

*Vadique Myself*

# ФИЗИКА УПРУГИХ СРЕД

УДК 539.3 *Механика деформируемых тел. Упругость. Деформации*  
УДК 539 *Строение материи*  
УДК 53 *Физика*  
УДК 5 *Математика. Естественные науки*

UDC 539.3 *Elasticity. Deformation. Mechanics of elastic solids*  
UDC 539 *Physical nature of matter*  
UDC 53 *Physics*  
UDC 5 *Mathematics. Natural sciences*

All models of elastic continua are presented: nonlinear and linear, micropolar and classical momentless; three-dimensional, two-dimensional (shells and plates), one-dimensional (rods, including thin-walled ones). For thermoelasticity and magnetoelasticity, summary of laws of thermodynamics and electrodynamics is given. Fundamentals of dynamics — oscillations, waves and stability — are explained. Theories of defects, fractures, composites and periodic structures are described.

Представлены все модели упругих сред: нелинейные и линейные, микрополярные и классические безмоментные; трёхмерные, двумерные (оболочки и пластины), одномерные (стержни, в том числе тонкостенные). Для термоупругости и магнитоупругости дана сводка законов термодинамики и электродинамики. Изложены основы динамики — колебания, волны и устойчивость. Описаны теории дефектов, трещин, композитов и периодических структур.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Глава 1. Элементы тензорного исчисления</i>	<b>10</b>
§ 1. Векторы	10
§ 2. Тензор и его компоненты	12
§ 3. Действия с тензорами	14
§ 4. Полиадное представление (разложение)	16
§ 5. Векторное произведение и тензор Лёви-Чивиты	18
§ 6. Симметричные и антисимметричные тензоры	21
§ 7. Собственные векторы и собственные числа тензора	24
§ 8. Тензор поворота	26
§ 9. Варьирование	32
§ 10. Полярное разложение	33
§ 11. Тензоры в косоугольном базисе	35
§ 12. Тензорные функции	41
§ 13. Тензорные поля. Дифференцирование	42
§ 14. Интегральные теоремы	45
§ 15. Тензоры кривизны	48
 <i>Глава 2. Основы общей механики</i>	 <b>52</b>
§ 1. Дискретная совокупность частиц	52
§ 2. Совершенно жёсткое недеформируемое твёрдое тело	54
§ 3. Принцип виртуальной работы	56
§ 4. Баланс импульса, момента импульса и энергии	58
§ 5. Принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа	59
§ 6. Статика	61
§ 7. Механика относительного движения	64
§ 8. Малые колебания (вибрации)	64

### Глава 3. Нелинейно-упругая безмоментная среда 65

§ 1. Модель сплошной среды. Описания процессов .....	65
§ 2. Дифференцирование .....	66
§ 3. Градиент движения .....	67
§ 4. Тензоры и меры деформации .....	68
§ 5. Поле скоростей .....	72
§ 6. Вектор площади. Изменение площади .....	74
§ 7. Силы в сплошной среде. Тензор напряжения Cauchy .....	74
§ 8. Баланс импульса и момента импульса .....	75
§ 9. Собственные числа тензора напряжения Коши .....	76
§ 10. Принцип виртуальной работы (без множителей Лагранжа) .....	77
§ 11. Определяющие отношения упругости .....	78
§ 12. Тензоры напряжения Piola–Kirchhoff’a и другие меры напряжения .....	80
§ 13. Варьирование текущей конфигурации .....	85
§ 14. Внутренние связи .....	85
§ 15. Полая сфера под действием давления .....	86
§ 16. Напряжения как множители Лагранжа .....	87

### Глава 4. Классическая линейная упругость 89

§ 1. Полный набор уравнений .....	89
§ 2. Уникальность решения динамической проблемы .....	91
§ 3. Закон Гука $\sigma = E \epsilon$ .....	93
§ 4. Теоремы статики .....	96
§ 5. Уравнения в перемещениях .....	99
§ 6. Сосредоточенная сила в неограниченной среде .....	100
§ 7. Определение перемещений по деформациям .....	100
§ 8. Уравнения в напряжениях .....	101
§ 9. Принцип минимума потенциальной энергии .....	101
§ 10. Принцип минимума дополнительной энергии .....	102
§ 11. Смешанные принципы стационарности .....	102
§ 12. Антиплоский сдвиг .....	104

§ 13. Кручение стержней .....	104
§ 14. Плоская деформация .....	104
<b>Глава 5. Микрополярная трёхмерная среда</b> .....	<b>106</b>
§ 1. Введение в линейную микрополярную теорию .....	106
§ 2. Отношения упругости .....	110
§ 3. Уравнения совместности .....	111
§ 4. Теоремы статики .....	111
§ 5. Псевдоконтинуум Коссера .....	112
§ 6. Плоская деформация .....	112
§ 7. Нелинейная теория .....	112
§ 8. Нелинейная модель со стеснённым вращением .....	115
<b>Глава 6. Термоупругость</b> .....	<b>116</b>
§ 1. Первый закон термодинамики .....	116
§ 2. Второй закон .....	118
§ 3. Определяющие уравнения .....	118
§ 4. Уравнение теплопроводности .....	119
§ 5. Линейная термоупругость .....	119
§ 6. Уравнения в перемещениях .....	119
§ 7. Температурное напряжение .....	119
§ 8. Вариационные формулировки .....	119
<b>Глава 7. Магнитоупругость</b> .....	<b>121</b>
§ 1. Электромагнитное поле. Электромагнитные волны .....	121
§ 2. Электростатика .....	124
§ 3. Диэлектрики .....	125
§ 4. Магнитостатика .....	125
§ 5. Магнетики .....	125
§ 6. Магнитная жёсткость .....	125
<b>Глава 8. Методы возмущений (асимптотические методы)</b> .....	<b>128</b>
§ 1. Асимптотические разложения .....	128
§ 2. Расщепление в линейной алгебраической системе .....	128

§ 3. Метод Пуанкаре .....	129
§ 4. Метод осреднения Ван дер Поля .....	129
§ 5. Сращивание асимптотических разложений .....	130
§ 6. Многоуровневый анализ (метод многих масштабов) .....	130
§ 7. Уравнения с медленно меняющимися параметрами .....	130
§ 8. Тонкие тела .....	130

## **Глава 9. Стержни** **132**

§ 1. Исходные представления .....	132
§ 2. Кинематика линий Коссера .....	133
§ 3. Баланс сил и моментов .....	133
§ 4. Принцип виртуальной работы и его следствия .....	133
§ 5. Классическая модель Кирхгофа .....	134
§ 6. Проблема Эйлера .....	134
§ 7. Вариационные уравнения .....	134
§ 8. Модель без сдвига с растяжением .....	134
§ 9. Механика гибкой нити .....	135
§ 10. Линейная теория .....	135
§ 11. Случай малой толщины .....	135
§ 12. Задача Сэйн-Венана .....	136
§ 13. Нахождение жёсткости по энергии .....	136
§ 14. Вариационный метод построения одномерной модели .....	137
§ 15. Асимптотическое ращепление трёхмерной проблемы .....	138
§ 16. Температурные деформация и напряжение .....	138

## **Глава 10. Тонкостенные стержни** **140**

§ 1. Вариационный подход .....	140
§ 2. Уравнения с малым параметром .....	140
§ 3. Первый шаг асимптотической процедуры .....	140
§ 4. Второй шаг .....	141
§ 5. Третий шаг .....	141
§ 6. Четвёртый шаг .....	142
§ 7. Перемещения .....	142
§ 8. Итоги асимптотического анализа .....	142

<b>Глава 11. Оболочки и пластины</b>	<b>144</b>
§ 1. Геометрия поверхности	144
§ 2. Модель оболочки	145
§ 3. Баланс сил и моментов для оболочки	145
§ 4. Оболочки: Отношения упругости	145
§ 5. Классическая теория оболочек	145
§ 6. Оболочки: Пластина	146
§ 7. Оболочки: Подход с множителями Лагранжа	146
§ 8. Цилиндрическая оболочка	146
§ 9. Оболочки: Общие теоремы	147
§ 10. Оболочки: Краевые условия	147
§ 11. Оболочки вращения	147
§ 12. Безмоментная теория оболочек	147
§ 13. Оболочки: Нелинейная безмоментная теория	148
§ 14. Оболочки: Иной вариант классической теории	148
§ 15. Пластины: Общие представления	148
§ 16. Модель пластины типа Тимошенко (прямой подход)	148
§ 17. Классическая теория пластин Кирхгофа	149
§ 18. Пластины: Асимптотическое сопоставление двумерных моделей	149
§ 19. Пластины: Вариационный переход от трёхмерной модели	149
§ 20. Пластины: Ращепление трёхмерной задачи изгиба	150
§ 21. Круглые пластины	150
§ 22. Пластины: Плоское напряжение	150
<b>Глава 12. Колебания и волны</b>	<b>151</b>
§ 1. Вибрации трёхмерного тела	151
§ 2. Вибрации стержня	152
§ 3. Малые возмущения параметров	152
§ 4. Вибрации оболочки	152
§ 5. Волны в упругой среде	152
§ 6. Волны в стержне	153

§ 7. Нелинейные колебания .....	153
<b>Глава 13. Устойчивость</b>	<b>154</b>
§ 1. Различные подходы к проблеме устойчивости .....	154
§ 2. Классические проблемы со стержнями .....	155
§ 3. “Следящие” нагрузки .....	155
§ 4. Роль добавочных податливостей .....	155
§ 5. Вариационные формулировки .....	155
§ 6. Неконсервативные задачи .....	156
§ 7. Случай кратных корней .....	156
<b>Глава 14. Дефекты</b>	<b>157</b>
§ 1. Дислокации Вольтерры .....	157
§ 2. Прямолинейные дислокации .....	157
§ 3. Действие поля напряжений на дислокацию .....	157
§ 4. О движении дислокаций .....	158
§ 5. Точечные дефекты .....	158
§ 6. Действующая на точечный дефект сила .....	158
§ 7. Непрерывно распределённые дислокации .....	158
§ 8. Напряжение при намотке катушки .....	158
<b>Глава 15. Трещины</b>	<b>160</b>
§ 1. Традиционные критерии прочности .....	160
§ 2. Антиплоская деформация среды с трещиной .....	161
§ 3. Трещина при плоской деформации .....	161
§ 4. Трещинодвижущая сила .....	161
§ 5. Критерий роста трещины .....	162
§ 6. J-интеграл .....	162
§ 7. Коэффициенты интенсивности напряжений .....	162
§ 8. Модель Баренблатта .....	162
§ 9. Деформационный критерий .....	163
§ 10. Рост трещин .....	163
§ 11. Упругое поле перед движущейся трещиной .....	163
§ 12. Баланс энергии для движущейся трещины .....	164



<i>Глава 16. Композиты</i>	<b>165</b>
§ 1. Вводные размышления .....	165
§ 2. Эффективные поля .....	165
§ 3. Краевые задачи для представительного объёма .....	165
§ 4. Вилка Хилла .....	166
§ 5. Формулы Эшелби .....	166
§ 6. Эффективные модули для материала со сферическими включениями .....	166
§ 7. Метод самосогласования .....	166
§ 8. Принцип Хашина–Штрикмана .....	167
<i>Глава 17. Периодические структуры</i>	<b>168</b>
§ 1. Одномерная задача .....	168
§ 2. Трёхмерный континуум .....	168
§ 3. Волокнистая структура .....	168
§ 4. Статика периодического стержня .....	168
<b>Список публикаций</b>	<b>169</b>

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

## § 1. Векторы

Упоминание о тензорах может отпугнуть читателя, обычно избегающего ненужных сложностей. Но тензоры вводятся лишь из-за своего чудесного свойства инвариантности — независимости от систем координат. Предлагаю начать знакомство с тензорами через воспоминания о векторах.

Вот вектор  $\mathbf{v}$ , он вполне характеризуется своей длиной (модулем) и направлением в пространстве, но не зависит от методов и единиц измерений ни длин, ни направлений.

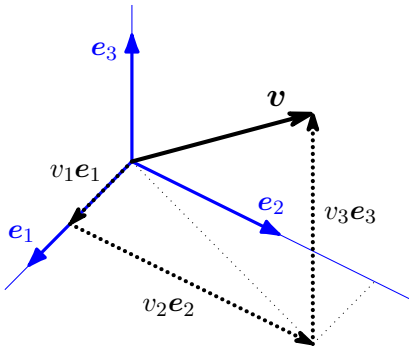


рисунок 1

Введём декартову систему координат со взаимно ортогональными ортами базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . В такой системе произведения базисных векторов равны дельте Kronecker'a:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Разлагая вектор  $\mathbf{v}$  по базису  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), имеем компоненты вектора (рис. 1)

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i \equiv v_i \mathbf{e}_i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = |\mathbf{v}| \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i). \quad (1.1)$$

Здесь и далее принимается соглашение о суммировании Einstein'a: наличие дважды повторённого индекса в одночлене подразумевает суммирование по этому индексу. Индекс не может повторяться более двух раз в одном и том же одночлене. А неповторяющийся индекс называется свободным, он одинаков в обеих частях равенства. Вот примеры:

$$\sigma = \tau_{ii}, \quad p_j = n_i \tau_{ij}, \quad m_i = e_{ijk} x_j f_k, \quad a_i = \lambda b_i + \mu c_i.$$

Эти же равенства некорректны

$$a = b_{kkk}, \quad c = f_i + g_k, \quad a_{ij} = k_i \gamma_{ij}.$$

Вектор  $\mathbf{v}$  инвариантен, он не зависит ни от какой системы координат. Его разложение в двух декартовых системах с базисными ортами  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}'_i$  даёт

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_i \mathbf{e}_i = v'_i \mathbf{e}'_i, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k &= \underbrace{v_k}_{v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = v_i \delta_{ik}} = v'_i \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_k = v'_k = v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k. \end{aligned}$$

Ортонормальные базисные векторы “старых” и “новых” — повернутых — декартовых координат связываются через матрицу поворота (матрицу “направляющих” косинусов)  $o_{i'k}$ :

$$\mathbf{e}'_i = o_{i'k} \mathbf{e}_k, \quad (\cdot \mathbf{e}_k) \Rightarrow o_{i'k} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k = \cos \angle(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k). \quad (1.2)$$

Матрица косинусов ортогональна, то есть она обращается при транспонировании:

$$o_{i'k} o_{j'k} = o_{k'i} o_{k'j} = \delta_{ij} \quad (1.3)$$

(доказательство:  $\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = o_{i'k} \mathbf{e}_k \cdot o_{j'n} \mathbf{e}_n = o_{i'k} o_{j'n} \delta_{kn} = o_{i'k} o_{j'k}$ ).

Ортогональное преобразование компонент вектора

$$v'_i = v_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i = o_{i'k} v_k \quad (1.4)$$

может быть использовано для определения самого вектора. Пусть в каждом ортонормированном базисе  $\mathbf{e}_i$  известна тройка чисел  $v_i$ , и при переходе к новому ортонормированному базису она преобразуется согласно (1.4); тогда эта тройка компонент представляет инвариантный объект — вектор  $\mathbf{v}$ .

Умножение ортогональной матрицы на компоненты любого вектора сохраняет длину (модуль) этого вектора:

$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v'_i v'_i = o_{i'k} v_k o_{i'n} v_n = v_n v_n$  — этот вывод опирается на (1.3).

## § 2. Тензор и его компоненты

Когда в каждом ортонормальном базисе  $e_i$  имеем набор девяти ( $3^2 = 9$ ) чисел  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), преобразующийся при переходе к новому (повёрнутому) ортонормальному базису как

$$B'_{ij} = o_{i'm} o_{j'n} B_{mn}, \quad (2.1)$$

тогда этот набор компонент представляет инвариантный объект — тензор второй сложности (второй валентности, бивалентный)  ${}^2B$ .

Иными словами, тензор  ${}^2B$  проявляется в каждом базисе совокупностью (матрицей) своих компонент  $B_{ij}$ , меняющейся вместе с базисом согласно (2.1). Широко распространённая в литературе подмена тензоров матрицами ведёт к ошибкам, если вы не следите за базисом, которому эти матрицы соответствуют.

Ключевой пример тензора второй сложности — диада. Имея два вектора  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ , в каждом базисе  $\mathbf{e}_i$  положим  $d_{ij} \equiv a_i b_j$ . Легко увидеть как компоненты  $d_{ij}$  преобразуются согласно (2.1):

$$a'_i = o_{i'm} a_m, \quad b'_j = o_{j'n} b_n \Rightarrow d'_{ij} = a'_i b'_j = o_{i'm} a_m o_{j'n} b_n = o_{i'm} o_{j'n} d_{mn}.$$

Получающийся тензор  ${}^2d$  называется диадным произведением (dyadic product) или просто диадой (dyad) и пишется как  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  или  $\mathbf{ab}$ . Я выбираю запись  ${}^2d = \mathbf{ab}$  без символа  $\otimes$ .

Существенный пример двухвалентного тензора есть единичная диада (другие именованья — единичный тензор, тождественный тензор и метрический тензор). Пусть для любого ортонормального (декартова, cartesian) базиса  $E_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ . Это действительно компоненты тензора, (2.1) актуально:  $E'_{mn} = o_{m'i} o_{n'j} E_{ij} = o_{m'i} o_{n'j} \delta_{ij} = \delta_{mn}$ . Я пишу этот тензор как  $\mathbf{E}$  (другие популярные варианты —  $\mathbf{I}$  и  ${}^2\mathbf{1}$ ).

Неизменяемость компонент при любом повороте базиса делает тензор  $\mathbf{E}$  изотропным. Ненулевых векторов с таким свойством нет (все компоненты нуль-вектора  $\mathbf{0}$  равны нулю в любом базисе).

Следующий пример связан с линейным преобразованием (линейным отображением) векторов. Если  $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$  есть линейная (сохраняющая сложение и умножение на число) функция

от  $\mathbf{a} = a_j \mathbf{e}_j$ , то  $b_i = c_{ij} a_j$  в каждом базисе. Коэффициенты преобразования  $c_{ij}$  меняются, когда базис вращается:

$$b'_i = c'_{ij} a'_j = o_{i'k} b_k = o_{i'k} c_{kn} a_n, \quad a_n = o_{j'n} a'_j \Rightarrow c'_{ij} = o_{i'k} o_{j'n} c_{kn}.$$

Оказывается, множество матриц  $c_{ij}$ ,  $c'_{ij}$ ,  $\dots$ , описывающих одно и то же линейное отображение  $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ , но в разных базисах, представляет один инвариантный объект — тензор второй сложности  ${}^2\mathbf{c}$ . И многие авторы книг вводят тензоры таким путём, посредством линейных отображений (линейных преобразований).

И последний пример — о билинейной форме  $F = f_{ij} a_i b_j$ , где  $f_{ij}$  — коэффициенты,  $a_i$  и  $b_j$  — компоненты векторных аргументов  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ . Результат  $F$  инвариантен (независим от базиса),  $F' = f'_{ij} a'_i b'_j = F$ , это даёт преобразование (2.1) для коэффициентов  $f_{ij}$ :

$$f'_{ij} a'_i b'_j = f_{mn} \underbrace{a'_m}_{o_{i'm} a'_i} \underbrace{b'_n}_{o_{j'n} b'_j} \Rightarrow f'_{ij} = o_{i'm} o_{j'n} f_{mn}.$$

Если  $f_{ij} = \delta_{ij}$ , то  $F = \delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i$  — скалярное произведение (внутреннее произведение, dot product) двух векторов. Когда оба аргумента одинаковые ( $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ ), такой однородный многочлен (полином) второй степени (квадратный) от компонент вектора  $F = f_{ij} a_i a_j$  называется квадратичной формой.

Теперь для более сложных тензоров (валентности больше двух). Тензор третьей сложности  ${}^3\mathbf{C}$  представляется совокупностью  $3^3 = 27$  чисел  $C_{ijk}$ , преобразующихся как

$$C'_{ijk} = o_{i'p} o_{j'q} o_{k'r} C_{pqr}. \quad (2.2)$$

Первичный пример — триада от трёх векторов  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$  и  $\mathbf{c} = c_k \mathbf{e}_k$ :

$$t_{ijk} \equiv a_i b_j c_k \Leftrightarrow {}^3t = \mathbf{abc}.$$

Видно, что ортогональные преобразования (2.2) и (2.1) — результаты “повторения” векторного (1.4). Читатель легко составит преобразование компонент для тензора любой сложности и напишет соответствующую полиаду как пример.

Векторы с преобразованием (1.4) суть тензоры первой сложности.

Напоследок рассмотрим наименее сложные объекты — скаляры, они же тензоры нулевой сложности. Скаляр это одно ( $3^0 = 1$ ) число, которое не зависит от базиса: энергия, масса, температура и др. Но что такое компоненты, к примеру, вектора  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ ,  $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ ? Если не скаляры, то что? Здесь не может быть простого ответа. В каждом отдельном базисе,  $\mathbf{e}_i$  — векторы и  $v_i$  — скаляры.

### § 3. Действия с тензорами

Этих действий четыре.

Первое — линейная комбинация — объединяет сложение и умножение на число. Аргументы этого действия и его результат — одинаковой сложности. Комбинирование двух тензоров выглядит так:

$$\lambda a_{ij\dots} + \mu b_{ij\dots} = c_{ij\dots} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{c}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты-скаляры;  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — тензоры одной и той же сложности. Легко показать, что компоненты результата  $\mathbf{c}$  удовлетворяют ортогональному преобразованию вида (2.1).

“Разложение вектора по базису” — представление вектора суммой  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$  — это не что иное как линейная комбинация векторов базиса  $\mathbf{e}_i$  с коэффициентами  $v_i$ .

Второе действие это умножение (тензорное произведение, прямое произведение). Оно принимает аргументы любых сложностей, возвращая результат суммарной сложности. Примеры:

$$\begin{aligned} v_i a_{jk} &= C_{ijk} \Leftrightarrow \mathbf{v}^2 \mathbf{a} = {}^3\mathbf{C}, \\ a_{ij} B_{abc} &= D_{ijabc} \Leftrightarrow {}^2\mathbf{a} {}^3\mathbf{B} = {}^5\mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Преобразование совокупности компонент результата, такой как  $C_{ijk} = v_i a_{jk}$ , при повороте базиса — ортогональное, подобное (2.2), посему тут нет сомнений, что эта совокупность есть набор компонент тензора.

Первичный и уже знакомый (по § 2) подвид умножения — диадное произведение двух векторов  ${}^2\mathbf{A} = \mathbf{b}\mathbf{c}$ .

Третье действие называется свёрткой (contraction). Это действие над одним тензором, других “участников” нет. Грубо говоря, свёртка состоит в суммировании компонент по какой-либо паре индексов. В результате свёртки сложность тензора уменьшается на два. Для тензора, например, третьей сложности  ${}^3\mathbf{D}$  возможны следующие варианты свёртки, приводящие к векторам  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$a_i = D_{kki}, \quad b_i = D_{kik}, \quad c_i = D_{ikk}. \quad (3.3)$$

При повороте базиса

$$a'_i = D'_{kki} = \underbrace{o_{k'p} o_{k'q} o_{i'r}}_{\delta_{pq}} D_{pqr} = o_{i'r} D_{ppr} = o_{i'r} a_r,$$

что доказывает тензорный характер результата свёртки.

Для тензора второй сложности возможен лишь один вариант свёртки, приводящий к скаляру, называемому первым инвариантом или следом тензора

$$\mathbf{B}_\bullet \equiv \text{tr } \mathbf{B} \equiv \text{I}(\mathbf{B}) = B_{kk}.$$

След единичного тензора (“свёртка дельты Кронекера”) есть размерность пространства:

$$\text{tr } \mathbf{E} = \mathbf{E}_\bullet = \delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

Четвёртое действие именуется по-разному: перестановка индексов, жонглирование индексами, index swap, index juggling и др. Из компонент тензора образуется новая совокупность величин с другой последовательностью индексов, результатом является тензор той же сложности. Из тензора  ${}^3\mathbf{D}$ , например, могут быть получены тензоры  ${}^3\mathbf{A}$ ,  ${}^3\mathbf{B}$ ,  ${}^3\mathbf{C}$  с компонентами

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{A} &= {}^3\mathbf{D}_{1\rightleftharpoons 2} \Leftrightarrow A_{ijk} = D_{jik}, \\ {}^3\mathbf{B} &= {}^3\mathbf{D}_{1\rightleftharpoons 3} \Leftrightarrow B_{ijk} = D_{kji}, \\ {}^3\mathbf{C} &= {}^3\mathbf{D}_{2\rightleftharpoons 3} \Leftrightarrow C_{ijk} = D_{ikj}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для бивалентного тензора возможна лишь одна перестановка, именуемая транспонированием:  $\mathbf{A}^\top \equiv \mathbf{A}_{1\rightleftharpoons 2} = \mathbf{B} \Leftrightarrow B_{ij} = A_{ji}$ . Очевидно  $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$ .

При диадном умножении векторов  $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}^\top$ .

Представленные четыре действия комбинируются в разных сочетаниях. Комбинация умножения и свёртки — dot product — самая частая, в инвариантной безындексной записи она обозначается

ется точкой, показывающей свёртку по соседним индексам:

$$a_i = B_{ij}c_j \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}, \quad A_{ij} = B_{ik}C_{kj} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}. \quad (3.5)$$

Определяющее свойство единичного тензора

$${}^n\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{a} = {}^n\mathbf{a} \quad \forall {}^n\mathbf{a} \quad \forall n > 0. \quad (3.6)$$

В коммутативном скалярном произведении двух векторов точка имеет тот же смысл:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{ab})_{\bullet} = \text{tr } \mathbf{ab} = a_i b_i = b_i a_i = \text{tr } \mathbf{ba} = (\mathbf{ba})_{\bullet} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.7)$$

Для dot product'a тензоров второй сложности справедливо следующее

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q} &= (\mathbf{Q}^{\top} \cdot \mathbf{B}^{\top})^{\top} \\ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q})^{\top} &= \mathbf{Q}^{\top} \cdot \mathbf{B}^{\top} \end{aligned} \quad (3.8)$$

(например, для диад  $\mathbf{B} = \mathbf{bd}$  и  $\mathbf{Q} = \mathbf{pq}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{bd} \cdot \mathbf{pq})^{\top} &= \mathbf{pq}^{\top} \cdot \mathbf{bd}^{\top} \\ d_i p_i \mathbf{bq}^{\top} &= \mathbf{qp} \cdot \mathbf{db} \\ d_i p_i \mathbf{qb} &= p_i d_i \mathbf{qb} \quad ). \end{aligned}$$

Для вектора и бивалентного тензора

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{\top} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}^{\top}. \quad (3.9)$$

Тензор второй валентности “в квадрате” это

$$\mathbf{B}^2 \equiv \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.10)$$

Свёртка может повторяться:  $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} \equiv A_{ij} B_{ji}$ , и вот немного полезных равенств для тензоров второй сложности

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}_{\bullet} = A_{jj}, \\ \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B}^{\top} = \mathbf{A}^{\top} \cdot \cdot \mathbf{B}, \\ \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{jk} C_{ki}, \\ \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{D} = \\ &= \mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = A_{ij} B_{jk} C_{kh} D_{hi}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

#### § 4. Полиадное представление (разложение)

В §2 тензор был представлен как некий инвариантный объект, проявляющий себя в каждом базисе совокупностью чисел (компонент). Такое представление характерно для большинства книг



о тензорах. Индексная запись может быть конструктивна, особенно когда достаточно декартовых координат, но весьма часто это не так. И подходящий случай — физика упругих сред: ей нужен более изящный, более мощный и совершенный аппарат прямого тензорного исчисления, оперирующий лишь с безындексными инвариантными объектами.

Отношение  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$  из (1.1) соединяет вектор  $\mathbf{v}$  с базисом  $\mathbf{e}_i$  и компонентами  $v_i$  вектора в том базисе. Вскоре мы получим похожее соотношение для тензора любой сложности.

Любой бивалентный тензор  ${}^2\mathbf{B}$  описывается девятью компонентами  $B_{ij}$  в каждом базисе. Число различных диад  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  в том же самом базисе — тоже девять ( $3^2$ ). Линейное комбинирование этих диад с коэффициентами  $B_{ij}$  даёт сумму  $B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ . Это тензор, — но каковы́ его компоненты, и как это представление меняется (или не меняется) с поворотом базиса?

Компоненты построенной суммы

$$(B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)_{pq} = B_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = B_{pq}$$

суть компоненты тензора  ${}^2\mathbf{B}$ . С поворотом же базиса

$$B'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = o_{i'p} o_{j'q} B_{pq} o_{i'n} \mathbf{e}_n o_{j'm} \mathbf{e}_m = \delta_{pn} \delta_{qm} B_{pq} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m = B_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q.$$

Сомнения отпали — приходим к диадному представлению тензора второй сложности

$${}^2\mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (4.1)$$

Для единичной диады (единичного тензора) (that's why it is called the unit dyad)

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Полиадные представления типа (4.1) помогают проще и с бóльшим пониманием оперировать с тензорами:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot {}^2\mathbf{B} &= v_i \mathbf{e}_i \cdot B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = v_i B_{jk} \delta_{ij} \mathbf{e}_k = v_i B_{ik} \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{e}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_i \cdot B_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_j = B_{pq} \delta_{ip} \delta_{qj} = B_{ij} = {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Последняя строчка весьма интересна: компоненты тензора выражены через сам тензор. Ортогональное преобразование компонент при повороте базиса (2.1) оказывается очевидным следствием (4.2).

Аналогичным образом по базисным полиадам разлагается тензор любой сложности. Например, для трёхвалентного тензора

$$\begin{aligned} {}^3C &= C_{ijk} e_i e_j e_k, \\ C_{ijk} &= {}^3C \cdots e_k e_j e_i = e_i \cdot {}^3C \cdots e_k e_j = e_j e_i \cdots {}^3C \cdot e_k. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя разложение по полиадам, легко увидеть справедливость свойства (3.6) “единичности” тензора  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} {}^n\mathbf{a} &= a_{ij\dots q} e_i e_j \dots e_q, \quad \mathbf{E} = e_e e_e \\ {}^n\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} &= a_{ij\dots q} e_i e_j \dots \underbrace{e_q \cdot e_e}_{\delta_{eq}} e_e = a_{ij\dots q} e_i e_j \dots e_q = {}^n\mathbf{a}, \\ \mathbf{E} \cdot {}^n\mathbf{a} &= e_e e_e \cdot a_{ij\dots q} e_i e_j \dots e_q = a_{ij\dots q} \delta_{ei} e_e e_j \dots e_q = {}^n\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Полиадное представление соединяет прямую и индексную записи воедино. Не сто́ит противопоставлять одно другому. Прямая запись компактна, изящна, и лишь она должна быть в фундаментальных соотношениях. Но и индексная запись бывает удобна, например, при громоздких выкладках с тензорами.

## § 5. Векторное произведение и тензор Лёви-Чивиты

По привычным представлениям, векторное произведение двух векторов есть вектор, направленный перпендикулярно плоскости сомножителей, длина которого равна площади параллелограмма, охватываемого сомножителями

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Cross product (векторное произведение)  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  считается псевдовектором, поскольку тройка векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  может быть либо “правой”, либо “левой” (рис. 2).

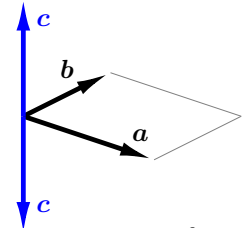


рисунок 2

Инаковость псевдовекторов сужает разнообразие формул: псевдовектор не складывается с вектором. Формула кинематики абсолютно жёсткого

недеформируемого тела  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  корректна, поскольку  $\boldsymbol{\omega}$  там — псевдовектор, и в векторном произведении два “псевдо” взаимно компенсируют друг друга.

