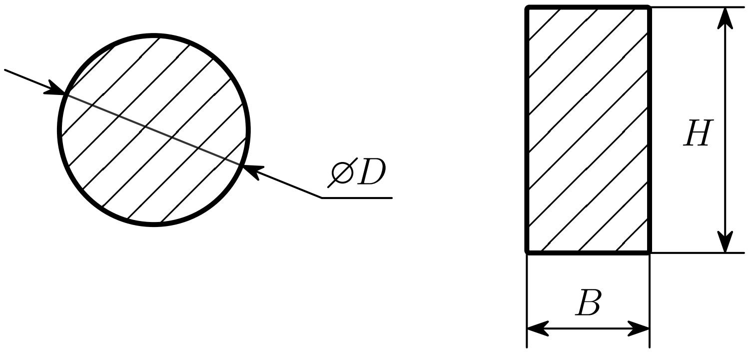
СМ	СМ7–31Б	№3	1	Низаметдинов Ф. Р.
МГТУ	Сопротивление материалов			
СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ				
Денисов М. А.			Вариант 8	

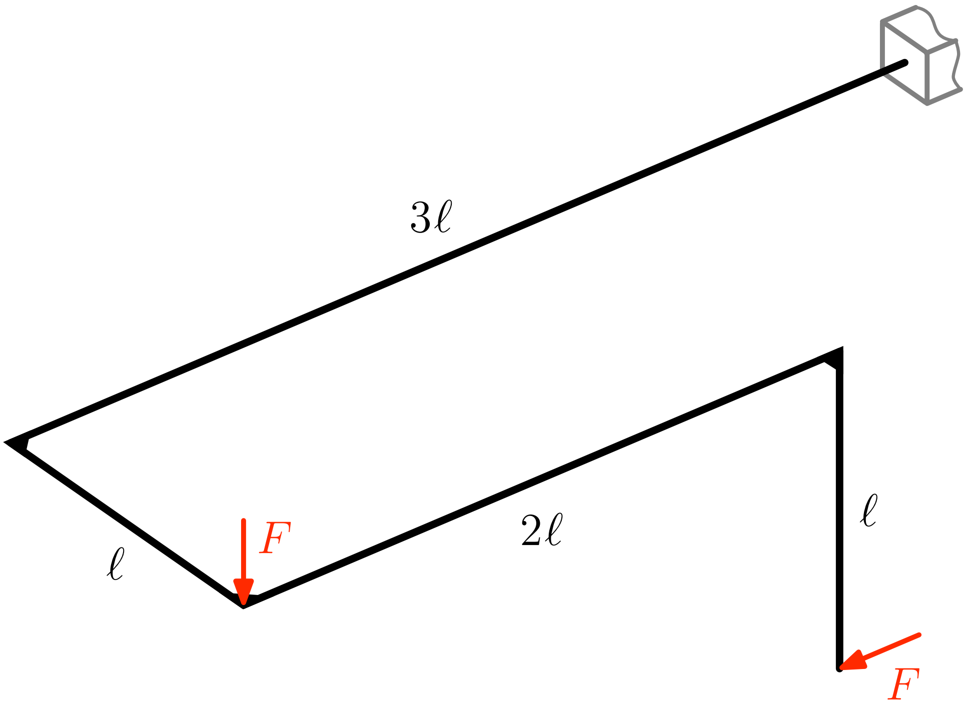
Задача 1я

Определить размер сечения для бруса кругового профиля с диаметром D и для бруса прямоугольного сечения с размерами $H \times B$, B — ширина, $H = 2B$ — высота

