Vadique Myself

PHYSICS *of* ELASTIC CONTINUA

CONTENTS

chapter 5

MICROPOLAR THREE-DIMENSIONAL CONTINUUM

§1. Introduction to the linear micropolar theory

The characteristic feature of a classical elastic media (chapter **??** and **??**) is that they are made from the "simple points". A particle of a classical continuum has only the translational degrees of freedom, and the only single vector $\boldsymbol{r}(q^i, t)$ describes its movement. Therefore the external loads in such a model are only the forces, the volume and the surface ones. There are no moments.

But it is not so hard to build the more complex models of a continuous medium, where the particles have not only the degrees of the translation freedom, but also the some additional ones. These new degrees of freedom are related to the new loads. The most natural of the non-classical models of a three-dimensional medium was proposed by the Cosserat brothers in 1909 [25]. Every particle of the Cosserat's continuum is an infinitesimal absolutely rigid body with the six degrees of freedom, the three translational and the three rotational. The loads in such a medium are forces and moments. The work of the Cosserat brothers remained unnoticed for the half a century, but then the interest to this topic arose.

Woldemar Voigt tried to remove the shortcomings of the classical theory of elasticity [***W. Voigt***. *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, 34: 3–51, 1887*] by the assumption that the interaction of two parts of the body is transmitted through an area element *do* by means not only of the force vector $\boldsymbol{p}do$ but also by the moment vector $\boldsymbol{m}do$. Thus, besides the force stresses σ_{ji} also the moment stresses have been defined.

However, the complete theory of asymmetric elasticity was developed by the brothers ***François et Eugène Cosserat*** who published it in 1909 in the work *"Théorie des corps déformables"*.

They assumed that the bodies are composed from the connected particles. These particles are like a small rigid bodies.

During the deforming each particle is displaced by vector $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ and rotated by vector $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{r}, t)$, the functions of the location $\boldsymbol{r}$ and time t. Thus the points (particles) of the Cosserat's continuum possess the orientation (it is a "polar media"). So we can speak of the rotation of a point. The mutually independent vectors $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{\varphi}$ define deformations of a body.

The introduction of $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{\varphi}$ with the assumption that the transmission of forces through an area element *do* is happened by the force vector $\boldsymbol{p}$ and the moment vector $\boldsymbol{m}$ leads in the consequence to the asymmetric stress tensors σ_{qp} and μ_{qp}.

The theory of the brothers E. and F. Cosserat remained unnoticed during their lifetime. It was so because their theory was non-linear and thus included large deformations, because the frames of their theory were out of the frames of the classical linear elasticity. They tried to construct the unified field theory, containing mechanics, optics and electrodynamics, combined by a principle of the least action.

The research in the field of the general theories of continuous media conducted in the last fifteen years, drew the attention of the scientists to the Cosserats' work. Looking for the new models, describing the behaviour of the real elastic media more precisely, the models similar to, or identical with that of Cosserats' have been encountered. Here I want to mention, first of all, the papers by C. Truesdell and R. A. Toupin [***C. Truesdell*** *and* ***R. A. Toupin****. The classical field theories. Encyclopædia of Physics, Chapter 1, Springer-Verlag, Berlin, 1960*], G. Grioli [***Grioli G.*** *Elasticité asymmetrique. Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser. IV, 50 (1960)*], R. D. Mindlin and H. F. Tiersten [***Mindlin, R. D.; Tiersten, H. F.*** *Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 11. 1962. 415–448*].

In the truly micropolar continuum, the vector field of displacements $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ and the field of rotations $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{r}, t)$ are mutually independent. This is also called the model with free rotation. Also it is the geometrically linear model, that's the case of the very small, the infinitesimal displacements and the infinitesimall rotations. Here operators $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}$ and $\boldsymbol{\nabla}$ are indistinguishable. $\mathcal{V} = \mathring{\mathcal{V}}$, $\rho = \mathring{\rho}$ and therefore equations "can be written in the initial configuration". Also operators δ and $\boldsymbol{\nabla}$ commute ($\delta \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{u}$, $\delta \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{\varphi}$).