Впрочем, векторное произведение не есть ещё одно новое, полностью отдельное действие. Оно сводится к четырём ранее описанным (§ 3) и обобщается на тензоры любой сложности. Покажем это.

Сначала введём символ перестановки (permutation symbol) O. Veblen'a  $e_{ijk}$ :  $e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$ ,  $e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1$ , остальные нули. Символ  $e_{ijk}$  ( $\pm 1$  или  $0$ ) меняет знак при перестановке любых двух индексов, не меняется при двойной (“круговой”) перестановке индексов и обращается в нуль при совпадении какой-либо пары.

Через символ Веблена определитель (детерминант) матрицы  $A_{ij}$  выражается так:

$$\det A_{ij} = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = e_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}.$$

Далее познакомимся с волюметрическим тензором третьей сложности — тензором Levi-Civita'ы

$${}^3\epsilon = \epsilon_{ijk} e_i e_j e_k, \quad \epsilon_{ijk} \equiv e_i \times e_j \cdot e_k. \quad (5.1)$$

Абсолютная величина каждой ненулевой компоненты  $\epsilon_{ijk}$  равна объёму  $\sqrt{g}$  параллелепипеда, натянутого на базис — “смешанному” (“тройному”, “векторно-скалярному”) произведению базисных векторов.

Тензор  ${}^3\epsilon$  изотропный, его компоненты при повороте базиса не меняются. Но при изменении ориентации тройки базисных векторов (перемене “направления винта”)  ${}^3\epsilon$  меняет знак и поэтому является псевдотензором.

С тензором Лёви-Чивиты  ${}^3\epsilon$  возможно по-новому взглянуть на векторное произведение:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= e_i \times e_j \cdot e_k \Leftrightarrow e_i \times e_j = \epsilon_{ijk} e_k, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_i e_i \times b_j e_j = \epsilon_{ijk} a_i b_j e_k = \mathbf{ba} \cdot \cdot {}^3\epsilon = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Это всего лишь dot product — комбинация умножения и свёртки — с участием тензора  ${}^3\epsilon$ .

Такие комбинации возможны с любыми тензорами:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times {}^2\mathbf{B} &= a_i \mathbf{e}_i \times B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \underbrace{a_i B_{jk} \epsilon_{ijn} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_k}_{-a_i \epsilon_{ijn} B_{jk}} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^2\mathbf{B}, \\
 {}^2\mathbf{C} \times d\mathbf{b} &= C_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \times d_p b_q \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q = \mathbf{e}_i C_{ij} d_p \underbrace{\epsilon_{jpk} \mathbf{e}_k b_q \mathbf{e}_q}_{-\epsilon_{jpk} = -\epsilon_{jkp}} = \\
 &= -{}^2\mathbf{C} d \cdot {}^3\epsilon b = -{}^2\mathbf{C} \cdot {}^3\epsilon \cdot d\mathbf{b}, \\
 \mathbf{E} \times \mathbf{E} &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = \underbrace{-\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k}_{+\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j} = -{}^3\epsilon. \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Последнее равенство представляет собой связь изотропных тензоров второй и третьей сложности.

Обобщая на любые тензоры ненулевой сложности

$${}^n\boldsymbol{\xi} \times {}^m\boldsymbol{\zeta} = -{}^n\boldsymbol{\xi} \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^m\boldsymbol{\zeta} \quad \forall {}^n\boldsymbol{\xi}, {}^m\boldsymbol{\zeta} \quad \forall n > 0, m > 0. \quad (5.4)$$

Когда один из тензоров — единичный (“метрический”), из (5.4) и (3.6)  $\forall {}^n\boldsymbol{\Upsilon} \quad \forall n > 0$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \times {}^n\boldsymbol{\Upsilon} &= -\mathbf{E} \cdot {}^3\epsilon \cdot {}^n\boldsymbol{\Upsilon} = -{}^3\epsilon \cdot {}^n\boldsymbol{\Upsilon}, \\
 {}^n\boldsymbol{\Upsilon} \times \mathbf{E} &= -{}^n\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\epsilon \cdot \mathbf{E} = -{}^n\boldsymbol{\Upsilon} \cdot {}^3\epsilon.
 \end{aligned}$$

Для любого тензора первой сложности (вектора)

$$\mathbf{E} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a}. \quad (5.5)$$

Для любых двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} \mathbf{b}, \\
 \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{b} \mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{b} \mathbf{a}, \\
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon = \mathbf{b} \mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.
 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Когда базис  $\mathbf{e}_i$  это “правая” тройка взаимно ортогональных векторов единичной длины, тогда  $\sqrt{g} = 1$ , и компоненты  ${}^3\epsilon$  равны символу Веблена:  $\epsilon_{ijk} = e_{ijk}$ . Если же тройка  $\mathbf{e}_i$  “левая”, то  $\epsilon_{ijk} = -e_{ijk}$ .

Справедливо такое соотношение

$$e_{ijk} e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Доказательство начнём с представлений символов Веблена как определителей:

$$e_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix}, \quad e_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{bmatrix}.$$

В левой части (5.7) имеем произведение этих определителей. Но  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  — определитель произведения матриц равен произведению определителей. В матрице-произведении элемент  $[\dots]_{11}$  равен  $\delta_{is}\delta_{ps} = \delta_{ip}$ , как и в (5.7); легко проверить и другие фрагменты (5.7).

Свёртка (5.7) приводит к полезным формулам

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \quad e_{ijk}e_{pjk} = 2\delta_{ip}, \quad e_{ijk}e_{ijk} = 6. \quad (5.8)$$

Первая из формул даёт знакомое представление двойного векторного произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_i \mathbf{e}_i \times \epsilon_{pqj} b_p c_q \mathbf{e}_j = \epsilon_{kij} \epsilon_{pqj} a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = \\ &= (\delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip}) a_i b_p c_q \mathbf{e}_k = a_i b_k c_i \mathbf{e}_k - a_i b_i c_k \mathbf{e}_k = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{ca} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Тем же путём выводится  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}$ .

И такие тождества для любых двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{E} &= \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n = a_i b_j \epsilon_{ijk} \epsilon_{knq} \mathbf{e}_q \mathbf{e}_n = \\ &= a_i b_j (\delta_{in}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jn}) \mathbf{e}_q \mathbf{e}_n = a_i b_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{ba} - \mathbf{ab}, \quad (5.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon) \cdot (\mathbf{b} \cdot {}^3\epsilon) = \\ &= a_i \epsilon_{ipn} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_n \cdot b_j \epsilon_{jsk} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k = a_i b_j \epsilon_{ipn} \epsilon_{nkj} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = \\ &= a_i b_j (\delta_{ik}\delta_{pj} - \delta_{ij}\delta_{pk}) \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = a_i b_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - a_i b_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \\ &= \mathbf{ba} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{E}. \quad (5.10) \end{aligned}$$

Ещё одно соотношение между изотропными тензорами второй и третьей сложности:

$${}^3\epsilon \cdot {}^3\epsilon = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \epsilon_{kjn} \mathbf{e}_n = -2\delta_{in} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_n = -2\mathbf{E}. \quad (5.11)$$

## § 6. Симметричные и антисимметричные тензоры

Тензор, не меняющийся при перестановке какой-либо пары своих индексов, называется симметричным по этой паре индексов. Если же при перестановке пары индексов тензор меняет свой

знак, то он называется антисимметричным (кососимметричным) по этой паре индексов.

Тензор Лёви-Чивиты  ${}^3\epsilon$  антисимметричен по любой паре индексов, то есть он полностью антисимметричен (абсолютно кососимметричен).

Тензор второй сложности  $\mathbf{B}$  симметричен, если  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\top$ . Когда транспонирование меняет знак тензора, то есть  $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$ , тогда он антисимметричен (кососимметричен).

Любой тензор второй сложности представим суммой симметричной и антисимметричной частей

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{C}^S + \mathbf{C}^A, \quad \mathbf{C}^\top = \mathbf{C}^S - \mathbf{C}^A; \\ \mathbf{C}^S &\equiv \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^\top), \quad \mathbf{C}^A \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}^\top). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Для диады  $\mathbf{cd} = \mathbf{cd}^S + \mathbf{cd}^A = \frac{1}{2}(\mathbf{cd} + \mathbf{dc}) + \frac{1}{2}(\mathbf{cd} - \mathbf{dc})$ .

Произведение двух симметричных тензоров  $\mathbf{C}^S \cdot \mathbf{D}^S$  симметрично далеко не всегда, но только когда  $\mathbf{D}^S \cdot \mathbf{C}^S = \mathbf{C}^S \cdot \mathbf{D}^S$ , ведь по (3.8)  $(\mathbf{C}^S \cdot \mathbf{D}^S)^\top = \mathbf{D}^S \cdot \mathbf{C}^S$ .

В нечётномерных пространствах любой антисимметричный тензор второй сложности необратим, его определитель  $\det \mathbf{A} = 0$ .

Существует взаимно-однозначное соответствие между антисимметричными тензорами второй сложности и (псевдо)векторами. Компоненты кососимметричного тензора полностью определяются тройкой чисел (диагональные элементы матрицы компонент — нули, а недиагональные — попарно противоположны). Dot product кососимметричного  $\mathbf{A}$  и какого-либо тензора  ${}^n\xi$  однозначно соответствует cross product'у псевдовектора  $\mathbf{a}$  и того же тензора  ${}^n\xi$

$$\mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot {}^n\xi \Leftrightarrow \mathbf{a} \times {}^n\xi = \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{A} = \mathbf{A}^A \quad \forall {}^n\xi \quad \forall n > 0. \quad (6.2)$$

Раскроем это соответствие  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{a})$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot {}^n\xi &= \mathbf{a} \times {}^n\xi \\ A_{hi} e_h e_i \cdot \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q &= a_i e_i \times \xi_{jk\dots q} e_j e_k \dots e_q \\ A_{hj} \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q &= a_i \epsilon_{ijh} \xi_{jk\dots q} e_h e_k \dots e_q \\ A_{hj} &= -a_i \epsilon_{ijh} \\ \mathbf{A} &= -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon\end{aligned}$$

Так же из  ${}^n\xi \cdot \mathbf{A} = {}^n\xi \times \mathbf{a}$  получается  $\mathbf{A} = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a}$ .

В общем, для взаимно-однозначного соответствия между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{a}$  имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -\mathbf{a} \cdot {}^3\epsilon = \mathbf{a} \times \mathbf{E} = -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \left(-\frac{1}{2} {}^3\epsilon \cdot {}^3\epsilon\right) = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\epsilon.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Вектор  $\mathbf{a}$  называется сопутствующим тензору  $\mathbf{A}$ .

Компоненты кососимметричного  $\mathbf{A}$  через компоненты сопутствующего ему псевдовектора  $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -{}^3\epsilon \cdot \mathbf{a} = -\epsilon_{ijk} e_i e_j a_k, \\ A_{ij} &= -\epsilon_{ijk} a_k = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

и обратно

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot {}^3\epsilon = \frac{1}{2} A_{jk} \epsilon_{kji} e_i, \\ a_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} A_{jk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \epsilon_{123} A_{32} + \epsilon_{132} A_{23} \\ \epsilon_{213} A_{31} + \epsilon_{231} A_{13} \\ \epsilon_{312} A_{21} + \epsilon_{321} A_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{32} - A_{23} \\ A_{13} - A_{31} \\ A_{21} - A_{12} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Легко запоминающийся вспомогательный “псевдовекторный инвариант”  $\mathbf{A}_\times$  получается из тензора  $\mathbf{A}$  заменой диадных произведений на векторные

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\times &\equiv A_{ij} e_i \times e_j = -\mathbf{A} \cdot {}^3\epsilon, \\ \mathbf{A}_\times &= (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times = -2\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\times = -\frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{E})_\times.\end{aligned}\tag{6.4}$$

Обоснование (6.4):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}_{\times} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)}_{\epsilon_{ijn} \mathbf{e}_n} \times \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \\
 &= -\frac{1}{2} A_{ij} \underbrace{\epsilon_{nij} \epsilon_{nkp}}_{\delta_{jp} \delta_{ik} - \delta_{ip} \delta_{jk}} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_k = -\frac{1}{2} A_{ij} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \\
 &= -\frac{1}{2} (\mathbf{A}^T - \mathbf{A}) = \mathbf{A}^A = \mathbf{A}.
 \end{aligned}$$

Сопутствующий вектор **можно ввести** для любого бивалентного тензора, но лишь антисимметричная часть при этом даёт вклад:  $\mathbf{C}^A = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_{\times} \times \mathbf{E}$ . Для симметричного тензора сопутствующий вектор — нулевой:  $\mathbf{B}_{\times} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^T = \mathbf{B}^S$ .

С (6.4) разложение какого-либо тензора  $\mathbf{C}$  на симметричную и антисимметричную части выглядит как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^S - \frac{1}{2} \mathbf{C}_{\times} \times \mathbf{E}. \quad (6.5)$$

Для диады же

$$(5.9) \Rightarrow (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E} = \mathbf{dc} - \mathbf{cd} = -2\mathbf{cd}^A, \quad (\mathbf{cd})_{\times} = \mathbf{c} \times \mathbf{d},$$

и разложение её

$$\mathbf{cd} = \frac{1}{2} (\mathbf{cd} + \mathbf{dc}) - \frac{1}{2} (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{E}. \quad (6.6)$$

## § 7. Собственные векторы и собственные числа тензора

Если для тензора  ${}^2\mathbf{B}$  и ненулевого вектора  $\mathbf{a}$

$${}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \quad (7.1)$$

$${}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}, \quad ({}^2\mathbf{B} - \eta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

то  $\eta$  называется собственным числом (собственным значением, eigenvalue, proper value, главным значением)  ${}^2\mathbf{B}$ , а определяемая собственным вектором  $\mathbf{a}$  ось (направление) — его собственной (главной, principal) осью (направлением).

В компонентах это матричная задача на собственные значения  $(B_{ij} - \eta \delta_{ij}) a_j = 0$  — однородная линейная алгебраическая система, имеющая ненулевые решения при равенстве нулю определителя  $\det(B_{ij} - \eta \delta_{ij})$ :

$$\det \begin{bmatrix} B_{11} - \eta & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} - \eta & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - \eta \end{bmatrix} = -\eta^3 + \text{I} \eta^2 - \text{II} \eta + \text{III} = 0; \quad (7.2)$$



$$\begin{aligned}
I &= \text{tr } {}^2\mathbf{B} = B_{kk} = B_{11} + B_{22} + B_{33}, \\
II &= B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} + B_{11}B_{33} - B_{13}B_{31} + B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}, \quad (7.3) \\
III &= \det {}^2\mathbf{B} = \det B_{ij} = e_{ijk} B_{1i} B_{2j} B_{3k} = e_{ijk} B_{i1} B_{j2} B_{k3}.
\end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения (7.2) — собственные числа — не зависят от базиса и потому инвариантны.

Коэффициенты (7.3) тоже не зависят от базиса; они называются первым, вторым и третьим инвариантами тензора. С первым инвариантом  $I$  — следом тензора — мы уже встречались в §3. Второй инвариант  $II$  это след союзной (взаимной, adjugate) матрицы — транспонированной матрицы дополнений:  $II({}^2\mathbf{B}) \equiv \text{tr}(\text{adj } B_{ij})$ . Или он же  $II({}^2\mathbf{B}) \equiv \frac{1}{2}[(\text{tr } {}^2\mathbf{B})^2 - {}^2\mathbf{B} \bullet \bullet {}^2\mathbf{B}] = \frac{1}{2}[(B_{kk})^2 - B_{ij}B_{ji}]$ . И третий инвариант  $III$  это определитель (детерминант) компонент тензора:  $III({}^2\mathbf{B}) \equiv \det {}^2\mathbf{B}$ .

Это относилось ко всем тензорам второй сложности. Для случая же симметричного тензора справедливо следующее:

- 1°. Собственные числа симметричного тензора вещественны.
- 2°. Собственные оси для разных собственных чисел ортогональны.

Первое утверждение доказывается от противного. Если  $\eta$  — комплексный корень (7.2), определяющий собственный вектор  $\mathbf{a}$ , то сопряжённое число  $\bar{\eta}$  также будет корнем. Ему соответствует собственный вектор  $\bar{\mathbf{a}}$  с сопряжёнными компонентами. При этом

$$\begin{aligned}
(7.1) \Rightarrow (\bar{\mathbf{a}} \bullet) {}^2\mathbf{B} \bullet \mathbf{a} &= \eta \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} \bullet) {}^2\mathbf{B} \bullet \bar{\mathbf{a}} = \bar{\eta} \bar{\mathbf{a}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \bar{\mathbf{a}} \bullet {}^2\mathbf{B} \bullet \mathbf{a} - \mathbf{a} \bullet {}^2\mathbf{B} \bullet \bar{\mathbf{a}} = (\eta - \bar{\eta}) \mathbf{a} \bullet \bar{\mathbf{a}}.
\end{aligned}$$

Но слева здесь — нуль, поскольку  $\mathbf{a} \bullet {}^2\mathbf{B} \bullet \mathbf{c} = \mathbf{c} \bullet {}^2\mathbf{B}^\top \bullet \mathbf{a}$  и  ${}^2\mathbf{B} = {}^2\mathbf{B}^\top$ . Поэтому  $\eta = \bar{\eta}$ , то есть вещественно.

Столь же просто обосновывается и 2°:

$$\begin{aligned}
\underbrace{a_2 \bullet {}^2\mathbf{B} \bullet a_1 - a_1 \bullet {}^2\mathbf{B} \bullet a_2}_{=0} &= (\eta_1 - \eta_2) \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{a}_2, \quad \eta_1 \neq \eta_2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{a}_2 = 0.
\end{aligned}$$

При различных собственных числах собственные векторы единичной длины  $\mathbf{e}_i$  образуют ортонормальный базис. Каковы же в нём компоненты тензора?

$${}^2B \cdot \mathbf{a}_k = \sum_k \eta_k \mathbf{a}_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$${}^2B \cdot \underbrace{\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k}_E = \sum_k \eta_k \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k$$

В общем случае  $B_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot {}^2B \cdot \mathbf{e}_j$ , в базисе же  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  единичных взаимно ортогональных  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$  собственных осей симметричного тензора:

$$B_{11} = \mathbf{a}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \eta_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \eta_3 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3) \cdot \mathbf{a}_1 = \eta_1,$$

$$B_{12} = \mathbf{a}_1 \cdot (\eta_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \eta_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \eta_3 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3) \cdot \mathbf{a}_2 = 0,$$

$$\dots$$

Матрица компонент диагональна и  ${}^2B = \sum \eta_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i$ . Здесь идёт суммирование по трём повторяющимся индексам, ведь используются особенный базис.

Случай кратных главных значений можно рассмотреть с помощью предельного перехода. При  $\eta_2 \rightarrow \eta_1$  любая линейная комбинация  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  в пределе удовлетворяет (7.1); это значит, что любая ось в плоскости  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  становится собственной. Если же совпадают все три собственных числа, то любая ось в пространстве — собственная. При этом  ${}^2B = \eta E$ , такие тензоры называются изотропными или шаровыми.

## § 8. Тензор поворота

Соотношение между двумя “правыми” (или двумя “левыми”) ортонормальными базисами  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathring{\mathbf{e}}_i$  вполне определено матрицей косинусов (§ 1)

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \underbrace{\mathring{\mathbf{e}}_j \mathring{\mathbf{e}}_j}_E = o_{ij} \mathring{\mathbf{e}}_j, \quad o_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathring{\mathbf{e}}_j.$$

Но можно написать и так:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \underbrace{\mathring{\mathbf{e}}_j \cdot \mathring{\mathbf{e}}_i}_{\delta_{ji}} = \mathbf{P} \cdot \mathring{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{P} \equiv \mathbf{e}_j \mathring{\mathbf{e}}_j = e_1 \mathring{\mathbf{e}}_1 + e_2 \mathring{\mathbf{e}}_2 + e_3 \mathring{\mathbf{e}}_3. \quad (8.1)$$

$\mathbf{P}$  называется тензором поворота.

Компоненты  $\mathbf{P}$  и в начальном  $\mathring{\mathbf{e}}_i$ , и в повернутом  $\mathbf{e}_i$  базисах образуют одну и ту же матрицу, равную транспонированной

матрице косинусов  $o_{ji}^{\circ} = \mathring{e}_i \cdot e_j$ :

$$\begin{aligned} e_i \cdot P \cdot e_j &= \underbrace{e_i \cdot e_k}_{\delta_{ik}} \mathring{e}_k \cdot e_j = \mathring{e}_i \cdot e_j, \\ \mathring{e}_i \cdot P \cdot \mathring{e}_j &= \mathring{e}_i \cdot e_k \underbrace{\mathring{e}_k \cdot \mathring{e}_j}_{\delta_{kj}} = \mathring{e}_i \cdot e_j, \\ P &= o_{ji}^{\circ} e_i e_j = o_{ji}^{\circ} \mathring{e}_i \mathring{e}_j. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Тензор  $P$  связывает два вектора — “до поворота”  $\mathring{r} = \rho_i \mathring{e}_i$  и “после поворота”  $r = \rho_i e_i$  — с теми же компонентами  $\rho_i$  у  $r$  в актуальном повернутом базисе  $e_i$ , что и у  $\mathring{r}$  в неподвижном базисе  $\mathring{e}_i$  (“вектор вращается вместе с базисом”): поскольку  $e_i = e_j \mathring{e}_j \cdot \mathring{e}_i \Leftrightarrow \rho_i e_i = e_j \mathring{e}_j \cdot \rho_i \mathring{e}_i$ , то

$$r = P \cdot \mathring{r} \quad (8.3)$$

(эта связь — обобщённая формула поворота Rodrigues’a).

Поворот же тензора второй сложности  $\mathring{C} = C_{ij} \mathring{e}_i \mathring{e}_j$  в текущее (актуальное) положение  $C = C_{ij} e_i e_j$  происходит так:

$$C_{ij} e_i e_j = e_i \mathring{e}_i \cdot C_{pq} \mathring{e}_p \mathring{e}_q \cdot \mathring{e}_j e_j \Leftrightarrow C = P \cdot \mathring{C} \cdot P^{\top}. \quad (8.4)$$

Существенное свойство тензора поворота — ортогональность — выражается как

$$\underbrace{P}_{e_i \mathring{e}_i} \cdot \underbrace{P^{\top}}_{\mathring{e}_j e_j} = \underbrace{P^{\top}}_{\mathring{e}_i e_i} \cdot \underbrace{P}_{e_j \mathring{e}_j} = \underbrace{E}_{\mathring{e}_i \mathring{e}_i \atop e_i e_i}, \quad (8.5)$$

то есть транспонированный тензор совпадает с обратным тензором:  $P^{\top} = P^{-1} \Leftrightarrow P = P^{-\top}$ .

Ортогональный тензор не меняет скалярное произведение векторов, сохраняя длины и углы (“метрику”)

$$(P \cdot a) \cdot (P \cdot b) = a \cdot P^{\top} \cdot P \cdot b = a \cdot E \cdot b = a \cdot b. \quad (8.6)$$

Для всех ортогональных тензоров  $(\det O)^2 = 1$ :

$$1 = \det E = \det (O \cdot O^{\top}) = (\det O) (\det O^{\top}) = (\det O)^2.$$

Тензор поворота это ортогональный тензор с  $\det P = 1$ . Но не только лишь тензоры поворота обладают свойством ортогональности. Когда в (8.1) один из базисов “правый”, а другой “левый”, тогда это комбинация поворота и отражения (“rotoreflection”)  $O = -E \cdot P$  с  $\det (-E \cdot P) = -1$ .

У любого бивалентного тензора в трёхмерном пространстве как минимум одно собственное число — корень (7.2) — действительное (некомплексное). Для тензора поворота оно равно единице

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \eta \mathbf{a} \Rightarrow \overbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P}}^{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}} = \eta \mathbf{a} \cdot \eta \mathbf{a} \Rightarrow \eta^2 = 1.$$

Соответствующая собственная ось называется осью поворота; теорема Euler’a о конечном повороте в том и состоит, что такая ось существует. Если  $\mathbf{k}$  — орт этой оси, а  $\vartheta$  — величина угла поворота, то тензор поворота представим как

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}, \vartheta) = \mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta). \quad (8.7)$$

Доказывается эта формула так. Направление  $\mathbf{k}$  при повороте не меняется ( $\mathbf{P} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}$ ), поэтому на оси поворота  $\mathring{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ . В перпендикулярной плоскости (рис. 3)  $\mathring{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \vartheta - \mathbf{e}_2 \sin \vartheta$ ,  $\mathring{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 \sin \vartheta + \mathbf{e}_2 \cos \vartheta$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{e}_i \mathring{\mathbf{e}}_i \Rightarrow (8.7)$ .

Из (8.7) и (8.3) получаем формулу поворота Родрига в параметрах  $\mathbf{k}$  и  $\vartheta$ :

$$\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathring{\mathbf{r}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathring{\mathbf{r}} (1 - \cos \vartheta).$$

В параметрах конечного поворота транспонирование, оно же обращение, тензора  $\mathbf{P}$  эквивалентно перемене направления поворота — знака угла  $\vartheta$

$$\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}|_{\vartheta=-\vartheta} = \mathbf{E} \cos \vartheta - \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta).$$

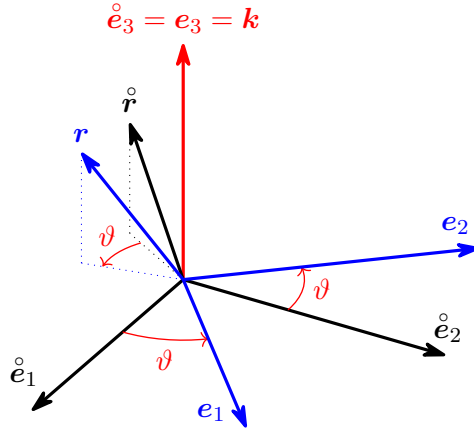
Пусть теперь тензор поворота меняется со временем:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ . Псевдовектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  вводится через  $\mathbf{P}$  таким путём. Дифференцируем тождество ортогональности (8.5) по времени\*

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top = 2\mathbf{0}.$$

\* A variety of notations are used to denote the full time derivative. In addition to the Leibniz’s notation  $\frac{dx}{dt}$ , very popular short-hand notation is the “over-dot” Newton’s notation  $\dot{x}$ .

$$\mathring{e}_i = \mathring{e}_i \cdot e_j e_j$$

$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \\ \mathring{e}_2 \\ \mathring{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \mathring{e}_1 \cdot e_1 & \mathring{e}_1 \cdot e_2 & \mathring{e}_1 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_2 \cdot e_1 & \mathring{e}_2 \cdot e_2 & \mathring{e}_2 \cdot e_3 \\ \mathring{e}_3 \cdot e_1 & \mathring{e}_3 \cdot e_2 & \mathring{e}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(90^\circ + \vartheta) & \cos 90^\circ \\ \cos(90^\circ - \vartheta) & \cos \vartheta & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathring{e}_1 = e_1 \cos \vartheta - e_2 \sin \vartheta$$

$$\mathring{e}_2 = e_1 \sin \vartheta + e_2 \cos \vartheta$$

$$\mathring{e}_3 = e_3 = k$$

$$P = e_1 \mathring{e}_1 + e_2 \mathring{e}_2 + e_3 \mathring{e}_3 =$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{e_1 \mathring{e}_1}^{e_1 e_1 \cos \vartheta - e_1 e_2 \sin \vartheta} + \overbrace{e_2 \mathring{e}_2}^{e_2 e_1 \sin \vartheta + e_2 e_2 \cos \vartheta} + \overbrace{e_3 \mathring{e}_3}^{k k} = \\ &= E \cos \vartheta - \underbrace{e_3 e_3}_{k k} \cos \vartheta + \underbrace{(e_2 e_1 - e_1 e_2)}_{e_3 \times e_i e_i = \epsilon_{3ij} e_j e_i} \sin \vartheta + k k = \\ &= E \cos \vartheta + k \times E \sin \vartheta + k k (1 - \cos \vartheta) \end{aligned}$$

рисунок 3  
“Конечный поворот”

Тензор  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top$  (по (3.8)  $(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top)^\top = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top$ ) оказался антисимметричным. Поэтому согласно (6.3) он представим сопутствующим вектором как  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top$ . То есть

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv -\frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times \quad (8.8)$$

Помимо этого общего представления вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , для него есть и другие. Например, через параметры конечного поворота.

Производная  $\dot{\mathbf{P}}$  в параметрах конечного поворота в общем случае (оба параметра — и единичный вектор  $\mathbf{k}$ , и угол  $\vartheta$  — переменны во времени):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= (\mathbf{P}^S + \mathbf{P}^A)^\bullet = \left( \overbrace{\mathbf{E} \cos \vartheta + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta)}^{\mathbf{P}^S} + \overbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}^{\mathbf{P}^A} \right)^\bullet = \\ &= \underbrace{(\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta)}_{\dot{\mathbf{P}}^S} + \underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta}_{\dot{\mathbf{P}}^A}. \end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top &= (\dot{\mathbf{P}}^S + \dot{\mathbf{P}}^A) \cdot (\mathbf{P}^S - \mathbf{P}^A) = \\ &= \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S + \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^S - \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^A - \dot{\mathbf{P}}^A \cdot \mathbf{P}^A, \end{aligned}$$

используя

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 = \text{const} &\Rightarrow \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{k}} = 0, \\ \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} &= \mathbf{k} \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}, \\ (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{k} - \mathbf{k} = 0, \quad (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k} \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = 0, \\ (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= -\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \mathbf{k}, \\ (5.10) \Rightarrow (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{E}, \\ (5.9) \Rightarrow \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} &= (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}) \times \mathbf{E}, \quad (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \mathbf{k} - \mathbf{k} (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) = \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}^S \cdot \mathbf{P}^S &= \\ &= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{E} \cos \vartheta + \\ &\quad + (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta) \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) = \\ &= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta)^2 = \\ &= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\ &\quad + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} - 2 \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos^2 \vartheta = \\ &= (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta - \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta), \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{P}}^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{S}} =$$

$$= (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \\ + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \dot{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{k}} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\ = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta),$$

$$\dot{\mathbf{P}}^{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{A}} =$$

$$= (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta = \\ = \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + \left( \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \right) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\ = -\mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta),$$

$$\dot{\mathbf{P}}^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{A}} = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \sin^2 \vartheta = \\ = (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \sin^2 \vartheta;$$

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{P}}^{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{S}} + \dot{\mathbf{P}}^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{P}}^{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{A}} - \dot{\mathbf{P}}^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{A}} =$$

$$= (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} (1 - \cos \vartheta) + \\ + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \\ + \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) - (\mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} - \mathbf{E}) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \sin^2 \vartheta = \\ = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + (\dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k}) (1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k} \dot{\mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \times \mathbf{k}) \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\ = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + \mathbf{k} \times (\dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \\ = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta \cos \vartheta + (\dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \dot{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \times \mathbf{E} \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta) = \\ = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} (1 - \cos \vartheta).$$

Этот результат, подставленный в определение (8.8) псевдовектора  $\boldsymbol{\omega}$ , даёт

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \dot{\vartheta} + \dot{\mathbf{k}} \sin \vartheta + \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}} (1 - \cos \vartheta). \quad (8.9)$$

Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  получился разложенным по трём взаимно ортогональным направлениям —  $\mathbf{k}$ ,  $\dot{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}$ . При неподвижной оси поворота  $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \dot{\vartheta}$ .