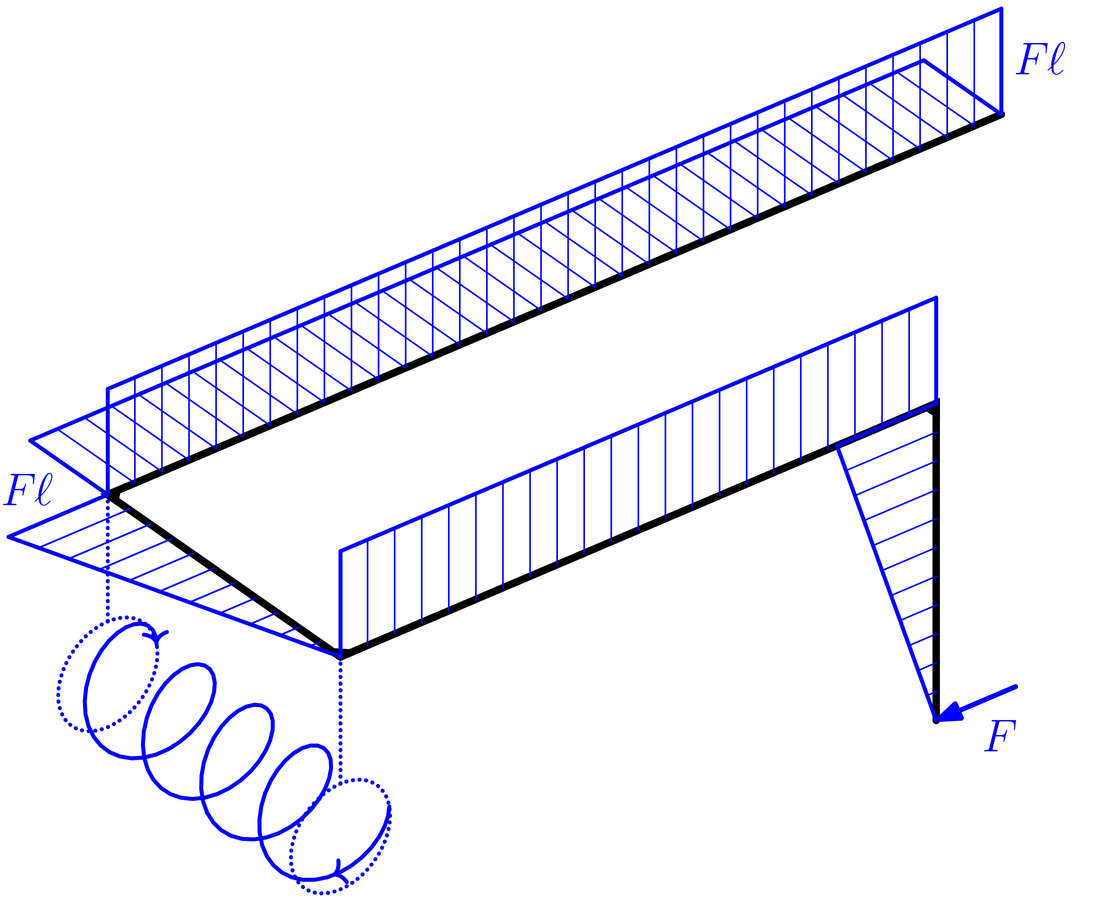


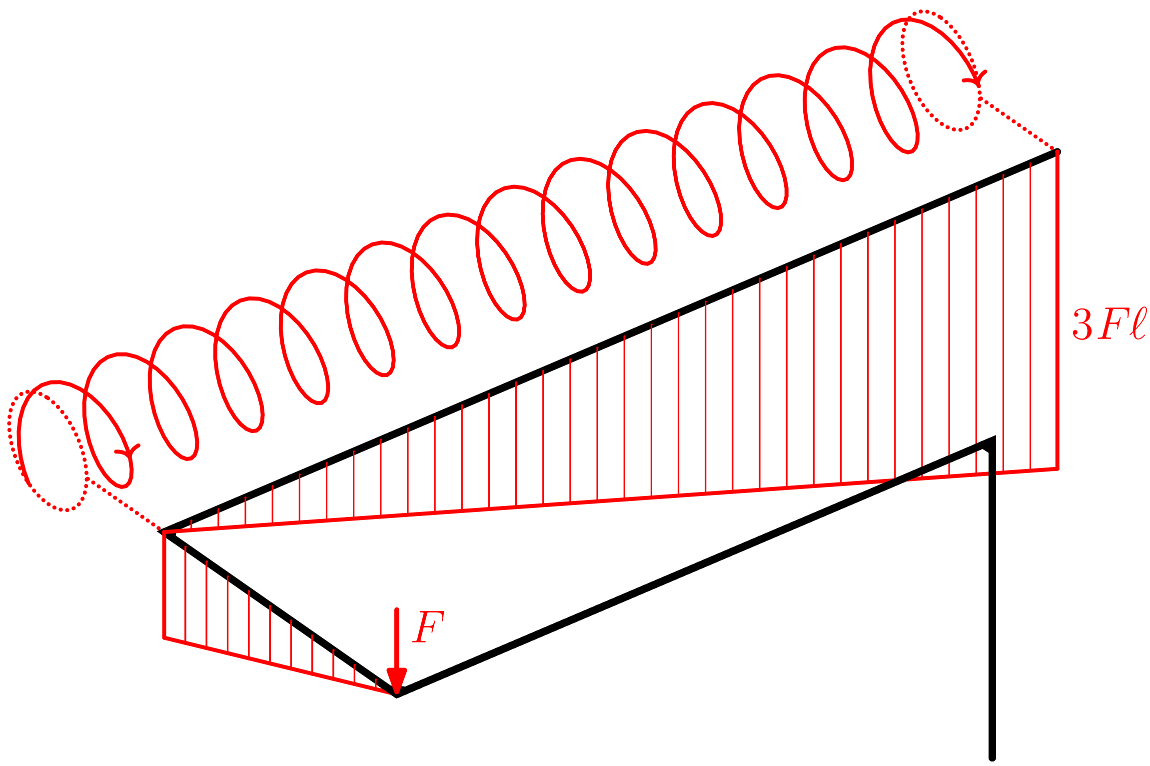
$F = 1$ кН, $\ell = 200$ мм, $\sigma_{\text{Тр}} = \sigma_{\text{Тс}} = 300$ МПа, $n_{\text{Т}} = 2$

Вариант № 8

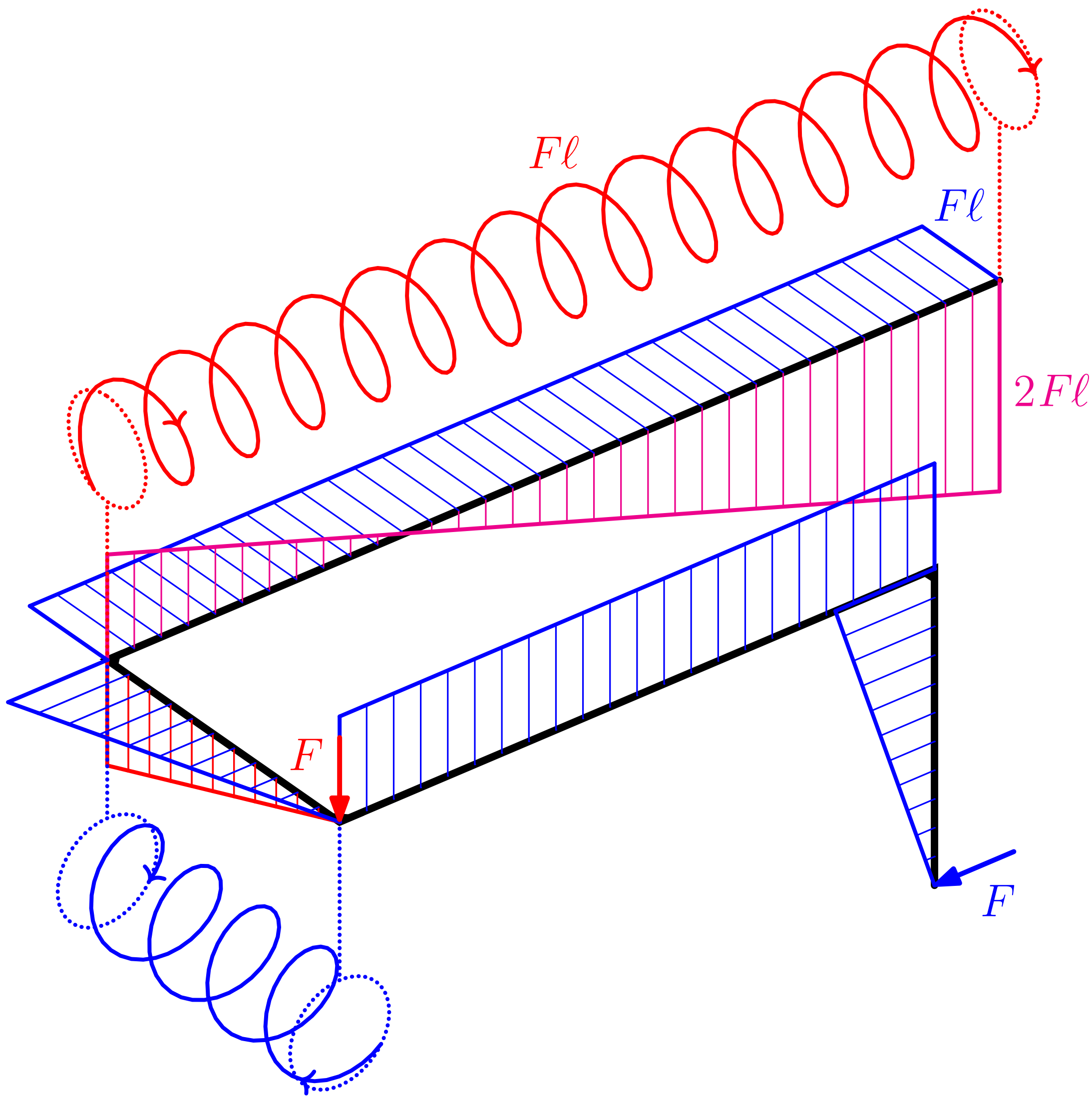


Эпюры внутренних моментов от каждой из внешних сил отдельно:



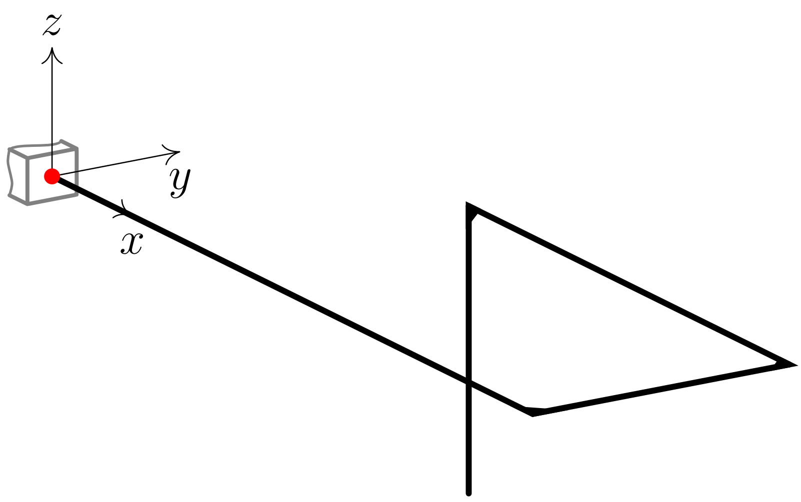


Эпюра внутренних моментов от всех внешних нагрузок:

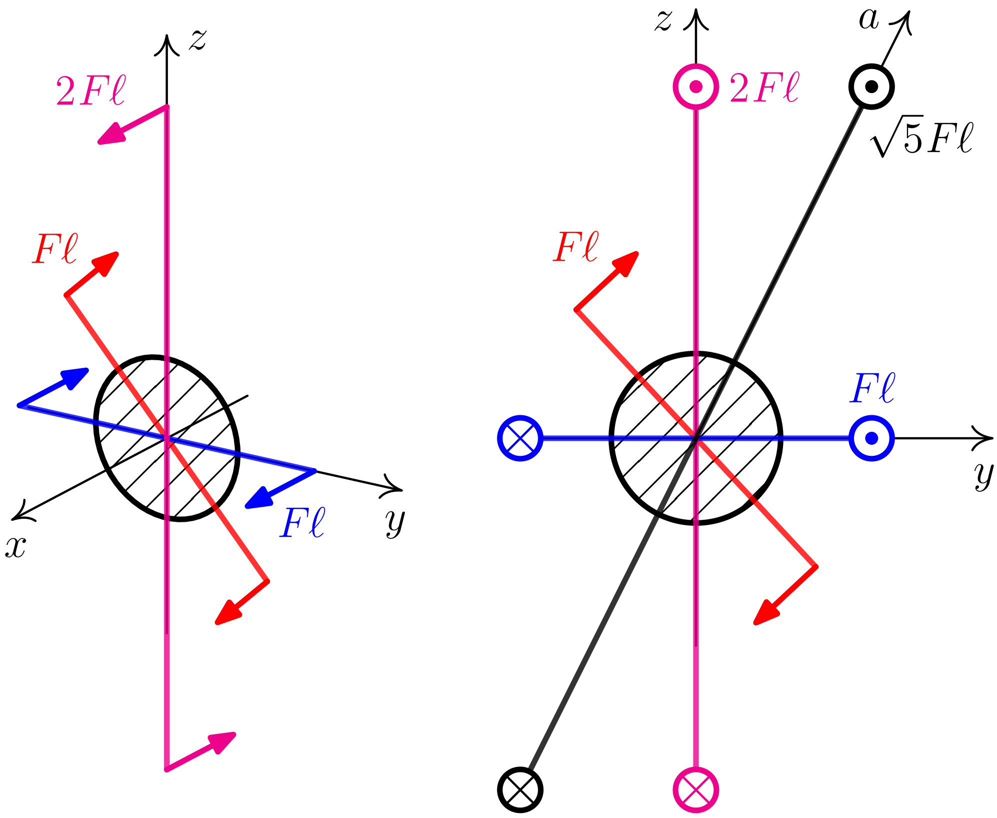


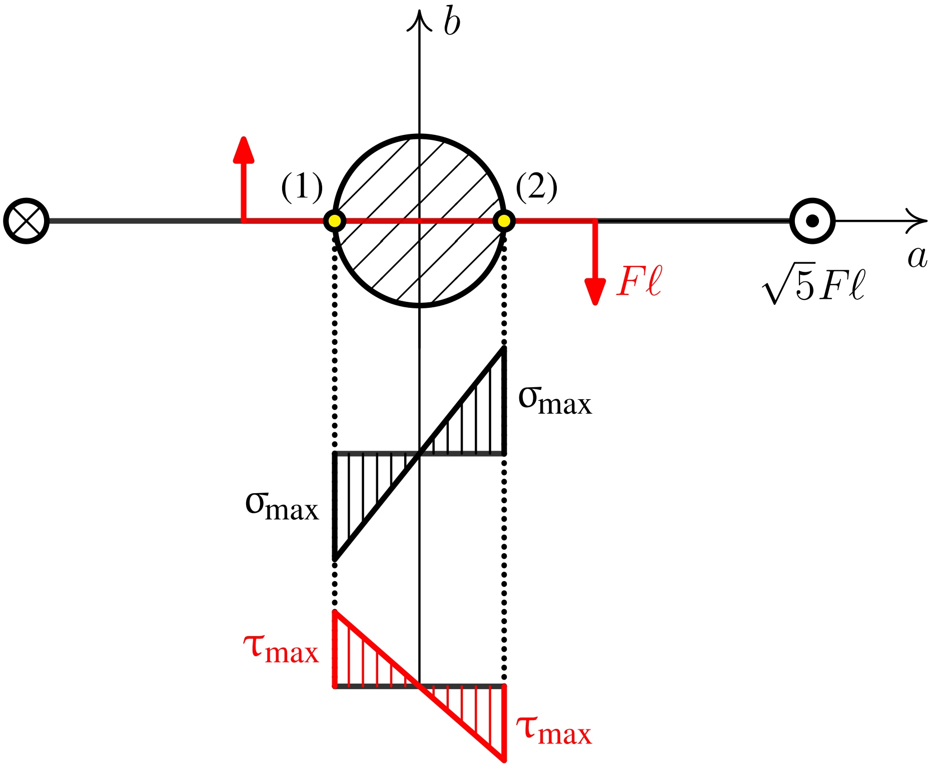
Наиболее нагруженная точка конструкции — у закрепления (заделки). В ней

$$M_z = F\ell,\ \ M_y = -2F\ell,\ \ M_x = M_{\text{к}} = F\ell$$



Круглое сечение





Полярный момент инерции круглого сечения:

$$\mathfrak{I}_\rho = \int\limits_A \rho^2 dA = \int\limits_A \rho^2 \rho \, d\rho \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{D/2} \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=D/2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Для нахождения осевых моментов инерции

$$\mathfrak{I}_y = \int\limits_A z^2 dA \ \text{ и } \ \mathfrak{I}_z = \int\limits_A y^2 dA$$

применяются равенства

$$y^2 + z^2 = \rho^2 \ \Rightarrow \ \mathfrak{I}_z + \mathfrak{I}_y = \mathfrak{I}_\rho$$
$$y = \rho \cos\varphi, \quad z = \rho \sin\varphi$$

Вытекающее из тождеств

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$$

и

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

представление $\cos^2\varphi$ как

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 \ \Rightarrow \ \cos^2\varphi = \frac{1}{2}\bigl(\cos 2\varphi + 1\bigr)$$

даёт вычисление интеграла

$$\int \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int \bigl(\cos 2\varphi + 1\bigr) d\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\cos 2\varphi \, d\bigl(2\varphi\bigr) + \frac{1}{2}\int d\varphi$$
$$= \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\varphi + C$$

А с представлением $\sin^2\varphi$ как

$$\sin^2\varphi = 1 - \frac{1}{2}\bigl(\cos 2\varphi + 1\bigr) = \frac{1}{2}\bigl(1 - \cos 2\varphi\bigr)$$

