Vadique Myself

ФИЗИКА УПРУГИХ КОНТИНУУМОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Я представил следующие модели упругого континуума в этой книге: нелинейные и линейные, микрополярные и классические безмоментные; трёхмерные, двумерные (оболочки и пластины) и одномерные (стержни, включая тонкостенные). Также я объяснил основы динамики — колебания, волны и устойчивость. Для термоупругости и магнитоупругости я дал сводку классических теорий термодинамики и электродинамики. Динамика разрушения описана через теории дефектов и трещин. Также показаны подходы к моделированию сделанных человеком неоднородных материалов, “композитов”.

Слово “континуумов” в названии говорит, что тело (среда) моделируется здесь не как дискретная коллекция частиц, но как континуальное (непреры́вное) поле векторов положения, континуальная материя. Это даёт большое удобство, потому что аппарат calculus’а (исчисления) бесконечно ма́лых может быть использован для таких моделей.

Когда я только на́чал писа́ть эту книгу, я думал о читателе, который весьма знако́м с “высшей” математикой. Но позже я решил провести такое знако́мство сам, и ужé, как побочный эффект, каждый читатель с любым знанием математики может постигнуть содержимое книги.

Книга написана с использованием компактной и элегантной прямой безиндексной тензорной записи. Математический аппарат для интерпретирования прямых тензорных соотношений находится в первой главе.

Я пишу эту книгу одновременно на двух языках, английском и русском. Читатель свободен выбрать любой язык из двух.

github.com/VadiqueMe/PhysicsOfElasticContinua

СОДЕРЖАНИЕ

глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Математика абстрактна. Абстрактная — прилагательное математики, математика — существительное абстрактной. “Абстрактное”, “теоретическое” и “математическое” это синонимы. Когда кто-нибудь занимается математикой, он играет в игру в далёком-предалёком волшебном мире воображения.

Например, чи́сла это во́все не реальные сущности. Они — чисто воображаемые понятия, нонсенс. Мы не можем почувствовать, ощутить чи́сла, не можем потрогать или понюхать их. Да, кто-то может сочинять истории про них, такие как $1+1=2$. Но никто никогда не сможет чувствовать, ощущать такую операцию, поскольку не существует ничего такого, как *один* и *два**.

И “синтезированное воображением” — это не только о числах. Геометрические объекты, будь то точка, линия, трёхуго́льник или плоскость, и всевозможные приключения с ними тоже производятся разумом.

§1. Древняя, но интуитивно понятная геометрия

Где-то две тысячи лет свобода мысли человека была ограничена сказочной историей про воображаемые совершенно прямые одномерные линии между какими-нибудь двумя абсолютно безмерными точками и дальше, аж до са́мой ἄπειρο (бесконе́чности) вниз и вверх в обе стороны, про воображаемые и всеце́ло плоские

* Я не про *два яблока* или *два похожих банана* на *па́ру дней*, но про само́ число “два”.

плоскости-трёхточечники, или трёхуго́льники*, с кратчайшими расстояниями между точками по прямы́м линиям, со всегда равными между собою “прямыми” углами, а ещё про многие другие весьма забавные мифические персонажи и пикантные отношения между ними. Бо́лее двух тысяч лет люди были в плену, в рабстве у идеи о существовании только лишь одной ευκλείδειος γεωμετρίας (εὐκλείδ’овой геометрии), а волшебный мир, ею описываемый, уравнивался в прошлом с реальным пространством вокру́г сами́х себя.

Εὐκλείδης Eὐkleídēs Эуклид, ευκλείδειος euclidean (эуклидово)

ευκλείδεια γεωμετρία

the plane geometry, or the two-dimensional euclidean geometry

Στοιχεῖα Stoikheîa Elements, Principles

(1.1) Points

Στοιχεῖα Εὐκλείδου Βιβλίον I	Euclid’s Elements Book I
Ορος α′ (1)	Term α′ (1)
Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.	A point is that which has no part.

This description shows that Euclid imagines a point as an indivisible location, without width, length or breadth.

(1.2) Lines, curved and straight

Στοιχεῖα Εὐκλείδου Βιβλίον I	Euclid’s Elements Book I
Ορος β′ (2)	Term β′ (2)
Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.	A line is breadthless length.

* Несмотря на то, что лишь три угла не определяют треугольник однозначно с точностью до транслирования, зеркалирования и вращения.

“Line” is the second primitive term in the Elements. “Breadthless length” says that a line will have one dimension, length, but it won’t have breadth. The terms “length” and “breadth” are not defined in the Elements.

Linear lines

(1.3) A relation between lines and points

Στοιχεῖα Εὐκλείδου Βιβλίον I	Euclid’s Elements Book I
Ορος γ′ (3) Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.	Term γ′ (3) The ends of a line are points.

This statement doesn’t mention how many ends a line can have.

(1.4) Do straight lines exists?

Гипотеза о существовании прямых линий.

The existænce of Euclidean straight lines in space.

Στοιχεῖα Εὐκλείδου Βιβλίον I	Euclid’s Elements Book I
Ορος δ′ (4) Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ′ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.	Term δ′ (4) A straight line is a line which lies evenly with the points on itself.

Начертить прямую линию рукой абсолютно невозможно.

(1.5) Vectors. Lines and vectors

(1.6) The existænce of vectors. Do vectors exist?

(1.7) Continuity of line

(1.8) A point of reference

(1.9) Translation as the easiest kind of motion. Translations and vectors

(1.10) Straight line and vector

Вектор (геометрический) может быть как прямая линия со стрелкой на одном из её концов. Then it is fully described (characterized) by the magnitude and the direction.

в абстрактной алгебре слово *вектор* — про любой объект, который может быть суммирован с подобными объектами и умножен (scaled) на скаляры, а векторное пространство — синоним линейного пространства. Поэтому я поясняю, что в этой книге *вектор* есть не что иное, как трёхмерный геометрический (Ευκλείδειος, Евклидов, Euclidean) вектор.

Why are vectors always straight (linear)?

(a) Vectors are linear (straight), they cannot be curved.

(b) Vectors are neither straight nor curved. A vector has the magnitude and the direction. A vector is not a line or a curve, albeit it can be represented by a straight line.

Vector can't be thought of as a line.

(1.11) Линия, изображающая реальные числа

often just “числовая прямая”

(1.12) What is a distance?

(1.13) Плоскость и более многомерное пространство

(1.14) Расстояние на плоскости или в более-мерном пространстве

(1.15) What is an angle?

angle ≡ inclination /slope, slant/ of two lines

two lines sharing a common point are usually called intersecting lines

angle ≡ the amount of rotation of line or plane within space

angle ≡ the result of the dot product of two unit vectors gives angle's cosine

(1.16) Дифференциация непрерывного на ма́лые дифференциальные кусочки

ма́лые дифференциальные кусочки

infinitesimal (infinitely small)

Упоминание тензоров может отпугнуть читателя, обычно избегающего ненужных сложностей. Не бойся: тензоры используются просто из-за своего чудесного свойства инвариантности — независимости от системы координат.

§ 2. Вектор

Я предлагаю начать знакомство с тензорами через мемуары о таком феномене как вектор.

- ✓ A *point* has position in space. The only characteristic that distinguishes one point from another is its position.
- ✓ A *vector* has both magnitude and direction, but no specific position in space.

(2.1) Что такое вектор?

What is “linear”?
(1) straight
(2) relating to, resembling, or having a graph that is a straight line

All vectors are linear objects.

Examples of vectors:

- ✓ Сила действует на объект.
- ✓ Скорость объекта описывает происходящее с этим объектом за мгновение.

Умножение вектора на скаляр

Умножение на минус единицу

Принцип Newton’а действия–противодействия “действие равно противодействию по магнитуде и обратно ему по направлению”.

Каждое механическое взаимодействие двух объектов характеризуется двумя силами, которые действуют на оба взаимодействующих объекта. Эти силы могут быть представлены двумя векторами, которые равны по магнитуде и обратны по направлению.

Умножение вектора на отрицательную единицу -1 обращает направление вектора, но но не меняет его магнитуду.

(2.2) The addition and subtraction

The sum (combination) of two or more vectors is the new “resultant” vector. There are two similar methods to calculate the resultant vector geometrically.

“Метод head to tail” involves lining up the head of one vector with the tail of another. Here the resultant goes from the initial point (the “tail”) of the first addend to the end point (the “head”) of the second addend when the tail (the initial point) of the second one coincides with the head (the end point) of the first one.

[.... figure here ....]

“Метод параллелограмма” ...

[.... figure here ....]

The vector addition is commutative

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}.$$

....

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q},$$
$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + \big(-\boldsymbol{q}\big) = \boldsymbol{p} + \big(-1\big)\boldsymbol{q}.$$

For every action, there's an equal (in magnitude) and opposite (in direction) reaction force.

A vector may be also represented as the sum (combination) of some trio of other vectors, called "basis", when the each of the three is scaled by a number (coefficient). Such a representation is called a "linear combination" of basis vectors. A list (array, tuple) of coefficients alone, without basis vectors, is not enough and can't represent a vector.

....

Чтобы получить числовые (со)отношения из векторных, вводится система координат, и на её óси проецируются векторные (со)отношения.

....

У самúх по себе векторов как элементов векторного пространства компонент нет. У вектора появляются компоненты лишь когда выбран определённый базис, тогда любой вектор может быть разложен на компоненты. В разных базисах компоненты одного и того же вектора отличаются друг от друга.

Вот он — вектор, $\boldsymbol{v}$ выглядит подходящим именем для него.

Как и все геометрические векторы, $\boldsymbol{v}$ вполне характеризуется двумя взаимно независимыми свойствами: своей длиной (магнитудой, нормой, модулем) и своим направлением в пространстве. Эта характеристика полная, так что какие-нибудь два вектора с одинаковой магнитудой и одинаковым направлением считаются равными.

Каждый вектор существует объективно сам по себе, независимо от методов и единиц измерения и длин, и направлений, включая любые абстракции таких единиц и методов.

……

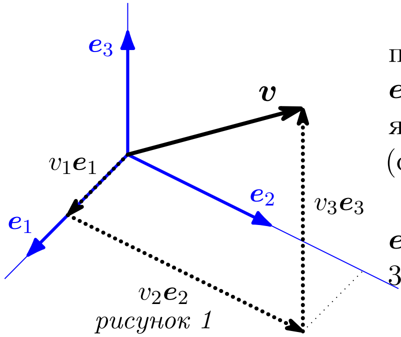


рисунок 1

Выбрав какие-нибудь взаимно перпендикулярные единичные векторы $\boldsymbol{e}_i$ как основу (ба́зис) для измерений, я ввожу прямоугольные (“декартовы (cartesian)”) координаты.

Три ($i = 1, 2, 3$) базисных вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ нужны́ для трёхмерного — 3D — пространства.

В тако́й системе “•”-произведения базисных векторов равны дельте Kronecker’а

$$\boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

для любого ортонормального базиса.

Разлагая вектор $\boldsymbol{v}$ в некотором ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$), получаем коэффициенты v_i — компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ в том базисе (рис. 1)

$$\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2 + v_3 \boldsymbol{e}_3 \equiv \sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i \equiv v_i \boldsymbol{e}_i \,, \;\; v_i = \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{e}_i \,. \tag{2.1}$$

Здесь и далее принимается соглашение о суммировании Einstein’а: повторённый дважды (и не более чем дважды) в одночлене индекс подразумевает суммирование по этому индексу. А неповторяющийся индекс называется “свободным”, и он одинаков в обеих частях равенства. Это примеры:

$$\sigma = \tau_{ii} \,, \;\; p_j = n_i \tau_{ij} \,, \;\; m_i = e_{ijk} x_j f_k \,, \;\; a_i = \lambda b_i + \mu c_i \,.$$

(Равенства же $a = b_{kkk}$, $c = f_i + g_k$, $a_{ij} = k_i \gamma_{ij}$ некорректны.)

Имея компоненты вектора в ортонормальном базисе, длина этого вектора возвращается “равенством Пифагора (Πυϑαγόρας)”

$$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i \bullet v_j \boldsymbol{e}_j = v_i \delta_{ij} v_j = v_i v_i \,, \;\; \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v}} = \sqrt{v_i v_i} \,. \tag{2.2}$$

The magnitude represents the length independent of direction. Направление вектора в пространстве измеряется тремя углами (косинусами углов) между этим вектором и каждым из базисных:

$$\cos\measuredangle\bigl(\boldsymbol{v}\,\widehat{\ }\,\boldsymbol{e}_i\bigr) = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \bullet \boldsymbol{e}_i = \frac{v_i}{\sqrt{v_j v_j}} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{v_i}_{\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{e}_i} = \|\boldsymbol{v}\| \cos\measuredangle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i). \qquad (2.3)$$

Измерение углов. Косинус угла между двумя векторами is the same as the dot product of these vectors if their magnitudes are equal to the one unit of length

When the magnitudes of two vectors are equal to the one unit of length, then the cosine of the least angle between them is the same as the dot product of these vectors. Любой вектор с не-единичной магнитудой (кроме нулевого вектора) может быть "нормализован" делением вектора на его магнитуду.

$$\cos\measuredangle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \bullet \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}\,.$$

To accompany the magnitude, which represents the length independent of direction, there's a way to represent the direction of a vector independent of its length. For this purpose, the unit vectors (the vectors with the magnitude of 1) are used.

A rotation matrix is just a transform that expresses the basis vectors of the input space in a different orientation. The length of the basis vectors will be the same, and the origin will not change. Also, the angle between the basis vectors will not change. All that changes is the relative direction of all of the basis vectors.

Therefore, a rotation matrix is not really just a "rotation" matrix; it is an orientation matrix.

Бывают ещё и псевдовекторы, ждущие читателя ниже в § 7.

Угол между двумя случайными векторами. Согласно (2.3)

$$\cos\measuredangle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_m) = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \bullet \boldsymbol{e}_m = \frac{v_m}{\sqrt{v_j v_j}},$$
$$\cos\measuredangle(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}_n) = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|} \bullet \boldsymbol{e}_n = \frac{w_n}{\sqrt{w_k w_k}}.$$

Длина (2.2) и направление в пространстве (2.3), которые могут быть измерены посредством трио базисных векторов, описывают вектор. И каждый вектор обладает этими свойствами*. Однако, этого ма́ло (“не достаточно” на жаргоне книг по математике).

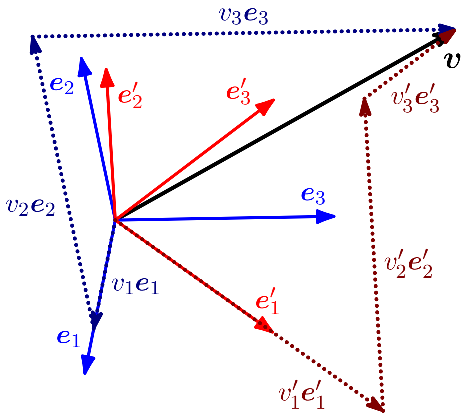


рисунок 2

Вектор ведь не просто совокупность компонент в како́м-то базисе.

Тройка попарно перпендикулярных единичных векторов может только поворачиваться и тем самым она может характеризовать угловую ориентацию других векторов.

Разложение одного и того же вектора $\boldsymbol{v}$ в двух декартовых системах с базисными ортами $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}'_i$ (рис. 2) даёт

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i = v'_i \boldsymbol{e}'_i ,$$

где

$$v_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i = v'_k \boldsymbol{e}'_k \cdot \boldsymbol{e}_i ,$$
$$v'_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}'_i = v_k \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}'_i .$$

Возникшие тут двухиндексные объекты (двумерные массивы) $o_{k'i} \equiv \boldsymbol{e}'_k \cdot \boldsymbol{e}_i$ и $o_{ki'} \equiv \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}'_i$ используются для укорочения формул.

Написа́ть о пассивном повороте, описанном ниже, и об активном повороте из § 12 ....

“•”-произведение (dot product) двух векторов коммутативно — то есть, обмен местами множителей не меняет результат. Так что

$$o_{k'i} = \boldsymbol{e}'_k \cdot \boldsymbol{e}_i = \cos \measuredangle(\boldsymbol{e}'_k , \boldsymbol{e}_i) = \cos \measuredangle(\boldsymbol{e}_i , \boldsymbol{e}'_k) = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_k = o_{ik'} , \quad (2.3a)$$
$$o_{ki'} = \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}'_i = \cos \measuredangle(\boldsymbol{e}_k , \boldsymbol{e}'_i) = \cos \measuredangle(\boldsymbol{e}'_i , \boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_k = o_{i'k} . \quad (2.3b)$$

* И како́е же направление у нуль-вектора (“vanishing)исчезающего вектора”) $\mathbf{0}$ с нулевой длиной $\|\mathbf{0}\| = 0$? (Нулевой вектор без магнитуды кончается точно там же, где он начинается и поэтому он никуда не направлен, его направление *не определено.*)

Строки равенств (2.3a) и (2.3b) взаимно-обратны по умножению

$$o_{k'i}o_{ki'} = o_{ki'}o_{k'i} = 1, \;\; o_{k'i}o_{i'k} = o_{i'k}o_{k'i} = 1.$$

Умножение ортогональной матрицы на компоненты любого вектора сохраняет длину этого вектора:

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} = v'_i v'_i = o_{i'k}v_k o_{i'n}v_n = v_n v_n$$

— этот вывод опирается на (**??**).

Ортогональное преобразование компонент вектора

$$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{e}'_i = v_k \boldsymbol{e}_k \bullet \boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{e}'_i \bullet \boldsymbol{e}_k v_k = o_{i'k}v_k = v'_i \tag{2.4}$$

иногда используется для определения самого́ вектора. Если в каждом ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}_i$ известна тройка чисел v_i, и с вращением базиса как целого он преобразуется согласно (2.4). тогда эта тройка компонент представляет инвариантный объект — вектор $\boldsymbol{v}$.

§ 3. Тензор и его компоненты

Когда в каждом ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}_i$ имеем набор девяти ($3^2 = 9$) чисел B_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), и этот набор преобразуется во время перехода к новому (повёрнутому) ортонормальному базису $\boldsymbol{e}'_i$ как

$$B'_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \bullet \boldsymbol{e}_m B_{mn} \boldsymbol{e}_n \bullet \boldsymbol{e}'_j = \boldsymbol{e}'_i \bullet \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}'_j \bullet \boldsymbol{e}_n B_{mn} = o_{i'm}o_{j'n}B_{mn}, \tag{3.1}$$

тогда этот набор компонент представляет инвариантный объект — тензор ${}^2\boldsymbol{B}$ второй сложности (второй валентности, бивалентный).

Иными словами, тензор ${}^2\boldsymbol{B}$ проявляется в каждом базисе совокупностью своих компонент B_{ij}, меняющейся вместе с базисом согласно (3.1).

Ключевой пример тензора второй сложности — диада. Имея два вектора $\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{b} = b_i \boldsymbol{e}_i$, в каждом базисе $\boldsymbol{e}_i$ поло́жим $d_{ij} \equiv a_i b_j$. Легко увидеть как компоненты d_{ij} преобразуются согласно (3.1):

$$a'_i = o_{i'm} a_m, \; b'_j = o_{j'n} b_n \;\Rightarrow\; d'_{ij} = a'_i b'_j = o_{i'm} a_m o_{j'n} b_n = o_{i'm} o_{j'n} d_{mn}.$$

Получающийся тензор ${}^2\boldsymbol{d}$ называется диадным произведением (dyadic product) или просто диадой (dyad) и пишется как $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{ab}$. Я выбираю запись “${}^2\boldsymbol{d} = \boldsymbol{ab}$”, без символа $\otimes$.

Когда какой-то бивалентный тензор ${}^2\boldsymbol{B}$ — диада $\boldsymbol{\beta b}$, его компоненты $B_{ij} = \beta_i b_j$ удовлетворяют равенству $B_{pq} B_{mn} = B_{mq} B_{pn}$, чтобы получить коммутативность умножения $\beta_p b_q \beta_m b_n = \beta_m b_q \beta_p b_n$. Здесь $p \neq m$, а ина́че равенство стано́вится то́ждеством.

Существенным экземпляром двухвалентного тензора является единичный тензор (другие именования — единичная диада, тождественный тензор и метрический тензор). Пусть для любого отронормального (декартова, cartesian) базиса $E_{ij} \equiv \boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$. Это действительно компоненты тензора, (3.1) актуально: $E'_{mn} = o_{m'i} o_{n'j} E_{ij} = o_{m'i} o_{n'i} = \delta_{mn}$. Я пишу этот тензор как $\boldsymbol{E}$ (другие популярные альтернативы — $\boldsymbol{I}$ и ${}^2\mathbf{1}$).

Неизменяемость компонент при любом повороте делает тензор $\boldsymbol{E}$ изотропным. Ненулевых (неисчезающих) изотропных векторов не бывает (все компоненты нулевого, или “исчезающего”, вектора $\mathbf{0}$ равны нулю в любом базисе).

Следующий пример относится к линейному преобразованию (линейному отображению) векторов.

Если $\boldsymbol{b} = b_i \boldsymbol{e}_i$ есть линейная (сохраняющая сложение и умножение на число) функция от $\boldsymbol{a} = a_j \boldsymbol{e}_j$, то $b_i = c_{ij} a_j$ в каждом базисе. Коэффициенты преобразования c_{ij} меняются, когда базис вращается:

$$b'_i = c'_{ij} a'_j = o_{i'k} b_k = o_{i'k} c_{kn} a_n, \; a_n = o_{j'n} a'_j \;\Rightarrow\; c'_{ij} = o_{i'k} o_{j'n} c_{kn}.$$

Оказывается, множество двухиндексных объектов c_{ij}, c'_{ij}, ..., описывающих одно и то же линейное отображение $\boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{b}$, но в разных базисах, представляет один инвариантный объект —

тензор второй сложности ${}^2\boldsymbol{c}$. И многие авторы книг вводят тензоры таким путём, посредством линейных отображений (линейных преобразований).

И последний пример — билинейная форма $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = f_{ij}\, a_i b_j$, где f_{ij} — коэффициенты, a_i и b_j — компоненты векторных аргументов $\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{b} = b_j \boldsymbol{e}_j$. Результат F инвариантен (независим от базиса) с преобразованием (3.1) для коэффициентов f_{ij}:

$$F' = f'_{ij}\, a'_i b'_j = f_{mn} \underbrace{a_m}_{o_{i'm} a'_i} \underbrace{b_n}_{o_{j'n} b'_j} = F \;\Leftrightarrow\; f'_{ij} = o_{i'm} o_{j'n} f_{mn}.$$

Если $f_{ij} = \delta_{ij}$, то $F = \delta_{ij}\, a_i b_j = a_i b_i$ — “$\bullet$”-произведение (dot product, скалярное произведение) двух векторов. Когда оба агрумента одинаковые, такой однородный многочлен (полином) второй степени (квадратный) от компонент одного вектора $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = f_{ij}\, a_i a_j$ называется квадратичной формой.

Теперь о более сложных тензорах (валентности больше двух). Тензор третьей сложности ${}^3\boldsymbol{C}$ представляется совокупностью $3^3 = 27$ чисел C_{ijk}, меняющихся с поворотом базиса как

$$C'_{ijk} = \boldsymbol{e}'_i \bullet \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}'_j \bullet \boldsymbol{e}_q \boldsymbol{e}'_k \bullet \boldsymbol{e}_r C_{pqr} = o_{i'p} o_{j'q} o_{k'r} C_{pqr}. \tag{3.2}$$

Первичный пример — триада от трёх векторов $\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b} = b_j \boldsymbol{e}_j$ и $\boldsymbol{c} = c_k \boldsymbol{e}_k$

$$t_{ijk} \equiv a_i b_j c_k \;\Leftrightarrow\; {}^3\boldsymbol{t} = \boldsymbol{abc}.$$

Видно, что ортогональные преобразования (3.2) и (3.1) — результаты “повторения” векторного (2.4). Читатель легко составит преобразование компонент для тензора любой сложности и напишет соответствующую полиаду как пример.

Векторы с пребразованием (2.4) это тензоры первой сложности (моновалентные тензоры).

Наименее сложные объекты — скаляры или тензоры нулевой сложности. Скаляр это одно ($3^0 = 1$) число, которое не зависит от базиса: энергия, масса, температура и др. Но что такое компоненты, к примеру, вектора $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i$, $v_i = \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{e}_i$? Если не скаляры, то что? Здесь не может быть простого ответа. В каждом отдельном базисе, $\boldsymbol{e}_i$ — векторы и v_i — скаляры.

§ 4. Тензорная алгебра, или операции с тензорами

Целая тензорная алгебра может быть построена на только лишь пятёрке* операций (или действий). Этот раздел — как раз про них.

Равенство

Первое (или нулевое) это **равенство** “=”. Эта операция показывает, равен ли один тензор “слева” другому тензору “справа”. Тензоры могут быть равны лишь тогда, когда их сложности (валентности) одинаковы. Тензоры разных валентностей не могут быть равны́ или не равны́.

$$..... \tag{4.1}$$

....

Линейная комбинация

Следующая операция это **линейная комбинация**. Оно объединяет сложение и умножение на число (на скаляр, или, другим словом, шкалирование, scaling). Аргументы этой операции и результат — одинаковой сложности. Для пары тензоров

$$\lambda a_{ij\ldots} + \mu b_{ij\ldots} = c_{ij\ldots} \;\Leftrightarrow\; \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}. \tag{4.2}$$

Здесь λ и μ — коэффициенты-скаляры; $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — тензоры одной и той же сложности. Легко показать, что компоненты результата $\boldsymbol{c}$ удовлетворяют ортогональному преобразованию типа (3.1).

Разложение вектора по какому-либо базису, то есть представление вектора суммой $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i$, есть не что иное как линейная комбинация векторов базиса $\boldsymbol{e}_i$ с коэффициентами v_i.

* Четвёрке без равенства.

Эта операция *линейная*, потому что только два атомарных вида движения возможны на линии: трансляция (движение вдоль прямой линии) и зеркальное отображение (движение в обратную сторону).

Умножение тензоров

Ещё одна операция — **умножение (тензорное произведение, прямое произведение)**. Оно принимает аргументы любых сложностей, возвращая результат суммарной сложности. Примеры:

$$\begin{aligned} v_i a_{jk} = C_{ijk} \;&\Leftrightarrow\; \boldsymbol{v}\,{}^2\!\boldsymbol{a} = {}^3\boldsymbol{C}, \\ a_{ij} B_{abc} = D_{ijabc} \;&\Leftrightarrow\; {}^2\boldsymbol{a}\,{}^3\boldsymbol{B} = {}^5\boldsymbol{D}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Преобразование совокупности компонент результата, такой как $C_{ijk} = v_i a_{jk}$, при повороте базиса — ортогональное, подобное (3.2), поэтому тут нет сомнений, что такая совокупность это набор компонент тензора.

Первичный и уже́ знакомый (по § 3) подвид умножения — диадное произведение двух векторов ${}^2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{bc}$.

Свёртка

Четвёртая (или третья) операция называется **свёрткой (contraction)**. Оно применяется к бивалентным и более сложным тензорам. Это действие над одним тензором, без других "участников". Грубо говоря, свёртывание тензора есть суммирование его компонент по какой-либо паре индексов. В результате сложность тензора уменьшается на два.

Для трёхвалентного тензора ${}^3\boldsymbol{D}$ возможны три свёртки. Они дают векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ с компонентами

$$a_i = D_{kki}\,, \quad b_i = D_{kik}\,, \quad c_i = D_{ikk}\,. \tag{4.4}$$

Поворот базиса

$$a'_i = D'_{kki} = \underbrace{o_{k'p}\,o_{k'q}}_{\delta_{pq}} o_{i'r} D_{pqr} = o_{i'r} D_{ppr} = o_{i'r}\, a_r$$

показывает "тензорную природу" как результат свёртки.

Для тензора второй сложности возможен лишь один вариант свёртки. дающий скаляр, известный как след (trace)

$$\boldsymbol{B}_{\bullet} \equiv \operatorname{trace} \boldsymbol{B} \equiv \mathrm{I}(\boldsymbol{B}) = B_{kk}.$$

След единичного тензора (“свёртка дельты Kronecker’a”) равен размерности пространства

$$\operatorname{trace} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\bullet} = \delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

Жонглирование индексами, транспонирование

Последняя операция применима к одному тензору второй и бóльших сложностей. Оно именуется как **перестановка индексов (index swap), жонглирование индексами (index juggling), транспонирование (transposing)**. Из компонент тензора возникает новая совокупность с другой последовательностью индексов, сложность результата остаётся той же. Для примера, трёхвалентный тензор ${}^3\boldsymbol{D}$ может дать тензоры ${}^3\boldsymbol{A}$, ${}^3\boldsymbol{B}$, ${}^3\boldsymbol{C}$ с компонентами

$$\begin{aligned} {}^3\boldsymbol{A} &= {}^3\boldsymbol{D}_{1\rightleftarrows 2} \;\Leftrightarrow\; A_{ijk} = D_{jik}, \\ {}^3\boldsymbol{B} &= {}^3\boldsymbol{D}_{1\rightleftarrows 3} \;\Leftrightarrow\; B_{ijk} = D_{kji}, \\ {}^3\boldsymbol{C} &= {}^3\boldsymbol{D}_{2\rightleftarrows 3} \;\Leftrightarrow\; C_{ijk} = D_{ikj}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Для бивалентного тензора возможно лишь одно транспонирование: $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \equiv \boldsymbol{A}_{1\rightleftarrows 2} = \boldsymbol{B} \;\Leftrightarrow\; B_{ij} = A_{ji}$. Очевидно, $\left(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{A}$.

Для диадного умножения двух векторов, $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}^{\mathsf{T}}$.

Комбинирование операций

Четыре представленных операции (действия) могут быть скомбинированы в разных последовательностях.

Комбинация умножения (4.3) и свёртки (4.4) — “•”-произведение (dot product) — самая часто используемая. В прямой безиндексной записи это обозначается крупной точкой “•”, которая показывает свёртку по соседним индексам:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{c} \;\Leftrightarrow\; a_i = B_{ij} c_j, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \;\Leftrightarrow\; A_{ij} = B_{ik} C_{kj}. \tag{4.6}$$

Определяющее свойство единичного тензора — это нейтральный элемент для диадного произведения с последующей свёрткой по соседним индексам ("$\bullet$"-произведения)

$$^{\mathrm{n}}\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \bullet {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{a} = {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{a} \quad \forall\, {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{a} \;\; \forall \mathrm{n} > 0. \tag{4.7}$$

В коммутативном скалярном произведении двух векторов точка представляет то же самое: диадное произведение и последующая свёртка

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})_{\bullet} = a_i b_i = b_i a_i = (\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})_{\bullet} = \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{a}. \tag{4.8}$$

Следующее тождество описывает как обменять местами множители для "$\bullet$"-произведения (dot product'а) двух тензоров второй сложности

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{Q} &= \big(\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}} \bullet \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\big)^{\mathsf{T}} \\ \big(\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{Q}\big)^{\mathsf{T}} &= \boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}} \bullet \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Для двух диад $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{b}\boldsymbol{d} \bullet \boldsymbol{p}\boldsymbol{q})^{\mathsf{T}} &= \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{\mathsf{T}} \bullet \boldsymbol{b}\boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} \\ d_i p_i\, \boldsymbol{b}\boldsymbol{q}^{\mathsf{T}} &= \boldsymbol{q}\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{d}\boldsymbol{b} \\ d_i p_i\, \boldsymbol{q}\boldsymbol{b} &= p_i d_i\, \boldsymbol{q}\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

Для вектора и бивалентного тензора

$$\boldsymbol{c} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}} \bullet \boldsymbol{c}, \;\; \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \bullet \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}. \tag{4.10}$$

Свёртка может повторяться два раза или больше: $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})_{\bullet} = \boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{B} = A_{ij} B_{ji}$, и вот полезные равенства для тензоров второй сложности

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot\cdot \boldsymbol{A}, \;\; \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{b}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{d} \cdot\cdot \boldsymbol{A} = b_j d_i A_{ij}\,, \\
\boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \cdot\cdot \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}} = A_{ij} B_{ji}\,, \;\; \boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \cdot\cdot \boldsymbol{B} = A_{ij} B_{ij}\,, \\
\boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot\cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\bullet} = A_{jj}\,, \\
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot\cdot \boldsymbol{E} = A_{ij} B_{jk} \delta_{ki} = \boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{B}, \;\; \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{A}, \\
\boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot\cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_{ij} B_{jk} C_{ki}\,, \\
\boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot\cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{D} = \\
= \boldsymbol{D} \cdot\cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} = A_{ij} B_{jk} C_{kh} D_{hi}\,.
\end{gathered}
\tag{4.11}
$$

§ 5. Полиадное представление (разложение)

Ранее в § 3 тензор был представлен как некий инвариантный объект, проявляющий себя в каждом базисе совокупностью чисел (компонент). Такое представление типично для большинства книг о тензорах. Индексная запись может быть удобна, особенно когда используются только прямоугольные координаты, но очень часто это не так. И подходящий случай — физика упругих континуумов: ей нужен более изящный, более мощный и совершенный аппарат прямого тензорного исчисления, оперирующий с безындексными инвариантными объектами.

Линейная комбинация $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i$ из разложения (2.1) соединяет вектор $\boldsymbol{v}$ с базисом $\boldsymbol{e}_i$ и компонентами v_i вектора в том базисе. Вскоре мы получим похожее соотношение для тензора любой сложности.

Любой бивалентный тензор ${}^2\boldsymbol{B}$ имеет девять компонент B_{ij} в каждом базисе. Число различных диад $\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$ для одного и того же базиса — тоже девять (3^2). Линейное комбинирование этих диад с коэффициентами B_{ij} даёт сумму $B_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$. Это тензор, но каковы́ его компоненты, и как это представление или не меняется с поворотом базиса?

Компоненты построенной суммы

$$\big(B_{ij}\,\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\big)_{pq} = B_{ij}\,\delta_{ip}\delta_{jq} = B_{pq}$$

суть компоненты тензора ${}^2\!\boldsymbol{B}$. И с поворотом базиса

$$B'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j = o_{i'p}o_{j'q}B_{pq}o_{i'n}\boldsymbol{e}_n o_{j'm}\boldsymbol{e}_m = \delta_{pn}\delta_{qm}B_{pq}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_m = B_{pq}\boldsymbol{e}_p\boldsymbol{e}_q.$$

Сомнения отпали: тензор второй сложности может быть представлен как линейная комбинация

$$ {}^2\!\boldsymbol{B} = B_{ij}\,\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{5.1}$$

— диадное разложение бивалентного тензора.

Для единичного тензора

$$\boldsymbol{E} = E_{ij}\,\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}\,\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3,$$

вот почему $\boldsymbol{E}$ называется единичной диадой.

Полиадные представления типа (5.1) помогают оперировать с тензорами намного проще:

$$\boldsymbol{v} \cdot {}^2\!\boldsymbol{B} = v_i\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j B_{jk}\boldsymbol{e}_k = v_i\delta_{ij}B_{jk}\boldsymbol{e}_k = v_iB_{ik}\boldsymbol{e}_k,$$

$$\boldsymbol{e}_i \cdot {}^2\!\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \cdot B_{pq}\boldsymbol{e}_p\boldsymbol{e}_q \cdot \boldsymbol{e}_j = B_{pq}\delta_{ip}\delta_{qj} = B_{ij} = {}^2\!\boldsymbol{B} \cdot\cdot\, \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i. \tag{5.2}$$

§ 6. Матрицы, перестановки и определители

Матрицы это удобный инструмент для решения систем линейных уравнений и для упорядочивания элементов. У любой матрицы одно и то же число элементов в каждой строке и одно и то же число элементов в каждом столбце.

Тебе нужны двумерные массивы? Матрицы могут быть представлены как таблицы, полные строк и столбцов.

Ты хочешь прямоугольное упорядочивание твоих элементов? Матрицы полны́ чисел и выражений в строках и столбцах.

Ты знаешь, что матрицы иногда называют массивами?

Размерности матрицы

Матрицы бывают всех размеров, которые и есть размерности.

Размерность матрицы состоит из числа́ строк, затем знака умножения (“×” используется чаще всего) а затем числа́ столбцов. Примеры.

$$\underset{3\times 3}{[\mathcal{A}]} = ...$$

Matrix [A] is a 3×3 matrix, because it has 3 rows and 3 columns. Matrix [B] has 2 rows and 4 columns, so its dimension is 2×4. Matrix [C] is a column matrix (that is a matrix with just one column), and its dimension is 3×1. And [D] is a row matrix with dimension 1×6.

Матричная алгебра

Матричная алгебра включает линейные операции — сложение матриц и умножение на скаляр.

Размерность матрицы существенна для бинарных операций, то есть для операций с участием двух матриц.

Сложение или вычитание двух матриц возможно только если они имеют те же размеры.

(6.1) Умножение матриц

....

$$\underset{m\times n}{[\mathcal{A}]} = \dots$$

Матрица результата, известная как “матричное произведение”, имеет число строк первой матрицы-сомножителя и число столбцов второй матрицы.

....

Квадратные матрицы

....

Два индекса таблицы — больше, чем единственный индекс одномерного массива. Из-за этого одномерный массив может быть представлен как таблица строк или как таблица столбцов.

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \end{bmatrix},$$

либо вертикальные таблицы

$$\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}.$$

$\det\limits_{i,j} \delta_{ij} = 1$

...

символы чётности перестановки через детерминант

$$e_{pqr} = e_{ijk}\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{rk} = e_{ijk}\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr}\,,$$

$$e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

...

Определитель не чувствителен к транспонированию:

$$\det_{i,j} A_{ij} = \det_{i,j} A_{ji} = \det_{j,i} A_{ij}\,.$$

...

“Определитель матричного произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц”

$$\det_{i,k} B_{ik} \det_{k,j} C_{kj} = \det_{i,j} B_{ik} C_{kj} \tag{6.2}$$

$$e_{fgh} \det_{m,n} B_{ms} C_{sn} = e_{pqr} B_{fi} C_{ip} B_{gj} C_{jq} B_{hk} C_{kr}$$

$$e_{fgh} \det_{m,s} B_{ms} = e_{ijk} B_{fi} B_{gj} B_{hk}$$

$$e_{ijk} \det_{s,n} C_{sn} = e_{pqr} C_{ip} C_{jq} C_{kr}$$

$$e_{fgh}\, e_{ijk} \det_{m,s} B_{ms} \det_{s,n} C_{sn} = e_{ijk}\, e_{pqr} B_{fi} B_{gj} B_{hk} C_{ip} C_{jq} C_{kr}$$

...

Определитель компонент бивалентного тензора инвариантен, он не меняется с поворотом базиса

$$A'_{ij} = o_{i'm} o_{j'n} A_{mn}$$

§ 7. Векторное произведение

По привычным представлениям, “×”-произведение (“cross product”, “векторное произведение”, иногда “oriented area product”) двух векторов есть вектор, направленный перпендикулярно плоскости сомножителей, длина которого равна пло́щади параллелограмма, охватываемого сомножителями

$$\|\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \,\| = \|\boldsymbol{a}\|\, \|\boldsymbol{b}\| \sin \measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Однако, “×”-произведение — не вполне́ вектор, поскольку оно не полностью инвариантно.

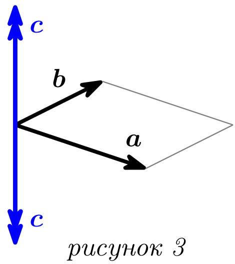


рисунок 3

Сомножители “×”-произведения $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ определяют направление результата в пространстве, с точностью до знака рис. 3.

Как только ты выбираешь как положительное “ правосторонною ” или “ левосторонною ” ориентацию пространства, одно направление из двух возможных, тогда результаты “× ”-произведений становятся полностью определёнными.

“Хиральный” значит ассиметричный таким путём, что вещица и её зеркальный образ не совмещаются, a picture cannot be superposed on its mirror image by any combination of rotations and translations.

Объект хирален, если он отличи́м от своего зеркального образа.

Векторы обычно измеряются, используя какой-нибудь базис $\boldsymbol{e}_i$. Они раскладываются на линейные комбинации вида $\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i$. Так что ориентация пространства эквивалентна ориентации последовательной тройки базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Это означает, что последовательность базисных векторов становится значимой (для линейных комбинаций последовательность слагаемых ни на что не влияет).

Если два базиса состоят из разных последовательностей одних и тех же векторов, то ориентации этих базисов отличаются некоторой перестановкой.

Ориентация пространства есть (нечто вроде) асимметрии. Эта асимметрия делает невозможным повторение зеркалирования посредством любых вращений*

Псевдовектор это похожий на вектор объект, инвариантный при любом повороте. **.

... put the figure here ...

* Применяя лишь повороты, невозможно заменить левую руку на правую руку. Но это возможно зеркалированием.

** Повороты не могут поменять ориентацию тройки векторов базиса, это возможно лишь через зеркалирование.

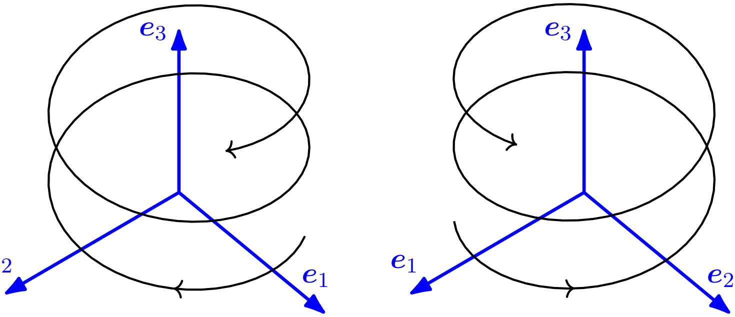


рисунок 4

Кроме редких случаев, зеркалирование изменяет направление полностью инвариантного (полярного) вектора.

Псевдовектор (аксиальный вектор), в отличие от полярного вектора, не меняет компоненту, ту что перпендикулярна плоскости зеркалирования, и оказывается перевёрнутым относительно полярных векторов и геометрии всего пространства. Это случается из-за того, что знак (и, соответственно, направление) каждого аксиального вектора меняется вместе с изменением знака “×”-произведения — что соответствует зеркалированию.

Инаковость псевдовекторов сужает разнообразие формул: псевдовектор не складывается с вектором. Формула $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ из кинематики абсолютно жёсткого недеформируемого тела корректна, поскольку $\boldsymbol{\omega}$ там — псевдовектор, и с векторным произведением два “псевдо” дают $(-1)^2 = 1$, взаимно компенсируя друг друга.

Тензор чётности перестановок это объёмометрический тензор третьей сложности

$$ {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} = \in_{[ijk]} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \, , \;\; \in_{[ijk]} \equiv \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \bullet \boldsymbol{e}_k \tag{7.1} $$

с компонентами $\in_{[ijk]}$, равными “тройным” (“смешанным”, “векторно-скалярным”) произведениям базисных векторов.

Абсолютная величина (модуль) всякой ненулевой компоненты ${}^3\!\boldsymbol{\epsilon}$ равна объёму $\sqrt{g}$ параллелепипеда, натянутого на базис. Для базиса $\boldsymbol{e}_i$ попарно перпендикулярных векторов единичной длины $\sqrt{g} = 1$.

Тензор ${}^3\boldsymbol{\epsilon}$ изотропен, его компоненты постоянны и независимы от любого поворота базиса. Но зеркалирование — изменение ориентации тройки базисных векторов (перемена “направления винта”) — меняет знак ${}^3\boldsymbol{\epsilon}$, так что это псевдотензор (аксиальный тензор).

Если $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$ без знака “минус”, то базисная тройка $\boldsymbol{e}_i$ ориентирована положительно. Положительная ориентация (или “положительное направление”) выбирается по разным соображениям из двух возможных (рис. 3). Для положительно ориентированной базисной тройки компоненты ${}^3\boldsymbol{\epsilon}$ равны́ символу чётности перестановок $\in_{[ijk]} = e_{ijk}$. Когда же $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_3$, тогда базисная тройка $\boldsymbol{e}_i$ ориентирована отрицательно, или “зеркально”. Для зеркальных троек $\in_{[ijk]} = -e_{ijk}$ (а $e_{ijk} = -\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{e}_k$).

С тензором Ле́ви-Чиви́ты ${}^3\boldsymbol{\epsilon}$ возможно по-новому взглянуть на векторное произведение:

$$\in_{[ijk]} = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{e}_k \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \in_{[ijk]} \boldsymbol{e}_k\,,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_i\boldsymbol{e}_i \times b_j\boldsymbol{e}_j = a_i b_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = a_i b_j \in_{[ijk]} \boldsymbol{e}_k = \\ = b_j a_i \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{\cdot\cdot} \in_{[mnk]} \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \boldsymbol{\cdot\cdot} {}^3\boldsymbol{\epsilon}, \\ = a_i \in_{[ijk]} \boldsymbol{e}_k b_j = -a_i \in_{[ikj]} \boldsymbol{e}_k b_j = -\boldsymbol{a} \boldsymbol{\cdot} {}^3\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{b}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Так что, векторное произведение не есть ещё одно новое, полностью отдельное действие. С тензором Levi-Civita’ы оно сводится к четырём уже описанным (§ 4) и приме́нимо к тензорам любой сложности.

“Векторное произведение” это всего лишь dot product — комбинация умножения и свёртки (§ 4) — с участием тензора ${}^3\boldsymbol{\epsilon}$. Такие комбинации возможны с любыми тензорами:

$$\boldsymbol{a} \times {}^2\boldsymbol{B} = a_i\boldsymbol{e}_i \times B_{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k = a_i B_{jk} \in_{[ijn]} \boldsymbol{e}_n \boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{a} \boldsymbol{\cdot} {}^3\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\cdot} {}^2\boldsymbol{B},$$

$${}^2\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{d}\boldsymbol{b} = C_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \times d_p b_q \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_q = \boldsymbol{e}_i C_{ij} d_p \in_{[jpk]} \boldsymbol{e}_k b_q \boldsymbol{e}_q =$$

$$= -{}^2\boldsymbol{C}\boldsymbol{d} \boldsymbol{\cdot\cdot} {}^3\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{b} = -{}^2\boldsymbol{C} \boldsymbol{\cdot} {}^3\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{d}\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_j = \underbrace{- \in_{[ijk]} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k}_{+\in_{[ijk]} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_j} = - {}^3\!\boldsymbol{\epsilon}. \tag{7.3}$$

Последнее равенство связывает изотропные тензоры второй и третьей сложностей.

Обобщая на все тензоры ненулевой сложности

$$ {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} \times {}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{\zeta} = - {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} \cdot {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} \cdot {}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{\zeta} \quad \forall\, {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi}, {}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{\zeta} \;\; \forall n > 0,\, m > 0. \tag{7.4}$$

Когда один из операндов — единичный (метрический) тензор, из (7.4) и (4.7) $\forall\, {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\Upsilon}\ \forall\, \mathrm{n} > 0$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} \times {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\Upsilon} &= - \boldsymbol{E} \cdot {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} \cdot {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\Upsilon} = - {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} \cdot {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\Upsilon}, \\ {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\Upsilon} \times \boldsymbol{E} &= - {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{E} = - {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\!\boldsymbol{\epsilon}. \end{aligned}$$

Векторное произведение двух векторов не коммутативно, но антикоммутативно:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{b} = - \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \cdot\cdot\, {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} = - {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} \cdot\cdot\, \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{a} = - \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \cdot\cdot\, {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} = - {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} \cdot\cdot\, \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = - \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \cdot\cdot\, {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \cdot\cdot\, {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}. \end{gathered} \tag{7.5}$$

Для любого бивалентного тензора ${}^2\boldsymbol{B}$ и тензора первой сложности (вектора) $\boldsymbol{a}$

$$ {}^2\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_i B_{ij} \boldsymbol{e}_j \times a_k \boldsymbol{e}_k = \big(- a_k \boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_j B_{ij} \boldsymbol{e}_i \big)^{\mathsf{T}} = - \big(\boldsymbol{a} \times {}^2\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}} \big)^{\mathsf{T}}.$$

Однако, в частном случае единичного тензора $\boldsymbol{E}$ и вектора

$$\begin{gathered} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a} = - \big(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \big)^{\mathsf{T}} = - \big(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E} \big)^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E} = - \boldsymbol{a} \cdot {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} = - {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{a}. \end{gathered} \tag{7.6}$$

Справедливо такое соотношение

$-a_i \in_{[inj]} B_{jk}$

$$e_{ijk} e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

$-\in_{[pjk]} = -\in_{[jkp]}$

○ Доказательство начнём с представления символов чётности перестановки как определителей (6.1). $e_{ijk} = \pm\, \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k$ по строкам, $e_{pqr} = \pm\, \boldsymbol{e}_p \times \boldsymbol{e}_q \cdot \boldsymbol{e}_r$ по столбцам, с "$-$" для "левой" тройки

$$e_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix}, \;\; e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{q1} & \delta_{r1} \\ \delta_{p2} & \delta_{q2} & \delta_{r2} \\ \delta_{p3} & \delta_{q3} & \delta_{r3} \end{bmatrix}.$$

Левая часть (7.7) есть произведение $e_{ijk} e_{pqr}$ этих определителей. Но $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ — определитель произведения матриц равен произведению определителей (6.2). В матрице-произведении элемент $[\cdots]_{11}$ равен $\delta_{is}\delta_{ps} = \delta_{ip}$, как и в (7.7); легко проверить и другие фрагменты. ●

Свёртка (7.7) приводит к полезным формулам

$$e_{ijk} e_{pqk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{kp} + \delta_{ik}\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{kp} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jk}\delta_{kq} =$$

$$= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} + \delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} =$$

$$= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\,,$$

$$e_{ijk} e_{pjk} = \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}\,,$$

$$e_{ijk} e_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6\,.$$

Или ко́ротко

$$e_{ijk} e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\,, \;\; e_{ijk} e_{pjk} = 2\delta_{ip}\,, \;\; e_{ijk} e_{ijk} = 6\,. \tag{7.8}$$

Первая из этих формул даёт представление двойного векторного произведения

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = a_i \boldsymbol{e}_i \times \in_{[pqj]} b_p c_q \boldsymbol{e}_j = \in_{[kij]} \in_{[pqj]} a_i b_p c_q \boldsymbol{e}_k =$$

$$= (\delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip})\, a_i b_p c_q \boldsymbol{e}_k = a_i b_k c_i \boldsymbol{e}_k - a_i b_i c_k \boldsymbol{e}_k =$$

$$= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \big(\boldsymbol{c}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\big) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}\,. \tag{7.9}$$

По другой интерпретации, dot product диады и вектора не коммутативен: $\boldsymbol{bd} \bullet \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{c} \bullet \boldsymbol{bd}$, и эта разница может быть выражена как

$$\boldsymbol{bd} \bullet \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c} \bullet \boldsymbol{bd} = \boldsymbol{c} \times \big(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}\big). \qquad (7.10)$$

$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{bc} = \boldsymbol{cb} \bullet \boldsymbol{a} = \boldsymbol{ca} \bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{ac}$

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$

Тем же путём выводится

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \big(\boldsymbol{ba} - \boldsymbol{ab}\big) \bullet \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ba} \bullet \boldsymbol{c} - \boldsymbol{ab} \bullet \boldsymbol{c}. \qquad (7.11)$$

И следующие тождества для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned} \big(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\big) \times \boldsymbol{E} &= \in_{[ijk]} a_i b_j \boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_n \boldsymbol{e}_n = a_i b_j \in_{[ijk]} \in_{[knq]} \boldsymbol{e}_q \boldsymbol{e}_n = \\ &= a_i b_j \big(\delta_{in}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jn}\big) \boldsymbol{e}_q \boldsymbol{e}_n = a_i b_j \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i - a_i b_j \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \\ &= \boldsymbol{ba} - \boldsymbol{ab}, \end{aligned} \qquad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \big(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E}\big) \bullet \big(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{E}\big) &= \big(\boldsymbol{a} \bullet {}^3\!\boldsymbol{\epsilon}\big) \bullet \big(\boldsymbol{b} \bullet {}^3\!\boldsymbol{\epsilon}\big) = \\ &= a_i \in_{[ipn]} \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_n \bullet b_j \in_{[jsk]} \boldsymbol{e}_s \boldsymbol{e}_k = a_i b_j \in_{[ipn]} \in_{[nkj]} \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_k = \\ &= a_i b_j \big(\delta_{ik}\delta_{pj} - \delta_{ij}\delta_{pk}\big) \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_k = a_i b_j \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i - a_i b_i \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k = \\ &= \boldsymbol{ba} - \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}\boldsymbol{E}. \end{aligned} \qquad (7.13)$$

Наконец, ещё одно соотношение между изотропными тензорами второй и третьей сложностей:

$${}^3\!\boldsymbol{\epsilon} \bullet\bullet {}^3\!\boldsymbol{\epsilon} = \in_{[ijk]} \boldsymbol{e}_i \in_{[kjn]} \boldsymbol{e}_n = -2\,\delta_{in} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_n = -2\boldsymbol{E}. \qquad (7.14)$$

§ 8. Симметричные и антисимметричные тензоры

Тензор, который не изменяется при перестановке какой-либо пары своих индексов, называется симметричным для той пары индексов. А если тензор меняет знак $(+/-)$*при перестановке

* $\cdot\,(-1)$

какой-нибудь пары индексов, то он называется антисимметричным или кососимметричным для той пары индексов.

Тензор чётности перестановок ${}^3\boldsymbol{\epsilon}$ антисимметричен по любой паре индексов, он полностью (соверше́нно, абсолютно) антисимметричен (кососимметричен).

Тензор второй сложности $\boldsymbol{B}$ симметричен, если $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$. Когда транспонирование меняет знак тензора $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{A}$, тогда он антисимметричен (кососимметричен).

$$\begin{gathered}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{\mathsf{S}} + \boldsymbol{C}^{\mathsf{A}},\ \boldsymbol{C}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathsf{S}} - \boldsymbol{C}^{\mathsf{A}}; \\ \boldsymbol{C}^{\mathsf{S}} \equiv \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\right),\ \boldsymbol{C}^{\mathsf{A}} \equiv \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\right).\end{gathered} \tag{8.1}$$

Для диады $\boldsymbol{cd} = \boldsymbol{cd}^{\mathsf{S}} + \boldsymbol{cd}^{\mathsf{A}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{cd} + \boldsymbol{dc}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{cd} - \boldsymbol{dc})$.

Произведение двух симметричных тензоров $\boldsymbol{C}^{\mathsf{S}} \cdot \boldsymbol{D}^{\mathsf{S}}$ симметрично далеко не всегда, а лишь когда $\boldsymbol{D}^{\mathsf{S}} \cdot \boldsymbol{C}^{\mathsf{S}} = \boldsymbol{C}^{\mathsf{S}} \cdot \boldsymbol{D}^{\mathsf{S}}$, ведь по (4.9) $\left(\boldsymbol{C}^{\mathsf{S}} \cdot \boldsymbol{D}^{\mathsf{S}}\right)^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{D}^{\mathsf{S}} \cdot \boldsymbol{C}^{\mathsf{S}}$.

В нечётномерных пространствах любой антисимметричный тензор второй сложности необрати́м, определитель матрицы компонент для него — нулевой.

Существует взаимно-однозначное соответствие между антисимметричными тензорами второй сложности и (псевдо)векторами. Компоненты кососимметричного тензора полностью определяются тройкой чисел (диагональные элементы матрицы компонент — нули, недиагональные — попарно противоположны). Dot product кососимметричного $\boldsymbol{A}$ и какого-нибудь тензора ${}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi}$ однозначно соответствует cross product'у псевдовектора $\boldsymbol{a}$ и того же тензора ${}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi}$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A} \cdot {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a} \times {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b} \ \ \forall \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{A}} \ \ \forall\, {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} \ \ \forall\, \mathrm{n} > 0, \\ \boldsymbol{d} = {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{A} \ \Leftrightarrow\ {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} \ \ \forall \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{A}} \ \ \forall\, {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} \ \ \forall\, \mathrm{n} > 0.\end{gathered} \tag{8.2}$$

Раскроем это соответствие $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cdot {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} \;&=\; \boldsymbol{a} \times {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} \\
A_{hi}\boldsymbol{e}_h\boldsymbol{e}_i \cdot \xi_{jk\dots q}\,\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k \dots \boldsymbol{e}_q \;&=\; a_i\boldsymbol{e}_i \times \xi_{jk\dots q}\,\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k \dots \boldsymbol{e}_q \\
A_{hj}\,\xi_{jk\dots q}\,\boldsymbol{e}_h\boldsymbol{e}_k \dots \boldsymbol{e}_q \;&=\; a_i \in_{[ijh]} \xi_{jk\dots q}\,\boldsymbol{e}_h\boldsymbol{e}_k \dots \boldsymbol{e}_q \\
A_{hj} \;&=\; a_i \in_{[ijh]} \\
A_{hj} \;&=\; -\,a_i \in_{[ihj]} \\
\boldsymbol{A} \;&=\; -\,\boldsymbol{a} \cdot {}^{3}\boldsymbol{\epsilon}
\end{aligned}$$

Так же из ${}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{A} = {}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{a}$ получается $\boldsymbol{A} = -{}^{3}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{a}$.

Или проще, согласно (7.4)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{a} \cdot {}^{3}\boldsymbol{\epsilon}, \\
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a} = -{}^{3}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{a}.
\end{aligned}$$

(Псевдо)вектор $\boldsymbol{a}$ называется сопутствующим для тензора $\boldsymbol{A}$.

В общем, для взаимно-однозначного соответствия между $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{a}$ имеем

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{A} = -\,\boldsymbol{a} \cdot {}^{3}\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E} = -{}^{3}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a}, \\
\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{a} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\, {}^{3}\boldsymbol{\epsilon} \cdot\cdot\, {}^{3}\boldsymbol{\epsilon}\right) = \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{A} \cdot\cdot\, {}^{3}\boldsymbol{\epsilon}.
\end{gathered} \tag{8.3}$$

Компоненты кососимметричного тензора $\boldsymbol{A}$ через компоненты сопутствующего псевдовектора $\boldsymbol{a}$

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{A} = -\,{}^{3}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{a} = -\in_{[ijk]} \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j a_k, \\
A_{ij} = -\in_{[ijk]} a_k = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}
\end{gathered}$$

и наоборот

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{A} \cdot\cdot\, {}^{3}\boldsymbol{\epsilon} = \tfrac{1}{2}\, A_{jk} \in_{[kji]} \boldsymbol{e}_i, \\
a_i = \tfrac{1}{2} \in_{[ikj]} A_{jk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \in_{[123]} A_{32} + \in_{[132]} A_{23} \\ \in_{[213]} A_{31} + \in_{[231]} A_{13} \\ \in_{[312]} A_{21} + \in_{[321]} A_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{32} - A_{23} \\ A_{13} - A_{31} \\ A_{21} - A_{12} \end{bmatrix}.
\end{gathered}$$

Легко запоминающийся “псевдовекторный инвариант” $\boldsymbol{A}_{\times}$ происходит из оригинального тензора $\boldsymbol{A}$ заменой диадного произведения на векторное произведение

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A}_{\times} \equiv A_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, {}^3\boldsymbol{\epsilon}, \\ \boldsymbol{A}_{\times} = \left(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E}\right)_{\times} = -2\boldsymbol{a}, \;\; \boldsymbol{a} = -\tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{A}_{\times} = -\tfrac{1}{2} \left(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E}\right)_{\times}.\end{gathered} \tag{8.4}$$

Объяснение:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{2}\, \boldsymbol{A}_{\times} \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{2}\, A_{ij} \,\big(\underbrace{\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j}_{\in_{[ijn]}\boldsymbol{e}_n}\big) \times \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k \\ = -\frac{1}{2}\, A_{ij} \underbrace{\in_{[nij]} \in_{[nkp]}}_{\delta_{jp}\delta_{ik} - \delta_{ip}\delta_{jk}} \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_k = -\frac{1}{2}\, A_{ij} \left(\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j\right) \\ = -\frac{1}{2} \left(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{A}^{\mathsf{A}} = \boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

Сопутствующий вектор может быть введён для любого бивалентного тензора. Но только антисимметричная часть даёт здесь вклад: $\boldsymbol{C}^{\mathsf{A}} = -\frac{1}{2}\, \boldsymbol{C}_{\times} \times \boldsymbol{E}$.

Для симметричного тензора сопутствующий вектор это нуль:

$$\boldsymbol{B}_{\times} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{B}.$$

С (8.4) разложение какого-либо тензора $\boldsymbol{C}$ на симметричную и антисимметричную части выглядит как

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{\mathsf{S}} - \frac{1}{2}\, \boldsymbol{C}_{\times} \times \boldsymbol{E}. \tag{8.5}$$

Для диады

$$(7.12) \Rightarrow (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{d} = -2\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}^{\mathsf{A}}, \;\; (\boldsymbol{c}\boldsymbol{d})_{\times} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d},$$

и её разложение

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{c}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{c}) - \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \times \boldsymbol{E}. \tag{8.6}$$

§ 9. Полярное разложение

Любой тензор второй сложности $\boldsymbol{F}$ с $\det F_{ij} \neq 0$ (не сингулярный) может быть разложен как

...

Пример. Polar decompose tensor $\boldsymbol{C} = C_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$, где $\boldsymbol{e}_k$ это попарно перпендикулярные единичные векторы и C_{ij} это компоненты тензора.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & 11 \\ 10 & -15 & 23 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{O} = O_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{O}_1 \cdot \boldsymbol{O}_2$$

$$O_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{S}_{\mathsf{R}}, \;\; \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}_{\mathsf{R}}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}_{\mathsf{L}} \cdot \boldsymbol{O}, \;\; \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{S}_{\mathsf{L}}$$

$$S_{\mathsf{R}ij} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -10 \\ 5 & 0 & 25 \\ -10 & 25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$S_{\mathsf{L}ij} = \begin{bmatrix} 104/5 & 47/5 & 5 \\ 47/5 & -129/5 & -10 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

...

§ 10. Собственные векторы и собственные числа

Если для какого-нибудь тензора ${}^2\boldsymbol{B}$ и ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$

$$ {}^2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a} = \eta \boldsymbol{a}, \;\; \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \tag{10.1}$$

$$ {}^2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a} = \eta \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}, \;\; \big({}^2\boldsymbol{B} - \eta \boldsymbol{E}\big) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0},$$

то η называется собственным числом (или характеристическим значением, eigenvalue) тензора ${}^2\boldsymbol{B}$, а ось (направление) собственного вектора $\boldsymbol{a}$ называется его характеристической осью (или направлением).

В компонентах это задача на собственные значения для матрицы. Однородная система линейных уравнений $(B_{ij} - \eta\delta_{ij})\, a_j = 0$

имеет ненулевое решение, если определитель матрицы компонент

$$\det_{\mathrm{i,\,j}} (B_{ij} - \eta \delta_{ij})$$

равен нулю:

$$\det \begin{bmatrix} B_{11} - \eta & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} - \eta & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - \eta \end{bmatrix} = -\eta^3 + \mathrm{chaI}\,\eta^2 - \mathrm{chaII}\,\eta + \mathrm{chaIII} = 0; \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{chaI} &= \operatorname{trace} {}^2\boldsymbol{B} = B_{kk} = B_{11} + B_{22} + B_{33}, \\ \mathrm{chaII} &= B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} + B_{11}B_{33} - B_{13}B_{31} + B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}, \\ \mathrm{chaIII} &= \det {}^2\boldsymbol{B} = \det_{i,j} B_{ij} = e_{ijk} B_{1i} B_{2j} B_{3k} = e_{ijk} B_{i1} B_{j2} B_{k3}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Корни характеристического уравнения (10.2) — собственные числа — не зависят от базиса и потому инварианты.

Коэффициенты (10.3) тоже не зависят от базиса; они называются первым, вторым и третьим характеристическими инвариантами тензора. Первый инвариант chaI это след. Он был описан ранее в § 4. Второй инвариант chaII это след присоединённой (взаимной, adjugate) матрицы — транспонированной ???? (матрицы алгебраических дополнений)

$$\mathrm{chaII}({}^2\boldsymbol{B}) \equiv \operatorname{trace}(\operatorname{adj} B_{ij})$$

(тяжеловато, да). Или

$$\mathrm{chaII}({}^2\boldsymbol{B}) \equiv \tfrac{1}{2}\Big[({}^2\boldsymbol{B}_{\bullet})^2 - {}^2\boldsymbol{B} \cdot\cdot\, {}^2\boldsymbol{B}\Big] = \tfrac{1}{2}\Big[(B_{kk})^2 - B_{ij}B_{ji}\Big].$$

И третий инвариант chaIII это определитель (детерминант) матрицы компонент тензора: $\mathrm{chaIII}({}^2\boldsymbol{B}) \equiv \det {}^2\boldsymbol{B}$.

Это относится ко всем тензорам второй сложности. Кроме того, в случае симметричного тензора истинно следующее:

1° Собственные значения симметричного бивалентного тензора — действительные числа.

2° Характеристические оси (направления) для различных собственных значений ортогональны друг другу.

○ Первое утверждение доказывается от противного. Если η — комплéксный корень (10.2), соответствующий собственному вектору $\boldsymbol{a}$, то сопряжённое число $\overline{\eta}$ тоже будет корнем (10.2). Соответствует ему собственный вектор $\overline{\boldsymbol{a}}$ с сопряжёнными компонентами. И тогда

$$\begin{aligned}(10.1) \;\Rightarrow\; (\overline{\boldsymbol{a}}\,\bullet)\; {}^2\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{a} = \eta \boldsymbol{a},\;\; (\boldsymbol{a}\,\bullet)\; {}^2\boldsymbol{B} \bullet \overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\eta}\, \overline{\boldsymbol{a}} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \overline{\boldsymbol{a}} \bullet {}^2\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \bullet {}^2\boldsymbol{B} \bullet \overline{\boldsymbol{a}} = (\eta - \overline{\eta}\,)\, \boldsymbol{a} \bullet \overline{\boldsymbol{a}}.\end{aligned}$$

Здесь слева — нуль, поскольку $\boldsymbol{a} \bullet {}^2\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \bullet {}^2\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}} \bullet \boldsymbol{a}$ и ${}^2\boldsymbol{B} = {}^2\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$. Поэтому $\eta = \overline{\eta}$, то есть действительное число.

Так же просто выглядит доказательство 2°:

$$\begin{aligned}\underbrace{\boldsymbol{a}_2 \bullet {}^2\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_1 \bullet {}^2\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{a}_2}_{=\,0} = (\eta_1 - \eta_2)\, \boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{a}_2,\; \eta_1 \neq \eta_2 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{a}_2 = 0.\end{aligned}$$ ●

Если корни характеристического уравнения (собственные числа) различны, то собственные векторы единичной длины $\boldsymbol{\ae}_i$ составляют ортонормальный базис. Каковы́ же компоненты тензора в таком базисе?

$$\begin{gathered}{}^2\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{\ae}_k = \cancel{\sum_k} \eta_k \boldsymbol{\ae}_k, \quad k = 1, 2, 3 \\ {}^2\boldsymbol{B} \bullet \underbrace{\boldsymbol{\ae}_k \boldsymbol{\ae}_k}_{\boldsymbol{E}} = \sum_k \eta_k \boldsymbol{\ae}_k \boldsymbol{\ae}_k\end{gathered}$$

Для общего случая $B_{ij} = \boldsymbol{e}_i \bullet {}^2\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{e}_j$. В базисе $\boldsymbol{\ae}_1$, $\boldsymbol{\ae}_2$, $\boldsymbol{\ae}_3$ взаимно перпендикулярных единичной длины $\boldsymbol{\ae}_i \bullet \boldsymbol{\ae}_j = \delta_{ij}$ собственных векторов симметричного тензора

$$\begin{gathered}B_{11} = \boldsymbol{\ae}_1 \bullet (\eta_1 \boldsymbol{\ae}_1 \boldsymbol{\ae}_1 + \eta_2 \boldsymbol{\ae}_2 \boldsymbol{\ae}_2 + \eta_3 \boldsymbol{\ae}_3 \boldsymbol{\ae}_3) \bullet \boldsymbol{\ae}_1 = \eta_1, \\ B_{12} = \boldsymbol{\ae}_1 \bullet (\eta_1 \boldsymbol{\ae}_1 \boldsymbol{\ae}_1 + \eta_2 \boldsymbol{\ae}_2 \boldsymbol{\ae}_2 + \eta_3 \boldsymbol{\ae}_3 \boldsymbol{\ae}_3) \bullet \boldsymbol{\ae}_2 = 0, \\ \ldots\end{gathered}$$

Матрица компонент диагональна и ${}^2\boldsymbol{B} = \sum_i \eta_i \boldsymbol{\ae}_i \boldsymbol{\ae}_i$. Да, здесь — суммирование по трём повторяющимся индексам, ведь используется особенный базис.

Переход к случаю совпадения собственных значений может быть получен подсчётом предела. Если $\eta_2 \to \eta_1$, то любая линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ в пределе удовлетворяет уравнению (10.1). И тогда любая ось в плоскости $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ становится собственной.

Когда же все три собственных числа́ совпадают, то любая ось в пространстве собственная.

Тогда ${}^2\boldsymbol{B} = \eta \boldsymbol{E}$, такие тензоры называются изотропными или “шаровыми”.

§ 11. Коллекции инвариантов симметричного бивалентного тензора

....

“Алгебраические” инварианты

...

“Характеристические” инварианты

Это коэффициенты характеристического уравнения (10.1).

...

“Исследовательские” инварианты

...

“Гармонические” инварианты

...

§ 12. Повороты в трёхмерном пространстве: тензоры поворота

Соотношение между двумя "правыми" (или двумя "левыми" орто-нормальными базисами $\boldsymbol{e}_i$ и $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ может быть описано двухиндексным массивом, представленным в виде матрицы (§ 2, § 6)

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \underbrace{\mathring{\boldsymbol{e}}_j \mathring{\boldsymbol{e}}_j}_{\boldsymbol{E}} = o_{i\mathring{j}} \mathring{\boldsymbol{e}}_j \, , \;\; o_{i\mathring{j}} \equiv \boldsymbol{e}_i \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_j$$

("матрицы косинусов").

Также, поворот тензора может быть описан другим тензором, называемым тензором поворота $\boldsymbol{O}$

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_j \underbrace{\mathring{\boldsymbol{e}}_j \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_i}_{\delta_{ji}} = \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_i \, , \;\; \boldsymbol{O} \equiv \boldsymbol{e}_j \mathring{\boldsymbol{e}}_j = \boldsymbol{e}_1 \mathring{\boldsymbol{e}}_1 + \boldsymbol{e}_2 \mathring{\boldsymbol{e}}_2 + \boldsymbol{e}_3 \mathring{\boldsymbol{e}}_3 \, . \qquad (12.1)$$

Компоненты $\boldsymbol{O}$ и в начальном $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$, и в повёрнутом $\boldsymbol{e}_i$ базисах одни и те же

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{e}_j &= \underbrace{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k}_{\delta_{ik}} \mathring{\boldsymbol{e}}_k \cdot \boldsymbol{e}_j = \mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \, , \\ \mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_j &= \mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_k \underbrace{\mathring{\boldsymbol{e}}_k \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_j}_{\delta_{kj}} = \mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \, . \end{aligned} \qquad (12.2)$$

В матричной записи эти компоненты представляют матрицу косинусов $o_{j\mathring{i}} = \mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$:

$$\boldsymbol{O} = o_{j\mathring{i}} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = o_{j\mathring{i}} \mathring{\boldsymbol{e}}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_j \, .$$

Spatial transformations in the 3-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$ are distinguished into active or alibi transformations, and passive or alias transformations. An active transformation is a transformation which actually changes the physical position (alibi, elsewhere) of objects, which can be defined in the absence of a coordinate system; whereas a passive transformation is merely a change in the coordinate system in which the object is described (alias, other name) (change of coordinates, or change of basis). By transformation, math texts usually refer to active transformations.

Тензор $\boldsymbol{O}$ соотносит два вектора — "до поворота" $\mathring{\boldsymbol{r}} = \rho_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i$ и "после поворота" $\boldsymbol{r} = \rho_i \boldsymbol{e}_i$. Компоненты $\rho_i = \mathsf{constant}$ у $\boldsymbol{r}$ в повёрнутом базисе $\boldsymbol{e}_i$ — такие же как у $\mathring{\boldsymbol{r}}$ в неподвижном базисе $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$. Так что тензор поворота описывает вращение вектора вместе с базисом. И поскольку $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_j \mathring{\boldsymbol{e}}_j \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_i \;\Leftrightarrow\; \rho_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_j \mathring{\boldsymbol{e}}_j \cdot \rho_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i$, то

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}} \tag{12.3}$$

(это формула поворота Rodrigues'а).

Olinde Rodrigues. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendants des causes qui peuvent les produire. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome 5 (1840), pages 380–440.

Для тензора второй сложности $\mathring{\boldsymbol{C}} = C_{ij} \mathring{\boldsymbol{e}}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_j$ поворот в текущую позицию $\boldsymbol{C} = C_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$ выглядит как

$$\boldsymbol{e}_i C_{ij} \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_p C_{pq} \mathring{\boldsymbol{e}}_q \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_j \boldsymbol{e}_j \;\;\Leftrightarrow\;\; \boldsymbol{C} = \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{C}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}. \tag{12.4}$$

Существенное свойство тензора поворота — ортогональность — выражается как

$$\underbrace{\boldsymbol{O}}_{\boldsymbol{e}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i} \cdot \underbrace{\boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}}_{\mathring{\boldsymbol{e}}_j \boldsymbol{e}_j} = \underbrace{\boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}}_{\mathring{\boldsymbol{e}}_i \boldsymbol{e}_i} \cdot \underbrace{\boldsymbol{O}}_{\boldsymbol{e}_j \mathring{\boldsymbol{e}}_j} = \underbrace{\boldsymbol{E}}_{\substack{\mathring{\boldsymbol{e}}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i \\ \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i}}, \tag{12.5}$$

то есть транспонированный тензор совпадает с обратным тензором: $\boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{O}^{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}^{-\mathsf{T}}$.

Ортогональный тензор сохраняет дли́ны и углы (метрику), потому что он не меняет "$\cdot$"-произведение векторов

$$(\boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}. \tag{12.6}$$

Для всех ортогональных тензоров $(\det \boldsymbol{Q})^2 = 1$:

$$1 = \det \boldsymbol{E} = \det\left(\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\right) = (\det \boldsymbol{Q}) \left(\det \boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\right) = (\det \boldsymbol{Q})^2 .$$

Тензор поворота это ортогональный тензор с $\det \boldsymbol{O} = 1$.

Но не только лишь тензоры поворота обладают свойством ортогональности. Когда в (12.1) первый базис “левый”, а второй “правый”, тогда это комбинация вращения и зеркалирования (“rotoreflexion”) $\boldsymbol{O} = -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{O}$ с $\det(-\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{O}) = -1$.

У любого бивалентного тензора в трёхмерном (3D) пространстве как минимум одно собственное число — корень (10.2) — некомпле́ксное, или действительное (real). Для тензора поворота оно равно единице

$$\boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{a} = \eta \boldsymbol{a} \;\Rightarrow\; \overbrace{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}}^{\boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{a}} \!\!\underbrace{\,\cdot\, \boldsymbol{O}}_{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{a} = \eta \boldsymbol{a} \cdot \eta \boldsymbol{a} \;\Rightarrow\; \eta^2 = 1 .$$

Соответствующий собственный вектор называется осью поворота. Теорема Euler’а о конечном повороте и есть про то, что такая ось существует [http://eulerarchive.maa.org//docs/originals/E478.pdf]. Если $\boldsymbol{k}$ — единичный вектор той оси, а ϑ — коне́чный угол поворота, то тензор поворота представи́м как

$$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{k}, \vartheta) = \boldsymbol{E} \cos\vartheta + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} \sin\vartheta + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\,(1 - \cos\vartheta) . \tag{12.7}$$

Доказывается эта формула так. Направление $\boldsymbol{k}$ во вре́мя поворота не меняется ($\boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}$), поэтому на оси поворота $\mathring{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$. В перпендикулярной плоскости (рис. 5) $\mathring{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cos\vartheta - \boldsymbol{e}_2 \sin\vartheta$, $\mathring{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{e}_1 \sin\vartheta + \boldsymbol{e}_2 \cos\vartheta$, $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{e}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i \;\Rightarrow\;$ (12.7).

Из (12.7) и (12.3) получаем формулу поворота Родрига в параметрах $\boldsymbol{k}$ и ϑ:

$$\boldsymbol{r} \;=\; \mathring{\boldsymbol{r}} \cos\vartheta \;+\; \boldsymbol{k} \times \mathring{\boldsymbol{r}} \sin\vartheta \;+\; \boldsymbol{k}\boldsymbol{k} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}\,(1 - \cos\vartheta) .$$

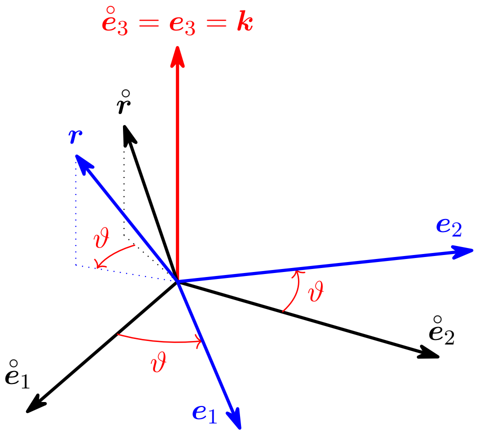
В параметрах конечного поворота транспонирование, оно же обращение, тензора $\boldsymbol{O}$ эквивалентно перемене направления поворота — знака угла ϑ

$$\boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{O}\big|_{\vartheta = -\vartheta} = \boldsymbol{E} \cos\vartheta - \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} \sin\vartheta + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\,(1 - \cos\vartheta) .$$

Пусть теперь тензор поворота меняется со временем: $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}(t)$. Псевдовектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вводится через тензор поворо-

$$\mathring{\boldsymbol{e}}_i = \mathring{\boldsymbol{e}}_i \bullet \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_j$$

$$\begin{bmatrix} \mathring{\boldsymbol{e}}_1 \\ \mathring{\boldsymbol{e}}_2 \\ \mathring{\boldsymbol{e}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathring{\boldsymbol{e}}_1 \bullet \boldsymbol{e}_1 & \mathring{\boldsymbol{e}}_1 \bullet \boldsymbol{e}_2 & \mathring{\boldsymbol{e}}_1 \bullet \boldsymbol{e}_3 \\ \mathring{\boldsymbol{e}}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1 & \mathring{\boldsymbol{e}}_2 \bullet \boldsymbol{e}_2 & \mathring{\boldsymbol{e}}_2 \bullet \boldsymbol{e}_3 \\ \mathring{\boldsymbol{e}}_3 \bullet \boldsymbol{e}_1 & \mathring{\boldsymbol{e}}_3 \bullet \boldsymbol{e}_2 & \mathring{\boldsymbol{e}}_3 \bullet \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \mathring{\boldsymbol{e}}_1 \bullet \boldsymbol{e}_1 & \mathring{\boldsymbol{e}}_1 \bullet \boldsymbol{e}_2 & \mathring{\boldsymbol{e}}_1 \bullet \boldsymbol{e}_3 \\ \mathring{\boldsymbol{e}}_2 \bullet \boldsymbol{e}_1 & \mathring{\boldsymbol{e}}_2 \bullet \boldsymbol{e}_2 & \mathring{\boldsymbol{e}}_2 \bullet \boldsymbol{e}_3 \\ \mathring{\boldsymbol{e}}_3 \bullet \boldsymbol{e}_1 & \mathring{\boldsymbol{e}}_3 \bullet \boldsymbol{e}_2 & \mathring{\boldsymbol{e}}_3 \bullet \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \cos(90^\circ + \vartheta) & \cos 90^\circ \\ \cos(90^\circ - \vartheta) & \cos\vartheta & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathring{\boldsymbol{e}}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \cos\vartheta - \boldsymbol{e}_2 \sin\vartheta \\ \mathring{\boldsymbol{e}}_2 &= \boldsymbol{e}_1 \sin\vartheta + \boldsymbol{e}_2 \cos\vartheta \\ \mathring{\boldsymbol{e}}_3 &= \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{e}_1 \mathring{\boldsymbol{e}}_1 + \boldsymbol{e}_2 \mathring{\boldsymbol{e}}_2 + \boldsymbol{e}_3 \mathring{\boldsymbol{e}}_3 =$$

$$= \overbrace{\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 \cos\vartheta - \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \sin\vartheta}^{\boldsymbol{e}_1 \mathring{\boldsymbol{e}}_1} + \overbrace{\boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_1 \sin\vartheta + \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2 \cos\vartheta}^{\boldsymbol{e}_2 \mathring{\boldsymbol{e}}_2} + \overbrace{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}_3 \mathring{\boldsymbol{e}}_3} =$$

$$= \boldsymbol{E} \cos\vartheta - \underbrace{\boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3}_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}} \cos\vartheta + \underbrace{(\boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2)}_{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i = {}^3\!\epsilon_{3ij} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i} \sin\vartheta + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k} =$$

$$= \boldsymbol{E} \cos\vartheta + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} \sin\vartheta + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\,(1 - \cos\vartheta)$$

рисунок 5
“Конечный поворот”

та $\boldsymbol{O}$ таким путём. Дифференцируем тождество ортогональности (12.5) по времени*

$$\dot{\boldsymbol{O}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{O} \cdot \dot{\boldsymbol{O}}^{\mathsf{T}} = {}^2\mathbf{0}.$$

По (4.9) $\left(\dot{\boldsymbol{O}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{O} \cdot \dot{\boldsymbol{O}}^{\mathsf{T}}$, поэтому тензор $\dot{\boldsymbol{O}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}$ оказывается антисимметричным. Тогда согласно (8.3) он представи́м через сопутствующий вектор как $\dot{\boldsymbol{O}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}$. То есть

$$\dot{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv -\frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{O}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}\right)_{\times} \tag{12.8}$$

Помимо этого общего представления вектора $\boldsymbol{\omega}$, для него есть и другие. Например, через параметры конечного поворота.

Производная $\dot{\boldsymbol{O}}$ в параметрах конечного поворота в общем случае (оба параметра — и единичный вектор $\boldsymbol{k}$, и угол ϑ — переменны во времени):

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{O}} &= \left(\boldsymbol{O}^{\mathsf{S}} + \boldsymbol{O}^{\mathsf{A}}\right)^{\bullet} = \Big(\overbrace{\boldsymbol{E}\cos\vartheta + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\,(1-\cos\vartheta)}^{\boldsymbol{O}^{\mathsf{S}}} + \overbrace{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}\sin\vartheta}^{\boldsymbol{O}^{\mathsf{A}}}\Big)^{\bullet} = \\
&= \underbrace{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\,\dot{\vartheta}\sin\vartheta + (\boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} + \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k})\,(1-\cos\vartheta)}_{\dot{\boldsymbol{O}}^{\mathsf{S}}} + \\
&\qquad\qquad + \underbrace{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}\,\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}\sin\vartheta}_{\dot{\boldsymbol{O}}^{\mathsf{A}}}.
\end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{O}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} &= (\dot{\boldsymbol{O}}^{\mathsf{S}} + \dot{\boldsymbol{O}}^{\mathsf{A}}) \cdot (\boldsymbol{O}^{\mathsf{S}} - \boldsymbol{O}^{\mathsf{A}}) = \\
&= \dot{\boldsymbol{O}}^{\mathsf{S}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{S}} + \dot{\boldsymbol{O}}^{\mathsf{A}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{S}} - \dot{\boldsymbol{O}}^{\mathsf{S}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{A}} - \dot{\boldsymbol{O}}^{\mathsf{A}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{A}},
\end{aligned}$$

* Используются различные записи для обозначения производной по времени. Вдобавок к записи Leibniz'а ${}^{dx}\!/_{dt}$, очень популярна запись “точка сверху” Newton'а $\dot{x}$.

используя

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1 = \mathsf{constant} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{k}} + \dot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k} = 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{k}} = 0,$$

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{k},\;\; \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} = \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k},\;\; \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} = {}^2\mathbf{0},$$

$$(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k} = \mathbf{0},\;\; (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{k} = {}^2\mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \mathbf{0},\;\; \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} = {}^2\mathbf{0},$$

$$(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) = -\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E},$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \;\Rightarrow\; (\dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} = \dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{k}\boldsymbol{k},$$

$$(7.13) \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E},\;\; (\dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E})\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} - \cancel{\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}},$$

$$(7.12) \;\Rightarrow\; \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} = (\boldsymbol{k}\times\dot{\boldsymbol{k}})\times\boldsymbol{E},\;\; (\dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}(\dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}\times(\dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{E}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{P}}^{\mathsf{S}}\cdot\boldsymbol{P}^{\mathsf{S}} = \\
&= (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\,\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cdot\boldsymbol{E}\cos\vartheta + (\boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} + \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k})(1-\cos\vartheta)\cdot\boldsymbol{E}\cos\vartheta \;+ \\
&\qquad + \cancel{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\,\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\,(1-\cos\vartheta)} + (\boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} + \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k})(1-\cos\vartheta)\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\,(1-\cos\vartheta) = \\
&= (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\,\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta + (\boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} + \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k})\cos\vartheta\,(1-\cos\vartheta) + (\cancel{\boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}} + \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k})\,(1-\cos\vartheta)^2 = \\
&= (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\,\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta + \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}}\cos\vartheta\,(1-\cos\vartheta) \;+ \\
&\qquad + \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\cos\vartheta - \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\cos^2\vartheta + \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} - 2\,\dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\cos\vartheta + \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\cos^2\vartheta = \\
&\qquad = (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\,\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta + \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}}\cos\vartheta - \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}}\cos^2\vartheta + \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\,(1-\cos\vartheta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{P}}^{\mathsf{A}}\cdot\boldsymbol{P}^{\mathsf{S}} = \\
&= (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}\,\dot{\vartheta}\cos^2\vartheta + (\dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}\sin\vartheta\cos\vartheta \;+ \\
&\qquad + \cancel{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\,\dot{\vartheta}\cos\vartheta\,(1-\cos\vartheta)} + (\dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\sin\vartheta\,(1-\cos\vartheta) = \\
&\qquad = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}\,\dot{\vartheta}\cos^2\vartheta + \dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}\sin\vartheta\cos\vartheta + \dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\sin\vartheta\,(1-\cos\vartheta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{P}}^{\mathsf{S}}\cdot\boldsymbol{P}^{\mathsf{A}} = \\
&= (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\,\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\sin\vartheta + (\boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} + \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k})(1-\cos\vartheta)\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\sin\vartheta = \\
&= \cancel{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\,\dot{\vartheta}\sin^2\vartheta} - \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\,\dot{\vartheta}\sin^2\vartheta + \Big(\boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) + \cancel{\dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})}\Big)\sin\vartheta\,(1-\cos\vartheta) = \\
&\qquad = -\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}\,\dot{\vartheta}\sin^2\vartheta + \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{k}\sin\vartheta\,(1-\cos\vartheta),
\end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}^{\mathsf{A}} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathsf{A}} = (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E})\, \dot{\vartheta} \cos\vartheta \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) \sin\vartheta + (\dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}) \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) \sin^2\vartheta = \\ = (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\, \dot{\vartheta} \sin\vartheta \cos\vartheta + \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} \sin^2\vartheta\,;$$

$$\dot{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} = \dot{\boldsymbol{P}}^{\mathsf{S}} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathsf{S}} + \dot{\boldsymbol{P}}^{\mathsf{A}} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathsf{S}} - \dot{\boldsymbol{P}}^{\mathsf{S}} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathsf{A}} - \dot{\boldsymbol{P}}^{\mathsf{A}} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathsf{A}} = \\ = (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\, \dot{\vartheta} \sin\vartheta \cos\vartheta + \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} \cos\vartheta - \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} \cos^2\vartheta + \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\, (1 - \cos\vartheta) + \\ + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}\, \dot{\vartheta} \cos^2\vartheta + \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} \sin\vartheta \cos\vartheta + \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{k}\boldsymbol{k} \sin\vartheta\, (1 - \cos\vartheta) + \\ + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}\, \dot{\vartheta} \sin^2\vartheta - \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{k} \sin\vartheta\, (1 - \cos\vartheta) - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{E})\, \dot{\vartheta} \sin\vartheta \cos\vartheta - \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} \sin^2\vartheta = \\ = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}\, \dot{\vartheta} + (\dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}})(1 - \cos\vartheta) + \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} \sin\vartheta \cos\vartheta + (\dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{k}) \sin\vartheta\, (1 - \cos\vartheta) = \\ = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}\, \dot{\vartheta} + \boldsymbol{k} \times \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}\, (1 - \cos\vartheta) + \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} \sin\vartheta \cos\vartheta + \boldsymbol{k} \times (\dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{E} \sin\vartheta\, (1 - \cos\vartheta) = \\ = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}\, \dot{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} \sin\vartheta \cos\vartheta + (\dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} - \cancel{\boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{k}}) \times \boldsymbol{E} \sin\vartheta\, (1 - \cos\vartheta) + \boldsymbol{k} \times \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}\, (1 - \cos\vartheta) = \\ = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}\, \dot{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} \sin\vartheta + \boldsymbol{k} \times \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}\, (1 - \cos\vartheta).$$

Этот результат, подставленный в определение (12.8) псевдовектора $\boldsymbol{\omega}$, даёт

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{k}\dot{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{k}} \sin\vartheta + \boldsymbol{k} \times \dot{\boldsymbol{k}}\, (1 - \cos\vartheta). \tag{12.9}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ получился разложенным по трём взаимно ортогональным направлениям — $\boldsymbol{k}$, $\dot{\boldsymbol{k}}$ и $\boldsymbol{k} \times \dot{\boldsymbol{k}}$. При неподвижной оси поворота $\dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{k}\dot{\vartheta}$.

Ещё одно представление $\boldsymbol{\omega}$ связано с компонентами тензора поворота (12.2). Поскольку $\boldsymbol{P} = o_{j\mathring{i}}\, \mathring{\boldsymbol{e}}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_j$, $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} = o_{i\mathring{j}}\, \mathring{\boldsymbol{e}}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_j$, а векторы начального базиса $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ неподвижны (со временем не меняются), то

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \dot{o}_{j\mathring{i}}\, \mathring{\boldsymbol{e}}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_j\,, \;\; \dot{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} = \dot{o}_{n\mathring{i}}\, o_{n\mathring{j}}\, \mathring{\boldsymbol{e}}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_j\,,$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\tfrac{1}{2}\, \dot{o}_{n\mathring{i}}\, o_{n\mathring{j}}\, \mathring{\boldsymbol{e}}_i \times \mathring{\boldsymbol{e}}_j = \tfrac{1}{2} \in_{[jik]} o_{n\mathring{j}}\, \dot{o}_{n\mathring{i}}\, \mathring{\boldsymbol{e}}_k\,. \tag{12.10}$$

Отметим и формулы

$$\begin{gathered} (12.8) \;\Rightarrow\; \dot{\boldsymbol{e}}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i \;\Rightarrow\; \dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i\,, \\ (12.8) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\omega} = -\tfrac{1}{2} \left(\dot{\boldsymbol{e}}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_j \boldsymbol{e}_j \right)_{\times} = -\tfrac{1}{2} \left(\dot{\boldsymbol{e}}_i \boldsymbol{e}_i \right)_{\times} = \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{e}_i \times \dot{\boldsymbol{e}}_i\,. \end{gathered} \tag{12.11}$$

Не всё то вектор, что имеет величину и направление. Поворот тела вокруг оси представляет, казалось бы, вектор: его численное значение равно углу поворота, а направление совпадает с направлением оси вращения. Однако, повороты не складываются как векторы*.

На са́мом же деле последовательные повороты не складываются, а умножаются.

Можно ли складывать угловые скорости? — Да, ведь угол поворота в $\dot{\vartheta}$ бесконечномалый. — Но только при вращении вокруг неподвижной оси?

...

Варьируя тождество (12.5), получим $\delta\boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{O}\cdot\delta\boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}$. Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор $\boldsymbol{\delta o}$ как $\delta\boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\delta o}\times\boldsymbol{E}$. Приходим к соотношениям

$$\delta\boldsymbol{O} = \boldsymbol{\delta o}\times\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{\delta o} = -\tfrac{1}{2}\Big(\delta\boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}\Big)_{\times}, \tag{12.12}$$

аналогичным (12.8). Вектор бесконечно малого поворота $\boldsymbol{\delta o}$ это не “вариация $\mathbf{o}$”, но единый символ (в отличие от $\delta\boldsymbol{O}$).

Малый поворот определяется вектором $\boldsymbol{\delta o}$, но конечный поворот тоже возможно представить как вектор.

...

§ 13. Повороты в трёхмерном пространстве: кватернионы

The other way to describe a rotation (or orientation) in space is via quaternions. It is very popular for computer graphics.

Lorem ipsum ....

...

* Когда углы поворота не бесконечно-ма́лые.

§ 14. Вариации

Дальше, мы будем довольно часто использовать операцию варьирования. Она похожа на дифференцирование.

Вариации видятся как бесконечно малые смещения, совместимые с ограничениями(“связями”). Если ограничений для переменной x нет, то вариации δx совершенно случайны. Но когда

$$x = x(y)$$

это функция независимого аргумента y, тогда

$$\delta x = x'(y)\,\delta y.$$

Вариации похожи на дифференциалы. Как пример, если δx и δy это вариации x и y, u и v — конéчные значения, то мы пишем $u\delta x + v\delta y = \delta w$ даже если δw это не вариация w.

В этом случае δw это одиночный символ. Разумеется, если $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ и $\partial_x v = \partial_y u$ $\left(\frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial y} u\right)$, то сумма $\delta w = u\delta x + v\delta y$ будет вариацией нéкой w.

Варьируя тождество (12.5), мы получаем

$$\delta \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{O} \cdot \delta \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}.$$

Этот тензор антисимметричен, и потому представляется через свой сопутствующий псевдовектор $\boldsymbol{\delta o}$ как

$$\delta \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\delta o} \times \boldsymbol{E}.$$

Мы имеем следующие отношения

$$\delta \boldsymbol{O} = \boldsymbol{\delta o} \times \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{\delta o} = -\frac{1}{2}\left(\delta \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}\right)_{\times}, \tag{14.1}$$

похожие на (12.8). Вектор $\boldsymbol{\delta o}$ бесконечно малого поворота это не “вариация **o**”, но один символ.

Бесконечно малый поворот определяется вектором $\boldsymbol{\delta o}$, но конечный поворот тоже возможно представить как вектор

...

§ 15. Полярное разложение

Любой тензор второй сложности $\boldsymbol{F}$ с $\det F_{ij} \neq 0$, то есть не сингулярный тензор, может быть разложен как

...

Example. Polar decompose tensor $\boldsymbol{C} = C_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$, where $\boldsymbol{e}_k$ are mutually perpendicular unit vectors of basis, and C_{ij} are tensor's components

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & 11 \\ 10 & -15 & 23 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{O} = O_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{O}_1 \cdot \boldsymbol{O}_2$$

$$O_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{S}_{\mathsf{R}}, \quad \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}_{\mathsf{R}}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}_{\mathsf{L}} \cdot \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{S}_{\mathsf{L}}$$

$$S_{\mathsf{R}ij} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -10 \\ 5 & 0 & 25 \\ -10 & 25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$S_{\mathsf{L}ij} = \begin{bmatrix} 104/5 & 47/5 & 5 \\ 47/5 & -129/5 & -10 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

...

§ 16. В косоугольном базисе

До сих пор использовался базис из трёх взаимно перпендикулярных единичных векторов $\boldsymbol{e}_i$. Теперь мы возьмём базис из любых трёх линейно независимых (некомпланарных) векторов $\boldsymbol{a}_i$.

Декомпозиция (разложение) вектора $\boldsymbol{v}$ в базисе $\boldsymbol{a}_i$ (рис. 6) есть линейная комбинация

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{a}_i. \qquad (16.1)$$

Соглашение о суммировании обретает новые положения: индекс суммирования повторяется на разных уровнях того же одночлена, а свободный индекс остаётся на одинаковой высоте в каждой части выражения ($a_i = b_{ij}c^j$ — корректно, $a_i = b^i_{kk}$ — дважды ошибочно).

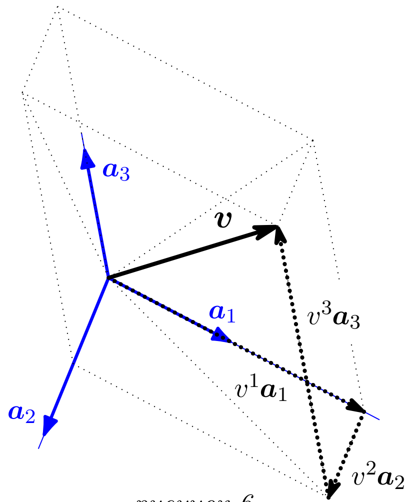


рисунок 6

В таком базисе уже́ $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{a}_i = v^k \boldsymbol{a}_k \bullet \boldsymbol{a}_i \neq v^i$, ведь тут $\boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_k \neq \delta_{ik}$.

Дополним же базис $\boldsymbol{a}_i$ ещё другой тройкой векторов $\boldsymbol{a}^i$, называемых кобазисом или взаимным базисом, чтобы

$$\begin{gathered} \boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}^j = \delta_i^j, \;\; \boldsymbol{a}^i \bullet \boldsymbol{a}_j = \delta^i_j, \\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}^i. \end{gathered} \qquad (16.2)$$

Это — основное свойство кобазиса. Ортонормированный (ортонормальный) базис может быть определён как совпада́ющий со своим кобазисом: $\boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{e}_i$.

Для, к примеру, первого вектора кобазиса $\boldsymbol{a}^1$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^1 \bullet \boldsymbol{a}_1 = 1 \\ \boldsymbol{a}^1 \bullet \boldsymbol{a}_2 = 0 \\ \boldsymbol{a}^1 \bullet \boldsymbol{a}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a}^1 \bullet \boldsymbol{a}_1 = 1 \\ \gamma \boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a}^1 = {}^1\!/\gamma \, \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3 \\ \gamma = \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3 \bullet \boldsymbol{a}_1 \end{cases}$$

Коэффициент γ получился равным (с точностью до знака для "левой" тройки $\boldsymbol{a}_i$) объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}_i$. В §7 тот же объём был представлен как $\sqrt{g}$, и это не без причины, ведь он совпада́ет с квадратным корнем из грамиана $g \equiv \det g_{ij}$ — определителя симметричной матрицы J. P. Gram'а $g_{ij} \equiv \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$.

○ Доказательство похоже на вывод (7.7). "Тройное произведение" $\boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_k$ в каком-нибудь ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}_i$ вычисли́мо как детерминант (с "−" для "левой" тройки $\boldsymbol{a}_i$) по строкам

$$\in_{[ijk]} \equiv \boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_k = \pm \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$

или по столбцам

$$\in_{[pqr]} \equiv \boldsymbol{a}_p \times \boldsymbol{a}_q \cdot \boldsymbol{a}_r = \pm \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_p \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{a}_q \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{a}_p \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_q \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{a}_p \cdot \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{a}_q \cdot \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}.$$

Произведение определителей $\in_{[ijk]} \in_{[pqr]}$ равно определителю произведения матриц, а элементы последнего — суммы вида $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{e}_s \boldsymbol{a}_p \cdot \boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{e}_s \boldsymbol{e}_s \cdot \boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_p$, в результате

$$\in_{[ijk]} \in_{[pqr]} = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_p & \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_q & \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_p & \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_q & \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_p & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_q & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_r \end{bmatrix};$$

$$i = p = 1,\ j = q = 2,\ k = r = 3 \ \Rightarrow \in_{[123]} \in_{[123]} = \det_{i,j} (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j) = \det_{i,j} g_{ij}. \quad \bullet$$

Представляя $\boldsymbol{a}^1$ и другие векторы кобазиса как сумму

$$\pm 2\sqrt{g}\, \boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3 \overbrace{- \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_2}^{+\, \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3},$$

приходим к общей формуле (с "−" для "левой" тройки $\boldsymbol{a}_i$)

$$\boldsymbol{a}^i = \pm \frac{1}{2\sqrt{g}}\, e^{ijk} \boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k, \quad \sqrt{g} \equiv \pm\, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 > 0. \tag{16.3}$$

Здесь e^{ijk} по-прежнему символ перестановки Veblen'а (± 1 или 0): $e^{ijk} \equiv e_{ijk}$. Произведение $\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k = \in_{[jkn]} \boldsymbol{a}^n$, компоненты тензора Лéви-Чиви́ты $\in_{[jkn]} = \pm\, e_{jkn} \sqrt{g}$, а по (7.8) $e^{ijk} e_{jkn} = 2\delta^i_n$. Так что

$$\boldsymbol{a}^1 = \pm{}^1\!/\!\sqrt{g}\,(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3),\;\; \boldsymbol{a}^2 = \pm{}^1\!/\!\sqrt{g}\,(\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1),\;\; \boldsymbol{a}^3 = \pm{}^1\!/\!\sqrt{g}\,(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2).$$

Example. Get cobasis for basis $\boldsymbol{a}_i$ when

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3\,, \\ \boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned}$$

$$\sqrt{g} = -\,\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\,;$$

$$-\,\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{e}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{e}_2 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{e}_3 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3\,,$$

$$-\,\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{e}_1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{e}_2 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{e}_3 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2\,,$$

$$-\,\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{e}_1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{e}_2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{e}_3 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_1$$

and finally

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^1 &= \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3\big), \\ \boldsymbol{a}^2 &= \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\big), \\ \boldsymbol{a}^3 &= \tfrac{1}{2}\big(-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\big). \end{aligned}$$

Имея кобазис, возможно не только разложить по нему любой вектор (рис. 7), но и найти коэффициенты разложения (16.1):

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{a}_i = v_i \boldsymbol{a}^i, \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}^i = v^k \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}^i = v^i, \;\; v_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}_i\,. \end{gathered} \tag{16.4}$$

Коэффициенты v_i называются ковариантными компонентами вектора $\boldsymbol{v}$, а v^i — его контравариантными* компонентами.

Есть литература о тензорах, где introducing existænce and различают ковариантные и контравариантные... векторы (и “ковекторы”, “dual vectors”). Не сто́ит вводить читателя в заблуждение: вектор-то один и тот же, просто разложение по двум разным базисам даёт два набора компонент.

От векторов перейдём к тензорам второй сложности. Имеем четыре комплекта диад: $\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j$, $\boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j$, $\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}^j$, $\boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}_j$. Согласующиеся коэффициенты в декомпозиции тензора называются его контравариантными, ковариантными и смешанными компонентами:

$$
\begin{gathered}
{}^2\boldsymbol{B} = B^{ij} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j = B_{ij} \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j = B^{i}_{\cdot j} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}^j = B_{i}^{\cdot j} \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}_j \,, \\
B^{ij} = \boldsymbol{a}^i \cdot {}^2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a}^j, \;\; B_{ij} = \boldsymbol{a}_i \cdot {}^2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a}_j \,, \\
B^{i}_{\cdot j} = \boldsymbol{a}^i \cdot {}^2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a}_j \,, \;\; B_{i}^{\cdot j} = \boldsymbol{a}_i \cdot {}^2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a}^j.
\end{gathered}
\tag{16.5}
$$

Для двух видов смешанных компонент точка в индексе это просто свободное место: у $B^{i}_{\cdot j}$ верхний индекс “i” — первый, а нижний “j” — второй.

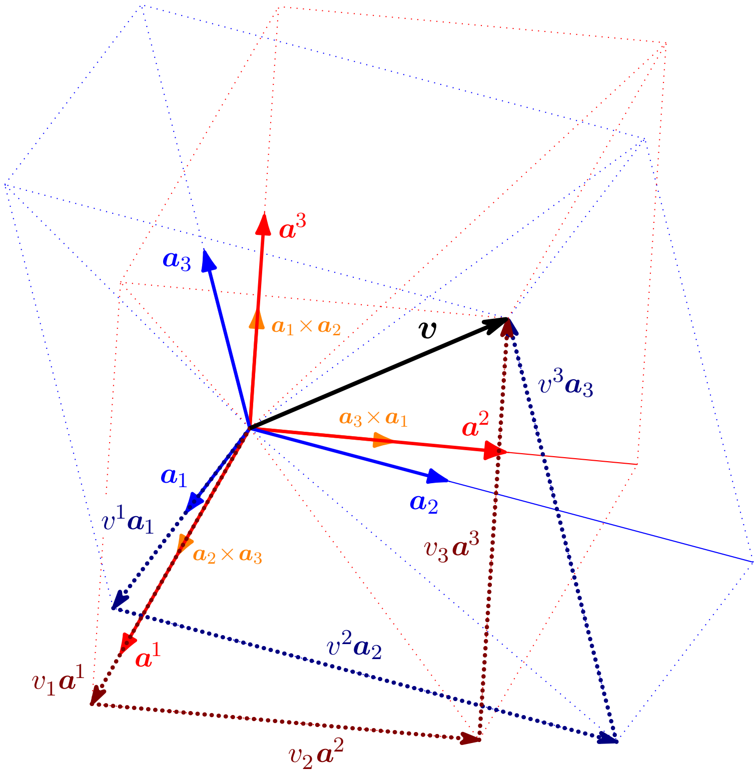
Компоненты единичного (“метрического”) тензора $\boldsymbol{E}$

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_k \boldsymbol{a}^k = g_{jk} \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}^k = g^{jk} \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{a}_k : \\
\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}^j = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}^j = \delta_i^j, \;\; \boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta^i_j \,, \\
\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j \equiv g_{ij} \,, \;\; \boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}^j = \boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}^j \equiv g^{ij} ; \\
\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} = g_{ij} \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j \cdot g^{nk} \boldsymbol{a}_n \boldsymbol{a}_k = g_{ij} g^{jk} \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{E} \;\Rightarrow\; g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k.
\end{gathered}
\tag{16.6}
$$

Вдобавок к (16.2) и (16.3) открылся ещё один способ найти векторы кобазиса — через матрицу g^{ij}, обратную матрице Грама g_{ij}. И наоборот:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^i &= \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}^i = g^{jk} \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}^i = g^{jk} \boldsymbol{a}_j \, \delta_k^i = g^{ji} \boldsymbol{a}_j \,, \\
\boldsymbol{a}_i &= \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}_i = g_{jk} \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}^k \cdot \boldsymbol{a}_i = g_{jk} \boldsymbol{a}^j \, \delta_i^k = g_{ji} \boldsymbol{a}^j.
\end{aligned}
\tag{16.7}
$$

* Потому что они меняются обратно (contra) изменению длин базисных векторов $\boldsymbol{a}_i$.



$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{a}_3 = \sqrt{g} = 0.56274$$
$$1/\sqrt{g} = 1.77703$$

$$\boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}^j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{a}^3 \\ \boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{a}^3 \\ \boldsymbol{a}_3 \bullet \boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_3 \bullet \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_3 \bullet \boldsymbol{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_i^j$$

рисунок 7
“Разложение вектора в косоугольном базисе”

Example. Using reversed Gram matrix, get cobasis for basis $\boldsymbol{a}_i$ when

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\\ \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

$$g_{ij} = \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \;\; \det g_{ij} = 4,$$

$$\operatorname{adj} g_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}},$$

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{\operatorname{adj} g_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Using $\boldsymbol{a}^i = g^{ij}\boldsymbol{a}_j$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^1 &= g^{11}\boldsymbol{a}_1 + g^{12}\boldsymbol{a}_2 + g^{13}\boldsymbol{a}_3 = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{a}^2 &= g^{21}\boldsymbol{a}_1 + g^{22}\boldsymbol{a}_2 + g^{23}\boldsymbol{a}_3 = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{a}^3 &= g^{31}\boldsymbol{a}_1 + g^{32}\boldsymbol{a}_2 + g^{33}\boldsymbol{a}_3 = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

...

Единичный тензор (unit tensor, identity tensor, metric tensor)

$\boldsymbol{E} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi}$

$\boldsymbol{E} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, \boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ab} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{a} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{E} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{E} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, \boldsymbol{E} = \operatorname{trace} \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{E} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, \boldsymbol{E} = \operatorname{trace} \boldsymbol{A} \neq \text{notanymore}\, A_{jj}$

Thus for, say, trace of some tensor $\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}^j$: $\boldsymbol{A} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, \boldsymbol{E} = \operatorname{trace} \boldsymbol{A}$, you have

$\boldsymbol{A} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, \boldsymbol{E} = A_{ij}\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}^j \boldsymbol{\cdot\cdot}\, \boldsymbol{r}_{\partial k}\boldsymbol{r}^k = A_{ij}\boldsymbol{r}^i \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{r}^j = A_{ij}g^{ij}$

...

Тензор поворота (the rotation tensor)

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{a}_i \mathring{\boldsymbol{a}}^i = \boldsymbol{a}^i \mathring{\boldsymbol{a}}_i = \boldsymbol{P}^{-\mathsf{T}}$

$\boldsymbol{P}^{-1} = \mathring{\boldsymbol{a}}_i \boldsymbol{a}^i = \mathring{\boldsymbol{a}}^i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}$

$\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} = \mathring{\boldsymbol{a}}^i \boldsymbol{a}_i = \mathring{\boldsymbol{a}}_i \boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{P}^{-1}$

...

... Характеристическое уравнение (10.2) быстро приводит к тождеству Кэ́ли–Га́мильтона (Cayley–Hamilton)

$$-\boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{B} + \mathrm{I}\,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{B} - \mathrm{II}\,\boldsymbol{B} + \mathrm{III}\,\boldsymbol{E} = {}^2\mathbf{0},$$
$$-\boldsymbol{B}^3 + \mathrm{I}\,\boldsymbol{B}^2 - \mathrm{II}\,\boldsymbol{B} + \mathrm{III}\,\boldsymbol{E} = {}^2\mathbf{0}. \qquad (16.8)$$

§ 17. Тензорные функции

В представлении о функции $y = f(x)$ как отображении (морфизме) $f\colon x \mapsto y$, прообраз (аргумент) x и образ (результат) y могут быть тензорами любых сложностей.

Рассмотрим хотя бы скалярную функцию двухвалентного тензора $\varphi = \varphi(\boldsymbol{B})$. Примеры — $\boldsymbol{B} \boldsymbol{\cdot\cdot} \boldsymbol{\varPhi}$ (или $\boldsymbol{p} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{B} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{q}$) и $\boldsymbol{B} \boldsymbol{\cdot\cdot} \boldsymbol{B}$. Тогда в каждом базисе $\boldsymbol{a}_i$ в паре с кобазисом $\boldsymbol{a}^i$ имеем функцию $\varphi(B_{ij})$ девяти числовых аргументов — компонент B_{ij} тензора $\boldsymbol{B}$. Для примера

$$\varphi(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \boldsymbol{\cdot\cdot} \boldsymbol{\varPhi} = B_{ij}\, \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{\cdot\cdot}\, \boldsymbol{a}_m \boldsymbol{a}_n \varPhi^{mn} = B_{ij} \varPhi^{ji} = \varphi(B_{ij}).$$

С любым переходом к новому базису результат не меняется: $\varphi(B_{ij}) = \varphi(B'_{ij}) = \varphi(\boldsymbol{B})$.

Дифференцирование $\varphi(\boldsymbol{B})$ выглядит как

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}}\, dB_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{B}} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, d\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}. \qquad (17.1)$$

Тензор ${}^{\partial\varphi}\!/_{\partial\boldsymbol{B}}$ называется производной функции φ по аргументу $\boldsymbol{B}$; $d\boldsymbol{B}$ — дифференциал тензора $\boldsymbol{B}$, $d\boldsymbol{B} = dB_{ij}\, \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j$; ${}^{\partial\varphi}\!/_{\partial B_{ij}}$ — компоненты (контравариантные) ${}^{\partial\varphi}\!/_{\partial\boldsymbol{B}}$

$$\boldsymbol{a}^i \boldsymbol{\cdot} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{B}} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{a}^j = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{B}} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{B}} = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}}\, \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j\,.$$

...

$$\varphi(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \boldsymbol{\cdot\cdot} \boldsymbol{\varPhi}$$
$$d\varphi = d(\boldsymbol{B} \boldsymbol{\cdot\cdot} \boldsymbol{\varPhi}) = d\boldsymbol{B} \boldsymbol{\cdot\cdot} \boldsymbol{\varPhi} = \boldsymbol{\varPhi} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, d\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\varPhi}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, d\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$$
$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{B}} \boldsymbol{\cdot\cdot}\, d\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}, \;\; \frac{\partial\, (\boldsymbol{B} \boldsymbol{\cdot\cdot} \boldsymbol{\varPhi})}{\partial \boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\varPhi}^{\mathsf{T}}$$

$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{B} \cdot\cdot\, \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}$

$$\frac{\partial\,(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{B}} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}$$

...

$$\varphi(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B}$$
$$d\varphi = d\,(\boldsymbol{B} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B}) = d...$$

...

Но согласно опять-таки (16.8) $-\boldsymbol{B}^2 + \mathrm{I}\,\boldsymbol{B} - \mathrm{II}\,\boldsymbol{E} + \mathrm{III}\,\boldsymbol{B}^{-1} = {}^2\boldsymbol{0}$, поэтому

....

Скалярная функция $\varphi(\boldsymbol{B})$ называется изотропной, если она не чувствительна к повороту аргумента:

$$\varphi(\boldsymbol{B}) = \varphi(\boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}) = \varphi(\mathring{\boldsymbol{B}}) \;\;\; \forall \boldsymbol{O} = \boldsymbol{a}_i \mathring{\boldsymbol{a}}^i = \boldsymbol{a}^i \mathring{\boldsymbol{a}}_i = \boldsymbol{O}^{-\mathsf{T}}$$

для любого ортогонального тензора $\boldsymbol{O}$ (тензора поворота, § 12).

Симметричный тензор $\boldsymbol{B}^{\mathsf{S}}$ полностью определяется тройкой инвариантов и угловой ориентацией собственных осей (они же взаимно ортогональны, § 10). Ясно, что изотропная функция $\varphi(\boldsymbol{B}^{\mathsf{S}})$ симметричного аргумента является функцией, входы-аргументы которой — только инварианты $\mathrm{I}(\boldsymbol{B}^{\mathsf{S}})$, $\mathrm{II}(\boldsymbol{B}^{\mathsf{S}})$, $\mathrm{III}(\boldsymbol{B}^{\mathsf{S}})$. Дифференцируется такая функция согласно (**??**), где транспонирование излишне.

§ 18. Пространственное дифференцирование

««« rename: remove fields

> *Тензорное поле* — это тензор, меняющийся от точки к точке (переменный в пространстве, зависящий от координат).

Пусть в каждой точке некоторой области трёхмерного пространства определена величина ς. Тогда говорят, что есть тензорное поле $\varsigma = \varsigma(\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{r}$ — вектор положения (вектор-радиус) точки пространства.

Величина ς может быть тензором любой сложности. Пример скалярного поля — поле температуры в среде, векторного поля — скорости частиц жидкости.

Концепт тензорного поля никак не связан с концептом поля с операциями $+$ и $*$ с 11 свойствами этих операций.

Не только для решения прикладных задач, но нередко и в “чистой теории” вместо аргумента $\boldsymbol{r}$ используется набор (какая-либо тройка) криволинейных координат q^i. Если непрерывно менять лишь одну координату из трёх, получается координатная линия. Каждая точка трёхмерного пространства лежит на пересечении трёх координатных линий (рис. 8). Вектор положения точки выражается через набор координат как отношение $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^i)$.

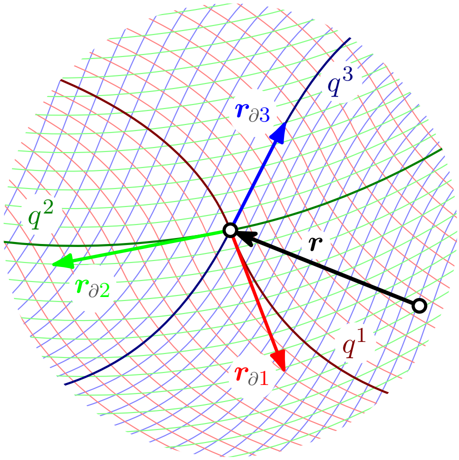


рисунок 8

Commonly used наборы координат««« Прямоугольные (“декартовы”), сферические и цилиндрические координаты —

Curvilinear coordinates may be derived from a set of rectangular (“cartesian”) coordinates by using a transformation that is locally invertible (a one-to-one map) at each point. Поэтому прямоугольные координаты любой точки пространства могут быть преобразованы в какие-либо криволинейные координаты и обратно.

...

The differential of a function presents a change in the linearization of this function.

...

частная производная

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$$

...

дифференциал $\varsigma(q^i)$

$$d\varsigma = \frac{\partial \varsigma}{\partial q^i} dq^i = \partial_i \varsigma \, dq^i \tag{18.1}$$

...

Линейность

$$\partial_i \bigl(\lambda p + \mu q\bigr) = \lambda \bigl(\partial_i p\bigr) + \mu \bigl(\partial_i q\bigr) \tag{18.2}$$

“Product rule”

$$\partial_i \bigl(p \circ q\bigr) = \bigl(\partial_i p\bigr) \circ q + p \circ \bigl(\partial_i q\bigr) \tag{18.3}$$

...

Local basis $\boldsymbol{r}_{\partial i}$

Дифференциал вектора положения $\boldsymbol{r}(q^i)$ есть

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} dq^i = dq^i \boldsymbol{r}_{\partial i}, \;\; \boldsymbol{r}_{\partial i} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \boldsymbol{r} \tag{18.4}$$

...

Local cobasis $\boldsymbol{r}^i$, $\boldsymbol{r}^i \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{r}_{\partial j} = \delta^i_j$

...

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial \varsigma}{\partial q^i} \boldsymbol{r}^i = \partial_i \varsigma \, \boldsymbol{r}^i$$

$$d\varsigma = \frac{\partial \varsigma}{\partial \boldsymbol{r}} \boldsymbol{\cdot} d\boldsymbol{r} = \partial_i \varsigma \, \boldsymbol{r}^i \boldsymbol{\cdot} dq^j \boldsymbol{r}_{\partial j} = \partial_i \varsigma \, dq^i \tag{18.5}$$

...

Бивалентный единичный тензор (метрический тензор) $\boldsymbol{E}$, который нейтрален (4.7) “$\boldsymbol{\cdot}$”-произведению (dot product’у), может быть представлен как

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{r}^i \boldsymbol{r}_{\partial i} = \boldsymbol{r}^i \partial_i \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{r}, \tag{18.6}$$

где появляется дифференциальный оператор “набла”

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{r}^i \partial_i . \tag{18.7}$$

...

$$d\varsigma = \frac{\partial \varsigma}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla} \varsigma = \partial_i \varsigma \, dq^i \tag{18.8}$$

$d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r} \cdot \overbrace{\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{E}}$

...

Дивергенция диадного произведения двух векторов

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\big) = \boldsymbol{r}^i \partial_i \cdot \big(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\big) = \boldsymbol{r}^i \cdot \partial_i \big(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\big) = \boldsymbol{r}^i \cdot \big(\partial_i \boldsymbol{a}\big)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{r}^i \cdot \boldsymbol{a}\big(\partial_i \boldsymbol{b}\big) = \\ = \big(\boldsymbol{r}^i \cdot \partial_i \boldsymbol{a}\big)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}^i \big(\partial_i \boldsymbol{b}\big) = \big(\boldsymbol{r}^i \partial_i \cdot \boldsymbol{a}\big)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \big(\boldsymbol{r}^i \partial_i \boldsymbol{b}\big) = \\ = \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}\big)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \big(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{b}\big)\end{aligned} \tag{18.9}$$

— тут нет нужды разворачивать векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, развернув лишь дифференциальный оператор $\boldsymbol{\nabla}$.

...

Градиент векторного произведения двух векторов, применяя “product rule” (18.3) и соотношение (7.5) для любых двух векторов (частная производная ∂_i некоторого вектора по скалярной координате q^i это тоже вектор)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{r}^i \partial_i (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{r}^i (\partial_i \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \partial_i \boldsymbol{b}) = \\ = \boldsymbol{r}^i (\partial_i \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \partial_i \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{r}^i \partial_i \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}^i \partial_i \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \\ = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} .\end{aligned} \tag{18.10}$$

...

Градиент dot product’а двух векторов

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\big) = \boldsymbol{r}^i \partial_i \big(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\big) = \boldsymbol{r}^i \big(\partial_i \boldsymbol{a}\big) \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{r}^i \boldsymbol{a} \cdot \big(\partial_i \boldsymbol{b}\big) = \\ = \big(\boldsymbol{r}^i \partial_i \boldsymbol{a}\big) \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{r}^i \big(\partial_i \boldsymbol{b}\big) \underbrace{\cdot \, \boldsymbol{a} =}_{\boldsymbol{\nabla}} \big(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a}\big) \cdot \boldsymbol{b} + \big(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{b}\big) \cdot \boldsymbol{a} .\end{aligned} \tag{18.11}$$

§ 19. Интегральные теоремы

Для векторных полей известны интегральные теоремы Gauss'а и Stokes'а.

Gauss' theorem (divergence theorem) enables an integral taken over a volume to be replaced by one taken over the closed surface bounding that volume, and vice versa.

Stokes' theorem enables an integral taken around a closed curve to be replaced by one taken over *any* surface bounded by that curve. Stokes' theorem relates a line integral around a closed path to a surface integral over what is called a *capping surface* of the path.

Теорема Gauss'а о дивергенции

Эта теорема — про то, как заменить объёмный интеграл поверхностным (и наоборот). В этой теореме рассматривается поток (ef)flux вектора через ограничивающую объём V за́мкнутую поверхность $\mathcal{O}(\partial V)$. Единичный вектор внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности $\mathcal{O}(\partial V)$

$$\oint\limits_{\mathcal{O}(\partial V)} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} \, d\mathcal{O} = \int\limits_{V} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a} \, dV. \tag{19.1}$$

Объём V нарезается тремя семействами координатных поверхностей на множество бесконечно малых элементов. Поток через поверхность $\mathcal{O}(\partial V)$ равен сумме потоков через края получившихся элементов. В бесконечной малости каждый такой элемент — маленький локальный дифференциальный кубик (параллелепипед). ... Поток вектора $\boldsymbol{a}$ через грани малого кубика с объёмом dV равен $\sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{a} \mathcal{O}_i$, а поток через сам этот объём равен $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a} \, dV$.

Похожая трактовка этой теоремы есть, для примера, в курсе Richard'а Feynman'а [86].

(рисунок с кубиками)

to dice — нареза́ть кубиками

small cube, little cube

локально ортонормальные координаты $\boldsymbol{\xi} = \xi_i \boldsymbol{n}_i$, $d\boldsymbol{\xi} = d\xi_i \boldsymbol{n}_i$, $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{n}_i \partial_i$

разложение вектора $\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{n}_i$

Теорема Stokes'а о циркуляции

Эта теорема выражается равенством

...

§ 20. Тензоры кривизны

The *Riemann curvature tensor* or *Riemann–Christoffel tensor* (after **Bernhard Riemann** and **Elwin Bruno Christoffel**) is the most common method used to express the curvature of Riemannian manifolds. It's a tensor field, it assigns a tensor to each point of a Riemannian manifold, that measures the extent to which the metric tensor is not locally isometric to that of "flat" space. The curvature tensor measures noncommutativity of the covariant derivative, and as such is the integrability obstruction for the existænce of an isometry with "flat" space.

Рассматривая тензорные поля в криволинейных координатах (§ 18), мы исходили из представления вектора-радиуса (вектора положения) точки функцией этих координат: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^i)$. Этим отношением порождаются выражения

- ✓ векторов локального касательного базиса $\boldsymbol{r}_{\partial i} \equiv {}^{\partial \boldsymbol{r}}\!/_{\partial q^i} \equiv \partial_i \boldsymbol{r}$,
- ✓ компонент $g_{ij} \equiv \boldsymbol{r}_{\partial i} \bullet \boldsymbol{r}_{\partial j}$ и $g^{ij} \equiv \boldsymbol{r}^i \bullet \boldsymbol{r}^j = g_{ij}^{-1}$ единичного "метрического" тензора $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{r}_{\partial i} \boldsymbol{r}^i = \boldsymbol{r}^i \boldsymbol{r}_{\partial i} = g_{jk} \boldsymbol{r}^j \boldsymbol{r}^k = g^{jk} \boldsymbol{r}_{\partial j} \boldsymbol{r}_{\partial k}$,
- ✓ векторов локального взаимного кокасательного базиса $\boldsymbol{r}^i \bullet \boldsymbol{r}_{\partial j} = \delta^i_j$, $\boldsymbol{r}^i = g^{ij} \boldsymbol{r}_{\partial j}$,
- ✓ дифференциального набла-оператора Hamilton'а $\boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{r}^i \partial_i$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{r}$,
- ✓ полного дифференциала $d\boldsymbol{\xi} = d\boldsymbol{r} \bullet \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\xi}$,
- ✓ частных производных касательного базиса (вторых частных производных $\boldsymbol{r}$) $\boldsymbol{r}_{\partial i \partial j} \equiv \partial_i \partial_j \boldsymbol{r} = \partial_i \boldsymbol{r}_{\partial j}$,
- ✓ символов "связности" Христоффеля (Christoffel symbols) $\Gamma^k_{ij} \equiv \boldsymbol{r}_{\partial i \partial j} \bullet \boldsymbol{r}^k$ и $\Gamma_{ij\underset{\bullet}{k}} \equiv \boldsymbol{r}_{\partial i \partial j} \bullet \boldsymbol{r}_{\partial k}$.

Представим теперь, что функция $\boldsymbol{r}(q^k)$ не известна, но зато́ в каждой точке пространства известны шесть независимых компонент положительно определённой (все матрицы Gram'а определены неотрицательно) симметричной метрической матрицы Gram'а $g_{ij}(q^k)$.

the Gram matrix (or Gramian)

Билинейная форма ...

...

Поскольку шесть функций $g_{ij}(q^k)$ происходят от векторной функции $\boldsymbol{r}(q^k)$, то между элементами g_{ij} существуют некие соотношения.

Дифференциал $d\boldsymbol{r}$ (18.4) — полный (точный). Это истинно тогда и только тогда, когда вторые частные производные коммутируют:

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\partial k} dq^k \;\;\Leftrightarrow\;\; \partial_i \boldsymbol{r}_{\partial j} = \partial_j \boldsymbol{r}_{\partial i} \;\text{ или }\; \boldsymbol{r}_{\partial i \partial j} = \boldsymbol{r}_{\partial j \partial i}.$$

Но это условие ужé обеспечено симметрией g_{ij}

...

метрическая ("аффинная") связность ∇_i, её же называют "ковариантная производная"

$$\boldsymbol{r}_{\partial i \partial j} = \underbrace{\boldsymbol{r}_{\partial i \partial j} \cdot \boldsymbol{r}^k}_{\Gamma_{ij}^k} \!\!\!\!\!\!\overbrace{\phantom{\boldsymbol{r}^k}\boldsymbol{r}_{\partial k}}^{\boldsymbol{E}} = \underbrace{\boldsymbol{r}_{\partial i \partial j} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial k}}_{\Gamma_{ij\bullet k}} \!\!\!\!\!\!\overbrace{\phantom{\boldsymbol{r}_{\partial k}}\boldsymbol{r}^k}^{\boldsymbol{E}}$$

$\Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_{\partial k} = \boldsymbol{r}_{\partial i \partial j} \cdot \boldsymbol{r}^k \boldsymbol{r}_{\partial k} = \boldsymbol{r}_{\partial i \partial j}$

covariant derivative (affine connection) is only defined for vector fields

$\boldsymbol{\nabla v} = \boldsymbol{r}^i \partial_i \big(v^j \boldsymbol{r}_{\partial j}\big) = \boldsymbol{r}^i \big(\partial_i v^j \boldsymbol{r}_{\partial j} + v^j \boldsymbol{r}_{\partial i \partial j}\big)$

$\boldsymbol{\nabla v} = \boldsymbol{r}^i \boldsymbol{r}_{\partial j} \nabla_i v^j, \;\; \nabla_i v^j \equiv \partial_i v^j + \Gamma_{in}^j v^n$

$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{r}_{\partial i} = \boldsymbol{r}^k \partial_k \boldsymbol{r}_{\partial i} = \boldsymbol{r}^k \boldsymbol{r}_{\partial k \partial i} = \boldsymbol{r}^k \boldsymbol{r}_{\partial n} \Gamma_{ki}^n, \;\; \nabla_i \boldsymbol{r}_{\partial n} = \Gamma_{in}^k \boldsymbol{r}_{\partial k}$

Christoffel symbols describe a metric ("affine") connection, that is how the basis changes from point to point.

символы Christoffel'я это "компоненты связности" в локальных координатах

...

тензор кручения ${}^3\boldsymbol{\mathfrak{T}}$ с компонентами

$$\mathfrak{T}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k}$$

determines the antisymmetric part of a connection

...

симметрия $\Gamma_{ij\underset{\bullet}{k}} = \Gamma_{ji\underset{\bullet}{k}}$, поэтому $3^3 - 3 \cdot 3 = 18$ разных (независимых) $\Gamma_{ij\underset{\bullet}{k}}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{n} g_{nk} = \Gamma_{ij\underset{\bullet}{k}} = \boldsymbol{r}_{\partial i \partial j} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial k} = \\ = \tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{r}_{\partial i \partial j} + \boldsymbol{r}_{\partial j \partial i}\bigr) \cdot \boldsymbol{r}_{\partial k} + \tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{r}_{\partial j \partial k} - \boldsymbol{r}_{\partial k \partial j}\bigr) \cdot \boldsymbol{r}_{\partial i} + \tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{r}_{\partial i \partial k} - \boldsymbol{r}_{\partial k \partial i}\bigr) \cdot \boldsymbol{r}_{\partial j} = \\ = \tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{r}_{\partial i \partial j} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial k} + \boldsymbol{r}_{\partial i \partial k} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial j}\bigr) + \tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{r}_{\partial j \partial i} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial k} + \boldsymbol{r}_{\partial j \partial k} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial i}\bigr) - \tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{r}_{\partial k \partial i} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial j} + \boldsymbol{r}_{\partial k \partial j} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial i}\bigr) = \\ = \frac{1}{2}\Bigl(\partial_i(\boldsymbol{r}_{\partial j} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial k}) + \partial_j(\boldsymbol{r}_{\partial i} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial k}) - \partial_k(\boldsymbol{r}_{\partial i} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial j})\Bigr) = \\ = \frac{1}{2}\bigl(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\bigr). \end{aligned} \tag{20.1}$$

Все символы Christoffel’я тождественно равны нулю лишь в ортонормальной (декартовой) системе. (А какие они для косоугольной?)

Дальше: $d\boldsymbol{r}_{\partial i} = d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{r}_{\partial i} = dq^k \partial_k \boldsymbol{r}_{\partial i} = \boldsymbol{r}_{\partial k \partial i}\, dq^k$ — тоже полные дифференциалы.

$$d\boldsymbol{r}_{\partial k} = \partial_i \boldsymbol{r}_{\partial k}\, dq^i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\partial k}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\partial k}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\partial k}}{\partial q^3} dq^3$$

Поэтому $\partial_i \partial_j \boldsymbol{r}_{\partial k} = \partial_j \partial_i \boldsymbol{r}_{\partial k}$, $\partial_i \boldsymbol{r}_{\partial j \partial k} = \partial_j \boldsymbol{r}_{\partial i \partial k}$, и трёхиндексный объект из векторов третьих частных производных

$$\boldsymbol{r}_{\partial i \partial j \partial k} \equiv \partial_i \partial_j \partial_k \boldsymbol{r} = \partial_i \boldsymbol{r}_{\partial j \partial k} \tag{20.2}$$

симметричен по первому и второму индексам (а не только по второму и третьему). И тогда равен нулю ${}^4\mathbf{0}$ следующий тензор четвёртой сложности — *тензор кривизны Riemann’а* (или *тензор Riemann’а–Christoffel’я*)

$${}^4\boldsymbol{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}_{hijk} \boldsymbol{r}^h \boldsymbol{r}^i \boldsymbol{r}^j \boldsymbol{r}^k, \;\; \mathfrak{R}_{hijk} \equiv \boldsymbol{r}_{\partial h} \cdot \bigl(\boldsymbol{r}_{\partial j \partial i \partial k} - \boldsymbol{r}_{\partial i \partial j \partial k}\bigr). \tag{20.3}$$

Выразим компоненты $\mathfrak{R}_{ijkn}$ через метрическую матрицу g_{ij}. Начнём с дифференцирования локального кобазиса:

$$\boldsymbol{r}^i \cdot \boldsymbol{r}_{\partial k} = \delta^i_k \;\Rightarrow\; \partial_j \boldsymbol{r}^i \cdot \boldsymbol{r}_{\partial k} + \boldsymbol{r}^i \cdot \boldsymbol{r}_{\partial j \partial k} = 0 \;\Rightarrow\; \partial_j \boldsymbol{r}^i = -\Gamma^i_{jk} \boldsymbol{r}^k.$$

...

Шесть независимых компонент: $\mathfrak{R}_{1212}$, $\mathfrak{R}_{1213}$, $\mathfrak{R}_{1223}$, $\mathfrak{R}_{1313}$, $\mathfrak{R}_{1323}$, $\mathfrak{R}_{2323}$.

...

Симметричный бивалентный *тензор кривизны Ricci*

$$\boldsymbol{\mathscr{R}} \equiv \frac{1}{4} \mathfrak{R}_{abij} \boldsymbol{r}^a \times \boldsymbol{r}^b \boldsymbol{r}^i \times \boldsymbol{r}^j = \frac{1}{4} \in^{[abp]} \in^{[ijq]} \mathfrak{R}_{abij} \boldsymbol{r}_{\partial p} \boldsymbol{r}_{\partial q} = \mathscr{R}^{pq} \boldsymbol{r}_{\partial p} \boldsymbol{r}_{\partial q}$$

(коэффициент $\frac{1}{4}$ используется тут для удобства) с компонентами

$$\begin{aligned}
&\mathscr{R}^{11} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{2323}\,, \\
&\mathscr{R}^{21} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1323}\,, \;\; \mathscr{R}^{22} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1313}\,, \\
&\mathscr{R}^{31} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1223}\,, \;\; \mathscr{R}^{32} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1213}\,, \;\; \mathscr{R}^{33} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1212}\,.
\end{aligned}$$

Равенство тензора Риччи нулю $\boldsymbol{\mathscr{R}} = {}^2\mathbf{0}$ (в компонентах это шесть уравнений $\mathscr{R}^{ij} = \mathscr{R}^{ji} = 0$) есть необходимое условие интегрируемости (“совместности”, “compatibility”) для нахождения вектора-радиуса $\boldsymbol{r}(q^k)$ по полю $g_{ij}(q^k)$.

Библиография

Есть много книг, которые описывают только аппарат тензорного исчисления [98, 99, 100, 16, **?**, 101].

Однако, индексная запись (это когда тензоры представлены наборами компонент) всё ещё более популярна, чем прямая безиндексная запись.

Прямая запись широко используется, например, в приложениях к книгам Anatoliy’я I. Lurie (Анатолия И. Лурье) [29, 30].

В “Теории упругости” Вениамина Блоха [7] тоже используется прямая безиндексная нотация.

Лекции R. Feynman'a [86] содержат яркое описание теории векторных полей.
Также, информация о тензорном исчислении есть часть необычной и интересной книги C. Truesdell'a [61].

глава 2

КЛАССИЧЕСКАЯ ОБЩАЯ МЕХАНИКА

§ 1. Дискретная совокупность частиц

Классическая общая механика моделирует физические объекты, дискретизируя их в совокупность частиц (“точечных масс”, “материальных точек”*).

В совокупности N частиц каждая k-ая частица имеет свою ненулевую массу $m_k = \mathsf{constant} > 0$ и функцию движения $\boldsymbol{r}_k(t)$. Функция $\boldsymbol{r}_k(t)$ измеряется относительно выбранной системы отсчёта.

Система отсчёта состоит из (рис. 9)

✓ не́которой “нулевой” точки отсчёта o,

✓ набора координат, которые определяют единицы измерения,

✓ часы.

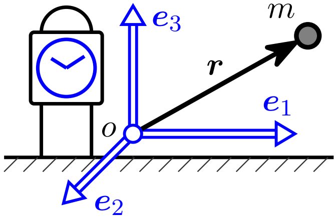


рисунок 9

Когда-то давно, системой отсчёта было некое абсолютное пространство: сначала пустое, а затем заполненное сплошной упругой средой — эфиром (æther). Позже стало ясно, что для классической механики могут быть использованы любые системы отсчёта, но предпочтение отдаётся так называемым “инерциальным” системам, где точка движется с постоянной скоростью без ускорения ($\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{r}} = \mathsf{constant}$) в отсутствии внешних взаимодействий.

* Точечная масса (материальная точка) — это концепт объекта, типично материи, который имеет ненулевую массу и является (или мыслится) бесконечно-малым по своему объёму (размерам).

Движение вдоль прямой линии с постоянной скоростью, также известное как свободное движение, предполагает отсутствие внешних взаимодействий (или приложенных сил)

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \textsf{constant} = \alpha_i \boldsymbol{e}_i \tag{1.1}$$

$$\alpha_i = \textsf{constant} \tag{1.2}$$

Мерой взаимодействия в механике является вектор силы $\boldsymbol{F}$. В широко известном* уравнении Newton'а

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) \tag{1.3}$$

правая часть может зависеть лишь от положения, скорости и явно входящего времени, тогда как ускорение $\ddot{\boldsymbol{r}}$ прямо пропорционально силе $\boldsymbol{F}$ с коэффициентом $^1\!/_m$.

* "Axiomata sive Leges Motus" ("Axioms or Laws of Motion") were written by Isaac Newton in his Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, first published in 1687. Reprint (en Latin), 1871. Translated into English by Andrew Motte, 1846.

Вот тезисы динамики совокупности частиц.

Сила, действующая на k-ую частицу (рис. 10)

$$m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \boldsymbol{F}_k, \;\; \boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{F}_k^{(e)} + \sum_j \boldsymbol{F}_{kj}^{(i)}. \tag{1.4}$$

$\boldsymbol{F}_k^{(e)}$ есть внешняя сила — такие силы исходят от объектов вне рассматриваемой системы. Второе слагаемое — сумма внутренних сил (сила $\boldsymbol{F}_{kj}^{(i)}$ есть взаимодействие, подаваемое j-ой частицей на k-ую частицу). Внутренние взаимодействия случаются только между элементами наблюдаемой системы и не влияют (механически) ни на что другое. Ни одна частица не взаимодействует сама с собой, $\boldsymbol{F}_{kk}^{(i)} = \boldsymbol{0}\ \forall k$.

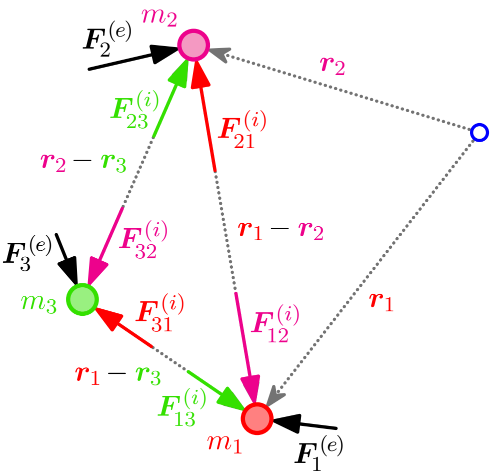


рисунок 10

Из (1.4) вместе с принципом действия–противодействия

$$\boldsymbol{F}_{kj}^{(i)} = -\boldsymbol{F}_{jk}^{(i)}\ \forall k, j \;\;\Rightarrow\;\; \sum_k \sum_j \boldsymbol{F}_{kj}^{(i)} = \boldsymbol{0},$$

вытекает баланс импульса

$$\Big(\sum_k m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k \Big)^{\bullet} = \sum_k m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{(e)}. \tag{1.5}$$

Момент, действующий на k-ую частицу

$$\boldsymbol{r}_k \times m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{(e)} + \boldsymbol{r}_k \times \sum_j \boldsymbol{F}_{kj}^{(i)}. \tag{1.6}$$

It is relative to the reference point.

Когда вдобавок к принципу действия–противодействия, внутренние взаимодействия между частицами центральны, то есть

$$\boldsymbol{F}_{kj}^{(i)} \parallel \big(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\big) \times \boldsymbol{F}_{kj}^{(i)} = \boldsymbol{0},$$

баланс момента импульса выходит*

$$\Big(\sum_k \boldsymbol{r}_k \times m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k\Big)^{\bullet} = \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{(e)}. \tag{1.7}$$

Изменения импульса и момента импульса определяются только внешними силами $\boldsymbol{F}_k^{(e)}$.

...

* $\Big(\sum_k \boldsymbol{r}_k \times m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k\Big)^{\bullet} = \sum_k \dot{\boldsymbol{r}}_k \times m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k + \sum_k \boldsymbol{r}_k \times m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_k \boldsymbol{r}_k \times m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k\,,$

$\boldsymbol{F}_{kj}^{(i)} = -\boldsymbol{F}_{jk}^{(i)}$ и $\big(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\big) \times \boldsymbol{F}_{kj}^{(i)} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{kj}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=k+1}^{N} \big(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j\big) \times \boldsymbol{F}_{kj}^{(i)} = \boldsymbol{0}$$

§ 2. Совершенно жёсткое недеформируемое твёрдое тело

Совершенно жёсткое недеформируемое тело это твёрдое* тело, в котором деформация нулевая (или пренебрежимо мала — так мала, что ею можно пренебречь). Расстояние между любыми двумя точками недеформируемого жёсткого тела остаётся постоянным независимо от действующих на него внешних сил.

Недеформируемое жёсткое тело моделируется, используя "континуальный подход" как непрерывное распределение массы (материальный континуум, сплошная среда), вместо использования "дискретного подхода" (то есть моделирования тéла как дискретной коллекции частиц).

Масса материального континуума непрерывно распределяется в своём объёме

$$dm \equiv \rho d\mathcal{V} \tag{2.1}$$

(ρ — объёмная плотность массы и $d\mathcal{V}$ — бесконечномáлый объём).

Формула с суммированием по дискретным точкам становится формулой для сплошного тела заменой масс частиц на массу (2.1) бесконечномáлого элемента объёма $d\mathcal{V}$, и с последующим интегрированием по всему объёму тела. В частности, вот формулы для импульса

$$\sum_k m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k \;\text{ становится }\; \int\limits_{\mathcal{V}} \dot{\boldsymbol{r}}\, dm \tag{2.2}$$

и момента импульса

$$\sum_k \boldsymbol{r}_k \times m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k \;\text{ становится }\; \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}\, dm. \tag{2.3}$$

Чтобы полностью описáть положение (позицию, место) любого недеформируемого тела со всеми своими точками, достаточно

* "Жёсткое" это неупругое и не гибкое, а "твёрдое" это не текучее. Твёрдое вещество сохраняет свой размер и форму без контейнера (в отличие от текучего вещества — жидкости или газа).

выбрать какую-либо уникальную точку за “полюс”, найти или задать положение $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$ выбранной точки, а также угловую ориентацию тела относительно полюса (рис. 11). Как результат, любое движение недеформируемого твёрдого тела есть либо поворот вокруг выбранного полюса, либо равное смещение полюса и всех точек тела — трансляция (линейное движение)*, либо комбинация их обоих.

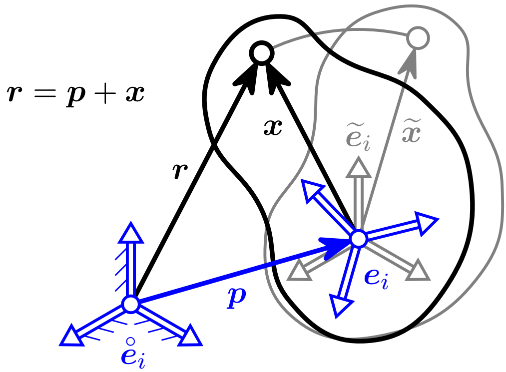


рисунок 11

$\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ — тройка ортонормальных базисных векторов, неподвижная относительно абсолютной (или любой инерциальной) системы отсчёта

Имея неподвижный базис $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ и движущийся вместе с телом базис $\boldsymbol{e}_i$, ...

Если добавить базис $\boldsymbol{e}_i$ (этот базис движется вместе с телом), то угловая ориентация тела может быть определена тензором поворота $\boldsymbol{O} \equiv \boldsymbol{e}_i \widetilde{\boldsymbol{e}}_i$.

Тогда любое движение тела полностью описывается двумя функциями $\boldsymbol{p}(t)$ и $\boldsymbol{O}(t)$.

Вектор положения некоторой точки тела

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{x} \tag{2.4}$$

* Трансляция может также быть мыслима как вращение с центром переворота на бесконечности

$\widetilde{\boldsymbol{x}} = x_i \widetilde{\boldsymbol{e}}_i$, $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$

(12.3), § 1.12

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O} \cdot \widetilde{\boldsymbol{x}}$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{p}} + \dot{\boldsymbol{x}},$$

Для недеформируемого жёсткого тела, компоненты x_i не зависят от времени: $x_i = \mathsf{constant}(t)$ и $\dot{\boldsymbol{x}} = x_i \dot{\boldsymbol{e}}_i$

$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{O}} \cdot \mathring{\boldsymbol{x}}$

$x_i \dot{\boldsymbol{e}}_i = \dot{\boldsymbol{O}} \cdot x_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i \;\Leftrightarrow\; \dot{\boldsymbol{e}}_i = \dot{\boldsymbol{O}} \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_i$

...

Импульс (количество движения) и момент импульса недеформируемого сплошного тела описываются следующими интегралами

...

...

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{p} \, dm = \boldsymbol{p} \int\limits_{\mathcal{V}} dm = \boldsymbol{p} m$$

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{x} \, dm = \boldsymbol{\Xi} m, \;\; \boldsymbol{\Xi} \equiv m^{-1} \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{x} \, dm$$

Три инерциальных характеристики тела:

✓ интегральная масса $m = \int_{\mathcal{V}} dm = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$ — масса всего тела,

✓ вектор экцентриситета $\boldsymbol{\Xi}$ — измеряет смещение выбранного полюса от “центра масс” тела,

✓ тензор инерции ${}^2\boldsymbol{\mathfrak{I}}$.

Вектор экцентриситета равняется нуль-вектору только когда выбранный полюс совпадает с “центром масс” — уникальной точкой внутри тела с вектором положения $\boldsymbol{\mathscr{r}}$, короче

$$\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{p} = \boldsymbol{\mathscr{r}}.$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{\Xi} m = \int\limits_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\mathscr{r}}) dm = \boldsymbol{0},$$

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r}\, dm - \boldsymbol{\mathscr{r}} \int\limits_{\mathcal{V}} dm = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\mathscr{r}} = m^{-1} \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r}\, dm$$

...

Вводя (псевдо)вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, ...

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i$$

...

тензор инерции ${}^2\boldsymbol{\mathfrak{I}}$

$${}^2\boldsymbol{\mathfrak{I}} \equiv - \int\limits_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{E}) \boldsymbol{\cdot} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{E})\, dm = \int\limits_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{x} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{x} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x})\, dm$$

It is assumed (can be proven?) that the inertia tensor changes only due to a rotation

$${}^2\boldsymbol{\mathfrak{I}} = \boldsymbol{O} \boldsymbol{\cdot} {}^2\mathring{\boldsymbol{\mathfrak{I}}} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}$$

and its components in basis $\boldsymbol{e}_i$ (moving together with a body) don't change over time

$${}^2\boldsymbol{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}_{ab} \boldsymbol{e}_a \boldsymbol{e}_b, \;\; \mathfrak{I}_{ab} = \mathsf{constant}(t)$$

thus the time derivative is

$$\begin{aligned} {}^2\dot{\boldsymbol{\mathfrak{I}}} &= \mathfrak{I}_{ab} \big(\dot{\boldsymbol{e}}_a \boldsymbol{e}_b + \boldsymbol{e}_a \dot{\boldsymbol{e}}_b \big) = \mathfrak{I}_{ab} \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_a \boldsymbol{e}_b + \boldsymbol{e}_a \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_b \big) = \\ &= \mathfrak{I}_{ab} \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_a \boldsymbol{e}_b - \boldsymbol{e}_a \boldsymbol{e}_b \times \boldsymbol{\omega} \big) = \boldsymbol{\omega} \times {}^2\boldsymbol{\mathfrak{I}} - {}^2\boldsymbol{\mathfrak{I}} \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Подстановка (....) в (1.5) и (1.7) даёт уравнения баланса — баланс количества движения (импульса) и баланс момента импульса — для модели сплошного недеформируемого жёсткого тела

...

здесь $\boldsymbol{f}$ — внешняя сила на единицу массы, $\boldsymbol{F}$ — результанта внешних сил (также называемая “равнодействующей силой” или "главным вектором"), $\boldsymbol{M}$ — результанта внешних пар сил ("главная пара", "главный момент").

...

— Are there any scenarios for which the center of mass is not almost exactly equivalent to the center of gravity?

— Non-uniform gravity field. In a uniform gravitational field, the center of mass is equal to the center of gravity.

...

Work

$$W(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{u}$$

as the exact (full) differential

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} \bullet d\boldsymbol{F} + \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{u}} \bullet d\boldsymbol{u}$$

by "product rule"

$$dW = d\big(\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{u}\big) = d\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{u}$$

$\dfrac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} = \boldsymbol{u}, \ \dfrac{\partial W}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{F}$

...

Constraints

Imposed on the positions and velocities of particles, there are restrictions of a geometrical or kinematical nature, called constraints.

Holonomic constraints are relations between position variables (and possibly time) which can be expressed as equality like

$$f(q^1, q^2, q^3, \ldots, q^n, t) = 0,$$

where $q^1, q^2, q^3, \ldots, q^n$ are n parameters (coordinates) that fully describe the system.

A constraint that cannot be expressed as such is nonholonomic.

Holonomic constraint depends only on coordinates and time. It does not depend on velocities or any higher time derivatives.

Velocity-dependent constraints like

$$f(q^1, q^2, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \ldots, \dot{q}^n, t) = 0$$

are mostly not holonomic.

For example, the motion of a particle constrained to lie on a sphere's surface is subject to a holonomic constraint, but if the particle is able to fall off a sphere under the influence of gravity, the constraint becomes non-holonomic. For the first case the holonomic constraint may be given by the equation: $r^2 - a^2 = 0$, where r is the distance from the centre of a sphere of radius a. Whereas the second non-holonomic case may be given by: $r^2 - a^2 \geq 0$.

Three examples of nonholonomic constraints are: when the constraint equations are nonintegrable, when the constraints have inequalities, or with complicated non-conservative forces like friction.

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q^1, q^2, \ldots, q^n, t)$$

(assuming n independent parameters/coordinates)

§ 3. Принцип виртуальной работы

Mécanique analytique (1788–89) is a two volume French treatise on analytical mechanics, written by Joseph Louis Lagrange, and published 101 years following Isaac Newton's *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

Joseph Louis Lagrange. Mécanique analytique. Nouvelle édition, revue et augmentée par l'auteur. Tome premier. Mme Ve Courcier, Paris, 1811. 490 pages.

Joseph Louis Lagrange. Mécanique analytique. Troisième édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand. Tome second. Mallet-Bachelier, Paris, 1855. 416 pages.

The historical transition from geometrical methods, as presented in Newton's Principia, to methods of mathematical analysis.

Consider the exact differential of any set of location vectors $\boldsymbol{r}_i$, that are functions of other variable parameters (coordinates) $q^1, q^2, ..., q^n$ and time t.

The actual displacement is the differential

$$d\boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^j} dq^j$$

Now, imagine an arbitrary path through the configuration space/manifold. This means it has to satisfy the constraints of the system but not the actual applied forces

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j$$

A virtual infinitesimal displacement of a system of particles refers to a change in the configuration of a system as the result of any arbitrary infinitesimal change of location vectors (or coordinates) $\delta\boldsymbol{r}_k$, consistent with the forces and constraints imposed on the system at the current/given instant t. This displacement is called "virtual" to distinguish it from an actual displacement of the system occurring in a time interval dt, during which the forces and constraints may be changing.

Assume the system is in equilibrium, that is the full force on each particle vanishes, $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}\ \forall i$. Then clearly the term $\boldsymbol{F}_i \bullet \delta\boldsymbol{r}_i$, which is the virtual work of force $\boldsymbol{F}_i$ in displacement $\delta\boldsymbol{r}_i$, also vanishes for each particle, $\boldsymbol{F}_i \bullet \delta\boldsymbol{r}_i = 0\ \forall i$. The sum of these vanishing products over all particles is likewise equal to zero:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \bullet \delta\boldsymbol{r}_i = 0.$$

Decompose the full force $\boldsymbol{F}_i$ into the applied (active) force $\boldsymbol{F}_i^{(a)}$ and the force of constraint $\boldsymbol{\Phi}_i$,

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{(a)} + \boldsymbol{\Phi}_i$$

We now restrict ourselves to systems for which the net virtual work of the force of every constraint is zero:

$$\sum_i \boldsymbol{\Phi}_i \bullet \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

We therefore have as the condition for equilibrium of a system that the virtual work of all applied forces vanishes:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(a)} \bullet \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

— the principle of virtual work.

Note that coefficients $\boldsymbol{F}_i^{(a)}$ can no longer be thought equal to zero: in common $\boldsymbol{F}_i^{(a)} \neq 0$, since $\boldsymbol{\delta r}_i$ are not independent but are bound by constraints.

Виртуальным смещением частицы с вектором-радиусом $\boldsymbol{r}_k$ это вариация $\boldsymbol{\delta r}_k$ — любое бесконечно малое изменение вектора $\boldsymbol{r}_k$, которое совместимо со связями (constraints). Если система свободна, то есть связей нет, тогда виртуальные смещения $\boldsymbol{\delta r}_k$ совершенно случайны.

Связи бывают голономные (holonomic, или геометрические), связывающие только положения (смещения) — это функции лишь координат и, возможно, времени

$$c(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{3.1}$$

— и неголономные (или дифференциальные), содержащие производные координат по времени: $c(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = 0$ и не интегрируемые до геометрических связей.

Когда все связи голономные, тогда виртуальные смещения частицы “k” удовлетворяют уравнению

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial c_j}{\partial \boldsymbol{r}_k} \bullet \boldsymbol{\delta r}_k = 0. \tag{3.2}$$

В несвободных системах все силы делятся на две группы: активные и реакции связей. Реакция $\boldsymbol{\Phi}_k$ действует со стороны всех материальных ограничителей на частицу “k” и меняется согласно уравнению (3.1) для каждой связи. Связи предполагаются идеальными:

$$\sum_k \boldsymbol{\Phi}_k \cdot \delta \boldsymbol{r}_k = 0 \quad — \tag{3.3}$$

работа реакций на любых виртуальных смещениях равна нулю.

Принцип виртуальной работы is

$$\sum_k \Bigl(\boldsymbol{F}_k^{(a)} - m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k \Bigr) \cdot \delta \boldsymbol{r}_k = 0, \tag{3.4}$$

где $\boldsymbol{F}_k^{(a)}$ — лишь активные силы, без реакций связей.

Дифференциальное вариационное уравнение (3.4) может показаться тривиальным следствием закона Newton’a (1.3) и условия идеальности связей (3.3). Однако содержание (3.4) несравненно обширнее. Читатель вскоре увидит, что принцип (3.4) может быть положен в основу механики [92]. Разные модели упругих тел, что я описываю в этой книге, основаны на этом принципе.

Для примера рассмотрим совершенно жёсткое (недеформируемое) твёрдое тело.

.... (2.4) $\Rightarrow \delta \boldsymbol{r} = \delta \boldsymbol{p} + \delta \boldsymbol{x}$

(begin copied from § 1.14)

Варьируя тождество (12.5), получим $\delta \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^\mathsf{T} = -\boldsymbol{O} \cdot \delta \boldsymbol{O}^\mathsf{T}$. Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор $\boldsymbol{\delta o}$ как $\delta \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^\mathsf{T} = \boldsymbol{\delta o} \times \boldsymbol{E}$. Приходим к соотношениям

$$\delta \boldsymbol{O} = \boldsymbol{\delta o} \times \boldsymbol{O}, \;\; \boldsymbol{\delta o} = -\tfrac{1}{2} \Bigl(\delta \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^\mathsf{T} \Bigr)_{\times}, \tag{3.5}$$

(end of copied from § 1.14)

...

Проявилась замечательная особенность (3.4): это уравнение эквивалентно системе такого порядка, каково число степеней свободы системы, то есть сколько независимых вариаций $\delta \boldsymbol{r}_k$ мы имеем. Если в системе N точек есть m связей, то число степеней свободы $n = 3N - m$.

...

§ 4. Баланс импульса, момента импульса и энергии

Эти уравнения баланса могут быть связаны со свойствами пространства и времени [93]. Сохранение импульса (количества движения) в зáмкнутой (изолированной)* системе выводится из однородности пространства *(при любом параллельном переносе — трансляции — замкнутой системы как целого свойства этой системы не меняются)*. Сохранение момента импульса — следствие изотропии пространства *(свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте этой системы как целого)*. Энергия же изолированной системы сохраняется, так как время однородно** (энергия $\mathrm{E} \equiv \mathrm{K}(q, \dot{q}) + \Pi(q)$ такой системы не зависит явно от времени).

Уравнения баланса могут быть выведены из принципа виртуальной работы (3.4). Перепишем его в виде

$$\sum_k \left(\boldsymbol{F}_k^{(e)} - m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_k + \delta W^{(i)} = 0, \tag{4.1}$$

где выделены внешние силы $\boldsymbol{F}_k^{(e)}$ и виртуальная работа внутренних сил $\delta W^{(i)} = \sum\limits_k \sum\limits_j \boldsymbol{F}_{kj}^{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_k$.

Предполагается, что внутренние силы не совершают работы на виртуальных смещениях тела как жёсткого целого ($\boldsymbol{\delta\rho}$ и $\boldsymbol{\delta o}$ —

* *Зáмкнутая (изолированная) система* это такая система частиц, которые взаимодействуют только друг с другом, но ни с какими другими телами.

** Характеристики “однородность” и “изотропность” пространства, “однородность” времени не фигурируют среди аксиом классической механики.

произвольные постоянные векторы, определяющие трансляцию и поворот)

$$\begin{aligned} &\delta \boldsymbol{r}_k = \delta\boldsymbol{\rho} + \delta\mathbf{o} \times \boldsymbol{r}_k\,, \\ &\delta\boldsymbol{\rho} = \mathbf{constant},\;\; \delta\mathbf{o} = \mathbf{constant} \end{aligned} \;\Rightarrow\; \delta W^{(i)} = 0. \tag{4.2}$$

Предпосылки-соображения для этого предположения таковы.

Первое — для случая упругих (потенциальных) внутренних сил. Тогда $\delta W^{(i)} = -\delta\Pi$ — вариация потенциала с противоположным знаком. Достаточно очевидно, что только лишь деформирование меняет Π.

Второе соображение — в том, что суммарный вектор и суммарный момент внутренних сил равен нулю

$$\sum \cdots$$

...

Принимая (4.2) и подставляя в (4.1) сначала $\delta \boldsymbol{r}_k = \delta\boldsymbol{\rho}$ (трансляция), а затем $\delta \boldsymbol{r}_k = \delta\mathbf{o} \times \boldsymbol{r}_k$ (поворот), получаем баланс импульса (...) и баланс момента импульса (...).

...

§ 5. Принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа

Two branches of analytical mechanics are Lagrangian mechanics (using generalized coordinates and corresponding generalized velocities in configuration space) and Hamiltonian mechanics (using coordinates and corresponding momenta in phase space). Both formulations are equivalent by a Legendre transformation on the generalized coordinates, velocities and momenta, therefore both contain the same information for describing the dynamics of a system.

Вариационное уравнение (3.4) удовлетворяется в любой момент времени. Проинтегрируем его* по какому-либо промежутку $[t_1, t_2]$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\delta\mathrm{K} + \sum_k \boldsymbol{F}_k \cdot \delta\boldsymbol{r}_k\Big)dt - \Big[\sum_k m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k \cdot \delta\boldsymbol{r}_k\Big]_{t_1}^{t_2} = 0. \qquad (5.1)$$

Без ущерба для общности можно принять $\delta\boldsymbol{r}_k(t_1) = \delta\boldsymbol{r}_k(t_2) = \boldsymbol{0}$, тогда внеинтегральный член исчезает.

Вводятся обобщённые координаты q^i $(i = 1, \ldots, n$ — число степеней свободы). Векторы-радиусы становятся функциями вида $\boldsymbol{r}_k(q^i, t)$, тождественно удовлетворяющими уравнениям связей (3.1). Если связи стационарны, то есть (3.1) не содержат t, то остаётся $\boldsymbol{r}_k(q^i)$. Кинетическая энергия превращается в функцию $\mathrm{K}(q^i, \dot{q}^i, t)$, где явно входящее t характерно лишь для нестационарных связей.

Весьма существенно понятие обобщённых сил Q_i. Они вводятся через выражение виртуальной работы

$$\sum_k \boldsymbol{F}_k \cdot \delta\boldsymbol{r}_k = \sum_i Q_i \delta q^i, \;\; Q_i \equiv \sum_k \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q^i}. \qquad (5.2)$$

Сто́ит акцентировать происхождение обобщённых сил через работу. Установив набор обобщённых координат системы, следует сгруппировать приложенные силы $\boldsymbol{F}_k$ в комплексы Q_i.

Если силы потенциальны с энергией $\Pi = \Pi(q^i, t)$, то

$$\sum_i Q_i \delta q^i = -\delta\Pi, \;\; Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}. \qquad (5.3)$$

Явное присутствие t может быть при нестационарности связей или зависимости физических полей от времени.

* $\delta\mathrm{K} = \sum_k m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k \cdot \delta\dot{\boldsymbol{r}}_k$, $\Big(\sum_k m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k \cdot \delta\boldsymbol{r}_k\Big)^{\bullet} = \sum_k m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k \cdot \delta\boldsymbol{r}_k + \underbrace{\sum_k m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k \cdot \delta\dot{\boldsymbol{r}}_k}_{\delta\mathrm{K}}$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_k m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k \cdot \delta\boldsymbol{r}_k \, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \delta\mathrm{K} dt - \Big[\sum_k m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k \cdot \delta\boldsymbol{r}_k\Big]_{t_1}^{t_2}$$

...

Известны уравнения Lagrange'а не только второго, но и первого рода. Рассмотрим их ради методики вывода, много раз применяемой в этой книге.

При наличии связей (3.1) равенство $\boldsymbol{F}_k = m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k$ не следует из вариационного уравнения (3.4), ведь тогда виртуальные смещения $\delta \boldsymbol{r}_k$ не независимы. Каждое из m (m — число связей) условий для вариаций (3.2) умножим на некий скаляр λ_α ($\alpha = 1, \ldots, m$) и добавим к (3.4):

$$\sum_{k=1}^{N} \Big(\boldsymbol{F}_k + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_k} - m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k \Big) \cdot \delta \boldsymbol{r}_k = 0. \tag{5.4}$$

Среди $3N$ компонент вариаций $\delta \boldsymbol{r}_k$ зависимых m. Но столько же и множителей Лагранжа: подберём λ_α так, чтобы коэффициенты(??какúе?) при зависимых вариациях обратились в нуль. Но при остальных вариациях коэффициенты(??) также должны быть нулями из-за независимости. Следовательно, все выражения в скобках $(\cdots)$ равны нулю — это и есть уравнения Lagrange'а первого рода.

Поскольку для каждой частицы

...

§ 6. Статика

Рассмотрим систему со стационарными (постоянными во времени) связями при статических (не меняющихся со временем) активных силах $\boldsymbol{F}_k$. В равновесии $\boldsymbol{r}_k =$ **constant**, и формулировка принципа виртуальной работы следующая:

$$\sum_k \boldsymbol{F}_k \cdot \delta \boldsymbol{r}_k = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_k \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q^i} = Q_i = 0. \tag{6.1}$$

Существенны обе стороны этого положения: и вариационное уравнение, и равенство нулю обобщённых сил.

Соотношения (6.1) — это самые общие уравнения статики. В литературе распространено узкое представление об уравнениях равновесия как балансе сил и моментов. Но при этом нужно понимать, что набор уравнений равновесия точно соответствует обобщённым координатам. Результирующая сила (также называемая “равнодействующей силой” или “главным вектором”) и результирующая пара сил (“главный момент”) в уравнениях равновесия фигурируют*, поскольку у системы есть степени свободы трансляции и поворота. Огромная популярность сил и моментов связана не столько с известностью статики совершенно недеформируемого твёрдого тела, но с тем, что виртуальная работа внутренних сил на смещениях системы как жёсткого целого равна нулю в любой среде.

Пусть в системе действуют два вида сил: потенциальные с энергией от обобщённых координат $\Pi(q^i)$ и дополнительные внешние $\mathring{Q}_i$. Из (6.1) следуют уравнения равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} = \mathring{Q}_i, \tag{6.2}$$

$$d\Pi = \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial q^i} dq^i = \sum_i \mathring{Q}_i \, dq^i.$$

Здесь содержится нелинейная в общем случае задача статики о связи положения равновесия q^i с нагрузками $\mathring{Q}_i$.

В линейной системе с квадратичным потенциалом вида $\Pi = \frac{1}{2} C_{ik} q^k q^i$

$$\sum_k C_{ik} q^k = \mathring{Q}_i. \tag{6.3}$$

Тут фигурируют элементы C_{ik} “матрицы жёсткости”, координаты q^k и нагрузки $\mathring{Q}_i$.

* Со времён описания приведения любой системы сил, действующей на одно и то же совершенно жёсткое тело, к одной силе и одной паре (вокруг выбранной точки) в книге “Éléments de statique” Louis’a Poinsot.

Сказанное возможно обобщить и на континуальные линейные упругие среды.

Матрица жёсткости C_{ik} обычно бывает положительной (таково́ свойство конструкций и в природе, и в технике). Тогда $\det C_{ik} > 0$, линейная алгебраическая система (6.3) однозначно разрешима, а решение её можно заменить минимизацией квадратичной формы

$$\mathscr{E}(q^j) \equiv \Pi - \sum_i \mathring{Q}_i q^i = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} q^i C_{ik} q^k - \sum_i \mathring{Q}_i q^i \to \min. \tag{6.4}$$

Бывает однако, что конструкция неудачно спроектирована, тогда матрица жёсткости сингулярна (необратима) и $\det C_{ik} = 0$ (или же весьма близок к нулю — nearly singular матрица с $\det C_{ik} \approx 0$). Тогда решение линейной проблемы статики (6.3) существует лишь при ортогональности столбца нагрузок $\mathring{Q}_i$ всем линейно независимым решениям однородной сопряжённой системы

...

Известные теоремы статики линейно упругих систем легко доказываются в случае конечного числа степеней свободы. Теорема Clapeyron'а выражается равенством

...

Теорема о взаимности работ (“работа W_{12} сил первого варианта на смещениях от сил второго равна работе W_{21} сил второго варианта на смещениях от сил первого”) мгновенно выводится из (6.3):

(...)

Тут существенна симметрия матрицы жёсткости C_{ij}, то есть консервативность системы.

...

Но вернёмся к проблеме (6.2), иногда называемой теоремой Lagrange'а. Её можно обратить преобразованием Лежандра Legendre (involution) transform(ation):

$$d\left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i\right) = \sum_i d\left(\mathring{Q}_i q^i\right) = \sum_i \left(q^i d\mathring{Q}_i + \mathring{Q}_i dq^i\right),$$

$$d\left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i\right) - \overbrace{\sum_i \mathring{Q}_i dq^i}^{d\Pi} = \sum_i q^i d\mathring{Q}_i ,$$

$$d\left(\sum_i \mathring{Q}_i q^i - \Pi\right) = \sum_i q^i d\mathring{Q}_i = \sum_i \frac{\partial\widehat{\Pi}}{\partial\mathring{Q}_i} d\mathring{Q}_i ;$$

$$q^i = \frac{\partial\widehat{\Pi}}{\partial\mathring{Q}_i}, \quad \widehat{\Pi}(\mathring{Q}_i) = \sum_i \mathring{Q}_i q^i - \Pi. \tag{6.5}$$

Это теорема Castigliano, $\widehat{\Pi}$ называется дополнительной энергией. В линейной системе (6.3) $\Rightarrow \widehat{\Pi} = \Pi$. Теорема (6.5) бывает очень полезна — когда легко находится $\widehat{\Pi}(\mathring{Q}_i)$. Встречаются так называемые статически определимые системы, в которых все внутренние силы удаётся найти лишь из баланса сил и моментов. Для них (6.5) эффективна.

В отличие от линейной задачи (6.3), нелинейная задача (6.2) может не иметь решений вовсе или же иметь их нéсколько.

....

Рассказ о статике в общей механике закончим принципом d'Alembert'а: уравнения динамики отличаются от статических лишь наличием дополнительных "сил инерции" $m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k$. Принцип d'Alembert'а достаточно очевиден, но бездумное применение может привести к ошибкам. Например, уравнения вязкой жидкости в статике и в динамике отличаются не только лишь инерционными добавками. Но для твёрдых упругих тел принцип d'Alembert'а полностью справедлив.

§ 7. Механика относительного движения

До этого не ставился вопрос о системе отсчёта, всё рассматривалось в некой “абсолютной” системе или одной из инерциальных систем (§ 1). Теперь представим себе две системы: “абсолютную” и “подвижную”

...

$$\mathring{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{r} = \rho_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i, \;\; \boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$$
$$\dot{\mathring{\boldsymbol{r}}} = \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{x}}$$
$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\rho}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i, \;\; \dot{\boldsymbol{x}} = \big(x_i \boldsymbol{e}_i\big)^{\bullet} = \dot{x}_i \boldsymbol{e}_i + x_i \dot{\boldsymbol{e}}_i$$

$x_i \neq \mathsf{constant} \Rightarrow \dot{x}_i \neq 0$

По (12.11, § 1.12)

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i \;\Rightarrow\; x_i \dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times x_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}$$

$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{x}_i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{v} \equiv \dot{\mathring{\boldsymbol{r}}} = \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{v}_e} \underbrace{- \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x} + \dot{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{v}_{rel}}$$

$\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x} = \dot{x}_i \boldsymbol{e}_i \equiv \boldsymbol{v}_{rel}$ — relative velocity, $\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{v}_e$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_{rel} \tag{7.1}$$

...

$$\dot{\mathring{\boldsymbol{r}}} = \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{x}}$$
$$\ddot{\mathring{\boldsymbol{r}}} = \ddot{\boldsymbol{r}} + \ddot{\boldsymbol{x}}$$
$$\boldsymbol{w} \equiv \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\mathring{\boldsymbol{r}}} = \ddot{\boldsymbol{r}} + \ddot{\boldsymbol{x}}$$
$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\rho}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_i, \;\; \ddot{\boldsymbol{x}} = \big(x_i \boldsymbol{e}_i\big)^{\bullet\bullet} = \big(\dot{x}_i \boldsymbol{e}_i + x_i \dot{\boldsymbol{e}}_i\big)^{\bullet} = \ddot{x}_i \boldsymbol{e}_i + \dot{x}_i \dot{\boldsymbol{e}}_i + \dot{x}_i \dot{\boldsymbol{e}}_i + x_i \ddot{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i \;\Rightarrow\; \ddot{\boldsymbol{e}}_i = \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i\big)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{e}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i\big)$$

$$x_i \ddot{\boldsymbol{e}}_i = x_i \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i\big)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times x_i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{\omega} \times x_i \boldsymbol{e}_i\big) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}\big)$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i \;\Rightarrow\; \dot{x}_i \dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \dot{x}_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{rel}$$

$\ddot{x}_i \boldsymbol{e}_i \equiv \boldsymbol{w}_{rel}$ — relative acceleration
$2\dot{x}_i \dot{\boldsymbol{e}}_i = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{rel} \equiv \boldsymbol{w}_{Cor}$ — Coriolis acceleration

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{w}_{rel} + \boldsymbol{w}_{Cor} + x_i \ddot{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\begin{gathered}\big(x_i \dot{\boldsymbol{e}}_i\big)^{\bullet} = \dot{x}_i \dot{\boldsymbol{e}}_i + x_i \ddot{\boldsymbol{e}}_i = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{w}_{Cor} + x_i \ddot{\boldsymbol{e}}_i \\ \big(x_i \dot{\boldsymbol{e}}_i\big)^{\bullet} = \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}\big)^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{x}}\end{gathered}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\omega} \times \big(\dot{x}_i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}\big) = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \dot{x}_i \boldsymbol{e}_i}_{\dot{x}_i \dot{\boldsymbol{e}}_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_{Cor}} + \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}\big)$$

...

§ 8. Малые колебания (вибрации)

Если статика линейной системы описывается уравнением (6.3), то в динамике мы имеем

$$\sum_k \Big(A_{ik}\ddot{q}_k + C_{ik}q^k\Big) = \mathring{Q}_i(t), \tag{8.1}$$

где A_{ik} — симметричная и положительная “матрица кинетической энергии”.

Любое описание колебаний почти всегда включает термин “мода”. Мода вибрации может быть определена как способ вибрирования или паттерн вибрации. Нормальная мода есть паттерн периодического движения, когда все части колеблющейся системы движутся синусоидально одинаковой частотой и с фиксированным соотношением фаз. Свободное движение, описываемое нормальными модами, происходит на фиксированных частотах — натуральных резонансных частотах колеблющейся системы.

Самое общее движение колеблющейся системы есть некоторая суперпозиция нормальных мод этой системы.*

Изучение колеблющейся системы чаще всего начинается с ортогональных (нормальных) “мод”— гармоник, свободных (без какой-либо движущей или демпфирующей силы) синусоидальных колебаний

$$q^k(t) = \overset{*}{q}_k \sin \omega_k t.$$

Множители $\overset{*}{q}_k = \mathsf{constant}$ — ортогональные (нормальные) “моды” колебания, ω_k — натуральные (резонансные, собственные) частоты. Этот набор, зависящий от структуры колеблющегося объекта, материалов и краевых условий, находится из задачи на собственные значения

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{Q}_i = 0, \;\; \overset{**}{q}_k = -\omega_k^2 \overset{*}{q}_k \sin \omega_k t, \;\; (8.1) \;\; \Rightarrow \\ \Rightarrow \;\; \sum_k \Bigl(C_{ik} - A_{ik} \, \omega_k^2 \Bigr) \overset{*}{q}_k \sin \omega_k t = 0 \end{gathered} \tag{8.2}$$

...

Интеграл Duhamel’я is a way of calculating the response линейных систем to an arbitrary time-varying external perturbation.

...

Библиография

В длинном списке книг про классическую механику читатель может найти работы и специалистов по механике [87, 88, 94, 95, 96], и широко ориентированных физиков-теоретиков [93, 89]. Весьма интересна книга Феликса Р. Гантмахер’а [92] с компактным, но полным изложением основ.

* Моды “нормальны” в смысле, что они движутся независимо, и возбуждение одной моды никогда не вызовет движение другой моды. В математических терминах нормальные моды ортогональны друг другу. В музыке нормальные моды вибрирующих инструментов (струн, воздушных трубок, перкуссии и других) называются “harmonics” или “overtones”.

глава 3

НЕЛИНЕЙНО-УПРУГАЯ БЕЗМОМЕНТНАЯ СРЕДА

§1. Континуум и два подхода к его описанию

Согласно атомной теории, вещество состоит из дискретных частиц — атомов. Поэтому модель системы частиц с массами m_k и векторами положения $\boldsymbol{r}_k(t)$ может показаться подходящей даже несмотря́ на невообразимое число степеней свободы, так как объёмы памяти и быстрота современных компьютеров характеризуются тоже астрономическими числами.

Но всё же сто́ит выбрать фундаментально и качественно иную модель — модель материального континуума, или сплошной среды, где масса распределена континуально (непрерывно) в объёме, и конечный объём $\mathcal{V}$ содержит массу

$$m = \int\limits_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}, \;\; dm = \rho d\mathcal{V}, \tag{1.1}$$

здесь ρ — объёмная плотность массы и $d\mathcal{V}$ — бесконечномалый элемент объёма.

Реальная материя моделируется как континуум, который может быть мыслим как бесконечное множество исчезающе ма́лых частиц, соединённых вместе.

Пространство материальных точек — лишь первая и простая идея непрерывного распределения массы. Возможны более сложные модели, где частицы имеют больше степеней свободы: не только трансляции, но также поворота, внутренней деформации и другие. Зная, что такие модели привлекают всё бо́льший интерес, в этой главе мы рассмотрим классический концепт о сплошной среде как “сделанной из простых точек”.

В каждый момент времени t деформируемый континуум занимает некий объём $\mathcal{V}$ пространства. Этот объём движется и деформируется, но набор частиц внутри этого объёма постоянен. Это баланс массы (“материя не создаётся и не аннигилируется”)

$$dm = \rho d\mathcal{V} = \rho' d\mathcal{V}' = \mathring{\rho} d\mathring{\mathcal{V}}, \quad m = \int\limits_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int\limits_{\mathcal{V}'} \rho' d\mathcal{V}' = \int\limits_{\mathring{\mathcal{V}}} \mathring{\rho} d\mathring{\mathcal{V}}. \tag{1.2}$$

Вводя какие-либо переменные параметры q^i — криволинейные координаты, имеем отношение для положений частиц

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^i, t). \tag{1.3}$$

...

Материальное описание

в начальный момент, в так называемой начальной (оригинальной, ~~отсчётной~~, “материальной”) конфигурации

в какой-то начальный момент $t = 0$

“запоминается” начальная (“материальная”) конфигурация — locations in space of particles at some arbitrarily chosen “initial” moment $t = 0$

$$\mathring{\boldsymbol{r}}(q^i) \equiv \boldsymbol{r}(q^i, 0)$$

Морфизм (функция) $\mathring{\boldsymbol{r}} = \mathring{\boldsymbol{r}}(q^i)$

isomorphism (bijective mapping) (invertible one-to-one relation) (взаимно однозначное)

Subsequent locations in space of particles are then dependent variables — functions of time and of the initial (material, “Lagrangian”) coordinates/location $\mathring{\boldsymbol{r}}$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\mathring{\boldsymbol{r}}, t).$$

Для пространственного дифференцирования (постоянных во времени) отношений типа $\varphi = \varphi(\mathring{\boldsymbol{r}})$

вводится локальный касательный базис $\mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i}$ и взаимный базис $\mathring{\boldsymbol{r}}^i$

$$\mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \equiv \partial_i \mathring{\boldsymbol{r}} \;\left(\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}\right), \quad \mathring{\boldsymbol{r}}^i \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial j} = \delta^i_j$$

“материальный” оператор Hamilton’a $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}$

$$\boldsymbol{E} = \mathring{\boldsymbol{r}}^i \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} = \mathring{\boldsymbol{r}}^i \partial_i \mathring{\boldsymbol{r}} = \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \mathring{\boldsymbol{r}}, \quad \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \equiv \mathring{\boldsymbol{r}}^i \partial_i, \tag{1.4}$$

тогда $d\varphi = d\mathring{\boldsymbol{r}} \cdot \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \varphi$.

...

Но может быть эффективен ещё иной подход — *пространственное (или “эйлерово”) опи́сание*, когда вместо фокусирования на том, как частицы континуума движутся из начальной конфигурации в пространстве и времени, процессы рассматриваются в неподвижных точках пространства с течением времени. С отношениями типа $\rho = \rho(\boldsymbol{r}, t)$, мы следим за происходящим именно в этом месте. Разные частицы, непрерывно уходящие и приходящие сюда, не смущают нас.

...

баланс массы в пространственном описании (уравнение непрерывности (сплошности, неразрывности) для массы)

...

Jaumann derivative (“corotational time derivative”) was first introduced by Gustav Jaumann*

Es sei $\frac{\partial}{\partial t}$ der Operator der lokalen Fluxion, d. i. der partiellen Fluxion in einem gegen das Koordinatensystem ruhenden Punkte des Raumes. Ferner sei $\frac{d}{dt}$ der Operator der totalen Fluxion, welcher definiert wird durch

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} a,$$

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \overset{3}{=} \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} ; \boldsymbol{a} - \tfrac{1}{2} \bigl(\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \bigr) \times \boldsymbol{a},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \overset{9}{=} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} ; \boldsymbol{\alpha} - \tfrac{1}{2} \bigl(\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \bigr).$$

* **Gustav Jaumann**. Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (I. Mitteilung) // Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa, Band CXX, 1911. Seiten 385–530.

Endlich verwenden wir die körperliche Fluxion eines Skalars:

$$\frac{\delta}{\delta t} a = \frac{\partial}{\partial t} a + \operatorname{div} a\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt} a + a \operatorname{div} \boldsymbol{v}.$$

körperliche — bodily/телесная, material/вещественная(материальная), physical/физическая

$\boldsymbol{\nabla} \cdot (a\boldsymbol{v}) = a \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} a$

...

Пусть $\boldsymbol{\upsilon}(\mathring{\boldsymbol{r}}, t)$ — какое-либо поле (?? только в материальном описании от $\mathring{\boldsymbol{r}}$??). Найдём скорость изменения интеграла по объёму

$$\Upsilon \equiv \int\limits_{\mathcal{V}} \rho \upsilon d\mathcal{V}$$

("$\boldsymbol{\upsilon}$ есть Υ на единицу массы"). Кажущееся сложным вычисление $\dot{\Upsilon}$ (ведь $\mathcal{V}$ деформируется) на са́мом деле весьма простое вместе с (1.2):

$$\Upsilon = \int\limits_{\mathring{\mathcal{V}}} \mathring{\rho} \upsilon d\mathring{\mathcal{V}} \;\Rightarrow\; \dot{\Upsilon} = \int\limits_{\mathring{\mathcal{V}}} \mathring{\rho} \dot{\upsilon} d\mathring{\mathcal{V}} = \int\limits_{\mathcal{V}} \rho \dot{\upsilon} d\mathcal{V}. \tag{1.5}$$

$$\Psi = \int_{\mathcal{V}} \rho \psi \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \psi \, d\mathcal{V}' \Rightarrow \dot{\Psi} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\psi} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \dot{\psi} \, d\mathcal{V}'$$

...

Не сто́ит противопоставлять материальное и пространственное описания. В этой книге используются оба, в зависимости от ситуации.

§ 2. Градиент движения

Имея функцию движения $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^i, t)$, $\mathring{\boldsymbol{r}}(q^i) \equiv \boldsymbol{r}(q^i, 0)$, операторы "набла" $\boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{r}^i \partial_i$, $\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \equiv \mathring{\boldsymbol{r}}^i \partial_i$ и гля́дя на дифференциальные отношения для какого-либо бесконечномалого вектора в двух конфигурациях, текущей с $d\boldsymbol{r}$ и начальной с $d\mathring{\boldsymbol{r}}$

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{r} &= d\mathring{\boldsymbol{r}} \cdot \overbrace{\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}}^{\substack{\boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} \\ \mathring{\boldsymbol{r}}^i \boldsymbol{r}_{\partial i}}} = \overbrace{\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}}}^{\substack{\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{r}_{\partial i} \mathring{\boldsymbol{r}}^i}} \cdot\, d\mathring{\boldsymbol{r}} \\
d\mathring{\boldsymbol{r}} &= d\boldsymbol{r} \cdot \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \mathring{\boldsymbol{r}}}_{\substack{\boldsymbol{r}^i \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \\ \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}}}} = \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \mathring{\boldsymbol{r}}^{\mathsf{T}}}_{\substack{\mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \boldsymbol{r}^i \\ \boldsymbol{F}^{-1}}} \cdot\, d\boldsymbol{r}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

приходит на ум ввести "градиент движения"*, взяв one of these tensor multipliers for it: $\boldsymbol{F} \equiv \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{r}_{\partial i} \mathring{\boldsymbol{r}}^i$.

Почему именно этот? Причина выбрать $\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}}$ — другое выражение для дифференциала

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}} \cdot d\mathring{\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}}$$

$$d\mathring{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}}{\partial \boldsymbol{r}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}} = \partial_i \boldsymbol{\zeta} \mathring{\boldsymbol{r}}^i \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{r}} = \partial_i \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{r}^i$$

* Тензору $\boldsymbol{F}$ не вполне подходит его более популярное название "градиент деформации", поскольку этот тензор описывает не только саму́ деформацию, но и поворот тела как целого без деформации.

...

$$\boldsymbol{E} = \underbrace{\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathring{\boldsymbol{r}}}_{\frac{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}}{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}}} = \underbrace{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}}_{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{r}}}$$

...

Для декартовых координат с ортонормальным базисом $\boldsymbol{e}_i =$ **constant**

$$\boldsymbol{r} = x_i(t)\,\boldsymbol{e}_i,\;\; \mathring{\boldsymbol{r}} = x_i(0)\,\boldsymbol{e}_i = \mathring{x}_i\boldsymbol{e}_i,\;\; \mathring{x}_i \equiv x_i(0),$$

$$\mathring{\boldsymbol{\nabla}} = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial \mathring{x}_i} = \boldsymbol{e}_i\mathring{\partial}_i,\;\; \boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i} = \boldsymbol{e}_i\partial_i,$$

$$\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \mathring{x}_i} = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial(x_j\boldsymbol{e}_j)}{\partial \mathring{x}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \mathring{x}_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \mathring{\partial}_i x_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,$$

$$\boldsymbol{\nabla}\mathring{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathring{x}_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \partial_i\mathring{x}_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

...

По теореме о полярном разложении (§ 1.15), градиент движения разложи́м на тензор поворота $\boldsymbol{O}$ и симметричные положительные тензоры искажений $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{O}$$

...

Когда поворота нет ($\boldsymbol{O} = \boldsymbol{E}$), тогда $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}$.

...

§ 3. Меры (тензоры) деформации

А это — где возникает сверх сложность. Although, the multivariance is often seen as a big gift.

Градиент движения $\boldsymbol{F}$ характеризует и деформацию тела, и поворот тела как целого. Тензорами лишь-деформации являются тензоры искажений $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ из полярного разложения

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{O} \bullet \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \bullet \boldsymbol{O}$, так же как и другие тензоры, происходящие от $\boldsymbol{U}$ или (и) $\boldsymbol{V}$.

Широко используются “квадраты” $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{U}^2 =\right)\ \boldsymbol{U} \bullet \boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} \bullet \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{G}, \\ \left(\boldsymbol{V}^2 =\right)\ \boldsymbol{V} \bullet \boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} \equiv \boldsymbol{\Phi}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Это тензор деформации Green’а (или правый тензор Cauchy–Green’а) $\boldsymbol{G}$ и тензор деформации Finger’а (или левый тензор Cauchy–Green’а) $\boldsymbol{\Phi}$. У них есть удобная связь с градиентом движения $\boldsymbol{F}$, без вычисления квадратных корней (как это нужно для $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$). Таковá большáя причина, почему тензоры $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ так широкó используются.

Тензор $\boldsymbol{G}$ впервые использовал George Green*.

Обращение $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{G}$ даёт ещё два тензора деформации

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}^{-2} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} = \left(\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} = \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}} \bullet \boldsymbol{F}^{-1} \equiv {}^2\boldsymbol{c}, \\ \boldsymbol{U}^{-2} = \boldsymbol{G}^{-1} = \left(\boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} \bullet \boldsymbol{F}\right)^{-1} = \boldsymbol{F}^{-1} \bullet \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}} \equiv {}^2\boldsymbol{f}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

каждый из которых иногда называется тензором Piola или тензором Finger’а. Обратный к левому тензору Cauchy–Green’а $\boldsymbol{\Phi}$ — тензор деформации Cauchy ${}^2\boldsymbol{c}$.

Компоненты этих тензоров

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= \mathring{\boldsymbol{r}}^i \boldsymbol{r}_{\partial i} \bullet \boldsymbol{r}_{\partial j} \mathring{\boldsymbol{r}}^j = G_{ij} \mathring{\boldsymbol{r}}^i \mathring{\boldsymbol{r}}^j,\ G_{ij} \equiv \boldsymbol{r}_{\partial i} \bullet \boldsymbol{r}_{\partial j}, \\ {}^2\boldsymbol{f} &= \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \boldsymbol{r}^i \bullet \boldsymbol{r}^j \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial j} = G^{ij} \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial j},\ G^{ij} \equiv \boldsymbol{r}^i \bullet \boldsymbol{r}^j, \\ {}^2\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{r}^i \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \bullet \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial j} \boldsymbol{r}^j = g_{ij} \boldsymbol{r}^i \boldsymbol{r}^j,\ g_{ij} \equiv \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \bullet \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial j}, \\ \boldsymbol{\Phi} &= \boldsymbol{r}_{\partial i} \mathring{\boldsymbol{r}}^i \bullet \mathring{\boldsymbol{r}}^j \boldsymbol{r}_{\partial j} = g^{ij} \boldsymbol{r}_{\partial i} \boldsymbol{r}_{\partial j},\ g^{ij} \equiv \mathring{\boldsymbol{r}}^i \bullet \mathring{\boldsymbol{r}}^j \end{aligned}$$

совпадают с компонентами единичного (метрического) тензора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{r}_{\partial i} \boldsymbol{r}^i = G_{ij} \boldsymbol{r}^i \boldsymbol{r}^j = \boldsymbol{r}^i \boldsymbol{r}_{\partial i} = G^{ij} \boldsymbol{r}_{\partial i} \boldsymbol{r}_{\partial j} \\ = \mathring{\boldsymbol{r}}^i \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} = g^{ij} \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial j} = \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \mathring{\boldsymbol{r}}^i = g_{ij} \mathring{\boldsymbol{r}}^i \mathring{\boldsymbol{r}}^j, \end{aligned}$$

* **Green, George**. (1839) On the propagation of light in crystallized media. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.* 1842, vol. 7, part II, pages 121–140.

но базисы компонент разные. Пользуясь индексной записью, легко запутаться в различиях между единичным тензором $\boldsymbol{E}$ и тензорами деформации $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{\varPhi}$, ${}^2\!\boldsymbol{f}$, ${}^2\boldsymbol{c}$. Прямая безиндексная запись имеет тут явное преимущество.

Как упоминалось в § 1.15, инварианты тензоров искажений $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ одинаковые. Если w_i это три собственных значения $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$, то есть корни характеристических уравнений для этих тензоров, то вот их инварианты:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{I}(\boldsymbol{U}) = \mathrm{I}(\boldsymbol{V}) = \operatorname{trace}\boldsymbol{U} = \operatorname{trace}\boldsymbol{V} = \sum U_{jj} = \sum V_{jj} = \sum w_i, \\
\mathrm{II}(\boldsymbol{U}) = \mathrm{II}(\boldsymbol{V}) = w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3, \\
\mathrm{III}(\boldsymbol{U}) = \mathrm{III}(\boldsymbol{V}) = w_1 w_2 w_3.
\end{gathered}
$$

Инварианты $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{\varPhi}$ тоже совпадают:

$$
\mathrm{I}(\boldsymbol{G}) = \mathrm{I}(\boldsymbol{\varPhi}), \ldots
$$

Без деформации

$$
\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} = \boldsymbol{G} = \boldsymbol{\varPhi} = {}^2\!\boldsymbol{f} = {}^2\boldsymbol{c} = \boldsymbol{E},
$$

поэтому как характеристики деформации сто́ит взять разности типа $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} - \boldsymbol{E}$, ...

...

The right Cauchy–Green deformation tensor

George Green discovered a deformation tensor known as the right Cauchy–Green deformation tensor or Green's deformation tensor

$$
\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}^2 \quad \text{или} \quad G_{ij} = F_{k'i} F_{k'j} = \frac{\partial x_{k'}}{\partial \mathring{x}_i} \frac{\partial x_{k'}}{\partial \mathring{x}_j}.
$$

This tensor gives the "square" of local change in distances due to deformation: $d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = d\mathring{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{G} \cdot d\mathring{\boldsymbol{r}}$

The most popular invariants of $\boldsymbol{G}$ are

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(\boldsymbol{G}) &\equiv \operatorname{trace} \boldsymbol{G} = G_{ii} = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 \\
\mathrm{II}(\boldsymbol{G}) &\equiv \tfrac{1}{2}\bigl(G_{jj}^2 - G_{ik}G_{ki}\bigr) = \gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2 \\
\mathrm{III}(\boldsymbol{G}) &\equiv \det \boldsymbol{G} = \gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2
\end{aligned}$$

where γ_i are stretch ratios for unit fibers that are initially oriented along directions of eigenvectors of the right stretch tensor $\boldsymbol{U}$.

The inverse of Green's deformation tensor

Sometimes called the Finger tensor or the Piola tensor, the inverse of the right Cauchy–Green deformation tensor

$$^2\!\boldsymbol{f} = \boldsymbol{G}^{-1} = \boldsymbol{F}^{-1} \!\cdot \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}} \quad \text{или} \quad f_{ij} = \frac{\partial \mathring{x}_i}{\partial x_{k'}} \frac{\partial \mathring{x}_j}{\partial x_{k'}}$$

The left Cauchy–Green or Finger deformation tensor

Swapping multipliers in the formula for the right Green–Cauchy deformation tensor leads to the left Cauchy–Green deformation tensor, defined as

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{V}^2 \quad \text{или} \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \mathring{x}_k} \frac{\partial x_j}{\partial \mathring{x}_k}$$

The left Cauchy–Green deformation tensor is often called the Finger's deformation tensor, named after Josef Finger (1894).

Invariants of $\boldsymbol{\Phi}$ are also used in expressions for strain energy density functions. The conventional invariants are defined as

$$\begin{aligned}
I_1 &\equiv \Phi_{ii} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\
I_2 &\equiv \tfrac{1}{2}\bigl(\Phi_{ii}^2 - \Phi_{jk}\Phi_{kj}\bigr) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \\
I_3 &\equiv \det \boldsymbol{\Phi} = J^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2
\end{aligned}$$

($J \equiv \det \boldsymbol{F}$ — якобиан, определитель градиента движения)

The Cauchy deformation tensor

The Cauchy deformation tensor is defined as the inverse of the left Cauchy–Green deformation tensor

$$ {}^2\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} = \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \quad \text{или} \quad c_{ij} = \frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_j} $$

$$ d\mathring{\boldsymbol{r}} \cdot d\mathring{\boldsymbol{r}} = d\boldsymbol{r} \cdot {}^2\boldsymbol{c} \cdot d\boldsymbol{r} $$

This tensor is also called the Piola tensor or the Finger tensor in rheology and fluid dynamics literature.

Finite strain tensors

The concept of *strain* is used to evaluate how much a given displacement differs locally from a body displacement as a whole (a "rigid body displacement"). One of such strains for large deformations is the *Green strain tensor* (*Green–Lagrangian strain tensor*, *Green–Saint-Venant strain tensor*), defined as

$$ \boldsymbol{C} = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{E}\big) \quad \text{или} \quad C_{ij} = \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial x_{k'}}{\partial \mathring{x}_i} \frac{\partial x_{k'}}{\partial \mathring{x}_j} - \delta_{ij}\bigg) $$

or as the function of the displacement gradient tensor

$$ \boldsymbol{C} = \tfrac{1}{2}\Big(\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{u} + \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}} + \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{u} \cdot \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}\Big) $$

in cartesian coordinates

$$ C_{ij} = \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial u_j}{\partial \mathring{x}_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \mathring{x}_j} + \frac{\partial u_k}{\partial \mathring{x}_i} \frac{\partial u_k}{\partial \mathring{x}_j}\bigg) $$

The Green strain tensor measures how much $\boldsymbol{G}$ differs from $\boldsymbol{E}$.

The *Almansi–Hamel strain tensor*, referenced to the deformed configuration ("Eulerian description"), is defined as

$$ {}^2\boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{E} - {}^2\boldsymbol{c}\big) = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\Phi}^{-1}\big) \quad \text{или} \quad a_{ij} = \frac{1}{2}\bigg(\delta_{ij} - \frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_j}\bigg) $$

or as function of the displacement gradient

$$^2\boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{\nabla u}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\nabla u} - \boldsymbol{\nabla u} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\nabla u}^{\mathsf{T}}\big)$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

Seth–Hill family of abstract strain tensors

B. R. Seth was the first to show that the Green and Almansi strain tensors are special cases of a more abstract measure of deformation. The idea was further expanded upon by Rodney Hill in 1968 (publication??). The Seth–Hill family of strain measures (also called Doyle–Ericksen tensors) is expressed as

$$\boldsymbol{D}_{(m)} = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{U}^{2m} - \boldsymbol{E}\right) = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{G}^{m} - \boldsymbol{E}\right)$$

Для разных m это даёт

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{(1)} &= \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{E}\big) = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{E}) && \text{Green strain tensor}\\
\boldsymbol{D}_{(1/2)} &= \boldsymbol{U} - \boldsymbol{E} = \boldsymbol{G}^{1/2} - \boldsymbol{E} && \text{Biot strain tensor}\\
\boldsymbol{D}_{(0)} &= \ln \boldsymbol{U} = \tfrac{1}{2}\ln \boldsymbol{G} && \text{logarithmic strain, Hencky strain}\\
\boldsymbol{D}_{(-1)} &= \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{U}^{-2}\big) && \text{Almansi strain}
\end{aligned}$$

The second-order approximation of these tensors is

$$\boldsymbol{D}_{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla u} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\nabla u}^{\mathsf{T}} - (1-m)\,\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\varepsilon}$$

where $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\nabla u}^{\mathsf{S}}$ is the infinitesimal deformation tensor.

Many other different definitions of measures $\boldsymbol{D}$ are possible, provided that they satisfy these conditions:

- ✓ $\boldsymbol{D}$ vanishes for any movement of a body as a rigid whole
- ✓ dependence of $\boldsymbol{D}$ on displacement gradient tensor $\nabla \boldsymbol{u}$ is continuous, continuously differentiable and monotonic
- ✓ it's desired that $\boldsymbol{D}$ reduces to the infinitesimal linear deformation tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ when $\boldsymbol{\nabla u} \to 0$

For example, tensors from the set

$$\boldsymbol{D}^{(n)} = \left(\boldsymbol{U}^{n} - \boldsymbol{U}^{-n}\right) / \, 2n$$

aren't from the Seth–Hill family, but for any n they have the same 2nd-order approximation as Seth–Hill measures with $m = 0$.

Wikipedia, the free encyclopedia — Finite strain theory

...

Логарифмическая деформация, деформация Hencky

Heinrich Hencky. Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen. Zeitschrift für technische Physik, Vol. 9 (1928), Seiten 215–220.

....

§ 4. Поле скоростей

Эта тема обсуждается в почти любой книге о механике сплошной среды, однако для твёрдых упругих сред она не столь насущна. Среди разных моделей материального континуума, упругое твёрдое тело выделяется интересной возможностью вывода полного набора (системы) уравнений для него единой логически безупречной процедурой. Но пока мы идём путём, обычным для механики сплошной текучей среды.

Итак, есть поле скоростей в пространственном описании $\boldsymbol{v} \equiv \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$. Разложение тензора $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}^{i}\partial_{i}\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}^{i}\dot{\boldsymbol{r}}_{\partial i}$* на симметричную и кососимметричную части (§ 1.8)

$$\boldsymbol{\nabla}\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\nabla}\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathsf{S}} - \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{\nabla} \times \dot{\boldsymbol{r}}\big) \times \boldsymbol{E}$$

* For sufficiently smooth functions, partial derivatives always commute, space and time ones too. Thus

$$\frac{\partial}{\partial q^{i}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^{i}} \quad \text{или} \quad \partial_{i}\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\partial i}$$

или, вводя тензор скорости деформации (rate of deformation tensor, rate of stretching tensor, strain rate tensor) $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ и тензор вихря (vorticity tensor, rate of rotation tensor, spin tensor) $\boldsymbol{\mathcal{W}}$

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\nabla v} = \boldsymbol{\mathcal{D}} - \boldsymbol{\mathcal{W}},\\
\boldsymbol{\mathcal{D}} \equiv \boldsymbol{\nabla v}^{\mathsf{S}} = \boldsymbol{\nabla \dot{r}}^{\mathsf{S}} = \tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{r}^i \dot{\boldsymbol{r}}_{\partial i} + \dot{\boldsymbol{r}}_{\partial i}\boldsymbol{r}^i\bigr),\\
-\boldsymbol{\mathcal{W}} \equiv \boldsymbol{\nabla v}^{\mathsf{A}} = -\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{w} \equiv \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{r}^i\times\dot{\boldsymbol{r}}_{\partial i},
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

где также фигурирует (псевдо)вектор вихря $\boldsymbol{w}$, сопутствующий тензору вихря $\boldsymbol{\mathcal{W}}$.

Компоненты тензора скорости деформации в базисе текущей конфигурации

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_{ij}\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}^j,\ \ \mathcal{D}_{ij} = \boldsymbol{r}_{\partial i}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{\mathcal{D}}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{r}_{\partial j} = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{r}_{\partial i}\boldsymbol{\cdot}\bigl(\boldsymbol{r}^k\dot{\boldsymbol{r}}_k + \dot{\boldsymbol{r}}_k\boldsymbol{r}^k\bigr)\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{r}_{\partial j} &= \\
= \tfrac{1}{2}\bigl(\dot{\boldsymbol{r}}_{\partial i}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{r}_{\partial j} + \boldsymbol{r}_{\partial i}\boldsymbol{\cdot}\dot{\boldsymbol{r}}_{\partial j}\bigr) = \tfrac{1}{2}\Bigl(\boldsymbol{r}_{\partial i}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{r}_{\partial j}\Bigr)^{\bullet}&
\end{aligned}
$$

...

$$\dot{G}_{ij}$$

$$G_{ij} \equiv \boldsymbol{r}_{\partial i}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{r}_{\partial j}$$

...

Для упругих твёрдых сред нет нужды в дискуссии о поворотах: истинное представление появляется по пути логически гармоничных выводов без добавочных гипотез.

§ 5. Вектор пло́щади. Изменение площа́дки

Возьмём бесконечно ма́лую площа́дку. Вектор пло́щади (area vector) по длине равен пло́щади площа́дки и направлен вдоль нормали к этой площа́дке.

В начальной (оригинальной, недеформированной, “материальной”, ~~отсчётной~~) конфигурации вектор пло́щади может быть представлен как $\mathring{\boldsymbol{n}}do$. Пло́щадь do бесконечно мала́, а $\mathring{\boldsymbol{n}}$ — единичный вектор нормали.

В текущей (актуальной, деформированной, “пространственной”) конфигурации, та же площа́дка имеет вектор пло́щади $\boldsymbol{n} d\mathcal{O}$.

С дифференциальной точностью, эти бесконечномалые площа́дки суть параллелограммы, поэтому

$$\begin{aligned} \mathring{\boldsymbol{n}} do &= d\mathring{\boldsymbol{r}}' \times d\mathring{\boldsymbol{r}}'' = \frac{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}}{\partial q^j} dq^j = \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \times \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial j} \, dq^i dq^j, \\ \boldsymbol{n} d\mathcal{O} &= d\boldsymbol{r}' \times d\boldsymbol{r}'' = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j} dq^j = \boldsymbol{r}_{\partial i} \times \boldsymbol{r}_{\partial j} \, dq^i dq^j. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Применяя преобразование объёма (**??**), имеем

$$\begin{aligned} d\mathcal{V} = J d\mathring{\mathcal{V}} \;\Rightarrow\; & \boldsymbol{r}_{\partial i} \times \boldsymbol{r}_{\partial j} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial k} = J \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \times \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial j} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial k} \;\Rightarrow \\ & \Rightarrow\; \boldsymbol{r}_{\partial i} \times \boldsymbol{r}_{\partial j} \cdot \boldsymbol{r}_{\partial k} \boldsymbol{r}^k = J \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \times \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial j} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial k} \boldsymbol{r}^k \;\Rightarrow \\ & \qquad \Rightarrow\; \boldsymbol{r}_{\partial i} \times \boldsymbol{r}_{\partial j} = J \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial i} \times \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial j} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда с (5.1) мы приходим к соотношению

$$\boldsymbol{n} d\mathcal{O} = J \mathring{\boldsymbol{n}} do \cdot \boldsymbol{F}^{-1}, \tag{5.2}$$

называемому Nanson’формулой Nanson’а.

§ 6. Силы в континууме. Существование тензора напряжения Cauchy

Augustin-Louis Cauchy основал *механику континуума* предположив, что две части континуума взаимодействуют посредством поверхностных плотностей контактных сил, сосредоточенных на разделяющей поверхности.

Полагая, что эти контактные силы зависят только от перпендикуляра (нормали) к разделяющей поверхности и что контактные силы балансируются некоторой объёмной плотностью силы, включая инерцию, Cauchy поиграл с тетраэдрами и доказал существование тензора напряжения.

De la pression ou tension dans un corps solide. *Exercices de mathématiques*, par M. **Augustin-Louis Cauchy**. Seconde année: 1827. Paris, Chez de Bure frères. Pages 42 à 59.

Частицы безмоментной модели континуума суть точки с лишь трансляционными степенями свободы*. Поэтому среди обобщённых сил нет моментов также как нет внешних пар сил.

Сила $\rho \boldsymbol{f} d\mathcal{V}$ действует на бесконечно-малый объём $d\mathcal{V}$. Если $\boldsymbol{f}$ — массовая сила (действующая на единицу массы), то $\rho \boldsymbol{f}$ — объёмная. Такие силы происходят от силовых полей, например: гравитационные силы ("силы тяжести"), силы инерции в неинерциальной системе отсчёта, электромагнитные силы в среде с зарядами и токами.

Поверхностная сила $\boldsymbol{p} d\mathcal{O}$ действует на бесконечно-малую поверхность $d\mathcal{O}$. Это может быть контактное давление или/и трение, электростатическая сила с сосредоточенными на поверхности зарядами.

В материальном континууме, как и в любой механической системе, различаются внешние и внутренние силы. Внутренние силы уравновешивают действие внешних сил, и они передаются непрерывно от точки к точке. Со времён Euler'а и Cauchy, внутренние силы предполагаются поверхностными контактными силами близкодействия: на бесконечномалой площáдке $\boldsymbol{n} d\mathcal{O}$ действует сила $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} d\mathcal{O}$. Она действует с той?? стороны из двух, куда направлена единичная нормаль $\boldsymbol{n}$.

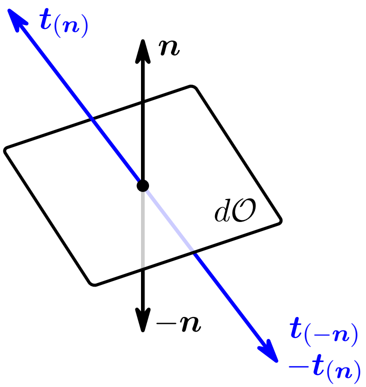


рисунок 12

По принципу действия и противодействия, вектор тракции (тяги) $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}$ переворачивается (меняет направление) вместе с единичным нормальным вектором $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{t}_{(-\boldsymbol{n})} = -\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}$. Иногда этот тезис называется "аргумент-коробка Cauchy" и доказывается через баланс импульса для

* Трансляционные степени свободы возникают из способности частицы двигаться свободно в пространстве.

бесконечно короткого цилиндра
с основаниями $\boldsymbol{n} d\mathcal{O}$ и $-\boldsymbol{n} d\mathcal{O}$.

Вектор тракции $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}$ на площáдке с единичной нормалью $\boldsymbol{n}$ называется вектором поверхностной тракции (surface traction vector) или вектором силового напряжения. Однако, $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}$ — не векторное поле: тракция $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t)$ зависит не только от положения $\boldsymbol{r}$ точки, но также от локального направления (определяемой $\boldsymbol{n}$) элемента поверхности. Бесконечное число площáдок любого направления содержат одну и ту же точку, и имеется бесконечно много векторов тяги (тракции) $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}$ в каждой точке.

Напряжение в точке континуума это *не векторное поле*. Такое поле более сложное, это бесконечная коллекция всех векторов тяги для всех бесконечномалых площáдок любого направления, содержащих ту точку.

И фактически, бесконечная коллекция всех векторов тягив точке полностью определяется одним-единственным тензором второй сложности — тензором напряжения Cauchy $\boldsymbol{\tau}$.

Вывод этого тезиса описан во многих книгах. Он известен как теорема о существовании тензора напряжения Cauchy — та самая, с впечатляющим аргументом-тетраэдром.

Аргумент-тетраэдр Cauchy и доказательство существования тензора напряжений Cauchy.

На поверхности бесконечномалого материального тетраэдра ...

...

§ 7. Баланс импульса и момента импульса

Рассмотрим какой-либо случайный конéчный объём $\mathcal{V}$ упругой среды, содержащийся внутри поверхности $\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})$. Он нагружен внешними силами, поверхностными контактными $\boldsymbol{p} d\mathcal{O}$ и объёмными (или массовыми) $\boldsymbol{f} dm = \rho \boldsymbol{f} d\mathcal{V}$.

Интегральная формулировка баланса импульса (количества движения) такова́

$$\Bigg(\int\limits_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{v} d\mathcal{V}\Bigg)^{\bullet} = \int\limits_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{f} d\mathcal{V} + \oint\limits_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{p} d\mathcal{O}. \tag{7.1}$$

... $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ ...

Импульс слева найдём по (1.5), а поверхностный интеграл превратим в объёмный по теореме о дивергенции. Получим

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\,(\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{v}})\Big) d\mathcal{V} = \boldsymbol{0}.$$

Но объём $\mathcal{V}$ случаен, поэтому равно нулю подынтегральное выражение. Приходим к уравнению баланса импульса в локальной (дифференциальной) форме

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\,(\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{0}. \tag{7.2}$$

...

Теперь о балансе момента импульса (момента количества движения). Вот интегральная формулировка:

$$\Bigg(\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{v} d\mathcal{V}\Bigg)^{\bullet} = \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{f} d\mathcal{V} + \oint\limits_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} d\mathcal{O}. \tag{7.3}$$

Дифференцируя левую часть ($\boldsymbol{v} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}$)

$$\Bigg(\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \rho \dot{\boldsymbol{r}}\, d\mathcal{V}\Bigg)^{\bullet} = \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \rho \ddot{\boldsymbol{r}}\, d\mathcal{V} + \int\limits_{\mathcal{V}} \underbrace{\dot{\boldsymbol{r}} \times \rho \dot{\boldsymbol{r}}}_{\boldsymbol{0}} d\mathcal{V},$$

применяя теорему о дивергенции к поверхностному интегралу ....

$(\dots\ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}\ \dots)$

$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) = -(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{r}) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \oint\limits_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau})\, d\mathcal{O} = -\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{r})\, d\mathcal{V},$$

…

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \rho \ddot{\boldsymbol{r}}\, d\mathcal{V} = \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{f}\, d\mathcal{V} - \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{r})\, d\mathcal{V},$$

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \rho \big(\boldsymbol{f} - \ddot{\boldsymbol{r}}\big)\, d\mathcal{V} - \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{r})\, d\mathcal{V} = \boldsymbol{0},$$

…

$$\underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{r})}_{\boldsymbol{r}^i \cdot \partial_i (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{r})} = \underbrace{(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{r}^i \cdot (\partial_i \boldsymbol{\tau}) \times \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r}^i \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \partial_i \boldsymbol{r})$$

$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{t}_{(i)}$, $\boldsymbol{e}_i =$ **constant**

$$\boldsymbol{r}^i \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \partial_i \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}^i \cdot (\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{t}_{(j)} \times \boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{r}^i \cdot \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{t}_{(j)} \times \boldsymbol{r}_i =$$
$$= -\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{r}^i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{t}_{(j)} = -\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{t}_{(j)} = -\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{t}_{(j)} = -\boldsymbol{\tau}_{\times}$$

…

§ 8. Собственные числа тензора напряжения Cauchy. Круги Mohr'a

Как любой симметричный бивалентный тензор, тензор напряжения Cauchy $\boldsymbol{\tau}$ имеет три вещественных собственных чисда́ σ_i, а также тройку взаимно перпендикулярных собственных векторов единичной длины (§ 1.10). Собственные числа тензора $\boldsymbol{\tau}$ называются главными напряжениями (principal stresses).

В представлении $\boldsymbol{\tau} = \sum \sigma_i \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i$ чаще всего индексы сортируются по убыванию $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, а тройка $\boldsymbol{e}_i$ ориентирована как "правая".

Известна теорема о кругах Мора (Mohr's circles)*

...

Чтобы замкнуть набор (систему) уравнений модели сплошной среды, нужно добавить определяющие отношения (constitutive relations) — уравнения, связывающие напряжение с деформацией (и другие необходимые связи). Однако, для твёрдого упругого континуума такой длинный путь построения модели излишен, что читатель и увидит ниже.

§ 9. Принцип виртуальной работы (без множителей Лагранжа)

Согласно принципу виртуальной работы для некоего конечного объёма сплошной среды

$$\int_{\mathcal{V}} \Bigl(\rho \boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \delta W^{(i)}\Bigr) d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{r} \, d\mathcal{O} = 0. \tag{9.1}$$

Здесь $\delta W^{(i)}$ — работа внутренних сил на единицу объёма в текущей конфигурации; $\boldsymbol{f}$ — массовая сила, с динамикой $\bigl(\boldsymbol{f} - \ddot{\boldsymbol{r}}\bigr)$; $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ — поверхностная сила.

Применяя к поверхностному интегралу теорему о дивергенции, используя**

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}}$$

и случайность $\mathcal{V}$, получаем локальную дифференциальную версию (9.1)

$$\Bigl(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{f}\Bigr) \cdot \delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} + \delta W^{(i)} = 0. \tag{9.2}$$

* Mohr's circles, named after Christian Otto Mohr, is a two-dimensional graphical representation of transformation for the Cauchy stress tensor.

** $\boldsymbol{r}^i \cdot \partial_i (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}^i \cdot (\partial_i \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}^i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \boldsymbol{r}),$

$\boldsymbol{r}^i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i (\delta \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \partial_i (\delta \boldsymbol{r}) \boldsymbol{r}^i = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \bigl(\boldsymbol{r}^i \partial_i \delta \boldsymbol{r}\bigr)^{\mathsf{T}}$

Когда тело виртуально движется как жёсткое целое, работа внутренних сил обнуляется

$$\begin{gathered}
\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\rho} + \delta\mathbf{o}\times\boldsymbol{r} \;\Rightarrow\; \delta W^{(i)} = 0,\\
\bigl(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\boldsymbol{f}\bigr)\cdot\bigl(\delta\boldsymbol{\rho} + \delta\mathbf{o}\times\boldsymbol{r}\bigr) + \boldsymbol{\tau}^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\nabla}\bigl(\delta\boldsymbol{\rho} + \delta\mathbf{o}\times\boldsymbol{r}\bigr) = 0,\\
\delta\boldsymbol{\rho} = \mathsf{constant} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\rho} = {}^2\mathbf{0},\quad \delta\mathbf{o} = \mathsf{constant} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{o} = {}^2\mathbf{0},\\
\boldsymbol{\nabla}\bigl(\delta\boldsymbol{\rho} + \delta\mathbf{o}\times\boldsymbol{r}\bigr) = \boldsymbol{\nabla}\bigl(\delta\mathbf{o}\times\boldsymbol{r}\bigr) = \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{o}\times\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}\times\delta\mathbf{o} =\\
= -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}\times\delta\mathbf{o} = -\boldsymbol{E}\times\delta\mathbf{o}\\
\ldots
\end{gathered}$$

Полагая $\delta\mathbf{o} = \mathbf{0}$ (лишь трансляция) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\rho} = {}^2\mathbf{0}$, оно превращается в баланс сил (импульса)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\boldsymbol{f} = \mathbf{0}.$$

Если $\delta\boldsymbol{r} = \delta\mathbf{o}\times\boldsymbol{r}$ (лишь поворот) с $\delta\mathbf{o} = \mathsf{constant}$, то

$$\begin{gathered}
(18.10,\ \S\,1.18) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{o}\times\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}\times\delta\mathbf{o} = -\boldsymbol{E}\times\delta\mathbf{o},\\
\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{E}\times\delta\mathbf{o}
\end{gathered}$$

With

$$\begin{gathered}
(8.4,\ \S\,1.8) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\tau}_{\times} = -\boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\,{}^3\boldsymbol{\epsilon},\\
\boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{E}\times\delta\mathbf{o}) = \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\,\bigl(-{}^3\boldsymbol{\epsilon}\cdot\delta\mathbf{o}\bigr) = \bigl(-\boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\,{}^3\boldsymbol{\epsilon}\bigr)\cdot\delta\mathbf{o} = \boldsymbol{\tau}_{\times}\cdot\delta\mathbf{o}
\end{gathered}$$

...

В упругой среде внутренние силы потенциальны

$$\delta W^{(i)} = -\rho\,\delta\widetilde{\Pi}$$

...

> “The elastic potential energy density per volume unit”, becomes when shorting “The elastic potential ....”
>
> Плотность упругой потенциальной энергии, запасённой|накопленной в единице объёма тела (среды́).
>
> Дословный перевод с english на русский фразы “the elastic potential” даёт “упругий потенциал”.

....

$$\boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{r}^{\mathsf{S}} = -\,\delta W^{(i)} = \rho \delta \widetilde{\Pi} \tag{9.3}$$

...

Вид потенциала $\widetilde{\Pi}$ на единицу массы пока неизвестен, но очевидно что $\widetilde{\Pi}$ определяется деформацией.

С балансом массы $\rho J = \mathring{\rho} \Leftrightarrow \rho = J^{-1} \mathring{\rho}$ ($J \equiv \det \boldsymbol{F}$ — Jacobian, определитель градиента движения), потенциал на единицу объёма в недеформированной конфигурации $\mathring{\Pi}$ имеет вид

$$\begin{gathered} \mathring{\Pi} \equiv \mathring{\rho}\,\widetilde{\Pi} \;\Rightarrow\; \delta\mathring{\Pi} = \mathring{\rho}\,\delta\widetilde{\Pi}, \\ \rho\,\delta\widetilde{\Pi} = J^{-1}\delta\mathring{\Pi}. \end{gathered} \tag{9.4}$$

Полным аналогом (...) является равенство

...

§ 10. Определяющие отношения упругости

Фундаментальное соотношение упругости (**??**)

...

$$\Pi(\boldsymbol{C}) = \int\limits_{0}^{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot d\boldsymbol{C}$$

If the strain energy density is path independent, then it acts as a potential for stress, that is

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi(\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{C}}$$

For adiabatic processes, Π is equal to the change in internal energy per unit of volume.

For isothermal processes, Π is equal to the Helmholtz free energy per unit of volume.

The natural configuration of a body is defined as the configuration in which the body is in stable thermal equilibrium with no external loads and zero stress and strain.

When we apply energy methods in elasticity, we implicitly assume that a body returns to its natural configuration after loads are removed. This implies that the Gibbs' condition is satisfied:

$$\Pi(\boldsymbol{C}) \geq 0 \;\text{ with }\; \Pi(\boldsymbol{C}) = 0 \;\text{ iff }\; \boldsymbol{C} = 0$$

...

Начальная конфигурация считается естественной (natural configuration) — недеформированной ненапряжённой: $\boldsymbol{C} = {}^2\mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}$, поэтому в Π нет линейных членов.

Тензор жёсткости ${}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}}$

...

A rubber-like material (an elastomer)

Для материала типа резины (эластомера) характерны бóльшие деформации. Функция $\Pi(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$ для такого материала бывает весьма сложной*.

Преимущества использования $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{C}$ исчезают, если деформации бóльшие (конéчные) — проще остаться с вектором-радиусом $\boldsymbol{r}$ ...

...

* **Harold Alexander**. A constitutive relation for rubber-like materials // International Journal of Engineering Science, volume 6 (September 1968), pages 549–563.

§ 11. Тензоры напряжения Piola–Kirchhoff'а и другие меры напряжения

Соотношение Nanson'а $\boldsymbol{n} d\mathcal{O} = J \mathring{\boldsymbol{n}} do \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$ между векторами бесконечно малой площа́дки в начальной ($\mathring{\boldsymbol{n}} do$) и в текущей ($\boldsymbol{n} d\mathcal{O}$) конфигурациях*

$$(5.2) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{n} d\mathcal{O} \cdot \boldsymbol{\tau} = J \mathring{\boldsymbol{n}} do \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\mathcal{O} = \mathring{\boldsymbol{n}} \cdot J \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} do$$

даёт двоякое выражение поверхностной силы

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\mathcal{O} = \mathring{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{T} do, \;\; \boldsymbol{T} \equiv J \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}. \tag{11.1}$$

Тензор $\boldsymbol{T}$ называется первым (несимметричным) тензором напряжения Piola–Kirchhoff'а, иногда — “номинальным напряжением” (“nominal stress”) или “инженерным напряжением” (“engineering stress”). Бывает и когда какое-либо из этих (на)именований даётся транспонированному тензору

$$\boldsymbol{T}^{\mathsf{T}} = J \boldsymbol{\tau}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}} = J \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}}.$$

Обращение (11.1)

$$J^{-1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} = J^{-1} \boldsymbol{F} \cdot J \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\tau} = J^{-1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$$

...

$$\delta \Pi = \boldsymbol{T} \cdot\cdot\, \delta \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} \;\Rightarrow\; \Pi = \Pi(\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}) \tag{11.2}$$

— этот немного неожиданный результат получился благодаря коммутативности δ и $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}$: $\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \delta \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} = \delta \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}}$ ($\boldsymbol{\nabla}$ и δ не коммутируют).

Тензор $\boldsymbol{T}$ оказался энергетически сопряжённым с $\boldsymbol{F} \equiv \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}}$

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{F}}. \tag{11.3}$$

* По-прежнему, $\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{r}_{\partial i} \mathring{\boldsymbol{r}}^{i} = \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}}$ — градиент движения, $J \equiv \det \boldsymbol{F}$ — якобиан (определитель Якоби).

Второй (симметричный) тензор напряжения Piola–Kirchhoff'а $\boldsymbol{S}$ энергетически сопряжён с $\boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{C} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{E})$

$$\begin{gathered} \delta\Pi(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{S} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{C} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{S} = \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{C}}, \\ d\boldsymbol{G} = 2d\boldsymbol{C} \;\Rightarrow\; \delta\Pi(\boldsymbol{G}) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{S} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{G},\;\; \boldsymbol{S} = 2\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{G}}. \end{gathered} \tag{11.4}$$

Связь между первым и вторым тензорами

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^{\mathsf{T}} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}},\;\; \boldsymbol{T}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S}$$

и между тензором $\boldsymbol{S}$ и тензором напряжения Cauchy $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{S} = J\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}} \;\Leftrightarrow\; J^{-1}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\tau}.$$

...

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{C}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} = 2\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{G}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}}$$

$$\delta\boldsymbol{S} = \frac{\partial\boldsymbol{S}}{\partial\boldsymbol{C}} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{C} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\boldsymbol{C}\partial\boldsymbol{C}} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{C}$$

$$\delta\boldsymbol{T} = \delta\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{S} \cdot \delta\boldsymbol{F}^{\mathsf{T}}$$

...

The quantity $\boldsymbol{\kappa} = J\boldsymbol{\tau}$ is called the *Kirchhoff stress tensor* and is used widely in numerical algorithms in metal plasticity (where there's no change in volume during plastic deformation). Another name for it is *weighted Cauchy stress tensor*.

...

Вот баланс сил (импульса) с тензором $\boldsymbol{T}$ для любого недеформированного объёма $\mathring{\mathcal{V}}$

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{f}\, d\mathcal{V} + \int\limits_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}\, d\mathcal{O} = \int\limits_{\mathring{\mathcal{V}}} \mathring{\rho} \boldsymbol{f}\, d\mathring{\mathcal{V}} + \int\limits_{o(\partial\mathring{\mathcal{V}})} \mathring{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{T}\, do = \int\limits_{\mathring{\mathcal{V}}} \Big(\mathring{\rho} \boldsymbol{f} + \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{T} \Big) d\mathring{\mathcal{V}} = \boldsymbol{0}$$

или в локальной (дифференциальной) версии

$$\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{T} + \mathring{\rho} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}. \tag{11.5}$$

Преимущества этого уравнения в сравнении с (7.2): здесь фигурирует известная плотность $\mathring{\rho}$ массы недеформированного объёма $\mathring{\mathcal{V}}$, и оператор $\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \equiv \mathring{\boldsymbol{r}}^i \partial_i$ определяется через известные векторы $\mathring{\boldsymbol{r}}^i$. Появление $\boldsymbol{T}$ являет специфическое свойство упругого твёрдого тела — "помнить" свою начальную конфигурацию. Тензор $\boldsymbol{T}$ едва ли полезен в механике текучих сред.

Принцип виртуальной работы для произвольного объёма $\mathring{\mathcal{V}}$ упругой ($\delta W^{(i)} = -\delta\Pi$) среды:

$$\int\limits_{\mathring{\mathcal{V}}} \Big(\mathring{\rho} \boldsymbol{f} \cdot \delta\boldsymbol{r} - \delta\Pi \Big) d\mathring{\mathcal{V}} + \int\limits_{o(\partial\mathring{\mathcal{V}})} \mathring{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \delta\boldsymbol{r} \, do = 0,$$

$$\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \delta\boldsymbol{r}) = \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{T}^{\mathsf{T}} \cdot\cdot\, \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \delta\boldsymbol{r}, \;\; \boldsymbol{T}^{\mathsf{T}} \cdot\cdot\, \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{T} \cdot\cdot\, \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \delta\boldsymbol{r}^{\mathsf{T}}$$

$$\delta\Pi = \Big(\mathring{\rho} \boldsymbol{f} + \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{T} \Big) \cdot \delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{T} \cdot\cdot\, \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \delta\boldsymbol{r}^{\mathsf{T}}$$

....

The first one is non-symmetric, it links forces in the deformed stressed configuration to the underfomed geometry and mass (volumes, areas, densities as they were initially), and it is energetically conjugate градиент движения (часто ошибочно называемый "градиент деформации", забывая о жёстких вращениях). The first (or sometimes its transpose) is also known as "nominal stress" and "engineering stress".

The second one is symmetric, it links loads in the initial undeformed configuration to the initial mass and geometry, and it is conjugate to the right Cauchy–Green deformation tensor (and thus to the Cauchy–Green–Venant measure of deformation).

The first is simplier when you use just the motion gradient and is more universal, but the second is simplier when you prefer right Cauchy–Green deformation and its offsprings.

There's also popular Cauchy stress, which relates forces in the deformed configuration to the deformed geometry and mass.

“energetically conjugate” means that their product is kind of energy, here: elastic potential energy per unit of volume

......

В случае конечных деформаций, тензоры Piola–Kirchhoff’a $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$ описывают напряжение относительно начальной конфигурации. В отличие от них, тензор напряжения Cauchy $\boldsymbol{\tau}$ описывает напряжение относительно текущей конфигурации. Для бесконечно-малых деформаций тензоры напряжения Cauchy и Piola–Kirchhoff’a идентичны.

1st Piola–Kirchhoff stress tensor

The 1st Piola–Kirchhoff stress tensor $\boldsymbol{T}$ relates forces in the current (present, “spatial”) configuration with areas in the initial (“material”) configuration

$$\boldsymbol{T} = J\,\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}}$$

где $\boldsymbol{F}$ есть градиент движения и $J \equiv \det \boldsymbol{F}$ есть определитель Jacobi, Jacobian.

Because it relates different coordinate systems, the 1st Piola–Kirchhoff stress is a two-point tensor. Commonly, it’s not symmetric.

The 1st Piola–Kirchhoff stress is the 3D generalization of the 1D concept of engineering stress.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 1st Piola–Kirchhoff stress tensor will vary with material orientation.

The 1st Piola–Kirchhoff stress is energy conjugate to the motion gradient.

2nd Piola–Kirchhoff stress tensor

The 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor $\boldsymbol{S}$ relates forces in the initial configuration to areas in the initial configuration. The force in the initial configuration is obtained via mapping that preserves the relative relationship between the force direction and the area normal in the initial configuration.

$$\boldsymbol{S} = J\,\boldsymbol{F}^{-1} \bullet \boldsymbol{\tau} \bullet \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}}$$

This tensor is a one-point tensor and it is symmetric.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor remain constant, irrespective of material orientation.

The 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor is energy conjugate to the Green–Lagrange finite strain tensor.

...

§ 12. Варьирование текущей конфигурации

Обыкновенно рассматриваются две конфигурации нелинейной упругой среды: начальная с векторами положения $\mathring{\boldsymbol{r}}$ и текущая (актуальная) с $\boldsymbol{r}$.

А следующие уравнения описывают малое изменение текущей конфигурации с бесконечно-малыми изменениями вектора положения $\delta\boldsymbol{r}$, вектора массовых сил $\delta\boldsymbol{f}$, первого тензора напряжения Piola–Kirchhoff'а $\delta\boldsymbol{T}$ и тензора деформации $\delta\boldsymbol{C}$.

Варьируя (11.5), (......)* и (......), мы получаем

$$\begin{gathered}
\mathring{\rho}\delta\boldsymbol{f} + \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\delta\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0},\;\; \delta\boldsymbol{T} = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\boldsymbol{C}\partial\boldsymbol{C}}\cdot\cdot\,\delta\boldsymbol{C}\right)\cdot\boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} + \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{C}}\cdot\delta\boldsymbol{F}^{\mathsf{T}}, \\
\delta\boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} = \delta\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{r} = \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r},\;\; \delta\boldsymbol{F} = \delta\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{F}, \\
\delta\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{F},\;\; \delta\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r}^{\mathsf{S}}.
\end{gathered} \tag{12.1}$$

...

$$\begin{gathered}
(5.2) \;\Rightarrow\; \mathring{\boldsymbol{n}}do = J^{-1}\boldsymbol{n}d\mathcal{O}\cdot\boldsymbol{F} \;\Rightarrow\; \mathring{\boldsymbol{n}}\cdot\delta\boldsymbol{T}do = J^{-1}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{T}d\mathcal{O} \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; \mathring{\boldsymbol{n}}\cdot\delta\boldsymbol{T}do = \boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{\tau}d\mathcal{O},\;\; \delta\boldsymbol{\tau} \equiv J^{-1}\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{T}
\end{gathered}$$

— введённый так тензор $\delta\boldsymbol{\tau}$ связан с вариацией $\delta\boldsymbol{T}$ как $\boldsymbol{\tau}$ связан с $\boldsymbol{T}$ ($\boldsymbol{\tau} = J^{-1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$). Из (12.1) и ...

...

... корректируя коэффициенты линейной функции $\delta\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r})$.

§ 13. Внутренние связи

До сих пор деформация считалась свободной, мера деформации $\boldsymbol{C}$ могла быть любой. Однако, существуют материалы со значительным сопротивлением некоторым видам деформации. Резина, например, изменению формы сопротивляется намного меньше,

$$\begin{gathered}
{}^{*}\; \boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathring{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}^i\partial_i\cdot\mathring{\boldsymbol{r}}^j\partial_j\mathring{\boldsymbol{r}} \overset{?}{=} \boldsymbol{r}^i\partial_i\mathring{\boldsymbol{r}}\cdot\mathring{\boldsymbol{r}}^j\partial_j = \boldsymbol{\nabla}\mathring{\boldsymbol{r}}\cdot\mathring{\boldsymbol{\nabla}} = \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}}\cdot\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \\
\mathring{\boldsymbol{\nabla}} = \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r} = \mathring{\boldsymbol{r}}^i\partial_i\cdot\boldsymbol{r}^j\partial_j\boldsymbol{r} \overset{?}{=} \mathring{\boldsymbol{r}}^i\partial_i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}^j\partial_j = \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{\nabla}
\end{gathered}$$

чем изменению объёма — некоторые виды резины можно считать несжимаемым материалом.

Понятие геометрической связи, развитое в общей механике ...

...

for incompressible materials $\Pi = \Pi(\mathrm{I}, \mathrm{II})$

Mooney–Rivlin model of incompressible material

$$\Pi = c_1\big(\mathrm{I} - 3\big) + c_2\big(\mathrm{II} - 3\big)$$

incompressible Treloar (neo-Hookean) material

$$c_2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \Pi = c_1\big(\mathrm{I} - 3\big)$$

...

§ 14. Полая сфера под давлением

Решение этой относительно простой задачи описано во многих книгах. В начальной (ненапряжённой) конфигурации имеем сферу с внутренним радиусом r_0 и наружным r_1. Давление равно p_0 внутри и p_1 снаружи.

Введём удобную для этой задачи сферическую систему координат в отсчётной конфигурации $q^1 = \theta$, $q^2 = \phi$, $q^3 = r$ (рис. **??**). Эти же координаты будут и материальными. Имеем

...

§ 15. Напряжения как множители Лагранжа

Описанному ранее в § 9 использованию принципа виртуальной работы предшествовало введение тензора напряжения Cauchy через баланс сил для бесконечномалого тетраэдра (§ 6). Но теперь мы увидим, что сей принцип примени́м и без рассуждений с тетраэдром.

Рассмотрим тело — не только лишь упругое, с любой виртуальной работой внутренних сил $\delta W^{(i)}$ на единицу массы — нагруженное массовыми $\boldsymbol{f} dm$ (для краткости пишем $\boldsymbol{f}$ вместо $\boldsymbol{f} - \ddot{\boldsymbol{r}}$, так что динамика присутствует) и поверхностными $\boldsymbol{p} d\mathcal{O}$ внешними силами. Имеем вариационное уравнение

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \rho \Big(\boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \delta W^{(i)} \Big) d\mathcal{V} + \int\limits_{\mathcal{O}(\partial \mathcal{V})} \boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{r} \, d\mathcal{O} = 0. \tag{15.1}$$

Предполагается, что внутренние силы не производят работу, когда континуум (тело) виртуально движется $\delta \boldsymbol{r}$ как целое без деформаций ($\delta \boldsymbol{\varepsilon} = {}^2\mathbf{0}$). Тогда

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{r}^{\mathsf{S}} = {}^2\mathbf{0} \;\Rightarrow\; \delta W^{(i)} = 0. \tag{15.2}$$

Отбросив $\delta W^{(i)}$ в (15.1) при условии (15.2), получим вариационное уравнение со связью. Приём с множителями Лагранжа даёт возможность считать вариации $\delta \boldsymbol{r}$ независимыми. Поскольку в каждой точке связь представлена симметричным тензором второй сложности, то таким же тензором будут и множители Лагранжа ${}^2\boldsymbol{\lambda}$. Приходим к уравнению

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\rho \boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{r} - {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{r}^{\mathsf{S}} \Big) d\mathcal{V} + \int\limits_{\mathcal{O}(\partial \mathcal{V})} \boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{r} \, d\mathcal{O} = 0. \tag{15.3}$$

Благодаря симметрии ${}^2\boldsymbol{\lambda}$ имеем*

$${}^2\boldsymbol{\lambda} = {}^2\boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}} \;\Rightarrow\; {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{r}^{\mathsf{S}} = {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}},$$

* $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathsf{S}} \cdot\cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Lambda}^{\mathsf{S}} \cdot\cdot \boldsymbol{X}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\Lambda}^{\mathsf{S}} \cdot\cdot \boldsymbol{X}^{\mathsf{S}}$, $\;\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{a}$

$$^2\boldsymbol{\lambda} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r}^{\mathsf{S}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left({}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \delta\boldsymbol{r}\right) - \boldsymbol{\nabla} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} \cdot \delta\boldsymbol{r}.$$

Подставив это в (15.3) и применив теорему о дивергенции, получаем

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\rho\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\nabla} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}\Big) \cdot \delta\boldsymbol{r}\, d\mathcal{V} + \int\limits_{\mathcal{O}(\partial\mathcal{V})} \Big(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{n} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}\Big) \cdot \delta\boldsymbol{r}\, d\mathcal{O} = 0.$$

Но $\delta\boldsymbol{r}$ случайна на поверхности и в объёме, так что

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{n} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}, \;\; \boldsymbol{\nabla} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} + \rho\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

— формально введённый симметричный множитель ${}^2\boldsymbol{\lambda}$ оказался тензором напряжения Cauchy.

Похожее введение напряжений было представлено в книге [**?**]. Тут нет новых результатов, но интересна самá возможность одновременного вывода тех уравнений механики сплошной среды, которые раньше считались независимыми. В следующих главах эта техника используется для построения новых континуальных моделей.

Библиография

Глубина изложения нелинейной безмоментной упругости характерна для книг А. И. Лурье [29, 30]. Оригинальность как основных идей, так и стиля присуща книге C. Truesdell'а [61]. Много ценной информации можно найти у К. Ф. Черны́х [**?**]. Книгу Л. М. Зубова [21] тоже стóит упомянуть. О применении нелинейной теории упругости в смежных областях рассказано в книге C. Teodosiu [57]. Повышенным математическим уровнем отличается монография Ph. Ciarlet [54].

глава 4

КЛАССИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ

Эта глава — про геометрически линейную модель с бесконечно ма́лыми смещениями, где

- ✓ $\mathcal{V} = \mathring{\mathcal{V}}$, $\rho = \mathring{\rho}$ — “уравнения можно писа́ть в начальной конфигурации” (временами это называют “принципом начальных размеров”),
- ✓ операторы $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}$ и $\boldsymbol{\nabla}$ неразличимы,
- ✓ операторы δ и $\boldsymbol{\nabla}$ коммутируют, потому для примера $\delta \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{u}$.

§1. Полный набор уравнений

Уравнения нелинейной упругости, даже в самых простых случаях, приводят к математически сложным задачам. Поэтому линейная теория бесконечно ма́лых смещений повсеместно применяется. Уравнения этой теории были выведены в первой половине XIX$^{\text{го}}$ века Cauchy, Navier, Lamé, Clapeyron’ом, Poisson’ом, Saint-Venant’ом, George Green’ом и другими учёными.

Полный замкнутый набор уравнений классической линейной теории в прямой инвариантной тензорной за́писи, включающий

- ✓ баланс сил (импульса, количества движения, *vis viva*),
- ✓ соотношения напряжение–деформация для материала,
- ✓ $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}$,

есть

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\mathsf{S}}. \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ это линейный тензор напряжений, $\boldsymbol{v}$ это результирующий вектор объёмных нагрузок, $\boldsymbol{\varepsilon}$ это тензор бесконечномалой относительной деформации, $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon})$ это потенциальная энергия деформации на единицу объёма и ${}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}}$ это тензор жёсткости.

Последний четырёхвалентен со следующей симметрией

$$^4\boldsymbol{\mathcal{A}}_{12\rightleftarrows 34} = {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}}, \quad {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}}_{1\rightleftarrows 2} = {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}}, \quad {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}}_{3\rightleftarrows 4} = {}^4\boldsymbol{\mathcal{A}}.$$

Но откуда этот набор (система) уравнений следует?

Уравнения (1.1) точные, они могут быть получены варьированием уравнений нелинейной теории. Варьирование от произвольной конфигурации описано в § 3.12. Линейная теория это результат варьирования от начальной ненапряжённой конфигурации, когда

$$\begin{gathered} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}, \;\; \boldsymbol{C} = {}^2\boldsymbol{0}, \;\; \delta\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r}^{\mathsf{S}}, \\ \boldsymbol{\tau} = {}^2\boldsymbol{0}, \;\; \delta\boldsymbol{\tau} = \delta\boldsymbol{T} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\boldsymbol{C}\partial\boldsymbol{C}} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{C}, \;\; \boldsymbol{\nabla}\cdot\delta\boldsymbol{\tau} + \rho\delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Остаётся поменять

- ✓ $\delta\boldsymbol{r}$ на $\boldsymbol{u}$,
- ✓ $\delta\boldsymbol{C}$ на $\boldsymbol{\varepsilon}$,
- ✓ $\delta\boldsymbol{\tau}$ на $\boldsymbol{\sigma}$,
- ✓ $\partial^2\Pi/_{\partial\boldsymbol{C}\partial\boldsymbol{C}}$ на ${}^4\boldsymbol{\mathcal{A}}$,
- ✓ $\rho\delta\boldsymbol{f}$ на $\boldsymbol{v}$.

Если вывод (1.2) кажется читателю малопонятным, возможно исходить из следующих уравнений

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}}\cdot\mathring{\boldsymbol{\nabla}}, \;\; \boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}, \\ \boldsymbol{\tau} = J^{-1}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{C}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathsf{T}}, \;\; \boldsymbol{C} = \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{u}^{\mathsf{S}} + \tfrac{1}{2}\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{u}\cdot\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Полагая смещение $\boldsymbol{u}$ ма́лым (бесконечно ма́лым), мы перейдём от (1.3) к (1.1).

Или так. Вместо $\boldsymbol{u}$ взять некоторый достаточно малый параметр $\chi\boldsymbol{u}$, $\chi \to 0$. И представить после этого неизвестные рядами в целых показателях параметра χ

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{(0)} + \chi\boldsymbol{\tau}^{(1)} + \ldots, \;\; \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{(0)} + \chi\boldsymbol{C}^{(1)} + \ldots, \\ \boldsymbol{\nabla} = \mathring{\boldsymbol{\nabla}} + \chi\boldsymbol{\nabla}^{(1)} + \ldots, \;\; \boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + \chi\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}, \;\; J = 1 + \chi J^{(1)} + \ldots \end{gathered}$$

Полный набор уравнений (1.1) выходит из первых (нулевых) членов этих рядов. В книге [61] это названо “формальным приближением”.

Невозможно сказать однозначно насколько малым параметр χ должен быть — ответ зависит от ситуации и определяется тем, описывает ли линейная модель интересующий нас эффект или нет. Когда, как пример, меня интересует связь между частотой свободно вибрирующего движения после начального смещения, то нужна нелинейная модель.

Линейная задача ставится в начальном объёме $\mathcal{V} = \mathring{\mathcal{V}}$, ограниченном поверхностью o с вектором плóщади $\boldsymbol{n} do$ (“принцип начальных размеров”).

Краевые (граничные) условия чаще всего такие: на части o_1 поверхности известны смещения, а на другой части o_2 известны силы.

$$\boldsymbol{u}\big|_{o_1} = \boldsymbol{u}_0\,, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\big|_{o_2} = \boldsymbol{p}. \tag{1.4}$$

Бывают и более сложные комбинации, если мы знаем некоторые компоненты как $\boldsymbol{u}$, так и $\boldsymbol{t}_{(n)} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ одновременно. Для примера, на плоской грани $x = \mathsf{constant}$ при вдавливании штампа с гладкой поверхностью $u_x = \nu(y, z)$, $\boldsymbol{\tau}_{xy} = \boldsymbol{\tau}_{xz} = 0$ (функция ν определяется формой штампа).

Для динамических проблем мы имеем $\boldsymbol{f} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}$ вместо просто $\boldsymbol{f}$. А начальные условия для динамических задач ставятся как обычно в механике — на положения и на скорости: в данный момент времени $t = 0$ известны $\boldsymbol{u}$ и $\dot{\boldsymbol{u}}$. Линейность задач

Линейность даёт принцип суперпозиции (или независимости) действия нагрузок. Когда нагрузок несколько, проблема может быть решена для для каждой нагрузки отдельно. И тогда полное решение может быть получено суммированием. Для статики это значит, например, следующее: если внешние нагрузки $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{p}$ растут в m раз (тело закреплено на o_1), то $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ вырастут тоже в m раз. Плотность потенциальной энергии Π вырастет в m^2 раз. В реальности такое наблюдается лишь когда нагрузки малые.

Плотность потенциальной энергии упругой деформации Π

$$\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}$$

и её вариация

$$\delta\Pi = \tfrac{1}{2}\,\delta\bigl(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}\bigr) = \tfrac{1}{2}\bigl(\delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}\bigr) = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\delta\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\delta^2\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, \frac{\partial^2\Pi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\varepsilon} = 2\Pi(\delta\boldsymbol{\varepsilon})$$

Как отмечалось в гл. 2, принцип виртуальной работы (принцип d'Alembert'a–Lagrange'a) может быть положен в основу механики. Этот принцип справедлив и для линейной теории (внутренние силы в упругой среде потенциальны $\delta W^{(i)} = -\delta\Pi$)

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Bigl((\boldsymbol{f} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}) \cdot \delta\boldsymbol{u} - \delta\Pi \Bigr) d\mathcal{V} + \int\limits_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, do = 0, \quad \boldsymbol{u}\big|_{o_1} = \boldsymbol{0}, \qquad (1.5)$$

потому что

$$\delta\Pi = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{u}^{\mathsf{S}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{u},$$

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \delta\Pi\, d\mathcal{V} = \oint\limits_{o(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, do - \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, d\mathcal{V}$$

и левая часть (1.5) становится

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Bigl(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \Bigr) \cdot \delta\boldsymbol{u}\, d\mathcal{V} + \int\limits_{o_2} \Bigl(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \Bigr) \cdot \delta\boldsymbol{u}\, do,$$

что равно нулю. Отметим краевое условие $\boldsymbol{u}\big|_{o_1} = \boldsymbol{0}$: виртуальные смещения совместимы с этой связью $\delta\boldsymbol{u}\big|_{o_1} = \boldsymbol{0}$.

§ 2. Уникальность решения в динамике

Как это типично для линейной математической физики, теорема единственности доказывается "от противного". Предположим, что существуют два решения: $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{r}, t)$. Если разность $\boldsymbol{u}^* \equiv \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ будет равной $\mathbf{0}$, тогда эти решения совпадают, то есть решение единственно.

Но сперва́ мы убедимся в существовании интеграла энергии — путём вывода уравнения баланса механической энергии для линейной модели теории ма́лых смещений

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \bigl(\mathrm{K} + \Pi\bigr)^{\bullet} d\mathcal{V} = \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \, d\mathcal{V} + \int\limits_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \, do, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{u}\big|_{o_1} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\big|_{o_2} = \boldsymbol{p},$$

$$\boldsymbol{u}\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}^{\circ}, \quad \dot{\boldsymbol{u}}\big|_{t=0} = \dot{\boldsymbol{u}}^{\circ}.$$

Для левой части мы имеем

$$\dot{\mathrm{K}} = \tfrac{1}{2} \bigl(\rho \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\bigr)^{\bullet} = \tfrac{1}{2} \rho \bigl(\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} + \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\bigr) = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}},$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} = \tfrac{1}{2} \underbrace{\bigl(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}\bigr)^{\bullet}}_{2 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla} \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathsf{S}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}) - \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{-(\boldsymbol{f} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}})} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} = \\ &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}) + (\boldsymbol{f} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}) \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \end{aligned}$$

(использован баланс импульса $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}$),

$$\dot{\mathrm{K}} + \dot{\Pi} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}.$$

Применяя теорему о дивергенции

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}) \, d\mathcal{V} = \oint\limits_{o(\partial \mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \, do$$

и краевое условие $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{p}$ на o_2, получаем (2.1).

Из (2.1) следует, что без нагрузок (когда нет внешних сил, ни объёмных, ни поверхностных), и полная механическая энергия не изменяется:

$$\boldsymbol{f} = \mathbf{0} \text{ и } \boldsymbol{p} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \int\limits_{\mathcal{V}} \bigl(\mathrm{K} + \Pi\bigr) d\mathcal{V} = \mathsf{constant}(t). \tag{2.2}$$

Если в момент $t=0$ был ненапряжённый ($\Pi=0$) покой ($\mathrm{K}=0$), то

$$\int_{\mathcal{V}} \bigl(\mathrm{K}+\Pi\bigr)\, d\mathcal{V} = 0. \tag{2.2'}$$

Кинетическая энергия положительна: $\mathrm{K}>0$ если $\dot{\boldsymbol{u}} \neq \boldsymbol{0}$ и исчезает (обнуляется) лишь когда $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$ — это вытекает из её определения $\mathrm{K} \equiv \frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}$. Потенциальная энергия, будучи квадратичной формой $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}$, тоже положительна: $\Pi>0$ если $\boldsymbol{\varepsilon} \neq {}^2\boldsymbol{0}$. Таково́ априорное требование положительной определённости для тензора жёсткости ${}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Это одно из "дополнительных неравенств в теории упругости" [29, 61].

Так как K и П положительно определены, (2.2') даёт

$$\mathrm{K}=0,\ \Pi=0 \ \Rightarrow\ \dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathsf{S}}={}^2\boldsymbol{0} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{\circ}+\boldsymbol{\omega}^{\circ}\times\boldsymbol{r}$$

($\boldsymbol{u}^{\circ}$ и $\boldsymbol{\omega}^{\circ}$— некоторые константы трансляции и поворота). С неподвижной частью поверхности

$$\boldsymbol{u}\big|_{o_1}\!=\boldsymbol{0} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{u}^{\circ}=\boldsymbol{0} \ \text{и}\ \boldsymbol{\omega}^{\circ}=\boldsymbol{0} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \ \text{всюду}.$$

Теперь вспомним о двух решениях $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$. Их разность $\boldsymbol{u}^* \equiv \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ есть решение полностью "однородной" (совсем без постоянных членов) линейной задачи: в объёме $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$, в краевых и в начальных условиях — нули. Поэтому $\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{0}$, и единственность доказана.

Что же для существования решения — его не обосновать для общего случая простыми выводами. Я могу лишь сказать, что динамическая проблема является эволюционной, она описывает прогресс процесса во времени.

Баланс (сохранение) импульса даёт ускорение $\ddot{\boldsymbol{u}}$. Далее, переходя на "следующий временно́й слой" $t+dt$:

$$\begin{gathered}
\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r},t+dt) = \dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r},t) + \ddot{\boldsymbol{u}}dt,\\
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t+dt) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) + \dot{\boldsymbol{u}}dt,\\
\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r},t+dt) = \bigl(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t+dt)\bigr)^{\mathsf{S}} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\sigma},\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r},t+dt)
\end{gathered}$$

и так далее. Разумеется, эти соображения лишены математической щепетильности. Последнее может быть найдено, для примера, в монографии Philippe'a Ciarlet [54].

§ 3. Закон Hooke'a для изотропного материала

....

$$= \boldsymbol{E} \tag{3.1}$$

В компонентах для изотропной среды имеем

$$A_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu \big(\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp} \big) \tag{3.2}$$

— это компоненты изотропного тензора четвёртой сложности. Эти компоненты не меняются когда базис вращается.

....

§ 4. Теоремы статики

Теорема Clapeyron'a

В равновесии с внешними силами, объёмными $\boldsymbol{f}$ и поверхностными $\boldsymbol{p}$, работа этих "статически замороженных" (то есть постоянных во времени) сил на актуальных смещениях равна удвоенной* энергии деформации

$$2 \int_{\mathcal{V}} \Pi \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} \, d\mathcal{V} + \int_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u} \, do. \tag{4.1}$$

* "Ce produit représentait d'ailleurs le double de la force vive que le ressort pouvait absorber par l'effet de sa flexion et qui était la mesure naturelle de sa puissance."—
Benoît Paul Émile Clapeyron. Mémoire sur le travail des forces élastiques dans un corps solide élastique déformé par l'action de forces extérieures. *Comptes rendus*, Tome XLVI, Janvier–Juin 1858. Pagine 208–212.

$$\bigcirc \quad 2\Pi = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathsf{S}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u}) - \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{-\boldsymbol{f}} \cdot \boldsymbol{u} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2 \int\limits_{\mathcal{V}} \Pi \, d\mathcal{V} = \int\limits_{o_2} \underbrace{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{u} \, do + \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} \, d\mathcal{V} \quad \bullet$$

Из (4.1) следует также, что без нагрузки $\int_{\mathcal{V}} \Pi \, d\mathcal{V} = 0$. Поскольку Π положителен, то и напряжение $\boldsymbol{\sigma}$, и деформация $\boldsymbol{\varepsilon}$ без нагрузки равны нулю.

$$2\Pi = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\dot{\Pi} = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\delta\Pi = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

Π равна лишь половине работы внешних сил.

Накопленная потенциальная энергия деформации Π равна только половине работы, совершённой внешними силами, действующими из ненагруженной конфигурации к равновесию со внешними силами.

Теорема Clapeyron'а подразумевает, что накопленная упругая энергия составляет лишь половину энергии, потраченной на деформацию. Оставшаяся половина работы, совершённой внешними силами, теряется где-то до достижения равновесия.

Roger Fosdick and **Lev Truskinovsky**. About Clapeyron's Theorem in Linear Elasticity. *Journal of Elasticity*, Volume 72, July 2003. Pages 145–172.

В теории распространена концепция "статического нагружения". Это когда внешняя нагрузка применяется бесконечно медленно (звучит как вечность, да).

Работа внешних сил на актуальных смещениях равна удвоенной плотности потенциальной энергии 2Π.

Если снять внешние воздействия мгновенно (бесконечно быстро), то тело будет колебаться. Но из-за сопротивления спустя некоторое время тело придёт в состояние равновесия.

Да, всего половина линейно упругой энергии запасается. Вторая половина это “ дополнительная энергия ”, которая теряется до достижения равновесия на динамику — на внутреннюю энергию частиц (диссипацию), на колебания и волны.

Но любое реальное нагружение не будет ни внезапным нагружением, ни бесконечно медленным. Это две крайности. Реальная динамика приложения нагрузок всегда будет отличной от теории.

В области же бесконечномалых вариаций реальные внешние силы, приложенные к упругой среде, работают на виртуальных смещениях и производят работу, которая в точности равна вариации плотности упругой потенциальной энергии.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \Pi .$$

Линейная упругая среда это среда, где вариация работы внутренних сил (то есть напряжений) есть вариация плотности потенциальной энергии с противоположным зна́ком $-\delta W^{(i)} = \delta \Pi = \delta W^{(e)}$, когда варьируются только смещения (нагрузки-напряжения не варьируются).

Нужно, чтобы виртуальная работа реальных внешних сил на вариациях смещений была бы равна вариации внутренней энергии с обратным знаком (для упругой среды — вариации внутренней энергии).

Теорема единственности решения

Как и в динамике (§ 2), мы допускаем существование двух решений и ищем их разность

....

Уникальность решения, открытая Gustav'ом Kirchhoff'ом для тел с односвя́зным контуром*, противоречит, казалось бы, повседневному опыту. Вообразим прямой стержень зажатый на одном концé (the “ консóльный ”) и сжимаемый на втором концé продольной силой (рис. 13). Когда нагрузка достаточно большáя, задача статики имеет два решения, “прямое” и “изогнутое”. такое противоречие с теоремой единственности происходит от нелинейности этой задачи. Если нагрузка малá (бесконечно малá), то решение описывается линейными уравнениями и единственно.

§ 5. Уравнения в смещениях

Полный набор уравнений (1.1) содержит неизвестные $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{u}$. Исключая $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, мы получаем формулировку в смещениях (симметризация $\boldsymbol{\nabla u}$ лишняя из-за симметрии ${}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_{3\rightleftarrows 4} = {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}}$).

13

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \left({}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla u} \right) + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \\
\boldsymbol{u}\big|_{o_1} = \boldsymbol{u}_0\,, \;\; \boldsymbol{n} \cdot {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla u}\big|_{o_2} = \boldsymbol{p}.
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

В изотропной среде (5.1) принимает вид

...

Общее решение однородного уравнения (...) нашёл Heinz Neuber

П. Ф. Папкович

...

§ 6. Сосредоточенная сила в бесконечной среде

A concentrated force is a useful mathematical idealization, but it cannot be found in the real world, where all forces are either body forces acting over a volume or surface forces acting over an area.

Вот риторический вопрос: *почему упругое тело сопротивляется приложенной нагрузке, “держит” её?* Книга [12] James'a Gordon'a даёт следующий ответ: тело деформируется, и потому появляются внутренние силы, называемые “напряжениями”, которые могут уравновесить внешнюю нагрузку.

...

§ 7. Нахождение смещений по деформациям

Как и всякий бивалентный тензор, градиент смещения может быть разложен на сумму симметричной и антисимметричной частей

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} = \overbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathsf{S}}} - \overbrace{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{E}}^{-\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathsf{A}}}, \;\; \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}, \tag{7.1}$$

Симметричная часть $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathsf{S}}$ есть тензор линейной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Антисимметричную часть $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathsf{A}}$ обозначим как $\boldsymbol{\Omega}$ и назовём тензором малых поворотов. Любой антисимметричный бивалентный тензор может быть представлен вектором (§ 1.8). Итак, чтобы найти смещения $\boldsymbol{u}$ по деформациям $\boldsymbol{\varepsilon}$, нужно ещё одно поле — поле поворотов $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})$.

....

Условия совместности в линейной упругости

Условия совместности Saint-Venant'а представляют условия интегрируемости для симметричного бивалентного тензорного поля. Когда такое тензорное поле совместно, тогда оно описывает какую-то деформацию.

В отношении смещение $\mapsto$ деформация $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathsf{S}}$ шесть компонент ε_{ij} деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ происходят из лишь трёх компонент u_k вектора смещений $\boldsymbol{u}$.

Условия совместности определяют, не является ли эта деформация причиной каких-либо промежутков и/или перекрываний.

(.... add a picture here .....)

...

$$\operatorname{inc}\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon}\right)^{\mathsf{T}}$$

Контур здесь произволен, так что имеем отношение

$$\operatorname{inc}\boldsymbol{\varepsilon} = {}^{2}\mathbf{0}, \tag{7.2}$$

называемому уравнением совместности деформаций.

...

Выражение (7.2) предоставляет ограничения на возможные варианты поля деформации.

(... the figure with cut squares ...)

...

Тензор $\operatorname{inc} \boldsymbol{\varepsilon}$ симметричен вместе с $\boldsymbol{\varepsilon}$

...

Все уравнения линейной теории имеют аналог (первоисточник) в нелинейной теории. Чтобы найти его для (7.2), вспомним тензор деформации Cauchy–Green'а (§ 3.3) и тензоры кривизны (§ 1.20)

....

....

§ 8. Уравнения в напряжениях

Баланс сил (или импульса)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \mathbf{0} \tag{8.1}$$

ещё не определяет напряжения. Необходимо вдобавок, чтобы соответствующие напряжениям деформации $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$ (??)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = {}^{4}\!\boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\sigma} \tag{8.2}$$

были совместны (§ 7)

$$\operatorname{inc} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \Big(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \Big)^{\mathsf{T}} = {}^{2}\mathbf{0}. \tag{8.3}$$

Взятые вместе, (8.1), (8.2) and (8.3) представляют полный замкнутый набор (систему) уравнений в напряжениях.

...

§ 9. Принцип минимума потенциальной энергии

Когда существование функции энергии деформации несомненно, и внешние силы считаются постоянными во вре́мя варьирования смещений, тогда принцип виртуальной работы приводит к принципу минимума потенциальной энергии.

Формулировка принципа:

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{u}) \equiv \int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\Pi(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} \Big) d\mathcal{V} - \int\limits_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u} \, do \to \min, \;\; \boldsymbol{u}\big|_{o_1} = \boldsymbol{u}_0 . \quad (9.1)$$

Функционал $\mathscr{E}(\boldsymbol{u})$, называемый (полной) потенциальной энергией enof a linear-elastic bodyлинейно-упругого те́ла, минимален тогда, когда смещения $\boldsymbol{u}$ истинны — то есть для решения задачи (5.1). Аргументы-функции $\boldsymbol{u}$ должны удовлетворять геометрическому условию на o_1 (так они не рвут существующие связи и могут быть непрерывными иначе $\Pi(\boldsymbol{u})$ не будет интегрируемой) .

Для истинного поля смещений $\boldsymbol{u}$, квадратичная функция

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}$$

становится равной истинной потенциальной энергии деформации. Тогда

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\min} ,$$

которая согласно теореме Clapeyron'а (4.1) есть

$$\mathscr{E}_{\min} = \int\limits_{\mathcal{V}} \Pi(\boldsymbol{u}) \, d\mathcal{V} - \Bigg(\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} \, d\mathcal{V} + \int\limits_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u} \, do \Bigg) = - \int\limits_{\mathcal{V}} \Pi(\boldsymbol{u}) \, d\mathcal{V}.$$

Взяв какое-то другое приемлемое поле смещений $\boldsymbol{u}'$, взгля́нем на конечную разность

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{u}') - \mathscr{E}(\boldsymbol{u}) = \int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\Pi(\boldsymbol{u}') - \Pi(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}) \Big) d\mathcal{V} - \int\limits_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}) \, do,$$

ища́ $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}') - \mathscr{E}(\boldsymbol{u}) \geq 0$ или (то же самое) $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}') \geq \mathscr{E}(\boldsymbol{u})$.

$\boldsymbol{f} =$ constant и $\boldsymbol{p} =$ constant

$\Pi(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla a} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla a}$ (but *not* the linear $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla u} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla a}$ — this means $\Pi(\boldsymbol{a}) \neq \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla a}$)

Связи не меняются: $(\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u})\big|_{o_1} = \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}$. Внешняя поверхностная сила $\boldsymbol{p}\big|_{o_2} = \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ на o_2 и $= \boldsymbol{0}$ где-либо ещё на $o(\partial\mathcal{V})$. $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\nabla u} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} = {}^2$**constant** along with constant $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{f}$. Поэтому

$$\int\limits_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u})\, do = \oint\limits_{o(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u})\, do = \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \Big(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u})\Big) d\mathcal{V} =$$
$$= \int\limits_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u})\, d\mathcal{V} + \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u})\, d\mathcal{V}.$$

из-за симметрии $\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\sigma} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla a}^{\mathsf{S}}\ \forall \boldsymbol{a}$. Разность преобразуется до

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{u}') - \mathscr{E}(\boldsymbol{u}) =$$
$$= \int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\Pi(\boldsymbol{u}') - \Pi(\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}) \cdot (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u})\Big) d\mathcal{V}.$$

И с балансом импульса $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{u}') - \mathscr{E}(\boldsymbol{u}) = \int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\Pi(\boldsymbol{u}') - \Pi(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u})\Big) d\mathcal{V}.$$

Тут

$$\Pi(\boldsymbol{u}') = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla u}' \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla u}', \quad \Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla u} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla u},$$

$$\Pi(\boldsymbol{u}') - \Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla u}' \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla u}' - \boldsymbol{\nabla u} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla u}\Big)$$

$${}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_{12\rightleftarrows 34} = {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla u} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla u}' = \boldsymbol{\nabla u}' \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla u}$$

$$\frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla u}' \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla u}' - \boldsymbol{\nabla u} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla u} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla u}' - \boldsymbol{\nabla u}' \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla u}\Big)$$

$$(\boldsymbol{\nabla u}' - \boldsymbol{\nabla u}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u})$$

для конечной разности потенциалов

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}) \cdot\cdot {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u}) = \Pi(\boldsymbol{u}') - \Pi(\boldsymbol{u}),$$

добавляя к которой

$$-\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} \cdot\cdot {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u})$$

мы получаем

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u}) \cdot\cdot {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u}) = \Pi(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u})$$

и в концé-концóв*

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{u}') - \mathscr{E}(\boldsymbol{u}) = \int\limits_{\mathcal{V}} \Pi(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u})\,d\mathcal{V}.$$

Потому как ${}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}}$ положительно определён (§ 2) $\Pi(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w} \cdot\cdot {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w} \geq 0 \;\forall \boldsymbol{w}$ (и $=0$ только если $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{w} = \textbf{constant}$: для случая трансляции как целого без деформации.

...

$\delta\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{u}$

...

метод Ritz’a

Задача о минимуме функционала $\mathscr{E}(\boldsymbol{u})$ приближённо решается как

....

метод конечных элементов (the finite element method)

....

* $b^2 - a^2 - 2a(b-a) = (b+a)(b-a) - 2a(b-a) = (b-a)^2$

§ 10. Принцип минимума дополнительной энергии

Когда отношения напряжения–деформации (закон Hooke'a) assure the existænce of a complementary energy function and the geometrical boundary conditions are assumed constant during variation of stresses, then the principle of minimum complementary energy emerges.

Дополнительная энергия линейно-упругого тéла есть следующий функционал над полем напряжений:

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \int\limits_{\mathcal{V}} \widehat{\Pi}(\boldsymbol{\sigma})\, d\mathcal{V} - \int\limits_{o_1} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u}_0 \, do, \;\; \boldsymbol{u}_0 \equiv \boldsymbol{u}\big|_{o_1}, \tag{10.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\big|_{o_2} = \boldsymbol{p}.$$

...

Вариация уравнения баланса сил

$$\delta\big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}\big) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}$$

...

Принцип минимума дополнительной энергии очень полезен для оценки неточных (приближённых) решений. Но для вычислений он не столь существенен, как принцип (Lagrange'a) минимума потенциальной энергии (9.1).

Для вывода вариационных принципов естественно использовать принцип виртуальной работы (§ 2.3) как фундамент.

§ 11. Смешанные принципы стационарности

Prange–Hellinger–Reissner Variational Principle,
named after *Ernst Hellinger*, *Georg Prange* and *Eric Reissner*.
Working independently of Hellinger and Prange, Eric Reissner published his famous six-page paper "On a variational theorem in elasticity" in 1950. In this paper he develops — without, however, considering Hamilton–Jacobi theory — a variational principle same to that of Prange and Hellinger.

Hu–Washizu Variational Principle,
именуемых *Hu Haichang* и *Kyuichiro Washizu*.

Следующий функционал над смещениями и напряжениями

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma}) = \int\limits_{\mathcal{V}} \Big[\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathsf{S}} - \widehat{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}\Big] d\mathcal{V} - \\ - \int\limits_{o_1} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \big(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0\big) do - \int\limits_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u}\, do \quad (11.1)$$

нóсит имена Reissner'a, Prange'a и Hellinger'a.

...

Преимущество принципа Reissner'a–Hellinger'a — свобода варьирования. Но у него есть и недостаток: на истинном решении у функционала нет экстремума, а лишь стационарность.

Принцип можно использовать для построения приближённых решений методом Ritz'a (Ritz method). Задавая аппроксимации

...

Принцип Hu–Washizu (Ху–Васидзу) [103] формулируется так:

$$\delta\mathcal{W}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}) = 0,$$

$$\mathcal{W} \equiv \int\limits_{\mathcal{V}} \Big[\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \Big(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathsf{S}} - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) + \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}\Big] d\mathcal{V} - \\ - \int\limits_{o_1} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \big(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0\big) do - \int\limits_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u}\, do. \quad (11.2)$$

Как и в принципе Рейсснера–Хеллингера, здесь нет ограничений ни в объёме, ни на поверхности, но добавляется третий независимый аргумент $\boldsymbol{\varepsilon}$. Поскольку $\widehat{\Pi} = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \Pi$, то (11.1) и (11.2) кажутся почти одним и тем же.

Из принципа Hu–Washizu (Ху–Васидзу) вытекает вся полная система уравнений с краевыми условиями, так как

.....

§ 12. Антиплоский сдвиг

Это такая проблема линейной теории упругости, где нетривиальные результаты получаются простыми выводами* .

Эта проблема — об изотропном упругом континууме в декартовых координатах

$$x_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \qquad x_1 \text{ и } x_2.$$

Плоскость $x_1,\ x_2$ — поперечное сечение стержня, третья координата x_3 перпендикулярна сечению. Базисные векторы

$$\boldsymbol{e}_i = \partial_i \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}.$$

В случае антиплоской деформации (антиплоского сдвига), поле смещений $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ параллелен третьей координате x_3:

$$\boldsymbol{u} = \upsilon \boldsymbol{e}_3,$$

и υ не зависит от x_3:

$$\upsilon = \upsilon(x_1, x_2), \quad \partial_3 \upsilon = 0.$$

Деформация

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\nabla u}^{\mathsf{S}} = \boldsymbol{\nabla}\big(\upsilon \boldsymbol{e}_3\big)^{\mathsf{S}} = \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{\nabla} \upsilon^{\mathsf{S}} + \upsilon \underbrace{\boldsymbol{\nabla e}_3}_{{}^2\mathbf{0}}{}^{\mathsf{S}} = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{\nabla}\upsilon\, \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{\nabla}\upsilon\big) \quad (12.1)$$

В плоскости x_1, x_2 сечения

$$\mu = \mu(x_1, x_2), \partial_3 \mu = 0$$

возможна неоднородность среды.

* Нетривиальное в теории упругости это, для примера, когда деление силы на площадь даёт бесконечно большу́ю ошибку в вычислении напряжений.

§ 13. Кручение стержней

M. de Saint-Venant. Memoire sur la torsion des prismes (1853)

Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant. Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. 1856. 327 pages.

1. Memoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion, etc. Memoires presentes par divers savants a l'Academie des scienees, t. 14, 1856.

2. Memoire sur la flexion des prismes, etc. Journal de mathematiques pures et appliquees, publie par J. Liouville, 2me serie, t. 1, 1856.

Перевод на русский язык: **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.

стр. 379–494

Эта задача, которая была подробно изучена Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant'ом, содержится едва ли не в каждой книге о линейной упругости. В ней рассматривается цилиндр какого-либо сечения, нагруженный лишь поверхностными силами на торцах (... add a figure ...)

$$\begin{aligned} z = \ell :\ & \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{p}(x_\alpha), \\ z = 0 :\ & -\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{p}_0(x_\alpha), \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{e}_3$, $\alpha = 1, 2$, $\boldsymbol{x} \equiv x_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$. Координаты — x_1, x_2, z.

Результанта (сумма) внешних сил равна $\boldsymbol{0}$, а суммарная пара сил направлена вдоль оси z:

$$\int\limits_o \boldsymbol{p} do = \boldsymbol{0}, \quad \int\limits_o \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} do = M\boldsymbol{k}.$$

Известно, что кручение даёт касательные компоненты напряжения $\tau_{z1} \equiv \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_1$ и $\tau_{z2} \equiv \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_2$. Полагая, что лишь эти компоненты тензора $\boldsymbol{\sigma}$ ненулевые

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{s}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{s} \equiv \tau_{z\alpha} \boldsymbol{e}_\alpha.$$

Решение этой задачи упрощается, если используются уравнения в напряжениях.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}_{\perp} \cdot \boldsymbol{s} = \mathbf{0} (\boldsymbol{\nabla}_{\perp} \equiv \boldsymbol{e}_{\alpha} \partial_{\alpha}), \partial_z \boldsymbol{s} = \mathbf{0}, \tag{13.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \sigma = {}^2\mathbf{0} \;\Rightarrow\; \triangle_{\perp} \boldsymbol{s} = \mathbf{0} (\triangle_{\perp} \equiv \partial_{\alpha} \partial_{\alpha}). \tag{13.2}$$

Независимость $\boldsymbol{s}$ от z даёт возможность заменить трёхмерные операторы двумерными.

...

§ 14. Плоская деформация

Тут вектор смещения $\boldsymbol{u}$ параллелен плоскости x_1, x_2 и не зависит от третьей координаты z.

Для примера рассмотрим полуплоскость с сосредоточенной нормальной силой Q на краю (?? рисунок ??)

...

Библиография

Существует несколько десятков книг по классической линейной теории упругости, которые представляют некоторый интерес. Прежде всего это монография Anatoliy I. Lurie (Анатолия И. Лурье) [30]. Его более ранняя книга [31] посвящена решению пространственных проблем. опубликовал свою работу [41], наполненную разнообразным контентом. Автор решил динамические проблемы. Также в его книге есть описание континуума братьев Cosserat. Будучи математически сложной, теория упругости привлекает математиков, для примера есть монография [54] Philippe'a G. Ciarlet (Филиппа Сьярле). Климентий Черны́х описал особенности анизотропии в линейно упругих средах [66].

глава 5

МИКРОПОЛЯРНАЯ ТРЁХМЕРНАЯ СРЕДА

§1. Введение в линейную микрополярную теорию

Характерная особенность классических упругих сред (гл. 3 и 4) это то, что они сделаны из “простых точек”. Частица классического континуума имеет лишь трансляционные степени свободы, и только один вектор $\boldsymbol{r}(q^i, t)$ описывает её движение. Поэтому внешние нагрузки в такой модели это только силы, объёмные и поверхностные. Моментов нет.

Но не так уж трудно построить более сложные модели сплошной среды, где частицы обладают не только лишь степенями свободы трансляции, но и не́которыми дополнительными. Эти новые степени свободы относятся с новыми нагрузками. Наиболее естественная из неклассических моделей трёхмерной среды была предложена братьями Cosserat в 1909 [25]. Каждая частица континуума Cosserat’ есть бесконечно-малое совершенно жёсткое тело с шестью степенями свободы, тремя трансляционными и тремя вращательными. Нагрузки в такой среде это силы и моменты. Работа братьев Cosserat оставалась незамеченной полвека, но затем возник интерес к этой теме.

Woldemar Voigt пробовал to remove the shortcomings классической теории упругости [***W. Voigt***. *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, 34: 3–51, 1887*] by the assumption that взаимодействие of two parts of the body is transmitted through an area element do by means not only of the force vector $\boldsymbol{p}do$, но также by the moment vector $\boldsymbol{m}do$.

Поэтому, besides the force stresses σ_{ji} also the moment stresses have been defined.

Однако, the complete theory of asymmetric elasticity was developed by the brothers ***François et Eugène Cosserat*** who published it in 1909 in the work *"Théorie des corps déformables"*.

Они предположили, что телá составлены из соединённых частиц. Эти частицы похожи на маленькие жёсткие тела.

В течение деформирования каждая частица перемещается вектором $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ и поворачивается вектором $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{r}, t)$, функциями положения $\boldsymbol{r}$ и времени t. Поэтому точки (частицы) континуума Cosserat обладают ориентацией (это "полярная среда"). Так что мы можем говорить о повороте точки. взаимно независимые вéкторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ определяют деформации тéла.

Введение $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ с предположением, что передача сил через элемент площади do происходит вектором силы $\boldsymbol{p}$ и вектором момента $\boldsymbol{m}$ ведёт впоследствии к несимметричным тензорам напряжений σ_{qp} и μ_{qp}.

Теория братьев E. и F. Cosserat оставалась незамеченной в течение времени их жизни. Это было так, потому что их теория была нелинейной и потому включала конечные деформации, потому что рамки их теории были вне рамок классической линейной упругости. Они пробовали сконструировать единую теорию поля, содержащую механику, оптику и электродинамику, объединённых принципом наименьшего действия.

The research in the field of the general theories of continuous media conducted in the last fifteen years, drew the attention of the scientists to the Cosserats' work. Looking for the new models, describing the behaviour of the real elastic media more precisely, the models similar to, or identical with that of Cosserats' have been encountered. Here I want to mention, first of all, the papers by C. Truesdell and R. A. Toupin [***C. Truesdell*** *and* ***R. A. Toupin***. *The classical field theories. Encyclopædia of Physics, Chapter 1, Springer-Verlag, Berlin, 1960*], G. Grioli [***Grioli G.*** *Elasticité asymmetrique. Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser. IV, 50 (1960)*], R. D. Mindlin and H. F. Tiersten

[***Mindlin, R. D.; Tiersten, H. F.*** *Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 11. 1962. 415–448*].

В истинно микрополярном континууме векторное поле смещений $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ и поле поворотов $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{r}, t)$ взаимно независимы. Это также называется моделью со свободным вращением. Также это геометрически линейная модель, то есть случай очень ма́лых, бесконечно ма́лых смещений и бесконечно ма́лых поворотов. Здесь операторы $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}$ и $\boldsymbol{\nabla}$ неразличимы. $\mathcal{V} = \mathring{\mathcal{V}}$, $\rho = \mathring{\rho}$ и поэтому уравнения “могут быть написаны в начальной конфигурации”. Также операторы δ и $\boldsymbol{\nabla}$ коммутируют ($\delta\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{u}$, $\delta\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi}$).

Чтобы построить эту модель, я использую принцип виртуальной работы. Этот принцип говорит, что вариация работы реальных внешних сил на виртуальных смещениях равна́ с обратным знаком вариации работы of the internal forcesвнутренних сил, реальных напряжений на виртуальных деформациях

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\boldsymbol{f} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{m} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \Big) d\mathcal{V} + \int\limits_{o} \Big(\boldsymbol{p} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{M} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \Big) do = - \int\limits_{\mathcal{V}} \delta W^{(i)} d\mathcal{V}.$$

Здесь $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{m}$ это внешние силы и моменты “на единицу объёма”, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{M}$ внешние силы тоже, но на единицу поверхности (поверхностные нагрузки, они действуют лишь на не́которой части o на граничной поверхности.

$\delta W^{(i)}$ есть работа внутренних сил на единицу объёма

По-прежнему, мы полагаем, что $\delta W^{(i)}$ обнуляется, когда тело движется как жёсткое целое без деформации:

$$\delta\boldsymbol{u} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r} + \textsf{constant}, \;\; \delta\boldsymbol{\varphi} = \textsf{constant} \;\Rightarrow\; \delta W^{(i)} = 0,$$
$$\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r} \times \delta\boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{E} \times \delta\boldsymbol{\varphi} = -\delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}, \;\; \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi} = {}^2\boldsymbol{0}.$$

Вводя тензоры деформации — тензор тензор относительного смещения между частицами $\boldsymbol{\gamma}$ (тензор дисторции, дисторция это относительное смещение между частицами) и тензор искривления-скручивания $\boldsymbol{\kappa}$ (у него есть и другие имена: the curvature-twist tensor, the torsion-flexure tensor, or the wryness tensor)

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}, \;\; \boldsymbol{\kappa} \equiv \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{\varphi},\;\; \boldsymbol{\kappa}_{\times} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varphi},$$
$$\delta\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E},\;\; \delta\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi},$$

с нужным отсутствием любых виртуальных деформаций $\delta\boldsymbol{\gamma} = {}^2\boldsymbol{0}$ и $\delta\boldsymbol{\kappa} = {}^2\boldsymbol{0}$.

В §3.15 для безмоментной среды, напряжения появляются как множители Lagrange'а в принципе виртуальной работы, когда $\delta W^{(i)} = 0$. Так же и тут:

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\boldsymbol{f} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{m} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} \Big) d\mathcal{V} + \\ + \int\limits_{o} \Big(\boldsymbol{p} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{M} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \Big) do = 0. \quad (1.2)$$

Множители Лагранжа в каждой точке — это несимметричные тензоры второй сложности $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\mu}$.

Преобразуем $-\boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}}$ и $-\boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}}$

$$\delta\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}} - \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E},\;\; \delta\boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi}^{\mathsf{T}},$$
$$-\boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}),\;\; -\boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi}^{\mathsf{T}}.$$

Используя

$$(8.4, \S\,1.8) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A}_{\times} = -\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, {}^3\boldsymbol{\epsilon},$$

$$\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{A} \cdot\cdot\, (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \big(-{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{b}\big) = \\ = \big(-\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, {}^3\boldsymbol{\epsilon}\big) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}_{\times} \cdot \boldsymbol{b} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\tau}_{\times} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}$$

и “product rule”

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}},$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi}^{\mathsf{T}},$$

получаем

$$-\boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\tau}_{\times} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi},$$
$$-\boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}).$$

После интегрирования с применением теоремы о дивергенции*

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{u})\, d\mathcal{V} = \oint\limits_{\widehat{o}(\partial \mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{u}\, do, \;\; \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi})\, d\mathcal{V} = \oint\limits_{\widehat{o}(\partial \mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}\, do$$

(1.2) приобретает вид

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big((\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f}) \cdot \delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \boldsymbol{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \Big) d\mathcal{V} + \\ + \int\limits_{o} \Big((\boldsymbol{p} - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \Big) do = 0.$$

Из случайности вариаций $\delta \boldsymbol{u}$ и $\delta \boldsymbol{\varphi}$ в объёме вытекает баланс сил и моментов

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}, \tag{1.3}$$

а из случайности на поверхности — краевые условия

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p}, \;\; \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{M}. \tag{1.4}$$

Тензор силового напряжения $\boldsymbol{\tau}$ удовлетворяет тем же дифференциальным “уравнениям равновесия”** и краевым условиям, что и в безмоментной среде. Но тензор $\boldsymbol{\tau}$ несимметричен: вместо $\boldsymbol{\tau}_{\times} = \boldsymbol{0}$ тут $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$ — появляются моментные напряжения $\boldsymbol{\mu}$, и объёмная моментная нагрузка $\boldsymbol{m}$ не нулевая.

Смысл компонент тензора моментного напряжения $\boldsymbol{\mu}$ раскрывается так же, как и для $\boldsymbol{\tau}$. Для ортонормального базиса, момент $\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\mu} = \mu_{ik} \boldsymbol{e}_k$ действует на площáдке с нормалью $\boldsymbol{e}_i$. Диагональные компоненты μ_{11}, μ_{22}, μ_{33} это крутящие моменты, недиагональные — изгибающие (?? рисунок??).

...

* $\boldsymbol{a} \cdot ({}^2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot {}^2\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot {}^2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{c}$

** Кавычки здесь оттого, что *уравнения равновесия* это вообще всё, что вытекает из принципа виртуальной работы в статике.

вектор эксцентриситета $\boldsymbol{\ae}$ и тензор инерции ${}^2\boldsymbol{\mathfrak{I}}$

Для изотропной среды $\boldsymbol{\ae} = \mathbf{0}$, ${}^2\boldsymbol{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\boldsymbol{E}$.

...

§ 2. Отношения упругости

В этой книге упругой называется среда с потенциальными внутренними силами: $\delta W^{(i)} = -\,\delta\Pi$, где Π — энергия деформации на единицу объёма (продолжая моделировать геометрически линейный материал, $\mathcal{V} = \mathring{\mathcal{V}}$).

Имея соотношения (...)

...

$$\delta\Pi = -\,\delta W^{(i)} = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\gamma}},\;\; \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\kappa}}. \tag{2.1}$$

Последние равенства — соотношения упругости (определяющие уравнения, constitutive equations).

Разлагая тензоры деформации и напряжения на симметричные и антисимметричные части

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{S}} - \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\gamma}_{\times} \times \boldsymbol{E},\;\; \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{S}} - \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\kappa}_{\times} \times \boldsymbol{E},$$

$$\delta\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} = \delta\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{S}} + \tfrac{1}{2}\,\delta\boldsymbol{\gamma}_{\times} \times \boldsymbol{E},\;\; \delta\boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} = \delta\boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{S}} + \tfrac{1}{2}\,\delta\boldsymbol{\kappa}_{\times} \times \boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\mathsf{S}} - \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\tau}_{\times} \times \boldsymbol{E},\;\; \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{\mathsf{S}} - \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\mu}_{\times} \times \boldsymbol{E},$$

преобразуем выражение $\delta\Pi = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}}$ как

$$\delta\Pi = \ldots \tag{2.2}$$

...

$$\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{\varphi},$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{\times} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varphi},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{S}} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\mathsf{S}},$$

...

The classical isotropic linear elastic material behavior is described by two material parameters, for example, the Young's modulus and the Poisson's ratio, while the isotropic Cosserat continuum needs six material parameters

even when assumed to be linear, homogeneous and isotropic, it requires six independent material constants, in contrast to only two such constants for the classical continuum

...

Соотношения (2.1) обращаются преобразованием Лежандра

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \;\; \boldsymbol{\kappa} = \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\mu}}, \\ \widehat{\Pi}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} - \Pi(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}).\end{gathered} \tag{2.3}$$

...

material's intrinsic (internal) length scale ℓ

Если устремить ℓ к нулю, то исчезает вклад $\boldsymbol{\kappa}$ в Π, а с ним и моментные напряжения $\boldsymbol{\mu}$. Когда вдобавок нет объёмной моментной нагрузки $\boldsymbol{m}$, тогда тензор $\boldsymbol{\tau}$ становится симметричным: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mu + \boldsymbol{\tau}_{\times} + m = \boldsymbol{0}$, $\mu = {}^2\boldsymbol{0}$, $m = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_{\times} = \boldsymbol{0}$, и модель превращается в классическую безмоментную.

Использование же микрополярной модели естественно в случае, когда реальный материал имеет некий наименьший объём, "в который невозможно войти". И такая ситуация возникает весьма часто: композиты с "представительным" объёмом, поликристаллические материалы, полимеры с большими молекулами (макромолекулами).

§ 3. Уравнения совместности

Имея тождество $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{a} = {}^2\boldsymbol{0} \; \forall \boldsymbol{a}$ и определения тензоров деформации (1.1)

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\kappa} \equiv \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\kappa} = {}^2\boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \times \big(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}\big) = {}^2\boldsymbol{0} \;\ldots\end{gathered} \tag{3.1}$$

…

§ 4. Теоремы статики

Теоремы статики линейных консервативных систем, легко выводимые для конечного числа степеней свободы (минимальность энергии, теорема Clapeyron'а, теорема о взаимности работ и др. — § 2.6), справедливые для любой континуальной линейной упругой среды (гл. 4), включая микрополярную модель континуума (среду с парами сил или моментами).

…

§ 5. Псевдоконтинуум Cosserat

Помимо модели со свободным вращением ("истинно микрополярного континуума"), существует упрощённая модель среды с парами сил, в которой повороты выражаются через смещения, как для классического безмоментного континуума:

$$\boldsymbol{\varphi} = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\gamma}_{\times} = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\mathsf{S}} \tag{5.1}$$

— модель со стеснённым вращением (constrained rotation)*.

Равенство $\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \boldsymbol{0}$ (симметрию $\boldsymbol{\gamma}$) возможно понимать как внутреннюю связь (§ 3.13). Аргумент $\boldsymbol{\gamma}_{\times}$ исчезает из энергии Π, соотношение упругости для $\boldsymbol{\tau}_{\times}$ не может быть написано. Его место в полной системе занимает уравнение связи.

В классической (линейной безмоментной) теории упругости полная система сводится к одному уравнению для вектора $\boldsymbol{u}$ (§ 4.**??**). В моментной теории

…

* Братья Cosserat называли это cas de trièdre caché (случай скрытого трёхгранника, case of latent trihedron).

§ 6. Плоская деформация

Все переменные в этой постановке проблемы не зависят от декартовой координаты $z \equiv x_3$ (орт оси — $\boldsymbol{k}$). Смещения и силы перпендикулярны оси z, а повороты и моменты — параллельны ей:

...

Это краткое изложение плоской задачи относится к модели с независимыми поворотами. ПсевдоконтинуумCosserat (модель со стеснённым вращением) получается либо при наложении внутренней связи $\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \boldsymbol{0}$, либо при предельном переходе ...

Подробнее о плоской моментной задаче написано в книгах Н. Ф. Морозова [**?**, 38].

§ 7. Нелинейная теория

Кажущееся на первый взгляд чрезвычайно трудным, построение теории конечных деформаций континуума Cosserat становится прозрачным, если опираться на общую механику, тензорное исчисление и нелинейную теорию безмоментной среды.

Построение модели упругого континуума проходит обычно четыре этапа:

✓ определение степеней свободы частиц,

✓ выявление нагрузок (“силовых факторов”, напряжений) и условий их баланса,

✓ подбор соответствующих мер деформации

и, наконец,

✓ вывод соотношений упругости между напряжениями и деформациями.

Этот путь очень сокращается, если опираться на принцип виртуальной работы.

Как и в гл. 3, среда состоит из частиц с материальными координатами q^i и вектором-радиусом $\boldsymbol{r}(q^i, t)$. В начальной (исходной, отсчётной) конфигурации $\boldsymbol{r}(q^i, 0) \equiv \mathring{\boldsymbol{r}}(q^i)$. Но кроме трансляции, частицы имеют независимые степени свободы поворота, описываемого ортогональным тензором

$$\boldsymbol{O}(q^i, t) \equiv \boldsymbol{a}_j \mathring{\boldsymbol{a}}^j = \boldsymbol{a}^j \mathring{\boldsymbol{a}}_j = \boldsymbol{O}^{-\mathsf{T}},$$

где тройка векторов $\boldsymbol{a}_j(q^i, t)$ жёстко связана с каждой частицей, показывая угловую ориентацию относительно как-либо выбираемых* векторов $\mathring{\boldsymbol{a}}_j(q^i) \equiv \boldsymbol{a}_j(q^i, 0)$, $\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{a}}_j$; $\boldsymbol{a}^j$ — тройка взаимных векторов: $\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{a}^j = \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{E}$ $(t{=}0,\ \mathring{\boldsymbol{a}}^j\!: \mathring{\boldsymbol{a}}_j \mathring{\boldsymbol{a}}^j = \mathring{\boldsymbol{a}}^j \mathring{\boldsymbol{a}}_j = \boldsymbol{E})$. Движение среды полностью определяется функциями $\boldsymbol{r}(q^i, t)$ и $\boldsymbol{O}(q^i, t)$.

Имея представления $\mathring{\boldsymbol{r}}(q^i)$ и $\boldsymbol{r}(q^i, t)$, вводим базис $\boldsymbol{r}_i \equiv \partial_i \boldsymbol{r}$, взаимный базис $\boldsymbol{r}^i$: $\boldsymbol{r}_j \cdot \boldsymbol{r}^i = \delta_j^i$, дифференциальные операторы $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}$ и $\boldsymbol{\nabla}$, а также градиент движения $\boldsymbol{F}$

$$\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \equiv \mathring{\boldsymbol{r}}^i \partial_i, \;\; \boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{r}^i \partial_i, \;\; \boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}} \cdot \mathring{\boldsymbol{\nabla}}, \;\; \boldsymbol{F} \equiv \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{r}_i \mathring{\boldsymbol{r}}^i. \tag{7.1}$$

Вариационное уравнение принципа виртуальной работы для континуума с нагрузками в объёме и на поверхности:

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\rho \big(\boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \big) + \delta W^{(i)} \Big) d\mathcal{V} + \\ + \int\limits_{\mathcal{O}} \Big(\boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \Big) d\mathcal{O} = 0. \tag{7.2}$$

Здесь ρ — плотность массы; $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{m}$ — внешние сила и момент на единицу массы; $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{M}$ — они же на единицу поверхности; $\delta W^{(i)}$ — работа внутренних сил на единицу объёма в текущей конфигурации. Вектор ма́лого поворота $\delta \boldsymbol{\varphi}$

$$\boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{E} \;\Rightarrow\; \delta \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{O} \cdot \delta \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} \Rightarrow \\ \Rightarrow\; \delta \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} \Rightarrow\; \delta \boldsymbol{O} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{O},$$

* Один из вариантов: $\mathring{\boldsymbol{a}}_j = \mathring{\boldsymbol{r}}_j \equiv \partial_j \boldsymbol{r}$. Другое предложение: $\mathring{\boldsymbol{a}}_j$ это ортонормальная тройка собственных векторов тензора инерции частицы. Вообще, $\mathring{\boldsymbol{a}}_j$ могут быть любой тройкой линейно-независимых векторов.

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = -\tfrac{1}{2}\big(\delta\boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}\big)_{\times}$$

При движении среды как жёсткого целого нет деформаций, и работа $\delta W^{(i)}$ внутренних сил равна нулю:

$$\delta\boldsymbol{r} = \textbf{constant} + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r},\;\; \delta\boldsymbol{\varphi} = \textbf{constant} \;\Rightarrow\; \delta W^{(i)} = 0,$$
$$\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi} = {}^{2}\boldsymbol{0},\;\; \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}\times\delta\boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{\varphi} = -\,\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{E} = {}^{2}\boldsymbol{0}.$$

К нагрузкам. Несимметричные тензоры напряжения, силового $\boldsymbol{\tau}$ и моментного $\boldsymbol{\mu}$, введём как множители Lagrange'а:

$$\int\limits_{\mathcal{V}}\Big(\rho\big(\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{m}\cdot\delta\boldsymbol{\varphi}\big) - \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\big(\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{E}\big)^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{\mu}\cdot\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi}^{\mathsf{T}}\Big)d\mathcal{V} + \\ + \int\limits_{\mathcal{O}}\Big(\boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\varphi}\Big)d\mathcal{O} = 0. \quad (7.3)$$

После тех же преобразований, что и в § 1, получаем

...

Отсюда вытекают уравнения баланса сил и моментов в объёме и краевые условия в виде формул типа Cauchy. Они по существу те же, что и в линейной теории.

Найдём теперь тензоры деформации. Их можно вводить по-разному, если требовать лишь одного — нечувствительности к движению среды как жёсткого целого. Читатель найдёт не один вариант таких тензоров. Однако, вид тензоров деформации “подсказывает” принцип виртуальной работы.

...

§ 8. Нелинейная модель со стеснённым вращением

Вспомним переход к модели со стеснённым вращением в линейной теории (§ 5). Разделились соотношения упругости для симметричной части тензора силового напряжения $\boldsymbol{\tau}^{\mathsf{S}}$ и кососимметричной его части $\boldsymbol{\tau}_{\times}$. Возникла внутренняя связь $\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \boldsymbol{0}$

...

Библиография

Все работы по моментной теории упругости упоминают книгу братьев Eugène et François Cosserat [25], где трёхмерной среде посвящена одна глава из шести. Переведённая монография W. Nowacki [41] была одной из первых книг на русском языке с изложением линейной моментной теории. Ранее эта область представлялась статьями — например, R. D. Mindlin'a и H. F. Tiersten'a [37]. Краткое изложение моментной теории, но с подробным рассмотрением задач содержится в книгах Н. Ф. Морозова [**?**, 38].

глава 6

ТЕРМОУПРУГОСТЬ

В этой главе рассматривается лишь безмоментная модель.

§ 1. Первый закон термодинамики

До сих пор моделирование было ограничено только механикой. Широко́ известно, однако, что изменение температуры вызывает деформацию. Температурная деформация и напряжение часто играют первичную роль и могут приводить к поломке.

Столь эффективный в механике, принцип виртуальной работы не примени́м к термомеханике*. Рассматривая тепловые эффекты, возможно опираться на два закона термодинамики.

Первый, открытый Joule'ем, Mayer'ом, и Helmholtz'ем — это есть адаптированная версия баланса энергии: скорость изменения внутренней энергии $\dot{E}$ равна сумме мощности внешних сил $P^{(e)}$ и скорости подвода тепла $\dot{Q}$

$$\dot{E} = P^{(e)} + \dot{Q}. \tag{1.1}$$

Внутренняя энергия E это сумма кинетической и потенциальной энергий частиц. Для любого коне́чного объёма материального континуума

$$E = \int\limits_{\mathcal{V}} \rho \left(\tfrac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + e \right) d\mathcal{V}. \tag{1.2}$$

С балансом массы $dm = \rho d\mathcal{V} = \rho' d\mathcal{V}'$, $m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' d\mathcal{V}'$ и

$$\Psi = \int_{\mathcal{V}} \rho \psi \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \psi \, d\mathcal{V}' \Rightarrow \dot{\Psi} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\psi} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \rho' \dot{\psi} \, d\mathcal{V}',$$

* Аналог принципа виртуальной работы будет представлен ниже в § 8.

легко получить производную внутренней энергии по времени

$$\dot{E} = \int\limits_{\mathcal{V}} \rho \Big(\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{e} \Big) d\mathcal{V}. \tag{1.3}$$

Мощность внешних сил для некоторого коне́чного объёма безмоментного континуума

$$P^{(e)} = \int\limits_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \, d\mathcal{V} + \oint\limits_{O(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \, dO = \int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\rho \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \big) \Big) d\mathcal{V} =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{f} \big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathsf{S}} \Big) d\mathcal{V}. \tag{1.4}$$

Как и раньше (гл. 3), $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжения Cauchy, $\boldsymbol{f}$ — массовая сила (без инерционной части $-\ddot{\boldsymbol{r}}$, которая содержится в $\dot{E}$), $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ — поверхностная сила. Использована симметрия $\boldsymbol{\tau}$ для раскрытия $\boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \big)$:

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\mathsf{S}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathsf{S}},$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \big) = \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} \big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathsf{S}}.$$

Обозначая тензор скорости деформации как $\boldsymbol{\mathcal{D}} \equiv \boldsymbol{\nabla} \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathsf{S}}$

$$P^{(e)} = \int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{f} \big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} \Big) d\mathcal{V}. \tag{1.4'}$$

Тепло прибывает в объём среды двумя путями. Первый — поверхностная передача тепла (heat conduction, теплопроводность, конвекция, диффузия), происходящая через материю, при контакте двух сред. Это может быть описано вектором потока тепла $\boldsymbol{q}$. Через бесконечно-малую площа́дку в текущей конфигурации в направлении вектора нормали $\boldsymbol{n}$ в единицу времени проходит тепловой поток $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} dO$. Для поверхности конечных размеров это выражение нужно проинтегрировать. Обычно полагают

$$\boldsymbol{q} = -{}^{2}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\nabla} \Theta, \tag{1.5}$$

где Θ — температура (поле температуры); ${}^2\boldsymbol{k}$ — тензор коэффициентов теплопроводности как свойство материала, для изотропного материала ${}^2\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{q} = -k\boldsymbol{\nabla}\Theta$.

Второй путь — объёмная передача тепла (тепловое излучение, thermal radiation). Солнечная энергия, пламя костра, микроволновая печь — знакомые примеры проникающего нагрева излучением. Тепловое излучение происходит через электромагнитные волны и не нуждается в промежуточной среде. Тепло излучается (эмитируется) любой материей (с температурой выше абсолютного нуля 0 K). Скорость передачи тепла излучением на единицу массы b или на единицу объёма $B = \rho b$ считается известной.

В результате, скорость подвода тепла для конéчного объёма есть

$$\dot{Q} = -\oint\limits_{O(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q}\, dO + \int\limits_{\mathcal{V}} \rho b\, d\mathcal{V} = \int\limits_{\mathcal{V}} \Big(-\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q} + \rho b \Big) d\mathcal{V}. \tag{1.6}$$

Применение (1.3), (1.4′) и (1.6) к формулировке (1.1) даёт равенство интегралов по объёму

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \rho \Big(\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{e} \Big) d\mathcal{V} = \int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{f} \big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\mathcal{D}} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q} + \rho b \Big) d\mathcal{V}.$$

И поскольку объём $\mathcal{V}$ случаен, подынтегральные выражения тоже равны́

$$\rho \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \rho \dot{e} = \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{f} \big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\mathcal{D}} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q} + \rho b.$$

С балансом импульса

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \big(\boldsymbol{f} - \ddot{\boldsymbol{r}} \big) = \boldsymbol{0} \ \ (7.2, \S\,3.7)$$

это упрощается до

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\mathcal{D}} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q} + \rho b \tag{1.7}$$

— локальная (дифференциальная) версия баланса энергии.

…

§ 2. Второй закон

Распространено следующее представление о законах термодинамики: изменение внутренней энергии dE равно сумме работы внешних сил $\partial W^{(e)}$ и подведённого тепла ∂Q

$$dE = \partial W^{(e)} + \partial Q.$$

Работа $\partial W^{(e)}$ и теплота ∂Q суть неполные дифференциалы*, но частное ${}^{\partial Q}\!/_{\Theta}$ становится полным дифференциалом — дифференциалом dS энтропии.

Далее процессы делятся на обратимые, для которых $dS = {}^{\partial Q}\!/_{\Theta}$, и необратимые с характерным неравенством Clausius'а $dS \geq {}^{\partial Q}\!/_{\Theta}$.

Но как адаптировать это для континуума с неоднородным полем температуры?

Иногда процесс в бесконечномалом объёме мыслится обратимым, тогда предлагается равенство типа

$$\rho \Theta \dot{s} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q} + \rho b \tag{2.1}$$

(s — энтропия на единицу массы и $\dot{s}$ — производная от неё по времени, то есть скорость изменения энтропии).

Однако, всегда есть тепловое рассеивание (диссипация) — необратимый процесс, и поэтому (2.1) выглядит спорно.

Наиболее подходящим выражением второго закона термодинамики для материального континуума видится неравенство Clausius'а–Duhem'а

$$\Bigg(\int\limits_{\mathcal{V}} \rho s \, d\mathcal{V} \Bigg)^{\bullet} \geq - \oint\limits_{O(\partial \mathcal{V})} \frac{\boldsymbol{q}}{\Theta} \cdot \boldsymbol{n} \, dO + \int\limits_{\mathcal{V}} \frac{\rho b}{\Theta} \, d\mathcal{V}. \tag{2.2}$$

* Так как работа и теплота зависят от пути протекания процесса (являются функциями пути), они не могут быть полными (точными) дифференциалами, контрастируя с идеей полного дифференциала, выражаемого через градиент другой функции и потому́ независимого от пути.

Это неравенство как дисбаланс энтропии определяет скорость производства энтропии.

$$-\oint\limits_{O(\partial\mathcal{V})} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q}\Theta^{-1} dO = -\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{q}\Theta^{-1}\right) d\mathcal{V}$$

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{q}\Theta^{-1}\right) = -\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}\right)\Theta^{-1} - \boldsymbol{q}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{\Theta}\right)$$

$$-\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{\Theta} = \frac{1}{\Theta^2}\boldsymbol{\nabla}\Theta$$

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{q}\Theta^{-1}\right) = -\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}\right)\Theta^{-1} + \left(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Theta\right)\Theta^{-2}$$

$$\rho\dot{s} \geq \left(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q} + \rho b\right)\Theta^{-1} + \left(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Theta\right)\Theta^{-2} \tag{2.3}$$

Неравенство Clausius'a–Duhem'a is also called неравенством диссипации. For a real matter, the dissipation is always greater than zero, it can never be negative and can't be zero whenever irreversible processes are present.

...

свободная энергия Helmholtz'a на единицу массы

$$a \equiv e - \Theta s, \tag{2.4}$$

$$\dot{a} = \dot{e} - \Theta\dot{s} - \dot{\Theta}s$$

§ 3. Определяющие уравнения

К балансу импульса, балансу момента импульса и законам термодинамики нужно добавить определяющие уравнения, выражающие свойства среды. Эти уравнения

...

Термоупругим называется материал, в котором свободная энергия a и энтропия s — функции деформации $\boldsymbol{C}$ и температуры Θ

$$a = a(\boldsymbol{C}, \Theta)$$
$$\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{C}} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}} + \frac{\partial a}{\partial \Theta} \dot{\Theta}$$

...

§ 4. Уравнение теплопроводности

В математической физике параболическое дифференциальное уравнение, похожее на

$$k \triangle \Theta + B = c \dot{\Theta}, \tag{4.1}$$

объявляется “уравнением теплопроводности”. Здесь k — теплопроводность, $B = \rho b$ — скорость передачи тепла излучением на единицу объёма, c — теплоёмкость на единицу объёма. Краевые условия чаще всего — внешняя температура $\Theta_1^{(e)}$ на части O_1 поверхности и поток тепла $q^{(e)}$ снаружи части O_2 поверхности:

$$\Theta\big|_{O_1} = \Theta_1^{(e)}, \quad k \, \partial_n \Theta\big|_{O_2} = q^{(e)}.$$

Иногда поток $q^{(e)}$ считается пропорциональным разности между температурой $\Theta^{(e)}$ внешней среды и температурой тела Θ

$$k \, \partial_n \Theta + \mathscr{k} \Big(\Theta - \Theta^{(e)} \Big) = 0.$$

Если коэффициент теплообмена $\mathscr{k}$ бесконечно большой, оно превращается в первое условие $\Theta = \Theta^{(e)}$, а когда $\mathscr{k} \to 0$ — в условие $\partial_n \Theta = 0$ теплоизоляции.

Но как уравнение (4.1) связано с фундаментальными принципами баланса? Ведь нет никакой особенной “тепловой энергии”, но есть внутренняя энергия, меняющаяся согласно первому закону термодинамики ...

...

$$e = a + \Theta s \;\Rightarrow\; \dot{e} = \dot{a} + \dot{\Theta} s + \Theta \dot{s}$$

$$\rho \dot{e} = \rho \big(\dot{a} + \dot{\Theta} s + \Theta \dot{s} \big) = \rho \Bigg(\overbrace{\frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{C}} \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{C}} + \underbrace{\frac{\partial a}{\partial \Theta} \dot{\Theta}}^{\dot{a}(\boldsymbol{C}, \Theta)} + \dot{\Theta} s}_{= 0 \;\Leftarrow\; s = -\frac{\partial a}{\partial \Theta}} + \Theta \dot{s} \Bigg)$$

...

§ 5. Линейная термоупругость

Квадратичная аппроксимация свободной энергии наиболее естественна в линейной теории

...

§ 6. Уравнения в смещениях

Полагая поле температуры известным

...

§ 7. Температурное напряжение

Это напряжение сто́ит рассмотреть детально, хотя оно и определяется очевидным образом полями смещений и температуры. Для равновесия свободного тела без внешних нагрузок

...

§ 8. Вариационные формулировки

Когда температура постоянна, уравнения термоупругости выглядят так же, как в механике.

...

Для переноса вариационного метода на термоупругость достаточно заменить в принципе (Lagrange’а) минимума потенциальной энергии $\Pi(\boldsymbol{C})$ на свободную энергию Helmholtz’а $A(\boldsymbol{C}, \Theta)$, а в принципе Reissner’а–Hellinger’а заменить $\widehat{\Pi}(\boldsymbol{\tau})$ на свободную энтальпию Gibbs’а (функцию Gibbs’а) $G(\boldsymbol{\tau}, \Theta)$.

Свободная энергия *Gibbs'a* (*энергия Gibbs'a* или *функция Gibbs'a* или *свободная энтальпия**) это термодинамический потенциал, который измеряет максимум обратимой работы, произведённой с постоянными температурой и давлением.

...

...

Более сложные вариационные постановки для нестационарных задач можно найти, например, в книге [90].

Библиография

Шириной и глубиной описания термоупругости выделяются книги W. Nowacki [40, 41], книга E. Melan'a и H. Parkus'a [34] и монография H. Parkus'a [46]. C. Truesdell [61] внёс большой вклад в создание и распространение новых взглядов на термодинамику сплошной среды. Чёткое изложение основных законов есть у C. Teodosiu [57]. Методы расчёта температурных полей представлены у Н. М. Беляева и А. А. Рядно [90].

* To distinguish её от свободной энергии Helmholtz'a.

глава 7

МАГНИТОУПРУГОСТЬ

Многое в современном мире построено на теории электромагнетизма. Эта теория была создана в XIX$^{\text{ом}}$ веке. Её создатели — Gian Domenico Romagnosi, Hans Christian Ørsted, André-Marie Ampère, Michael Faraday, James Clerk Maxwell, Oliver Heaviside, Heinrich Hertz, Hendrik Lorentz и другие — опирались на эксперименты с электрическими цепями и не представляли о существовании электромагнитных волн. Тем не менее, сущности, описывающие электричество и магнетизм в каждой точке, были введены как векторы, вместе с дифференциальными уравнениями с участием этих векторов. Это случилось из-за *эфира (æther)*, ведь создатели теории были убеждены в его существовании и поэтому пользовались этим концептом.

Когда электрические токи текут в теле (среде), магнитное поле производит нагрузку, тело деформируется, и эта деформация изменяет само́ магнитное поле. Если поле высоко́ чувствительно к деформациям, то возникает совместная проблема упругости и магнетизма.

§ 1. Электромагнитное поле

Вот краткое изложение теории электромагнетизма.

Теория описывает пару тесно переплетённых между собой векторных полей, электрическое $\mathbb{E}(\boldsymbol{r}, t)$ и магнитное $\mathbb{B}(\boldsymbol{r}, t)$. Что такое вектор $\mathbb{E}$ и псевдовектор $\mathbb{B}$ можно понять из выражения для электромагнитной силы, или силы Lorentz'а. Эта сила $\mathbf{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t, q)$ действует на точечный заряд — исчезающе ма́лую (бесконечно-ма́леньких размеров) частицу, содержащую электрический заряд q и движущуюся со скоростью $\dot{\boldsymbol{r}}$

$$\mathbf{F} = q\big(\mathbb{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \mathbb{B}\big). \tag{1.1}$$

По сути, часть электромагнитной силы, возникающая от взаимодействия с движущимся зарядом — магнитная сила $q\dot{\boldsymbol{r}} \times \mathbb{B}$ — являет магнитное поле $\mathbb{B}$, в то время как другая часть — электрическая сила $q\mathbb{E}$ — являет электрическое поле $\mathbb{E}$.

Острый вопрос *"в какой же именно системе отсчёта измеряется скорость $\dot{\boldsymbol{r}}$ заряжённой частицы?"* ведёт к специальной теории относительности*. Однако, здесь я буду следовать классическому концепту о существовании абсолютного пространства и времени как наиболее часто выбираемой системы отсчёта.

Континуальная модель

Может ли читатель угадать по названию книги, модель какого вида ждёт его дальше? Да, игнорируя дискретность заряда, то, что любой электрический заряд может быть лишь целым множителем заряда одинокого электрóна, это — модель континуального (непрерывного) распределения заряда в объёме, когда конечный объём $\mathcal{V}$ содержит электрический заряд**

$$q = \int\limits_{\mathcal{V}} \varrho d\mathcal{V}, \quad dq = \varrho d\mathcal{V} \tag{1.2}$$

(плотность заряда $\varrho(\boldsymbol{r}, t)$ есть электрический заряд на единицу объёма).

На континуум с зарядами и токами действует "пондеромоторная" ("ponderomotive") сила $\mathbf{f}$ — электромагнитная сила Lorentz'а на единицу объёма

$$\mathbf{f} = \varrho\big(\mathbb{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \mathbb{B}\big) = \varrho\mathbb{E} + \boldsymbol{j} \times \mathbb{B} \tag{1.3}$$

— дифференциальная (локальная, микроскопическая, континуальная) версия (1.1). Тут $\boldsymbol{j} \equiv \varrho\dot{\boldsymbol{r}}$ — объёмная плотность электрического тока, другими словами "поток электрического заряда".

* **Albert Einstein**. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. // Annalen der Physik, IV. Folge, Band 17, 1905. Seiten 891–921.

** Ничего не напоминает? Даже (1.1, § 3.1)?

Вакуум это среда без материи, “свободное пространство”. В вакууме нет ϱ и $\boldsymbol{j}$, это регион без зарядов, $\varrho = 0$, и без токов, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$, потому там нет пондеромоторной силы, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

...

Уравнения Maxwell’a

Электромагнитные явления обыкновенно описываются уравнениями Maxwell’a. Дифференциальные версии этих уравнений таковы́

$\boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbb{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}$	теорема Gauss’a для электричества	(1.4^{α})
$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbb{E} = -\dot{\mathbb{B}}$	уравнение Maxwell’a–Faraday’я (закон индукции Faraday’я)	(1.4^{β})
$\boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbb{B} = 0$	теорема Gauss’a для магнетизма	(1.4^{γ})
$c^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbb{B} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbb{E}}$	циркуляционный закон Ampère’a со слагаемым Maxwell’a $\dot{\mathbb{E}}$ для баланса электрического заряда	(1.4^{δ})

....

скорость света в вакууме $c = 299\,792\,458$ м/с

“electric constant”, vacuum permittivity ε_0

$\varepsilon_0 \approx 8.8541878 \cdot 10^{-12}$ Ф·м$^{-1}$ (фарад на метр)

“magnetic constant”, vacuum permeability $\mu_0 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

...

С μ_0 уравнение (1.4^{δ}) иногда пишется как

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbb{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\dot{\mathbb{E}} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbb{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\mathbb{E}}.$$

...

Баланс заряда

Баланс заряда — уравнение непрерывности (сплошности, неразрывности) для электрических зарядов — математически следует из уравнений Maxwell'а

$$\left.\begin{array}{rl} \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}(1.4^{\delta}) \;\Rightarrow & c^2\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B}\right) = \dfrac{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\dot{\mathbb{E}} \\ (1.4^{\alpha})^{\bullet} \;\Rightarrow & \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\dot{\mathbb{E}} = \dfrac{\dot{\varrho}}{\varepsilon_0} \\ & \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}\right) = 0 \;\forall\boldsymbol{a},\;\; \boldsymbol{j}\equiv\varrho\dot{\boldsymbol{r}} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\left(\varrho\dot{\boldsymbol{r}}\right)+\dot{\varrho}=0. \tag{1.5}$$

Тензор напряжения Maxwell'a

На континуум электромагнитное поле действует с пондеромоторной силой (1.3). Но есть также и другое выражение взаимодействия, бивалентный тензор напряжения "Maxwell'a"

$$^2\boldsymbol{M}\equiv\varepsilon_0\Big(\mathbb{E}\mathbb{E}+c^2\mathbb{B}\mathbb{B}-\tfrac{1}{2}\left(\mathbb{E}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{E}+c^2\mathbb{B}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{B}\right)\boldsymbol{E}\Big). \tag{1.6}$$

Он выводится из (1.3) и уравнений Maxwell'а

$$\begin{array}{rl} (1.4^{\alpha}) \;\Rightarrow & \varrho=\varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{E} \\ (1.4^{\delta}) \;\Rightarrow & \boldsymbol{j}=\varepsilon_0 c^2\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B}-\varepsilon_0\dot{\mathbb{E}} \end{array}$$

$$\begin{aligned}(1.3)\;\Rightarrow\;\boldsymbol{f} &= \varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{E}\mathbb{E}+\left(\varepsilon_0c^2\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B}-\varepsilon_0\dot{\mathbb{E}}\right)\times\mathbb{B}= \\ &= \varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{E}\mathbb{E}+\varepsilon_0c^2\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B}\right)\times\mathbb{B}-\varepsilon_0\dot{\mathbb{E}}\times\mathbb{B}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} \left(\mathbb{E}\times\mathbb{B}\right)^{\bullet}=\dot{\mathbb{E}}\times\mathbb{B}+\mathbb{E}\times\dot{\mathbb{B}} \\ (1.4^{\beta})\;\Rightarrow\;\dot{\mathbb{B}}=-\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{E} \end{array}\right\}\Rightarrow\;\dot{\mathbb{E}}\times\mathbb{B}=\left(\mathbb{E}\times\mathbb{B}\right)^{\bullet}+\mathbb{E}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{E}\right)$$

Тогда

$$\boldsymbol{f}=\varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{E}\mathbb{E}-\varepsilon_0c^2\mathbb{B}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B}\right)-\varepsilon_0\mathbb{E}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{E}\right)-\varepsilon_0\left(\mathbb{E}\times\mathbb{B}\right)^{\bullet}$$

Для симметрии с $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{E}\mathbb{E}$, нуль-вектор

$$(1.4^{\gamma}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{B}\mathbb{B} = \boldsymbol{0},\;\; c^2 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{B}\mathbb{B} = \boldsymbol{0}$$

добавляется к $\boldsymbol{f}$.

...

$$\begin{aligned} (18.9, \S\, 1.18) \;&\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\big) = \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}\big)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a} \\ (18.11, \S\, 1.18) \;&\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}\big) = 2\, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \boldsymbol{E}\big) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \big(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}\big) = \boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}\big) = 2\, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot {}^2\boldsymbol{M} = \varepsilon_0 \Big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\mathbb{E}\mathbb{E}\big) + c^2 \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\mathbb{B}\mathbb{B}\big) - \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} \boldsymbol{E} + c^2 \mathbb{B} \cdot \mathbb{B} \boldsymbol{E}\big) \Big) = \\ = \varepsilon_0 \Big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{E}\mathbb{E} + \mathbb{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbb{E} + c^2 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{B}\mathbb{B} + c^2 \mathbb{B} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbb{B} - \\ - \boldsymbol{\nabla}\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} - c^2 \boldsymbol{\nabla}\mathbb{B} \cdot \mathbb{B} \Big) \end{aligned}$$

...

§ 2. Электромагнитные волны

To derive wave equations

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times (1.4^{\beta}) \;&\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \times \big(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbb{E}\big) = -\boldsymbol{\nabla} \times \dot{\mathbb{B}} \\ \boldsymbol{\nabla} \times (1.4^{\delta}) \;&\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \times \big(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbb{B}\big) = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\dot{\mathbb{E}}}{c^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \dot{\mathbb{E}} = \big(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbb{E}\big)^{\bullet},\; (1.4^{\beta}) \;&\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \times \dot{\mathbb{E}} = -\ddot{\mathbb{B}} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \dot{\mathbb{B}} = \big(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbb{B}\big)^{\bullet},\; (1.4^{\delta}) \;&\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \times \dot{\mathbb{B}} = \frac{\boldsymbol{j}^{\bullet}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\ddot{\mathbb{E}}}{c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \big(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbb{E}\big) &= \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{E} - \triangle \mathbb{E} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \big(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbb{B}\big) &= \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{B} - \triangle \mathbb{B} \end{aligned}$$

$$\triangle\mathbb{E} - \boldsymbol{\nabla}\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\bullet\mathbb{E}}_{\varrho/\varepsilon_0\,(1.4^\alpha)} = \frac{\ddot{\mathbb{E}}}{c^2} + \frac{\boldsymbol{j}^\bullet}{\varepsilon_0 c^2}$$
$$\triangle\mathbb{B} - \boldsymbol{\nabla}\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\bullet\mathbb{B}}_{0\,(1.4^\gamma)} = \frac{\ddot{\mathbb{B}}}{c^2} - \frac{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2}$$

...

$\boldsymbol{\nabla}\bullet(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}) = 0 \ \forall\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{0}, \ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\alpha = \mathbf{0} \ \forall\alpha$

vector potential $\mathbb{A}$

$$\boldsymbol{\nabla}\bullet\mathbb{B} = 0 \ \ (1.4^\gamma) \ \Leftrightarrow \ \mathbb{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{A}$$

potential $\mathbb{A}$ is not unique and has gauge freedom $\mathbb{A} + \boldsymbol{\nabla}a$

$$\mathbb{B} = \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbb{A} + \boldsymbol{\nabla}a) \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{\nabla}\bullet\mathbb{B} = 0 \ \ (1.4^\gamma)$$

scalar potential ϕ

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{E} = -\dot{\mathbb{B}} \ \ (1.4^\beta) \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{E} = -\boldsymbol{\nabla}\times(\dot{\mathbb{A}} + \boldsymbol{\nabla}\dot{a}) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbb{E} + \dot{\mathbb{A}} + \boldsymbol{\nabla}\dot{a}) = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ -\boldsymbol{\nabla}\phi = \mathbb{E} + \dot{\mathbb{A}} + \boldsymbol{\nabla}\dot{a} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \mathbb{E} = -\boldsymbol{\nabla}(\phi + \dot{a}) - \dot{\mathbb{A}}. \tag{2.1}$$

And

$$\boldsymbol{\nabla}\bullet\mathbb{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \ \ (1.4^\alpha) \ \Rightarrow \ \begin{aligned} -\triangle(\phi + \dot{a}) - \boldsymbol{\nabla}\bullet\dot{\mathbb{A}} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\ -\triangle\phi - \boldsymbol{\nabla}\bullet(\dot{\mathbb{A}} + \boldsymbol{\nabla}\dot{a}) &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{A}) = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\bullet\mathbb{A} - \triangle\mathbb{A}$

$\boldsymbol{\nabla\nabla\cdot\nabla} a - \boldsymbol{\nabla\cdot\nabla\nabla} a = \mathbf{0}$ (partial derivatives of a smooth function commute)

$$c^2\,\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbb{E}}\ \ (1.4^{\delta})\ \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \ c^2\,\boldsymbol{\nabla}\times\big(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{A}\big) = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} - \boldsymbol{\nabla}\big(\dot{\phi} + \ddot{a}\big) - \ddot{\mathbb{A}}\ \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \ c^2\big(\boldsymbol{\nabla\nabla\cdot}\mathbb{A} - \triangle\mathbb{A}\big) = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} - \boldsymbol{\nabla}\dot{\phi} - \boldsymbol{\nabla}\ddot{a} - \ddot{\mathbb{A}}. \qquad (2.3)$$

Со свободой калибровки возможно упростить волновые уравнения (2.3) и (2.2), положи́в

$$\left.\begin{aligned} -\boldsymbol{\nabla}\ddot{a} = \boldsymbol{\nabla}\dot{\phi} + c^2\,\boldsymbol{\nabla\nabla\cdot}\mathbb{A}\ \Rightarrow\ \ddot{a} = -\,\dot{\phi} - c^2\,\boldsymbol{\nabla\cdot}\mathbb{A} \\ -\boldsymbol{\nabla\cdot}\big(\dot{\mathbb{A}} + \boldsymbol{\nabla}\dot{a}\big) = \tfrac{1}{c^2}\ddot{\phi}\ \Rightarrow\ \dot{\phi} = -\,c^2\,\boldsymbol{\nabla\cdot}\big(\mathbb{A} + \boldsymbol{\nabla}a\big) \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \ c^2\,\boldsymbol{\nabla\cdot}\mathbb{A} + c^2\triangle a - c^2\,\boldsymbol{\nabla\cdot}\mathbb{A} = \ddot{a},$$

наконец становясь однородным волновым уравнением для a

$$\ddot{a} = c^2\triangle a. \qquad (2.4)$$

Более популярное условие — ещё более жёсткое

$$\triangle a = 0\ \ \Rightarrow\ \ \ddot{a} = 0,\ \ \dot{\phi} + c^2\,\boldsymbol{\nabla\cdot}\mathbb{A} = 0.$$

Это условие калибровки Lorenz’а даёт такой же эффект, будучи лишь частным — гармоническим — случаем (2.4).

Следующие из (2.2) и (2.3) с условием (2.4), уравнения электромагнитных волн в потенциальной формулировке

$$\begin{aligned} -\,\triangle\phi + \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \\ -\,c^2\triangle\mathbb{A} &= \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} - \ddot{\mathbb{A}}. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

…

§ 3. Электростатика

Рассмотрение этого вопроса полезно и для последующего описáния магнетизма. В статике

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \mathbb{B} = \boldsymbol{0}$$

...

Объёмная “пондеромоторная” сила, с которой электростатическое поле действует на среду ...

...

Тензор напряжения Maxwell’а (1.6) в электростатике

$${}^{2}\!\boldsymbol{M} = \varepsilon_0 \left(\mathbb{E}\mathbb{E} - \tfrac{1}{2}\,\mathbb{E} \bullet \mathbb{E}\boldsymbol{E} \right)$$

...

§ 4. Диэлектрики

Начнём с рассмотрения электростатического поля

...

В диэлектриках нет свободных зарядов: плотность заряда $\varrho = 0$. Здесь вводится плотность дипольного момента

...

§ 5. Магнитостатика

Если поле (а с ним ...)

...

§ 6. Магнетики

Выяснив законы магнитостатики в общем случае, обратимся к веществу — некий опыт у нас уже есть в электростатике диэлектриков.

Начнём с рассмотрения

...

...

Насколько соответствует поведение реальных материалов представленным здесь формальным построениям — сей вопрос is out of scope этой книги.

§ 7. Магнитная жёсткость

В электротехнике распространены обмотки всевозможной формы, в которых провод намотан так, что образуется некое массивное тело. Такие обмотки есть в статоре генератора автомобиля (да и в роторе), в больших промышленных электромагнитах и в магнитных системах установок "токама́к" (**то**роидальная **ка**мера с **ма**гнитными **к**атушками) для управляемого термоядерного синтеза — примеров много. Сочетание токопровода и изоляции образует периодический композит, и одной из главных нагрузок для него является пондеромоторная магнитная сила. Рассчитывая деформации и механические напряжения в обмотке, начинают с определения магнитных сил. Поскольку распределение токов задано известной геометрией проводов, достаточно интегрирования по формуле Био-Савара (**??**). Термин "магнитоупругость" при этом неуместен, так как задачи магнитостатики и упругости решаются раздельно.

Однако при деформации обмотки меняются и поле $\boldsymbol{j}$, и вызываемое им поле $\mathbb{B}$. Объёмная сила становится равной

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{j} \times \mathbb{B})_0 + \dots \tag{7.1}$$

Подчёркнутое слагаемое соответствует недеформированному состоянию. Обусловленное деформацией изменение объёмной силы линейно связано с малым смещением $\boldsymbol{u}$, поэтому матричное (после дискретизации) уравнение в смещениях можно представить в виде

$$(C + C_m)\, u = \mathring{F}. \tag{7.2}$$

К “обычному” оператору линейной упругости C добавилась магнитная жёсткость C_m, $\overset{\circ}{F}$ — силы в недоформированном состоянии.

Добавка C_m пропорциональна квадрату тока и может стать весьма существенной в магнитных системах с сильным полем. Учёт её необходим и при недостаточной величине C. В номинальном режиме конструкция может держать нагрузку, но дополнительная нагрузка неблагоприятного направления может оказаться “невыносимой”.

Роль магнитной жёсткости очень важна в задачах устойчивости. Матрица C_m симметрична, так как магнитные силы потенциальны. Критические параметры могут быть найдены используя статический метод Euler’a.

Как иллюстрацию рассмотрим простую задачу о балке в продольном магнитном поле. Балка располагается на декартовой оси z, концы $z=0$ и $z=l$ закреплены, магнитная индукция $\mathbb{B} = B\boldsymbol{k} =$ **constant**, по балке течёт постоянный (по величине) ток I. В классической модели балки при равных жёсткостях на изгиб для прогиба $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2$ легко получить следующую постановку:

...

Вводя компле́ксную комбинацию $u \equiv u_1 + \mathrm{i}u_2$, будем иметь

...

с общим решением

...

Подстановка в граничные условия приводит к однородной системе для постоянных A_k. Приравняв нулю определитель, придём к характеристическому уравнению

...

Наименьший положительный корень $x = 3.666$, так что критическая комбинация параметров такова:

$$\left(IBl^3/a\right)_* = 394.2.$$

Поле $\mathbb{B}$ в этом решении считалось внешним и не варьировалось. Но если собственное поле тока в стержне сравнимо с $\mathbb{B}$, то решение изме́нится и усложни́тся.

Библиография

Основы электродинамики хорошо изложены во многих книгах [91, 86], но для приложений в механике выделяется книга И. Е. Тамма [97]. Растёт список литературы по связанным задачам электромагнетизма и упругости [48, 50]. Как введение в эту область может быть полезна монография В. Новацкого [42].

глава 8

МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ (АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ)

Из приближённых подходов к анализу нелинейных систем, методы возмущений применяются чаще всего.

§ 1. Асимптотическое разложение

До сих пор аргументами функций были только координаты и время. Размеры тела, упругие модули, диапазоны воздействий — все эти параметры считались известными. Все асимптотические методы основаны на изучении как решение зависит от параметров.

Разложение возмущения обычно состоит из первых двух слагаемых. Если задача с неизвестной u содержит параметр a, то, полагая

$$a = a_0 + \chi a_1 \, ,$$

решение ищется в виде ряда

$$u = u_0 + \chi u_1 + \chi^2 u_2 + \ldots \tag{1.1}$$

Дополнительный аргумент χ называется формальным малым параметром.

Разложение возмущения может расходиться, но в то же время оно может быть более полезным описанием решения, чем представление, которое сходится равномерно и абсолютно.

Разложение (1.1) выглядит как обычный степенной ряд. Однако, подход в методах возмущений отличается: ряды рассматриваются там как асимптотические со сходимостью $\chi \to 0$, а не $n \to \infty$, где n определяет, как много членов удерживать.

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\chi), \quad \lim_{\chi \to 0} \frac{\phi - \sum\limits_{k=0}^{n} \phi_k}{\phi_n} = 0. \tag{1.2}$$

Иначе говоря, остаток ряда есть бесконечно-малая высшего порядка по сравнению с последним удержанным членом. Очевидно, степенной ряд (1.1) сходится и как асимптотический ряд.

Но разлагаемые неизвестные обычно также зависят от "главных" аргументов — от координат и времени. Сходимость для $\chi \to 0$ должна быть равномерной по этим "главным" аргументам — это требование к эффективному использованию асимптотических разложений. Например

$$\sin(1+\chi)t = \sin t + \chi t \cos \chi t - \tfrac{1}{2}\chi^2 t^2 \sin \chi t + \ldots$$

не удовлетворяет требованию равномерности, поскольку с $t \to \infty$ последующие члены преобладают над предыдущими.

Чем же асимптотические методы так привлекательны? Как пример возьмём решение уравнения

$$f(u, \chi) = 0.$$

Подставив разложение (1.1) в (1.2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях χ, получим

$$\begin{gathered} f(u_0, 0) = 0, \\ \left(\partial_u f\right)_0 + u_1 \left(\partial_\chi f\right)_0 = 0, \\ \left(\partial_u f\right)_0 u_2 + \tfrac{1}{2}\left(\partial_u^2 f\right)_0 u_1^2 + \tfrac{1}{2}\left(\partial_\chi^2 f\right)_0 + \left(\partial_u \partial_\chi f\right)_0 u_1 = 0, \\ \ldots \end{gathered}$$

Если проблема для u_0 однозначно разрешима на первом шаге, то последующие шаги дадут поправки $u_1, u_2, \ldots$ Малые поправки едва ли важны и u_0 достаточно, но тогда исчезает асимптотический анализ, ведь формально малые члены в (1.2) просто отбрасываются. Впрочем, бывает так, что эти поправки содержат в себе некую важную информацию, отсутствующую в u_0 — тогда они играют главную роль. Сто́ит упомянуть, что все поправки следуют из линейной проблемы с одним и тем же оператором $\big(\partial_u f\big)_0$.

Но все нетривиальные и эффективные решения получаются иными способами, неединственность решения на первом шаге характеризует их. Об этом — в следующих секциях.

И да, асимптотические методы меняют первоначальную сложную постановку задачи (1.2) на более простую. Существенно то, что это не происходит "простым" отбрасыванием членов, но вполне корректно — равенства остаются равенствами. Однако, сходимость не доказывается, так что полной математической точности нет.

В предыдущих главах асимптотические проблемы уже́ возникали. Линейная теория следует из нелинейной теории через асимптотическое разложение по величине нагрузки (§ 4.1). Безмоментная теория происходит (с точностью до краевых эффектов) из моментной (микрополярной) теории (гл. 5), когда "моментные" жёсткости приближаются к бесконечности. В термоупругости (гл. 6) использование уравнения теплопроводности (4.1, § 6.4) вместо всего целого баланса энергии нужно доказать асимптотическими методами.

В какой-то степени введение малого параметра $\chi \to 0$ является слабостью всех асимптотических подходов. Возражение типа "бесконечно-малых параметров не бывает, все величины конечны" едва ли конструктивно здесь. Более актуален вопрос: что такое малый параметр? Обычно проблема переформулируется в "безразмерных" величинах, тогда тот "безразмерный" параметер берётся за малый параметр χ, который оказывается малым. Но возможен и другой путь: если известно, что некий параметр ω лишь немного влияет на решение, то, переобозначив его как $\chi\omega$, сделать асимптотический анализ для $\chi \to 0$.

Разумеется, это не "законы" асимптотики, не рекомендации, а лишь соображения. Нет общей теории асимптотических методов, их применение есть в какой-то степени искусство.

Более глубокое описание асимптотических методов написано в книгах Ali Hasan'a Nayfeh [107, 108].

§ 2. Расщепление в линейной алгебраической системе

Этот простой случай хорошо иллюстрирует асимптотические методы.

Рассматривается линейная система

$$C_{ij} u_j = f_i, \;\; C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)} \tag{2.1}$$

с матрицей C_{ij} и столбцами неизвестных u_j и нагрузок f_i. Процесс построения асимптотического решения определяется тем, вырождена матрица $C_{ij}^{(0)}$ или нет. Возможны три случая.

1° $\det C_{ij}^{(0)} \neq 0$. Однородная задача

$$C_{ij}^{(0)} u_j = 0 \tag{2.2}$$

имеет лишь тривиальное (нулевое) решение. Матрица $C_{ij}^{(0)}$ обратима, неоднородная задача всегда однозначно реши́ма. Решение строится так:

$$u_j = \ldots \tag{2.3}$$

...

2° $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

3° $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

§ 3. Метод Poincaré

Этот метод, ассоциируемый с именем Jules Henri Poincaré, широко́ известен в теории нелинейных колебаний. Он предназначен, в частности, для определения периодических решений уравнения

$$\ddot{u} + u = \chi f(u, \dot{u}) \tag{3.1}$$

....

§ 4. Метод осреднения Van der Pol'я

Здесь опять фигурирует уравнение (3.1), но находимые решения — уже́ не только периодические. Вводя́ фазовую плоскость

...

Процедура осреднения применяется во многих темах, таких как тонкие тела и композиты. Осреднение вне асимптотических методов ведёт обычно к не за́мкнутому набору уравнений. Для замыкания системы приходится добавлять некие гипотезы, убавляющие убедительность теории. Иная ситуация в асимптотике: условия разрешимости для поправочных членов с необходимостью приводят к соответствующим интегральным соотношениям.

§ 5. Сращивание асимптотических разложений

Основоположник метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений — Ludwig Prandtl. Рассматривая течение вязкой жидкости, он заметил, что влияние малой вязкости локализовано у края — в тонком слое на краю. Вдали́ от края жидкость ведёт себя как идеальная. Одни и те же уравнения Navier–Stokes'а по-разному упрощаются вдали от края и около него [...]

Метод сращивания состоит из трёх процедур: построения внешнего разложения, построения внутренних разложений и сращивания внешнего разложения с внутренними. Метод предназначен для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Вдали от края решение меняется плавно, формально малые члены можно отбросить, уравнение имеет пониженный порядок — всё это характерно для внешнего разложения. У края наоборот: решение меняется быстро, первостепенную роль играют старшие производные, хотя имеют малые коэффициенты. Но внешнее и внутреннее разложения — это разные формы одного решения, они должны быть состыкованы процедурой сращивания. Рассмотрим пример.

Задача о прогибе $u(x)$ натянутой струны с закреплёнными концами под действием равномерно распределённой нагрузки может быть поставлена так:

...

§ 6. Многоуровневый анализ (метод многих масштабов)

Этот метод привлекателен, естественен и — как написано у Ali Hasan Nayfeh

...

§ 7. Уравнения с медленно меняющимися параметрами

Рассмотрим гармонический осциллятор, собственная частота которого медленно меняется во времени

...

§ 8. Тонкие тела

Задачи теории упругости часто ставятся для тонких тел — стержней, пластин и оболочек. Таковы многие элементы конструкций, но и в природе вне человека тонкие тела встречаются довольно часто.

Решение задач упругости для тонких тел многие десятилетия основывалось на неких гипотезах о распределении решения по толщине и о порядках одних неизвестных относительно других. Построенные так теории сыграли большу́ю роль в практике инженерных расчётов. Однако, им не хватало логической стройности и убедительности, их хотелось обосновать, уточнить — а в последнее время и уничтожить (в связи́ с появлением великолепных компьютеров). Но открытие асимптотического расщепления прояснило картину: в тонком теле трёхмерная задача расщепляется на задачи меньшей размерности. Классические теории тонких тел получили и подтверждение, и развитие.

Рассмотрим задачу о кручении из ...

...

Библиография

Ali Hasan Nayfeh's book [108] is an excellent introduction to perturbation methods (asymptotic methods).
Всё разнообразие асимптотических методов представлено в монографиях ...

глава 9

СТЕРЖНИ

§ 1. Исходные представления

Стержень — это тонкое длинное тело. Он мыслится (и моделируется) как пространственная кривая — ось стержня, покрытая материалом (рисунок).

Ось стержня описывается как кривая параметризацией вектора положения точек кривой. Это морфизм (функция) одной переменной координаты s,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s). \tag{1.1}$$

Покрытие материалом даёт в каждой точке стержня плоскую фигуру, перпендикулярную оси — нормальное сечение $\Omega(s)$.

...

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t)$ — параметрическая кривая, параметризованная параметром t. Если $dt \neq d\ell$, то параметризация не натуральная. Для натуральной параметризации $dt = d\ell$, где

$$d\ell = \sqrt{\left(dq^1\right)^2 + \left(dq^2\right)^2 + \left(dq^3\right)^2}.$$

Многие разные функции рисуют одну и ту же кривую. Но среди различных параметризаций кривой, параметризация длиной дуги особенная, её также называют *естественной параметризацией.*

Длина бесконечно-малого кусочка кривой описывается Πυθαγόρας-формулой

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

где $dx \equiv dq^1$, $dy \equiv dq^2$, $dz \equiv dq^3$ — бесконечно-малые изменения координат. $d\ell$ называется дифференциальной длиной, то есть длиной почти прямого очень ма́лого куска кривой.

$\boldsymbol{c}(s)$ is a parametric curve parameterized by the arc length (the natural parametrization), its derivative by the arc length parameter is denoted as $\boldsymbol{c}' \equiv \dfrac{d\boldsymbol{c}}{ds}$.

Если используется параметризация длиной дуги (естественная) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, то длина производной $\boldsymbol{r}'(s) \equiv \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$ (касательного вектора) всегда равна одной единице длины:

$$\boldsymbol{r}(s) = q_i(s)\,\boldsymbol{e}_i(s) = q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3\,,$$

$$\boldsymbol{r}'(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} = \frac{dq_i(s)}{ds}\,\boldsymbol{e}_i(s) = q_i'(s)\,\boldsymbol{e}_i(s)\,,$$

$$\|\boldsymbol{r}'(s)\|^2 \equiv \boldsymbol{r}'(s) \cdot \boldsymbol{r}'(s) = q_i'(s)\,\boldsymbol{e}_i \cdot q_j'(s)\,\boldsymbol{e}_j = q_i'(s)\,q_j'(s)\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\bigl(q_i'(s)\bigr)^2,$$

$$ds = \sqrt{\bigl(dq_1\bigr)^2 + \bigl(dq_2\bigr)^2 + \bigl(dq_3\bigr)^2} \;\;\Rightarrow\;\; ds^2 = \sum_{i=1}^{3}\bigl(dq_i(s)\bigr)^2,$$

$$\|\boldsymbol{r}'(s)\|^2 = \frac{\sum_{i=1}^{3}\bigl(dq_i(s)\bigr)^2}{\bigl(ds\bigr)^2} = 1 \;\;\Rightarrow\;\; \|\boldsymbol{r}'(s)\| = 1\,.$$

...

В каждом сечении мы выбираем две перпендикулярные оси x_α с сонаправленными единичными векторами $\boldsymbol{e}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$). Причина выбора для всех сечений стержня одна и та же, для примера, главные оси инерции сечения выбираются везде.

Актуальная ось и начальная ось отличаются

Когда вектор $\mathring{\boldsymbol{e}}_3$ направлен по касательной к начальной оси с положением $\mathring{\boldsymbol{r}}$, это пишется как $\mathring{\boldsymbol{r}}' \equiv \dfrac{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}}{\partial s} \equiv \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial s} \equiv \mathring{\boldsymbol{e}}_3$.

Вектор $\boldsymbol{e}_3 \equiv \boldsymbol{k}$ направлен вдоль касательной (тангенциально) к актуальной оси.

Вместе с единичным вектором, касательным к актуальной оси

$$\boldsymbol{r}' \equiv \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \equiv \boldsymbol{r}_{\partial s} \equiv \boldsymbol{e}_3 \equiv \boldsymbol{k}\,,$$

мы получим для каждого s тройку взаимно перпендикулярных единичных векторов.

Кривизна и кручение оси стержня могут быть описаны вектором $\boldsymbol{\psi} = \psi_j \boldsymbol{e}_j$:

$$\boldsymbol{e}_j' = \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{e}_j , \;\; \boldsymbol{\psi} = \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_j' . \tag{1.2}$$

Для цилиндрического (призматического) стержня $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$.

Однако, (1.2) есть лишь первоначальное понятие о векторе $\boldsymbol{\psi}$ как о геометрических характеристиках. Далее в § 2, после принятия материальной структуры стержня, понятие о $\boldsymbol{\psi}$ изменится.

Кроме этого, в каждой точке оси стержня, мыслимой как кривая, есть также другая тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов, та что с нормальным и бинормальным векторами.

Касательный $\boldsymbol{T}$, нормальный $\boldsymbol{N}$ и бинормальный $\boldsymbol{B}$ векторы, вместе называемые *системой Frenet–Serret*, определяются как:

- ✓ $\boldsymbol{T}$ — единичный вектор, касательный к кривой. Длина касательного вектора всегда одна единица, если используется естественная параметризация кривой (длиной дуги). Касательный вектор указывает туда, где кривая продолжается дальше.
- ✓ $\boldsymbol{N}$ — нормальный единичный вектор, производная $\boldsymbol{T}$ по параметру кривой (например, the arc length of a curve). Нормальный вектор всегда перпендикулярен касательному вектору и направлен к центру кривизны. Он поделён на свою длину $\|\boldsymbol{N}\|$, чтобы быть длиной в одну единицу.
- ✓ $\boldsymbol{B}$ — бинормальный единичный вектор, “$\times$”-произведение (“cross product”) $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$.

Формулы Frenet–Serret описывают производные касательного, нормального и бинормального единичных векторов через отношения друг с другом.

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} &= \kappa\boldsymbol{N},\\ \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} &= -\kappa\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B},\\ \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} &= -\tau\boldsymbol{N},\end{aligned}$$

где ${}^{d}/_{ds}$ обозначает производную по длине дуги, κ есть кривизна и τ есть кручение кривой. Соединённая коллекция — $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$, κ, τ — называется аппаратом Frenet–Serret.

Два скаляра κ и τ эффективно определяют кривизну и кручение пространственной кривой. Интуитивно, кривизна измеряет отклонение кривой от прямой линии, тогда как кручение измеряет отклонение кривой от плоской.

Две функции $\kappa(s)$ и $\tau(s)$ полностью определяют геометрию кривой, потому что это коэффициенты системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{B}$. Зная $\boldsymbol{T}(s)$, мы получим $\boldsymbol{r}(s)$ интегрированием чего? с точностью до постоянного жёсткого движения без деформаций.

...

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}'$$

Производная $\boldsymbol{T}$ состоит из двух множителей — кривизны κ и единичного нормального вектора $\boldsymbol{N}$

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \kappa\boldsymbol{N} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{T}' = \kappa\boldsymbol{N}$$

Кривизна κ равна магнитуде (длине) вектора $\boldsymbol{N}$ (производной вектора $\boldsymbol{T}$, второй производной вектора положения $\boldsymbol{r}$)

$$\kappa = \|\boldsymbol{N}\| = \|\boldsymbol{T}'\| = \left\|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right\| = \|\boldsymbol{r}''\| = \left\|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right\|$$

Сам вектор $\boldsymbol{N}$ поделён на свою длину, поэтому его длина равна одной единице.

$$\boldsymbol{N} = \frac{\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}}{\left\| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right\|} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{T}'}{\|\boldsymbol{T}'\|}$$

Радиус кривизны — число, обратное кривизне.

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \boldsymbol{N} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{N}$$

...

$$\kappa \geq 0$$

Система Frenet–Serret определена лишь если кривизна отлична от нуля ($\kappa > 0$), она не определена, если $\kappa = 0$.

Линия с ненулевой кривизной $\kappa \neq 0$ считается кривой.

Нулевая кривизна предполагает, что линия прямая, и она лежит в плоскости, делая кручение тоже равным нулю ($\tau = 0$).

...

$\boldsymbol{T}$ всегда имеет единичную магнитуду (длину). Поскольку длина $\boldsymbol{T}$ постоянна, то $\boldsymbol{N}$ — производная $\boldsymbol{T}$ и вторая производная вектора положения $\boldsymbol{r}$ — всегда перпендикулярна $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T} = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{T}' \cdot \boldsymbol{T} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T} = 0.$$

Векторы системы Frenet–Serret составляют ортонормальный базис $\boldsymbol{f}_i$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{T}, \;\; \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{N}, \;\; \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{B}.$$

Вектор положения в базисе Frenet–Serret

$$\boldsymbol{r}(s) = q_j(s)\,\boldsymbol{f}_j(s) = q_1(s)\underbrace{\boldsymbol{f}_1(s)}_{\boldsymbol{T}} + q_2(s)\underbrace{\boldsymbol{f}_2(s)}_{\boldsymbol{N}} + q_3(s)\underbrace{\boldsymbol{f}_3(s)}_{\boldsymbol{B}}.$$

Тензорная версия формул Frenet–Serret

$$\boldsymbol{f}_i{}' = {}^2\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{f}_i\,. \tag{1.3}$$

Формулы Frenet–Serret, написанные с использованием матричных обозначений

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{N}' \\ \boldsymbol{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

Тензор ${}^2\boldsymbol{d}$ — кососимметричный, так что он может быть представлен через сопутствующий псевдовектор (§ 1.8). Этот псевдовектор известен как вектор Darboux.

$$\boldsymbol{D} = \tau \boldsymbol{T} + \kappa \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{D} = \tau \boldsymbol{T} + 0\boldsymbol{N} + \kappa \boldsymbol{B}$$

С вектором Darboux, формулы Frenet–Serret превращаются в следующее:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}' &= \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{T}, \\ \boldsymbol{N}' &= \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{B}' &= \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B} \end{aligned}$$

или как векторная версия (1.3)

$$\boldsymbol{f}_i{}' = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{f}_i\,. \tag{1.4}$$

Вектор Darboux есть вектор угловой скорости системы Frenet–Serret.

...

Приближённые прикладны́е теории стержней вроде “сопротивления материалов” используют такие понятия как внутренняя сила $\boldsymbol{Q}$ и внутренний момент $\boldsymbol{M}$. Следующие соотношения связывают их с тензором напряжения

$$\boldsymbol{Q}(s) = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{k})}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\tau}\, d\Omega\,, \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{M}(s) = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{k})}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\tau}\, d\Omega\,. \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{x} = x_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

...

Эти мысли о геометрии и о механике — в частности, о внутренней силе (1.5) и внутреннем моменте (1.6) — касаются только какой-то уникальной единственной конфигурации стержня. Продолжать эти мысли бессмысленно, потому что в реальности плоские и нормальные сечения не остаются плоскими и нормальными после деформирования.

synonyms for "deplanations"

warp, warping = деформация (deformation, strain), искривление, искажение (distort, distortion), перекóс (skew), перекоси́ть, перекáшиваться, корóбиться, покорóбить, коробле́ние, becoming twisted or bent

А добавление некоторых предположений-гипотез в модель, подобных "искривления (депланаций) нет" и первоначально плоские сечения остаются плоскими* вносит существенные противоречия с реальностью. Достаточно вспомнить лишь один факт, что без депланаций невозможно приемлемо описать кручение стержня (и не только кручение).

Очень резонный подход к моделированию деформаций упругого стержня состоит в асимптотическом расщеплении трёхмерной проблемы с мáлой толщиной. Но для сложной асимптотической процедуры было бы намного проще иметь какую-нибудь версию решения заранее. И прямой подход, когда одномерная модель стержня — материальная линия, даёт такую версию.

* Существуют две очень популярные модели балки, которые постулируют гипотезу об отсутствии депланаций. В теории балок Euler'a–Bernoulli, сдвиговыми деформациями пренебрегают, плоские сечения остаются плоскими и перпендикулярными оси. В теории балок Timoshenko имеется постоянный поперечный сдвиг вдоль сечения, так что плоские сечения всё ещё остаются плоскими, но они больше не перпендикулярны оси.

Первичный вопрос для построения одномерной модели: какими степенями свободы — помимо трансляции — обладают частицы материальной линии?

Известно, что стержни чувствительны к моментным нагрузкам. А присутствие моментов среди обобщённых сил показывает наличие вращательных степеней свободы. Поэтому как одномерную модель стержня разумно взять линию Cosserat — она состоит из бесконечно-малых абсолютно жёстких тел. Впрочем, другие новые степени свободы могут тоже появиться — как для тонкостенных стержней, описанных в отдельной главе (гл. 10).

В механике сплошных упругих сред у стержней — специальное место. Во-первых, моменты играют здесь главную роль, а не роль малых добавок как в трёхмерном континууме Cosserat. Во-вторых, стержни могут быть использованы для тестирования моделей с дополнительными степенями свободы, прежде, чем наличие этих степеней будет исследовано для трёхмерных моделей.

Следующая секция представляет и описывает простую одномерную моментную модель типа Cosserat.

§ 2. Кинематика линий Коссера

Модель, описанная далее — упрощённая версия гл. 5.

Больше нет тройки материальных координат q_i, но лишь одна — s. Это может быть параметр длины дуги в начальной конфигурации. Движение частицы со временем описывается вектором положения $\boldsymbol{r}(s,t)$ и тензором поворота $\boldsymbol{O}(s,t)$. Линейная и угловая (12.8, § 1.12) скорости частицы стержня суть

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}, \tag{2.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\omega} = -\tfrac{1}{2}\big(\dot{\boldsymbol{O}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}\big)_{\times}. \tag{2.2}$$

Деформация стержня как линии Cosserat определяется двумя векторами

$$\boldsymbol{\Gamma} \equiv \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}', \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\kappa} \equiv -\tfrac{1}{2} \big(\boldsymbol{O}' \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} \big)_{\times} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{O}' = \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{O}. \tag{2.4}$$

$$\Big(\mathring{\boldsymbol{r}}(s) \equiv \boldsymbol{r}(s, 0) \Big)$$

$$\|\boldsymbol{e}_3\| = \|\mathring{\boldsymbol{e}}_3\| = 1 = \mathsf{constant}$$

(2.3) и (2.4) реально векторы деформации, это следует из равенства их нулю на движениях тела как жёсткого целого (.... add some equation(s) here describing movements as a rigid whole .....).

Дальше мы проясним идею первого вектора деформации $\boldsymbol{\Gamma}$. Без потери универсальности, параметр s это начальная длина дуги, третий начальный базисный вектор $\mathring{\boldsymbol{e}}_3$ направлен вдоль касательной в начальной конфигурации: $\mathring{\boldsymbol{e}}_3 = \mathring{\boldsymbol{r}}'$. И тогда

$$\boldsymbol{\Gamma} \equiv \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}', \;\; \mathring{\boldsymbol{r}}' = \mathring{\boldsymbol{e}}_3\,, \;\; \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{e}_3 \\ \Rightarrow\; \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{e}_3\,, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{e}_3\,, \;\; \|\boldsymbol{r}'\|^2 = \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}' = \big(\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{e}_3\big) \cdot \big(\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{e}_3\big) \\ = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} + 2\boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3\,,$$

$$\|\boldsymbol{r}'\| = \sqrt{\|\boldsymbol{\Gamma}\|^2 + 2\Gamma_3 + 1}\,,$$

$$\|\boldsymbol{r}'\| - 1 = \sqrt{\|\boldsymbol{\Gamma}\|^2 + 2\Gamma_3 + 1} - 1 = \Gamma_3 + \infty^{-1}\big(\|\boldsymbol{\Gamma}\|^2\big)\,. \tag{2.6}$$

Равенство (2.6) описывает относительное удлинение. Грубо говоря, компоненту $\Gamma_3 \equiv \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{e}_3$ можно считать удлинением, а компоненты $\Gamma_1 \equiv \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{e}_1$, $\Gamma_2 \equiv \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{e}_2$ представляют поперечный сдвиг. Более точно полагаться на формулы (2.5) и (2.6).

......

В модели стержня типа Cosserat нет сечения как плоской фигуры.

....

§ 3. Баланс сил и моментов

Возможные нагрузки, действующие на стержень как линию Cosserat — силы и моменты: на бесконечно-малый элемент ds стержня действуют внешняя сила $\boldsymbol{q}ds$ и внешний момент $\boldsymbol{m}ds$. Внутренними взаимодействиями будут сила $\boldsymbol{Q}(s)$ и момент $\boldsymbol{M}(s)$ — это действие частицы с координатой $s{+}0$ на частицу с $s{-}0$. Принцип действия–противодействия даёт, что реверс (перемена направления) координаты s меняет знаки $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{M}$.

...

§ 4. Принцип виртуальной работы и следствия

Для куска́ стержня $s_0 \leq s \leq s_1$ формулировка принципа такова́

......

Условно $\boldsymbol{a}$ есть тензор жёсткости на изгиб и кручение, $\boldsymbol{b}$ — тензор жёсткости на растяжение и сдвиг, а $\boldsymbol{c}$ — тензор перекрёстных связей.

Тензоры жёсткости поворачиваются вместе с частицей:

...

§ 5. Классическая модель Kirchhoff'а

Её ещё называют *теорией стержней Kirchhoff'а.*

До сих пор функции $\boldsymbol{r}(s,t)$ и $\boldsymbol{O}(s,t)$ были независимы. Классическая теория Kirchhoff'а постулирует внутреннюю связь

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{r}_{\partial s} = \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial s} \text{ или } \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}'. \tag{5.1}$$

Имея идею вектора $\boldsymbol{\Gamma}$ (2.5), здесь мы можем сказать, что: (1) стержень нерастяжим, (2) поперечных сдвигов нет.

Если базисный вектор $\mathring{\boldsymbol{e}}_3$ был направлен вдоль касательной к оси в начальной конфигурации, то он будет оставаться на касательной также после деформирования. Частицы стержня вращаются лишь вместе с касательной к оси и вокруг неё.

Уравнения баланса сил и моментов (импульса и момента импульса) не меняются от введения связи (5.1). Но локальное вариационное соотношение (...) становится короче:

...

§ 6. Проблема Euler'а об устойчивости стержней

Рассматривается прямой стержень, защемлённый на одном конце и нагруженный силой $\boldsymbol{P}$ на другом (рисунок ?? 123 ??). Сила "мёртвая" (не меняется в процессе деформирования)

...

§ 7. Вариационные уравнения

В нелинейной механике упругих сред полезны вариационные уравнения, которые описывают малое изменение текущей конфигурации (§ 3.12).

Варьируя уравнения полной системы модели Cosserat, мы получаем

$$\delta \boldsymbol{Q}' + \delta \boldsymbol{q} = \rho \big(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\delta\tau} \times \boldsymbol{\varepsilon} \big)^{\bullet\bullet},$$
$$\delta \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{r}' \times \delta \boldsymbol{Q} + \delta \boldsymbol{m} = \ldots$$

...

§ 8. Модель без сдвига с растяжением

Модель Kirchhoff'а с внутренней связью $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{0}$ (5.1) не описывает простейший случай растяжения/сжатия прямого стержня. Эта неприятность исчезает со “смягчением” связи, например добавляя возможность растяжения и подавляя лишь поперечный сдвиг

$$\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma \boldsymbol{e}_3 \;\Leftrightarrow\; \Gamma_\alpha = 0 \tag{8.1}$$

...

§ 9. Механика гибкой нити

Нить — это безмоментный стержень.

Гибкая нить (цепь) проще стержня, потому что её частицы суть “простые” материальные точки с лишь трансляционными степенями свободы. Поэтому среди нагрузок нет моментов, только “линейные” силы — внешние распределённые $\boldsymbol{q}$ и внутренние сосредоточенные $\boldsymbol{Q}$. Движение нити полностью определяется одним вектором-радиусом $\boldsymbol{r}(s,t)$, а инерционные свойства — линейной плотностью $\rho(s)$.

Вот принцип виртуальной работы для куска́ нити $s_0 \leq s \leq s_1$

$$\int\limits_{s_0}^{s_1} \Big((\boldsymbol{q} - \rho \ddot{\boldsymbol{r}}) \boldsymbol{\cdot} \delta \boldsymbol{r} - \delta \Pi \Big) ds + \Big[\boldsymbol{Q} \boldsymbol{\cdot} \delta \boldsymbol{r} \Big]_{s_0}^{s_1} = 0. \tag{9.1}$$

...

Механика нити детально описана в книге [35].

§ 10. Линейная теория

В линейной теории внешние воздействия считаются малыми, а отсчётная конфигурация — ненапряжённым состоянием покоя. Уравнения в вариациях в этом случае дают

...

§ 11. Случай малой толщины

Когда относительная толщина стержня мала́, тогда модель типа Cosserat уступает место классической. Понятие “толщина” определяется соотношением жёсткостей: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — разных единиц измерения; полагая $\boldsymbol{a} = \hbar^2 \widehat{\boldsymbol{a}}$ и $\boldsymbol{c} = \hbar \widehat{\boldsymbol{c}}$, где $\hbar$ — некий диапазон длины, получим тензоры $\widehat{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{b}$ и $\widehat{\boldsymbol{c}}$ с одной и той же единицей. Подбирая $\hbar$ так, чтобы сблизились характерные значения тензоров $\widehat{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{b}$ и $\widehat{\boldsymbol{c}}$, найдём эквивалентную толщину h стержня (для реальных трёхмерных стержней h где-то на уровне диаметра сечения).

Представив $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{M}$ через векторы бесконечномалой линейной деформации

...

Переход модели типа Cosserat в классическую кажется более очевидным, если непосредственно интегрировать уравнения (...)

...

§ 12. Задача Сэйнт-Венана

Трудно переоценить ту роль, которую играет в механике стержней классическое решение Saint-Venant’а. О нём уже́ шла речь в § 4.13.

Вместо условий ...

...

§ 13. Нахождение жёсткости по энергии

Для определения тензоров жёсткости $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ одномерной модели достаточно решений трёхмерных задач для стержня. Но тут возникают два вопроса: какие именно задачи рассматривать и что нужно взять из решений?

Проблема Saint-Venant’а выделяется среди прочих, ведь оттуда берётся жёсткость на кручение.

Вдобавок есть много точных решений, получаемых таким путём: задаётся поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, определяется $\breve{\boldsymbol{\tau}} = {}^4\boldsymbol{\mathcal{C}} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}$, затем находятся объёмные $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \breve{\boldsymbol{\tau}}$ и поверхностные $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{n} \cdot \breve{\boldsymbol{\tau}}$ нагрузки.

Но что делать с решением? Ясно, что $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{M}$ в стержне — это интегралы по сечению (...). И совсем не ясно, что принять за смещение и поворот в одномерной модели. Если взять, например, такую версию (индекс у $\boldsymbol{u}$ показывает размерность модели)

$$\boldsymbol{u}_1(z) = \Omega^{-1} \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{x}, z)\, d\Omega, \quad \boldsymbol{\theta}(z) = \tfrac{1}{2}\, \Omega^{-1} \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}_3\, d\Omega,$$

то чем другие возможные представления хуже?

Помимо $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{M}$, есть ещё величина, не вызывающая сомнений — упругая энергия. Естественно потребовать, чтобы в одномерной и в трёхмерной моделях энергии на единицу длины совпали. При этом, чтобы уйти от различий в трактовках $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{\theta}$, будем исходить из дополнительной энергии $\widehat{\Pi}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{Q})$:

$$\widehat{\Pi}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{Q}) = \int\limits_{\Omega} potentialenergydensity_3\, d\Omega$$

...

§ 14. Вариационный метод построения одномерной модели

Мы только что определили жёсткости стержня, полагая, что одномерная модель линии типа Cosserat адекватно описывает поведение трёхмерной модели. “Одномерные” представления ассоциируются со следующей картиной смещений в сечении:

$$\boldsymbol{u}(s, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}(s) + \boldsymbol{\theta}(s) \times \boldsymbol{x}. \tag{14.1}$$

Однако, такое поле $\boldsymbol{u}$ не удовлетворяет уравнениям трёхмерной теории(??добавить, каким именно). Невозможно пренебречь возникающими невязками в дифференциальных уравнениях и краевых условиях.

Формально “чистым” является вариационный метод сведения трёхмерной проблемы к одномерной, называемый иногда методом внутренних связей. Аппроксимация (14.1) подставляется в трёхмерную формулировку вариационного принципа минимума потенциальной энергии (9.1, § 4.9)

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{u}) = \int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\Pi(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} \Big) d\mathcal{V} - \int\limits_{o_2} \boldsymbol{p} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} \, do \to \min,$$

которая после интегрирования по сечению становится одномерной. Если $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{\theta}$ варьируются независимо, получаем модель типа Коссера. В случае $\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{t}$ приходим к классической модели.

Метод внутренних связей привлекателен, его продолжают “переоткрывать”. С его помощью возможно моделировать тела с неоднородностью и анизотропией, он легко обобщается на динамику, если $\boldsymbol{f}$ дополнить неварьируемой динамической добавкой до $\boldsymbol{f} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}$. Можно рассматривать и стержни переменного сечения, и даже нелинейно упругие, ведь вариационная постановка есть (гл. 3).

Аппроксимацию (14.1) можно дополнить слагаемыми с внутренними степенями свободы. Понимая необходимость учёта депланаций, некоторые авторы

...

...

Для вариационного построения одномерных моделей удобно использовать принцип Reissner’a–Hellinger’a (§ 4.11) с независимой аппроксимацией напряжений [18]. В этом случае нужна некоторая согласованность между $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\tau}$.

Множеству достоинств вариационного метода противостоит один, но значительный недостаток. Вводя приближения в сечениях, мы навязываем наши нереальные упрощения реальности. Вариационный метод более подходит для прикладных расчётов.

§ 15. Асимптотическое расщепление трёхмерной проблемы

Асимптотическое расщепление можно считать фундаментальным для описания механики стержней. Одномерные модели рисуют лишь часть картины, двумерные проблемы в поперечных сечениях рисуют другую часть, а вместе они представляют решение трёхмерной проблемы для ма́лой толщины.

Как ввести малый параметр χ в трёхмерную проблему? Проще всего сделать это через представление вектора положения (§ 1):

$$\boldsymbol{R}(x_\alpha, s) = \chi^{-1} \boldsymbol{r}(s) + \boldsymbol{x}, \;\; \boldsymbol{x} \equiv x_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha(s), \;\; \alpha = 1, 2.$$

Для ортонормального базиса, верхние и нижние индексы не различаются

$$q_i = q^i, \; \boldsymbol{R}^i = \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_{\partial i} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q^i}.$$

Три координаты —

$$q^1 = x_1, \;\; q^2 = x_2, \;\; q^3 = s.$$

Векторы базиса суть

$$\boldsymbol{e}_1, \;\; \boldsymbol{e}_2, \;\; \boldsymbol{t} \equiv \boldsymbol{e}_3.$$

Представление оператора Hamilton'a $\boldsymbol{\nabla}$

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{R}^i \frac{\partial}{\partial q^i} = \boldsymbol{\nabla}_\perp + \mathrm{v}^{-1} \boldsymbol{t} \big(\partial_s - \psi_t \mathrm{D} \big), \;\; \boldsymbol{\nabla}_\perp \equiv \boldsymbol{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$
$$\mathrm{v} \equiv \boldsymbol{R}_{\partial 1} \times \boldsymbol{R}_{\partial 2} \bullet \boldsymbol{R}_{\partial 3} = \chi^{-1} + \boldsymbol{t} \bullet \boldsymbol{\psi}_\perp \times \boldsymbol{x}, \;\; \mathrm{D} \equiv \boldsymbol{t} \bullet \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\nabla}_\perp,$$
$$\boldsymbol{\psi}_\perp + \psi_t \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\psi}$$

(смысл вектора $\boldsymbol{\psi}$ тот же как и в § 1).

Тензор напряжения Cauchy

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_\perp + \sigma_t \boldsymbol{t}\boldsymbol{t} + 2 \boldsymbol{t} \boldsymbol{\tau}_{\|}{}^{\mathsf{S}}, \;\; \boldsymbol{\tau}_\perp \equiv \tau_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta, \;\; \boldsymbol{\tau}_{\|} \equiv \tau_{3\alpha} \boldsymbol{e}_\alpha.$$

...

§ 16. Температурные деформация и напряжение

Прямой подход, столь эффективный для создания одномерных моделей Cosserat и Kirchhoff'a, для проблем термоупругости непримени́м. Переход от трёхмерной модели к одномерной может быть реализован или вариационным путём, или асимптотическим.

Описанный в § 14 вариационный метод целиком переносится на термоупругость — включая задачи с неоднородностью и анизотропией, переменным сечением, динамические и даже нелинейные. Для этого нужно (§ 6.8) в принципе Lagrange'a минимума потенциальной энергии заменить потенциал $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon})$ свободной энергией

...

Библиография

В отличие от других тем, стержни представлены в книгах очень скромно. Стиль изложения "сопротивления материалов" преобладает там, а более точные и совершенные подходы кажутся невозможными или ненужными большинству авторов.

Но было опубликовано много интересных статей, их обзоры представлены, например, у S. Antman'a [1], В. В. Елисеева [18] и А. А. Илюхина [**?**].

глава 10

ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ

§ 1. Вариационный подход

В главе 9 были описаны стержни с массивными сечениями. Но широко используются и иные стержни — тонкостенные, с сечениями из узких полосок разных очертаний: уголок, Z-балка, швеллер (С-балка), двутавр, ... Если стержни похожи на линии, то в тонкостенном стержне само́ сечение тоже выглядит как линия. Три размера — толщина и длина сечения, а также длина стержня — имеют разные десятичные порядки.

Известны прикладные теории тонкостенных стержней, они описаны, например, в книгах ...

Есть также точная теория, основанная на асимптотическом расщеплении трёхмерной проблемы [18]. В итоге, сложный асимптотический анализ подтвердил большинство из гипотез прикладных теорий.

Как введение в механику тонкостенных стержней, вот следующая вариационная процедура с искажением (депланацией) поперечных сечений.

Рассмотрим простейший случай цилиндрического стержня с тонким односвязным сечением (... рисунок ...). Площадь сечения do, боковая поверхность свободна, нагрузка в объёме — $\boldsymbol{f}$, на торце $z = z_1$ известны поверхностные силы $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} = x_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha)$, торец $z = z_0$ закреплён.

...

§ 2. Уравнения с малым параметром

Рассмотрим призматический стержень с односвязным сечением в виде тонкой криволинейной полоски постоянной толщины h. Радиус-вектор в объёме предста́вим следующим образом:

...

§ 3. Первый шаг асимптотической процедуры

Внешнее разложение

Из системы

...

Внутреннее разложение вблизи s_0

Выпишем уравнения для

...

Сращивание

Стыковка внутреннего и внешнего разложений

...

§ 4. Второй шаг

Внешнее разложение

Из системы

...

Внутреннее разложение вблизи $s = s_0$

Из общей системы

...

Сращивание

Поскольку рассматриваются поправочные члены асимптотических разложений

...

§ 5. Третий шаг

Внешнее разложение

Из системы

....

Внутреннее разложение около $s=s_0$

Как ужé отмечалось, внутренние разложения нужны для постановки краевых условий на концах

...

Сращивание

В плоской задаче имеем следующее двучленное внешнее разложение:

....

§ 6. Четвёртый шаг

Здесь понадобится лишь внешнее разложение. Более того: в этом приближении мы не будем искать решения уравнений — будет достаточно лишь условий разрешимости. Напомним, что философия наша такова: разыскиваются лишь главные члены асимптотических разложений, но для полного их определения могут понадобиться

...

§ 7. Смещения

Расписывая тензорное соотношение

...

§ 8. Результаты асимптотического анализа

Нахождение главных членов асимптотики напряжений и смещений для тонкостенных стержней оказалось намного сложнее, чем для массивных сечений. Дадим сводку полученных выше итоговых результатов.

Смещение:

$$\boldsymbol{u}_\perp = \lambda^{-4}\big(\boldsymbol{U}_\perp(z) + \theta(z)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}\big) + \infty^{-1}(\lambda^{-3}), \tag{8.1}$$

$$u_{[z]} = \lambda^{-3}\big(-\dot{\boldsymbol{U}}_\perp \bullet \boldsymbol{r} + \dot{\theta}\omega(s) + U_z(z)\big) + \infty^{-1}(\lambda^{-2}). \tag{8.2}$$

Напряжения:

...

Библиография

Помимо книг В. З. Власов'а [8], Г. Ю. Джанелидзе и Я. Г. Пановко [15], отметим статью Я. Г. Пановко и Е. А. Бейлина [44].

Материал этой главы содержится в диссертации Владимира В. Елисеева [18], там также есть обширный список статей на тему тонкостенных стержней.

глава 11

ОБОЛОЧКИ И ПЛАСТИНЫ

§1. Геометрия поверхности

Поверхность описывается функцией (морфизмом)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^\alpha), \;\; \alpha = 1, 2 \tag{1.1}$$

двух взаимно независимых переменных параметров (координат) q^α, тогда $\boldsymbol{r}$ — вектор положения (вектор-радиус) точек поверхности.

Примеры

- ✓ линейное отображение есть плоскость $\boldsymbol{r}(a,b) = a\boldsymbol{e}_1 + b\big(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\big)$
- ✓ геликоид $\boldsymbol{r}(u,v) = u \sin v \, \boldsymbol{e}_1 + u \cos v \, \boldsymbol{e}_2 + v\boldsymbol{e}_3$
- ✓ конус $\boldsymbol{r}(u,v) = u \sin v \, \boldsymbol{e}_1 + u \cos v \, \boldsymbol{e}_2 + u\boldsymbol{e}_3$
- ✓ цилиндр радиуса $r = \mathsf{constant}$
$$\boldsymbol{r}(u,v) = r\big(\cos u \, \boldsymbol{e}_1 + \sin u \, \boldsymbol{e}_2\big) + v\boldsymbol{e}_3$$
- ✓ тор вращения с радиусами r и R
$$\boldsymbol{r}(p,q) = \boldsymbol{e}_1\big(r \cos p + R\big) \cos q + \boldsymbol{e}_2\big(r \cos p + R\big) \sin q + \boldsymbol{e}_3 \, r \sin p$$
- ✓ 2-сфера — тор с $R = 0$
$$\boldsymbol{r}(p,q) = r\big(\cos p \cos q \, \boldsymbol{e}_1 + \cos p \sin q \, \boldsymbol{e}_2 + \sin p \, \boldsymbol{e}_3\big)$$
- ✓ параболоид $\boldsymbol{r}(u,v) = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + \big(u^2 + v^2\big)\boldsymbol{e}_3$ или цилиндрической параметризацией $\boldsymbol{r}(\rho,\vartheta) = \rho \cos \vartheta \, \boldsymbol{e}_1 + \rho \sin \vartheta \, \boldsymbol{e}_2 + \rho^2\boldsymbol{e}_3$ для параболоида вращения.

Непрерывное изменение первой координаты q^1, пока вторая $q^2 = u^* = \mathsf{constant}$ “заморожена”, даёт координатную линию $\overset{(1)}{\boldsymbol{r}}(q^1) = \boldsymbol{r}(q^1, u^*)$. Пересечение двух координатных линий $q^1 = v^*$ и $q^2 = w^*$ однозначно определяет точку $\boldsymbol{r}(v^*, w^*)$ поверхности.

Векторы

$$\boldsymbol{r}_{\partial\alpha} \equiv \partial_\alpha \boldsymbol{r}, \;\; \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \tag{1.2}$$

касательны к координатным линиям. Если они линейно независимы (то есть $\boldsymbol{r}_{\partial 1} \times \boldsymbol{r}_{\partial 2} \neq \boldsymbol{0}$)*, они составляют локальный базис для представления любого вектора $\overset{(2)}{\boldsymbol{v}}$ в касательной плоскости как линейной комбинации

$$\begin{gathered} \overset{(2)}{\boldsymbol{v}} = v^{\alpha} \boldsymbol{r}_{\partial \alpha} = v_{\alpha} \boldsymbol{r}^{\alpha}, \\ v^{\alpha} = \overset{(2)}{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{r}^{\alpha}, \;\; v_{\alpha} = \overset{(2)}{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{r}_{\partial \alpha}, \;\; \boldsymbol{r}^{\alpha} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{r}_{\partial \beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\boldsymbol{r}^{\alpha}$ — локальный взаимный базис в (ко)касательной плоскости.

Поле единичных нормальных векторов $\boldsymbol{n}(q^{\alpha})$ добавляет в каждой точке поверхности ($\forall \boldsymbol{r}(q^{\alpha}) \Leftrightarrow \forall q^{\alpha}$) единичную** нормаль

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_{\partial 1} \times \boldsymbol{r}_{\partial 2}}{\left\| \boldsymbol{r}_{\partial 1} \times \boldsymbol{r}_{\partial 2} \right\|}. \tag{1.4}$$

В несингулярных точках, три вектора $\boldsymbol{r}_{\partial 1}$, $\boldsymbol{r}_{\partial 2}$ и $\boldsymbol{n}$ могут быть взяты как базис для всего трёхмерного пространства, давая разложение любого вектора (и любого тензора тоже), например $\overset{(3)}{\boldsymbol{u}} = u^{\alpha} \boldsymbol{r}_{\partial \alpha} + u^{n} \boldsymbol{n}$.

$u^{n} = u_{n}$

для 2-сферы единичного радиуса

$$\boldsymbol{r}_{\partial p} \times \boldsymbol{r}_{\partial q} = -\det \begin{bmatrix} -\sin p \cos q & \boldsymbol{e}_1 & -\cos p \sin q \\ -\sin p \sin q & \boldsymbol{e}_2 & \cos p \cos q \\ \cos p & \boldsymbol{e}_3 & 0 \end{bmatrix} = \ldots$$

Единичные (“метрические”) бивалентные тензоры $\boldsymbol{E}$ в пространстве и $\boldsymbol{I}$ в касательной плоскости

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}, \;\; \boldsymbol{I} \equiv \boldsymbol{E} - \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_{\partial \alpha} \boldsymbol{r}^{\alpha} = \boldsymbol{r}^{\alpha} \boldsymbol{r}_{\partial \alpha}.$$

* Иногда где-нибудь — в так называемых сингулярных точках — это не так. Как пример, для 2-сферы единичного радиуса

$$\begin{gathered} \boldsymbol{r}(p, q) = \cos p \cos q \, \boldsymbol{e}_1 + \cos p \sin q \, \boldsymbol{e}_2 + \sin p \, \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{r}_{\partial p} = \partial_p \boldsymbol{r} = -\sin p \cos q \, \boldsymbol{e}_1 - \sin p \sin q \, \boldsymbol{e}_2 + \cos p \, \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{r}_{\partial q} = \partial_q \boldsymbol{r} = -\cos p \sin q \, \boldsymbol{e}_1 + \cos p \cos q \, \boldsymbol{e}_2 + 0 \, \boldsymbol{e}_3, \end{gathered}$$

полюс $p = \pm \frac{\pi}{2}$ — сингулярная точка: $\boldsymbol{r}_{\partial q} \big|_{p = \pm \pi/2} = \boldsymbol{0}$.

** $\|\boldsymbol{a}\| \equiv \sqrt{\boldsymbol{a} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{a}}$ — длина вектора $\boldsymbol{a}$.

Представление вектора положения $\overset{(3)}{\boldsymbol{r}}$ любой точки пространства на расстоянии h от поверхности $(\partial_\alpha h = 0)$

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{r}}(q^\alpha, h) = \boldsymbol{r}(q^\alpha) + h\boldsymbol{n}(q^\alpha) \tag{1.5}$$

даёт локальный касательный базис

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{r}}_{\partial n} = \boldsymbol{n} = \overset{(3)}{\boldsymbol{r}}{}^n,$$
$$\overset{(3)}{\boldsymbol{r}}_{\partial\alpha} \equiv \partial_\alpha \overset{(3)}{\boldsymbol{r}} = \partial_\alpha \boldsymbol{r} + h\partial_\alpha \boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} + h\boldsymbol{r}_{\partial\alpha} \cdot \boldsymbol{r}^\beta \partial_\beta \boldsymbol{n}.$$

...

дифференциальный оператор “набла”

в пространстве $\boldsymbol{\nabla} \equiv \overset{(3)}{\boldsymbol{r}}{}^i \partial_i$

в касательной плоскости $\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}} \equiv \boldsymbol{r}^\alpha \partial_\alpha$

...

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{r}}_{\partial\alpha} = \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} \cdot \left(\boldsymbol{r}^\beta \boldsymbol{r}_{\partial\beta} + h\boldsymbol{r}^\beta \partial_\beta \boldsymbol{n}\right) = \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} \cdot \left(\boldsymbol{I} + h\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{n}\right) = \boldsymbol{r}_{\partial\alpha} \cdot \left(\boldsymbol{I} - {}^2\overset{(2)}{\boldsymbol{c}} h\right)$$

Двухкоординатный бивалентный тензор

$${}^2\overset{(2)}{\boldsymbol{c}} \equiv -\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}^\alpha \partial_\alpha \boldsymbol{n} \tag{1.6}$$

характеризует кривизну поверхности.

...

кобазис $\overset{(3)}{\boldsymbol{r}}{}^\alpha \cdot \overset{(3)}{\boldsymbol{r}}_{\partial\beta} = \delta^\alpha_\beta$, $\overset{(3)}{\boldsymbol{r}}{}^i \cdot \overset{(3)}{\boldsymbol{r}}_{\partial j} = \delta^i_j$

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{r}}{}^\alpha = \left(\boldsymbol{I} + h\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{n}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{r}^\alpha, \quad \overset{(3)}{\boldsymbol{r}}{}^n = \boldsymbol{n}$$

связь между $\boldsymbol{\nabla}$ и $\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}}$

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\boldsymbol{I} + h\overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{n}\right)^{-1} \cdot \overset{(2)}{\boldsymbol{\nabla}} + \boldsymbol{n}\partial_n$$

...

§ 2. Модель оболочки

С моделями трёхмерного моментного континуума и одномерных стержней не так уж тяжело to figure out в механике оболочек.

Как геометрический объект, оболочка определяется срединной поверхностью и толщиной h, так что в формуле (1.5)

$$-h/_2 \leq \mathscr{h} \leq h/_2 .$$

...

§ 3. Баланс сил и моментов для оболочки

При $\delta\boldsymbol{u} = \textbf{constant}$ и $\delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ (трансляция) ...

...

§ 4. Оболочки: Отношения упругости

Локальное соотношение (**??**) после вывода уравнений баланса ...

...

§ 5. Классическая теория оболочек

Вышеизложенная теория (напоминающая балку Тимошенко и континуумы Cosserat) рассматривает повороты $\boldsymbol{\varphi}$ независимо от смещений $\boldsymbol{u}$. Но опыт подсказывает, что материальный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остаётся таким и после деформации (кинематическая гипотеза Kirchhoff'а). В классической теории Kirchhoff'а, Арона и Love'а поле $\boldsymbol{\varphi}$ выражается через $\boldsymbol{u}$, что в конце концов даёт свести всё к одному векторному уравнению для $\boldsymbol{u}$.

Предположим, что в основе классической теории лежит внутренняя связь

...

§ 6. Оболочки: Пластина

Пластина есть простейший вид оболочки. Единичный перпендикуляр $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$ направлен по декартовой оси z, в качестве координат ...

...

§ 7. Оболочки: Подход с множителями Лагранжа

Уязвимым местом этого изложения теории оболочек являются формулы

...

§ 8. Цилиндрическая оболочка

Существуют разные уравнения цилиндрической оболочки. Приводятся громоздкие выкладки с отбрасыванием некоторых малых членов, и не всегда ясно, какие именно члены действительно можно отбросить.

Предлагаемая читателю теория оболочек иного свойства: лишних членов нет, все уравнения записаны в компактной тензорной форме — остаётся лишь грамотно действовать с компонентами тензоров. В качестве иллюстрации рассмотрим цилиндрическую оболочку.

В декартовой системе

...

§ 9. Оболочки: Общие теоремы

Пусть край закреплён

...

§ 10. Оболочки: Краевые условия

В рамках рассматриваемого прямого подхода к оболочкам как материальным поверхностям наиболее надёжным способом вывода граничных условий представляется вариационный. Исходим из вариационного уравнения:

...

§ 11. Оболочки вращения

Surface of revolution (reference surface of shell of revolution) is created by rotating a plane curve (the meridian, the generatrix) about a straight line in the plane of curve (an axis of rotation).

Разберёмся в геометрии поверхности вращения (рисунок). Меридиан можно задать зависимостью декартовых координат

...

§ 12. Безмоментная теория оболочек

В отличие от пластины, оболочка способна выдерживать нормальную распределённую нагрузку без появления внутренних моментов. В безмоментном состоянии напряжения равномерно распределены по толщине оболочки, безмоментные оболочечные конструкции можно считать оптимально спроектированными.

Уравнения безмоментной теории

...

§ 13. Оболочки: Нелинейная безмоментная теория

Вышеизложенную безмоментную теорию оболочек возможно просто и корректно обобщить на нелинейную постановку. Материальная поверхность состоит из частиц

...

§ 14. Оболочки: Иной вариант классической теории

Выше при изложении моментной теории оболочек частицы материальной поверхности считались твёрдыми телами с шестью степенями свободы

...

§ 15. Пластины: Общие представления

Пластиной называется тонкое трёхмерное тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями и боковой цилиндрической поверхностью (?? рисунок ??). В декартовых координатах x_1, x_2, z поперечная координата ...

...

В теории пластин рассматриваются двумерные задачи. Переход от трёхмерной задачи наиболее достоверен на пути асимптотики. Но логическая стройность и эффективность присуща и вариационному подходу, основанному на аппроксимации по толщине решения трёхмерной вариационной задачи. Самое же простое корректное изложение теории пластин характерно для прямого подхода к ним как материальным плоскостям.

...

§ 16. Модель пластины типа Тимошенко (прямой подход)

Пластина рассматривается как материальная плоскость, частицы которой

...

§ 17. Классическая теория пластин Kirchhoff'а

Принимается внутренняя связь

...

§ 18. Пластины: Асимптотическое сопоставление двумерных моделей

При малой толщине из теории типа Тимошенко следует классическая теория. Толщина h определяется отношением жёсткостей. Перепишем

...

§ 19. Пластины: Вариационный переход от трёхмерной модели

Используя вариационные принципы Lagrange'а или Hellinger'а и Reissner'а с аппроксимацией решения по толщине, можно получить двумерные вариационные формулировки проблем. Из этих вариационных принципов вытекают и соотношения внутри области, и натуральныекраевые условия.

Для примера вот модель типа Тимошенко с аппроксимацией смещений

...

...

Вариационные переходы могут быть легко обобщены для случаев температурных деформаций, неоднородности (гетерогенности) и анизотропии of the material, динамики. Преимущество принципа Hellinger'а–Reissner'а состоит в явном представлении напряжений. Зато принцип Лагранжа примени́м и к нелинейным задачам (в главе 3 описана трёхмерная постановка).

§ 20. Пластины: Расщепление трёхмерной задачи изгиба

Двумерная классическая теория изгиба пластин легко выводится из трёхмерной постановки с малым параметром. Представив радиус-вектор в объёме

...

§ 21. Круглые пластины

В качестве иллюстрации рассмотрим широко представленный в литературе вопрос об уравнениях теории Kirchhoff'а в полярных координатах.

...

§ 22. Пластины: Плоское напряжение

Это вторая из двух задач, о которых говорилось в § 15. Силы

...

Библиография

Теория оболочек изложена в монографиях А. Л. Гольденвейзера [9], В. В. Новожилова [43], А. И. Лурье [32], В. С. Черниной [?] и ряде других. Достоинства этих книг перекрывают неразвитость формального аппарата. Переход от трёхмерной модели оболочки к двумерной рассмотрен у ...

...

Техническая теория изгиба пластин изложена ...

...

глава 12

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

§ 1. Вибрации трёхмерных тел

Динамическая задача классической линейной упругости есть

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}, \;\; \boldsymbol{\sigma} = {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}, \\
\boldsymbol{u}\big|_{o_1} = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\big|_{o_2} = \boldsymbol{p}, \\
\boldsymbol{u}\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}^{\circ}, \;\; \dot{\boldsymbol{u}}\big|_{t=0} = \dot{\boldsymbol{u}}^{\circ}.
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Согласно общей теории (§ 2.8), мы начинаем с анализа гармоник (ортогональных колебаний):

$$
\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}) \sin \omega t,
$$

$$
\boldsymbol{\nabla} \cdot \big({}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{U} \big) + \rho \omega^2 \boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}. \tag{1.2}
$$

Если однородная задача имеет нетривиальное решение, то значения ω это натуральные резонансные частоты, а $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})$ — ортогональные (нормальные) “моды”.

Независимое от времени уравнение (1.2) выглядит как уравнение линейной эластостатики (**??**, § 4.**??**), когда объемная нагрузка равна $\omega^2 \rho \boldsymbol{U}$. Поверхностная нагрузка на o_2 равна нулю. Тождество Clapeyron’а (4.1, § 4.4) даёт

$$
\omega^2 \int\limits_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} \, d\mathcal{V} = 2 \int\limits_{\mathcal{V}} \Pi \big(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{U}^{\mathsf{S}} \big) \, d\mathcal{V}. \tag{1.3}
$$

Это также значит, что $\omega^2 \geq 0$. Здесь нуль значит, что континуум движется $\boldsymbol{U}$ как жёсткое целое. Когда даже малая часть поверхности закреплена, тогда все $\omega_i > 0$.

И тут мы предполагаем, что ω^2 и $\boldsymbol{U}$ это вещественные числа. Это может быть доказано “от противного”. Если $\Im\mathrm{m}\, \omega^2 \neq 0$, то сопряжённая частота $\overline{\omega}^2$ — тоже часть спектра колебания, и “мода” $\overline{\boldsymbol{U}}$ для этой частоты имеет сопряжённые компоненты. Используя далее теорему о взаимности работ (**??**, § 4.4) для $\boldsymbol{U}$ и $\overline{\boldsymbol{U}}$, мы имеем

$$\omega^2 \int_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{U} \cdot \overline{\boldsymbol{U}} d\mathcal{V} = \overline{\omega}^2 \int_{\mathcal{V}} \rho \overline{\boldsymbol{U}} \cdot \boldsymbol{U} d\mathcal{V} \;\Rightarrow\; \omega^2 = \overline{\omega}^2 \;\Rightarrow\; \Im\mathrm{m}\, \omega^2 = 0.$$

...

Однако, яркая картина с разложением по модам малопригодна для практических расчётов колебаний (вибраций) трёхмерного упругого тела. Причина — густота спектра, вынужденные колебания возбуждают много мод. Когда плотность собственных частот высокая, даже малое трение качественно меняет резонансную кривую. Демпфирование (уменьшение амплитуд) в реальных телах тоже важно. Вдобавок, волновая природа нестационарных процессов мешает просто перенести теорию колебаний дискретных систем на континуум: в случае внезапного локального возбуждения корректнее рассматривать волны вместо наложения мод.

Путь от непрерывной динамической модели к дискретной проходит через вариационный подход.

$$\int_{\mathcal{V}} \Big((\boldsymbol{f} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}) \cdot \delta \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\varepsilon} \Big) d\mathcal{V} + \int_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{u} \, do = 0. \tag{1.4}$$

Это принцип виртуальной работы с силами инерции. Разыскивая приближённое решение в рядах

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t) \varphi_k(\boldsymbol{r}),$$

где φ_k даются $\Big(\varphi_k \big|_{o_1} = \boldsymbol{0} \Big)$, а $\alpha_k(t)$ варьируются. Решение???? — система обыкновенных уравнений

...

Вместо принципа виртуальной работы (1.4) можно использовать смешанную формулировку Hellinger'a–Reissner'a с независимой аппроксимацией напряжений.

В динамической теории упругости часто применяется интегральное преобразование Laplace'a. Для тел простой формы иногда возможно найти аналитическое решение в трансформах. Оригинал может быть найден численным обращением, но иногда возможно взять интеграл Riemann'a–Mellin'a*, используя "метод перевала" (or "метод крутых спусков") с деформацией контура в комплексной плоскости [51, 76].

§ 2. Вибрации стержней

В линейной динамике стержней мы имеем следующую систему для сил $\boldsymbol{Q}$, пар сил (моментов) $\boldsymbol{M}$, смещений $\boldsymbol{u}$ и поворотов $\boldsymbol{\theta}$ (§ 9.10):

$$\boldsymbol{Q}' + \boldsymbol{q} = \rho\big(\ddot{\boldsymbol{u}} + \ddot{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{\varepsilon}\big),\ \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{J} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \rho\boldsymbol{\varepsilon} \times \ddot{\boldsymbol{u}}, \tag{2.1}$$

$$\ldots \tag{2.2}$$

...

§ 3. Малые возмущения параметров

Рассмотрим задачу об определении собственных частот и форм с малыми возмущениями масс и жёсткостей:

$$\begin{gathered}\big(C_{ij} - \omega^2 A_{ij}\big)U_j = 0,\\ C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)},\ \ A_{ij} = A_{ij}^{(0)} + \chi A_{ij}^{(1)},\ \ \chi \to 0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Находя́ решение в виде

$$\omega = \omega^{(0)} + \chi\omega^{(1)} + \ldots,\ \ U_j = U_j^{(0)} + \chi U_j^{(1)} + \ldots,$$

* Интеграл Riemann'a–Mellin'a определяет обратное преобразование Лапласа $F(s) \mapsto f(t)$.

получаем последовательность задач

...

§ 4. Вибрации оболочек

Динамика оболочек рассматривалась многими

...

§ 5. Волны в упругом континууме

Рассмотрим линейные уравнения динамики однородной изотропной среды без объёмных сил

...

§ 6. Волны в стержне

Рассмотрим прямой стержень. Продольная деформация описывается уравнениями

...

§ 7. Нелинейные колебания

Рассмотрим простой пример: продольные колебания прямого стержня с ма́лой нелинейной добавкой в соотношениях упругости

...

Библиография

Методы решения динамических задач упругости представлены в книгах Л. И. Слепяна [76] и В. Б. Поручикова [51]. О ма́лых линейных колебаниях (вибрациях) написано у С. П. Тимошенко, D. H. Young'а и W. Weaver'а [68], И. М. Бабакова [69], В. Л. Бидермана [70], В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [72]. Асимптотические проблемы колебаний оболочек освещены у ...

глава 13

УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 1. Разные подходы к проблеме устойчивости

Есть весьма ра́звитая теория устойчивости по Ляпунову. Она говорит, что если начальные отклонения*“достаточно близкие (ма́лые)”, и впоследствии они не растут, оставаясь “достаточно близкими” навсегда, то процесс устойчив. Это применимо и к состоянию равновесия . Тако́в **динамический подход** к проблеме устойчивости, и этот подход самый обоснованный.

Однако, для задач об устойчивости равновесия, обрёл популярность другой подход. Он называется **статическим** подходом, имя Leonhard’a Euler’a ассоциируется с ним. Когда уравнения статики дают нетривиальное решение для ма́лых отклонений-смещений, тогда тогда значения параметров предполагаются “критическими”. Иными словами, если равновесие не изолированное, то оно считается “критическим”. В то же время, много смежных форм равновесия появляется** Используя этот подход, достаточно решить задачу о собственных числах.

Есть ещё больше подходов. Для примера, **метод несовершенств**: если ма́лые случайные изменения начального о́блика, жёсткостей, нагрузок и других переменных вызывают лишь ма́лое изменение деформированной конфигурации, то это равновесие устойчиво. Или **энергетический подход**: когда потеря устойчивости становится энергетически выгодной, то есть когда она ведёт к уменьшению энергии, тогда эта потеря устойчивости случается.

* От равновесной конфигурации.

** Это известно как “безразличное равновесие”.

Упомянутые подходы рисуют пёструю картину. Но её довольно просто визуализировать для модели с конечным числом степеней свободы.

Большóй общностью обладают

...

§ 2. Классические проблемы со стержнями

Состояние перед варьированием описывается уравнениями нелинейной теории стержней Kirchhoff'а

...

§ 3. "Следящие" нагрузки

В проблемах устойчивости весьма весóмо поведение нагрузки в процессе деформирования. Ведь в уравнения входит вариация (of what?) $\delta \boldsymbol{q}$, она равна нулю лишь для "мёртвых" нагрузок. Распространены "следящие" нагрузки, которые меняются определённым путём вместе с отклонениями (смещениями) частиц.

Статический подход Euler'а к проблеме устойчивости

...

§ 4. Роль добавочных податливостей

Для прямого консольного стержня, сжатого постоянной силой $\boldsymbol{F}$ на свободном конце, критическая нагрузка определяется формулой Euler'а

...

§ 5. Вариационные формулировки

Во всех разделах линейной теории упругости большýю роль играют вариационные постановки. Среди прочего, они составляют основу метода конечных элементов как варианта метода Ritz'а.

Менее развиты вариационные постановки для проблем устойчивости. Здесь получил популярность метод

...

§ 6. Неконсервативные задачи

В уравнении динамики (...) матрица позиционных сил

...

§ 7. Случай кратных корней

Вернёмся к проблеме устойчивости (...) в случае циркуляционных сил. Как уже отмечалось(где??), критическая ситуация характеризуется

...

Библиография

Увлекательные вопросы устойчивости упругих систем освещены в книгах ...

глава 14

ДЕФЕКТЫ

§ 1. Дислокации Вольтерры

Рассмотрим классическую линейную трёхмерную упругую среду (гл. 4). Как показано в § 4.7, уравнение совместности деформаций

...

§ 2. Прямолинейные дислокации

Линия дислокации может быть любой кривой, замкнутой внутри тела или с концами на поверхности. Для дислокации случайной формы в неограниченной среде не так уж сложно получить подходящее решение [19]. Мы же ограничимся простейшим случаем прямолинейной дислокации. Ищется решение

...

§ 3. Действие поля напряжений на дислокацию

Рассмотрим среду, содержащую внутри себя дислокацию с замкнутой линией C. Тело нагружено объёмными $\boldsymbol{v}$ и поверхностными $\boldsymbol{p}$ силами. Обозначим

...

§ 4. О движении дислокаций

Рассмотрим это явление, следуя [26]. Ограничимся случаем прямолинейной винтовой дислокации, движущейся с постоянной скоростью

...

§ 5. Точечные дефекты

Речь пойдёт о континуальной модели таких явлений как вакансии, примесные частицы или междоузельные атомы в кристаллической решётке. В случае дислокации рассматривались

...

§ 6. Сила, действующая на точечный дефект

Дефект находится в континууме, нагруженном объёмными $\boldsymbol{v}$ и поверхностными $\boldsymbol{p}$ силами. Суперпозиция

...

§ 7. Непрерывно распределённые дислокации

Начнём со сложения векторов Бюргерса. При обходе сразу двух дислокаций (рис. ?? 40 ??) по контуру

...

§ 8. Напряжение при намотке катушки

Не только дислокации и точечные дефекты, но и макроскопические факторы могут быть источниками собственных напряжений. При намотке катушки (рис. ?? 42 ??) в ней возникают напряжения от натяжения ленты. Расчёт этих напряжений очень сложен, если рассматривать детально процесс укладки ленты.

Но существует чёткий алгоритм Southwell'a [52] расчёта напряжений в катушке: укладка каждого нового витка вызывает внутри катушки приращения напряжений, определяемые соотношениями линейной упругости. Здесь два этапа, и первый состоит в решении задачи Lamé о деформации полого цилиндра под внешним давлением (рис. ?? 43 ??)

...

Библиография

Дислокации и точечные дефекты в линейно-упругих телах рассматривались многими авторами: John Eshelby [19], Roland deWit [14], Cristian Teodosiu [57], Alan Cottrell [26]. Теория собственных напряжений (eigenspannungen) объясняется Ekkehart'ом Kröner'ом в [27]. Расчёт напряжений при намотке катушки описан Richard Southwell'ом в своей книге [52].

глава 15

ТРЕЩИНЫ

§1. Традиционные критерии прочности

Как судить о прочности тела после определения напряжения в нём? При одноосном растяжении напряжением σ есть, очевидно, некий "предел прочности" σ_*, выше которого материал разрушается. Прочность считают достаточной при $\sigma \leq \sigma_*/k$, где k есть так называемый коэффициент запаса. Но такой подход не вполне удовлетворяет, поскольку получаемые из опытов значения σ_* имеют большой разброс, а выбор коэффициента запаса временами становится бюрократическим актом.

Тем не менее, подобные взгляды на анализ прочности широко́ распространены. Воздерживаясь от критики, сто́ит упомянуть самые популярные из них.

Критерий максимального нормального напряжения: разрушение происходит при $\sigma_1 = \sigma_*$ (наибольшее из главных напряжений достигает предельного значения). Но это положение несправедливо для одноосного сжатия, при котором $\sigma_1 = 0$.

Критерий максимального касательного напряжения (Tresca criterion): разрушение наступает при $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_*$ (σ_3 — наименьшее из главных напряжений). Это более соответствует началу пластического течения.

Критерий максимального удлинения: наибольшее из собственных значений тензора деформации $\varepsilon_1 = \varepsilon_*$. Это приемлемо и при сжатии с $\varepsilon_1 > 0$.

Критерий энергии деформации: $\Pi = potentialenergydensity_*$. Здесь учитывается, что разрушение требует энергии, а источником её может быть лишь само́ деформированное тело. Однако достаточный запас энергии — необходимое, но не единственное условие разрушения; должен включиться некий механизм преобразования упругой энергии в работу разрушения.

Критерий энергии формоизменения (von Mises yield criterion): $\boldsymbol{s} \cdot\cdot \boldsymbol{s} = 2\tau_*^2$, $\boldsymbol{s} \equiv \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3}\boldsymbol{E} \operatorname{trace} \boldsymbol{\tau}$ (“девиатор напряжений”). Здесь не играет роли энергия объёмной деформации. Richard von Mises предложил* этот критерий как гладкую аппроксимацию условия Henri Tresca.

Критерий Mohr’a. Представим себе множество предельных состояний ...

...

§ 2. Антиплоская деформация среды с трещиной

Любая регулярная функция компле́ксного переменного $z = x + iy$ содержит в себе решение какой-либо антиплоской задачи статики без ...

...

§ 3. Трещина при плоской деформации

Рассмотрим плоскую область произвольного очертания с трещиной внутри; нагрузка приложена и “в объёме”, и на внешнем крае. Как и при антиплоской деформации, решение строится в два этапа

...

§ 4. Трещинодвижущая сила

Это едва ли не основное понятие механики трещин. Рассмотрим его, следуя

* **R. von Mises**. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse.* 1913, Seiten 582–592.

...

§ 5. Критерий роста трещины

Связанная с энергией $\mathscr{E}$ трещинодвижущая сила F — не единственное воздействие на передний край трещины. Должна быть ещё некая сила сопротивления F_*; рост трещины начинается, когда

...

§ 6. J-интеграл

Одно из самых известных понятий в механике трещин выражается интегралом

$$J = \ldots \tag{6.1}$$

...

§ 7. Коэффициенты интенсивности напряжений

Расчёт прочности тела с трещиной сводится к определению коэффициентов интенсивности напряжений. Методы расчёта таких коэффициентов — как аналитические, так и численные — хорошо освещены в литературе.

Рассмотрим ещё один подход к задачам механики трещин, разработанный

...

§ 8. Модель Barenblatt'a

Неограниченный рост напряжения на краю́ трещины кажется конечно же сомнительным. Сингулярные решения желают поддержки какими-либо дополнительными рассуждениями или использованием иной модели. И такая поддержка была дана́ в работе

...

§ 9. Деформационный критерий

D. S. Dugdale*, а также М. Я. Леонов и В. В. Панасюк** предложили модель, напоминающую построения Баренблатта. Также есть силы сцепления q и равен нулю итоговый коэффициент интенсивности напряжений. Но, во-первых, q имеет иной вид:

...

Второе отличие рассматриваемой модели — в формулировке критерия прочности: трещина начинает расти, когда расхождение берегов в конце свободного участка достигает критического значения δ_* (этот параметр — константа материала), то есть при

...

§ 10. Рост трещин

Пусть нагрузка на тело с трещиной выросла настолько, что выполняется условие

...

§ 11. Упругое поле пéред движущейся трещиной

Рассматривая эту тему

...

* **Dugdale, D. S.** Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1960, Volume 8, Issue 2, pages 100–104.

** **Леонов М. Я.**, **Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твёрдом теле. *Прикладная механика.* 1959, Т. 5, № 4, с. 391–401.

§ 12. Баланс энергии для движущейся трещины

Уравнение баланса энергии в линейной теории ($\Pi = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, {}^4\!\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathrm{K} = \frac{1}{2}\,\rho\,\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}$):

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\mathrm{K} + \Pi\Big)^{\bullet} d\mathcal{V} = \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, d\mathcal{V} + \int\limits_{\mathcal{O}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, d\mathcal{O}. \tag{12.1}$$

...

Библиография

Список книг по механике трещин уже́ вели́к. В нём сто́ит отметить работы Л. М. Качанова [23], Н. Ф. Морозова [38], В. З. Партона и Е. М. Морозова [49], Г. П. Черепанова [65]. Обзор статей есть у ... Экспериментальные данные представлены, например, в [24].

глава 16

КОМПОЗИТЫ

§1. Вводные размышления

Когда глина используется как строительный материал, в неё добавляют измельчённую солому. Работая с эпоксидной смолой, полезно смешать с наполнителем до отвердевания, который может быть порошком, волокнами, кусочками ткани. Это были примеры композитов (композитных материалов, композитных смесей). Новые типы композитов применяются всё шире и шире, заменяя сталь, алюминиевые сплавы и другие популярные однородные материалы.

Композиты могут быть определены как микро-неоднородные материалы, где происходит некое осреднение вместе с новыми свойствами. "Обычная" механика континуумов применима, конечно же, и к композитным материалам тоже. Но едва ли возможно и абсурдно смоделировать каждый аспект композитного материала. Нужен новый подход, который будет иметь дело со сложностью структуры материала. Как для газа, когда вместо описания динамики отдельных молекул мы вводим параметры, такие как "давление", "температура" и другие.

Механика однородного некомпозитного континуума использует лишь одну, макроскопическую длину ℓ. Потому характерный размер это объём, делённый на пло́щадь поверхности), полагая что любые ма́лые объёмы имеют те же свойства, как и конечные объёмы.

Для композита это иначе, там у нас есть три диапазона длины: $\ell \gg \ell' \gg \ell_0$. Наибольший ℓ представляет макроскопические размеры тела. Наименьший ℓ_0 близок к размеру элементов структуры материала, например частиц порошка-наполнителя).

Промежуточный диапазон ℓ' показывает размер так-называемого "представительного" объёма, "единичной ячейки": того довольно ма́лого объёма, где мы можем увидеть специфические свойства этого композита.

В композитах сложная проблема с неоднородным телом расщепляется на две: для тела как целого (макроуровень) и для "представительного" объёма (микроуровень). На макроуровне (диапазон ℓ) композит моделируется как однородная среда с "эффективными свойствами", и "представительные" объёмы играют там роль частиц. На микроуровне (диапазон ℓ_0) поля́ очень неоднородны, но некое осреднение по "представительному" объёму ведёт на макроуровень. Сложная задача для композита как неоднородного тела расщепляется на две: для представительного объёма (микроуровень) и для тела в целом (макроуровень).

Эти мысли, однако, не идеально убедительны. Чтобы убедить больше, мы можем использовать "теорию случайных полей"

...

Механика композитов появилась не очень давно, но нынче она развивается весьма быстро. Из-за высокой трещиностойкости, механика разрушения композитов очень популярна.

§ 2. Эффективные поля

Любое поле в композите обычно представляется суммой $u = u * + u'$, где $u*$ — некоторое сглаженное "эффективное" поле, а u' — быстро осциллирующая флюктуация. Часто предполагается

$$u * (A) = < u > \equiv \mathcal{V}^{-1} \int\limits_{\mathcal{V}} u d\mathcal{V}, \tag{2.1}$$

где $< u >$ есть среднее внутри представительного объёма с центром в точке A. Осреднение (2.1)

...

§ 3. Краевые задачи для представительного объёма

Как упругие модули определяются для однородной среды? Без реальной возможности получить отношение между $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ для точки бесконечно-малого размера, эксперименты проводятся с телами конечных объёмов при так называемом “однородном напряжении” — когда напряжение одно и то же во всех точках тела. В композитах роль точки играет “представительный” объём.

...

§ 4. Вилка Hill'а

Using Voigt and Reuss theories, Hill derived upper and lower bounds on the effective properties of a composite material [**Hill, R. W.** The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proceedings of the Physical Society*, Section A, Volume 65, Issue 5 (May 1952). Pages 349–354.]

The scale separation is motivated by the material properties, at both scales continuum mechanics models the underlying system. Such an approach uses energy equivalence at both scales as proposed in Hill (1972).

Hill R (1972) On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain (pages 131–147)

For a composite material, at least two different materials with known material models and parameters, generate a homogenized material modeled with a predetermined constitutive equation. Determination of material parameters of the homogenized material is a challenging task.

Отметив, что

...

§ 5. Формулы Eshelby

Итак, эффективные модули определяются энергией представительного объёма в первой или второй задачах:

...

§ 6. Эффективные модули для материала со сферическими включениями

В однородной матрице случайным образом, но достаточно равномерно, распределены сферические включения радиусом a. Получившийся композит на макроуровне будет изотропным, его упругие свойства полностью определяются ...

...

§ 7. Метод самосогласования

Выше мы опирались на две задачи для представительного объёма и определяли эффективные модули из равенства энергий. В основе метода самосогласования лежит новая идея: представительный объём помещается в безграничную среду с эффективными свойствами, на бесконечности состояние считается однородным, эффективные модули находятся из некоторых дополнительных условий самосогласования.

Обратимся снова к вопросу об объёмном модуле среды со сферическими включениями. Задача сферически симметрична; для включения по-прежнему

...

§ 8. Принцип Хашина–Штрикмана

Hashin и Shtrikman derived upper and lower bounds for the effective elastic properties of quasi-isotropic and quasi-homogeneous multiphase materials using a variational approach [**Hashin, Z.**; **Shtrikman, S.** A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. Volume 11, Issue 2 (March–April 1963). Pages 127–140.]

Hashin Z., Shtrikman S. (1962) On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 10(4): pages 335–342

Вилка Hill'а основана на обычных экстремальных принципах теории упругости. Специально для механики композитов Hashin и Shtrikman построили очень своеобразный функционал, который на некотором точном решении может иметь как максимум, так и минимум, давая возможность с двух сторон оценивать эффективные модули [67].

Рассмотрим первую из двух задач для представительного объёма

...

Библиография

Книги R. Christensen'а [78] и Б. Е. Победри [80] содержат и основы механики композитов, и постановку не теряющих актуальности проблем. Для са́мого требовательного читателя представляет интерес монография Т. Д. Шермергора [67]. Немало книг посвящено механике разрушения композитов, здесь сто́ит отметить труд Г. П. Черепанова [81].

глава 17

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОМПОЗИТЫ

Периодический композит сделан из повторения, конечного или бесконечного, единичной ячейки.

§ 1. Одномерная задача

В одномерной задаче статики имеем уравнение

...

§ 2. Трёхмерный континуум

Исходим из уравнений в смещениях

...

§ 3. Волокнистая структура

Тензор ${}^4\boldsymbol{\mathcal{A}}$ в этом случае постоянен вдоль оси

...

§ 4. Статика периодического стержня

В уравнениях линейной статики стержня

...

Библиография

Лежащий в основе этой главы асимптотический метод представлен с разной степенью математической скрупулёзности в книгах [82, 83, 79, 80].

глава 18

ВНЕ УПРУГОСТИ, ИЛИ ПЛАСТИЧНОСТЬ

§ 1. Когда упругость исчéрпана

When elasticity is over .....

....

§ 2. Куда уходит энергия

Where goes the energy?

....

Библиография

About some publications on plasticity ....

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Издание 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И.**, **Бобровницкий Ю. И.**, **Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** Использование МКЭ при решении контактной задачи теории упругости с переменной зоной контакта // Известия северо-кавказского научного центра высшей школы (СКНЦ ВШ). Серия естественные науки. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1984. № 1. С. 38–42.
5. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** К решению контактной задачи с помощью метода конечных элементов // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1988. С. 43–48.
6. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
7. **Вениамин И. Блох**. Теория упругости. Харьков: Издательство Харьковского Государственного Университета, 1964. 484 с.
8. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
9. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. «Наука», 1976. 512 с.
10. **Гольденвейзер А. Л.**, **Лидский В. Б.**, **Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 383 с.
11. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.

12. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.
13. **Александр Н. Гузь**. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: "Наукова думка", 1973. 271 с.
14. *Перевод:* **Де Вит Р.** Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.
15. **Джанелидзе Г. Ю.**, **Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.
16. **Димитриенко Ю. И.** Тензорное исчисление: Учебное пособие для вузов. М.: "Высшая школа", 2001. 575 с.
17. **Dorin Ieşan**. Classical and generalized models of elastic rods. 2nd edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. 369 pages
18. **Владимир В. Елисеев**. Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.
19. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод:* **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.
20. **Журавлёв В. Ф.** Основы теоретической механики. 3-е издание, переработанное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 304 с.
21. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.
22. **Кац, Арнольд М.** Теория упругости. 2-е издание, стереотипное. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2002. 208 с.
23. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.
24. **Керштейн И. М.**, **Клюшников В. Д.**, **Ломакин Е. В.**, **Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
25. **Cosserat E.** et **Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
26. **Cottrell, Alan**. Theory of crystal dislocations. Gordon and Breach (Documents on Modern Physics), 1964. 94 p. *Перевод:* **Коттрел А.** Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.

27. **Kröner, Ekkehart** *(i)* Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. *(ii)* Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод:* **Крёнер Э.** Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.
28. **Augustus Edward Hough Love**. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Volume I. Cambridge, 1892. 354 p. Volume II. Cambridge, 1893. 327 p. 4th edition. Cambridge, 1927. Dover, 1944. 643 p. *Перевод:* **Аугустус Ляв** Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
29. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Nonlinear Theory of Elasticity: translated from the Russian by K. A. Lurie. Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 617 p.
30. **Лурье А. И.** Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Theory of Elasticity (translated by A. Belyaev). Springer-Verlag, 2005. 1050 p.
31. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
32. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
33. **George E. Mase**. Schaum's outline of theory and problems of continuum mechanics (Schaum's outline series). McGraw–Hill, 1970. 221 p. *Перевод:* **Джордж Мейз**. Теория и задачи механики сплошных сред. Издание 3-е. URSS, 2010. 320 с.
34. **Ernst Melan**, **Heinz Parkus**. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод:* **Мелан Э.**, **Паркус Г.** Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.
35. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.
36. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е издание. «Наука», 1987. 304 с.

37. **Mindlin, Raymond David** and **Tiersten, Harry F.** Effects of couple-stresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод:* **Миндлин Р. Д.**, **Тирстен Г. Ф.** Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.

38. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.

39. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.

40. **Witold Nowacki**. Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation:* **Nowacki, Witold**. Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод:* **Витольд Новацкий**. Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.

41. **Witold Nowacki**. Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод:* **Новацкий Витольд**. Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.

42. **Witold Nowacki**. Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод:* **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.

43. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е издание. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

44. **Пановко Я. Г.**, **Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.

45. **Пановко Я. Г.**, **Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е издание. «Наука», 1987. 352 с.

46. **Heinz Parkus**. Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод:* **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.

47. **Партон В. З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.

48. **Партон В. З.**, **Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.

49. **Партон В. З.**, **Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е издание. «Наука», 1985. 504 с.

50. **Подстригач Я. С.**, **Бурак Я. И.**, **Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.

51. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.

52. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод:* **Саусвелл Р. В.** Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.

53. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Том 2. 6-е издание. «Лань», 2004. 560 с.

54. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B. V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод:* **Филипп Сьярле** Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.

55. **Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant**. Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. Memoires presentes par divers savants a l'Academie des scienees, t. 14, année 1856. 327 pages. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.

56. **Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant**. Mémoire sur la flexion des prismes .... Journal de mathematiques pures et appliquees, publie par J. Liouville. 2me serie, t. 1, année 1856. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.

57. **Cristian Teodosiu**. Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод:* **Теодосиу К.** Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.

58. **Тимошенко Степан П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.

59. **Тимошенко Степан П.**, **Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.

60. **Stephen P. Timoshenko** and **James N. Goodier**. Theory of Elasticity. 2nd edition. McGraw–Hill, 1951. 506 pages. 3rd edition. McGraw–Hill, 1970. 567 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Джеймс Гудьер**. Теория упругости. 2-е издание. «Наука», 1979. 560 с.

61. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод:* **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.

62. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е издание. «Наука», 1975. 173 с.

63. *Перевод:* **Хеллан К.** Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.

64. *Перевод:* **Циглер Г.** Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.

65. **Черепанов Г. П.**. Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.

66. **Черны́х К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.

67. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.

Колебания и волны

68. **Timoshenko, Stephen P.**; **Young, Donovan H.**; **William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Янг Донован Х.**, **Уильям Уивер**. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

69. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е издание. «Дрофа», 2004. 592 с.

70. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

71. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.

72. **Гринченко В. Т.**, **Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.

73. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод:* **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.

74. **Kolsky, Herbert**. Stress waves in solids. Oxford, Clarendon Press, 1953. 211 p. 2nd edition. Dover Publications, 2012. 224 p. *Перевод:* **Кольский Г.** Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.

75. **Энгельбрехт Ю. К.**, **Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.

76. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.

77. **Григолюк Э. И.**, **Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.

Композиты

78. **Christensen, Richard M.** Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод:* **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.

79. **Кравчук А. С.**, **Майборода В. П.**, **Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.

80. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.

81. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.

82. **Бахвалов Н. С.**, **Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.

83. **Bensoussan A.**, **Lions J.-L.**, **Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.

Метод конечных элементов

84. **Зенкевич О.**, **Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.

85. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.

Механика, термодинамика, электромагнетизм

86. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew**. The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online:* The Feynman Lectures on Physics. Online edition.

87. **Goldstein, Herbert**; **Poole, Charles P.**; **Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison–Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод:* **Голдстейн Г.**, **Пул Ч.**, **Сафко Дж.** Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.

88. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод:* **Парс Л. А.** Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.

89. **Ter Haar, Dirk**. Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод:* **Тер Хаар Д.** Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.

90. **Беляев Н. М.**, **Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.

91. **Бредов М. М.**, **Румянцев В. В.**, **Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.

92. **Феликс Р. Гантмахер** Лекции по аналитической механике. Издание 2-е. «Наука», 1966. 300 с.

93. **Ландау Л. Д.**, **Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.

94. **Лойцянский Л. Г.**, **Лурье А. И.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е издание. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е издание. 719 с.

95. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

96. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е издание. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.

97. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е издание. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

Тензоры и тензорное исчисление

98. **McConnell, Albert Joseph**. Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод:* **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

99. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод:* **Схоутен Я. А.** Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.
100. **Sokolnikoff, I. S.** Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua. 2nd edition. John Wiley & Sons, 1965. 361 pages. *Перевод:* **Сокольников И. С.** Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). «Наука», 1971. 376 с.
101. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Издание 3-е. «Наука», 1967. 664 с.

Вариационные методы

102. **Karel Rektorys**. Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation:* **Rektorys, Karel**. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D. Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод:* **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
103. **Washizu, Kyuichiro**. Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод:* **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
104. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.
105. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Издание 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

Методы возмущений (асимптотические методы)

106. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод:* **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.
107. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод:* **Найфэ Али Х.** Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.
108. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-VCH, 2004. 425 pages.
109. **Боголюбов Н. Н.**, **Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.

110. **Васильева А. Б.**, **Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

111. **Зино И. Е.**, **Тропп Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.

112. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е издание. «Наука», 1981. 400 с.

113. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.

Другие темы математики

114. **Collatz, Lothar**. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод:* **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.

115. **Dwight, Herbert Bristol**. Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод:* **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Издание 4-е. «Наука», 1973. 228 с.

116. **Kamke, Erich**. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод:* **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. «Лань», 2003. 576 с.

117. **Korn, Granino A.** and **Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод:* **Корн Г.**, **Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.

118. **Лаврентьев М. А.**, **Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е издание. «Наука», 1973. 736 с.

119. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Издание 6-е. «Наука», 1974. 176 с.