Ещё одно представление  $\boldsymbol{\omega}$  связано с компонентами тензора поворота (8.2). Поскольку  $\mathbf{P} = o_{ji}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$ ,  $\mathbf{P}^{\mathbf{T}} = o_{ij}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$ , а векторы начального базиса  $\hat{\mathbf{e}}_i$  неподвижны (со временем не меняются), то

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{o}_{ji}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j, \quad \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \dot{o}_{ni}^{\circ} o_{nj}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j, \\ \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \dot{o}_{ni}^{\circ} o_{nj}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} o_{nj}^{\circ} \dot{o}_{ni}^{\circ} \hat{\mathbf{e}}_k. \quad (8.10)$$

Отметим и формулы

$$(8.8) \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \dot{\mathbf{e}}_i \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \quad (8.11)$$

$$(8.8) \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}_i \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_j)_{\times} = -\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_i)_{\times} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_i \times \dot{\mathbf{e}}_i.$$

Comment\*

На самом деле последовательные повороты не складываются, а умножаются.

Можно ли складывать угловые скорости? — Да, потому что угол поворота в  $\vartheta$  бесконечно малый. — Но только при вращении вокруг неподвижной оси?

...

## § 9. Варьирование

Далее повсеместно будет использоваться сходная с дифференцированием операция варьирования. Не отсылая читателя к курсам вариационного исчисления, ограничимся представлениями о вариации  $\delta x$  величины  $x$  как о задаваемом нами бесконечно малом приращении, совместимом с ограничениями — связями (constraints). Если ограничений для  $x$  нет, то  $\delta x$  произвольна (случайна). Но когда  $x = x(y)$  — функция независимого аргумента  $y$ , следует считать  $\delta x = x'(y) \delta y$ .

Here we consider the exact differential of any set of position vectors  $\mathbf{r}_i$ , that are functions of other variables  $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$  and time  $t$ .

The actual displacement is the differential

$$d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} dq^j$$

\* Поворот тела вокруг какой-то оси представляет, казалось бы, вектор, ведь он имеет численное значение, равное углу поворота, и направление, совпадающее с направлением оси вращения, которое определяется по “правилу буравчика”. Однако два таких поворота не складываются как векторы, когда углы поворота не бесконечно малые.



Now, imagine if we have an arbitrary path through the configuration space/manifold. This means it has to satisfy the constraints of the system but not the actual applied forces

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j$$

В записях с вариациями действуют те же правила, что и с дифференциалами. Если, например,  $\delta x$  и  $\delta y$  — вариации  $x$  и  $y$ , а  $u$  и  $v$  — конечные величины, то следует писать  $u\delta x + v\delta y = \delta w$ , а не  $w$  — даже когда  $\delta w$  не является вариацией величины  $w$ ; в этом случае  $\delta w$  это единое обозначение. Разумеется, при  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  и  $\partial_x v = \partial_y u$  ( $\frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial y} u$ ) сумма  $\delta w$  будет вариацией некой  $w$ .

Варьируя тождество (8.5), получим  $\delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = -\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{P}^\top$ . Этот тензор антисимметричен, и потому выражается через свой сопутствующий вектор  $\delta \mathbf{o}$  как  $\delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$ . Приходим к соотношениям

$$\delta \mathbf{P} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{P}, \quad \delta \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times, \quad (9.1)$$

аналогичным (8.8). Вектор бесконечно малого поворота  $\delta \mathbf{o}$  это не “вариация  $\mathbf{o}$ ”, но единый символ (в отличие от  $\delta \mathbf{P}$ ).

Малый поворот определяется вектором  $\delta \mathbf{o}$ , но конечный поворот тоже допускает(?) векторное представление

...

## § 10. Полярное разложение

Любой тензор второй сложности  $\mathbf{F}$  с  $\det F_{ij} \neq 0$  (не сингулярный) может быть представлен как

...

*Example.* Polar decompose tensor  $\mathbf{C} = C_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ , where  $\mathbf{e}_k$  are mutually orthogonal unit vectors of basis, and  $C_{ij}$  are tensor's components

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & 11 \\ 10 & -15 & 23 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O} = O_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{O}_2$$

$$O_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{S}_R, \quad \mathbf{O}^\top \cdot \mathbf{C} = \mathbf{S}_R$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_L \cdot \mathbf{O}, \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{O}^\top = \mathbf{S}_L$$

$$S_{Rij} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -10 \\ 5 & 0 & 25 \\ -10 & 25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$S_{Lij} = \begin{bmatrix} 104/5 & 47/5 & 5 \\ 47/5 & -129/5 & -10 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

...

## § 11. Тензоры в косоугольном базисе

До сих пор использовался базис из ортогональной тройки единичных векторов  $\mathbf{e}_i$ . Теперь рассмотрим базис из трёх любых линейно независимых (некомпланарных) векторов  $\mathbf{a}_i$ .

Декомпозиция (разложение) вектора  $\mathbf{v}$  по базису  $\mathbf{a}_i$  (рис. 4) — линейная комбинация

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i. \quad (11.1)$$

Соглашение о суммировании обретает новые положения: повторяющиеся (“немые”) индексы суммирования расположены на разных уровнях, а свободные индексы в обеих частях равенств — на одной высоте ( $a_i = b_{ij}c^j$  — корректно,  $a_i = b_{ik}^i$  — дважды ошибочно).

В таком базисе уже  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i = v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i \neq v^i$ , ведь тут  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k \neq \delta_{ik}$ .

Дополним же базис  $\mathbf{a}_i$  ещё другой тройкой векторов  $\mathbf{a}^i$ , называемых кобазисом или взаимным базисом, чтобы

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j &= \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{a}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{a}^i. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Это — основное свойство кобазиса. Ортонормированный (ортонормальный) базис может быть определён как совпадающий со своим кобазисом:  $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ .

Для, к примеру, первого вектора кобазиса  $\mathbf{a}^1$

$$\begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \\ \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \\ \gamma \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^1 = 1/\gamma \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \\ \gamma = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 \end{cases}$$

Коэффициент  $\gamma$  получился равным объёму параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}_i$ ; в § 5 тот же объём был представлен как  $\sqrt{g}$ , и это неспроста, поскольку он совпадает с квадратным

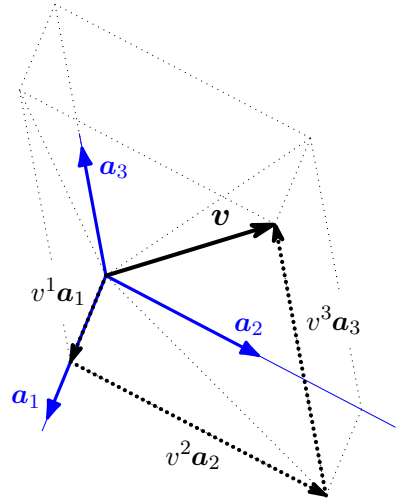


рисунок 4

корнем из грамиана  $g \equiv \det g_{ij}$  — определителя симметричной матрицы Ж. Р. Грама  $g_{ij} \equiv \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ .

Доказательство напоминает вывод (5.7). “Тройное” произведение  $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k$  в каком-нибудь ортонормальном базисе  $\mathbf{e}_i$  вычислимо как детерминант (с “—” для “левой” базисной тройки) по строкам

$$\in_{ijk} = \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

или по столбцам

$$\in_{pqr} = \mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{a}_r = \pm \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}.$$

Произведение определителей  $\in_{ijk} \in_{pqr}$  равно определителю произведения матриц, элементы последнего — суммы вида  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_p = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p$

$$\in_{ijk} \in_{pqr} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_p & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_q & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_r \end{bmatrix};$$

$$i=p=1, j=q=2, k=r=3 \Rightarrow \in_{123} \in_{123} = \det_{i,j} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = \det_{i,j} g_{ij}.$$

Представляя  $\mathbf{a}^1$  и остальные векторы кобазиса суммой

$$2\sqrt{g} \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \overbrace{- \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2}^{+ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3},$$

приходим к общей формуле

$$\mathbf{a}^i = \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{ijk} \mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k, \quad \sqrt{g} \equiv \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3. \quad (11.3)$$

Здесь  $e^{ijk}$  — по-прежнему символ Веблена ( $\pm 1$  или 0), и по (5.8)  $e^{ijk} e_{jkn} = 2\delta_n^i$ . Произведение  $\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k = \in_{jkn} \mathbf{a}^n$ , а компоненты тензора Лёви-Чивиты  $\in_{jkn} = \sqrt{g} e_{jkn}$ . Так что

$$\mathbf{a}^1 = 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{a}^2 = 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{a}^3 = 1/\sqrt{g} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2).$$

*Example.* Get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$\sqrt{g} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2;$$

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{e}_1 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 1 & 1 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = -\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 1 & 0 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ 1 & 0 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$$

and finally

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{a}^3 = \frac{1}{2} (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

Имея кобазис, возможно не только разложить по нему любой вектор (рис. 5), но и найти коэффициенты разложения (11.1):

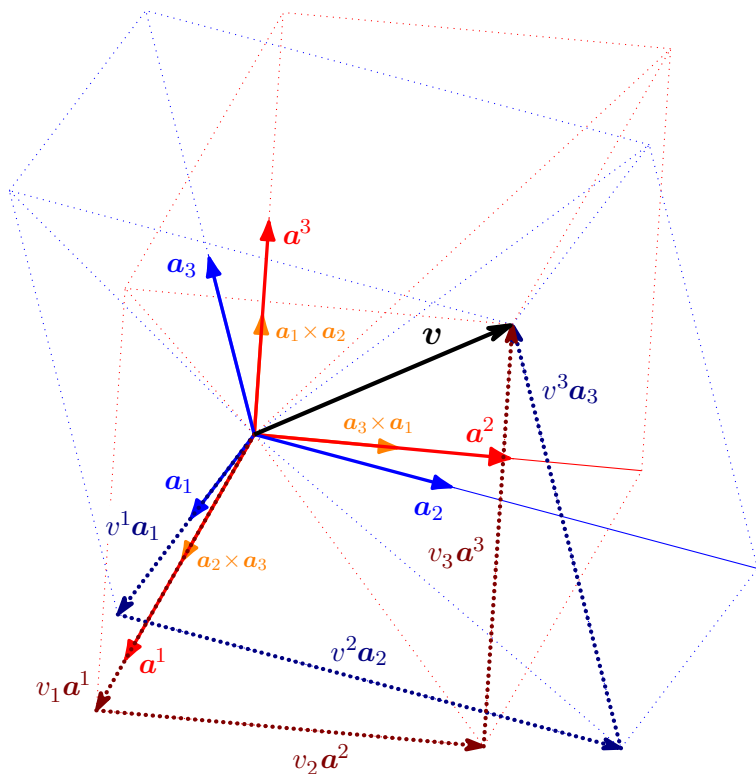
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{a}_i = v_i \mathbf{a}^i, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^i &= v^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = v^i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Коэффициенты  $v_i$  называются ковариантными компонентами вектора  $\mathbf{v}$ , а  $v^i$  — его контравариантными\* компонентами.

Есть литература о тензорах, где различают ковариантные и контравариантные... векторы (и “ковекторы”). Не сто́ит вводить читателя в заблуждение: вектор-то один и тот же, просто при разложении по двум разным базисам у него два набора компонент.

От векторов перейдём к тензорам второй сложности. Имеем четыре комплекта диад:  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}_j$ . Сogласующиеся

\* Потому что они меняются обратно (contra) изменению длин базисных векторов  $\mathbf{a}_i$ .



$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \sqrt{g} = 0.56274$$

$$1/\sqrt{g} = 1.77703$$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_i^j$$

рисунок 5  
 “Разложение вектора в косоугольном базисе”

коэффициенты в декомпозиции тензора называются его контравариантными, ковариантными и смешанными компонентами:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{B} &= B^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = B_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j = B_j^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = B_i^j \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j, \\ B^{ij} &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j, \quad B_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \\ B_j^i &= \mathbf{a}^i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j, \quad B_i^j = \mathbf{a}_i \cdot {}^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Для двух видов смешанных компонент точка в индексе это просто свободное место: у  $B_j^i$  верхний индекс “ $i$ ” — первый, а нижний “ $j$ ” — второй.

Компоненты единичного (“метрического”) тензора

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}^k \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k \mathbf{a}^k = g_{jk} \mathbf{a}^j \mathbf{a}^k = g^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k: \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \equiv g_{ij}, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j \equiv g^{ij}; \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= g_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \cdot g^{nk} \mathbf{a}_n \mathbf{a}_k = g_{ij} g^{jk} \mathbf{a}^i \mathbf{a}_k = \mathbf{E} \Rightarrow g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Вдобавок к (11.2) и (11.3) открылся ещё один способ найти векторы кобазиса — через матрицу  $g^{ij}$ , обратную матрице Грама  $g_{ij}$ . И наоборот:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^i = g^{jk} \mathbf{a}_j \delta_k^i = g^{ji} \mathbf{a}_j, \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk} \mathbf{a}^j \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_i = g_{jk} \mathbf{a}^j \delta_i^k = g_{ji} \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (11.7)$$

*Example.* Using reversed Gram matrix, get cobasis for basis  $\mathbf{a}_i$  when

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det g_{ij} = 4,$$

$$\text{adj } g_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{\top},$$

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{\text{adj } g_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Using  $\mathbf{a}^i = g^{ij} \mathbf{a}_j$

$$\mathbf{a}^1 = g^{11} \mathbf{a}_1 + g^{12} \mathbf{a}_2 + g^{13} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^2 = g^{21} \mathbf{a}_1 + g^{22} \mathbf{a}_2 + g^{23} \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}^3 = g^{31} \mathbf{a}_1 + g^{32} \mathbf{a}_2 + g^{33} \mathbf{a}_3 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3.$$

...

Едини́чный тензор (unit tensor, identity tensor, metric tensor)

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A} = \text{not anymore } A_{jj}$$

Thus for, say, trace of some tensor  $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j$ :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr } \mathbf{A}$ ,  
you have

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = A_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k = A_{ij} \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = A_{ij} g^{ij}$$

...

Тензор поворота (rotation tensor)

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i = \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{-\top}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}^{\top}$$

$$\mathbf{P}^{\top} = \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i \mathbf{a}^i = \mathbf{P}^{-1}$$

...



... Характеристическое уравнение (7.2) быстро приводит к тождеству Гамильтона–Кэли (Cayley–Hamilton)

$$-\mathbf{B}^3 + \mathbf{I}\mathbf{B}^2 - \mathbf{II}\mathbf{B} + \mathbf{III}\mathbf{E} = {}^2\mathbf{0}. \quad (11.8)$$

## § 12. Тензорные функции

В популярном представлении о функции  $y = f(x)$  как отображении (морфизме)  $f: x \mapsto y$  прообраз (аргумент)  $x$  и образ (результат)  $y$  могут быть тензорами любых сложностей.

Рассмотрим хотя бы скалярную функцию двухвалентного тензора  $\varphi = \varphi(\mathbf{B})$ . В каждом базисе  $\mathbf{a}_i$  имеем функцию девяти числовых аргументов, компонент  $\varphi(B_{ij})$ ; при переходе к новому базису компоненты  $B_{ij}$  могут изменяться лишь так, чтобы сохранялся результат  $\varphi$ . Дифференцирование  $\varphi$  выглядит так:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} dB_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \bullet \bullet d\mathbf{B}^\top, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial B_{ij}} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j. \quad (12.1)$$

Тензор ...

...

Но согласно опять-таки (11.8)  $-\mathbf{B}^2 + \mathbf{I}\mathbf{B} - \mathbf{II}\mathbf{E} + \mathbf{III}\mathbf{B}^{-1} = {}^2\mathbf{0}$ , поэтому

...

Скалярная функция  $\varphi(\mathbf{B})$  называется изотропной, если она не чувствительна к повороту аргумента:

$$\varphi(\mathbf{B}) = \varphi(\mathbf{O} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{O}^\top) = \varphi(\overset{\circ}{\mathbf{B}}) \quad \forall \mathbf{O} = \mathbf{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i = \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{O}^{-\top}$$

для любого ортогонального тензора  $\mathbf{O}$  (тензора поворота, § 8).

Симметричный тензор  $\mathbf{B}^S$  полностью определяется тройкой инвариантов и угловой ориентацией собственных осей (они же взаимно ортогональны, § 7). Ясно, что изотропная функция  $\varphi(\mathbf{B}^S)$  симметричного аргумента является функцией лишь инвариантов  $\mathbf{I}(\mathbf{B}^S)$ ,  $\mathbf{II}(\mathbf{B}^S)$ ,  $\mathbf{III}(\mathbf{B}^S)$ ; она дифференцируется согласно (??), где транспонирование излишне.

### § 13. Тензорные поля. Дифференцирование

“*пóле*” — это тензор, меняющийся от точки к точке  
(переменный по координатам)

Путь в каждой точке некоторой области трёхмерного пространства известна величина  $\varsigma$ . Тогда имеем поле  $\varsigma = \varsigma(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки. Например, поле температуры в среде, поле давления в идеальной жидкости. Величина  $\varsigma$  может быть тензором любой сложности. Пример векторного поля — скорости частиц жидкости.

Не только при решении прикладных задач, но нередко и для “чистой теории” вместо аргумента  $\mathbf{r}$  используется какая-либо тройка криволинейных координат  $q^i$ . При этом  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ . Если непрерывно менять лишь одну координату из трёх, получается координатная линия. Каждая точка трёхмерного пространства лежит на пересечении трёх координатных линий (рис. 6).

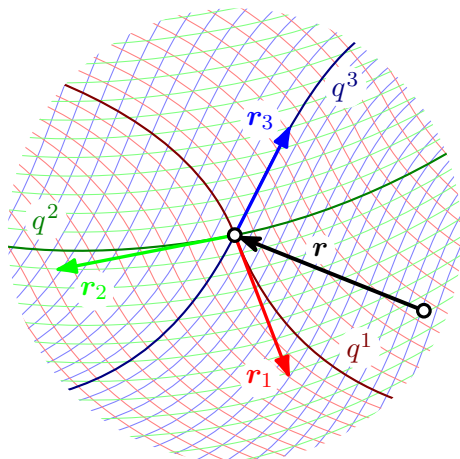


рисунок 6

Commonly used curvilinear coordinate systems include: rectangular (“cartesian”), spherical, and cylindrical coordinate systems. These coordinates may be derived from a set of cartesian coordinates by using a transformation that is locally invertible (a one-to-one map) at each point. This means that one can convert a point given in a cartesian coordinate system to its curvilinear coordinates and back.

...

The differential represents a change in the linearization of a function.

...

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$$

...

Линейность

$$\partial_i(\lambda p + \mu q) = \lambda(\partial_i p) + \mu(\partial_i q) \quad (13.1)$$

“Product rule”

$$\partial_i(p \circ q) = (\partial_i p) \circ q + p \circ (\partial_i q) \quad (13.2)$$

...

Bivalent unit tensor (identity tensor, metric tensor), the one which is neutral (3.6) to dot product operation, может быть представлен как

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i = \underbrace{\mathbf{r}^i \partial_i}_{\nabla} \mathbf{r} = \nabla \mathbf{r}, \quad (13.3)$$

где появляется дифференциальный оператор “набла”

$$\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i. \quad (13.4)$$

...

Градиент векторного произведения двух векторов, применяя “product rule” (13.2) и соотношение (5.6) для любых двух векторов (частная производная  $\partial_i$  некоторого вектора по скалярной координате  $q^i$  это тоже вектор)

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{r}^i \partial_i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{r}^i(\partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \partial_i \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{r}^i(\partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \partial_i \mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \\ &= \nabla \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \nabla \mathbf{b} \times \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

...

...

## § 14. Интегральные теоремы

Для векторных полей известны интегральные теоремы Gauss'а и Stokes'а.

Gauss' theorem (divergence theorem) enables an integral taken over a volume to be replaced by one taken over the closed surface bounding that volume, and vice versa.

Stokes' theorem enables an integral taken around a closed curve to be replaced by one taken over *any* surface bounded by that curve. Stokes' theorem relates a line integral around a closed path to a surface integral over what is called a *capping surface* of the path.

Теорема Гаусса о дивергенции — про то, как заменить объёмный интеграл поверхностным (и наоборот). В этой теореме рассматривается поток (ef)flux вектора через ограничивающую объём  $V$  замкнутую поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$  с единичным вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$

$$\oint_{\mathcal{O}(\partial V)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\mathcal{O} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV. \quad (14.1)$$

Объём  $V$  нарезается тремя семействами координатных поверхностей на множество бесконечно малых элементов. Поток через поверхность  $\mathcal{O}(\partial V)$  равен сумме потоков через края получившихся элементов. В бесконечной малости каждый такой элемент — маленький локальный дифференциальный кубик (параллелепипед). ... Поток вектора  $\mathbf{a}$  через грани малого кубика объёма  $dV$  есть  $\sum_{i=1}^6 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a} \mathcal{O}_i$ , а через сам этот объём поток равен  $\nabla \cdot \mathbf{a} dV$ .

Похожая трактовка этой теоремы есть, к примеру, в курсе Richard'а Feynman'а [90].

( рисунок с кубиками )

to dice — нарезать кубиками

small cube, little cube

локально ортонормальные координаты  $\boldsymbol{\xi} = \xi_i \mathbf{n}_i$ ,  $d\boldsymbol{\xi} = d\xi_i \mathbf{n}_i$ ,  
 $\nabla = \mathbf{n}_i \partial_i$

разложение вектора  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{n}_i$

Теорема Стокса о циркуляции выражается равенством

...

...

## § 15. Тензоры кривизны

The *Riemann curvature tensor* or *Riemann–Christoffel tensor* (after **Bernhard Riemann** and **Elwin Bruno Christoffel**) is the most common method used to express the curvature of Riemannian manifolds. It’s a tensor field, it assigns a tensor to each point of a Riemannian manifold, that measures the extent to which the metric tensor is not locally isometric to that of “flat” space. The curvature tensor measures noncommutativity of the covariant derivative, and as such is the integrability obstruction for the existence of an isometry with “flat” space. The curvature tensor can also be defined for any pseudo-Riemannian manifold, or any manifold equipped with an “affine connection” (a choice of such connection makes a manifold look infinitesimally like affine “flat” space).

The *Ricci curvature tensor*, named after **Gregorio Ricci-Curbastro**, represents the amount by which the volume of a narrow conical piece of a small geodesic ball in a curved Riemannian manifold deviates from that of the standard ball in “flat” space.

~ from Wikipedia, the free encyclopedia

Рассматривая операции тензорного анализа в криволинейных координатах, мы исходили из представления вектора-радиуса функцией этих координат:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ . Этой зависимостью порождаются выражения векторов локального касательного базиса  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$  ( $\partial_i \equiv \partial / \partial q^i$ ), компонент  $g_{ij} \equiv \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$  и  $g^{ij} \equiv \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = g_{ij}^{-1}$  единичного “метрического” тензора  $\mathbf{E} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i$ , векторов локального взаимного кокасательного базиса  $\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j = \delta_j^i$ ,  $\mathbf{r}^i = g^{ij} \mathbf{r}_j$ , дифференциального набла-оператора Hamilton’a  $\nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$ ,  $\mathbf{E} = \nabla \mathbf{r}$ , полного дифференциала  $d\xi = d\mathbf{r} \cdot \nabla \xi$ , частных производных касательного базиса (вторых частных производных  $\mathbf{r}$ )  $\mathbf{r}_{ij} \equiv \partial_i \partial_j \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_j$ , символов “связности” Христоффеля (Christoffel symbols)  $\Gamma_{ij}^k \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}^k$  и  $\Gamma_{ijk} \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k$ .

Представим теперь, что функция  $\mathbf{r}(q^k)$  не известна, но зато в каждой точке пространства определены шесть независимых элементов положительной симметричной метрической матрицы Грама  $g_{ij}(q^k)$ .



Билинейная форма

...

Поскольку шесть функций  $g_{ij}(q^k)$  происходят от векторной функции  $\mathbf{r}(q^k)$ , то между элементами  $g_{ij}$  существуют некие соотношения.

Выражение  $d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \overbrace{\nabla \mathbf{r}}^{\mathbf{E}} = \mathbf{r}_k dq^k$  — полный дифференциал. Следовательно, вторые частные производные коммутируют:  $\partial_i \mathbf{r}_j = \partial_j \mathbf{r}_i$  ( $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$ ). Но это необходимое условие уже обеспечено симметрией  $g_{ij}$  (“связностью”  $\nabla_i$ , её же часто называют “ковариантная производная” — а символы Христоффеля это “компоненты связности” в локальных координатах).

$$\mathbf{r}_{ij} = \underbrace{\mathbf{r}_{ij} \cdot \overbrace{\mathbf{r}^k}^{\mathbf{E}}}_{\Gamma_{ij}^k} \mathbf{r}_k = \underbrace{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k}_{\Gamma_{ij\dot{k}}} \overbrace{\mathbf{r}^k}^{\mathbf{E}}$$

$$\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}^k \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{ij}$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \partial_i (v^j \mathbf{r}_j) = \mathbf{r}^i (\partial_i v^j \mathbf{r}_j + v^j \mathbf{r}_{ij})$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j \nabla_i v^j, \quad \nabla_i v^j \equiv \partial_i v^j + \Gamma_{in}^j v^n$$

$$\nabla \mathbf{r}_i = \mathbf{r}^k \partial_k \mathbf{r}_i = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_{ki} = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_n \Gamma_{ki}^n, \quad \nabla_i \mathbf{r}_n = \Gamma_{in}^k \mathbf{r}_k$$

Christoffel symbols describe a metric connection, that is how the basis changes from point to point.

**добавить:** симметрия  $\Gamma_{ij\dot{k}} = \Gamma_{ji\dot{k}}$ , поэтому  $3^3 - 3 \cdot 3 = 18$  разных (независимых)  $\Gamma_{ij\dot{k}}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^n g_{nk} &= \Gamma_{ij\dot{k}} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ij} + \mathbf{r}_{ji}) \cdot \mathbf{r}_k + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{jk} - \mathbf{r}_{kj}) \cdot \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ik} - \mathbf{r}_{ki}) \cdot \mathbf{r}_j = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ji} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{jk} \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ki} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_{kj} \cdot \mathbf{r}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_i (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k) + \partial_j (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k) - \partial_k (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \end{aligned} \quad (15.1)$$

Все символы Христоффеля тождественно равны нулю лишь в ортонормальной (декартовой) системе. (А какие они для косоугольной?)

Пойдём дальше:  $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{r}_i = dq^k \partial_k \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{ik} dq^k$  — тоже полные дифференциалы. Поэтому  $\partial_i \partial_j \mathbf{r}_k = \partial_j \partial_i \mathbf{r}_k$  ( $\partial_i \mathbf{r}_{jk} = \partial_j \mathbf{r}_{ik}$ ), и трёхиндексный объект из векторов третьих частных производных

$$\mathbf{r}_{ijk} \equiv \partial_i \partial_j \partial_k \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r}_{jk} \quad (15.2)$$

симметричен по первому и второму индексам (а не только по второму и третьему). И тогда равен нулю <sup>4</sup> $\mathbf{0}$  следующий тензор четвёртой сложности — тензор кривизны Римана–Христоффеля

$${}^4\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{hijk} \mathbf{r}^h \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k, \quad \mathfrak{R}_{hijk} \equiv \mathbf{r}_h \cdot (\mathbf{r}_{jik} - \mathbf{r}_{ijk}). \quad (15.3)$$

Выразим компоненты  $\mathfrak{R}_{ijkn}$  через метрическую матрицу  $g_{ij}$ . Начнём с дифференцирования локального кобазиса:

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_k = \delta_k^i \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{jk} = 0 \Rightarrow \partial_j \mathbf{r}^i = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{r}^k.$$

...

Шесть независимых компонент:  $\mathfrak{R}_{1212}$ ,  $\mathfrak{R}_{1213}$ ,  $\mathfrak{R}_{1223}$ ,  $\mathfrak{R}_{1313}$ ,  $\mathfrak{R}_{1323}$ ,  $\mathfrak{R}_{2323}$ .

...

Симметричный бивалентный тензор кривизны Ricci

$$\mathcal{R} \equiv \frac{1}{4} \mathfrak{R}_{abij} \mathbf{r}^a \times \mathbf{r}^b \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j = \frac{1}{4} \epsilon^{abp} \epsilon^{ijq} \mathfrak{R}_{abij} \mathbf{r}_p \mathbf{r}_q = \mathcal{R}^{pq} \mathbf{r}_p \mathbf{r}_q$$

(коэффициент  $\frac{1}{4}$  используется тут для удобства) с компонентами

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{11} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{2323}, \\ \mathcal{R}^{21} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1323}, \quad \mathcal{R}^{22} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1313}, \\ \mathcal{R}^{31} &= \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1223}, \quad \mathcal{R}^{32} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1213}, \quad \mathcal{R}^{33} = \frac{1}{g} \mathfrak{R}_{1212}. \end{aligned}$$

Равенство тензора Риччи нулю  $\mathcal{R} = {}^2\mathbf{0}$  (в компонентах это шесть уравнений  $\mathcal{R}^{ij} = \mathcal{R}^{ji} = 0$ ) есть необходимое условие интегрируемости (“совместности”, “compatibility”) при определении вектора-радиуса  $\mathbf{r}(q^k)$  по полю  $g_{ij}(q^k)$ .

## Библиография

Существует много книг, где описывается только аппарат тензорного исчисления [85, 86, 87, 88, 89]. Однако, “индексный подход” преобладает — тензоры трактуются как матрицы компонент, преобразу-

ющиеся известным путём. “Прямой подход” к тензорам излагается, например, в приложениях книг А. И. Лурье [33, 36]. Яркое описание теории векторных полей можно найти у R. Фейнман’а [90]. Сведения о тензорном исчислении содержатся и в своеобразной и глубокой книге С. Truesdell’a [72].

## ОСНОВЫ ОБЩЕЙ МЕХАНИКИ

## § 1. Дискретная совокупность частиц

В общей механике рассматриваются совокупности частиц (“точечных масс”, “материальных точек”). В совокупности  $N$  частиц каждая частица имеет свою массу  $m_k = \text{const}$  и функцию движения  $\mathbf{r}_k(t)$ . Функция  $\mathbf{r}_k(t)$  измеряется относительно некоторой системы отсчёта — твёрдого тела с часами (рис. 7).

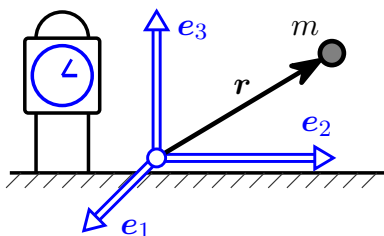


рисунок 7

Когда-то давно, за систему отсчёта принималось некое абсолютное пространство: сначала пустое, а затем заполненное сплошной упругой средой — эфиром. Позже стало ясно, что в пределах классической механики можно пользоваться любыми системами отсчёта, но предпочтение отдаётся инерци-

альным системам, где точка движется без ускорения ( $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ ) при отсутствии внешних взаимодействий.

Мерой взаимодействия в механике является вектор силы  $\mathbf{F}$ . В известном уравнении Newton'a

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (1.1)$$

правая часть зависит лишь от положения, скорости и явно входящего времени, тогда как ускорение  $\ddot{\mathbf{r}}$  прямо пропорционально силе  $\mathbf{F}$ .