проинтегрируем

$$\int \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int \bigl(1 - \cos 2\varphi\bigr) d\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi + C$$

Определённые интегралы в пределах от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ будут равны

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \pi$$

Осевые моменты инерции относительно пары перпендикулярных осей:

$$\mathfrak{I}_z = \int\limits_A y^2 dA = \int\limits_A \rho^2 \cos^2\varphi \, dA = \int\limits_A \rho^3 \cos^2\varphi \, d\rho \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi \int\limits_0^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi D^4}{64},$$

$$\mathfrak{I}_y = \int\limits_A z^2 dA = \int\limits_A \rho^2 \sin^2\varphi \, dA = \int\limits_A \rho^3 \sin^2\varphi \, d\rho \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \int\limits_0^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi D^4}{64}$$

Для круглого сечения осевой момент инерции вокруг любой оси, проходящей через центр круга — одинаковый и равный

$$\mathfrak{I}_z = \mathfrak{I}_y = \mathfrak{I}_b = \mathfrak{I}_a = \frac{\pi D^4}{64}$$

Нормальные напряжения от изгиба

$$\sigma_x = \frac{M_z}{\mathfrak{I}_z} y - \frac{M_y}{\mathfrak{I}_y} z = \frac{M_b}{\mathfrak{I}_b} a, \quad M_b = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

максимальны в точках контура сечения, где $a = \pm \frac{D}{2}$:

$$\pm\sigma_{\max} = \pm M_b \frac{64}{\pi D^4} \frac{D}{2} = \pm \frac{32}{\pi D^3} \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

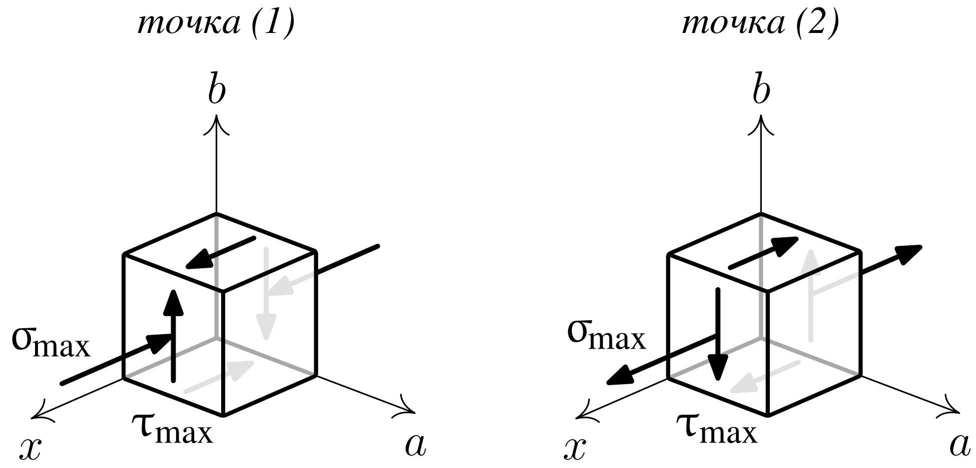
Касательные напряжения от кручения

$$\tau_{x\rho} = \frac{M_\text{к}}{\mathfrak{I}_\rho} \rho$$

максимальны тоже на контуре сечения — в точках с $\rho = \frac{D}{2}$:

$$\tau_{\max} = M_\text{к} \frac{32}{\pi D^4} \frac{D}{2} = \frac{16}{\pi D^3} M_\text{к}$$

В самых напряжённых точках сечения — точках (1) и (2) — имеем



По энергетическому критерию прочности эквивалентное одноосное напряжение есть

$$\sigma^{э}_{max} = \sqrt{\sigma^2_{max} + 3\tau^2_{max}}$$

Для круглого сечения

$$\sigma_{max} = \frac{32}{\pi D^3}\sqrt{M_z^2 + M_y^2}, \;\; \tau_{max} = \frac{16}{\pi D^3} M_{к}$$

и энергетический критерий даёт

$$\sigma^{э}_{max} = \frac{16}{\pi D^3}\sqrt{4\left(M_z^2 + M_y^2\right) + 3M_{к}^2}$$

Для рассматриваемой задачи в наиболее нагруженной точке (у заделки)

$$M_z = F\ell, \;\; M_y = -2F\ell, \;\; M_{к} = F\ell$$

и эквивалентное (по энергетическому критерию прочности) напряжение в точках сечения (1) и (2) равно

$$\begin{aligned}\sigma^{э}_{max} &= \frac{16}{\pi D^3}\sqrt{4\left(F^2\ell^2 + 4F^2\ell^2\right) + 3F^2\ell^2} \\ &= \frac{16}{\pi D^3}\sqrt{20F^2\ell^2 + 3F^2\ell^2} \\ &= \frac{16\sqrt{23}\,F\ell}{\pi D^3}\end{aligned}$$

По условию прочности

$$\sigma^{\text{э}}_{\max} = \frac{\sigma_{\text{Т}}}{n_{\text{Т}}}$$

с данными

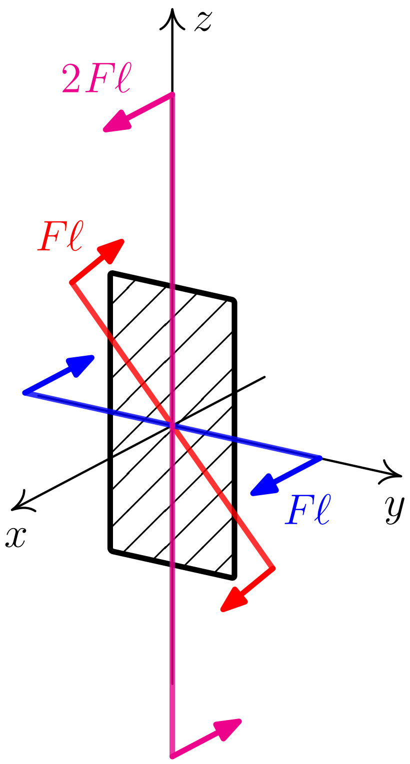
$$F = 1000\ \text{Н},\ \ \ell = 200\ \text{мм},\ \ \sigma_{\text{Т}} = 300\ \text{МПа},\ \ n_{\text{Т}} = 2$$

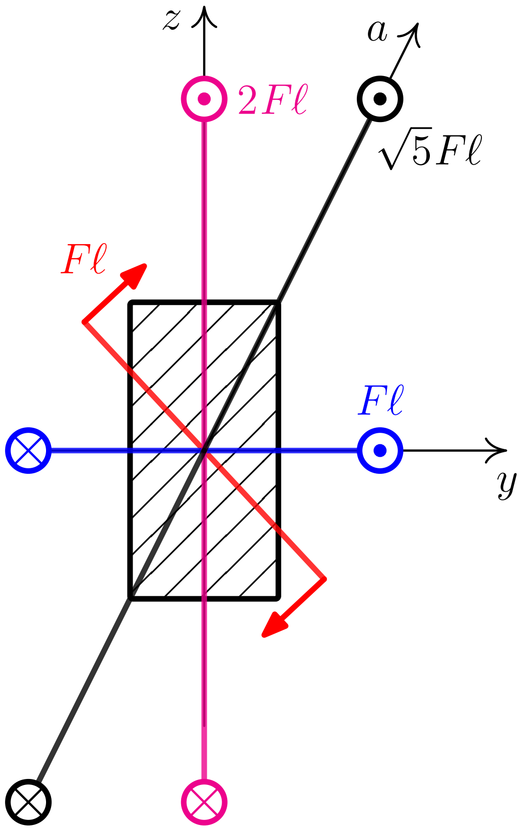
определяем диаметр сечения:

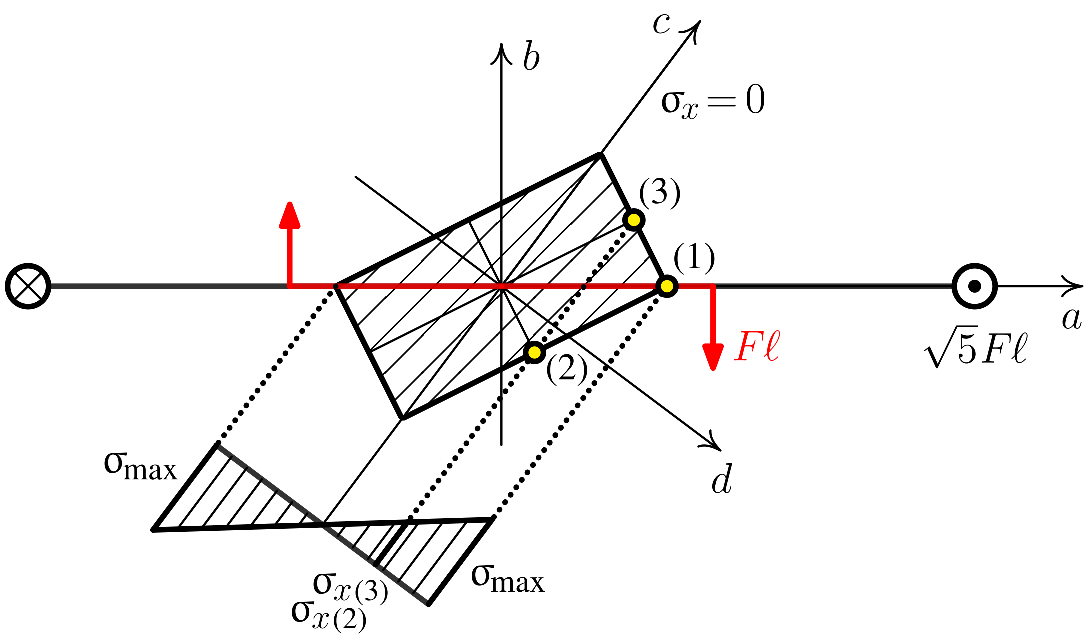
$$\frac{16\sqrt{23}\cdot 1000\ \text{Н}\cdot 200\ \text{мм}}{\pi D^3} = \frac{300\ \text{МПа}}{2}$$

$$\Rightarrow\ \ D^3 = \frac{64\,000\sqrt{23}}{3\pi}\ \text{мм}^3\ \ \Rightarrow\ \ D = 40\sqrt[6]{\frac{23}{9\pi^2}}\ \text{мм} \approx 31.9343\ \text{мм}\ \ \Rightarrow\ \ D = 32\ \text{мм}$$

Прямоугольное сечение







Осевые моменты инерции прямоугольного сечения:

$$\mathfrak{I}_y = \int\limits_A z^2 dA = \int\limits_{-B/2}^{B/2} dy \int\limits_{-H/2}^{H/2} z^2 dz = B\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=-H/2}^{z=H/2} = \frac{BH^3}{12} = \frac{B^4}{12}\left(\frac{H}{B}\right)^3$$

$$\mathfrak{I}_z = \int\limits_A y^2 dA = \int\limits_{-H/2}^{H/2} dz \int\limits_{-B/2}^{B/2} y^2 dy = H\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-B/2}^{y=B/2} = \frac{HB^3}{12} = \frac{B^4}{12}\,\frac{H}{B}$$

Центробежный момент инерции сечения:

$$\mathfrak{I}_{yz} = \int\limits_A yz\,dA = \int\limits_A yz\,dy\,dz = \int\limits_{-B/2}^{B/2} y\,dy \int\limits_{-H/2}^{H/2} z\,dz = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-B/2}^{y=B/2} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=-H/2}^{z=H/2} = 0,$$

то есть оси x и y — главные.

Моменты сечения относительно осей a и b:

$$\mathfrak{I}_b = \int\limits_A a^2 dA = \frac{BH}{12}\left(H^2 \cos^2 \operatorname{atan}\frac{M_z}{M_y} + B^2 \sin^2 \operatorname{atan}\frac{M_z}{M_y}\right)$$

$$\mathfrak{I}_a = \int\limits_A b^2 dA = \frac{BH}{12}\left(H^2 \cos^2 \operatorname{atan}\frac{M_y}{M_z} + B^2 \sin^2 \operatorname{atan}\frac{M_y}{M_z}\right)$$

$$\mathfrak{I}_{ab} = \int\limits_A ab\,dA = \int\limits_A ab\,da\,db = \ldots.$$

Моменты относительно осей c и d:

$$\mathfrak{I}_d = \int\limits_A c^2 dA = \frac{BH}{12}\left(B^2 \cos^2 \operatorname{atan}\frac{\mathfrak{I}_y}{\mathfrak{I}_z}\frac{M_z}{M_y} + H^2 \sin^2 \operatorname{atan}\frac{\mathfrak{I}_y}{\mathfrak{I}_z}\frac{M_z}{M_y}\right)$$

Коэффициент пропорциональности $\mathfrak{I}_{\text{К}}$ («геометрическая жёсткость», «момент инерции для кручения») между внутренним крутящим моментом $M_{\text{К}}$ и $G\Theta$:

$$M_{\text{К}} = \mathfrak{I}_{\text{К}} G\Theta,\ \ \mathfrak{I}_{\text{К}} = \beta B^3 H,\ \ \beta = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5}\frac{B}{H}\sum_{j=1,3,..}^{\infty} j^{-5}\tanh\left(\frac{\pi j}{2}\,\frac{H}{B}\right)$$

(B — меньшая сторона)

Коэффициент пропорциональности $W_{\text{К}}$ между внутренним крутящим моментом $M_{\text{К}}$ и максимальным касательным напряжением в сечении (в точке на контуре посередине бо́льшей стороны прямоугольника):

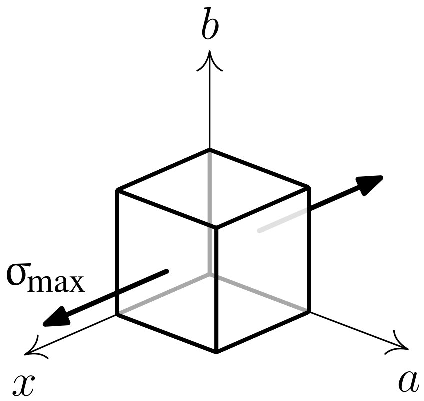
$$M_{\text{К}} = W_{\text{К}} \tau_{\max}, \;\; W_{\text{К}} = \alpha B^2 H, \;\; \alpha = \frac{\beta \pi^2}{8 \sum\limits_{j=1,3,..}^{\infty} j^{-2} \left(1 - \dfrac{1}{\cosh\left(\frac{\pi j}{2} \frac{H}{B}\right)} \right)}$$

Для $\frac{H}{B} = 2$:

$\beta = 0.22868167711958$ (вычислено с точностью 10^{-15} до $j = 1001$)
$\alpha = 0.24587834540483$ (с точностью 10^{-15} до $j = 31622777$)

В рассматриваемом прямоугольном сечении выделяются три точки — (1), (2) и (3) — как кандидаты на самую напряжённую точку сечения. В точке (1) — наибольшее нормальное напряжение от изгиба, касательные же напряжения в угловых точках равны нулю. В точках (2) и (3) — максимальные касательные напряжения от кручения. Напряжённое состояние в угловой точке (1):

точка (1)



Нормальные напряжения от изгиба

$$\sigma_x = \frac{M_z}{\mathfrak{J}_z} y - \frac{M_y}{\mathfrak{J}_y} z \neq \frac{M_b}{\mathfrak{J}_b} d, \;\; M_b = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

равны нулю на «нулевой линии» («нейтральной оси»), уравнение которой есть

$$\sigma_x = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{M_z}{\mathfrak{J}_z} y - \frac{M_y}{\mathfrak{J}_y} z = 0 \;\; \Rightarrow \;\; z = \frac{\mathfrak{J}_y}{\mathfrak{J}_z} \frac{M_z}{M_y} y$$

Отношение осевых моментов инерции для этого сечения

$$\frac{\Im_y}{\Im_z} = \frac{12BH^3}{12HB^3} = \left(\frac{H}{B}\right)^2 = 4,$$

отношение внутренних изгибающих моментов в сечении

$$M_z = F\ell,\ \ M_y = -2F\ell \ \ \Rightarrow\ \ \frac{M_z}{M_y} = \frac{1}{-2}$$

и уравнение нулевой линии

$$z = -2y$$

Максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} \neq \frac{M_b}{\Im_b} d_{\max},$$

где $d_{\max}$ — расстояние от нулевой линии до наиболее удалённой точки сечения.

Если $\frac{H}{B} = 2$, ось a проходит по диагонали прямоугольника, а нулевая линия — по второй диагонали, то

$$d_{\max} = B\cos \operatorname{atan}\frac{1}{2} = B\sqrt{0.8} = \frac{2}{\sqrt{5}}B$$

Момент инерции рассматриваемого сечения вокруг оси b

$$\Im_b = \frac{B^4}{6}\left(4\cos^2 \operatorname{atan}\frac{1}{2} + \sin^2 \operatorname{atan}\frac{1}{2}\right) = \frac{B^4}{6}\left(4\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{17}{30}B^4$$

Суммарный изгибающий момент в сечении

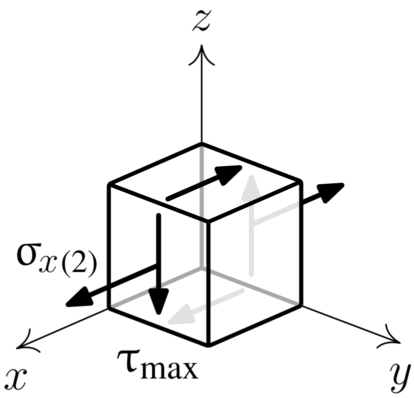
$$M_b = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{5}F\ell$$

Максимальное нормальное напряжение в сечении

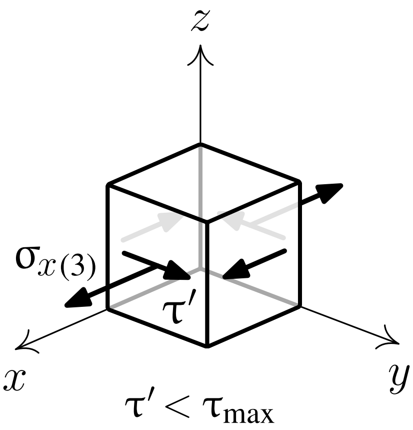
$$\sigma_{\max} \neq \frac{30\sqrt{5}F\ell}{17B^4} B\sqrt{0.8} = \frac{60}{17}\frac{F\ell}{B^3} = \left(3 + \frac{9}{17}\right)\frac{F\ell}{B^3}$$

Напряжённое состояние в точках с наибольшими касательными напряжениями от кручения:

точка (2)



точка (3)



Имеем

$$\sigma_{x(2)} = \sigma_{x(3)} = \frac{1}{2}\sigma_{\max} = \frac{30}{17}\frac{F\ell}{B^3},$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{К}}}{W_{\text{К}}}, \;\; W_{\text{К}} = \alpha B^2 H = 2\alpha B^3, \;\; 2\alpha \approx 0.4917566908,$$

$$M_{\text{К}} = F\ell$$

$$\Rightarrow \;\; \tau_{\max} = \frac{F\ell}{2\alpha B^3}, \quad \frac{1}{2\alpha} \approx 2.0335259666, \;\; \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 \approx 4.1352278567$$

По энергетическому критерию прочности эквивалентное одноосное напряжение будет равно

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{э}}_{(2)} &= \sqrt{\sigma^2_{x(2)} + 3\tau^2_{\max}} \\ &= \frac{F\ell}{B^3}\sqrt{\frac{30^2}{17^2} + 12.4056835702} \\ &\approx 3.9395266748\,\frac{F\ell}{B^3} \end{aligned}$$

Самой напряжённой точкой сечения оказалась точка на середине длинной стороны контура прямоугольника — точка (2) — с эквивалентным напряжением

$$\sigma^{\text{э}}_{\max} = \nu\,\frac{F\ell}{B^3}, \quad \nu = 3.9395266748$$

Размер B (ширину) сечения найдём из условия прочности

$$\sigma^{\text{э}}_{\max} = \frac{\sigma_{\text{Т}}}{n_{\text{Т}}}$$

$$\nu\,\frac{F\ell}{B^3} = \frac{\sigma_{\text{Т}}}{n_{\text{Т}}} \;\;\Rightarrow\;\; B^3 = \nu F\ell\,\frac{n_{\text{Т}}}{\sigma_{\text{Т}}}$$

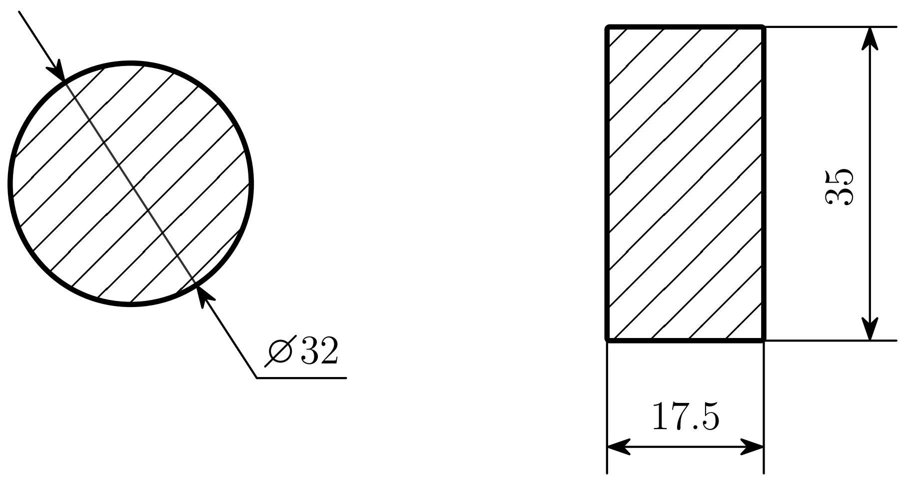
Для данных

$$F = 1000\ \text{Н},\ \ \ell = 200\ \text{мм},\ \ \sigma_{\text{т}} = 300\ \text{МПа},\ \ n_{\text{т}} = 2$$

