленты. Расчёт этих напряжений очень сложен, если рассматривать детально процесс укладки ленты.



Но существует чёткий алгоритм Southwell'a [62] расчёта напряжений в катушке: укладка каждого нового витка вызывает внутри катушки приращение напряжений, определяемые соотношениями линейной упругости. Здесь два этапа, и первый состоит в решении задачи Lamé о деформации полого цилиндра под внешним давлением (рис. ?? 43 ??)

Lamé problem about deformation of a hollow cylinder under external pressure

...

## Bibliography

Дислокации и точечные дефекты в линейно-упругих телах рассматривали многие авторы: John Eshelby [21], Roland deWit [18], Cristian Teodosiu [66], Alan Cottrell [29]. Теорию собственных напряжений изложил Ekkehart Kröner в [31]. Методику расчёта напряжений при намотке описал Richard Southwell в книге [62].

## §1. Traditional criteria of toughness

Как судить о прочности тела после определения напряжения в нём? При одноосном растяжении напряжением  $\sigma$  есть, очевидно, некий “предел прочности”  $\sigma_*$ , выше которого материал разрушается. Прочность считают достаточной при  $\sigma \leq \sigma_*/k$ , где  $k$  есть так называемый коэффициент запаса. Но такой подход не вполне удовлетворяет, поскольку получаемые из опытов значения  $\sigma_*$  have a big scatter, а выбор коэффициента запаса sometimes becomes a bureaucratic act. Тем не менее подобные взгляды на анализ прочности широко распространены. Воздерживаясь от критики, сто́ит упомянуть самые популярные из них.

**Критерий максимального нормального напряжения:** разрушение происходит при  $\sigma_1 = \sigma_*$  (наибольшее из главных напряжений достигает предельного значения). Но это положение несправедливо для одноосного сжатия, при котором  $\sigma_1 = 0$ .

**Критерий максимального касательного напряжения (Tresca criterion):** разрушение наступает при  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_*$  ( $\sigma_3$  — наименьшее из главных напряжений). Это более соответствует началу пластического течения.

**Критерий максимального удлинения:** наибольшее из собственных значений тензора деформации  $\varepsilon_1 = \varepsilon_*$ . Это приемлемо и при сжатии с  $\varepsilon_1 > 0$ .

**Критерий энергии деформации:**  $\Pi = \Pi_*$ . Здесь учитывается, что разрушение требует энергии, а источником её может быть лишь само деформированное тело. Однако достаточный запас энергии — необходимое, но не единственное условие разрушения; должен

включиться некий механизм преобразования упругой энергии в работу разрушения.

**Критерий энергии формоизменения (von Mises yield criterion):**  
 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 2\tau_*^2$ ,  $\mathbf{s} \equiv \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau}$  (“девиатор напряжений”). Здесь не играет роли энергия объёмной деформации. Richard von Mises предложил\* этот критерий как гладкую аппроксимацию условия Henri Tresca.

**Критерий Mohr’a.** Представим себе множество предельных состояний ...

...

## § 2. Antiplane deformation of continuum with a crack

Любая регулярная функция комплексного переменного  $z = x + iy$  содержит в себе решение какой-либо антиплоской задачи статики без ...

...

## § 3. Crack in plane deformation

Рассмотрим плоскую область произвольного очертания с трещиной внутри; нагрузка приложена и “в объёме”, и на внешней границе. Как и при антиплоской деформации, решение строится в два этапа

...

## § 4. Crack-driving force

Это едва ли не основное понятие механики трещин. Рассмотрим его, следуя

\* **R. von Mises.** Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1913. Seiten 582–592.

...

## § 5. Criterion of crack growth

Связанная с энергией  $\mathcal{E}$  трещинодвижущая сила  $F$  — не единственное воздействие на фронт трещины. Должна быть ещё некая сила сопротивления  $F_*$ ; рост трещины начинается при условии

...

## § 6. J-integral

Одно из самых известных понятий в механике трещин выражается интегралом

$$J = \dots \quad (6.1)$$

...

## § 7. Stress intensity factors

Расчёт прочности тела с трещиной сводится к определению коэффициентов интенсивности напряжений. Методы расчёта таких коэффициентов — как аналитические, так и численные — хорошо освещены в литературе.

Рассмотрим ещё один подход к задачам механики трещин, разработанный

...

## § 8. Barenblatt's model

Неограниченный рост напряжений на фронте трещины вызывает некоторые сомнения. Желательно “дать поддержку” сингулярным решениям какими-либо дополнительными построениями или использованием иной модели. И эту поддержку дала работа

...

## § 9. Deformational criterion

D. S. Dugdale\*, а также М. Я. Леонов и В. В. Панасюк\*\* предложили модель, напоминающую построения Баренблатта. Также есть силы сцепления  $q$  и равен нулю итоговый коэффициент интенсивности напряжений. Но, во-первых,  $q$  имеет иной вид:

...

Второе отличие рассматриваемой модели — в формулировке критерия прочности: трещина начинает расти, когда расхождение берегов в конце свободного участка достигает критического значения  $\delta_*$  (этот параметр — константа материала), то есть при

...

## § 10. Growth of cracks

Пусть нагрузка на тело с трещиной выросла настолько, что выполняется условие

...

## § 11. Elastic field ahead of a moving crack

Рассмотрим этот вопрос

...

\* **Dugdale, D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1960, Volume 8, Issue 2, pages 100–104.

\*\* **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твёрдом теле // Прикладная механика. 1959, Т. 5, № 4, с. 391–401.

## § 12. Balance of energy for a moving crack

Уравнение баланса энергии в линейной теории ( $\Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $T = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ ):

$$\int_{\mathcal{V}} (T + \Pi)^\bullet d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{O}. \quad (12.1)$$

...

## Bibliography

Список книг по механике трещин уже велик. В нём сто́ит отметить работы Л. М. Качанова [25], Н. Ф. Морозова [43], В. З. Партона и Е. М. Морозова [56], Г. П. Черепанова [78]. Обзор статей есть у ... Экспериментальные данные представлены, например, в [26].

## chapter 16

# COMPOSITES

### §1. Introductory thoughts

Using clay as a building material, shredded straw is added to it. Working with epoxy gum, it's useful before solidifying to blend with a filler: powder, fibers, pieces of fabric. These are examples of composites (composite materials). New types of composites are used more and more widely, displacing steel, aluminum alloys and other popular homogeneous materials.

Композиты могут быть определены как неоднородные материалы, в которых происходит некое осреднение с возникновением новых свойств. “Обычная” механика сплошной среды применима, разумеется, и к композитам. Но едва ли возможно учесть все детали структуры — и неразумно. Нужны новые подходы, опирающиеся именно на сложность структуры. Ведь, например, в газе вместо описания динамики отдельных молекул вводят параметры “давление”, “температура” и другие.

В композитах выделяются три масштаба длины:  $\ell \gg \ell' \gg \ell_0$ . Наибольший — характерный размер  $\ell$  тела. Наименьший — размер  $\ell_0$  of elements of material structure (например, частиц порошка-наполнителя). Промежуточный масштаб  $\ell'$  определяет размер так называемого “представительного” объёма: того минимального объёма, в котором проявляются характерные свойства композита.

В механике некомпозитного однородного континуума существует лишь один масштаб  $\ell$  (размеры тела), а любые малые объёмы рассматриваются так же, как и конечные. Для композитов — иначе, сложная задача для неоднородного тела ращепляется на две: для тела в целом (макроуровень) и для “представительного”

объёма (микроуровень). На макроуровне (масштаб  $\ell$ ) композит моделируется однородной средой с “эффективными” свойствами, где “представительные” объёмы играют роль частиц. На микроуровне (масштаб  $\ell_0$ ) поля очень неоднородны, но некое осреднение по “представительному” объёму выводит на макроуровень.

...

## § 2. Effective fields

Любое поле в композите обычно представляется суммой

...

## § 3. Boundary value problems for representative volume

Как определяются упругие модели для однородной среды? Без реальной возможности найти связь между  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  в точке бесконечно-малых размеров, experiments are carried out with bodies of finite volumes under a so-called “homogeneous stress” — когда напряжение во всех точках тела одно и то же. В композитах роль точки играет “представительный” объём.

...

## § 4. Hill's fork

Using Voigt and Reuss theories, Hill derived upper and lower bounds on the effective properties of a composite material [**Hill, R. W.** The elastic behaviour of a crystalline aggregate // Proceedings of the Physical Society. Section A, Volume 65, Issue 5 (May 1952). Pages 349–354.]

Отметив, что

...



## § 5. Eshelby formulas

Итак, эффективные модули определяются энергией представительного объёма в первой или второй задачах:

...

## § 6. Effective moduli for material with spherical inclusions

В однородной матрице случайным образом, но достаточно равномерно, распределены сферические включения радиусом  $a$ . Получившийся композит на макроуровне будет изотропным, его упругие свойства полностью определяются ...

...

## § 7. Self-consistent method

Мы опирались на две задачи для представительного объёма и определяли эффективные модули из равенства энергий. В основе метода самосогласования лежит новая идея: представительный объём помещается в безграничную среду с эффективными свойствами, на бесконечности состояние считается однородным, эффективные модули находятся из некоторых дополнительных условий самосогласования.

Обратимся снова к вопросу об объёмном модуле среды со сферическими включениями. Задача сферически симметрична; для включения по-прежнему

...

## § 8. Hashin-Shtrikman principle

Hashin and Shtrikman derived upper and lower bounds for the effective elastic properties of quasi-isotropic and quasi-homogeneous multiphase materials using a variational approach [Hashin, Z.; Shtrikman, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials //

Journal of the Mechanics and Physics of Solids. Volume 11, Issue 2 (March–April 1963). Pages 127–140.]

Вилка Hill'а основана на обычных экстремальных принципах теории упругости. Специально для механики композитов Hashin и Shtrikman построили очень своеобразный функционал, который на некотором точном решении может иметь как максимум, так и минимум, давая возможность с двух сторон оценивать эффективные модули [83].

Рассмотрим первую из двух задач для представительного объёма

...

## Bibliography

Книги R. Christensen'а [32] и Б. Е. Победри [57] содержат и основы механики композитов, и постановку не теряющих актуальности проблем. Для самого требовательного читателя представляет интерес монография Т. Д. Шермергора [83]. Немало книг посвящено механике разрушения композитов, здесь стоит отметить труд Г. П. Черепанова [77].

*chapter 17*

## PERIODIC COMPOSITES

### §1. One-dimensional problem

В одномерной задаче статики имеем уравнение  
...

### §2. Three-dimensional continuum

Исходим из уравнений в перемещениях  
...

### §3. Fibrous structure

Тензор  $\mathcal{A}$  в этом случае постоянен вдоль оси  
...

### §4. Statics of a periodic rod

В уравнениях линейной статики стержня  
...

### Bibliography

Лежащий в основе этой главы асимптотический метод представлен (с разной степенью математической скрупулёзности) в книгах [5, 6, 30, 57].

## LIST OF PUBLICATIONS

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Изд. 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е изд. «Дрофа», 2004. 592 с.
5. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.
6. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.
7. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
8. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
9. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
10. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.
11. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
12. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. «Наука», 1976. 512 с.
13. **Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 383 с.

14. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.
15. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.
16. **Григолюк Э. И., Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
17. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
18. *Перевод: Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.
19. **Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.
20. **Елисеев В. В.** Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.
21. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод: Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.
22. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.
23. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.
24. **Илюхин А. А.** О построении соотношений теории упругих стержней // Механика твёрдого тела (Киев), 1990, № 22, С. 82–92.
25. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.
26. **Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
27. *Перевод: Кольский Г.* Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.
28. **Cosserat E. et Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
29. *Перевод: Коттрел А.* Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.

30. **Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.
31. **Kröner, Ekkehart** (i) *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. (ii) *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen* // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод: Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.
32. **Christensen, Richard M.** *Mechanics of composite materials*. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод: Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.
33. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с. *Translation: Lurie, A. I.* *Nonlinear Theory of Elasticity*: translated from the Russian by K. A. Lurie. Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 617 p.
34. **Лурье А. И.** Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с. *Translation: Lurie, A. I.* *Theory of Elasticity* (translated by A. Belyaev). Springer-Verlag, 2005. 1050 p.
35. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
36. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
37. *Перевод: Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
38. **Ernst Melan, Heinz Parkus.** *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод: Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.
39. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.
40. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е изд. «Наука», 1987. 304 с.

41. **Mindlin, Raymond David and Tiersten, Harry F.** Effects of couple-stresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод: Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сб. переводов. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.
42. **Морозов Н. Ф.** Избранные двумерные задачи теории упругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 182 с.
43. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.
44. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. «Наука», 1966. 708 с.
45. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.
46. **Witold Nowacki.** Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation: Nowacki, Witold.* Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод: Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.
47. **Witold Nowacki.** Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод: Новацкий В.* Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.
48. **Witold Nowacki.** Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод: Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.
49. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е изд. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
50. **Пановко Я. Г.** Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы. Изд. 2-е. URSS, 2017. 288 с.
51. **Пановко Я. Г., Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.

52. **Пановко Я. Г., Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е изд. «Наука», 1987. 352 с.
53. **Heinz Parkus.** Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод: Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
54. **Партон В. З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.
55. **Партон В. З., Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.
56. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е изд. «Наука», 1985. 504 с.
57. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
58. **Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
59. **Понятовский В. В.** Вывод уравнений тонкостенных стержней-оболочек открытого профиля из уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования // Исследования по упругости и пластичности. Изд-во ЛГУ, 1980. Вып. 13. С. 40–48.
60. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.
61. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твёрдого тела. 2-е изд. «Наука», 1988. 712 с.
62. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод: Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.
63. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Том 2. 6-е изд. «Лань», 2004. 560 с.
64. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
65. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B.V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод: Съярле Ф.* Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.



66. **Teodosiu, Cristian.** Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод: Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.
67. **Тимошенко С. П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.
68. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.
69. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости. «Наука», 1979. 560 с.
70. **Timoshenko, Stephen P.; Young, Donovan H.; William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод: Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
71. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.
72. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод: Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.
73. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод: Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.
74. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е изд. «Наука», 1975. 173 с.
75. *Перевод: Хеллан К.* Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.
76. *Перевод: Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.
77. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.
78. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.
79. **Чернина В. С.** Статика тонкостенных оболочек вращения. «Наука», 1968. 456 с.
80. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.
81. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

82. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.
83. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.
84. **Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.

*Tensors and tensor calculus*

85. **McConnell, Albert Joseph.** Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод: Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
86. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод: Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.
87. **Sokolnikoff, I. S.** Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua. 2nd edition. John Wiley & Sons, 1965. 361 pages. *Перевод: Сокольников И. С.* Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). «Наука», 1971. 376 с.
88. **Борисенко А. И., Тарапов И. Е.** Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Изд. 6-е. Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьковском ун-те, 1986. 216 с.
89. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд. 3-е. «Наука», 1967. 664 с.

*Generic mechanics, thermodynamics, electromagnetism*

90. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew.** The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online: The Feynman Lectures on Physics. Online edition.*
91. **Goldstein, Herbert; Poole, Charles P.; Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison-Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод: Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж.* Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
92. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод: Парс Л. А.* Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.

93. **Ter Haar, Dirk.** Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод: Тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.
94. **Беляев Н. М., Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.
95. **Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.
96. **Гантмахер Ф. Р.** Лекции по аналитической механике. Изд. 2-е. «Наука», 1966. 300 с.
97. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.
98. **Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е изд. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е изд. 719 с.
99. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
100. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е изд. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.
101. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е изд. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

#### *Variational methods*

102. **Karel Rektorys.** Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation: Rektorys, Karel.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D. Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод: Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
103. **Washizu, Kyuichiro.** Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод: Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
104. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.
105. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Изд. 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

*Perturbation methods (asymptotic methods)*

106. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод: Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.
107. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.
108. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-Interscience, 1973. 425 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Методы возмущений. «Мир», 1976. 456 с.
109. **Бабич В. М., Булдырев В. С.** Искусство асимптотики // Вестник ЛГУ, 1977, № 13, вып. 3, С. 5–12.
110. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.
111. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
112. **Зино И. Е., Тропп Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
113. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е изд. «Наука», 1981. 400 с.

*Other topics of mathematics*

114. **Collatz, Lothar.** Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод: Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.
115. **Dwight, Herbert Bristol.** Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод: Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд. 4-е. «Наука», 1973. 228 с.
116. **Kamke, Erich.** Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод: Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд. «Лань», 2003. 576 с.

117. **Korn, Granino A.** and **Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод: Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.
118. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. «Наука», 1971. 416 с.
119. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд. «Наука», 1973. 736 с.
120. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Изд. 6-е. «Наука», 1974. 176 с.
121. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. 6-е изд. Изд-во МГУ, 1999. 798 с.