Напомним положения динамики системы частиц. Сила, действующая на  $k$ -ую частицу

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)}, \quad (1.2)$$

где первое слагаемое  $\mathbf{F}_k^{(e)}$  — это внешняя сила, а второе — сумма внутренних ( $\mathbf{F}_{kj}^{(i)}$  — сила от частицы с номером “ $j$ ”).

Принимая принцип действия и противодействия  $\mathbf{F}_{kj}^{(i)} = -\mathbf{F}_{jk}^{(i)}$ , получаем из (1.1) и (1.2) баланс импульса

$$\left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^{\bullet} = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.3)$$

Считая также, что внутренние взаимодействия между частицами центральны, то есть

$$\mathbf{F}_{kj}^{(i)} \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) = \mathbf{0},$$

приходим к балансу момента импульса

$$\left( \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)^{\bullet} = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (1.4)$$

...

## § 2. Совершенно жёсткое недеформируемое твёрдое тело

Расстояние между любыми двумя точками совершенно (абсолютно) жёсткого твёрдого тела остаётся постоянным, независимо от действующих на него внешних сил: деформации тут нет.

The difference between “rigid” and “solid” is that rigid is stiff (not flexible) while solid is in the state of a solid (not fluid). Solid is a substance in the fundamental state of matter that retains its size and shape without need of container (as opposed to a fluid).

An absolutely rigid body is a solid body in which deformation is zero (or negligibly small, so small it can be neglected).

Для определения положения (места) совершенно жёсткого (недеформируемого) тела достаточно выбрать какую-либо одну его точку — “полюс”, установить положение  $\mathbf{r}(t)$  этой точки, а также угловую ориентацию тела (рис. 8).

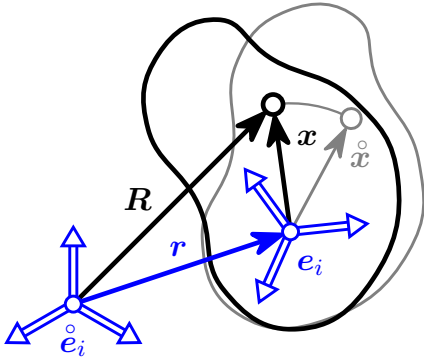


рисунок 8

Совершенно жёсткое тело чаще всего моделируется с использованием “континуального подхода” — как непрерывное распределение массы (материальный континуум, сплошная среда), вместо использования “дискретного подхода” — моделирования как дискретной совокупности частиц тела.

Переход от формул, содержащих суммирование по дискретным точкам, к формулам

для сплошного тела осуществляется заменой масс частиц на массу  $dm = \rho dV$  элемента объёма  $dV$  ( $\rho$  — плотность массы), и интегрированием по всему объёму тела.

$\hat{\mathbf{e}}_i$  — ортонормальная тройка векторов базиса, неподвижная относительно системы отсчёта

Имея неподвижный базис  $\hat{\mathbf{e}}_i$  и движущийся вместе с телом базис  $\mathbf{e}_i$ , ...

Если связать с телом тройку декартовых осей с ортами  $\mathbf{e}_i$  (этот базис движется вместе с телом), тогда угловая ориентация тела может быть задана тензором поворота  $\mathbf{O} \equiv \mathbf{e}_i \dot{\mathbf{e}}_i$ .

Движение тела полностью определяется функциями  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{O}(t)$ .

Вектор-радиус некоторой точки тела

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{x},$$

$$\dot{\mathbf{x}} = x_i \dot{\mathbf{e}}_i, \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

$$(8.3), \S 1.8$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}},$$

Для совершенно жёсткого тела, компоненты  $x_i$  не зависят от времени ( $x_i = \text{const}$ ) и  $\dot{\mathbf{x}} = x_i \dot{\mathbf{e}}_i$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

$$x_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{O}} \cdot x_i \dot{\mathbf{e}}_i \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{O}} \cdot \dot{\mathbf{e}}_i$$

...

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dm = \mathbf{r} \int_{\mathcal{V}} dm = \mathbf{r} m$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm = \mathbf{\Xi} m, \quad \mathbf{\Xi} \equiv m^{-1} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm$$

$$\text{масса всего тела } m = \int_{\mathcal{V}} dm = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$$

вектор эксцентриситета  $\mathbf{\Xi}$

$\mathbf{\Xi}$  becomes the null vector when the chosen “pole” is центр масс (уникальная точка внутри тела)

$$\mathbf{\Xi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} - \mathbf{r}, \quad \mathbf{\Xi} m = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{R} - \mathbf{r}) dm = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r} = m^{-1} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{R} dm$$

...

Вводя (псевдо)вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , ...

...

тензор инерции  $\mathfrak{I}$

$$\mathfrak{I} \equiv \int_V (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \mathbf{E} - \mathbf{x} \mathbf{x}) dm$$

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b, \quad \dot{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}_{ab} (\dot{\mathbf{e}}_a \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \dot{\mathbf{e}}_b) = \mathfrak{I}_{ab} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_b)$$

...

Holonomic constraints are relations between position variables (and possibly time) which can be expressed as

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = 0$$

where  $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$  are  $n$  coordinates which describe the system. For example, the motion of a particle constrained to lie on sphere's surface is subject to a holonomic constraint, but if the particle is able to fall off the sphere under the influence of gravity, the constraint becomes non-holonomic. For the first case the holonomic constraint may be given by the equation:  $r^2 - a^2 = 0$ , where  $r$  is the distance from the centre of a sphere of radius  $a$ . Whereas the second non-holonomic case may be given by:  $r^2 - a^2 \geq 0$ .

Holonomic constraint depends only on coordinates and time. It does not depend on velocities or any higher time derivative. A constraint that cannot be expressed as shown above is nonholonomic.

Velocity-dependent constraints like

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0$$

are mostly not holonomic.

### § 3. Принцип виртуальной работы

Виртуальным перемещением частицы с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_k$  называется вариация  $\delta \mathbf{r}_k$  — любое (неопределённое) бесконечно малое приращение  $\mathbf{r}_k$ , происходящее мгновенно и совместимое с ограничениями-связями. Если связей нет, то есть система свободна, тогда виртуальные перемещения  $\delta \mathbf{r}_k$  совершенно любые.

Связи бывают голономные (holonomic, или геометрические), связывающие только положения (перемещения) — это функции лишь координат и, возможно, времени

$$c(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{3.1}$$



— и неголономные (или дифференциальные), содержащие производные координат по времени:  $c(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0$  и не интегрируемые до геометрических связей.

Далее рассматриваем системы, все связи в которых — голономные. В системе с голономной связью виртуальные перемещения должны удовлетворять уравнению

$$\sum_k \frac{\partial c}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (3.2)$$

В несвободных системах все силы делятся на две группы: активные и реакции связей. Реакция  $\mathbf{N}_k$  действует со стороны всех материальных ограничителей на частицу “ $k$ ” и меняется в соответствии с уравнением (3.1) каждой связи. Принимается предположение об идеальности связей:

$$\sum_k \mathbf{N}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad — \quad (3.3)$$

работа реакций на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Принцип виртуальной работы выражается уравнением

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{F}_k$  — лишь активные силы, без реакций связей.

Дифференциальное вариационное уравнение (3.4) может показаться тривиальным следствием закона Ньютона (1.1) и условия идеальности связей (3.3). Однако содержание (3.4) несравненно обширнее. Известно — и читатель вскоре это увидит, — что принцип (3.4) может быть положен в основу механики [96]. Различные модели упругих тел, описываемые в этой книге, построены с опорой на этот принцип.

Для примера рассмотрим совершенно жёсткое (недеформируемое) твёрдое тело.

...

Проявилась замечательная особенность (3.4): это уравнение эквивалентно системе такого порядка, каково число степеней свободы системы, то есть сколько независимых вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  мы

имеем. Если в системе  $N$  точек есть  $m$  связей, то число степеней свободы  $n = 3N - m$ .

...

#### § 4. Баланс импульса, момента импульса и энергии

Эти уравнения баланса можно связать со свойствами пространства и времени [97]. Сохранение импульса (количества движения) в изолированной\* системе выводится из однородности пространства (*при любом параллельном переносе — трансляции — замкнутой системы как целого свойства этой системы не меняются*). Сохранение момента импульса — следствие изотропии пространства (*свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте этой системы как целого*). Энергия же изолированной системы сохраняется, так как время однородно (энергия  $E \equiv T(q, \dot{q}) + \Pi(q)$  такой системы не зависит явно от времени).

Уравнения баланса можно вывести из принципа виртуальной работы (3.4). Перепишем его в виде

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k^{(e)} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k + \delta W^{(i)} = 0, \quad (4.1)$$

где выделены внешние силы  $\mathbf{F}_k^{(e)}$  и виртуальная работа внутренних сил  $\delta W^{(i)} = \sum_k \sum_j \mathbf{F}_{kj}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{r}_k$ .

Предполагается, что внутренние силы не совершают работы на виртуальных перемещениях тела как жёсткого целого ( $\delta \boldsymbol{\rho}$  и  $\delta \boldsymbol{\phi}$  — произвольные постоянные векторы, определяющие трансляцию и поворот)

$$\delta \mathbf{r}_k = \delta \boldsymbol{\rho} + \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}_k, \quad \delta \boldsymbol{\rho} = \text{const}, \quad \delta \boldsymbol{\phi} = \text{const} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (4.2)$$

Предпосылки-соображения для этого предположения таковы.

Первое — для случая упругих (потенциальных) внутренних сил. При этом  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$  — вариация потенциала с противо-

\* Изолированная (замкнутая) система — это система частиц, взаимодействующих друг с другом, но ни с какими другими телами.

положительным знаком. Достаточно очевидно, что  $\Pi$  меняется лишь при деформации.

Второе соображение — в том, что суммарный вектор и суммарный момент внутренних сил равен нулю

$$\sum \dots$$

...

Принимая (4.2) и подставляя в (4.1) сначала  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{p}$  (трансляция), а затем  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{r}_k$  (поворот), получаем баланс импульса (...) и баланс момента импульса (...).

...

## § 5. Принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа

Вариационное уравнение (3.4) удовлетворяется в любой момент времени. Проинтегрируем его\* по какому-либо промежутку  $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T + \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right) dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (5.1)$$

Без ущерба для общности можно принять  $\delta \mathbf{r}_k(t_1) = \delta \mathbf{r}_k(t_2) = \mathbf{0}$ , тогда внеинтегральный член исчезает.

Вводятся обобщённые координаты  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$  — число степеней свободы). Векторы-радиусы становятся функциями вида  $\mathbf{r}_k(q_i, t)$ , тождественно удовлетворяющими уравнениям связей (3.1). Если связи стационарны, то есть (3.1) не содержат  $t$ , то остаётся  $\mathbf{r}_k(q_i)$ . Кинетическая энергия превращается в функцию  $T(q_i, \dot{q}_i, t)$ , где явно входящее  $t$  характерно лишь для нестационарных связей.

$$\begin{aligned} * \left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right)^{\cdot} &= \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \underbrace{\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k}_{\delta T} \\ - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt - \left[ \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

Весьма существенно понятие обобщённых сил  $Q_i$ . Они вводятся через выражение виртуальной работы

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_i Q_i \delta q_i, \quad Q_i \equiv \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \quad (5.2)$$

Стоит подчеркнуть происхождение обобщённых сил через работу. Установив набор обобщённых координат системы, следует сгруппировать приложенные силы  $\mathbf{F}_k$  в комплексы  $Q_i$ .

Если силы потенциальны с энергией  $\Pi = \Pi(q_i, t)$ , то

$$\sum_i Q_i \delta q_i = -\delta \Pi, \quad Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \quad (5.3)$$

Явное присутствие  $t$  может быть при нестационарности связей или зависимости физических полей от времени.

...

Известны уравнения Lagrange'а не только второго, но и первого рода. Рассмотрим их ради методики вывода, много раз применяемой в этой книге.

При наличии связей (3.1) равенство  $\mathbf{F}_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$  не следует из вариационного уравнения (3.4), ведь тогда виртуальные перемещения  $\delta \mathbf{r}_k$  не независимы. Каждое из  $m$  ( $m$  — число связей) условий для вариаций (3.2) умножим на некий скаляр  $\lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) и добавим к (3.4):

$$\sum_{k=1}^N \left( \mathbf{F}_k + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k} - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (5.4)$$

Среди  $3N$  компонент вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$  зависимых  $m$ . Но столько же и множителей Лагранжа: подберём  $\lambda_\alpha$  так, чтобы коэффициенты (как-то) при зависимых вариациях обратились в нуль. Но при остальных вариациях коэффициенты (также) должны быть нулями из-за независимости. Следовательно, все выражения в скобках  $(\dots)$  равны нулю — это и есть уравнения Лагранжа первого рода.

Поскольку для каждой частицы

...

## § 6. Статика

Рассмотрим систему со стационарными (постоянными во времени) связями при статических (не меняющихся со временем) активных силах  $\mathbf{F}_k$ . В равновесии  $\mathbf{r}_k = \text{const}$ , и формулировка принципа виртуальной работы следующая:

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = Q_i = 0. \quad (6.1)$$

Существенны обе стороны этого положения: и вариационное уравнение, и равенство нулю обобщённых сил.

Соотношения (6.1) — это самые общие уравнения статики. В литературе распространено узкое представление об уравнениях равновесия как балансе сил и моментов. Но при этом нужно понимать, что набор уравнений равновесия точно соответствует обобщённым координатам. Результирующая сила (также называемая “равнодействующей силой” или “главным вектором”) и результирующий (“главный”) момент (пара сил) в уравнениях равновесия фигурируют\*, поскольку у системы есть степени свободы трансляции и поворота. Огромная популярность сил и моментов связана не столько с известностью статики совершенно жёсткого твёрдого тела, но с тем, что виртуальная работа внутренних сил на перемещениях системы как жёсткого целого равна нулю в любой среде.

Пусть в системе действуют два вида сил: потенциальные с энергией от обобщённых координат  $\Pi(q_i)$  и дополнительные внешние  $\dot{Q}_i$ . Из (6.1) следуют уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} &= \dot{Q}_i, \\ d\Pi &= \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} dq_i = \sum_i \dot{Q}_i dq_i. \end{aligned} \quad (6.2)$$

\* Со времён описания приведения любой системы сил, действующей на одно и то же совершенно жёсткое тело, к одной силе и одной паре (вокруг выбранной точки) в книге “*Éléments de statique*” Louis’a Poinso.

Здесь содержится нелинейная в общем случае задача статики о связи положения равновесия  $q_i$  с нагрузками  $\mathring{Q}_i$ .

В линейной системе с квадратичным потенциалом вида  $\Pi = \frac{1}{2} C_{ik} q_k q_i$

$$\sum_k C_{ik} q_k = \mathring{Q}_i. \quad (6.3)$$

Тут фигурируют матрица жёсткости  $C_{ik}$  и столбцы координат  $q_k$  и нагрузок  $\mathring{Q}_i$ .

Сказанное возможно обобщить и на континуальные линейные упругие среды.

Матрица жёсткости  $C_{ik}$  обычно бывает положительной (такое свойство конструкций). Тогда  $\det C_{ik} > 0$ , линейная алгебраическая система (6.3) однозначно разрешима, а решение её можно заменить минимизацией квадратичной формы

$$\mathcal{E}(q_j) \equiv \Pi - \sum_i \mathring{Q}_i q_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} q_i C_{ik} q_k - \sum_i \mathring{Q}_i q_i \rightarrow \min. \quad (6.4)$$

Бывает однако, что конструкция неудачно спроектирована, тогда матрица жёсткости сингулярна (необратима) и  $\det C_{ik} = 0$  (или же весьма близок к нулю — nearly singular матрица с  $\det C_{ik} \approx 0$ ). Тогда решение линейной проблемы статики (6.3) существует лишь при ортогональности столбца нагрузок  $\mathring{Q}_i$  всем линейно независимым решениям однородной сопряжённой системы

...

Известные теоремы статики линейно упругих систем легко доказываются в случае конечного числа степеней свободы. Теорема Клапейрона выражается равенством

...

Теорема о взаимности работ (“работа  $W_{12}$  сил первого варианта на перемещениях от сил второго равна работе  $W_{21}$  сил второго варианта на перемещениях от сил первого”) мгновенно выводится из (6.3):

(...)

Тут существенна симметрия матрицы жёсткости  $C_{ij}$ , то есть консервативность системы.

...

Но вернёмся к проблеме (6.2), иногда называемой теоремой Lagrange’a. Её можно обратить преобразованием Лежандра Legendre (involution) transform(ation):

$$\begin{aligned}
 d\left(\sum_i \dot{Q}_i q_i\right) &= \sum_i d\left(\dot{Q}_i q_i\right) = \sum_i \left(q_i d\dot{Q}_i + \dot{Q}_i dq_i\right), \\
 d\left(\sum_i \dot{Q}_i q_i\right) - \overbrace{\sum_i \dot{Q}_i dq_i}^{d\Pi} &= \sum_i q_i d\dot{Q}_i, \\
 d\left(\sum_i \dot{Q}_i q_i - \Pi\right) &= \sum_i q_i d\dot{Q}_i = \sum_i \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \dot{Q}_i} d\dot{Q}_i; \\
 q_i &= \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \dot{Q}_i}, \quad \hat{\Pi}(\dot{Q}_i) = \sum_i \dot{Q}_i q_i - \Pi.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Это теорема Castigliano,  $\hat{\Pi}$  называется дополнительной энергией. В линейной системе (6.3)  $\Rightarrow \hat{\Pi} = \Pi$ . Теорема (6.5) бывает очень полезна — когда легко находится  $\hat{\Pi}(\dot{Q}_i)$ . Встречаются так называемые статически определимые системы, в которых все внутренние силы удаётся найти лишь из баланса сил и моментов. Для них (6.5) эффективна.

В отличие от линейной задачи (6.3), нелинейная задача (6.2) может не иметь решений вовсе или же иметь их несколько.

...

Разговор о статике в общей механике закончим принципом д’Аламбера (d’Alembert’s principle): уравнения динамики отличаются от статических лишь наличием дополнительных “фиктивных сил инерции”  $m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$ . Принцип д’Аламбера очевиден, но бездумное его применение может привести к ошибкам. Например, уравнения вязкой жидкости в статике и в динамике отличаются не только лишь инерционными членами. Для упругих же сред принцип д’Аламбера полностью справедлив.

## § 7. Механика относительного движения

До сих пор не ставился вопрос о системе отсчёта, всё рассматривалось в некой “абсолютной” системе или одной из инерциальных систем (§ 1). Теперь представим себе две системы: “абсолютную” и подвижную

...

## § 8. Малые колебания (вибрации)

Если статика линейной системы описывается уравнением (6.3), то в динамике имеем

$$\sum_k \left( A_{ik} \ddot{q}_k + C_{ik} q_k \right) = \ddot{Q}_i(t), \quad (8.1)$$

где  $A_{ik}$  — симметричная и положительная “матрица кинетической энергии”.

Изучение колеблющейся системы чаще всего начинают с нормальных колебаний (гармоник) — собственных (свободных, без воздействий извне) синусоидальных колебаний вида  $q_k(t) = \hat{q}_k \sin \omega_k t$ . Постоянные  $\hat{q}_k$  — формы (или моды) колебаний,  $\omega_k$  — собственные частоты. Этот набор находится из задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_i = 0, \quad \ddot{q}_k &= -\omega_k^2 \hat{q}_k \sin \omega_k t, \quad (8.1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_k \left( C_{ik} - A_{ik} \omega_k^2 \right) \hat{q}_k \sin \omega_k t &= 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

...

## Библиография

В длинном списке книг по общей механике можно найти труды не только механиков-профессионалов [91, 92, 98, 99, 100], но и физиков-теоретиков широкой ориентации [97, 93]. Интересен курс Ф. Р. Гантмахера [96] с компактным, но полным изложением основ.



# НЕЛИНЕЙНО-УПРУГАЯ БЕЗМОМЕНТНАЯ СРЕДА

## § 1. Модель сплошной среды. Описания процессов

Вещества имеют дискретное строение, и модель системы частиц с массами  $m_k$  и радиусами-векторами  $\mathbf{R}_k(t)$  может показаться подходящей, несмотря на невообразимое число степеней свободы — тем более что объёмы памяти и быстродействие компьютеров характеризуются тоже астрономическими числами.

И всё же предпочтение стоит отдать качественно иной модели — модели сплошной среды (материального континуума), в которой масса распределена по объёму непрерывно: в объёме  $\mathcal{V}$  содержится масса

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}, \quad (1.1)$$

где  $\rho$  — объёмная плотность массы.

Real matter is modelled as a continuum, который может быть мыслим как бесконечное множество исчезающе малых частиц, joined together.

С непрерывным распределением массы связано лишь первое и простое представление о сплошной среде как множестве (пространстве) материальных точек. Возможны и более сложные модели, в которых частицы обладают степенями свободы не только трансляции, но и поворота, внутренней деформации и другими. Отметив, что подобные модели притягивают всё больший интерес, в этой главе ограничимся классическим представлением о среде как состоящей из простых точек.

В каждый момент времени  $t$  деформируемое тело занимает некий объём  $V$  пространства. Вводя какие-либо криволинейные координаты  $q^i$ , считаем  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^i, t)$ .

...

Но может быть эффективно и иное описание — пространственное (или эйлерово), при котором рассматриваются процессы не в частицах среды, а в точках пространства. Полагая, например,  $\rho = \rho(\mathbf{R}, t)$ , мы следим за происходящим в этом месте и не смущаемся непрерывным уходом и приходом частиц.

## § 2. Дифференцирование

Имея зависимости  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ , вводится базис  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$  ( $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$ ), взаимный базис  $\mathbf{r}^i$  и оператор Hamilton'a

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i = \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{r} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}, \quad \overset{\circ}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^i \partial_i, \quad (2.1)$$

так что  $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \varphi$ .

Если

...

Пусть  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — какое-либо поле. Найдём скорость изменения интеграла по объёму

$$\Upsilon \equiv \int_V \rho \varphi dV$$

(“ $\varphi$  есть  $\Upsilon$  на единицу массы”). Кажущееся сложным вычисление  $\dot{\Upsilon}$  ( $V$  деформируется) оказывается элементарным благодаря (??):

$$\Upsilon = \int_V \overset{\circ}{\rho} \varphi d\overset{\circ}{V} \Rightarrow \dot{\Upsilon} = \int_V \overset{\circ}{\rho} \dot{\varphi} d\overset{\circ}{V} = \int_V \rho \dot{\varphi} dV. \quad (2.2)$$

Не сто́ит противопоставлять материальное и пространственное описание. Далее будут использоваться оба в зависимости от ситуации.

### § 3. Градиент движения

Having motion function  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^i, t)$ ,  $\mathbf{r}(q^i) \equiv \mathbf{R}(q^i, 0)$ , differential “nabla” operators  $\nabla \equiv \mathbf{R}^i \partial_i$ ,  $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$ , and looking at relations for certain infinitesimal vector in two configurations, current  $d\mathbf{R}$  and initial  $d\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= d\mathbf{r} \cdot \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}}_{\substack{\mathbf{F}^\top \\ \mathbf{r}^i \mathbf{R}_i}} = \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top}_{\substack{\mathbf{F} \\ \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i}} \cdot d\mathbf{r} \\ d\mathbf{r} &= d\mathbf{R} \cdot \underbrace{\nabla \mathbf{r}}_{\substack{\mathbf{R}^i \mathbf{r}_i \\ \mathbf{F}^{-\top}}} = \underbrace{\nabla \mathbf{r}^\top}_{\substack{\mathbf{r}_i \mathbf{R}^i \\ \mathbf{F}^{-1}}} \cdot d\mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.1)$$

here comes to mind to introduce the “motion gradient”<sup>\*</sup>, взяв one of these tensor multipliers for it:  $\mathbf{F} \equiv \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top = \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i$ .

Почему именно этот? The reason to choose  $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top$  is another expression for differential

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \\ \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} \\ d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} \cdot d\mathbf{R} \\ \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{r}} &= \partial_i \zeta \mathbf{r}^i & \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{R}} &= \partial_i \zeta \mathbf{R}^i \\ \dots & \\ \mathbf{E} &= \underbrace{\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}}_{\substack{\partial \mathbf{r} \\ \partial \mathbf{r}}} = \underbrace{\nabla \mathbf{R}}_{\substack{\partial \mathbf{R} \\ \partial \mathbf{R}}} \\ \dots & \end{aligned}$$

Для декартовых координат с ортонормальным базисом  $\mathbf{e}_i = \text{const}$

$$\mathbf{R} = X_i(t) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r} = X_i(0) \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}_i, \quad x_i \equiv X_i(0),$$

\* Тензору  $\mathbf{F}$  не вполне подходит его более популярное название “градиент деформации”, поскольку этот тензор описывает не только саму деформацию, но и поворот тела как целого без деформации.

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\nabla} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \overset{\circ}{\partial}_i, \quad \nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial X_i} = \mathbf{e}_i \partial_i, \\ \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \frac{\partial (X_j \mathbf{e}_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \overset{\circ}{\partial}_i X_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \\ \nabla \mathbf{r} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_i} = \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \partial_i x_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\end{aligned}$$

...

По теореме о полярном разложении (§ 1.10), градиент движения разложим на тензор поворота  $\mathbf{O}$  и симметричные положительные тензоры искажений  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}$$

...

Когда нет поворота ( $\mathbf{O} = \mathbf{E}$ ), тогда  $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$ .

...

#### § 4. Тензоры и меры деформации

Градиент движения  $\mathbf{F}$  характеризует и деформацию тела, и поворот тела как целого. “Чистыми” тензорами деформации являются тензоры искажений  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  из полярного разложения  $\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}$ , так же как и другие тензоры, происходящие от  $\mathbf{U}$  или (и)  $\mathbf{V}$ .

Широко используются “квадраты”  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^2 &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}, \\ \mathbf{V}^2 &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \equiv \mathbf{\Phi}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Это тензор деформации Green’а (или правый тензор Cauchy–Green’а)  $\mathbf{G}$  и тензор деформации Finger’а (или левый тензор Cauchy–Green’а)  $\mathbf{\Phi}$ . Удобная связь с  $\mathbf{F}$  — без извлечения корней, в отличие от  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  — объясняет большую популярность тензоров  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{\Phi}$ . Тензор  $\mathbf{G}$  впервые использовал George Green\*.

\* **Green, George.** (1839) On the propagation of light in crystallized media // Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1842, vol. 7, part II, pages 121–140.

Обращение  $\Phi$  и  $G$  даёт ещё два тензора деформации

$$\begin{aligned} V^{-2} &= \Phi^{-1} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top)^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \equiv {}^2\mathbf{c}, \\ U^{-2} &= G^{-1} = (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F})^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \equiv {}^2\mathbf{f}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

каждый из которых иногда называется тензором Piola или тензором Finger'a. Обратный к левому тензору Cauchy–Green'a  $\Phi$  — тензор деформации Cauchy  ${}^2\mathbf{c}$ .

Компоненты представленных тензоров деформации

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{r}^i \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j \mathbf{r}^j = G_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j, \quad G_{ij} \equiv \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j, \\ {}^2\mathbf{f} &= \mathbf{r}_i \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j \mathbf{r}_j = G^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad G^{ij} \equiv \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j, \\ {}^2\mathbf{c} &= \mathbf{R}^i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \mathbf{R}^j = g_{ij} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j, \quad g_{ij} \equiv \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \\ \Phi &= \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j \mathbf{R}_j = g^{ij} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j, \quad g^{ij} \equiv \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j \end{aligned} \quad (4.3)$$

совпадают с компонентами единичного (“метрического”) тензора

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{R}_i \mathbf{R}^i = G_{ij} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j = \mathbf{R}^i \mathbf{R}_i = G^{ij} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j = \\ &= \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i = g^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i = g_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j, \end{aligned}$$

но ... lorem ipsum dolor sit amet where are the flowers gone wo sind sie geblieben

...

### *The right Cauchy–Green deformation tensor*

George Green discovered a deformation tensor known as the right Cauchy–Green deformation tensor or Green's deformation tensor

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \text{или} \quad G_{ij} = F_{k'i} F_{k'j} = \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_i} \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_j}.$$

This tensor gives the “square” of local change in distances due to deformation:  $d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$

Invariants of  $\mathbf{G}$  are used in expressions for (density of) isotropic body's potential energy of deformation. The most popular invariants are

$$\begin{aligned} \text{I}(\mathbf{G}) &\equiv \text{tr } \mathbf{G} = G_{ii} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ \text{II}(\mathbf{G}) &\equiv \frac{1}{2} (G_{jj}^2 - G_{ik} G_{ki}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ \text{III}(\mathbf{G}) &\equiv \det \mathbf{G} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

where  $\lambda_i$  are stretch ratios for unit fibers that are initially oriented along directions of eigenvectors of the right stretch tensor  $\mathbf{U}$ .

*The inverse of Green's deformation tensor*

Sometimes called Finger tensor or Piola tensor, the inverse of the right Cauchy–Green deformation tensor

$${}^2\mathbf{f} = \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \quad \text{или} \quad f_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_{k'}} \frac{\partial x_j}{\partial X_{k'}}$$

*The left Cauchy–Green or Finger deformation tensor*

Reversing the order of multiplication in the formula for the right Green–Cauchy deformation tensor leads to the left Cauchy–Green deformation tensor, defined as

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\top} = \mathbf{V}^2 \quad \text{или} \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k^{\circ}} \frac{\partial X_j}{\partial x_k^{\circ}}$$

The left Cauchy–Green deformation tensor is often called the Finger's deformation tensor, named after Josef Finger (1894).

Invariants of  $\mathbf{\Phi}$  are also used in expressions for strain energy density functions. The conventional invariants are defined as

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \Phi_{ii} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &\equiv \frac{1}{2} (\Phi_{ii}^2 - \Phi_{jk} \Phi_{kj}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3 &\equiv \det \mathbf{\Phi} = J^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

where  $J \equiv \det \mathbf{F}$  is determinant of the motion gradient.

*The Cauchy deformation tensor*

The Cauchy deformation tensor is defined as the inverse of left Cauchy–Green deformation tensor  $\mathbf{\Phi}^{-1}$

$${}^2\mathbf{c} = \mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{или} \quad c_{ij} = \frac{\partial x_k^{\circ}}{\partial X_i} \frac{\partial x_k^{\circ}}{\partial X_j}$$

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{c} \cdot d\mathbf{R}$$

This tensor is also called Piola tensor and Finger tensor in rheology and fluid dynamics literature.

### Finite strain tensors

The concept of *strain* is used to evaluate how much a given displacement differs locally from a body displacement as a whole (a “rigid body displacement”). One of such strains for large deformations is the *Green strain tensor*, also called *Green–Lagrangian strain tensor* or *Green–Saint-Venant strain tensor*, defined as

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) \quad \text{или} \quad C_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_i} \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right)$$

or as function of the displacement gradient tensor

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top \right)$$

in cartesian coordinates

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

The Green strain tensor measures how much  $\mathbf{G}$  differs from  $\mathbf{E}$ .