окончательно находим

$$B = \sqrt[3]{\nu F \ell \frac{n_{\text{т}}}{\sigma_{\text{т}}}} = \sqrt[3]{\frac{3.9395266748 \cdot 1000\ \text{Н} \cdot 200\ \text{мм} \cdot 2}{300\ \text{МПа}}} \approx 17.3831\ \text{мм}$$

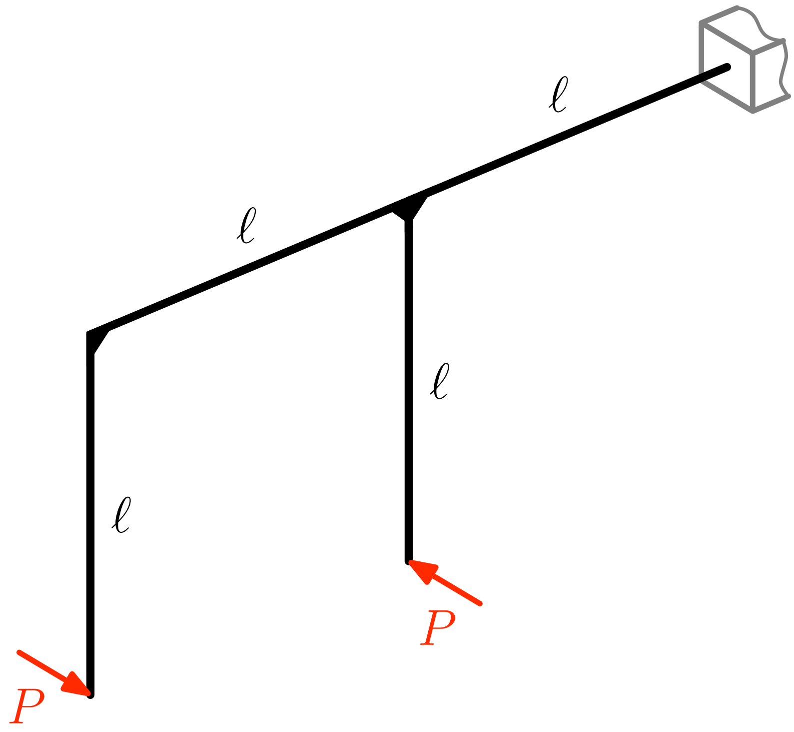
$$\Rightarrow\ B = 17.5\ \text{мм}$$



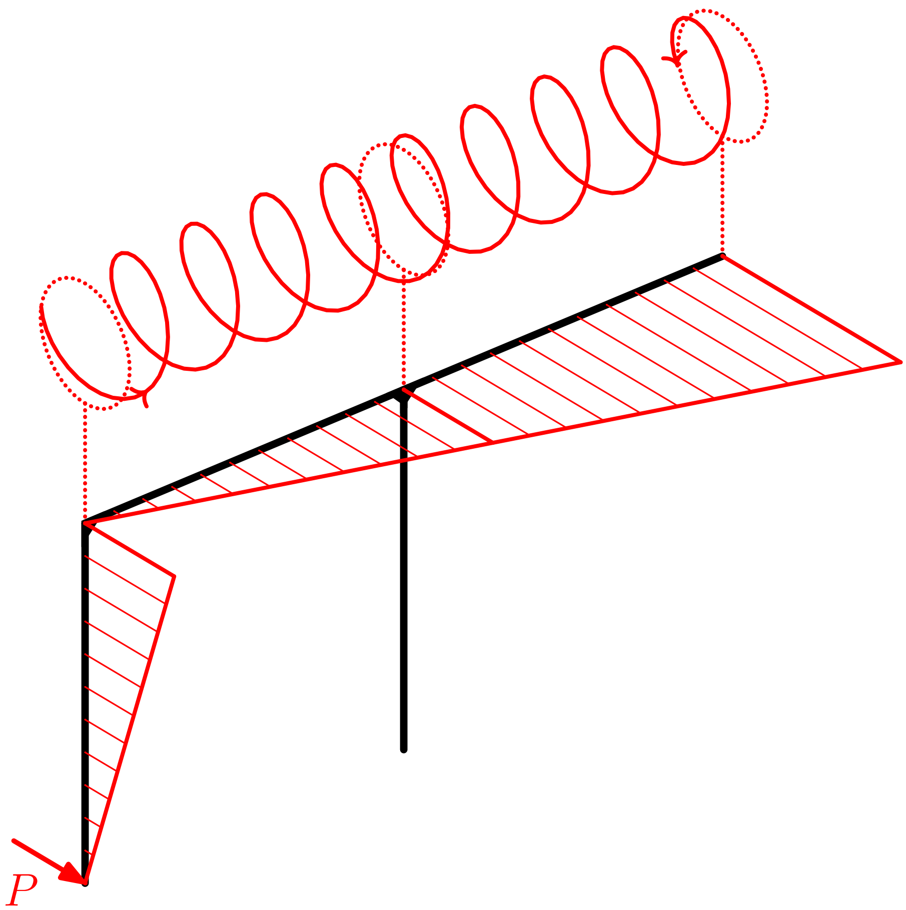
Задача 2^{я}

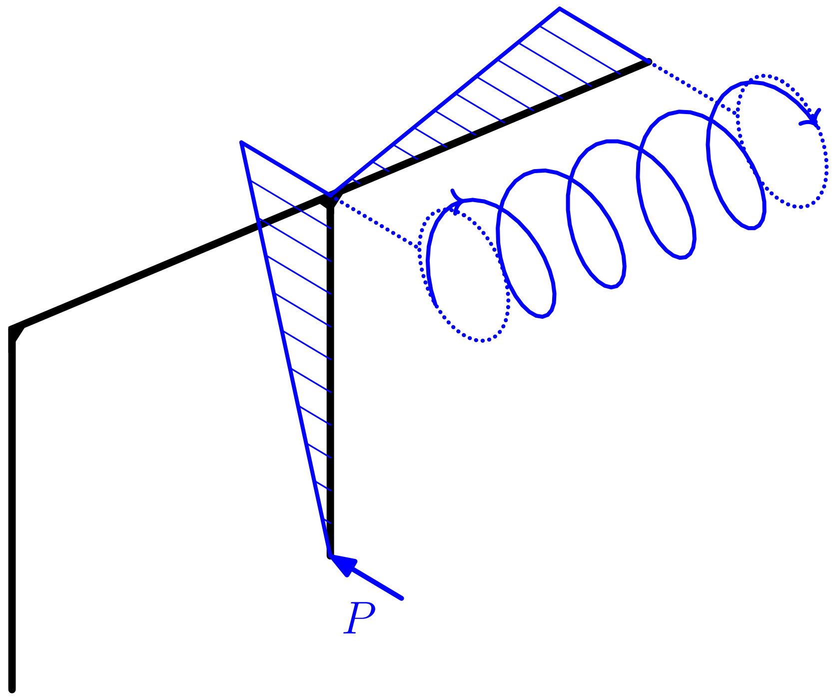
Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов

Вариант № 8

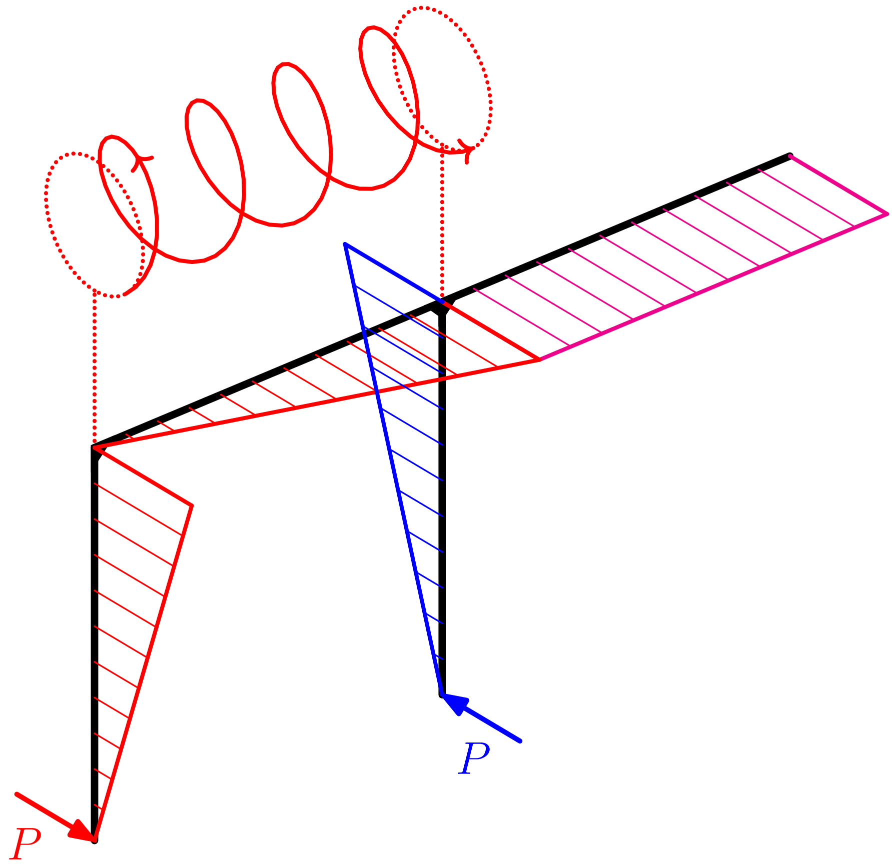


Для линейно-упругих систем примени́м принцип независимости действия сил, согласно которому результат от действия *всех* нагрузок аналогичен сумме действий от *каждой* из нагрузок. Поэтому, для решения задачи найдём внутренний момент от каждой внешней силы по отдельности.


P


P

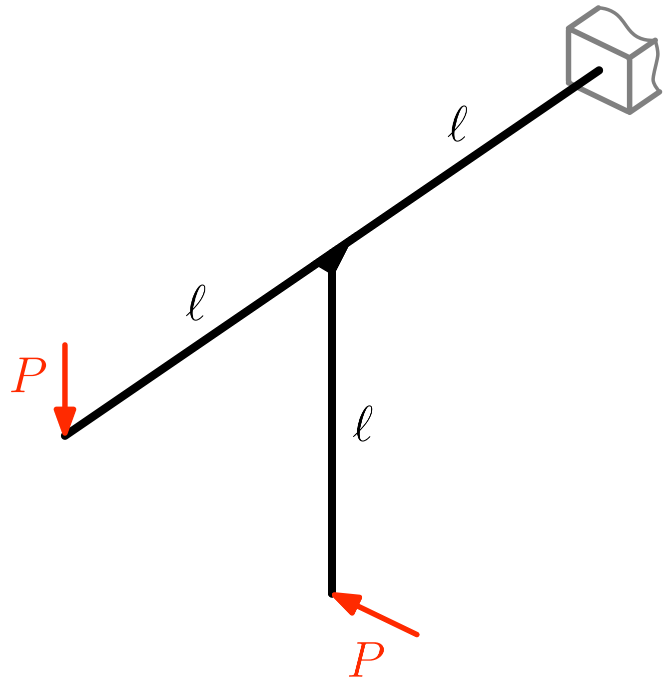
Сложение эпюр от отдельных внешних сил даёт суммарную эпюру от всех сил, действующих на конструкцию. Суммарная эпюра:



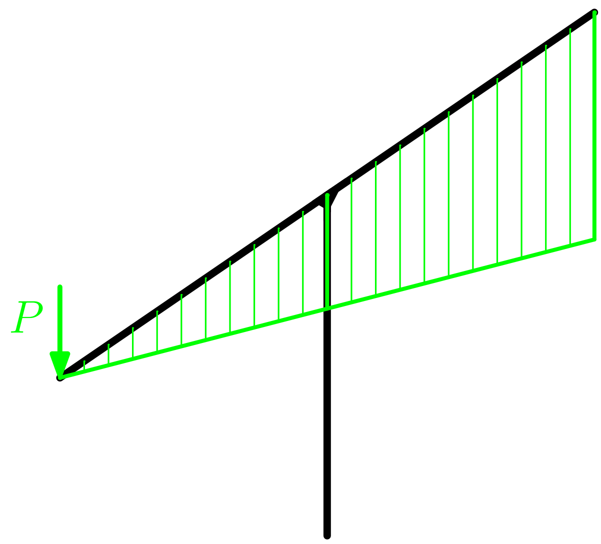
Задача 3я

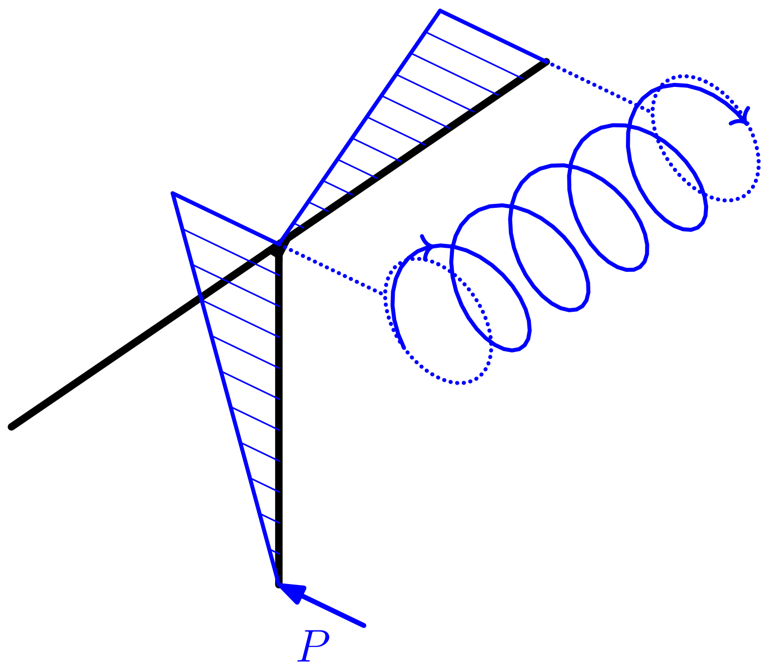
Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов

Вариант № 8



Для решения, как и в предыдущей задаче, используется принцип независимости действия сил.


P


P

Суммарная эпюра: