Vadique Myself

PHYSICS *of* ELASTIC CONTINUA

CONTENTS

chapter 9

RODS

§ 1. Initial concepts

Rod is a thin long body. It is thought of (and modeled) as a spatial curve — the axis of rod, coated with a material (a figure).

The axis of rod is described as a curve by parameterizing the location vector of points of a curve. This is a morphism (a function) of one variable coordinate s,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s). \tag{1.1}$$

Material coating gives at each rod's point a plane figure, perpendicular to the axis — normal section $\Omega(s)$.

...

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t)$ is a parametric curve parameterized by parameter t. If $dt \neq d\ell$, then a parameterization is not natural. For the natural parameterization $dt = d\ell$, where

$$d\ell = \sqrt{\left(dq^1\right)^2 + \left(dq^2\right)^2 + \left(dq^3\right)^2}.$$

Many different functions draw the same curve. But among various parametrizations of a curve, the parametrization by the arc length is special, it is also called the *natural parametrization.*

The length of an infinitesimal piece of a curve is described by the Πυϑαγόρας-formula

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

where $dx \equiv dq^1,\ dy \equiv dq^2,\ dz \equiv dq^3$ are infinitesimal changes of coordinates. $d\ell$ is called the differential length, that is the length of an almost straight very small piece of a curve.

$\boldsymbol{c}(s)$ is a parametric curve parameterized by the arc length (the natural parametrization), its derivative by the arc length parameter is denoted as $\boldsymbol{c}' \equiv \dfrac{d\boldsymbol{c}}{ds}$.

If the arc length (natural) parametrization $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ is used, then the length of derivative $\boldsymbol{r}'(s) \equiv \dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$ (of the tangent vector) is always equal to the one unit of length:

$$\boldsymbol{r}(s) = q_i(s)\,\boldsymbol{e}_i(s) = q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{r}'(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} = \frac{dq_i(s)}{ds}\,\boldsymbol{e}_i(s) = q_i'(s)\,\boldsymbol{e}_i(s),$$

$$\|\boldsymbol{r}'(s)\|^2 \equiv \boldsymbol{r}'(s) \cdot \boldsymbol{r}'(s) = q_i'(s)\,\boldsymbol{e}_i \cdot q_j'(s)\,\boldsymbol{e}_j = q_i'(s)\,q_j'(s)\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\bigl(q_i'(s)\bigr)^2,$$

$$ds = \sqrt{\left(dq_1\right)^2 + \left(dq_2\right)^2 + \left(dq_3\right)^2} \;\;\Rightarrow\;\; ds^2 = \sum_{i=1}^{3}\bigl(dq_i(s)\bigr)^2,$$

$$\|\boldsymbol{r}'(s)\|^2 = \frac{\sum_{i=1}^{3}\bigl(dq_i(s)\bigr)^2}{\left(ds\right)^2} = 1 \;\;\Rightarrow\;\; \|\boldsymbol{r}'(s)\| = 1.$$

...

In each section we select two perpendicular axes x_α with co-directed unit vectors $\boldsymbol{e}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$. The reason of selection for all rod sections is the same, for example, the main axes of inertia of the section are chosen everywhere.

The actual axis and the initial axis are different

When vector $\mathring{\boldsymbol{e}}_3$ is directed along the tangent to the initial axis with location $\mathring{\boldsymbol{r}}$, it is written as $\mathring{\boldsymbol{r}}' \equiv \dfrac{\partial \mathring{\boldsymbol{r}}}{\partial s} \equiv \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial s} \equiv \mathring{\boldsymbol{e}}_3$.

Vector $\boldsymbol{e}_3 \equiv \boldsymbol{k}$ is directed along the tangent (tangentially) to the actual axis.

Together with the unit vector, tangent to the actual axis

$$\boldsymbol{r}' \equiv \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \equiv \boldsymbol{r}_{\partial s} \equiv \boldsymbol{e}_3 \equiv \boldsymbol{k},$$

we'll get for each s a triple of mutually perpendicular unit vectors.

The curvature and the torsion of the rod's axis can be described by vector $\boldsymbol{\psi} = \psi_j \boldsymbol{e}_j$:

$$\boldsymbol{e}'_j = \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{e}_j , \quad \boldsymbol{\psi} = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}'_j . \tag{1.2}$$

For a cylindrical (prismatic) rod $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{0}$.

However, (1.2) is only an initial concept of vector $\boldsymbol{\psi}$ as of geometric features. Further in § 2, after adopting the material structure of a rod, a concept of $\boldsymbol{\psi}$ will change.

Moreover, at each point of the rod's axis, thought of as a curve, there's also another triple of mutually perpendicular unit vectors, the one with the normal and the binormal vectors.

Tangent $\boldsymbol{T}$, normal $\boldsymbol{N}$ and binormal $\boldsymbol{B}$ vectors, together called the *Frenet–Serret frame*, are defined as:

- ✓ $\boldsymbol{T}$ is the unit vector tangent to a curve. The length of the tangent vector is always one unit, if the natural (arc length) parametrization of a curve is used. The tangent vector points to where a curve continues further.
- ✓ $\boldsymbol{N}$ is the normal unit vector, the derivativeof $\boldsymbol{T}$ by the curve's parameter (for instance, the arc length of a curve). The normal vector is always perpendicular to the tangent vector and points towards the center of curvature. It is divided by its length $\|\boldsymbol{N}\|$ to be the one unit long.
- ✓ $\boldsymbol{B}$ is the binormal unit vector, the "$\times$"-product ("cross product") of $\boldsymbol{T}$ and $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$.

The Frenet–Serret formulas describe the derivatives of tangent, normal and binormal unit vectors through relations with each other.

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} &= \kappa \boldsymbol{N}, \\ \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} &= -\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}, \\ \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} &= -\tau \boldsymbol{N}, \end{aligned}$$

where ${}^{d}\!/_{ds}$ denotes the derivative by the arc length, κ is the curvature and τ is the curve's torsion. The associated collection — $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$, κ, τ — is called the Frenet–Serret apparatus.

Two scalars κ and τ effectively define the curvature and the torsion of a space curve. Intuitively, the curvature measures the deviation of a curve from a straight line, while the torsion measures the deviation of a curve from being planar.

Two functions $\kappa(s)$ and $\tau(s)$ completely define the geometry of a curve, because they are the coefficients of a system of ordinary differential equations for $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ and $\boldsymbol{B}$. Knowing $\boldsymbol{T}(s)$, we'll obtain $\boldsymbol{r}(s)$ via an integration of what? with an accuracy up to a constant rigid movement without deformations.

...

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}'$$

The derivative of $\boldsymbol{T}$ consists of two multipliers — the curvature κ and the unit normal vector $\boldsymbol{N}$

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \kappa\boldsymbol{N} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{T}' = \kappa\boldsymbol{N}$$

Curvature κ is equal to the magnitude (length) of vector $\boldsymbol{N}$ (the derivative of vector $\boldsymbol{T}$, the second derivative of location vector $\boldsymbol{r}$)

$$\kappa = \|\boldsymbol{N}\| = \|\boldsymbol{T}'\| = \left\|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right\| = \|\boldsymbol{r}''\| = \left\|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right\|$$

Vector $\boldsymbol{N}$ itself is divided by its length thus its length is equal to the one unit.

$$\boldsymbol{N} = \frac{\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}}{\left\|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right\|} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{T}'}{\|\boldsymbol{T}'\|}$$

The radius of curvature is the reciprocal of curvature.

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \boldsymbol{N} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{N}$$

...

$$\kappa \geq 0$$

The Frenet–Serret frame is defined only if the curvature is nonzero ($\kappa > 0$), it is not defined if $\kappa = 0$.

A line with the nonzero curvature $\kappa \neq 0$ is considered a curve.

The zero curvature implies that a line is straight, and it lies in a plane, making the torsion equal to zero too ($\tau = 0$).

...

$\boldsymbol{T}$ always has the unit magnitude (length). Since the length of $\boldsymbol{T}$ is constant, then $\boldsymbol{N}$ — the derivative of $\boldsymbol{T}$ and the second derivative of location vector $\boldsymbol{r}$ — is always perpendicular to $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T} = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{T}' \cdot \boldsymbol{T} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T} = 0.$$

Vectors of the Frenet–Serret frame make an orthonormal basis $\boldsymbol{f}_i$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{T},\;\; \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{N},\;\; \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{B}.$$

The location vector in the Frenet–Serret basis

$$\boldsymbol{r}(s) = q_j(s)\,\boldsymbol{f}_j(s) = q_1(s)\underbrace{\boldsymbol{f}_1(s)}_{\boldsymbol{T}} + q_2(s)\underbrace{\boldsymbol{f}_2(s)}_{\boldsymbol{N}} + q_3(s)\underbrace{\boldsymbol{f}_3(s)}_{\boldsymbol{B}}.$$

The tensor version of the Frenet–Serret formulas

$$\boldsymbol{f}_i{}' = {}^2\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{f}_i\,. \tag{1.3}$$

The Frenet–Serret formulas written using the matrix notation

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{N}' \\ \boldsymbol{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

Tensor ${}^2\boldsymbol{d}$ is skew-symmetric, so it can be represented via the companion pseudovector (§ ??.??). This pseudovector is known as the Darboux vector.

$$\boldsymbol{D} = \tau\boldsymbol{T} + \kappa\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{D} = \tau\boldsymbol{T} + 0\boldsymbol{N} + \kappa\boldsymbol{B}$$

With the Darboux vector, the Frenet–Serret formulas turn into the following:

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{T},$$
$$\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{N},$$
$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}$$

or as the vector version of (1.3)

$$\boldsymbol{f}_i{}' = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{f}_i\,. \tag{1.4}$$

The Darboux vector is the angular velocity vector of the Frenet–Serret frame.

...

Approximate applied theories of rods like the "strength of materials" use such concepts as internal force $\boldsymbol{Q}$ and internal moment $\boldsymbol{M}$. The following relations connect them with the stress tensor

$$\boldsymbol{Q}(s) = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{k})}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\tau}\, d\Omega\,, \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{M}(s) = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{k})}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\tau}\, d\Omega\,. \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{x} = x_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

...

These thoughts about geometry and about mechanics — in particular, about internal force (1.5) and internal moment (1.6) — concern only some unique single configuration of a rod. It's meaningless to continue these thoughts, because in reality plane and normal sections do not remain plane and normal after deforming.

synonyms for "deplanations"

warp, warping = деформация (deformation, strain), искривление, искажение (distort, distortion), перекóс (skew), перекоси́ть, перекáшиваться, корóбиться, покорóбить, короблéние, becoming twisted or bent

And the addition of some assumptions-hypotheses to the model, like "there are no warping (deplanations)" and initially plane sections remain plane* introduces essential contradictions with reality. Enough to recall just one fact that without deplanations it's impossible to acceptably describe the torsion of a rod (and not only torsion).

The very reasonable approach to modeling deformations of an elastic rod consists in asymptotic splitting of the three-dimensional problem with a small thickness. But for a complex asymptotic procedure it would be much simpler to have whatever solution version aforehand. And the direct approach, when the one-dimensional model of a rod is a material line, gives such a version.

The primary question for building the one-dimensional model: what degrees of freedom — besides translation — do the particles of a material line possess?

It is known that rods are sensitive to the moment loads. And the presence of moments among generalized forces indicates the presence of rotational degrees of freedom. Therefore as the one-dimensional model of a rod it is reasonable to take the Cosserat line — it consists of infinitesimal absolutely rigid bodies. However, another new degrees of freedom may also appear — as for thin-walled rods, described in the dedicated chapter (chapter **??**).

* The two very popular beam models exist which postulate the hypothesis about the absence of deplanations. In the Euler–Bernoulli beam theory, shear deformations are neglected, plane sections remain plane and perpendicular to the axis. In the Timoshenko beam theory there's a constant transverse shear along the section, so plane sections still remain plane, but they are no longer perpendicular to the axis.

In the mechanics of a continuous elastic media, the place of rods is special. At first, the moments play here the main role, not the role of the small additions as in a three-dimensional Cosserat continuum. At second, the rods can be used to test models with the additional degrees of freedom, before the presence of these degrees will be researched for the three-dimensional models.

The following section presents and describes a simple one-dimensional Cosserat-like moment model.

§ 2. Kinematics of Cosserat lines

Model described further is a simplified version of chapter **??**.

There's no more a triple of material coordinates q_i, but the only one — s. It may be the arc length parameter in the initial configuration. The motion of a particle over time is described by the location vector $\boldsymbol{r}(s,t)$ and the rotation tensor $\boldsymbol{O}(s,t)$. Linear and angular (**??**, § **??**.**??**) velocities of a rod's particle are

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}, \tag{2.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\omega} = -\tfrac{1}{2}\big(\dot{\boldsymbol{O}} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}\big)_{\times}. \tag{2.2}$$

Deformation of a rod as a Cosserat line is defined by two vectors

$$\boldsymbol{\Gamma} \equiv \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}', \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\kappa} \equiv -\tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{O}' \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}\big)_{\times} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{O}' = \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{O}. \tag{2.4}$$

$$\Big(\, \mathring{\boldsymbol{r}}(s) \equiv \boldsymbol{r}(s,0) \,\Big)$$

$$\|\boldsymbol{e}_3\| = \|\mathring{\boldsymbol{e}}_3\| = 1 = \mathsf{constant}$$

(2.3) and (2.4) are really the deformation vectors, it follows from their equality to zero on movements of a body as a rigid whole (.... add some equation(s) here describing movements as a rigid whole .....).

Further we will clarify the idea of the first deformation vector $\boldsymbol{\Gamma}$. Without a loss of universality, the parameter s is the initial arc length, the third initial basis vector $\mathring{\boldsymbol{e}}_3$ is directed along the tangent in the initial configuration: $\mathring{\boldsymbol{e}}_3 = \mathring{\boldsymbol{r}}'$. And then

$$\boldsymbol{\Gamma} \equiv \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}', \;\; \mathring{\boldsymbol{r}}' = \mathring{\boldsymbol{e}}_3 , \;\; \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{e}_3 \\ \Rightarrow \;\; \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{e}_3 , \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{e}_3 , \;\; \|\boldsymbol{r}'\|^2 = \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}' = \left(\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{e}_3\right) \cdot \left(\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{e}_3\right) \\ = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} + 2\boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 ,$$

$$\|\boldsymbol{r}'\| = \sqrt{\|\boldsymbol{\Gamma}\|^2 + 2\Gamma_3 + 1} ,$$

$$\|\boldsymbol{r}'\| - 1 = \sqrt{\|\boldsymbol{\Gamma}\|^2 + 2\Gamma_3 + 1} - 1 = \Gamma_3 + \infty^{-1}\!\left(\|\boldsymbol{\Gamma}\|^2\right) . \qquad (2.6)$$

Equality (2.6) describes a relative elongation. Roughly speaking, component $\Gamma_3 \equiv \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{e}_3$ can be considered an elongation, and components $\Gamma_1 \equiv \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{e}_1$, $\Gamma_2 \equiv \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{e}_2$ present a transverse shear. It's more accurate to rely on formulas (2.5) and (2.6).

......

The Cosserat-like model of a rod doesn't have a section as a plane figure.

....

§ 3. Balance of forces and moments

Possible loads acting on a rod as the Cosserat line are forces and moments: on infinitesimal element ds of a rod act external force $\boldsymbol{q}ds$ and external moment $\boldsymbol{m}ds$. The internal interactions will be force $\boldsymbol{Q}(s)$ and moment $\boldsymbol{M}(s)$ — this is the action of the particle with coordinate $s{+}0$ on the particle with $s{-}0$. The action–reaction principle gives that a reverse (a change of direction) of coordinate s changes signs of $\boldsymbol{Q}$ and $\boldsymbol{M}$.

...

§ 4. Principle of virtual work and consequences

For a piece of rod $s_0 \leq s \leq s_1$ formulation of the principle is as follows

......

Conventionally $\boldsymbol{a}$ is the tensor of stiffness for bending and twisting, $\boldsymbol{b}$ is the tensor of stiffness for (ex)tension and shear, and $\boldsymbol{c}$ is the tensor of crosslinks.

Stiffness tensors rotate along with a particle:

...

§ 5. Classical Kirchhoff's model

It is also called the *Kirchhoff's rod theory*.

Until now functions $\boldsymbol{r}(s,t)$ and $\boldsymbol{O}(s,t)$ were independent. The Kirchhoff's classical theory postulates the internal con*strain*t

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{r}_{\partial s} = \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}_{\partial s} \text{ or } \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{r}}'. \tag{5.1}$$

Having the idea of vector $\boldsymbol{\Gamma}$ (2.5), here we can tell that: (1) a rod is non-extensible, (2) there are no transverse shears.

If basis vector $\mathring{\boldsymbol{e}}_3$ was directed along the tangent to the axis in the initial configuration, then it will remain on the tangent also after deforming. The rod particles rotate only together with the tangent to the axis and around it.

Уравнения баланса сил и моментов (импульса и момента импульса) не меняются от введения связи (5.1). Но локальное вариационное соотношение (...) становится короче:

...

§ 6. Euler's problem about stability of rods

Рассматривается прямой стержень, защемлённый на одном конце и нагруженный силой $\boldsymbol{P}$ на другом (рисунок ?? 123 ??). Сила “мёртвая” (не меняется в процессе деформирования)

...

§ 7. Variational equations

In the nonlinear mechanics of elastic media variational equations are useful, which describe a small change in the current configuration (§ **??**.**??**).

Variating equations of the complete system of the Cosserat model, we get

$$\delta \boldsymbol{Q}' + \delta \boldsymbol{q} = \rho \big(\boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\varepsilon} \big)^{\bullet\bullet},$$
$$\delta \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{r}' \times \delta \boldsymbol{Q} + \delta \boldsymbol{m} = \ldots$$

...

§ 8. Non-shear model with (ex)tension

Kirchhoff's model with an internal constraint $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{0}$ (5.1) doesn't describe the simplest case of a straight rod extension/compression. This nuisance disappears with "softening" of the con*strain*t, for example by adding the possibility of (ex)tension and inhibiting only the transverse shear

$$\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma \boldsymbol{e}_3 \;\Leftrightarrow\; \Gamma_\alpha = 0 \tag{8.1}$$

...

§ 9. Mechanics of flexible thread

A thread is a momentless rod.

A flexible thread (chain) is simpler than a rod, because its particles are "simple" material points with only translational degrees of freedom. Therefore среди нагрузок нет моментов, только "линейные" силы — внешние распределённые $\boldsymbol{q}$ и внутренние сосредоточенные $\boldsymbol{Q}$. Движение нити полностью определяется одним вектором-радиусом $\boldsymbol{r}(s,t)$, а инерционные свойства — линейной плотностью $\rho(s)$.

Вот принцип виртуальной работы для куска́ нити $s_0 \leq s \leq s_1$

$$\int\limits_{s_0}^{s_1} \Big(\big(\boldsymbol{q} - \rho \ddot{\boldsymbol{r}} \big) \cdot \delta \boldsymbol{r} - \delta \Pi \Big) ds + \Big[\boldsymbol{Q} \cdot \delta \boldsymbol{r} \Big]_{s_0}^{s_1} = 0. \tag{9.1}$$

...

Механика нити детально описана в книге [35].

§ 10. Linear theory

В линейной теории внешние воздействия считаются малыми, а отсчётная конфигурация — ненапряжённым состоянием покоя. Уравнения в вариациях в этом случае дают

...

§ 11. Case of small thickness

Когда относительная толщина стержня мала́, тогда модель типа Cosserat уступает место классической. Понятие “толщина” определяется соотношением жёсткостей: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$ — разных единиц измерения; полагая $\boldsymbol{a} = \hbar^2 \widehat{\boldsymbol{a}}$ and $\boldsymbol{c} = \hbar \widehat{\boldsymbol{c}}$, where $\hbar$ is some scope of length, получим тензоры $\widehat{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{b}$ and $\widehat{\boldsymbol{c}}$ с одной и той же единицей. Подбирая $\hbar$ так, чтобы сблизились характерные значения тензоров $\widehat{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{b}$ and $\widehat{\boldsymbol{c}}$, найдём equivalent thickness h стержня (для реальных трёхмерных стержней h где-то на уровне диаметра сечения).

Представив $\boldsymbol{Q}$ and $\boldsymbol{M}$ через векторы бесконечномалой линейной деформации

...

Переход модели типа Cosserat в классическую кажется более очевидным, если непосредственно интегрировать уравнения (...)

...

§ 12. Saint-Venant's problem

Трудно переоценить ту роль, которую играет в механике стержней классическое решение Saint-Venant. О нём уже́ шла речь в § **??**.**??**.

Вместо условий ...

...

§ 13. Finding stiffness by energy

Для определения тензоров жёсткости $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ одномерной модели достаточно решений трёхмерных задач для стержня. Но тут возникают два вопроса: какие именно задачи рассматривать и что нужно взять из решений?

Saint-Venant's problem выделяется среди прочих, ведь оттуда берётся жёсткость на кручение.

Вдобавок есть много точных решений, получаемых таким путём: задаётся поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, определяется $\breve{\boldsymbol{\tau}} = {}^4\boldsymbol{\mathcal{C}} \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}$, затем находятся объёмные $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \breve{\boldsymbol{\tau}}$ и поверхностные $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{n} \cdot \breve{\boldsymbol{\tau}}$ нагрузки.

But что делать с решением? Ясно, что $\boldsymbol{Q}$ and $\boldsymbol{M}$ в стержне — это интегралы по сечению (...). And совсем не ясно, what принять за смещение и поворот in a one-dimensional model. Если взять, for example, such a version (the index of $\boldsymbol{u}$ shows the dimensions of the model)

$$\boldsymbol{u}_1(z) = \Omega^{-1} \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{x}, z)\, d\Omega, \;\; \boldsymbol{\theta}(z) = \tfrac{1}{2}\, \Omega^{-1} \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}_3\, d\Omega,$$

то чем другие возможные представления хуже?

Помимо $\boldsymbol{Q}$ and $\boldsymbol{M}$, есть ещё величина, не вызывающая сомнений — упругая энергия. Естественно потребовать, чтобы в одномерной и в трёхмерной моделях энергии на единицу длины совпали. При этом, чтобы уйти от различий в трактовках $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{\theta}$, будем исходить из complementary energy $\widehat{\Pi}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{Q})$:

$$\widehat{\Pi}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{Q}) = \int\limits_{\Omega} potentialenergydensity_3\, d\Omega$$

...

§ 14. Variational method of building one-dimensional model

Мы только что определили жёсткости стержня, полагая, что одномерная модель линии типа Cosserat адекватно описывает поведение трёхмерной модели. “Одномерные” представления ассоциируются со следующей картиной смещений в сечении:

$$\boldsymbol{u}(s, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}(s) + \boldsymbol{\theta}(s) \times \boldsymbol{x}. \tag{14.1}$$

Однако, такое поле $\boldsymbol{u}$ не удовлетворяет уравнениям трёхмерной теории(??добавить, каким именно). Невозможно пренебречь возникающими невязками в дифференциальных уравнениях и краевых условиях.

Формально “чистым” является вариационный метод сведения трёхмерной проблемы к одномерной, называемый иногда методом внутренних связей. Аппроксимация (14.1) подставляется в трёхмерную формулировку вариационного принципа минимума потенциальной энергии (**??**, § **??**.**??**)

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathcal{V}} \Big(\Pi(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} \Big) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u} \, do \to \min,$$

которая после интегрирования по сечению становится одномерной. Если $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{\theta}$ варьируются независимо, получаем модель типа Коссера. В случае $\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{t}$ приходим к классической модели.

Метод внутренних связей привлекателен, его продолжают “переоткрывать”. С его помощью возможно моделировать тела с неоднородностью и анизотропией, он легко обобщается на динамику, если $\boldsymbol{f}$ дополнить неварьируемой динамической добавкой до $\boldsymbol{f} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}$. Можно рассматривать и стержни переменного сечения, и даже нелинейно упругие, ведь вариационная постановка есть (гл. **??**).

Аппроксимацию (14.1) можно дополнить слагаемыми с внутренними степенями свободы. Понимая необходимость учёта депланаций, некоторые авторы

...

...

For variational construction of one-dimensional models it's convenient to use the Reissner–Hellinger principle (§ ??.??) with independent approximation of stresses [18]. In this case, some consistency between $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{\tau}$ is needed.

Many advantages of the variational method are opposed by the one, but significant disadvantage. Introducing approximations within cross-sections, we impose our unreal simplifications on reality. The variational method is more suitable for applied calculations.

§ 15. Asymptotic splitting of three-dimensional problem

Asymptotic splitting can be considered fundamental for describing the mechanics of rods. One-dimensional models paint only the part of a picture, two-dimensional problems in cross-sections paint the other part, and together they present the solution of a three-dimensional problem for a small thickness.

How to introduce a small parameter χ into a three-dimensional problem? The easiest way to do it is through representation of the location vector (§ 1):

$$\boldsymbol{R}(x_\alpha, s) = \chi^{-1} \boldsymbol{r}(s) + \boldsymbol{x}, \;\; \boldsymbol{x} \equiv x_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha(s), \;\; \alpha = 1, 2.$$

For an orthonormal basis, upper and lower indices do not differ

$$q_i = q^i, \; \boldsymbol{R}^i = \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_{\partial i} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q^i}.$$

Three coordinates are

$$q^1 = x_1, \;\; q^2 = x_2, \;\; q^3 = s.$$

The basis vectors are

$$\boldsymbol{e}_1,\;\; \boldsymbol{e}_2,\;\; \boldsymbol{t} \equiv \boldsymbol{e}_3 .$$

Representation of the Hamilton operator $\boldsymbol{\nabla}$

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{R}^i \frac{\partial}{\partial q^i} = \boldsymbol{\nabla}_{\perp} + \mathrm{v}^{-1} \boldsymbol{t} \left(\partial_s - \psi_t \mathrm{D} \right), \;\; \boldsymbol{\nabla}_{\perp} \equiv \boldsymbol{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}},$$
$$\mathrm{v} \equiv \boldsymbol{R}_{\partial 1} \times \boldsymbol{R}_{\partial 2} \cdot \boldsymbol{R}_{\partial 3} = \chi^{-1} + \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\psi}_{\perp} \times \boldsymbol{x}, \;\; \mathrm{D} \equiv \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\nabla}_{\perp},$$
$$\boldsymbol{\psi}_{\perp} + \psi_t \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\psi}$$

(the meaning of vector $\boldsymbol{\psi}$ is the same as in § 1).

The Cauchy stress tensor

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\perp} + \sigma_t \boldsymbol{t}\boldsymbol{t} + 2 \boldsymbol{t} \boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{\mathsf{S}}, \;\; \boldsymbol{\tau}_{\perp} \equiv \tau_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_{\alpha} \boldsymbol{e}_{\beta}, \;\; \boldsymbol{\tau}_{\parallel} \equiv \tau_{3\alpha} \boldsymbol{e}_{\alpha} .$$

...

§ 16. Thermal deformation and stress

The direct approach, very efficient for describing one-dimensional Cosserat and Kirchhoff models, isn't applicable for problems of thermoelasticity. The transition from the three-dimensional model to the one-dimensional can be realized either by the variational or the asymptotic way.

Описанный в § 14 вариационный метод целиком переносится на термоупругость — включая задачи с неоднородностью и анизотропией, переменным сечением, динамические и даже нелинейные. Для этого нужно (§ **??**.**??**) in the Lagrange principle of minimum potential energy заменить потенциал $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon})$ свободной энергией

...

Bibliography

Unlike other topics, rods are presented very modestly in books. The narration style of "the strength of materials" prevails there, and more exact and perfect approaches seem impossible or unnecessary to the majority of authors.

But many interesting articles have been published, their reviews are presented, for example, by S. Antman [1], В. В. Елисеев [18] and А. А. Илюхин [**?**].

LIST OF PUBLICATIONS

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Издание 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И.**, **Бобровницкий Ю. И.**, **Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** Использование МКЭ при решении контактной задачи теории упругости с переменной зоной контакта // Известия северо-кавказского научного центра высшей школы (СКНЦ ВШ). Серия естественные науки. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1984. № 1. С. 38–42.
5. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** К решению контактной задачи с помощью метода конечных элементов // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1988. С. 43–48.
6. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
7. **Вениамин И. Блох**. Теория упругости. Харьков: Издательство Харьковского Государственного Университета, 1964. 484 с.
8. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
9. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. «Наука», 1976. 512 с.
10. **Гольденвейзер А. Л.**, **Лидский В. Б.**, **Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 383 с.
11. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.

12. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.

13. **Александр Н. Гузь**. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: "Наукова думка", 1973. 271 с.

14. *Перевод:* **Де Вит Р.** Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.

15. **Джанелидзе Г. Ю.**, **Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.

16. **Димитриенко Ю. И.** Тензорное исчисление: Учебное пособие для вузов. М.: "Высшая школа", 2001. 575 с.

17. **Dorin Ieşan**. Classical and generalized models of elastic rods. 2nd edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. 369 pages

18. **Владимир В. Елисеев**. Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.

19. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод:* **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.

20. **Журавлёв В. Ф.** Основы теоретической механики. 3-е издание, переработанное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 304 с.

21. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.

22. **Кац, Арнольд М.** Теория упругости. 2-е издание, стереотипное. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2002. 208 с.

23. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.

24. **Керштейн И. М.**, **Клюшников В. Д.**, **Ломакин Е. В.**, **Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.

25. **Cosserat E.** et **Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.

26. **Cottrell, Alan**. Theory of crystal dislocations. Gordon and Breach (Documents on Modern Physics), 1964. 94 p. *Перевод:* **Коттрел А.** Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.

27. **Kröner, Ekkehart** *(i)* Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. *(ii)* Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод:* **Крёнер Э.** Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.

28. **Augustus Edward Hough Love**. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Volume I. Cambridge, 1892. 354 p. Volume II. Cambridge, 1893. 327 p. 4th edition. Cambridge, 1927. Dover, 1944. 643 p. *Перевод:* **Аугустус Ляв** Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.

29. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Nonlinear Theory of Elasticity: translated from the Russian by K. A. Lurie. Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 617 p.

30. **Лурье А. И.** Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Theory of Elasticity (translated by A. Belyaev). Springer-Verlag, 2005. 1050 p.

31. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.

32. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.

33. **George E. Mase**. Schaum's outline of theory and problems of continuum mechanics (Schaum's outline series). McGraw–Hill, 1970. 221 p. *Перевод:* **Джордж Мейз**. Теория и задачи механики сплошных сред. Издание 3-е. URSS, 2010. 320 с.

34. **Ernst Melan**, **Heinz Parkus**. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод:* **Мелан Э.**, **Паркус Г.** Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.

35. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.

36. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е издание. «Наука», 1987. 304 с.

37. **Mindlin, Raymond David** and **Tiersten, Harry F.** Effects of couple-stresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод:* **Миндлин Р. Д.**, **Тирстен Г. Ф.** Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.

38. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.

39. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.

40. **Witold Nowacki**. Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation:* **Nowacki, Witold**. Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод:* **Витольд Новацкий**. Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.

41. **Witold Nowacki**. Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод:* **Новацкий Витольд**. Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.

42. **Witold Nowacki**. Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод:* **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.

43. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е издание. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

44. **Пановко Я. Г.**, **Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.

45. **Пановко Я. Г.**, **Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е издание. «Наука», 1987. 352 с.

46. **Heinz Parkus**. Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод:* **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.

47. **Партон В. З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.
48. **Партон В. З.**, **Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.
49. **Партон В. З.**, **Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е издание. «Наука», 1985. 504 с.
50. **Подстригач Я. С.**, **Бурак Я. И.**, **Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
51. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.
52. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод:* **Саусвелл Р. В.** Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.
53. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Том 2. 6-е издание. «Лань», 2004. 560 с.
54. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B. V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод:* **Филипп Сьярле** Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.
55. **Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant**. Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. Memoires presentes par divers savants a l'Academie des scienees, t. 14, année 1856. 327 pages. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.
56. **Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant**. Mémoire sur la flexion des prismes .... Journal de mathematiques pures et appliquees, publie par J. Liouville. 2me serie, t. 1, année 1856. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.
57. **Cristian Teodosiu**. Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод:* **Теодосиу К.** Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.
58. **Тимошенко Степан П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.

59. **Тимошенко Степан П.**, **Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.

60. **Stephen P. Timoshenko** and **James N. Goodier**. Theory of Elasticity. 2nd edition. McGraw–Hill, 1951. 506 pages. 3rd edition. McGraw–Hill, 1970. 567 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Джеймс Гудьер**. Теория упругости. 2-е издание. «Наука», 1979. 560 с.

61. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод:* **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.

62. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е издание. «Наука», 1975. 173 с.

63. *Перевод:* **Хеллан К.** Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.

64. *Перевод:* **Циглер Г.** Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.

65. **Черепанов Г. П.**. Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.

66. **Черны́х К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.

67. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.

Oscillations and waves

68. **Timoshenko, Stephen P.**; **Young, Donovan H.**; **William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Янг Донован Х.**, **Уильям Уивер**. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

69. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е издание. «Дрофа», 2004. 592 с.

70. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

71. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.

72. **Гринченко В. Т.**, **Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.

73. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод:* **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.

74. **Kolsky, Herbert**. Stress waves in solids. Oxford, Clarendon Press, 1953. 211 p. 2nd edition. Dover Publications, 2012. 224 p. *Перевод:* **Кольский Г.** Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.

75. **Энгельбрехт Ю. К.**, **Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.

76. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.

77. **Григолюк Э. И.**, **Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.

Composites

78. **Christensen, Richard M.** Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод:* **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.

79. **Кравчук А. С.**, **Майборода В. П.**, **Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.

80. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.

81. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.

82. **Бахвалов Н. С.**, **Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.

83. **Bensoussan A.**, **Lions J.-L.**, **Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.

The finite element method

84. **Зенкевич О.**, **Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.

85. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.

Mechanics, thermodynamics, electromagnetism

86. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew**. The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online:* The Feynman Lectures on Physics. Online edition.

87. **Goldstein, Herbert**; **Poole, Charles P.**; **Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison–Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод:* **Голдстейн Г.**, **Пул Ч.**, **Сафко Дж.** Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.

88. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод:* **Парс Л. А.** Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.

89. **Ter Haar, Dirk**. Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод:* **Тер Хаар Д.** Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.

90. **Беляев Н. М.**, **Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.

91. **Бредов М. М.**, **Румянцев В. В.**, **Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.

92. **Феликс Р. Гантмахер** Лекции по аналитической механике. Издание 2-е. «Наука», 1966. 300 с.

93. **Ландау Л. Д.**, **Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.

94. **Лойцянский Л. Г.**, **Лурье А. И.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е издание. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е издание. 719 с.

95. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

96. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е издание. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.

97. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е издание. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

Tensors and tensor calculus

98. **McConnell, Albert Joseph**. Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод:* **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

99. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод:* **Схоутен Я. А.** Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.

100. **Sokolnikoff, I. S.** Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua. 2nd edition. John Wiley & Sons, 1965. 361 pages. *Перевод:* **Сокольников И. С.** Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). «Наука», 1971. 376 с.

101. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Издание 3-е. «Наука», 1967. 664 с.

Variational methods

102. **Karel Rektorys**. Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation:* **Rektorys, Karel**. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D. Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод:* **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.

103. **Washizu, Kyuichiro**. Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод:* **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.

104. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.

105. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Издание 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

Perturbation methods (asymptotic methods)

106. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод:* **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.

107. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод:* **Найфэ Али Х.** Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.

108. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-VCH, 2004. 425 pages.

109. **Боголюбов Н. Н.**, **Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.

110. **Васильева А. Б.**, **Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

111. **Зино И. Е.**, **Тропп Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.

112. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е издание. «Наука», 1981. 400 с.

113. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.

Other topics of mathematics

114. **Collatz, Lothar**. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод:* **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.

115. **Dwight, Herbert Bristol**. Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод:* **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Издание 4-е. «Наука», 1973. 228 с.

116. **Kamke, Erich**. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод:* **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. «Лань», 2003. 576 с.

117. **Korn, Granino A.** and **Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод:* **Корн Г.**, **Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.

118. **Лаврентьев М. А.**, **Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е издание. «Наука», 1973. 736 с.

119. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Издание 6-е. «Наука», 1974. 176 с.