The *Almansi–Hamel strain tensor*, referenced to the deformed configuration (“Eulerian description”), is defined as

$${}^2\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - {}^2\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}^{-1}) \quad \text{или} \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial x_k^\circ}{\partial X_i} \frac{\partial x_k^\circ}{\partial X_j} \right)$$

or as function of the displacement gradient

$${}^2\mathbf{a} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top)$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} - \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

### Seth–Hill family of abstract strain tensors

B. R. Seth was the first to show that the Green and Almansi strain tensors are special cases of a more abstract strain measure. The idea was further expanded upon by Rodney Hill in 1968 (publication??). The Seth–Hill family of strain measures (also called Doyle–Ericksen tensors) is expressed as

$$\mathbf{D}_{(m)} = \frac{1}{2m} (\mathbf{U}^{2m} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{G}^m - \mathbf{E})$$

Для разных  $m$  это даёт

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{(1)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) && \text{Green strain tensor} \\ \mathbf{D}_{(1/2)} &= \mathbf{U} - \mathbf{E} = \mathbf{G}^{1/2} - \mathbf{E} && \text{Biot strain tensor} \\ \mathbf{D}_{(0)} &= \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G} && \text{logarithmic strain, Hencky strain} \\ \mathbf{D}_{(-1)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2}) && \text{Almansi strain} \end{aligned}$$

The second-order approximation of these tensors is

$$\mathbf{D}_{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top - (1 - m) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

where  $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S$  is the infinitesimal strain tensor.

Many other different definitions of measures  $\mathbf{D}$  are possible, provided that they satisfy these conditions:

- ✓  $\mathbf{D}$  vanishes for any movement of a body as a rigid whole
- ✓ dependence of  $\mathbf{D}$  on displacement gradient tensor  $\nabla \mathbf{u}$  is continuous, continuously differentiable and monotonic
- ✓ it's desired that  $\mathbf{D}$  reduces to the infinitesimal strain tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  when  $\nabla \mathbf{u} \rightarrow 0$

For example, tensors from the set

$$\mathbf{D}^{(n)} = (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{-n}) / 2n$$

aren't from the Seth–Hill family, but for any  $n$  they have the same 2nd-order approximation as Seth–Hill measures with  $m = 0$ .

**Wikipedia, the free encyclopedia** — Finite strain theory

...

Как отмечалось в § 1.10, тензоры

...

## § 5. Поле скоростей

Эта тема обсуждается в почти любой книге о механике сплошной среды, однако для твёрдых упругих сред она не столь насущна. Среди разных моделей материального континуума, упругое твёрдое тело выделяется интересной возможностью вывода полного



набора (системы) уравнений для него единой логически безупречной процедурой. Но пока мы идём путём, обычным для механики сплошной текучей среды.

Итак, есть поле скоростей в пространственном описании  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$ . Разложение тензора  $\nabla \mathbf{v} = \nabla \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^i \partial_i \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^i \dot{\mathbf{R}}_i^*$  на симметричную и кососимметричную части (§ 1.6)

$$\nabla \dot{\mathbf{R}} = \nabla \dot{\mathbf{R}}^S - \frac{1}{2} (\nabla \times \dot{\mathbf{R}}) \times \mathbf{E}$$

или, вводя тензор скорости деформации  $\mathcal{S}$  и тензор вихря  $\mathcal{W}$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathcal{S} - \mathcal{W},$$

$$\mathcal{S} \equiv \nabla \mathbf{v}^S = \nabla \dot{\mathbf{R}}^S = \frac{1}{2} (\mathbf{R}^i \dot{\mathbf{R}}_i + \dot{\mathbf{R}}_i \mathbf{R}^i), \quad (5.1)$$

$$-\mathcal{W} \equiv \nabla \mathbf{v}^A = -\mathbf{w} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{w} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^i \times \dot{\mathbf{R}}_i,$$

где фигурирует (псевдо)вектор вихря  $\mathbf{w}$ , сопутствующий тензору вихря  $\mathcal{W}$ .

Компоненты тензора скорости деформации в базисе текущей конфигурации

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = S_{ij} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j, \quad S_{ij} = \mathbf{R}_i \cdot \mathcal{S} \cdot \mathbf{R}_j = \frac{1}{2} \mathbf{R}_i \cdot (\mathbf{R}^k \dot{\mathbf{R}}_k + \dot{\mathbf{R}}_k \mathbf{R}^k) \cdot \mathbf{R}_j = \\ = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{R}}_i \cdot \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_j) = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j)^\bullet \end{aligned}$$

...

$$\dot{G}_{ij}$$

$$G_{ij} \equiv \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j$$

...

Для упругих сред дискуссия о поворотах не нужна, истинное представление появляется в ходе логически стройных выкладок без добавочных гипотез.

\* For sufficiently smooth functions, partial derivatives always commute, space and time ones too. Thus

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \quad \text{или} \quad \partial_i \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_i$$

## § 6. Вектор площади. Изменение площади

Возьмём бесконечно малую площадку. Вектор площади по длине равен площади площадки и направлен по нормали к площадке.

В недеформированной (отсчётной, оригинальной, начальной, “материальной”) конфигурации вектор площади представим как  $\mathbf{n}do$ . Площадь  $do$  бесконечно мала, а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали.

В текущей (актуальной, деформированной, “пространственной”) конфигурации та же площадка имеет вектор площади  $\mathbf{N}dO$ .

С достаточной точностью эти бесконечно малые площадки суть параллелограммы

$$\begin{aligned}\mathbf{n}do &= d\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j dq^i dq^j, \\ \mathbf{N}dO &= d\mathbf{R}' \times d\mathbf{R}'' = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} dq^i \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j dq^i dq^j.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Применяя преобразование объёма (??), имеем

$$\begin{aligned}d\mathcal{V} &= Jd\mathcal{V}^\circ \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}_k = J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}_k \mathbf{R}^k &= J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k \mathbf{R}^k \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j = J\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{F}^{-1}.\end{aligned}$$

Отсюда через (6.1) приходим к соотношению

$$\mathbf{N}dO = J\mathbf{n}do \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (6.2)$$

называемому формулой Nanson’a.

## § 7. Силы в сплошной среде. Тензор напряжения Cauchy

Поскольку частицы этой модели континуума — точки лишь с трансляционными степенями свободы\*, то среди обобщённых сил нет моментов, нет никаких приложенных внешних пар сил ни в объёме, ни по поверхности.

На элементарный объём  $d\mathcal{V}$  действует сила  $\rho \mathbf{f} d\mathcal{V}$ ; если  $\mathbf{f}$  — массовая сила (действующая на единицу массы), то  $\rho \mathbf{f}$  — объёмная. Такие силы происходят от силовых полей, например: гравита-

\* Трансляционные степени свободы возникают из способности частицы свободно двигаться в пространстве.

ционные силы (“силы тяжести”), силы инерции в неинерциальных системах отсчёта, электромагнитные силы при наличии в среде зарядов и токов.

На элементарную поверхность  $dO$  действует поверхностная сила  $p dO$ . Это может быть давление, трение, электростатическая сила при сосредоточенных на поверхности зарядах.

В материальном континууме, как в любой механической системе, различают силы внешние и внутренние. Со времён Euler’a и Cauchy считают, что внутренние силы в среде — это поверхностные силы близкодействия: на любой бесконечно малой площадке  $NdO$  внутри тела действует сила  $\tau_N dO$ . Уточним: действует с той стороны, куда направлена нормаль  $N$ .

Вектор  $\tau_N$  называется вектором напряжения на площадке с нормалью  $N$ . Согласно закону о действии и противодействии,  $\tau_N$  меняет знак, если  $N$  направить в противоположную сторону. (В некоторых книгах последнее утверждение доказывается через баланс импульса для бесконечно короткого цилиндра с основаниями  $NdO$  и  $-NdO$ .)

В каждой точке среды имеем бесконечно много векторов  $\tau_N$ , поскольку через точку проходят площадки любой ориентации. Но оказывается, множество всех  $\tau_N$  определяется одним тензором второго ранга — тензором напряжения. Рассмотрим содержащийся во многих книгах вывод этого утверждения.

На поверхности элементарного тетраэдра ...

...

## § 8. Баланс импульса и момента импульса

Рассмотрим какой-либо конечный объём  $\mathcal{V}$  среды, ограниченный поверхностью  $O(\partial\mathcal{V})$ . Формулировка баланса импульса такова

$$\left( \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} dV \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} dV + \oint_{O(\partial\mathcal{V})} \overbrace{N \cdot \tau}^{\tau_N} dO. \quad (8.1)$$

Импульс слева продифференцируем как в (2.2), а поверхностный интеграл справа превратим в объёмный по теореме о дивергенции. Получим

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}})) dV = 0.$$

Но объём  $V$  произволен, поэтому равно нулю подынтегральное выражение. Приходим к уравнению баланса импульса в локальной (дифференциальной) форме

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) = 0. \quad (8.2)$$

...

Переходим к балансу момента импульса. Интегральная формулировка:

$$\left( \int_V \mathbf{R} \times \rho \mathbf{v} dV \right)^\cdot = \int_V \mathbf{R} \times \rho \mathbf{f} dV + \oint_{O(\partial V)} \mathbf{R} \times (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) dO. \quad (8.3)$$

Дифференцируя левую часть ( $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}}$ )

$$\left( \int_V \mathbf{R} \times \rho \dot{\mathbf{R}} dV \right)^\cdot = \int_V \mathbf{R} \times \rho \ddot{\mathbf{R}} dV + \int_V \dot{\mathbf{R}} \times \rho \dot{\mathbf{R}} dV,$$

применяя теорему о дивергенции к поверхностному интегралу

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) &= -(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{R} = -\mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \oint_{O(\partial V)} \mathbf{R} \times (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}) dO = - \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) dV \end{aligned}$$

...

## § 9. Собственные числа тензора напряжения Коши

Как и любой симметричный тензор,  $\boldsymbol{\tau}$  имеет три вещественных собственных числа  $\sigma_i$ , называемых главными напряжениями (principal stresses), а также ортогональную тройку собственных векторов единичной длины  $\mathbf{e}_i$ . В представлении  $\boldsymbol{\tau} = \sum \sigma_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$

чаще всего индексы сортируются как  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , а тройка  $e_i$  — “правая”.

Известна теорема о кругах Мора (Mohr's circles)\*

...

Чтобы замкнуть систему уравнений модели сплошной среды, нужно добавить определяющие отношения — уравнения состояния, связывающие напряжение с деформацией (и другие необходимые связи). Однако, для упругой среды такой длинный путь построения модели излишен, в чём читатель и убедится далее.

## § 10. Принцип виртуальной работы (без множителей Лагранжа)

Согласно принципу виртуальной работы для некоего конечного объёма сплошной среды

$$\int_V (\rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} + \delta W^{(i)}) dV + \oint_{O(\partial V)} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (10.1)$$

Здесь  $\delta W^{(i)}$  — работа внутренних сил на единицу объёма в текущей конфигурации;  $\mathbf{f}$  — массовая сила, с динамикой ( $\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}$ );  $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}$  — поверхностная сила.

Применяя к поверхностному интегралу теорему о дивергенции, используя

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{R} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^T$$

и случайность  $\mathcal{V}$ , получаем локальную дифференциальную формулировку (10.1)

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{R} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^T + \delta W^{(i)} = 0. \quad (10.2)$$

Когда тело виртуально движется как жёсткое целое, работа внутренних сил обнуляется

$$\delta \mathbf{R} = \delta \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R}, \quad \delta \boldsymbol{\rho} = \mathbf{const}, \quad \delta \mathbf{o} = \mathbf{const} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (10.3)$$

\* Mohr's circles, named after Christian Otto Mohr, is a two-dimensional graphical representation of transformation for the Cauchy stress tensor.

Полагая  $\delta \mathbf{o} = \mathbf{0}$ ,  $\delta \mathbf{R} = \text{const}$  (лишь трансляция)  $\Rightarrow \nabla \delta \mathbf{R} = {}^2\mathbf{0}$ , из (10.2) и (10.3) следует баланс сил (импульса)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

??? и ???  $\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^\top = 0$  ???

Если  $\delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{R}$  (лишь поворот) с  $\delta \mathbf{o} = \text{const}$ , то

$$(13.5, \S 1.13) \Rightarrow \nabla \delta \mathbf{R} = {}^2\mathbf{0} - \nabla \mathbf{R} \times \delta \mathbf{o} = -\mathbf{E} \times \delta \mathbf{o} = -\delta \mathbf{o} \times \mathbf{E},$$

$$\nabla \delta \mathbf{R}^\top = \mathbf{E} \times \delta \mathbf{o} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{E}$$

...

В упругой среде внутренние силы потенциальны:  
 $\delta W^{(i)} = -\rho \delta \tilde{\Pi}$ .

...

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S = -\delta W^{(i)} = \rho \delta \tilde{\Pi} \quad (10.4)$$

...

Вид потенциала  $\tilde{\Pi}$  на единицу массы per mass unit пока неизвестен, но очевидно что  $\tilde{\Pi}$  определяется деформацией.

С помощью баланса массы  $\rho J = \overset{\circ}{\rho} \Leftrightarrow \rho = J^{-1} \overset{\circ}{\rho}$  ( $J \equiv \det \mathbf{F}$  — якобиан, определитель градиента движения) введём потенциал на единицу объёма в отсчётной конфигурации как

$$\Pi \equiv \overset{\circ}{\rho} \tilde{\Pi} \Rightarrow \delta \Pi = \overset{\circ}{\rho} \delta \tilde{\Pi}, \quad \rho \delta \tilde{\Pi} = J^{-1} \delta \Pi. \quad (10.5)$$

Полным аналогом (...) является равенство

...

## § 11. Определяющие отношения упругости

Фундаментальное соотношение упругости (??)

...

$$\Pi(C) = \int_0^C \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{C}$$

If the strain energy density is path independent, then it acts as a potential for stress, that is

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi(C)}{\partial \mathbf{C}}$$

For adiabatic processes,  $\Pi$  is equal to the change in internal energy per unit volume.

For isothermal processes,  $\Pi$  is equal to the Helmholtz free energy per unit volume.

The natural configuration of a body is defined as the configuration in which the body is in stable thermal equilibrium with no external loads and zero stress and strain.

When we apply energy methods in elasticity, we implicitly assume that a body returns to its natural configuration after loads are removed. This implies that the Gibbs' condition is satisfied:

$$\Pi(\mathbf{C}) \geq 0 \quad \text{with} \quad \Pi(\mathbf{C}) = 0 \quad \text{iff} \quad \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

...

Начальная конфигурация считается естественной (natural configuration) — недеформированной ненапряжённой:  $\mathbf{C} = {}^2\mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}$ , поэтому в  $\Pi$  нет линейных членов.

Тензор жёсткости  ${}^4\mathbf{A}$

...

Rubber-like material (elastomer)

Материалу типа резины (эластомеру) характерны большие деформации, и функция  $\Pi(\text{I}, \text{II}, \text{III})$  для него бывает весьма сложной\*.

При больших деформациях исчезают преимущества использования  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{C}$  — проще остаться с радиусом-вектором  $\mathbf{R}$  ...

...

\* **Harold Alexander**. A constitutive relation for rubber-like materials // International Journal of Engineering Science, volume 6 (September 1968), pages 549–563.

## § 12. Тензоры напряжения Piola–Kirchhoff’a и другие меры напряжения

Соотношение Нансона  $NdO = Jndo \cdot F^{-1}$  между векторами бесконечно малой площадки в отсчётной ( $ndo$ ) и в актуальной ( $NdO$ ) конфигурациях\*

$$(6.2) \Rightarrow NdO \cdot \tau = Jndo \cdot F^{-1} \cdot \tau \Rightarrow N \cdot \tau dO = n \cdot JF^{-1} \cdot \tau do$$

даёт двойное выражение поверхностной силы

$$N \cdot \tau dO = n \cdot T do, \quad T \equiv JF^{-1} \cdot \tau. \quad (12.1)$$

Тензор  $T$  называется первым (несимметричным) тензором напряжения Piola–Kirchhoff’a, иногда — “номинальным напряжением” (“nominal stress”) или “инженерным напряжением” (“engineering stress”). Бывает и когда какое-либо из этих (на)именований даётся транспонированному тензору

$$T^T = J\tau^T \cdot F^{-T} = J\tau \cdot F^{-T}.$$

Обращение (12.1)

$$J^{-1}F \cdot T = J^{-1}F \cdot JF^{-1} \cdot \tau \Rightarrow \tau = J^{-1}F \cdot T$$

...

$$\delta\Pi = T \cdot \delta\overset{\circ}{\nabla}R^T \Rightarrow \Pi = \Pi(\overset{\circ}{\nabla}R) \quad (12.2)$$

— этот немного неожиданный результат получился благодаря коммутативности  $\delta$  и  $\overset{\circ}{\nabla}$ :  $\overset{\circ}{\nabla}\delta R^T = \delta\overset{\circ}{\nabla}R^T$  ( $\nabla$  и  $\delta$  не коммутируют).

Тензор  $T$  оказался энергетически сопряжённым с  $F \equiv \overset{\circ}{\nabla}R^T$

$$T = \frac{\partial\Pi}{\partial\overset{\circ}{\nabla}R^T} = \frac{\partial\Pi}{\partial F}. \quad (12.3)$$

Второй (симметричный) тензор напряжения Piola–Kirchhoff’a  $S$  энергетически сопряжён с  $G \equiv F^T \cdot F$  и  $C \equiv \frac{1}{2}(G - E)$

$$\delta\Pi(C) = S \cdot \delta C \Rightarrow S = \frac{\partial\Pi}{\partial C}, \quad (12.4)$$

$$dG = 2dC \Rightarrow \delta\Pi(G) = \frac{1}{2}S \cdot \delta G, \quad S = 2 \frac{\partial\Pi}{\partial G}.$$

Связь между первым и вторым тензорами

$$S = T \cdot F^{-T} = F^{-1} \cdot T^T \Leftrightarrow T = S \cdot F^T, \quad T^T = F \cdot S$$

\* По-прежнему  $F$  — градиент движения и  $J \equiv \det F$  — якобиан.



и между тензором  $\mathbf{S}$  и тензором напряжения Cauchy  $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \Leftrightarrow J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} = \boldsymbol{\tau}.$$

...

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{\top} = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^{\top} \\ \delta \mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} \\ \delta \mathbf{T} &= \delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{F}^{\top}\end{aligned}$$

...

The quantity  $\boldsymbol{\kappa} = J\boldsymbol{\tau}$  is called the *Kirchhoff stress tensor* and is used widely in numerical algorithms in metal plasticity (where there's no change in volume during plastic deformation). Another name for it is *weighted Cauchy stress tensor*.

...

Вот баланс сил (импульса) с тензором  $\mathbf{T}$  для любого недеформированного объёма  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$

$$\int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \int_{O(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} dO = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} d\overset{\circ}{\mathcal{V}} + \int_{O(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} d\overset{\circ}{o} = \int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) d\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \mathbf{0}$$

и его локальный (дифференциальный) вариант

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (12.5)$$

Преимущества этого уравнения в сравнении с (8.2): здесь фигурирует известная плотность  $\overset{\circ}{\rho}$  массы недеформированного объёма  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$ , и оператор  $\overset{\circ}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^i \partial_i$  определяется через известные векторы  $\mathbf{r}^i$ . Появление  $\mathbf{T}$  отражает специфическое свойство упругого твёрдого тела — “сохранять” свою отсчётную конфигурацию. В механике жидкости, к примеру, тензор  $\mathbf{T}$  едва ли полезен.

Принцип виртуальной работы для произвольного объёма  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$  упругой ( $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$ ) среды:

$$\begin{aligned}\int_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}} \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} - \delta \Pi \right) d\overset{\circ}{\mathcal{V}} + \int_{O(\partial \overset{\circ}{\mathcal{V}})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R} d\overset{\circ}{o} &= 0, \\ \overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R}) &= \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{R} + \mathbf{T}^{\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}, \quad \mathbf{T}^{\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}^{\top} \\ \delta \Pi &= \left( \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right) \cdot \delta \mathbf{R} + \mathbf{T} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{R}^{\top}\end{aligned}$$

....

First one is non-symmetric, it connects forces in deformed stressed configuration to undeformed geometry+mass (initially known volumes, areas, densities), and it is energetically conjugate to the motion gradient (commonly mistakenly called “deformation gradient”, despite comprising of rigid rotations). First (sometimes its transpose) is also known as “nominal stress” and “engineering stress”.

Second one is symmetric, it connects loads in initial undeformed configuration to initial mass+geometry, and it’s conjugate to the right Cauchy–Green deformation tensor (and thus to the Cauchy–Green–Venant measure of deformation).

The first is simpler when you use just motion gradient and is more universal, but the second is simpler when you prefer right Cauchy–Green deformation and its offsprings.

There’s also popular Cauchy stress, which relates forces in deformed configuration to deformed geometry+mass.

“energetically conjugate” means that their product is energy, here: elastic (potential) energy per unit of volume

...

In the case of finite deformations, the Piola–Kirchhoff stress tensors express the stress relative to the reference configuration. This is in contrast to the Cauchy stress tensor which expresses the stress relative to the present configuration. For infinitesimal deformations and rotations, the Cauchy and Piola–Kirchhoff tensors are identical.

Whereas the Cauchy stress tensor  $\boldsymbol{\tau}$  relates stresses in the current configuration, the motion gradient and strain tensors are described by relating the motion to the reference configuration; thus not all tensors describing the material are in either the reference or current configuration. Describing the stress, strain and deformation either in the reference or current configuration would make it easier to define constitutive models. For example, the Cauchy stress tensor is variant to a pure rotation, while the deformation strain tensor is invariant; thus creating problems in defining a constitutive model that relates a varying tensor, in terms of an invariant one during pure rotation; as by definition constitutive models have to be invariant to pure rotations.

### *1st Piola–Kirchhoff stress tensor*

The *1st Piola–Kirchhoff stress tensor* is one possible solution to this problem. It defines a family of tensors, which describe the configuration of the body in either the current or the reference configuration.

The 1st Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{T}$  relates forces in the present (“spatial”) configuration with areas in the reference (“material”) configuration

$$\mathbf{T} = J \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

where  $\mathbf{F}$  is the motion gradient and  $J \equiv \det \mathbf{F}$  is the Jacobian determinant.

In terms of components in an orthonormal basis, the first Piola–Kirchhoff stress is given by

$$T_{iL} = J \tau_{ik} F_{Lk}^{-1} = J \tau_{ik} \frac{\partial X_L}{\partial x_k}$$

Because it relates different coordinate systems, the 1st Piola–Kirchhoff stress is a two-point tensor. In common, it’s not symmetric. The 1st Piola–Kirchhoff stress is the 3D generalization of the 1D concept of engineering stress.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 1st Piola–Kirchhoff stress tensor will vary with material orientation.

The 1st Piola–Kirchhoff stress is energy conjugate to the motion gradient.

### *2nd Piola–Kirchhoff stress tensor*

Whereas the 1st Piola–Kirchhoff stress relates forces in the current configuration to areas in the reference configuration, the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{S}$  relates forces in the reference configuration to areas in the reference configuration. The force in the reference configuration is obtained via a mapping that preserves the relative relationship between the force direction and the area normal in the reference configuration.

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-\top}$$

In index notation using an orthonormal basis,

$$S_{IL} = J F_{Ik}^{-1} F_{Lm}^{-\top} \tau_{km} = J \frac{\partial X_I}{\partial x_k} \frac{\partial X_L}{\partial x_m} \tau_{km}$$

This tensor, a one-point tensor, is symmetric.

If the material rotates without a change in stress (rigid rotation), the components of the 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor remain constant, irrespective of material orientation.

The 2nd Piola–Kirchhoff stress tensor is energy conjugate to the Green–Lagrange finite strain tensor.

...

### § 13. Варьирование текущей конфигурации

Прежде упругая среда рассматривалась в двух конфигурациях: отсчётной с радиусами-векторами  $\mathbf{r}$  и актуальной с  $\mathbf{R}$ . Теперь представим себе малое изменение текущей конфигурации с бесконечно малыми приращениями радиуса-вектора  $\delta\mathbf{R}$ , вектора массовых сил  $\delta\mathbf{f}$ , первого тензора напряжения Piola–Kirchhoff’a  $\delta\mathbf{T}$  и тензора деформации  $\delta\mathbf{C}$ . Варьируя (12.5), (...) \* и (...), получаем

$$\begin{aligned} \rho \overset{\circ}{\delta}\mathbf{f} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \delta\mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad \delta\mathbf{T} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta\mathbf{C} \right) \cdot \mathbf{F}^\top + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta\mathbf{F}^\top, \\ \delta\mathbf{F}^\top &= \delta \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} = \overset{\circ}{\nabla} \delta\mathbf{R} = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla \delta\mathbf{R}, \quad \delta\mathbf{F} = \delta \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top = \nabla \delta\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{F}, \\ \delta\mathbf{C} &= \mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \delta\mathbf{R}^S. \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$\begin{aligned} \dots \\ (6.2) \Rightarrow n d\mathbf{o} &= J^{-1} N d\mathbf{O} \cdot \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{T} d\mathbf{o} = J^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{T} d\mathbf{O} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{T} d\mathbf{o} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta\tau} d\mathbf{O}, \quad \boldsymbol{\delta\tau} \equiv J^{-1} \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{T} \end{aligned}$$

— введённый так тензор  $\boldsymbol{\delta\tau}$  связан с вариацией  $\delta\mathbf{T}$  как  $\boldsymbol{\tau}$  связан с  $\mathbf{T}$  ( $\boldsymbol{\tau} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ ). Из (13.1) и ...

...

### § 14. Внутренние связи

До сих пор деформация считалась свободной, мера деформации  $\mathbf{C}$  могла быть любой. Однако, существуют материалы со значительным сопротивлением некоторым видам деформации. Резина, например, изменению формы сопротивляется намного меньше, чем изменению объёма — некоторые виды резины можно считать несжимаемым материалом.

Понятие геометрической связи, развитое в общей механике ...

...

for incompressible materials  $\Pi = \Pi(\mathbf{I}, \mathbf{II})$

$$\begin{aligned} * \nabla &= \nabla \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} = \mathbf{R}^i \partial_i \cdot \mathbf{r}^j \partial_j \mathbf{r} = \mathbf{R}^i \partial_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^j \partial_j = \nabla \mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \\ \overset{\circ}{\nabla} &= \overset{\circ}{\nabla} \cdot \nabla \mathbf{R} = \mathbf{r}^i \partial_i \cdot \mathbf{R}^j \partial_j \mathbf{R} = \mathbf{r}^i \partial_i \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^j \partial_j = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} \cdot \nabla = \mathbf{F}^\top \cdot \nabla \end{aligned}$$

Mooney–Rivlin model of incompressible material

$$\Pi = c_1(I - 3) + c_2(\Pi - 3)$$

incompressible Treloar (neo-Hookean) material

$$c_2 = 0 \Rightarrow \Pi = c_1(I - 3)$$

...

### § 15. Полая сфера под действием давления

Решение этой относительно простой задачи описано во многих книгах. В отсчётной (ненапряжённой) конфигурации имеем сферу с внутренним радиусом  $r = r_0$  и наружным  $r = r_1$ . Давление равно  $p_0$  внутри и  $p_1$  снаружи.

Введём соответствующую задаче сферическую систему координат в отсчётной конфигурации  $q^1 = \theta$ ,  $q^2 = \phi$ ,  $q^3 = r$  (рис. ??). Эти же координаты будут и материальными. Имеем

...

## § 16. Напряжения как множители Лагранжа

Изложенному в § 10 применению принципа виртуальной работы предшествовало введение тензора напряжения Cauchy через баланс сил для элементарного тетраэдра (§ 7). Но здесь мы увидим, что принцип даёт обойтись и без рассуждений с тетраэдром.

Рассмотрим тело — не только лишь упругое, с любой виртуальной работой внутренних сил  $\delta W^{(i)}$  на единицу массы, — нагруженное массовыми  $\mathbf{f}$  (для краткости пишем  $\mathbf{f}$  вместо  $\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{R}}$ , так что динамика присутствует) и поверхностными  $\mathbf{p}$  внешними силами. Имеем вариационное уравнение

$$\int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} + \delta W^{(i)}) dV + \int_{O(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (16.1)$$

Полагаем, что внутренние силы не совершают работу при виртуальном движении тела как целого — когда нет деформации от бесконечно малых виртуальных перемещений  $\delta \mathbf{R}$  частиц тела:

$$\nabla \delta \mathbf{R}^S = {}^2\mathbf{0} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0. \quad (16.2)$$

Отбросив  $\delta W^{(i)}$  в (16.1) при условии (16.2), получим вариационное уравнение со связью. Приём с множителями Лагранжа даёт возможность считать вариации  $\delta \mathbf{R}$  независимыми. Поскольку в каждой точке связь представлена симметричным тензором второй сложности, то таким же тензором будут и множители Лагранжа  ${}^2\lambda$ . Приходим к уравнению

$$\int_V (\rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R} - {}^2\lambda \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S) dV + \int_{O(\partial V)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (16.3)$$

Благодаря симметрии  ${}^2\lambda$  имеем\*

$${}^2\lambda \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S = \nabla \cdot ({}^2\lambda \cdot \delta \mathbf{R}) - \nabla \cdot {}^2\lambda \cdot \delta \mathbf{R}.$$

Подставив это в (16.3) и применив теорему о дивергенции, получаем

$$\int_V (\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot {}^2\lambda) \cdot \delta \mathbf{R} dV + \int_{O(\partial V)} (\mathbf{p} - \mathbf{N} \cdot {}^2\lambda) \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0.$$

\*  $\Lambda^S \cdot \mathbf{X} = \Lambda^S \cdot \mathbf{X}^\top = \Lambda^S \cdot \mathbf{X}^S$ ,  $\nabla \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{B}^\top \cdot \nabla \mathbf{a}$

Но  $\delta \mathbf{R}$  случайна на поверхности и в объёме, так что

$$\mathbf{p} = \mathbf{N} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot {}^2\boldsymbol{\lambda} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

— формально введённый симметричный множитель  ${}^2\boldsymbol{\lambda}$  оказался тензором напряжения Cauchy.

Подобное введение напряжений показано в книге [61]. Новых результатов тут нет, но интересна сама возможность одновременного вывода тех уравнений механики сплошной среды, которые традиционно считались независимыми. В следующих главах эта техника используется для построения новых континуальных моделей.

### Библиография

Глубина изложения нелинейной безмоментной упругости характерна для книг А. И. Лурье [33, 36]. Оригинальность как основных идей, так и стиля присуща книге С. Truesdell'a [72]. Много ценной информации можно найти у К. Ф. Черных [81]. Стоит отметить и книгу Л. М. Зубова [23]. Монография Ю. Н. Работнова [61], где напряжения представлены как множители Лагранжа, очень интересна и своеобразна. О применении нелинейной теории упругости в смежных областях рассказано в книге С. Teodosiu [66]. Повышенным математическим уровнем отличается монография Ph. Ciarlet [65].



## КЛАССИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ

Геометрически линейная модель: перемещения малые. Операторы  $\overset{\circ}{\nabla}$  и  $\nabla$  неразличимы, “уравнения можно писать в отсчётной конфигурации”.

### § 1. Полный набор уравнений

Уравнения нелинейной упругости, даже в самых простых случаях, приводят к математически сложным задачам. Поэтому повсеместно применяется линейная теория. Её уравнения были выведены в первой половине XIX<sup>го</sup> века Cauchy, Navier, Lamé, Clapeyron’ом, Poisson’ом, Saint-Venant’ом, George Green’ом и другими учёными.

Полный набор (система) уравнений классической линейной теории в прямой инвариантной тензорной записи:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S. \quad (1.1)$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор напряжения,  $\mathbf{f}$  — вектор объёмных сил,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор линейной деформации,  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon})$  — упругая энергия деформации единицы объёма,  ${}^4\mathcal{A}$  — тензор жёсткости (четырёхвалентный, с симметрией  ${}^4\mathcal{A}_{12\bar{3}4} = {}^4\mathcal{A}$ ,  ${}^4\mathcal{A}_{1\bar{2}2} = {}^4\mathcal{A}$ ,  ${}^4\mathcal{A}_{3\bar{2}4} = {}^4\mathcal{A}$ ).