To build this model, I use the principle of virtual work. This principle says that the variation of work of the real external forces on virtual displacements is equal with the opposite sign to the variation of work , the real stresses on virtual deformations

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \Big) d\mathcal{V} + \int\limits_{o} \Big(\boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \Big) do = - \int\limits_{\mathcal{V}} \delta W^{(i)} d\mathcal{V}.$$

Here $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{m}$ are the external forces and moments per "one volume", $\boldsymbol{p}$ and $\boldsymbol{M}$ are external forces too, but per surface unit (the surface loads, they act only on a certain part of o on the boundary surface.

$\delta W^{(i)}$ is the work of internal forces density per volume unit

As before, we suppose that $\delta W^{(i)}$ nullifies when the body moves as a rigid whole without deformation:

$$\delta \boldsymbol{u} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r} + \textsf{constant}, \;\; \delta \boldsymbol{\varphi} = \textsf{constant} \;\Rightarrow\; \delta W^{(i)} = 0,$$
$$\boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{r} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = - \boldsymbol{E} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = - \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}, \;\; \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{\varphi} = {}^2\mathbf{0}.$$

Introducing the deformation (strain) tensors — the tensor of the relative displacement between particles $\boldsymbol{\gamma}$ (the distortion tensor, the distortion is the relative displacement between particles) and the curvature-twist tensor $\boldsymbol{\kappa}$ (it also has other names: the torsion-flexure tensor, or the wryness tensor)

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}, \;\; \boldsymbol{\kappa} \equiv \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} - 2 \boldsymbol{\varphi}, \;\; \boldsymbol{\kappa}_{\times} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varphi},$$
$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}, \;\; \delta \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{\varphi},$$

with the needed absence of any virtual deformations $\delta \boldsymbol{\gamma} = {}^2\mathbf{0}$ and $\delta \boldsymbol{\kappa} = {}^2\mathbf{0}$.

Before in § ??.??, stresses appeared as Lagrange's multipliers in the principle of virtual work, when variation of the internal work $\delta W^{(i)} = 0$. The same for the micropolar continuum :

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} \Big) d\mathcal{V} + \\ + \int\limits_{o} \Big(\boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \Big) do = 0. \quad (1.2)$$

Lagrange's multipliers at each point are non-symmetric tensors of the second complexity, $\boldsymbol{\tau}$ and $\boldsymbol{\mu}$.

Transforming $-\boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}}$ and $-\boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}}$

$$\delta \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}} - \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}, \;\; \delta \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{\varphi}^{\mathsf{T}},$$
$$-\boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}), \;\; -\boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{\varphi}^{\mathsf{T}}.$$

From

$$(??, \S\, ??.??) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A}_{\times} = -\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, {}^{3}\boldsymbol{\epsilon},$$

$$\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{A} \cdot\cdot\, (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \big(-{}^{3}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{b}\big) = \\ = \big(-\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, {}^{3}\boldsymbol{\epsilon}\big) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}_{\times} \cdot \boldsymbol{b} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\tau}_{\times} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}$$

and the "product rule"

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}},$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla} \delta \boldsymbol{\varphi}^{\mathsf{T}},$$

follows

$$-\boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\tau}_{\times} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi},$$
$$-\boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}).$$

Because $\boldsymbol{a} \cdot ({}^{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot {}^{2}\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot {}^{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{c}$, after integration by the divergence theorem

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{u})\, d\mathcal{V} = \oint\limits_{o(\partial \mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{u}\, do, \;\; \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi})\, d\mathcal{V} = \oint\limits_{o(\partial \mathcal{V})} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}\, do$$

(1.2) turns into

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big((\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f}) \cdot \delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \boldsymbol{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \Big) d\mathcal{V} + \\ + \int\limits_{o} \Big((\boldsymbol{p} - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \Big) do = 0.$$

From the randomness of variations $\delta \boldsymbol{u}$ and $\delta \boldsymbol{\varphi}$ inside a volume ensues the balance of forces and moments

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}, \tag{1.3}$$

and the randomness of a surface gives boundary conditions

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p}, \;\; \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{M}. \tag{1.4}$$

The force stress tensor $\boldsymbol{\tau}$ satisfies the same differential "equilibrium equations"* and the same boundary conditions, as for the momentless continuum. But tensor $\boldsymbol{\tau}$ is yet non-symmetric : instead of $\boldsymbol{\tau}_{\times} = \boldsymbol{0}$ here is $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$ — the couple stresses $\boldsymbol{\mu}$ appear, and the volume moment load $\boldsymbol{m}$ is not zero.

The meaning of components of the couple stress tensor $\boldsymbol{\mu}$ is similar to the meaning of components of the force stress tensor $\boldsymbol{\tau}$. For an orthonormal basis, moment $\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\mu} = \mu_{ik} \boldsymbol{e}_k$ acts on an area with the normal vector $\boldsymbol{e}_i$. The diagonal components μ_{11}, μ_{22}, μ_{33} are the twisting moments and the nondiagonal are the bending ones (?? figure??).

...

eccentricity vector $\boldsymbol{\ae}$ and inertia tensor ${}^2\boldsymbol{\mathfrak{I}}$

For an isotropic medium $\boldsymbol{\ae} = \boldsymbol{0}$, ${}^2\boldsymbol{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\boldsymbol{E}$.

...

* In quotes, because *equilibrium equations* are quite *everything* that ensues from the principle of virtual work in statics.

§ 2. Relations of elasticity

In this book, something "elastic" implies the potentiality of internal forces : $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$, where Π is the energy of deformation per volume unit (continuing to model the geometrically linear material, $\mathcal{V} = \mathring{\mathcal{V}}$).

Having relations (...)

...

$$\delta \Pi = -\delta W^{(i)} = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\;\; \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \;\; \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\kappa}}. \tag{2.1}$$

And yep, the last equalities are the relations of elasticity (or, in other words,— the constitutive equations).

Decomposing the strain (deformation) and stress tensors into the symmetric and the antisymmetric parts

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{S}} - \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{\times} \times \boldsymbol{E}, \;\; \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{S}} - \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}_{\times} \times \boldsymbol{E},$$
$$\delta \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} = \delta \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{S}} + \tfrac{1}{2} \delta \boldsymbol{\gamma}_{\times} \times \boldsymbol{E}, \;\; \delta \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} = \delta \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{S}} + \tfrac{1}{2} \delta \boldsymbol{\kappa}_{\times} \times \boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\mathsf{S}} - \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_{\times} \times \boldsymbol{E}, \;\; \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{\mathsf{S}} - \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_{\times} \times \boldsymbol{E},$$

the expression $\delta \Pi = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \delta \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}}$ changes into

$$\delta \Pi = \ldots \tag{2.2}$$

...

$$\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} - 2 \boldsymbol{\varphi},$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{\times} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varphi},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{S}} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\mathsf{S}},$$

...

The classical isotropic linear elastic material behavior is described by two material parameters, for example, the Young's modulus and the Poisson's ratio, while the isotropic Cosserat continuum needs six material parameters even when assumed to be linear, homogeneous and isotropic, it requires six independent material constants, in contrast to only two such constants for the classical continuum

...

Relations (2.1) are inverted by a Legendre transformation

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial \text{Ц}}{\partial \boldsymbol{\tau}},\ \boldsymbol{\kappa} = \frac{\partial \text{Ц}}{\partial \boldsymbol{\mu}},\\ \text{Ц}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\kappa}^{\mathsf{T}} - \Pi(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}).\end{gathered} \tag{2.3}$$

...

material's intrinsic (internal) length scale ℓ

Если устремить ℓ к нулю, то исчезает вклад $\boldsymbol{\kappa}$ в Π, а с ним и моментные напряжения $\boldsymbol{\mu}$. Когда вдобавок нет объёмной моментной нагрузки $\boldsymbol{m}$, тогда тензор $\boldsymbol{\tau}$ становится симметричным: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mu + \boldsymbol{\tau}_{\times} + m = \mathbf{0}$, $\mu = {}^2\mathbf{0}$, $m = \mathbf{0} \,\Rightarrow\, \boldsymbol{\tau}_{\times} = \mathbf{0}$, и модель превращается в классическую безмоментную.

Yet using of the micropolar model is natural for a case when the real material has a certain smallest volume "which is impossible to penetrate". And such a situation occurs quite often : for composites with a "representative" volume, for polycrystalline materials, for polymers with large molecules (macromolecules).

§ 3. Compatibility equations

Having the identity $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{a} = {}^2\mathbf{0}\ \ \forall \boldsymbol{a}$ and the definitions for the deformation tensors (1.1)

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\kappa} \equiv \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi} \,\Rightarrow\, \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\kappa} = {}^2\mathbf{0},\\ \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} \,\Rightarrow\, \boldsymbol{\nabla} \times \big(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E}\big) = {}^2\mathbf{0}\ \ldots\end{gathered} \tag{3.1}$$

....

§ 4. Theorems of statics

Theorems of statics for linear conservative systems, easily derivable for a finite number of degrees o'freedom (§ **??**.**??**), such as the minimality of energy, the uniqueness of the solution, the Clapeyron's theorem, the reciprocal work theorem, are equitable (**??**, § **??**.**??**), (**??**, § **??**.**??**), (**??**, § **??**.**??**) for infinity degrees o'freedom as well, that is for any linear elastic continuum, including the micropolar model (a medium with force couples or moments).

...

§ 5. The Cosserat pseudocontinuum

Besides the model with free rotation ("the truly micropolar continuum"), there is the simplified model of a medium with the force couples, in which rotations are expressed via displacements, like for the linear momentless ("classical") continuum (**??**, § **??**.**??**)

$$\boldsymbol{\varphi} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\gamma}_{\times} = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathsf{S}} \tag{5.1}$$

— the model with constrained rotation.*

The symmetry of $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \boldsymbol{0}$) can be thought of as an internal constraint (§ **??**.**??**). Here $\boldsymbol{\gamma}_{\times}$ disappears from the energy Π, and a relation of elasticity for $\boldsymbol{\tau}_{\times}$ cannot be written. That place in the complete set of equations is taken by the equation of a constraint.

For the classical (linear momentless) model, the complete set (system) may be presented as the just one equation for the vector $\boldsymbol{u}$ (**??**, § **??**.**??**). The model with moments and free rotation may be described by the two vector equations for $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{\varphi}$. And for the model with constrained rotation it's again the single equation for $\boldsymbol{u}$.

.....

§ 6. Plane deformation

Все переменные в этой постановке проблемы не зависят от декартовой координаты $z \equiv x_3$ (единичный вектор оси $\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{e}_z \equiv \boldsymbol{e}_3$).

* Cosserat brothers named it *cas de trièdre caché* (case of latent trihedron).

Смещения и силы перпендикулярны оси z, а повороты и моменты — параллельны ей:

...

Это краткое изложение плоской задачи относится к модели с независимыми поворотами. ПсевдоконтинуумCosserat (модель "со стеснённым вращением") получается либо наложением внутренней связи $\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \mathbf{0}$, либо предельным переходом ...

Подробнее о плоской моментной задаче написано в книгах Н. Ф. Морозова [**?**, 38].

§ 7. Nonlinear theory

Кажущееся на первый взгляд чрезвычайно трудным, построение теории конечных деформаций континуума Cosserat становится прозрачным, если опираться на общую механику, тензорное исчисление и нелинейную теорию безмоментной среды.

Построение модели упругого континуума проходит обычно четыре этапа:

- ✓ определение степеней свободы частиц,
- ✓ выявление нагрузок ("силовых факторов", напряжений) и условий их баланса,
- ✓ подбор соответствующих мер деформации

и, наконец,

- ✓ вывод соотношений упругости между напряжениями и деформациями.

Этот путь очень сокращается, если опираться на принцип виртуальной работы.

Как и в гл. **??**, среда состоит из частиц с материальными координатами q^i и вектором-радиусом $\boldsymbol{r}(q^i, t)$. В начальной (исходной, отсчётной) конфигурации $\boldsymbol{r}(q^i, 0) \equiv \mathring{\boldsymbol{r}}(q^i)$. Но кроме трансляции, частицы имеют независимые степени свободы поворота, описываемого ортогональным тензором

$$\boldsymbol{O}(q^i, t) \equiv \boldsymbol{a}_j \mathring{\boldsymbol{a}}^j = \boldsymbol{a}^j \mathring{\boldsymbol{a}}_j = \boldsymbol{O}^{-\mathsf{T}},$$

где тройка векторов $\boldsymbol{a}_j(q^i, t)$ жёстко связана с каждой частицей, показывая угловую ориентацию относительно как-либо выбираемых* векторов $\mathring{\boldsymbol{a}}_j(q^i) \equiv \boldsymbol{a}_j(q^i, 0)$, $\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{O} \cdot \mathring{\boldsymbol{a}}_j$; $\boldsymbol{a}^j$ — тройка взаимных векторов: $\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{a}^j = \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{E}$ $(t = 0,\ \mathring{\boldsymbol{a}}^j\colon\ \mathring{\boldsymbol{a}}_j \mathring{\boldsymbol{a}}^j = \mathring{\boldsymbol{a}}^j \mathring{\boldsymbol{a}}_j = \boldsymbol{E})$. Движение среды полностью определяется функциями $\boldsymbol{r}(q^i, t)$ and $\boldsymbol{O}(q^i, t)$.

Имея представления $\mathring{\boldsymbol{r}}(q^i)$ и $\boldsymbol{r}(q^i, t)$, вводим базис $\boldsymbol{r}_i \equiv \partial_i \boldsymbol{r}$, взаимный базис $\boldsymbol{r}^i$: $\boldsymbol{r}_j \cdot \boldsymbol{r}^i = \delta_j^i$, differential operators $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}$ and $\boldsymbol{\nabla}$, а также motion gradient $\boldsymbol{F}$

$$\mathring{\boldsymbol{\nabla}} \equiv \mathring{\boldsymbol{r}}^i \partial_i, \quad \boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{r}^i \partial_i, \quad \boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{F}^{-\mathsf{T}} \cdot \mathring{\boldsymbol{\nabla}}, \quad \boldsymbol{F} \equiv \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{r}_i \mathring{\boldsymbol{r}}^i. \tag{7.1}$$

Вариационное уравнение принципа виртуальной работы для континуума с нагрузками в объёме и на поверхности:

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\rho \big(\boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \big) + \delta W^{(i)} \Big) d\mathcal{V} + \\ + \int\limits_{\mathcal{O}} \Big(\boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \Big) d\mathcal{O} = 0. \tag{7.2}$$

Here ρ is mass density; $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{m}$ are external force and moment per mass unit; $\boldsymbol{p}$ and $\boldsymbol{M}$ — они же per surface unit; $\delta W^{(i)}$ — работа внутренних сил per volume unit в текущей конфигурации. Вектор ма́лого поворота $\delta \boldsymbol{\varphi}$

$$\boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{E} \ \Rightarrow\ \delta \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{O} \cdot \delta \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} \Rightarrow \\ \Rightarrow\ \delta \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} \Rightarrow\ \delta \boldsymbol{O} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{O},$$

$$\delta \boldsymbol{\varphi} = -\tfrac{1}{2} \big(\delta \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{O}^{\mathsf{T}} \big)_{\times}$$

* Один из вариантов: $\mathring{\boldsymbol{a}}_j = \mathring{\boldsymbol{r}}_j \equiv \partial_j \boldsymbol{r}$. Другое предложение: $\mathring{\boldsymbol{a}}_j$ это ортонормальная тройка собственных векторов тензора инерции частицы. Вообще, $\mathring{\boldsymbol{a}}_j$ могут быть любой тройкой линейно-независимых векторов.

При движении среды как жёсткого целого нет деформаций, и работа $\delta W^{(i)}$ внутренних сил равна нулю:

$$\delta \boldsymbol{r} = \mathsf{constant} + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r},\;\; \delta\boldsymbol{\varphi} = \mathsf{constant} \;\Rightarrow\; \delta W^{(i)} = 0,$$
$$\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi} = {}^2\boldsymbol{0},\;\; \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r} \times \delta\boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{E} \times \delta\boldsymbol{\varphi} = -\,\delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E} = {}^2\boldsymbol{0}.$$

К нагрузкам. Несимметричные тензоры напряжения, силового $\boldsymbol{\tau}$ и моментного $\boldsymbol{\mu}$, введём как множители Lagrange'а:

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \Big(\rho \big(\boldsymbol{f} \cdot \delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{m} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \big) - \boldsymbol{\tau} \cdot\!\cdot \big(\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{E} \big)^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{\mu} \cdot\!\cdot \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\varphi}^{\mathsf{T}} \Big) d\mathcal{V} + \\ + \int\limits_{\mathcal{O}} \Big(\boldsymbol{p} \cdot \delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{M} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \Big) d\mathcal{O} = 0. \quad (7.3)$$

После тех же преобразований, что и в § 1, получаем

...

Отсюда вытекают уравнения баланса сил и моментов в объёме и краевые условия в виде формул типа Cauchy. Они по существу те же, что и в линейной теории.

Найдём теперь тензоры деформации. Их можно вводить по-разному, если требовать лишь одного — нечувствительности к движению среды как жёсткого целого. Читатель найдёт не один вариант таких тензоров. Однако, вид тензоров деформации "подсказывает" принцип виртуальной работы.

...

§ 8. Nonlinear model with constrained rotation

Вспомним переход к модели со стеснённым вращением в линейной теории (§ 5). Разделились соотношения упругости для симметричной части тензора силового напряжения $\boldsymbol{\tau}^{\mathsf{S}}$ и кососимметричной его части $\boldsymbol{\tau}_{\times}$. Возникла внутренняя связь $\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \boldsymbol{0}$

...

Все работы по моментной теории упругости упоминают книгу братьев Eugène et François Cosserat [25], где трёхмерной среде посвящена одна глава из шести. Переведённая монография W. Nowacki [41] была одной из первых книг на русском языке с изложением линейной моментной теории. Ранее эта область представлялась статьями — например, R. D. Mindlin'a и H. F. Tiersten'a [37]. Краткое изложение моментной теории, но с подробным рассмотрением задач содержится в книгах Н. Ф. Морозова [**?**, 38].

LIST OF PUBLICATIONS

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Издание 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И.**, **Бобровницкий Ю. И.**, **Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** Использование МКЭ при решении контактной задачи теории упругости с переменной зоной контакта // Известия северо-кавказского научного центра высшей школы (СКНЦ ВШ). Серия естественные науки. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1984. № 1. С. 38–42.
5. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** К решению контактной задачи с помощью метода конечных элементов // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1988. С. 43–48.
6. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
7. **Вениамин И. Блох**. Теория упругости. Харьков: Издательство Харьковского Государственного Университета, 1964. 484 с.
8. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
9. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. «Наука», 1976. 512 с.
10. **Гольденвейзер А. Л.**, **Лидский В. Б.**, **Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 383 с.
11. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.

12. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.

13. **Александр Н. Гузь**. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: "Наукова думка", 1973. 271 с.

14. *Перевод:* **Де Вит Р.** Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.

15. **Джанелидзе Г. Ю.**, **Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.

16. **Димитриенко Ю. И.** Тензорное исчисление: Учебное пособие для вузов. М.: "Высшая школа", 2001. 575 с.

17. **Dorin Ieşan**. Classical and generalized models of elastic rods. 2nd edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. 369 pages

18. **Владимир В. Елисеев**. Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.

19. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод:* **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.

20. **Журавлёв В. Ф.** Основы теоретической механики. 3-е издание, переработанное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 304 с.

21. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.

22. **Кац, Арнольд М.** Теория упругости. 2-е издание, стереотипное. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2002. 208 с.

23. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.

24. **Керштейн И. М.**, **Клюшников В. Д.**, **Ломакин Е. В.**, **Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.

25. **Cosserat E.** et **Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.

26. **Cottrell, Alan**. Theory of crystal dislocations. Gordon and Breach (Documents on Modern Physics), 1964. 94 p. *Перевод:* **Коттрел А.** Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.

27. **Kröner, Ekkehart** *(i)* Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. *(ii)* Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод:* **Крёнер Э.** Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.

28. **Augustus Edward Hough Love**. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Volume I. Cambridge, 1892. 354 p. Volume II. Cambridge, 1893. 327 p. 4th edition. Cambridge, 1927. Dover, 1944. 643 p. *Перевод:* **Аугустус Ляв** Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.

29. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Nonlinear Theory of Elasticity: translated from the Russian by K. A. Lurie. Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 617 p.

30. **Лурье А. И.** Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Theory of Elasticity (translated by A. Belyaev). Springer-Verlag, 2005. 1050 p.

31. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.

32. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.

33. **George E. Mase**. Schaum's outline of theory and problems of continuum mechanics (Schaum's outline series). McGraw–Hill, 1970. 221 p. *Перевод:* **Джордж Мейз**. Теория и задачи механики сплошных сред. Издание 3-е. URSS, 2010. 320 с.

34. **Ernst Melan**, **Heinz Parkus**. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод:* **Мелан Э.**, **Паркус Г.** Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.

35. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.

36. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е издание. «Наука», 1987. 304 с.

37. **Mindlin, Raymond David** and **Tiersten, Harry F.** Effects of couple-stresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод:* **Миндлин Р. Д.**, **Тирстен Г. Ф.** Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.
38. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.
39. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.
40. **Witold Nowacki**. Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation:* **Nowacki, Witold**. Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод:* **Витольд Новацкий**. Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.
41. **Witold Nowacki**. Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод:* **Новацкий Витольд**. Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.
42. **Witold Nowacki**. Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод:* **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.
43. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е издание. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
44. **Пановко Я. Г.**, **Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.
45. **Пановко Я. Г.**, **Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е издание. «Наука», 1987. 352 с.
46. **Heinz Parkus**. Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод:* **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.

47. **Партон В. З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.
48. **Партон В. З.**, **Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.
49. **Партон В. З.**, **Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е издание. «Наука», 1985. 504 с.
50. **Подстригач Я. С.**, **Бурак Я. И.**, **Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
51. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.
52. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод:* **Саусвелл Р. В.** Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.
53. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Том 2. 6-е издание. «Лань», 2004. 560 с.
54. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B. V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод:* **Филипп Сьярле** Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.
55. **Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant**. Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. Memoires presentes par divers savants a l'Academie des scienees, t. 14, année 1856. 327 pages. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.
56. **Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant**. Mémoire sur la flexion des prismes .... Journal de mathematiques pures et appliquees, publie par J. Liouville. 2me serie, t. 1, année 1856. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.
57. **Cristian Teodosiu**. Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод:* **Теодосиу К.** Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.
58. **Тимошенко Степан П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.

59. **Тимошенко Степан П.**, **Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.

60. **Stephen P. Timoshenko** and **James N. Goodier**. Theory of Elasticity. 2nd edition. McGraw–Hill, 1951. 506 pages. 3rd edition. McGraw–Hill, 1970. 567 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Джеймс Гудьер**. Теория упругости. 2-е издание. «Наука», 1979. 560 с.

61. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод:* **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.

62. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е издание. «Наука», 1975. 173 с.

63. *Перевод:* **Хеллан К.** Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.

64. *Перевод:* **Циглер Г.** Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.

65. **Черепанов Г. П.**. Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.

66. **Черны́х К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.

67. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.

Oscillations and waves

68. **Timoshenko, Stephen P.**; **Young, Donovan H.**; **William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Янг Донован Х.**, **Уильям Уивер**. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

69. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е издание. «Дрофа», 2004. 592 с.

70. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

71. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.

72. **Гринченко В. Т.**, **Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.

73. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод:* **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.

74. **Kolsky, Herbert**. Stress waves in solids. Oxford, Clarendon Press, 1953. 211 p. 2nd edition. Dover Publications, 2012. 224 p. *Перевод:* **Кольский Г.** Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.

75. **Энгельбрехт Ю. К.**, **Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.

76. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.

77. **Григолюк Э. И.**, **Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.

Composites

78. **Christensen, Richard M.** Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод:* **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.

79. **Кравчук А. С.**, **Майборода В. П.**, **Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.

80. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.

81. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.

82. **Бахвалов Н. С.**, **Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.

83. **Bensoussan A.**, **Lions J.-L.**, **Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.

The finite element method

84. **Зенкевич О.**, **Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.

85. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.

Mechanics, thermodynamics, electromagnetism

86. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew**. The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online:* The Feynman Lectures on Physics. Online edition.
87. **Goldstein, Herbert**; **Poole, Charles P.**; **Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison–Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод:* **Голдстейн Г.**, **Пул Ч.**, **Сафко Дж.** Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
88. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод:* **Парс Л. А.** Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.
89. **Ter Haar, Dirk**. Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод:* **Тер Хаар Д.** Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.
90. **Беляев Н. М.**, **Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.
91. **Бредов М. М.**, **Румянцев В. В.**, **Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.
92. **Феликс Р. Гантмахер** Лекции по аналитической механике. Издание 2-е. «Наука», 1966. 300 с.
93. **Ландау Л. Д.**, **Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.
94. **Лойцянский Л. Г.**, **Лурье А. И.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е издание. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е издание. 719 с.
95. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
96. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е издание. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.
97. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е издание. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

Tensors and tensor calculus

98. **McConnell, Albert Joseph**. Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод:* **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

99. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод:* **Схоутен Я. А.** Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.
100. **Sokolnikoff, I. S.** Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua. 2nd edition. John Wiley & Sons, 1965. 361 pages. *Перевод:* **Сокольников И. С.** Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). «Наука», 1971. 376 с.
101. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Издание 3-е. «Наука», 1967. 664 с.

Variational methods

102. **Karel Rektorys**. Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation:* **Rektorys, Karel**. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D. Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод:* **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
103. **Washizu, Kyuichiro**. Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод:* **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
104. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.
105. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Издание 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

Perturbation methods (asymptotic methods)

106. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод:* **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.
107. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод:* **Найфэ Али Х.** Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.
108. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-VCH, 2004. 425 pages.
109. **Боголюбов Н. Н.**, **Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.

110. **Васильева А. Б.**, **Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

111. **Зино И. Е.**, **Тропп Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.

112. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е издание. «Наука», 1981. 400 с.

113. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.

Other topics of mathematics

114. **Collatz, Lothar**. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод:* **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.

115. **Dwight, Herbert Bristol**. Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод:* **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Издание 4-е. «Наука», 1973. 228 с.

116. **Kamke, Erich**. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод:* **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. «Лань», 2003. 576 с.

117. **Korn, Granino A.** and **Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод:* **Корн Г.**, **Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.

118. **Лаврентьев М. А.**, **Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е издание. «Наука», 1973. 736 с.

119. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Издание 6-е. «Наука», 1974. 176 с.