Vadique Myself

PHYSICS *of* ELASTIC CONTINUA

CONTENTS

chapter 7

MAGNETOELASTICITY

Much in the modern world is built upon the theory of electromagnetism. This theory was created in the XIX$^{\text{th}}$ century. Its creators — Gian Domenico Romagnosi, Hans Christian Ørsted, André-Marie Ampère, Michael Faraday, James Clerk Maxwell, Oliver Heaviside, Heinrich Hertz, Hendrik Lorentz and others — relied on the experiments with electric circuits and didn't imagine the existænce of electromagnetic waves. Nevertheless, the entities describing electricity and magnetism at each point were introduced as vectors, along with the differential equations featuring these vectors. This happened due to *the æther*, because the creators of the theory were convinced of its existænce and thus utilized the concept of it.

When electric currents flow in a body (a medium), the magnetic field produces a load, a body deforms, and this deformation alters the magnetic field itself. If the field is highly sensitive to deformations, then a joint problem of elasticity and magnetism emerges.

§ 1. Electromagnetic field

Here is the summary of the theory of electromagnetism.

The theory describes the couple of the closely intertwined together vector fields, the electric one $\mathbb{E}(\boldsymbol{r}, t)$ and the magnetic one $\mathbb{B}(\boldsymbol{r}, t)$. What are the vector $\mathbb{E}$ and the pseudovector $\mathbb{B}$ can be figured out from the expression for the electromagnetic force, or the Lorentz force. This force $\mathbf{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t, q)$ acts on a point-like charge — a vanishingly small (infinitesimal in size) particle that contains the electric charge q and moves with the velocity $\dot{\boldsymbol{r}}$

$$\mathbf{F} = q\big(\mathbb{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \mathbb{B}\big). \tag{1.1}$$

In essence, the part of the electromagnetic force arising from an interaction with a moving charge — the magnetic force $q\dot{\boldsymbol{r}} \times \mathbb{B}$ —

reveals the magnetic field $\mathbb{B}$, while the other part — the electric force $q\mathbb{E}$ — reveals the electric field $\mathbb{E}$.

The acute question *"in which exactly frame of reference is velocity* $\dot{\boldsymbol{r}}$ *of a charged particle measured?"* leads to the special theory of relativity*. However, here I will follow the classical concept about the existænce of the absolute space and time as the most frequently chosen frame of reference.

Continual model

May the reader guess by the book's title, the model of what kind awaits him hereafter? Yep, ignoring the discreteness of charge, that any electric charge may be only an integer multiplier of a single lone eléctron's charge, there is the model of the continuous distribution of charge within a volume, when the finite volume $\mathcal{V}$ contains the electric charge**

$$q = \int\limits_{\mathcal{V}} \varrho d\mathcal{V}, \quad dq = \varrho d\mathcal{V} \tag{1.2}$$

(the charge density $\varrho(\boldsymbol{r}, t)$ is the electric charge per volume unit).

On a continuum with charges and currents acts the "ponderomotive" force $\mathbf{f}$ — the electromagnetic Lorentz force per volume unit

$$\mathbf{f} = \varrho\big(\mathbb{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \mathbb{B}\big) = \varrho\mathbb{E} + \boldsymbol{j} \times \mathbb{B} \tag{1.3}$$

— the differential (the local, the microscopic, the continual) version of (1.1). Here $\boldsymbol{j} \equiv \varrho\dot{\boldsymbol{r}}$ is the volume(tric) density of the electric current, in other words "the flux of electric charge".

A vacuum is a medium without a matter, a "free space". Within a vacuum there's no ϱ and $\boldsymbol{j}$, it is a region without charges, $\varrho = 0$, and without currents, $\boldsymbol{j} = \mathbf{0}$, thus there's no ponderomotive force, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

...

* **Albert Einstein**. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. // Annalen der Physik, IV. Folge, Band 17, 1905. Seiten 891–921.

** Doesn't it remind of something? Even (**??**, § **??**.**??**)?

The Maxwell's equations

Electromagnetic phenomena are usually described by the Maxwell's equations. Differential versions of these equations are

$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbb{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}$	Gauss's theorem for electricity	(1.4^{α})
$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{E} = -\dot{\mathbb{B}}$	Maxwell–Faraday equation (Faraday's law of induction)	(1.4^{β})
$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbb{B} = 0$	Gauss's theorem for magnetism	(1.4^{γ})
$c^2\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbb{E}}$	Ampère's circuital law with Maxwell's term $\dot{\mathbb{E}}$ for the balance of electric charge	(1.4^{δ})

....

speed of light in vacuum $c = 299\,792\,458\ {}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}}$

"electric constant", vacuum permittivity ε_0

$\varepsilon_0 \approx 8.8541878 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ (farads per metre)

"magnetic constant", vacuum permeability $\mu_0 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

...

With μ_0, the equation (1.4^{δ}) is sometimes written as

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\dot{\mathbb{E}} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0\dot{\mathbb{E}}.$$

...

The balance of charge

The balance of charge — the continuity equation for electric charges — mathematically follows from the Maxwell's equations

$$\left.\begin{array}{rl} \boldsymbol{\nabla}\cdot(1.4^{\delta}) \;\Rightarrow & c^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B}\big) = \dfrac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbb{E}} \\ (1.4^{\alpha})^{\bullet} \;\Rightarrow & \boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbb{E}} = \dfrac{\dot{\varrho}}{\varepsilon_0} \\ & \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}\big) = 0\ \forall\boldsymbol{a},\ \ \boldsymbol{j} \equiv \varrho\dot{\boldsymbol{r}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\varrho\dot{\boldsymbol{r}}\big) + \dot{\varrho} = 0. \tag{1.5}$$

Upon a continuum, the electromagnetic field acts with the ponderomotive force (1.3). But there's also another expression of interaction, the bivalent "Maxwell" stress tensor

$$^2\boldsymbol{M} \equiv \varepsilon_0\Big(\mathbb{E}\mathbb{E} + c^2\,\mathbb{B}\mathbb{B} - \tfrac{1}{2}\big(\mathbb{E}\cdot\mathbb{E} + c^2\,\mathbb{B}\cdot\mathbb{B}\big)\boldsymbol{E}\Big). \tag{1.6}$$

It derives from (1.3) and Maxwell's equations

$$\begin{aligned}(1.4^{\alpha}) \;&\Rightarrow\; \varrho = \varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbb{E}\\ (1.4^{\delta}) \;&\Rightarrow\; \boldsymbol{j} = \varepsilon_0 c^2\,\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B} - \varepsilon_0\dot{\mathbb{E}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1.3) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{f} &= \varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbb{E}\mathbb{E} + \big(\varepsilon_0 c^2\,\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B} - \varepsilon_0\dot{\mathbb{E}}\big)\times\mathbb{B} =\\ &= \varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbb{E}\mathbb{E} + \varepsilon_0 c^2\big(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B}\big)\times\mathbb{B} - \varepsilon_0\dot{\mathbb{E}}\times\mathbb{B}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\big(\mathbb{E}\times\mathbb{B}\big)^{\bullet} &= \dot{\mathbb{E}}\times\mathbb{B} + \mathbb{E}\times\dot{\mathbb{B}}\\ (1.4^{\beta}) \;\Rightarrow\; \dot{\mathbb{B}} &= -\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{E}\end{aligned}\right\} \Rightarrow\; \dot{\mathbb{E}}\times\mathbb{B} = \big(\mathbb{E}\times\mathbb{B}\big)^{\bullet} + \mathbb{E}\times\big(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{E}\big)$$

Then

$$\boldsymbol{f} = \varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbb{E}\mathbb{E} - \varepsilon_0 c^2\,\mathbb{B}\times\big(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B}\big) - \varepsilon_0\mathbb{E}\times\big(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{E}\big) - \varepsilon_0\big(\mathbb{E}\times\mathbb{B}\big)^{\bullet}$$

For the symmetry with $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbb{E}\mathbb{E}$, the null vector

$$(1.4^{\gamma}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbb{B}\mathbb{B} = \boldsymbol{0},\;\; c^2\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbb{B}\mathbb{B} = \boldsymbol{0}$$

is added to $\boldsymbol{f}$.

…

$$\begin{aligned}(??,\S\,??.??) \;&\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\big) = \big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}\big)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a}\\ (??,\S\,??.??) \;&\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\big) = 2\,\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\boldsymbol{E}\big) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}\big(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\big) = \boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\big) = 2\,\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$\nabla\cdot{}^2\boldsymbol{M} = \varepsilon_0\Big(\nabla\cdot\big(\mathbb{E}\mathbb{E}\big) + c^2\,\nabla\cdot\big(\mathbb{B}\mathbb{B}\big) - \tfrac{1}{2}\,\nabla\cdot\big(\mathbb{E}\cdot\mathbb{E}\boldsymbol{E} + c^2\,\mathbb{B}\cdot\mathbb{B}\boldsymbol{E}\big)\Big) =$$
$$= \varepsilon_0\Big(\nabla\cdot\mathbb{E}\mathbb{E} + \mathbb{E}\cdot\nabla\mathbb{E} + c^2\,\nabla\cdot\mathbb{B}\mathbb{B} + c^2\,\mathbb{B}\cdot\nabla\mathbb{B} -$$
$$- \nabla\mathbb{E}\cdot\mathbb{E} - c^2\,\nabla\mathbb{B}\cdot\mathbb{B}\Big)$$

...

§ 2. Electromagnetic waves

To derive wave equations

$$\nabla\times(1.4^{\beta}) \;\Rightarrow\; \nabla\times\big(\nabla\times\mathbb{E}\big) = -\nabla\times\dot{\mathbb{B}}$$
$$\nabla\times(1.4^{\delta}) \;\Rightarrow\; \nabla\times\big(\nabla\times\mathbb{B}\big) = \nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\dot{\mathbb{E}}}{c^2}\right)$$

$$\nabla\times\dot{\mathbb{E}} = \big(\nabla\times\mathbb{E}\big)^{\bullet},\; (1.4^{\beta}) \;\Rightarrow\; \nabla\times\dot{\mathbb{E}} = -\ddot{\mathbb{B}}$$
$$\nabla\times\dot{\mathbb{B}} = \big(\nabla\times\mathbb{B}\big)^{\bullet},\; (1.4^{\delta}) \;\Rightarrow\; \nabla\times\dot{\mathbb{B}} = \frac{\boldsymbol{j}^{\bullet}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\ddot{\mathbb{E}}}{c^2}$$

$$\nabla\times\big(\nabla\times\mathbb{E}\big) = \nabla\nabla\cdot\mathbb{E} - \triangle\mathbb{E}$$
$$\nabla\times\big(\nabla\times\mathbb{B}\big) = \nabla\nabla\cdot\mathbb{B} - \triangle\mathbb{B}$$

$$\triangle\mathbb{E} - \nabla\underbrace{\nabla\cdot\mathbb{E}}_{\varrho/\varepsilon_0\;(1.4^{\alpha})} = \frac{\ddot{\mathbb{E}}}{c^2} + \frac{\boldsymbol{j}^{\bullet}}{\varepsilon_0 c^2}$$
$$\triangle\mathbb{B} - \nabla\underbrace{\nabla\cdot\mathbb{B}}_{0\;(1.4^{\gamma})} = \frac{\ddot{\mathbb{B}}}{c^2} - \frac{\nabla\times\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2}$$

...

$\nabla\cdot\big(\nabla\times\boldsymbol{a}\big) = 0\;\;\forall\boldsymbol{a}$

$\nabla\times\nabla = \mathbf{0},\;\;\nabla\times\nabla\alpha = \mathbf{0}\;\;\forall\alpha$

vector potential $\mathbb{A}$

$$\nabla\cdot\mathbb{B} = 0\;\;(1.4^{\gamma})\;\;\Leftrightarrow\;\;\mathbb{B} = \nabla\times\mathbb{A}$$

potential $\mathbb{A}$ is not unique and has gauge freedom $\mathbb{A}+\boldsymbol{\nabla} a$

$$\mathbb{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\left(\mathbb{A}+\boldsymbol{\nabla} a\right) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{B}=0 \;\; (1.4^{\gamma})$$

scalar potential ϕ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{E}=-\dot{\mathbb{B}} \;\; (1.4^{\beta}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{E}=-\boldsymbol{\nabla}\times\left(\dot{\mathbb{A}}+\boldsymbol{\nabla}\dot{a}\right) \;\Rightarrow\\ \Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\times\left(\mathbb{E}+\dot{\mathbb{A}}+\boldsymbol{\nabla}\dot{a}\right)=\mathbf{0} \;\Rightarrow\; -\boldsymbol{\nabla}\phi=\mathbb{E}+\dot{\mathbb{A}}+\boldsymbol{\nabla}\dot{a} \;\Rightarrow\\ \Rightarrow\; \mathbb{E}=-\boldsymbol{\nabla}\left(\phi+\dot{a}\right)-\dot{\mathbb{A}}.\end{aligned} \quad (2.1)$$

And

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{E}=\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \;\; (1.4^{\alpha}) \;\Rightarrow\; \begin{aligned}-\triangle\left(\phi+\dot{a}\right)-\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\dot{\mathbb{A}}=\frac{\varrho}{\varepsilon_0}\\ -\triangle\phi-\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\left(\dot{\mathbb{A}}+\boldsymbol{\nabla}\dot{a}\right)=\frac{\varrho}{\varepsilon_0}\end{aligned} \quad (2.2)$$

$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{A}\right)=\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{A}-\triangle\mathbb{A}$

$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{\nabla} a-\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} a=\mathbf{0}$ (partial derivatives of a smooth function commute)

$$\begin{aligned}c^2\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}+\dot{\mathbb{E}} \;\; (1.4^{\delta}) \;\Rightarrow\\ \Rightarrow\; c^2\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbb{A}\right)=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}-\boldsymbol{\nabla}\left(\dot{\phi}+\ddot{a}\right)-\ddot{\mathbb{A}} \;\Rightarrow\\ \Rightarrow\; c^2\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{A}-\triangle\mathbb{A}\right)=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}-\boldsymbol{\nabla}\dot{\phi}-\boldsymbol{\nabla}\ddot{a}-\ddot{\mathbb{A}}.\end{aligned} \quad (2.3)$$

With a gauge freedom it's possible to simplify the wave equations (2.3) and (2.2), assuming that

$$\left.\begin{aligned}-\boldsymbol{\nabla}\ddot{a}=\boldsymbol{\nabla}\dot{\phi}+c^2\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{A} \;\Rightarrow\; \ddot{a}=-\dot{\phi}-c^2\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{A}\\ -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\left(\dot{\mathbb{A}}+\boldsymbol{\nabla}\dot{a}\right)=\frac{1}{c^2}\ddot{\phi} \;\Rightarrow\; \dot{\phi}=-c^2\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\left(\mathbb{A}+\boldsymbol{\nabla} a\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; c^2\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{A}+c^2\triangle a-c^2\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\mathbb{A}=\ddot{a},$$

finally presenting as the homogeneous wave equation for a

$$\ddot{a}=c^2\triangle a. \quad (2.4)$$

The more popular condition is even more stiff

$$\triangle a = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{a} = 0,\;\; \dot{\phi} + c^2 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{A} = 0.$$

This Lorenz gauge condition gives the same effect, being just the particular — the harmonic — case of (2.4).

Following from (2.2) and (2.3) with condition (2.4), equations of electromagnetic waves in the potential formulation are

$$\begin{aligned} -\triangle\phi + \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \\ -c^2\triangle\mathbb{A} &= \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} - \ddot{\mathbb{A}}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

...

§ 3. Electrostatics

Рассмотрение этого вопроса полезно и для последующего описáния магнетизма. В статике

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \mathbb{B} = \boldsymbol{0}$$

...

The volume “ponderomotive” force, с которой электростатическое поле действует на среду ...

...

Maxwell stress tensor (1.6) in electrostatics is

$${}^2\boldsymbol{M} = \varepsilon_0 \Big(\mathbb{E}\mathbb{E} - \tfrac{1}{2}\,\mathbb{E} \cdot \mathbb{E}\boldsymbol{E} \Big)$$

...

§ 4. Dielectrics

Начнём с рассмотрения электростатического поля

...

В диэлектриках нет свободных зарядов: charge density $\varrho = 0$. Здесь вводится плотность дипольного момента

...

§ 5. Magnetostatics

Если поле (а с ним ...)

...

§ 6. Magnetics, or magnetic materials

Having the relations of magnetostatics for the overall case, here I'll go to a material matter — and there's already some previous experience from electrostatics of dielectrics.

Начнём с рассмотрения

...

...

О том, насколько поведение реальных материалов соответствует представленным здесь формальным построениям — сей вопрос is out of scope этой книги.

§ 7. Magnetic rigidity

В электротехнике распространены обмотки всевозможной формы, в которых провод намотан так, что образуется некое массивное тело. Такие обмотки есть в статоре генератора автомобиля (да и в роторе), в больших промышленных электромагнитах и в магнитных системах установок “токама́к” (**то**роидальная **ка**мера с **ма**гнитными **к**атушками) для управляемого термоядерного синтеза — примеров много. Сочетание токопровода и изоляции образует периодический композит, и одной из главных нагрузок для него является пондеромоторная магнитная сила. Рассчитывая деформации и механические напряжения в обмотке, начинают с определения магнитных сил. Поскольку распределение токов задано известной геометрией проводов, достаточно интегрирования по формуле Био-Савара (**??**). Термин "магнитоупругость" при этом неуместен, так как задачи магнитостатики и упругости решаются раздельно.

Однако при деформации обмотки меняются и поле $\boldsymbol{j}$, и вызываемое им поле $\mathbb{B}$. Объёмная сила становится равной

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{j} \times \mathbb{B})_0 + \ldots \tag{7.1}$$

Подчёркнутое слагаемое соответствует недеформированному состоянию. Обусловленное деформацией изменение объёмной силы линейно связано с малым смещением $\boldsymbol{u}$, поэтому матричное (после дискретизации) уравнение в смещениях можно представить в виде

$$(C + C_m)\, u = \mathring{F}. \tag{7.2}$$

К "обычному" оператору линейной упругости C добавилась магнитная жёсткость C_m, $\mathring{F}$ — силы в недоформированном состоянии.

Добавка C_m пропорциональна квадрату тока и может стать весьма существенной в магнитных системах с мощным полем. Учёт её нужен и в случае небольшого значения C.

For plain conditions, the structure will sustain the load, but further loading is risky and may be unbearable.

Magnetic rigidity plays the big role in stability problems. Matrix C_m is symmetric since magnetic forces are potential. The Euler's static approach (§ **??**.**??**) gives the "critical" parameter values.

Как иллюстрацию рассмотрим простую задачу о балке в продольном магнитном поле. Балка располагается на декартовой оси z, концы $z=0$ и $z=l$ закреплены, магнитная индукция $\mathbb{B} = B\boldsymbol{k} =$ **constant**, по балке течёт постоянный (по величине) ток I. В классической модели балки при равных жёсткостях на изгиб для прогиба $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2$ легко получить следующую постановку:

...

Вводя комплéксную комбинацию $u \equiv u_1 + \mathrm{i} u_2$, будем иметь

...

с общим решением

...

Подстановка в граничные условия приводит к однородной системе для постоянных A_k. Приравняв нулю определитель, придём к характеристическому уравнению

...

Наименьший положительный корень $x = 3.666$, так что критическая комбинация параметров такова:

$$\left(IBl^3/a\right)_* = 394.2.$$

Поле $\mathbb{B}$ в этом решении считалось внешним и не варьировалось. Но если собственное поле тока в стержне сравнимо с $\mathbb{B}$, то решение изме́нится and усложни́тся.

Bibliography

Основы электродинамики хорошо изложены во многих книгах [89, 84], но для приложений в механике выделяется книга И. Е. Тамма [95]. Растёт список литературы по связанным задачам электромагнетизма и упругости [44, 45]. Как введение в эту область может быть полезна монография В. Новацкого [39].

LIST OF PUBLICATIONS

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Издание 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И.**, **Бобровницкий Ю. И.**, **Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** Использование МКЭ при решении контактной задачи теории упругости с переменной зоной контакта // Известия северо-кавказского научного центра высшей школы (СКНЦ ВШ). Серия естественные науки. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1984. № 1. С. 38–42.
5. **Ахтырец Г. П.**, **Короткин В. И.** К решению контактной задачи с помощью метода конечных элементов // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1988. С. 43–48.
6. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
7. **Вениамин И. Блох**. Теория упругости. Харьков: Издательство Харьковского Государственного Университета, 1964. 484 с.
8. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
9. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. «Наука», 1976. 512 с.
10. **Гольденвейзер А. Л.**, **Лидский В. Б.**, **Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 383 с.
11. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.

12. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод:* **Гордон Дж.** Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.
13. **Александр Н. Гузь**. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: "Наукова думка", 1973. 271 с.
14. *Перевод:* **Де Вит Р.** Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.
15. **Джанелидзе Г. Ю.**, **Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.
16. **Dorin Ieşan**. Classical and generalized models of elastic rods. 2nd edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. 369 pages
17. **Владимир В. Елисеев**. Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.
18. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод:* **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.
19. **Журавлёв В. Ф.** Основы теоретической механики. 3-е издание, переработанное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 304 с.
20. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.
21. **Кац, Арнольд М.** Теория упругости. 2-е издание, стереотипное. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2002. 208 с.
22. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B.V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод:* **Филипп Сьярле** Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.
23. **Cosserat E.** et **Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
24. **Cottrell, Alan**. Theory of crystal dislocations. Gordon and Breach (Documents on Modern Physics), 1964. 94 p. *Перевод:* **Коттрел А.** Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.

25. **Kröner, Ekkehart** *(i)* Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. *(ii)* Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод:* **Крёнер Э.** Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.

26. **Augustus Edward Hough Love**. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Volume I. Cambridge, 1892. 354 p. Volume II. Cambridge, 1893. 327 p. 4th edition. Cambridge, 1927. Dover, 1944. 643 p. *Перевод:* **Аугустус Ляв**. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.

27. **Анатолий И. Лурье**. Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Nonlinear Theory of Elasticity: translated from the Russian by K. A. Lurie. Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 617 p.

28. **Анатолий И. Лурье**. Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с. *Translation:* **Lurie, A. I.** Theory of Elasticity (translated by A. Belyaev). Springer-Verlag, 2005. 1050 p.

29. **Анатолий И. Лурье**. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.

30. **Анатолий И. Лурье**. Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.

31. **George E. Mase**. Schaum's outline of theory and problems of continuum mechanics (Schaum's outline series). McGraw–Hill, 1970. 221 p. *Перевод:* **Джордж Мейз**. Теория и задачи механики сплошных сред. Издание 3-е. URSS, 2010. 320 с.

32. **Ernst Melan**, **Heinz Parkus**. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод:* **Мелан Э.**, **Паркус Г.** Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.

33. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.

34. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е издание. «Наука», 1987. 304 с.

35. **Mindlin, Raymond David** and **Tiersten, Harry F.** Effects of couple-stresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод:* **Миндлин Р. Д.**, **Тирстен Г. Ф.** Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.

36. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.

37. **Witold Nowacki**. Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation:* **Nowacki, Witold**. Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод:* **Витольд Новацкий**. Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.

38. **Witold Nowacki**. Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод:* **Новацкий Витольд**. Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.

39. **Witold Nowacki**. Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод:* **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.

40. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е издание. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

41. **Пановко Я. Г.**, **Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.

42. **Пановко Я. Г.**, **Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е издание. «Наука», 1987. 352 с.

43. **Heinz Parkus**. Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод:* **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.

44. **Партон Владимир З.**, **Кудрявцев Борис А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.

45. **Подстригач Я. С.**, **Бурак Я. И.**, **Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
46. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.
47. **Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant**. De la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. Extrait du tome xiv des mémoires présentés par divers savants a l'académie des sciences. Imprimerie Impériale, Paris, M DCCC LV (1855). 332 pages. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.
48. **Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant**. Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes. Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. 2me serie, tome 1, année 1856. Pages 89 à 189. *Перевод на русский язык:* **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 страниц.
49. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод:* **Саусвелл Р. В.** Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.
50. **Cristian Teodosiu**. Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод:* **Теодосиу К.** Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.
51. **Тимошенко Степан П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.
52. **Тимошенко Степан П.**, **Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.
53. **Stephen P. Timoshenko** and **James N. Goodier**. Theory of Elasticity. 2nd edition. McGraw–Hill, 1951. 506 pages. 3rd edition. McGraw–Hill, 1970. 567 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Джеймс Гудьер**. Теория упругости. 2-е издание. «Наука», 1979. 560 с.

54. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод:* **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.

55. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е издание. «Наука», 1975. 173 с.

56. *Перевод:* **Циглер Г.** Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.

57. **Черны́х К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.

58. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.

Oscillations and waves

59. **Timoshenko, Stephen P.**; **Young, Donovan H.**; **William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод:* **Тимошенко Степан П.**, **Янг Донован Х.**, **Уильям Уивер**. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

60. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е издание. «Дрофа», 2004. 592 с.

61. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

62. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.

63. **Гринченко В. Т.**, **Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.

64. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод:* **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.

65. **Kolsky, Herbert**. Stress waves in solids. Oxford, Clarendon Press, 1953. 211 p. 2nd edition. Dover Publications, 2012. 224 p. *Перевод:* **Кольский Г.** Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.

66. **Энгельбрехт Ю. К.**, **Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.

67. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.

68. **Григолюк Э. И.**, **Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.

Fracture mechanics

69. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.
70. **Керштейн И. М.**, **Клюшников В. Д.**, **Ломакин Е. В.**, **Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
71. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.
72. **Партон Владимир З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.
73. **Партон Владимир З.**, **Морозов Евгений М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е издание. «Наука», 1985. 504 с.
74. *Перевод:* **Хеллан К.** Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.
75. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.
76. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.

Composites

77. **Christensen, Richard M.** Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод:* **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.
78. **Кравчук А. С.**, **Майборода В. П.**, **Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.
79. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
80. **Бахвалов Н. С.**, **Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.
81. **Bensoussan A.**, **Lions J.-L.**, **Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.

The finite element method

82. **Зенкевич О.**, **Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.
83. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.

Mechanics, thermodynamics, electromagnetism

84. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew**. The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online:* The Feynman Lectures on Physics. Online edition.
85. **Goldstein, Herbert**; **Poole, Charles P.**; **Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison–Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод:* **Голдстейн Г.**, **Пул Ч.**, **Сафко Дж.** Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
86. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод:* **Парс Л. А.** Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.
87. **Ter Haar, Dirk**. Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод:* **Тер Хаар Д.** Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.
88. **Беляев Н. М.**, **Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.
89. **Бредов М. М.**, **Румянцев В. В.**, **Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.
90. **Феликс Р. Гантмахер** Лекции по аналитической механике. Издание 2-е. «Наука», 1966. 300 с.
91. **Ландау Л. Д.**, **Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.
92. **Лев Г. Лойцянский**, **Анатолий И. Лурье**. Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е издание. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е издание. 719 с.
93. **Анатолий И. Лурье**. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
94. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е издание. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.

95. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е издание. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

Tensors and tensor calculus

96. **McConnell, Albert Joseph**. Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод:* **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
97. **Димитриенко Ю. И.** Тензорное исчисление: Учебное пособие для вузов. М.: "Высшая школа", 2001. 575 с.
98. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Издание 3-е. «Наука», 1967. 664 с.
99. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод:* **Схоутен Я. А.** Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.
100. **Sokolnikoff, I. S.** Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua. 2nd edition. John Wiley & Sons, 1965. 361 pages. *Перевод:* **Сокольников И. С.** Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). «Наука», 1971. 376 с.

Variational methods

101. **Karel Rektorys**. Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation:* **Rektorys, Karel**. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D. Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод:* **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
102. **Washizu, Kyuichiro**. Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод:* **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
103. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.
104. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Издание 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

Perturbation methods (asymptotic methods)

105. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод:* **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.

106. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод:* **Найфэ Али Х.** Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.

107. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-VCH, 2004. 425 pages.

108. **Боголюбов Н. Н.**, **Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.

109. **Васильева А. Б.**, **Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

110. **Зино И. Е.**, **Тропп Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.

111. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е издание. «Наука», 1981. 400 с.

112. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.

Other topics of mathematics

113. **Collatz, Lothar**. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод:* **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.

114. **Dwight, Herbert Bristol**. Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод:* **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Издание 4-е. «Наука», 1973. 228 с.

115. **Kamke, Erich**. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод:* **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. «Лань», 2003. 576 с.

116. **Korn, Granino A.** and **Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод:* **Корн Г.**, **Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.

117. **Лаврентьев М. А.**, **Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е издание. «Наука», 1973. 736 с.

118. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Издание 6-е. «Наука», 1974. 176 с.