Уравнения (1.1) точные, они могут быть получены варьированием из нелинейной теории. Варьирование от произвольной конфигурации описано в § 3.13. Линейная теория — результат варьирования от ненапряжённой начальной конфигурации. При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \delta \mathbf{C} = \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \delta \mathbf{R}^S, \quad \boldsymbol{\tau} = {}^2\mathbf{0}, \\ \delta \boldsymbol{\tau} = \delta \mathbf{T} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C}, \quad \nabla \cdot \delta \boldsymbol{\tau} + \rho \delta \mathbf{f} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Остаётся поменять  $\delta \mathbf{R}$  на  $\mathbf{u}$ ,  $\delta \boldsymbol{\tau}$  на  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\partial^2 \Pi / \partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}$  на  ${}^4\mathcal{A}$ , а  $\rho \delta \mathbf{f}$  на  $\mathbf{f}$ .

Если такой вывод кажется читателю слишком формальным и малонаглядным, возможно исходить из уравнений

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \\ \boldsymbol{\tau} &= J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^\top, \quad \mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^S + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Полагая перемещение  $\mathbf{u}$  малым, перейдём от (1.3) к (1.1).

Или вот как. Вместо  $\mathbf{u}$  взять  $\chi \mathbf{u}$ , тут  $\chi \rightarrow 0$  — некоторый весьма малый параметр. А неизвестные представить рядами по целым степеням  $\chi$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}^{(0)} + \chi \boldsymbol{\tau}^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^{(0)} + \chi \mathbf{C}^{(1)} + \dots, \\ \nabla &= \overset{\circ}{\nabla} + \chi \nabla^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \chi \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^\top, \quad J = 1 + \chi J^{(1)} + \dots\end{aligned}$$

Для первых (“нулевых”) членов этих разложений и получается (1.1). В книге [72] сие названо “формальным приближением”.

Невозможно сказать в общем случае, насколько мал должен быть параметр  $\chi$  — ответ зависит от ситуации и определяется лишь тем, описывает линейная модель интересующий эффект или нет. Когда, например, интересна связь частоты свободных колебаний упругого тела с амплитудой, то нужна уже нелинейная модель.

Линейная задача ставится в начальном объёме  $\mathcal{V} = \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ , ограниченном поверхностью  $o$  с вектором площади  $\mathbf{n} do$  (“принцип начальных размеров”).

Краевые (граничные) условия чаще всего предполагаются такими: на части  $o_1$  поверхности известны перемещения (кинематическое краевое условие), а на другой части  $o_2$  — силы (статическое краевое условие)

$$\mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{o_2} = \mathbf{p}. \quad (1.4)$$

Но встречаются и более сложные комбинации, если знаем одновременно некоторые компоненты как  $\mathbf{u}$ , так и  $\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ . Для примера, на плоской грани  $x = \text{const}$  при вдавливании штампа с гладкой поверхностью  $u_x = v(y, z)$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$  (функция  $v$  определяется формой штампа).

Начальные условия в динамических задачах, когда вместо  $\mathbf{f}$  имеем  $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ , ставятся как обычно в механике — на положения и на скорости: в условный момент времени  $t=0$  определены  $\mathbf{u}$  и  $\dot{\mathbf{u}}$ .

Как отмечалось в гл. 2, в основу механики может быть положен принцип виртуальной работы (d'Alembert–Lagrange principle). Этот принцип справедлив и в линейной теории (внутренние силы в упругой среде потенциальны:  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$ )

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} - \delta \Pi \right] d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} do = 0, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = 0, \quad (1.5)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \frac{1}{2} \delta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u}, \\ \int_{\mathcal{V}} \delta \Pi d\mathcal{V} &= \oint_{o(\partial \mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u} do - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u} d\mathcal{V} \end{aligned}$$

и левая часть (1.5) приобретает вид

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{o_2} (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{u} do,$$

что, конечно же, равно нулю. Отметим краевое условие  $\mathbf{u}|_{o_1} = 0$ : виртуальные перемещения согласованы с этой связью —  $\delta \mathbf{u}|_{o_1} = 0$ .

## § 2. Уникальность решения динамической проблемы

Как обычно в линейной математической физике [36, 121], теорема единственности доказывается от противного. Допустим, что есть два решения:  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t)$ . Составим разность  $\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  и докажем, что она равна нулю.

Но сперва убедимся в существовании интеграла энергии — выведем уравнение баланса механической энергии в линейной модели:

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{T} + \Pi) \cdot d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{u}} do, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = 0. \quad (2.1)$$

Слева имеем

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \frac{1}{2}(\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})^{\bullet} = \frac{1}{2}\rho(\dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}}, \\ \dot{\Pi} &= \frac{1}{2} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^{\bullet}}_{2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathbf{u}}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathbf{u}}}_{-(\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}})}.\end{aligned}$$

Применяя теорему о дивергенции и используя уравнение баланса импульса  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0$  и краевое условие  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}$  на  $o_2$ , убеждаемся, что (2.1) удовлетворено.

Из (2.1) следует, что при отсутствии объёмных и поверхностных сил (и закреплении на  $o_1$ ) полная механическая энергия постоянна. Если в начальный момент тело находилось в ненапряжённом состоянии покоя, то

$$\int_V (\dot{T} + \dot{\Pi}) dV = 0. \quad (2.2)$$

Кинетическая энергия положительна:  $T > 0$  при  $\dot{\mathbf{u}} \neq 0$  и обращается в нуль лишь когда  $\dot{\mathbf{u}} = 0$  — это следует из самого её определения  $T = \frac{1}{2}\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ . Потенциальная энергия, при малых деформациях с тензором  $\boldsymbol{\varepsilon}$  представляемая квадратичной формой  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ , тоже положительна:  $\Pi > 0$  при  $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$ . Таково априорное требование положительной определённости к тензору жёсткости  $\mathbf{A}$ . Это одно из “дополнительных неравенств в теории упругости” [33, 72].

А поскольку  $T$  и  $\Pi$  положительны, из (2.2) вытекает

$$T = 0, \Pi = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = 0, \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \boldsymbol{\vartheta}^\circ \times \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{u}^\circ$  и  $\boldsymbol{\vartheta}^\circ$  — некоторые константы. При закреплении на  $o_1$   $\mathbf{u}|_{o_1} = 0 \Rightarrow \mathbf{u}^\circ = 0$  и  $\boldsymbol{\vartheta}^\circ = 0$ .

Теперь вспомним о двух решениях  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ . Их разность  $\mathbf{u}^*$  есть решение полностью однородной задачи (в краевых и в начальных условиях — нули, и в объёме  $\mathbf{f} = 0$ ). Поэтому  $\mathbf{u}^* = 0$  — единственность доказана.

Что же касается существования решения, то простыми выкладками его в общем случае не обосновать. Отметим лишь, что задача является эволюционной, то есть определяет развитие процесса во времени. Из баланса импульса находим ускорение  $\ddot{\mathbf{u}}$ , далее переходим на “следующий временной слой”  $t + dt$ :

...

Разумеется, эти соображения лишены математической стройности, характерной, например, для монографии Philippe Ciarlet [65].

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathcal{A} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}$$

### § 3. Закон Гука ceiiinossttuv

То соотношение между напряжением и деформацией, которое Robert Hooke в XVII<sup>ом</sup> веке мог высказать лишь в весьма неопределённой форме\*, в современных обозначениях записано в (1.1) и определяется тензором

$${}^4\mathcal{A} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = A^{ijkl} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l, \quad A^{ijkl} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}. \quad (3.1)$$

Тензор жёсткости, как частная производная упругого потенциала  $\Pi$  дважды по тому же тензору  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , симметричен по первой и второй паре индексов:  $A^{ijkl} = A^{klij}$ , от этого у 36 компонент из  $3^4 = 81$  “есть двойник”, и 45 независимы. К тому же, из-за симметрии тензора линейной деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , тензор  ${}^4\mathcal{A}$  симметричен

\* ceiiinossttuv, that is Ut tensio sic vis; ...

ещё и внутри каждой пары индексов:  $A^{ijkl} = A^{jikl} = A^{ijlk} (= A^{jilk})$ .  
Число независимых компонент при этом снижается до 21:

$$\begin{aligned}
 A^{abcd} &= A^{cdab} = A^{bacd} = A^{abdc} \\
 A^{1111} & \\
 A^{1112} &= A^{1121} = A^{1211} = A^{2111} \\
 A^{1113} &= A^{1131} = A^{1311} = A^{3111} \\
 A^{1122} &= A^{2211} \\
 A^{1123} &= A^{1132} = A^{2311} = A^{3211} \\
 A^{1133} &= A^{3311} \\
 A^{1212} &= A^{1221} = A^{2112} = A^{2121} \\
 A^{1213} &= A^{1231} = A^{1312} = A^{1321} = A^{2113} = A^{2131} = A^{3112} = A^{3121} \\
 A^{1222} &= A^{2122} = A^{2212} = A^{2221} \\
 A^{1223} &= A^{1232} = A^{2123} = A^{2132} = A^{2312} = A^{2321} = A^{3212} = A^{3221} \\
 A^{1233} &= A^{2133} = A^{3312} = A^{3321} \\
 A^{1313} &= A^{1331} = A^{3113} = A^{3131} \\
 A^{1322} &= A^{2213} = A^{2231} = A^{3122} \\
 A^{1323} &= A^{1332} = A^{2313} = A^{2331} = A^{3123} = A^{3132} = A^{3213} = A^{3231} \\
 A^{1333} &= A^{3133} = A^{3313} = A^{3331} \\
 A^{2222} & \\
 A^{2223} &= A^{2232} = A^{2322} = A^{3222} \\
 A^{2233} &= A^{3322} \\
 A^{2323} &= A^{2332} = A^{3223} = A^{3232} \\
 A^{2333} &= A^{3233} = A^{3323} = A^{3332} \\
 A^{3333} &
 \end{aligned}$$

Нередко компоненты тензора жёсткости записывают симметричной матрицей  $6 \times 6$  вида

$$[A]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_3 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_4 & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_5 & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_6 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A^{1111} & A^{1122} & A^{1133} & A^{1112} & A^{1113} & A^{1123} \\ A^{2211} & A^{2222} & A^{2233} & A^{1222} & A^{1322} & A^{2223} \\ A^{3311} & A^{3322} & A^{3333} & A^{1233} & A^{1333} & A^{2333} \\ A^{1211} & A^{2212} & A^{3312} & A^{1212} & A^{1213} & A^{1223} \\ A^{1311} & A^{2213} & A^{3313} & A^{1312} & A^{1313} & A^{1323} \\ A^{2311} & A^{2322} & A^{3323} & A^{2312} & A^{2313} & A^{2323} \end{bmatrix}$$

Даже в декартовых координатах  $x, y, z$  квадратичная форма упругой энергии  $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$  довольно-таки громоздкая:

$$\begin{aligned}
 2\Pi &= a_1 \varepsilon_x^2 + a_2 \varepsilon_y^2 + a_3 \varepsilon_z^2 + a_4 \varepsilon_{xy}^2 + a_5 \varepsilon_{xz}^2 + a_6 \varepsilon_{yz}^2 + \\
 &+ 2 \left[ \varepsilon_x (a_{12} \varepsilon_y + a_{13} \varepsilon_z + a_{14} \varepsilon_{xy} + a_{15} \varepsilon_{xz} + a_{16} \varepsilon_{yz}) + \right. \\
 &\quad + \varepsilon_y (a_{23} \varepsilon_z + a_{24} \varepsilon_{xy} + a_{25} \varepsilon_{xz} + a_{26} \varepsilon_{yz}) + \\
 &\quad + \varepsilon_z (a_{34} \varepsilon_{xy} + a_{35} \varepsilon_{xz} + a_{36} \varepsilon_{yz}) + \\
 &\quad \left. + \varepsilon_{xy} (a_{45} \varepsilon_{xz} + a_{46} \varepsilon_{yz}) + a_{56} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} \right]. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Когда добавляется материальная симметрия, число независимых компонент тензора  ${}^4\mathbf{A}$  ещё уменьшается.

Пусть материал имеет плоскость симметрии (упругих свойств)  $z = \text{const}$ . Тогда энергия  $\Pi$  не меняется при перемене знаков у  $\varepsilon_{zx}$  и  $\varepsilon_{zy}$ . А это возможно лишь если

$$\Pi \Big|_{\substack{\varepsilon_{xz} = -\varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{yz}}} = \Pi \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 &= a_{15} = a_{16} = a_{25} = a_{26} = \\ &= a_{35} = a_{36} = a_{45} = a_{46} \end{aligned} \quad (3.3)$$

— число независимых констант упало до 13.

Пусть далее плоскостей симметрии две:  $z = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ . Поскольку  $\Pi$  не чувствительна к знакам  $\varepsilon_{yx}$  и  $\varepsilon_{yz}$ , вдобавок к (3.3) имеем

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{56} = 0 \quad (3.4)$$

— осталось 9 констант.

Ортотропным (ортогонально анизотропным) называется материал с тремя ортогональными плоскостями симметрии — пусть это координатные плоскости  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Легко увидеть, что (3.3) и (3.4) — это весь набор нулевых констант и в этом случае. Итак, ортотропный материал характеризуется девятью константами, и “для ортотропности” достаточно двух перпендикулярных плоскостей симметрии. Вид упругой энергии упрощается до

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2}a_1\varepsilon_x^2 + \frac{1}{2}a_2\varepsilon_y^2 + \frac{1}{2}a_3\varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}a_4\varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{2}a_5\varepsilon_{xz}^2 + \frac{1}{2}a_6\varepsilon_{yz}^2 + \\ + a_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_x\varepsilon_z + a_{23}\varepsilon_y\varepsilon_z. \end{aligned}$$

В ортотропном материале сдвиговые (угловые) деформации  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  никак не влияют на нормальные напряжения  $\sigma_x = \partial\Pi/\partial\varepsilon_x$ ,  $\sigma_y = \partial\Pi/\partial\varepsilon_y$ ,  $\sigma_z = \partial\Pi/\partial\varepsilon_z$  (и наоборот). Популярный ортотропный материал — древесина; её упругие свойства различны по трём взаимно перпендикулярным направлениям: по радиусу, вдоль окружности и по высоте ствола.

Ещё один случай анизотропии — трансверсально изотропный (transversely isotropic) материал. Он характеризуется

...

æolotropic (anisotropic)

...

## § 4. Теоремы статики

*Теорема Clapeyron'a*

В равновесии с внешними силами, объёмными  $\mathbf{f}$  и поверхностными  $\mathbf{p}$ , работа этих сил (“статически замороженных” — постоянных во времени) на актуальных перемещениях равна удвоенной\* энергии деформации

$$2 \int_V \Pi dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} do. \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \bigcirc \quad 2\Pi &= \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^S = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}}_{-f} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \int_V \Pi dV = \int_{o_2} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}}_p \cdot \mathbf{u} do + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV \quad \bullet \end{aligned}$$

Из (4.1) следует, что без нагрузки  $\int_V \Pi dV = 0$ . Поскольку  $\Pi$  положительна, то и напряжение  $\boldsymbol{\tau}$ , и деформация  $\boldsymbol{\varepsilon}$  без нагрузки — нулевые.

## Парадокс эластостатики

Накопленная потенциальная энергия деформации равна всего половине работы внешних сил.

Accumulated potential energy of deformation accounts for (is equal to) only half the work done by the external forces, acting through displacements from the unstressed configuration to the equilibrium.

Теорема Clapeyron'a, взятая буквально, подразумевает, что запасённая упругая энергия составляет только половину энергии, потраченной на деформацию тела; оставшаяся половина работы, совершённой над телом внешними силами, не учитывается и теряется где-то по достижении равновесия.

Этот кажущийся парадокс достигается в рамках чисто консервативной линейной упругости. В качестве альтернативы, однако, в эласто-

\* **Benoît Paul Émile Clapeyron.** Mémoire sur le travail des forces élastiques dans un corps solide élastique déformé par l'action de forces extérieures // Comptes rendus, XLVI, Janvier–Juin 1858. 208–212 pp.



статике общая характеристика работы, совершённой для достижения равновесия, концептуально неоднозначна, и может быть нужна новая интерпретация.

**Roger Fosdick and Lev Truskinovsky.** About Clapeyron's Theorem in Linear Elasticity // Journal of Elasticity, Volume 72, July 2003. Pages 145–172.

There is always heating due to energy dissipation.

Для решения парадокса в теории распространена концепция “бесконечно медленного постепенного статического нагружения” (“infinitely slow gradual application of the load”).

Статика рассматривает “замороженное” равновесие, оно вне времени. Динамика же нагружения до равновесия это предыстория. В линейной теории в равновесии работа внешних сил на актуальных перемещениях, затраченная на деформацию, равна удвоенной внутренней потенциальной энергии деформации. “Запасается” всего половина потраченной энергии. Вторая половина это дополнительная энергия, она теряется до обретения равновесия на динамику — на кинетическую энергию частиц (на “диссипацию”), на колебания и волны. Так в теории. Однако, в реальности не бывает ни моментального “мёртвого” нагружения, ни бесконечно медленного “следающего”. Это две крайности. Реальная динамика нагружения всегда где-то между ними. Посему теоретическая дополнительная энергия всегда больше той реальной “диссипативной” кинетической, которая сопутствовала процессу нагружения, и в линейной теории она численно равна упругому потенциалу — половине работы внешних сил, той самой второй половине.

В области же бесконечно малых вариаций и виртуальных работ, работа реальных внешних сил на виртуальных перемещениях точно равна вариации упругого потенциала. А упругая среда есть такая, в которой вариация работы сил внутренних (напряжений) на виртуальных деформациях это минус вариация потенциала.

$-\delta W^{(i)} = \delta \Pi = \delta W^{(e)}$ , когда варьируются только перемещения (нагрузки не варьируются). Потому в принципе виртуальной работы и варьируются лишь перемещения, чтобы виртуальная работа внешних неварьируемых реальных сил на вариациях перемещений была равна минус вариации внутренней энергии (и, для упругой среды, вариации упругого потенциала).

*Теорема об уникальности решения*

Как и в динамике (§ 2), допускаем существование двух решений и ищем их разность

...

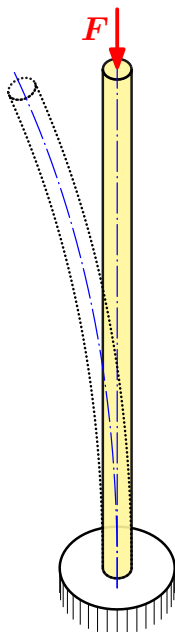


рисунок 9

Единственность решения, определённая Г. Kirchhoff'ом\*, противоречит, казалось бы, повседневному опыту. Вообразим прямой стержень, закреплённый на одном конце и сжатый продольной силой на другом (рис. 9). Когда нагрузка достаточно большая, задача статики имеет два решения — “прямое” и “изогнутое”. Но такое противоречие объясняется нелинейностью задачи. При малой же нагрузке решение единственно и может быть описано линейными уравнениями.

*Теорема о взаимности работ*

Для тела с закреплением на части поверхности  $o_1$  рассматриваются два варианта: первый с нагрузками  $\mathbf{f}_1, \mathbf{p}_1$  и второй с нагрузками  $\mathbf{f}_2, \mathbf{p}_2$ . Словесная формулировка теоремы та же, что и в § 2.6. Метаматическая запись

...

Betti's theorem, also known as reciprocal work theorem, discovered by Enrico Betti in 1872, states that for a linear elastic structure subject to two sets of forces  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) and  $Q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), the work done by the

\* **Gustav Robert Kirchhoff**. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's journal), 56. Band (1859). Seiten 285–313.

set  $P$  through the displacements produced by the set  $Q$  is equal to the work done by the set  $Q$  through the displacements produced by the set  $P$ . This theorem has applications in structural engineering where it is used to define influence lines and derive the boundary element method.

...

Теорема о взаимности работ Enrico Betti находит неожиданные и эффективные применения. Как иллюстрацию рассмотрим защемленный одним концом (“консольный”) стержень-балку, изгибаемый силами величиной  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 10). Используя линейность задачи, перемещения возможно найти как

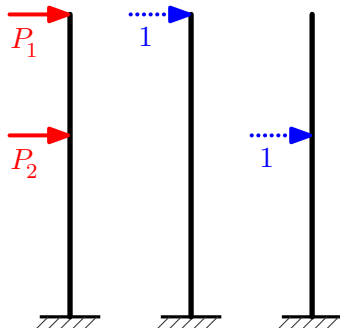


рисунок 10

$$\begin{aligned} u_1 &= \dots, \\ u_2 &= \dots \end{aligned}$$

...

## § 5. Уравнения в перемещениях

Полный набор уравнений (1.1) содержит неизвестные  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{u}$ . Исключая  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , приходим к постановке в перемещениях (симметризация  $\boldsymbol{\nabla u}$  тут излишняя, ведь  ${}^4\mathcal{A}_{3\rightleftharpoons 4} = {}^4\mathcal{A}$ )

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\nabla u}) + \boldsymbol{f} &= \mathbf{0}; \\ \boldsymbol{u}|_{o_1} &= \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{n} \cdot {}^4\mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\nabla u}|_{o_2} = \boldsymbol{p}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В изотропном теле (5.1) принимает вид

...

Общее решение однородного уравнения (...) нашёл Heinz Neuber

П. Ф. Папкович

...

## § 6. Сосредоточенная сила в неограниченной среде

Concentrated force is useful mathematical idealization, but cannot be found in the real world, where all forces are either body forces acting over a volume or surface forces acting over an area.

Начнём с риторического вопроса: почему упругое тело сопротивляется приложенной нагрузке, выдерживает её? Удачный ответ можно найти ...

...

## § 7. Определение перемещений по деформациям

Разложив градиент перемещения на симметричную и антисимметричную части

$$\nabla \mathbf{u} = \overbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\nabla \mathbf{u}^S} - \overbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}}^{-\nabla \mathbf{u}^A}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}, \quad (7.1)$$

...

Saint-Venant's compatibility condition is the integrability conditions for a symmetric tensor field to be a strain.

The compatibility conditions in linear elasticity are obtained by observing that there are six strain–displacement relations that are functions of only three unknown displacements. This suggests that the three displacements may be removed from the system of equations without loss of information. The resulting expressions in terms of only the strains provide constraints on the possible forms of a strain field.

A body that deforms without developing any gaps/overlaps is called a compatible body. Compatibility conditions are mathematical conditions that determine whether a particular deformation will leave a body in a compatible state.

...

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^\top$$

Контур здесь произволен, так что приходим к соотношению

$$\text{inc } \boldsymbol{\varepsilon} = {}^2\mathbf{0}, \quad (7.2)$$

называемому уравнением совместности деформаций.

...

Все уравнения линейной теории имеют аналог (первоисточник) в нелинейной. Чтобы найти его для (7.2), вспомним тензор деформации Cauchy–Green’a (§ 3.4) и тензоры кривизны (§ 1.15)

...

## § 8. Уравнения в напряжениях

Баланс сил

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

ещё не определяет напряжений. Они должны быть такими, чтобы соответствующие им деформации оказались совместны:

...

## § 9. Принцип минимума потенциальной энергии

Начнём с формулировки принципа:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) \equiv \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma \rightarrow \min, \quad \mathbf{u}|_{o_1} = \mathbf{u}_0. \quad (9.1)$$

Этот функционал, называемый потенциальной энергией системы, принимает наименьшее значение на истинных перемещениях — то есть на решении задачи (5.1). При этом функции  $\mathbf{u}$  должны удовлетворять геометрическому условию на  $o_1$  (чтобы не нарушать связи) и быть непрерывными (иначе  $\Pi(\nabla \mathbf{u})$  не будет интегрируемой).

Для обоснования принципа возьмём какое-либо ещё приемлемое поле перемещений  $\mathbf{u}'$  и найдём разность  $\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) =$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}') - \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V} - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\sigma.$$

Поскольку  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{o_2} = \mathbf{p}$  и  $(\mathbf{u}' - \mathbf{u})|_{o_1} = \mathbf{0}$ , то

$$\begin{aligned} \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\sigma &= \oint_{o(\partial\mathcal{V})} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\sigma = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u})) d\mathcal{V} = \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\tau}^\top \cdot \nabla (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) d\mathcal{V} \end{aligned}$$

и  $\mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) =$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{V}} \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}') - \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f})}_0 \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V} - \\ &\quad - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u}' - \nabla \mathbf{u}) d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

Тут  $\Pi(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^S$ ,  $\Pi(\nabla \mathbf{u}') = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}'^S$ , а благодаря симметрии  $\boldsymbol{\tau}^\top = \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{a} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{a}^S \forall \mathbf{a}$ . Поэтому

...

## § 10. Принцип минимума дополнительной энергии

Дополнительной энергией называется следующий функционал над полем напряжений:

...

...

Принцип минимума дополнительной работы очень полезен, например, для получения некоторых оценок приближённых решений. Но для вычислительной практики его роль не столь весома, как принципа Лагранжа.

## § 11. Смешанные принципы стационарности

### Prange–Hellinger–Reissner Variational Principle,

named after *Ernst Hellinger*, *Georg Prange* and *Eric Reissner*.

Working independently of Hellinger and Prange, Eric Reissner published his famous six-page paper “On a variational theorem in elasticity” in 1950. In this paper he develops — without, however, considering

Hamilton–Jacobi theory — a variational principle same to that of Prange and Hellinger.

### **Hu–Washizu Variational Principle,**

named after *Hu Haichang* and *Kyuichiro Washizu*.

Именами Reissner’a, Prange’a и Hellinger’a назван такой функционал над перемещениями и напряжениями:

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\mathcal{V}} [\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^S - \hat{\Pi}(\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}] d\mathcal{V} - \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) do - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} do. \quad (11.1)$$

...

Преимущество принципа Рейсснера–Хеллингера — в свободе варьирования. Но есть и изъян: у функционала нет экстремума на истинном решении, а лишь стационарность.

Принцип можно использовать для построения приближённых решений методом Ритца (Ritz method). Задавая аппроксимации

...

Принцип Ху–Васидзу [103] формулируется так:

$$\delta \mathcal{W}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\tau}) = 0, \\ \mathcal{W} \equiv \int_{\mathcal{V}} [\boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u}^S - \boldsymbol{\varepsilon}) + \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}] d\mathcal{V} - \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) do - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} do. \quad (11.2)$$

Как и в принципе Рейсснера–Хеллингера, здесь нет ограничений ни в объёме, ни на поверхности, но добавляется третий независимый аргумент  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Поскольку  $\hat{\Pi} = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \Pi$ , то (11.1) и (11.2) кажутся почти одним и тем же.

Из принципа Ху–Васидзу вытекает вся полная система уравнений с граничными условиями, так как

...

Об истории открытия вариационных принципов и соотношении их написано, например, у Ю. Н. Работнова [61].

## § 12. Антиплоский сдвиг

Это та проблема линейной теории упругости, где простыми выкладками получаются нетривиальные результаты. Нетривиальное в теории упругости это, например, когда “деление силы на площадь” даёт бесконечно большую погрешность в нахождении напряжения.

Рассматривается изотропная среда в декартовых координатах  $x_i$  ( $x_1$  и  $x_2$  в плоскости,  $x_3$ ) с базисными ортами  $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ . В случае антиплоской деформации (антиплоского сдвига) поле перемещений  $\mathbf{u}$  параллельно координате  $x_3$ :  $\mathbf{u} = v \mathbf{e}_3$ , и  $v$  не зависит от  $x_3$ :  $v = v(x_1, x_2)$ ,  $\partial_3 v = 0$ .

Деформация

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S = \nabla (v \mathbf{e}_3)^S = \mathbf{e}_3 \nabla v^S + \underbrace{v \nabla \mathbf{e}_3}_0^S = \frac{1}{2} (\nabla v \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \nabla v)$$

...

Возможна неоднородность среды в плоскости  $x_1, x_2$ :  $\mu = \mu(x_1, x_2)$ ,  $\partial_3 \mu = 0$ .

...

## § 13. Кручение стержней

Эта задача, тщательно изученная Saint-Venant’ом, рассматривается едва ли не в каждой книге по классической теории упругости. Речь идёт о цилиндре какого-либо сечения, нагруженном лишь поверхностными силами на торцах

...

## § 14. Плоская деформация

Тут вектор перемещения  $\mathbf{u}$  параллелен плоскости  $x_1, x_2$  и не зависит от третьей координаты  $z$

...



## Библиография

Можно назвать несколько десятков книг по классической теории упругости, представляющих несомненный интерес несмотря на возрастающую отдалённость во времени. Подробные литературные указания содержатся в фундаментальной монографии ...

## МИКРОПОЛЯРНАЯ ТРЁХМЕРНАЯ СРЕДА

## § 1. Введение в линейную микрополярную теорию

**Х**арактерная отличительная особенность классических упругих сред (гл. 3 и 4) — то, что они состоят “из простых материальных точек”. Частица классического континуума имеет лишь трансляционные степени свободы, её движение определяется только вектором  $\mathbf{R}(q^i, t)$ . Поэтому нагрузки (“силовые факторы”) в такой среде — только силы, объёмные и поверхностные. Моментов нет.

Но не так уж трудно построить более сложные модели сплошной среды, в которых частицы обладают не только лишь степенями свободы трансляции, но и некоторыми дополнительными. Новые степени свободы связаны и с новыми силовыми факторами, а также новыми уравнениями.

Наиболее естественная из неклассических моделей трёхмерной среды предложена братьями Cosserat в 1909 году [28]. Каждая частица континуума Коссера — это элементарное твёрдое тело с шестью степенями свободы. Силовые факторы в такой среде — силы и моменты. Работа братьев Коссера оставалась незамеченной полвека, но затем возник интерес к этой теме [41, 47].

from **Nowacki W.** *The Linear Theory of Micropolar Elasticity*. In: *Micropolar Elasticity. International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures)*, vol. 151, 1974, pp. 1–43

Woldemar Voigt tried to remove the shortcomings of the classical theory of elasticity [**W. Voigt.** *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 34: 3–51, 1887] by the

assumption that the interaction of two parts of the body is transmitted through an area element  $do$  by means not only of the force vector  $\mathbf{p}do$  but also by the moment vector  $\mathbf{m}do$ . Thus, besides the force stresses  $\sigma_{ji}$  also the moment stresses have been defined.

However, the complete theory of asymmetric elasticity was developed by the brothers **François et Eugène Cosserat** who published it in 1909 in the work "*Théorie des corps déformables*".

They assumed that the body consists of interconnected particles in the form of small rigid bodies. During the deformation each particle is displaced by  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  and rotated by  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ , the functions of the position  $\mathbf{x}$  and time  $t$ .

Thus an elastic continuum has been described such that its points possess the orientation (polar media) and for which we can speak of the rotation of a point. The vectors  $\mathbf{u}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  are mutually independent and determine the deformation of the body. The introduction of the vectors  $\mathbf{u}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  and the assumption that the transmission of forces through an area element  $do$  is carried out by means of the force vector  $\mathbf{p}$  and the moment vector  $\mathbf{m}$  leads in the consequence to asymmetric stress tensors  $\sigma_{ji}$  and  $\mu_{ji}$ .

The theory of the brothers E. and F. Cosserat remained unnoticed and was not duly appreciated during their lifetime. This was so because the presentation was very general (the theory was non-linear, including large deformations) and because its frames exceeded the frames of the theory of elasticity. They attempted to construct the unified field theory, containing mechanics, optics and electrodynamics and combined by a general principle of the least action.

The research in the field of the general theories of continuous media conducted in the last fifteen years, drew the attention of the scientists to Cosserats' work. Looking for the new models, describing more precisely the behaviour of the real elastic media, the models similar to, or identical with that of Cosserats' have been encountered. Here, we mention, first of all, the papers by C. Truesdell and R. A. Toupin [**C. Truesdell and R. A. Toupin**. *The classical field theories*. *Encyclopædia of Physics*, Chapter 1, Springer-Verlag, Berlin, 1960], G. Grioli [**Grioli G.** *Elasticité asymétrique*. *Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser. IV*, 50 (1960)], R. D. Mindlin and H. F. Tiersten [**Mindlin, R. D.; Tiersten, H. F.** *Effects of couple-stresses in linear elasticity*. *Arch. Rational Mech. Anal.* 11. 1962. 415–448].

В истинно микрополярном континууме векторные поля перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и поворотов  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, t)$  взаимно независимы. Это также называется моделью со свободным вращением (free rotation).

Рассмотрим сперва геометрически линейную модель, то есть случай малых перемещений и малых поворотов. Здесь операторы  $\overset{\circ}{\nabla}$  и  $\nabla$  неразличимы, уравнения “можно писать в исходной конфигурации”,  $\delta$  и  $\nabla$  коммутируют ( $\delta\nabla\mathbf{u} = \nabla\delta\mathbf{u}$ ,  $\delta\nabla\boldsymbol{\varphi} = \nabla\delta\boldsymbol{\varphi}$ ).

Как основу построения этой модели положим принцип виртуальной работы (“вариация работы реальных внешних сил на виртуальных перемещениях равна с обратным знаком вариации работы внутренних сил — реальных напряжений на виртуальных деформациях”)

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}) d\mathcal{V} + \int_o (\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}) do = - \int_{\mathcal{V}} \delta W^{(i)} d\mathcal{V}.$$

Здесь  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{m}$  — внешние силы и моменты на единицу объёма;  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{M}$  — они же, но на единицу поверхности (поверхностные нагрузки действуют лишь на некоторой части  $o$  поверхности  $\partial\mathcal{V}$ , ограничивающей объём  $\mathcal{V}$ );  $\delta W^{(i)}$  — работа внутренних сил на единицу объёма.

По-прежнему полагаем, что  $\delta W^{(i)}$  обнуляется при движении тела как целого без деформации:

$$\delta\mathbf{u} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} + \text{const}, \quad \delta\boldsymbol{\varphi} = \text{const} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0,$$

$$\nabla\delta\mathbf{u} = \nabla\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} - \nabla\mathbf{r} \times \delta\boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{E} \times \delta\boldsymbol{\varphi} = -\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \nabla\delta\boldsymbol{\varphi} = {}^2\mathbf{0}.$$

Вводя тензоры деформации — тензор относительного смещения между частицами (distortion tensor, strain tensor)  $\boldsymbol{\gamma}$  и тензор искривления-скручивания (curvature-twist tensor, torsion-flexure tensor, wryness tensor)  $\boldsymbol{\kappa}$  — как

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \nabla\boldsymbol{\varphi}, \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\times} = \nabla \times \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\kappa}_{\times} = \nabla \times \boldsymbol{\varphi},$$

$$\delta\boldsymbol{\gamma} = \nabla\delta\mathbf{u} + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \quad \delta\boldsymbol{\kappa} = \nabla\delta\boldsymbol{\varphi},$$

имеем нужное отсутствие виртуальных деформаций  $\delta\boldsymbol{\gamma} = {}^2\mathbf{0}$  и  $\delta\boldsymbol{\kappa} = {}^2\mathbf{0}$ .

В §3.16 для безмоментной среды, напряжения появляются как множители Lagrange'a в принципе виртуальной работы при  $\delta W^{(i)} = 0$ . Так же и тут:

$$\int_V \left( f \cdot \delta u + m \cdot \delta \varphi - \tau \cdot \delta \gamma^\top - \mu \cdot \delta \kappa^\top \right) dV + \int_O \left( p \cdot \delta u + M \cdot \delta \varphi \right) dO = 0. \quad (1.2)$$

Множители Лагранжа в каждой точке — это несимметричные тензоры второй сложности  $\tau$  и  $\mu$ .

Преобразуем  $-\tau \cdot \delta \gamma^\top$  и  $-\mu \cdot \delta \kappa^\top$

$$\delta \gamma^\top = \nabla \delta u^\top - \delta \varphi \times E, \quad \delta \kappa^\top = \nabla \delta \varphi^\top,$$

$$-\tau \cdot \delta \gamma^\top = -\tau \cdot \nabla \delta u^\top + \tau \cdot (\delta \varphi \times E), \quad -\mu \cdot \delta \kappa^\top = -\mu \cdot \nabla \delta \varphi^\top.$$

Используя

$$(6.4, \S 1.6) \Rightarrow A_\times = -A \cdot \cdot {}^3\epsilon,$$

$$\begin{aligned} A \cdot \cdot (b \times E) &= A \cdot \cdot (E \times b) = A \cdot \cdot (-{}^3\epsilon \cdot b) = \\ &= (-A \cdot \cdot {}^3\epsilon) \cdot b = A_\times \cdot b \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau \cdot \cdot (\delta \varphi \times E) = \tau_\times \cdot \delta \varphi$$

и “product rule”

$$\nabla \cdot (\tau \cdot \delta u) = (\nabla \cdot \tau) \cdot \delta u + \tau \cdot \nabla \delta u^\top,$$

$$\nabla \cdot (\mu \cdot \delta \varphi) = (\nabla \cdot \mu) \cdot \delta \varphi + \mu \cdot \nabla \delta \varphi^\top,$$

получаем

$$-\tau \cdot \delta \gamma^\top = (\nabla \cdot \tau) \cdot \delta u - \nabla \cdot (\tau \cdot \delta u) + \tau_\times \cdot \delta \varphi,$$

$$-\mu \cdot \delta \kappa^\top = (\nabla \cdot \mu) \cdot \delta \varphi - \nabla \cdot (\mu \cdot \delta \varphi).$$

После интегрирования с применением теоремы о дивергенции\*

$$\int_V \nabla \cdot (\tau \cdot \delta u) dV = \oint_{\partial(\partial V)} n \cdot \tau \cdot \delta u dO, \quad \int_V \nabla \cdot (\mu \cdot \delta \varphi) dV = \oint_{\partial(\partial V)} n \cdot \mu \cdot \delta \varphi dO$$

(1.2) приобретает вид

$$\begin{aligned} \int_V \left( (\nabla \cdot \tau + f) \cdot \delta u + (\nabla \cdot \mu + \tau_\times + m) \cdot \delta \varphi \right) dV + \\ + \int_O \left( (p - n \cdot \tau) \cdot \delta u + (M - n \cdot \mu) \cdot \delta \varphi \right) dO = 0. \end{aligned}$$

\*  $a \cdot ({}^2B \cdot c) = (a \cdot {}^2B) \cdot c = a \cdot {}^2B \cdot c$

Из произвольности вариаций  $\delta \mathbf{u}$  и  $\delta \varphi$  (и в объёме, и на поверхности) вытекают уравнения баланса сил и моментов, а также краевые условия:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}. \quad (1.4)$$

Тензор силового напряжения  $\boldsymbol{\tau}$  удовлетворяет тем же дифференциальным “уравнениям равновесия”<sup>\*</sup> и краевым условиям, что и в безмоментной среде. Но тензор  $\boldsymbol{\tau}$  несимметричен: вместо  $\boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0}$  тут  $\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{m} = \mathbf{0}$  — появляются моментные напряжения  $\boldsymbol{\mu}$ , и объёмная моментная нагрузка  $\mathbf{m}$  не нулевая.

Смысл компонент тензора моментного напряжения  $\boldsymbol{\mu}$  раскрывается так же, как и для  $\boldsymbol{\tau}$ . Для ортонормального базиса, момент  $\mathbf{M}_i = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\mu} = \mu_{ik} \mathbf{e}_k$  действует на площадке с нормалью  $\mathbf{e}_i$ . Диагональные компоненты  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{22}$ ,  $\mu_{33}$  это крутящие моменты, недиагональные — изгибающие (?? рисунок??).

...

eccentricity vector  $\boldsymbol{\alpha}$

...

## § 2. Отношения упругости

В этой книге упругой называется среда с потенциальными внутренними силами:  $\delta W^{(i)} = -\delta \Pi$ , где  $\Pi$  — энергия деформации на единицу объёма (по-прежнему рассматриваем геометрически линейную постановку).

Располагая соотношениями

...

$$\delta \Pi = -\delta W^{(i)} = \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}^\top + \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^\top$$

...

\* Кавычки здесь оттого, что *уравнения равновесия* это вообще всё, что вытекает из принципа виртуальной работы в статике.

..., разлагая тензоры деформаций и напряжений на симметричные и антисимметричные части

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^S - \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}_\times \times \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_\times \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\gamma}^S = \nabla \boldsymbol{u}^S, \quad \boldsymbol{\gamma}_\times = \nabla \times \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{\varphi}; \\ \delta\Pi &= \dots\end{aligned}\tag{2.1}$$

...

...

material's intrinsic (internal) length scale  $h$

Если устремить  $h$  к нулю, исчезает вклад  $\boldsymbol{\kappa}$  в  $\Pi$ , а с ним и моментные напряжения  $\boldsymbol{\mu}$ . Когда вдобавок нет объёмной моментной нагрузки  $\boldsymbol{m}$ , тогда тензор  $\boldsymbol{\tau}$  становится симметричным:  $\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \boldsymbol{m} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\mu} = {}^2\mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{m} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0}$ , и модель превращается в классическую.

Использование же микрополярной модели естественно в случае, когда реальный материал имеет некий наименьший объём, “в который невозможно войти”. И такая ситуация возникает нередко: композиты с “представительным” объёмом, поликристаллические материалы, полимеры с большими молекулами (макромолекулами).

### § 3. Уравнения совместности

Из выражений тензоров деформации (1.1) следует

...

### § 4. Теоремы статики

Теоремы статики линейных консервативных систем, легко выводимые при конечном числе степеней свободы

...

## § 5. Псевдоконтинуум Коссера

Так называется упрощённая моментная модель\*, в которой повороты выражаются через перемещения как в классической среде:

$$\varphi = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \Leftrightarrow \gamma_{\times} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \gamma = \varepsilon = \nabla \mathbf{u}^S. \quad (5.1)$$

Равенство  $\gamma_{\times} = \mathbf{0}$  (симметрию  $\gamma$ ) возможно понимать как внутреннюю связь (§ 3.14). Аргумент  $\gamma_{\times}$  исчезает из энергии  $\Pi$ , соотношение упругости для  $\tau_{\times}$  не может быть написано. Его место в полной системе занимает уравнение связи.

В классической теории упругости полная система сводится к одному уравнению для вектора  $\mathbf{u}$  (§ 4.5). В моментной теории

...

## § 6. Плоская деформация

Все переменные в этой постановке не зависят от декартовой координаты  $z \equiv x_3$  (орт оси —  $\mathbf{k}$ ). Перемещения и силы перпендикулярны оси  $z$ , а повороты и моменты — параллельны ей:

...

Это краткое изложение плоской задачи относится к модели с независимыми поворотами. Псевдоконтинуум Коссера (модель со стеснённым вращением) получается либо при наложении внутренней связи  $\gamma_{\times} = \mathbf{0}$ , либо при предельном переходе ...

Подробнее о плоской моментной задаче написано в книгах Н. Ф. Морозова [42, 43].

## § 7. Нелинейная теория

Кажущееся на первый взгляд чрезвычайно трудным, построение теории конечных деформаций континуума Коссера становится

\* Братья Cosserat называли это cas de trièdre caché (случай скрытого трёхгранника, case of latent trihedron).



прозрачным, если опираться на общую механику, тензорное исчисление и нелинейную теорию безмоментной среды.

При построении модели упругого континуума обычно проходят четыре этапа:

- ✓ определение степеней свободы частиц,
- ✓ выявление нагрузок (“силовых факторов”, напряжений) и условий их баланса,
- ✓ подбор соответствующих мер деформации и, наконец,
- ✓ вывод соотношений упругости между напряжением и деформацией.

Этот традиционный путь очень сокращается, если опираться на принцип виртуальной работы.

Как и в гл. 3, среда состоит из частиц с материальными координатами  $q^i$  и вектором-радиусом  $\mathbf{r}(q^i, t)$ . В начальной (исходной, отсчётной) конфигурации  $\mathbf{r}(q^i, 0) \equiv \mathring{\mathbf{r}}(q^i)$ . Но кроме трансляции, частицы имеют независимые степени свободы поворота, описываемого ортогональным тензором

$$\mathbf{O}(q^i, t) \equiv \mathbf{a}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathbf{a}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{O}^{-\top},$$

где тройка векторов  $\mathbf{a}_j(q^i, t)$  жёстко связана с каждой частицей, показывая угловую ориентацию относительно как-либо выбираемых\* векторов  $\mathring{\mathbf{a}}_j(q^i) \equiv \mathbf{a}_j(q^i, 0)$ ,  $\mathbf{a}_j = \mathbf{O} \cdot \mathring{\mathbf{a}}_j$ ;  $\mathbf{a}^j$  — тройка взаимных векторов:  $\mathbf{a}_j \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^j \mathbf{a}_j = \mathbf{E}$  ( $t=0$ ,  $\mathring{\mathbf{a}}^j$ :  $\mathring{\mathbf{a}}_j \mathring{\mathbf{a}}^j = \mathring{\mathbf{a}}^j \mathring{\mathbf{a}}_j = \mathbf{E}$ ). Движение среды полностью определяется функциями  $\mathbf{r}(q^i, t)$  и  $\mathbf{O}(q^i, t)$ .

Имея представления  $\mathring{\mathbf{r}}(q^i)$  и  $\mathbf{r}(q^i, t)$ , вводим базис  $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$ , взаимный базис  $\mathbf{r}^i$ :  $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}^i = \delta_j^i$ , дифференциальные операторы  $\mathring{\nabla}$  и  $\nabla$ , а также градиент движения  $\mathbf{F}$

$$\mathring{\nabla} \equiv \mathring{\mathbf{r}}^i \partial_i, \quad \nabla \equiv \mathbf{r}^i \partial_i, \quad \nabla = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathring{\nabla}, \quad \mathbf{F} \equiv \mathring{\nabla} \mathbf{r}^\top = \mathbf{r}_i \mathring{\mathbf{r}}^i. \quad (7.1)$$

\* Один из вариантов:  $\mathring{\mathbf{a}}_j = \mathring{\mathbf{r}}_j \equiv \partial_j \mathbf{r}$ . Другое предложение:  $\mathring{\mathbf{a}}_j$  это ортонормальная тройка собственных векторов тензора инерции частицы. Вообще,  $\mathring{\mathbf{a}}_j$  могут быть любой тройкой линейно независимых векторов.

Вариационное уравнение принципа виртуальной работы для континуума с нагрузками в объёме и на поверхности:

$$\int_V \left( \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) + \delta W^{(i)} \right) dV + \int_O \left( \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dO = 0. \quad (7.2)$$

Здесь  $\rho$  — плотность массы;  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{m}$  — внешние сила и момент на единицу массы;  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{M}$  — они же на единицу поверхности;  $\delta W^{(i)}$  — работа внутренних сил на единицу объёма в текущей конфигурации. Вектор малаго поворота  $\delta \boldsymbol{\varphi}$

$$\begin{aligned} \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \mathbf{E} &\Rightarrow \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = -\mathbf{O} \cdot \delta \mathbf{O}^\top \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top \Rightarrow \delta \mathbf{O} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{O}, \\ \delta \boldsymbol{\varphi} &= -\frac{1}{2} (\delta \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^\top)_\times \end{aligned}$$

При движении среды как жёсткого целого нет деформаций, и работа  $\delta W^{(i)}$  внутренних сил равна нулю:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} &= \text{const} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \text{const} \Rightarrow \delta W^{(i)} = 0, \\ \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} &= {}^2\mathbf{0}, \quad \nabla \delta \mathbf{r} = \nabla \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} - \nabla \mathbf{r} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{E} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = -\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}, \\ \nabla \delta \mathbf{r} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} &= {}^2\mathbf{0}. \end{aligned}$$

К нагрузкам. Несимметричные тензоры напряжения, силового  $\boldsymbol{\tau}$  и моментного  $\boldsymbol{\mu}$ , введём как множители Lagrange'a:

$$\int_V \left( \rho (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \delta \mathbf{r} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E})^\top - \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \delta \boldsymbol{\varphi}^\top \right) dV + \int_O \left( \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right) dO = 0. \quad (7.3)$$

После тех же преобразований, что и в § 1, получаем

...

Отсюда вытекают уравнения баланса сил и моментов в объёме и краевые условия в виде формул типа Cauchy. Они по существу те же, что и в линейной теории.

Найдём теперь тензоры деформации. Их можно вводить по-разному, если требовать лишь одного — нечувствительности к движению среды как жёсткого целого. Читатель найдёт не один

вариант таких тензоров. Однако, вид тензоров деформации “подсказывает” принцип виртуальной работы.

...

## § 8. Нелинейная модель со стеснённым вращением

Вспомним переход к модели со стеснённым вращением в линейной теории (§ 5). Разделились соотношения упругости для симметричной части тензора силового напряжения  $\boldsymbol{\tau}^S$  и кососимметричной его части  $\boldsymbol{\tau}_\chi$ . Возникла внутренняя связь  $\boldsymbol{\gamma}_\chi = \mathbf{0}$

...

## Библиография

Все работы по моментной теории упругости упоминают книгу братьев Eugène et François Cosserat [28], где трёхмерной среде посвящена одна глава из шести. Переведённая монография W. Nowacki [47] была одной из первых книг на русском языке с изложением линейной моментной теории. Ранее эта область представлялась статьями — например, R. D. Mindlin’a и H. F. Tiersten’a [41]. Краткое изложение моментной теории, но с подробным рассмотрением задач содержится в книгах Н. Ф. Морозова [42, 43].

## Глава 6

# ТЕРМОУПРУГОСТЬ

### § 1. Первый закон термодинамики

До сих пор моделирование было ограничено только механикой. Широко известно, однако, что изменение температуры вызывает деформацию. Температурная деформация и напряжение часто играют первичную роль и могут приводить к поломке.

Столь эффективный в механике, принцип виртуальной работы не применим к термомеханике\*. Рассматривая тепловые эффекты, возможно опираться на два закона термодинамики.

Первый, открытый Joule'ем, Mayer'ом, и Helmholtz'ем, — это адаптированная версия баланса энергии: скорость изменения внутренней энергии  $\dot{E}$  равна сумме мощности внешних сил  $P^{(e)}$  и скорости подвода тепла  $\dot{Q}$

$$\dot{E} = P^{(e)} + \dot{Q}. \quad (1.1)$$

Внутренняя энергия  $E$  есть сумма кинетической и потенциальной энергий частиц. Для любого конечного объема материального континуума

$$E = \int_V \rho \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} + e \right) dV. \quad (1.2)$$

С балансом массы  $dm = \rho dV = \rho' dV'$ ,  $m = \int_V \rho dV = \int_{V'} \rho' dV'$  и  $\dot{\Psi} = \int_V \rho \dot{\psi} dV = \int_{V'} \rho' \dot{\psi} dV'$ , легко получить производную энергии по времени

$$\dot{E} = \int_V \rho \left( \ddot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \dot{e} \right) dV. \quad (1.3)$$

\* Аналог принципа виртуальной работы будет представлен ниже.

Мощность внешних сил для некоторого конечного объёма континуума (безмоментного — в этой главе рассматривается лишь безмоментная модель)

$$P^{(e)} = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{R}} dV + \oint_{O(\partial V)} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{R}} dO = \int_V \left( \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{R}}) \right) dV = \\ = \int_V \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\mathbf{R}} \right) dV. \quad (1.4)$$

Как и раньше (гл. 3)  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор напряжения Cauchy,  $\mathbf{f}$  — массовая сила (без инерционной части  $-\ddot{\mathbf{R}}$ , которая содержится в  $\dot{\mathbf{E}}$ ),  $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}$  — поверхностная сила. При раскрытии дивергенции  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{R}})$  использована симметрия  $\boldsymbol{\tau}$ . Обозначая скорость как  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}}$  и тензор скорости деформации как  $\boldsymbol{\mathcal{S}} \equiv \nabla \mathbf{v}$ ,

$$P^{(e)} = \int_V \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}} \right) dV.$$

Тепло прибывает в объём среды двумя путями. Первый — поверхностная передача тепла (heat conduction, теплопроводность, конвекция, диффузия), происходящая через материю, при контакте двух сред. Это может быть описано вектором потока тепла  $\mathbf{h}$ . Через бесконечно малую площадку в текущей конфигурации  $NdO$  в направлении вектора нормали  $\mathbf{N}$  в единицу времени проходит тепловой поток  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{N}dO$ . Для поверхности конечных размеров это выражение нужно проинтегрировать. Обычно полагают

$$\mathbf{h} = -{}^2\mathbf{k} \cdot \nabla \Theta, \quad (1.5)$$

где  $\Theta$  — температура (поле температуры);  ${}^2\mathbf{k}$  — тензор коэффициентов теплопроводности как свойство материала, для изотропного материала  ${}^2\mathbf{k} = k\mathbf{E}$  и  $\mathbf{h} = -k\nabla\Theta$ .

Второй путь — объёмная передача тепла (тепловое излучение, thermal radiation). Солнечная энергия, пламя костра, микроволновая печь — знакомые примеры проникающего нагрева излучением. Тепловое излучение происходит через электромагнитные волны и не нуждается в промежуточной среде. Тепло излучается (эмитируется) любой материей (с температурой выше абсолютного ну-

ля 0 К). Скорость передачи тепла излучением на единицу массы  $b$  или на единицу объёма  $B = \rho b$  считается известной.

В результате, скорость подвода тепла для конечного объёма

$$\dot{Q} = - \oint_{O(\partial V)} \mathbf{N} \cdot \mathbf{h} dO + \int_V \rho b dV = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{h} + \rho b) dV. \quad (1.6)$$

...

## § 2. Второй закон

В курсах физики распространено такое представление о законах термодинамики: изменение внутренней энергии  $dE$  равно сумме работы внешних сил  $\partial W^{(e)}$  и подведённого тепла  $\partial Q$ ,  $dE = \partial W^{(e)} + \partial Q$ . Работа  $\partial W^{(e)}$  и теплота  $\partial Q$  суть неполные дифференциалы\*, но частное  $\partial Q/\Theta$  становится полным дифференциалом — дифференциалом энтропии  $dS$ . Далее тепловые процессы делятся на обратимые, в которых  $dS = \partial Q/\Theta$ , и необратимые с характерным неравенством Clausius'a  $dS \geq \partial Q/\Theta$ . Но как ...

...

## § 3. Определяющие уравнения

К балансу импульса, балансу момента импульса и законам термодинамики нужно добавить

...

\* Так как работа и теплота зависят от пути протекания процесса (являются функциями пути), они не могут быть полными (точными) дифференциалами, контрастируя с концепцией полного дифференциала, выражаемого через градиент другой функции и потому́ независимого от пути.

#### § 4. Уравнение теплопроводности

The heat equation is a parabolic partial differential equation that describes the distribution of heat (or variation in temperature) in a given region over time.

В курсах математической физики [121] рассматривается уравнение теплопроводности

...

#### § 5. Линейная термоупругость

Квадратичная аппроксимация свободной энергии наиболее естественна в линейной теории

...

#### § 6. Уравнения в перемещениях

Полагая поле температуры известным

...

#### § 7. Температурное напряжение

Это напряжение сто́ит рассмотреть детально, хотя оно и определяется очевидным образом полями перемещений и температуры. При равновесии свободного тела без внешних нагрузок

...

#### § 8. Вариационные формулировки

(Поскольку) при фиксированной температуре уравнения термоупругости выглядят как в механике

...

...

Более сложные вариационные постановки для нестационарных задач можно найти, например, в книге [94].

### Библиография

Шириной и глубиной описания термоупругости выделяются книги W. Nowacki [46, 47], книга E. Melan'a и H. Parkus'a [38] и монография H. Parkus'a [53]. С. Truesdell [72] внёс большой вклад в создание и распространение новых взглядов на термодинамику сплошной среды. Чёткое изложение основных законов есть у С. Teodosiu [66]. Методы расчёта температурных полей представлены у Н. М. Беляева и А. А. Рядно [94].



## МАГНИТОУПРУГОСТЬ

Проблемы, решаемые с использованием моделей упругих сред, обыкновенно содержат уже известные внешние нагрузки (как найти их — отдельная проблема). Когда электрические токи протекают в упругом теле, магнитное поле создаёт нагрузку. С деформацией тела меняется и магнитное поле. Если чувствительность поля к деформациям высока, то нужно совместное решение проблем упругости и магнетизма.

## § 1. Электромагнитное поле. Электромагнитные волны

Вот описание теории электромагнетизма.

Эта теория рассматривает два векторных поля: электрическое  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и магнитное  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Что такое вектор  $\mathbf{E}$  и псевдовектор  $\mathbf{B}$  видно из выражения электромагнитной силы (силы Lorentz'a)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, q)$ , действующей на точечный заряд — частицу бесконечно малого размера, содержащую электрический заряд  $q$  и движущуюся со скоростью  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.1)$$

По сути, часть электромагнитной силы, возникающая от взаимодействия с движущимся зарядом — магнитная сила  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  — являет магнитное поле  $\mathbf{B}$ , в то время как другая часть — электрическая сила  $q\mathbf{E}$  — являет электрическое поле  $\mathbf{E}$ .

Острый вопрос в какой же именно системе отсчёта измеряется скорость  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$  заряженной частицы, ведёт к специальной теории относительности.

classical conception about existence of absolute space and time as the preferred frame of reference

...

плотность заряда  $\rho(\mathbf{r}, t)$

вектор плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$

...

В сплошной среде с зарядами и токами действует объёмная “пондеромоторная” (“ponderomotive”) сила

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.2)$$

— континуальная версия (1.1).

Плюс существует другое описание — так называемый тензор напряжения Maxwell’a

$${}^2M \equiv \varepsilon_0 \left( \mathbf{E} \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E} \right) \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{E} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2 \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{a} \mathbf{b}) &= \mathbf{r}^k \partial_k \cdot (\mathbf{a} \mathbf{b}) = \mathbf{r}^k \cdot \partial_k (\mathbf{a} \mathbf{b}) = \mathbf{r}^k \cdot (\partial_k \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{a} (\partial_k \mathbf{b}) = \\ &= (\mathbf{r}^k \cdot \partial_k \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}^k (\partial_k \mathbf{b}) = (\mathbf{r}^k \partial_k \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}^k \partial_k \mathbf{b}) = \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot {}^2M &= \varepsilon_0 \left( \nabla \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} + c^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \mathbf{E}) \right) \end{aligned}$$

...

Maxwell’s equations

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbf{E}}$$

$$(1.4)$$

...

speed of light in vacuum  $c = 299\,792\,458 \text{ M/c}$

“electric constant”, vacuum permittivity  $\varepsilon_0$

$\varepsilon_0 \approx 8.8541878 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$  (фарад на метр)

“magnetic constant”, vacuum permeability  $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

...

Ampère’s circuital law (with Maxwell’s addition) (with Maxwell’s additional time-dependent term)

...

to derive wave equations

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla \times \dot{\mathbf{B}} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{\dot{\mathbf{E}}}{c^2} \right)\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \triangle \mathbf{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{B} - \triangle \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

...

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad \forall \mathbf{a}$$

$$\nabla \times \nabla \alpha = \mathbf{0} \quad \forall \alpha$$

vector potential  $\mathbf{A}$ 

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

potential  $\mathbf{A}$  is not unique and has gauge freedom  $\mathbf{A} + \nabla a$ 

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla a) \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

scalar potential  $\phi$ 

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} &\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla \times (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow -\nabla \phi = \mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla(\phi + \dot{a}) - \dot{\mathbf{A}}. \quad (1.5)\end{aligned}$$

And

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} &\Rightarrow \begin{aligned} -\triangle(\phi + \dot{a}) - \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\triangle \phi - \nabla \cdot (\dot{\mathbf{A}} + \nabla \dot{a}) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (1.6)\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \triangle \mathbf{A}$$

$\nabla \nabla \cdot \nabla a - \nabla \cdot \nabla \nabla a = 0$  (partial derivatives of a smooth function commute)

$$\begin{aligned}c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbf{E}} &\Rightarrow c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} - \nabla(\dot{\phi} + \ddot{a}) - \ddot{\mathbf{A}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c^2(\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \triangle \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} - \nabla \dot{\phi} - \nabla \ddot{a} - \ddot{\mathbf{A}}. \quad (1.7)\end{aligned}$$

Со свободой калибровки возможно упростить волновые уравнения (1.7) и (1.6), положив

$$\left. \begin{aligned} -\nabla\ddot{a} &= \nabla\dot{\phi} + c^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{A} \Rightarrow \ddot{a} = -\dot{\phi} - c^2\nabla\cdot\mathbf{A} \\ -\nabla\cdot(\dot{\mathbf{A}} + \nabla\dot{a}) &= \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = -c^2\nabla\cdot(\mathbf{A} + \nabla a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2\nabla\cdot\mathbf{A} + c^2\Delta a - c^2\nabla\cdot\mathbf{A} = \ddot{a},$$

наконец становясь однородным волновым уравнением для  $a$

$$\ddot{a} = c^2\Delta a. \quad (1.8)$$

Более популярный вариант — ещё более жёсткое условие

$$\Delta a = 0 \Rightarrow \ddot{a} = 0, \quad \dot{\phi} + c^2\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$$

— условие калибровки Lorenz'a, которое даёт такой же эффект, будучи лишь частным — гармоническим — случаем (1.8).

Следующие из (1.6) и (1.7) с условием (1.8), уравнения электромагнитных волн в потенциальной формулировке

$$\begin{aligned} -\Delta\phi + \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ -c^2\Delta\mathbf{A} &= \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} - \ddot{\mathbf{A}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

...

## § 2. Электростатика

Рассмотрение этого вопроса полезно для последующего описания магнетизма. В статике

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

...

Объёмная (пондеромоторная, ponderomotive) сила, с которой электростатическое поле действует на среду ...

Тензор напряжения Maxwell'a (1.3) в электростатике

$${}^2M = \varepsilon_0 \left( \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\mathbf{E} \right)$$

...

### § 3. Диэлектрики

Начнём с рассмотрения электростатического поля

...

В диэлектриках нет свободных зарядов: плотность заряда  $\rho = 0$ . Здесь вводится плотность дипольного момента

...

### § 4. Магнитостатика

Если поле (а с ним ...)

...

### § 5. Магнетики

Выяснив законы магнитостатики в общем случае, обратимся к веществу — некий опыт у нас уже есть в электростатике диэлектриков.

Начнём с рассмотрения

...

...

Насколько соответствует поведение реальных материалов представленным здесь формальным построениям — сей вопрос is out of scope этой книги.

### § 6. Магнитная жёсткость

В электротехнике распространены обмотки всевозможной формы, в которых провод намотан так, что образуется некое массивное тело. Такие обмотки есть в статоре генератора автомобиля (да и в роторе), в больших промышленных электромагнитах и в магнитных системах установок “токама́к” (тороидальная камера с магнитными катушками) для управляемого термоядерного синтеза — примеров много. Сочетание токопровода и изоляции об-

разует периодический композит, и одной из главных нагрузок для него является пондеромоторная магнитная сила. Рассчитывая деформации и механические напряжения в обмотке, начинают с определения магнитных сил. Поскольку распределение токов задано известной геометрией проводов, достаточно интегрирования по формуле Био-Савара (??). Термин “магнитоупругость” при этом неуместен, так как задачи магнитостатики и упругости решаются раздельно.

Однако при деформации обмотки меняются и поле  $\mathbf{j}$ , и вызываемое им поле  $\mathbf{B}$ . Объёмная сила становится равной

$$\mathbf{f} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_0 + \dots \quad (6.1)$$

Подчёркнутое слагаемое соответствует недеформированному состоянию. Обусловленное деформацией изменение объёмной силы линейно связано с малым перемещением  $\mathbf{u}$ , поэтому матричное (после дискретизации) уравнение в перемещениях можно представить в виде

$$(C + C_m) u = F_0. \quad (6.2)$$

К обычному оператору линейной упругости  $C$  добавилась магнитная жёсткость  $C_m$ ;  $F_0$  — силы в недеформированном состоянии.

Добавка  $C_m$  пропорциональна квадрату тока и может стать весьма существенной в магнитных системах с сильным полем. Учёт её необходим и при недостаточной величине  $C$ ; в номинальном режиме конструкция может держать нагрузку, но дополнительная нагрузка неблагоприятного направления может оказаться “невыносимой”.

Но особенно важна роль магнитной жёсткости в задачах устойчивости. Поскольку магнитные силы потенциальны, матрица  $C_m$  симметрична, и критические параметры могут быть найдены статическим методом Euler’a.

Как иллюстрацию рассмотрим простую задачу о балке в продольном магнитном поле. Балка располагается на декартовой оси  $z$ , концы  $z=0$  и  $z=l$  закреплены, магнитная индукция  $\mathbf{B} = B\mathbf{k} = \text{const}$ , по балке течёт постоянный (по величине) ток  $I$ . В классической модели балки при равных жёсткостях на изгиб

для прогиба  $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j}$  легко получить следующую постановку:

...

Вводя комплексную комбинацию  $u \equiv u_x + i u_y$ , будем иметь

...

с общим решением

...

Подстановка в граничные условия приводит к однородной системе для постоянных  $A_k$ ; приравняв нулю определитель, придём к характеристическому уравнению

...

Наименьший положительный корень  $x_1 = 3.666$ , так что критическая комбинация параметров такова:

$$(IBl^3/a)_* = 394.2.$$

В этом решении поле  $\mathbf{B}$  считалось внешним и не варьировалось. Но если собственное поле тока в стержне сравнимо с  $\mathbf{B}$ , решение изменится и усложнится.

## Библиография

Основы электродинамики хорошо изложены во многих книгах [95, 90], но для приложений в механике выделяется курс И. Е. Тамма [101]. Растёт список литературы по связанным задачам электромагнетизма и упругости [55, 58]. Как введение в эту область может быть полезна книга В. Новацкого [48].

## МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ (АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ)

Of approximate approaches for analysis of nonlinear systems, perturbation methods are the most often applied.

### § 1. Асимптотические разложения

До сих пор аргументами рассматриваемых функций были только координаты и время. Размеры тела, упругие модули, характерные масштабы изменения ...

...

В предыдущих главах уже возникали асимптотические проблемы. Линейная теория получается из нелинейной с помощью разложений по масштабу нагрузки (§ 4.1). Безмоментная теория вытекает (с точностью до краевых эффектов) из моментной (гл. 5) при устремлении “моментных” жёсткостей к бесконечности. В термоупругости (гл. 6) использование уравнения теплопроводности вместо полного баланса энергии должно быть обосновано асимптотическими методами.

Уязвимым в какой-то степени местом

...

### § 2. Расщепление в линейной алгебраической системе

Этот простой случай очень познавателен, он хорошо поясняет особенности асимптотических явлений. Рассматривается линейная система

$$C_{ij}u_j = f_i, \quad C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)} \quad (2.1)$$



с матрицей  $C_{ij}$  и столбцами неизвестных  $u_j$  и нагрузок  $f_i$ . Процесс построения асимптотического решения определяется тем, вырождена матрица  $C_{ij}^{(0)}$  или нет. Возможны три случая.

1°:  $\det C_{ij}^{(0)} \neq 0$ . Однородная задача

$$C_{ij}^{(0)} u_j = 0 \quad (2.2)$$

имеет лишь тривиальное (нулевое) решение. Матрица  $C_{ij}^{(0)}$  обратима, неоднородная задача всегда однозначно решима. Решение строится так:

$$u_j = \dots \quad (2.3)$$

...

2°:  $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

3°:  $\det C_{ij}^{(0)} = 0$

...

### § 3. Метод Пуанкаре

Этот метод широко известен в теории нелинейных колебаний. Он предназначен, в частности, для определения периодических решений уравнения

$$\ddot{u} + u = \chi f(u, \dot{u}) \quad (3.1)$$

...

### § 4. Метод осреднения Ван дер Поля

Опять рассматривается уравнение (3.1), но теперь ищутся не только периодические решения. Вводится фазовая плоскость

...

## § 5. Сращивание асимптотических разложений

Основоположник метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений — Ludwig Prandtl. Рассматривая течение вязкой жидкости, он заметил, что влияние малой вязкости локализовано у границы — в тонком приграничном слое. Вдали от границы жидкость ведёт себя как идеальная. Одни и те же уравнения

...

## § 6. Многоуровневый анализ (метод многих масштабов)

Этот метод привлекателен, естественен и — как написано

...

## § 7. Уравнения с медленно меняющимися параметрами

Рассмотрим гармонический осциллятор, собственная частота которого медленно меняется во времени

...

## § 8. Тонкие тела

Задачи теории упругости часто ставятся для тонких тел — стержней, пластин и оболочек. Таковы многие элементы конструкций, но и в природе вне человека тонкие тела встречаются довольно часто.

Решение задач упругости для тонких тел многие десятилетия основывалось на неких гипотезах о распределении решения по толщине и о порядках одних неизвестных относительно других. Построенные так теории сыграли большую роль в практике инженерных расчётов. Однако, им не хватало логической стройности и убедительности, их хотелось обосновать, уточнить — а в последнее время и уничтожить (в связи с появлением великолепных компьютеров). Но открытое **не так давно** явление асимптотического

ращепления прояснило картину: в тонком теле трёхмерная задача ращепляется на задачи меньшей размерности. Классические теории тонких тел получили и подтверждение, и развитие.

Рассмотрим задачу о кручении из ...

...

### Библиография

Ali Hasan Nayfeh's book [108] is an excellent introduction to perturbation methods (asymptotic methods).

Всё разнообразие асимптотических методов представлено в монографиях ...

## Глава 9

# СТЕРЖНИ

### § 1. Исходные представления

Стержень — это тонкое длинное тело. Он характеризуется прежде всего своей осью — пространственной кривой, которую “облепляет” материал (рисунок ?? 22 ??). В каждой точке оси имеем плоскую фигуру

...

В приближённых прикладных теориях стержней (“сопротивление материалов”) фигурируют сосредоточенные силы  $Q$  и моменты  $M$ . С тензором напряжения они связаны соотношениями

$$Q(s) = \dots, \quad M(s) = \dots \quad (1.1)$$

...

Наиболее логичный подход к описанию деформации упругих стержней связан с асимптотическим ращеплением трёхмерной задачи при малой толщине. Однако для сложной асимптотической процедуры заранее нужен некий вариант ответа. Такой вариант даёт прямой подход, основанный на одномерной модели стержня как материальной линии. Но какими степенями свободы — кроме трансляции — должны обладать частицы этой линии?

Давно известно, что стержни чувствительны к моментным нагрузкам. А присутствие моментов среди обобщённых сил говорит о наличии вращательных степеней свободы. Следовательно, одномерной моделью стержня должна быть линия Коссера — она состоит из элементарных твёрдых тел. Впрочем, могут проявиться и дополнительные степени свободы — как в тонкостенных стержнях, которым посвящена отдельная глава.

В механике упругих тел стержни занимают особенное место. Во-первых, это моментные модели, и моменты здесь играют главную роль (не роль поправок, как в трёхмерном континууме Коссера). Во-вторых, стержни являются как бы “тестовой площадкой” для моделей с дополнительными степенями свободы, поскольку наличие этих степеней можно достоверно исследовать на трёхмерной модели.

Ну а пока сосредоточимся на простой одномерной модели Коссера.

## § 2. Кинематика линий Коссера

Рассматриваемое далее является упрощённым вариантом гл. 5. Вместо тройки материальных координат  $q^i$  имеем одну —  $s$ , это может быть дуговая координата в отсчётной конфигурации. Движение определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}(s, t)$  и тензором поворота  $\mathbf{P}(s, t)$ . Линейная и угловая скорости частицы вводятся равенствами

...

## § 3. Баланс сил и моментов

Поскольку частицы стержня (линии Коссера) — твёрдые тела, то нагрузками (“силовыми факторами”) являются силы и моменты: на элемент  $ds$  действуют внешние сила  $\mathbf{q}ds$  и момент  $\mathbf{m}ds$ . Внутренние взаимодействия тоже определяются силой  $\mathbf{Q}(s)$  и моментом  $\mathbf{M}(s)$  — это воздействие от частицы с координатой  $s+0$  к частице с  $s-0$ . Из закона

...

## § 4. Принцип виртуальной работы и его следствия

Для куска стержня  $s_0 \leq s \leq s_1$  формулировка принципа такова

...

Условно  $\mathbf{a}$  это тензор жёсткости на изгиб и кручение,  $\mathbf{b}$  — тензор жёсткости на растяжение и сдвиг, а  $\mathbf{c}$  — тензор перекрёстных связей.

Тензоры жёсткости поворачиваются вместе с частицей:

...

## § 5. Классическая модель Кирхгофа

До сих пор функции  $\mathbf{r}(s, t)$  и  $\mathbf{P}(s, t)$  были независимы. В классической теории Кирхгофа существует внутренняя связь

...

## § 6. Проблема Эйлера

Рассматривается прямой стержень, закреплённый на одном конце и нагруженный силой  $\mathbf{Q}$  на другом (рисунок ?? 23 ??). Сила “мёртвая” (не меняется при деформировании)

...

## § 7. Вариационные уравнения

В нелинейной механике упругих тел полезны уравнения в вариациях, описывающие малое изменение актуальной конфигурации. Как и в § 3.13, вариации величин

...

## § 8. Модель без сдвига с растяжением

Модель Kirchhoff’a с внутренней связью  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$  не описывает простейшего случая растяжения/сжатия для прямого стержня. Эта неприятность исчезает со “смягчением” связи: добавлением возможности растяжения и подавлением лишь поперечного сдвига, то есть

...

## § 9. Механика гибкой нити

Гибкая нить (цепь) проще стержня: её частицы суть “простые” материальные точки лишь с трансляционными степенями свободы. Поэтому среди нагрузок нет моментов, только “линейные” силы — внешние распределённые  $\mathbf{q}$  и внутренние сосредоточенные  $\mathbf{Q}$ . Движение нити полностью определяется одним вектором-радиусом  $\mathbf{r}(s, t)$ , а инерционные свойства — линейной плотностью  $\rho(s)$ .

Вот принцип виртуальной работы для куска нити  $s_0 \leq s \leq s_1$

$$\int_{s_0}^{s_1} \left( (\mathbf{q} - \rho \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} - \delta \Pi \right) ds + \left[ \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r} \right]_{s_0}^{s_1} = 0. \quad (9.1)$$

...

Механика нити детально описана в книге [39].

## § 10. Линейная теория

В линейной теории внешние воздействия считаются малыми, а отсчётная конфигурация — ненапряжённым состоянием покоя. Уравнения в вариациях в этом случае дают

...

## § 11. Случай малой толщины

При малой относительной толщине стержня модель типа Коссера уступает место классической. Понятие “толщина” определяется соотношением жёсткостей:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — разной размерности; полагая  $\mathbf{a} = h^2 \hat{\mathbf{a}}$  и  $\mathbf{c} = h \hat{\mathbf{c}}$ , где  $h$  — некий масштаб длины, получим тензоры

...

Переход модели Коссера в классическую кажется более очевидным при непосредственном интегрировании

...

## § 12. Задача Сэйнт-Венана

Трудно переоценить ту роль, которую играет в механике стержней классическое решение Saint-Venant'a. О нём уже шла речь в § 4.13.

Вместо условий ...

...

## § 13. Нахождение жёсткости по энергии

Для определения тензоров жёсткости  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  одномерной модели достаточно решений трёхмерных задач для стержня. Но тут возникают два вопроса: какие именно задачи рассматривать и что нужно взять из решений?

Проблема Saint-Venant'a выделяется среди прочих, ведь отсюда берётся жёсткость на кручение.

Вдобавок есть много точных решений, получаемых таким путём: задаётся поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , определяется  $\hat{\boldsymbol{\tau}} = {}^4\mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{u}$ , затем находятся объёмные  $\mathbf{f} = -\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$  и поверхностные  $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$  нагрузки.

Но что делать с решением? Ясно, что  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$  в стержне — это интегралы по сечению (...). И совсем не ясно, что считать перемещением и поворотом в одномерной модели. Если предложить, например, такой вариант (индекс у  $\mathbf{u}$  это размерность модели)

$$\mathbf{u}_1(z) = \Omega^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}_3(\mathbf{x}, z) d\Omega, \quad \boldsymbol{\theta}(z) = \frac{1}{2} \Omega^{-1} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u}_3 d\Omega,$$

то чем другие возможные представления хуже?

Помимо  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$ , есть ещё величина, не вызывающая сомнений — упругая энергия. Естественно потребовать, чтобы в одномерной и в трёхмерной моделях энергии на единицу длины совпали. При этом, чтобы уйти от различий в трактовках  $\mathbf{u}_1$  и  $\boldsymbol{\theta}$ , будем исходить из дополнительной энергии  $\hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$ :

$$\hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) = \int_{\Omega} \Pi_3 d\Omega$$

...



## § 14. Вариационный метод построения одномерной модели

Мы только что определили жёсткости стержня, полагая, что одномерная модель Коссера правильно отражает поведение трёхмерной модели. “Одномерные” представления ассоциируются со следующей картиной перемещений в сечении:

$$\mathbf{u}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{U}(s) + \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{x}. \quad (14.1)$$

Однако, такое поле  $\mathbf{u}$  не удовлетворяет уравнениям трёхмерной теории(??добавить, каким именно). Невозможно пренебречь возникающими невязками в дифференциальных уравнениях и краевых условиях.

Формально “чистым” является вариационный метод сведения трёхмерной проблемы к одномерной, называемый иногда методом внутренних связей. Аппроксимация (14.1) подставляется в трёхмерную формулировку вариационного принципа минимума потенциальной энергии (§ 4.9)

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_V \left( \Pi(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) dV - \int_{o_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} d\sigma \rightarrow \min,$$

которая после интегрирования по сечению становится одномерной. Если  $\mathbf{U}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  варьируются независимо, получаем модель типа Коссера. В случае  $\mathbf{U}' = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}$  приходим к классической модели.

Метод внутренних связей привлекателен, его продолжают “переоткрывать”. С его помощью возможно моделировать тела с неоднородностью и анизотропией, он легко обобщается на динамику, если  $\mathbf{f}$  дополнить неварьируемой динамической добавкой до  $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ . Можно рассматривать и стержни переменного сечения, и даже нелинейно упругие, ведь вариационная постановка есть (гл. 3).

Аппроксимацию (14.1) можно дополнить слагаемыми с внутренними степенями свободы. Понимая необходимость учёта деформаций, некоторые авторы

...

...

Для вариационного построения одномерных моделей удобен принцип Рейсснера–Хеллингера (§ 4.11) с независимой аппроксимацией напряжений [20]. Но тогда необходима некая согласованность между  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\tau}$ .

Множеству достоинств вариационного метода противостоит один, но очень большой недостаток. Вводя аппроксимации по сечению, мы навязываем реальности свои упрощённые представления. Вариационный метод более подходит для прикладных расчётов.

### § 15. Асимптотическое ращепление трёхмерной проблемы

В изложении механики стержней асимптотическое ращепление можно считать фундаментальным. Одномерные модели составляют лишь часть картины; другая часть — это двумерные задачи в сечении, а вместе они являются тем решением трёхмерной задачи, которое образуется при малой толщине.

Малый параметр  $\lambda$  в трёхмерную задачу проще всего ввести через представление вектора-радиуса (рисунок ?? 22 ??, § 1):

...

### § 16. Температурные деформация и напряжение

Прямой подход, столь эффективный при построении одномерных моделей Коссера и Кирхгофа, для проблем термоупругости неприменим. Тут нужно рассматривать трёхмерную модель, что может быть реализовано или вариационным путём, или асимптотическим.

Описанный в § 14 вариационный метод целиком переносится на термоупругость — включая задачи с неоднородностью и анизотропией, переменным сечением, динамические — и даже нелинейные. Достаточно в принципе Лагранжа заменить потенциал

...

### Библиография

В отличие от других тем теории упругости, стержни в книгах представлены весьма скромно. Преобладает изложение в стиле сопротивления материалов, более точные и совершенные подходы большинству авторов кажутся невозможными или ненужными. Но опубликовано много интересных статей, обзоры которых можно найти у S. Antman'a [1], В. В. Елисеева [20] и А. А. Илюхина [24].

## ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ

### § 1. Вариационный подход

В главе 9 рассматривались стержни с массивным сечением. Но в технике широко используются иные стержни — тонкостенные, сечения которых представляют собой узкие полоски различного очертания (уголок, швеллер, двутавр и др.). Если стержни похожи на линии (материальные линии Коссера), то в тонкостенных стержнях и само сечение выглядит как линия. Три размера — толщина и длина сечения, а также длина стержня — имеют различные порядки.

Известны прикладные теории тонкостенных стержней ...

...

### § 2. Уравнения с малым параметром

Рассмотрим призматический стержень с односвязным сечением в виде тонкой криволинейной полоски постоянной толщины  $h$ . Радиус-вектор в объёме представим следующим образом:

...

### § 3. Первый шаг асимптотической процедуры

*Внешнее разложение*

Из системы

...

*Внутреннее разложение вблизи  $s_0$*

Выпишем уравнения для

...

*Сращивание*

Стыковка внутреннего и внешнего разложений

...

#### **§ 4. Второй шаг**

*Внешнее разложение*

Из системы

...

*Внутреннее разложение вблизи  $s = s_0$*

Из общей системы

...

*Сращивание*

Поскольку рассматриваются поправочные члены асимптотических разложений

...

#### **§ 5. Третий шаг**

*Внешнее разложение*

Из системы

....

*Внутреннее разложение около  $s = s_0$*

Как уже отмечалось, внутренние разложения нужны для постановки краевых условий на концах

...

*Сращивание*

В плоской задаче имеем следующее двучленное внешнее разложение:

....

**§ 6. Четвёртый шаг**

Здесь понадобится лишь внешнее разложение. Более того: в этом приближении мы не будем искать решения уравнений — будет достаточно лишь условий разрешимости. Напомним, что философия наша такова: разыскиваются лишь главные члены асимптотических разложений, но для полного их определения могут понадобиться

...

**§ 7. Перемещения**

Расписывая тензорное соотношение

...

**§ 8. Итоги асимптотического анализа**

Определение главных членов асимптотики напряжений и перемещений для тонкостенных стержней оказалось намного сложнее, чем в случае массивного сечения. Дадим сводку полученных выше итоговых результатов.

Перемещение:

...

## Библиография

Помимо известных книг ... Материал главы содержится в [20], где можно найти и обширный список статей.

## ОБОЛОЧКИ И ПЛАСТИНЫ

## § 1. Геометрия поверхности

**П**оверхность в трёхмерном пространстве определяется функцией вектора-радиуса точек поверхности от двух координат  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Непрерывное изменение одной из координат  $q^1$  при постоянной другой  $q^2$  даёт координатную линию  $q^1$ . Пересечение двух координатных линий однозначно определяет точку поверхности. Векторы

$$\mathbf{r}_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{r}, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$$

лежат на касательных к координатным линиям. Они являются базисом для представления любого вектора  $\overset{2}{\mathbf{v}}$  в касательной плоскости как линейной комбинации

$$\overset{2}{\mathbf{v}} = v^\alpha \mathbf{r}_\alpha = v_\alpha \mathbf{r}^\alpha, \quad v^\alpha = \overset{2}{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}^\alpha, \quad v_\alpha = \overset{2}{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}_\alpha$$

(введён взаимный базис в касательной плоскости:  $\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta_\beta^\alpha$ ).

Добавление в каждой точке поверхности единичного вектора нормали  $\mathbf{n}(q^\alpha)$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}$$

даёт разложение для любого вектора (и вообще любого тензора) в пространстве, например  $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{r}_\alpha + u_n \mathbf{n}$ .

Единичные (“метрические”) тензоры  $\mathbf{E}$  в пространстве и  $\overset{2}{\mathbf{e}}$  в касательной плоскости

$$\mathbf{E} = \overset{2}{\mathbf{e}} + \mathbf{n}\mathbf{n}, \quad \overset{2}{\mathbf{e}} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n} = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}^\alpha = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}_\alpha.$$

Представление вектора-радиуса точки пространства на расстоянии  $h$  ( $\frac{\partial h}{\partial q^\alpha} = 0$ ) от поверхности

$$\mathbf{R}(q^\alpha, h) = \mathbf{r}(q^\alpha) + h \mathbf{n}(q^\alpha)$$

определяет базис

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{n} = \mathbf{R}^n,$$

$$\mathbf{R}_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{R} = \partial_\alpha \mathbf{r} + h \partial_\alpha \mathbf{n} = \mathbf{r}_\alpha + h \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n}.$$



...

$$\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \cdot \left( \mathbf{r}^\beta \mathbf{r}_\beta + h \mathbf{r}^\beta \partial_\beta \mathbf{n} \right) = \mathbf{r}_\alpha \cdot \left( \overset{2}{\mathbf{e}} + h \overset{2}{\nabla} \mathbf{n} \right) = \mathbf{r}_\alpha \cdot \left( \overset{2}{\mathbf{e}} - h \overset{2}{\mathbf{c}} \right)$$

$$\overset{2}{\mathbf{c}} \equiv -\overset{2}{\nabla} \mathbf{n}$$

...

кобазис и дифференциальный оператор “набла”

$$\overset{2}{\nabla} \equiv \mathbf{R}^i \partial_i$$

$$\overset{2}{\nabla} \equiv \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha$$

...

## § 2. Модель оболочки

Располагая моделями трёхмерного моментного континуума, **стержней и пластин**, не так уж тяжело разобраться в механике оболочек. Как геометрический объект, оболочка определяется ...

...

## § 3. Баланс сил и моментов для оболочки

При  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{const}$  и  $\delta \varphi = 0$  (трансляция) ...

...

## § 4. Оболочки: Отношения упругости

Локальное соотношение (??) после вывода уравнений баланса ...

...

## § 5. Классическая теория оболочек

Вышеизложенная теория (напоминающая балку Тимошенко и континуумы Коссера) рассматривает  $\varphi$  независимо от  $\mathbf{u}$ . Но обыденный опыт подсказывает: материальный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остаётся таковым

и после (кинематическая гипотеза Кирхгофа). В классической теории Кирхгофа, Арона и Лява  $\varphi$  выражается через  $\mathbf{u}$ , что в конце концов позволяет всё свести к одному векторному уравнению для  $\mathbf{u}$ .

Предположим, что в основе классической теории лежит внутренняя связь

...

## § 6. Оболочки: Пластина

Это простейший случай оболочки. Орт  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  направлен по декартовой оси  $z$ , в качестве координат ...

...

## § 7. Оболочки: Подход с множителями Лагранжа

Уязвимым местом этого изложения теории оболочек являются формулы

...

## § 8. Цилиндрическая оболочка

Существуют разные уравнения цилиндрической оболочки. Приводятся громоздкие выкладки с отбрасыванием некоторых малых членов, и не всегда ясно, какие именно члены действительно можно отбросить.

Предлагаемая читателю теория оболочек иного свойства: лишних членов нет, все уравнения записаны в компактной тензорной форме — остаётся лишь грамотно действовать с компонентами тензоров. В качестве иллюстрации рассмотрим цилиндрическую оболочку.

В декартовой системе

...

## § 9. Оболочки: Общие теоремы

Пусть край закреплён

...

## § 10. Оболочки: Краевые условия

В рамках рассматриваемого прямого подхода к оболочкам как материальным поверхностям наиболее надёжным способом вывода граничных условий представляется вариационный. Исходим из вариационного уравнения:

...

## § 11. Оболочки вращения

*Surface of revolution (reference surface of shell of revolution) is created by rotating a plane curve (the meridian, the generatrix) about a straight line in the plane of curve (an axis of rotation).*

Разберёмся в геометрии поверхности вращения ( рис. ?? 29 ?? ). Меридиан можно задать зависимостью декартовых координат

...

## § 12. Безмоментная теория оболочек

В отличие от пластины, оболочка способна выдерживать нормальную распределённую нагрузку без появления внутренних моментов. В безмоментном состоянии напряжения равномерно распределены по толщине оболочки, безмоментные оболочечные конструкции можно считать оптимально спроектированными.

Уравнения безмоментной теории

...

### § 13. Оболочки: Нелинейная безмоментная теория

Вышеизложенную безмоментную теорию оболочек возможно просто и корректно обобщить на нелинейную постановку. Материальная поверхность состоит из частиц

...

### § 14. Оболочки: Иной вариант классической теории

Выше при изложении моментной теории оболочек частицы материальной поверхности считались твёрдыми телами с шестью степенями свободы

...

### § 15. Пластины: Общие представления

**П**ластиной называется тонкое трёхмерное тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями и боковой цилиндрической поверхностью (рисунок ?? 26 ???). В декартовых координатах  $x_1, x_2, z$  поперечная координата ...

...

В теории пластин рассматриваются двумерные задачи. Переход от трёхмерной задачи наиболее достоверен на пути асимптотики. Но логическая стройность и эффективность присуща и вариационному подходу, основанному на аппроксимации по толщине решения трёхмерной вариационной задачи. Самое же простое корректное изложение теории пластин характерно для прямого подхода к ним как материальным плоскостям.

...

### § 16. Модель пластины типа Тимошенко (прямой подход)

Пластина рассматривается как материальная плоскость, частицы которой

...

### § 17. Классическая теория пластин Кирхгофа

Принимается внутренняя связь

...

### § 18. Пластины: Асимптотическое сопоставление двумерных моделей

При малой толщине из теории типа Тимошенко вытекает классическая. Толщина  $h$  определяется отношением жёсткостей. Перепишем

...

### § 19. Пластины: Вариационный переход от трёхмерной модели

Используя вариационные принципы Лагранжа или Рейсснера–Хеллингера с аппроксимацией решения по толщине, можно получить двумерные вариационные постановки. Из них вытекают и соотношения внутри области, и естественные краевые условия.

Для примера построим модель типа Тимошенко с аппроксимацией перемещений

...

...

Рассмотренные вариационные переходы легко обобщаются на случаи неоднородности и анизотропии материала, температурных деформаций, динамики. Достоинство принципа Рейсснера–Хеллингера — в явном представлении напряжений. Зато принцип Лагранжа применим к нелинейным задачам ([глава 3](#) содержит трёхмерную постановку).

## § 20. Пластины: Ращепление трёхмерной задачи изгиба

Двумерная классическая теория изгиба пластин легко выводится из трёхмерной постановки с малым параметром. Представив радиус-вектор в объёме

...

## § 21. Круглые пластины

В качестве иллюстрации рассмотрим широко представленный в литературе вопрос об уравнениях теории Кирхгофа в полярных координатах. Имеем

...

## § 22. Пластины: Плоское напряжение

Это вторая из двух задач, о которых говорилось в § 15. Силы

...

## Библиография

Теория оболочек изложена в монографиях А. Л. Гольденвейзера [12], В. В. Новожилова [49], А. И. Лурье [35], В. С. Черниной [79] и ряде других. Достоинства этих книг перекрывают неразвитость формального аппарата. Переход от трёхмерной модели оболочки к двумерной рассмотрен у ...

...

Техническая теория изгиба пластин изложена ...

...

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

## § 1. Вибрации трёхмерного тела

Рассмотрим динамическую задачу классической линейной упругости

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\tau} = {}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}|_{o_1} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{o_2} = \mathbf{p}, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}^\circ, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}^\circ.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Согласно общей теории (§ 2.8), начинаем с анализа гармоник (нормальных колебаний):

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}) \sin \omega t, \\ \nabla \cdot ({}^4\mathcal{A} \cdot \nabla \mathbf{U}) &+ \rho \omega^2 \mathbf{U} = \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Значения  $\omega$ , при которых однородная задача имеет нетривиальное решение — это собственные частоты, а  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  — собственные формы, или моды.

(1.2) выглядит как уравнение эластостатики с объёмной нагрузкой  $\omega^2 \rho \mathbf{U}$ . Поверхностная нагрузка на  $o_2$  — нуль. Применяя тождество Клапейрона (§ 4.4), получаем

$$\omega^2 \int_V \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} dV = 2 \int_V \Pi(\nabla \mathbf{U}^S) dV.\tag{1.3}$$

Отсюда следует  $\omega^2 \geq 0$  с нулём для перемещений  $\mathbf{U}$  среды как жёсткого целого. С закреплением хотя бы малой части поверхности все  $\omega_i > 0$ .

Однако тут предполагалось, что  $\omega^2$  и  $\mathbf{U}$  вещественны. Обосновать это возможно “от противного”. Если  $\Im m \omega^2 \neq 0$ , то сопряжённая частота  $\bar{\omega}^2$  также входит в спектр, и мода  $\bar{\mathbf{U}}$  для этой

частоты имеет сопряжённые компоненты. Далее согласно теореме о взаимности работ

...

## § 2. Вибрации стержня

В линейной динамике стержней имеем следующую систему для сил  $Q$ , моментов  $M$ , перемещений  $u$  и поворотов  $\theta$  (§ 9.??):

...

## § 3. Малые возмущения параметров

Рассмотрим задачу об определении собственных частот и форм с малыми возмущениями масс и жёсткостей:

$$\begin{aligned} (C_{ij} - \omega^2 A_{ij}) U_j &= 0, \\ C_{ij} &= C_{ij}^{(0)} + \chi C_{ij}^{(1)}, \quad A_{ij} = A_{ij}^{(0)} + \chi A_{ij}^{(1)}, \quad \chi \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Находя решение в виде

$$\omega = \omega^{(0)} + \chi \omega^{(1)} + \dots, \quad U_j = U_j^{(0)} + \chi U_j^{(1)} + \dots,$$

получаем последовательность задач

...

## § 4. Вибрации оболочки

Динамика оболочек рассматривалась многими

...

## § 5. Волны в упругой среде

Рассмотрим линейные уравнения динамики однородной изотропной среды без объёмных сил

...



## § 6. Волны в стержне

Рассмотрим прямой стержень. Продольная деформация описывается уравнениями

...

## § 7. Нелинейные колебания

Рассмотрим простой пример: продольные колебания прямого стержня с малой нелинейной добавкой в соотношениях упругости

...

## Библиография

Методы решения динамических задач упругости представлены в книгах Л. И. Слепаяна [64] и В. Б. Поручикова [60]. О малых линейных колебаниях (вибрациях) написано у С. П. Тимошенко, D. H. Young'a и W. Weaver'a [70], И. М. Бабакова [4], В. Л. Бидермана [8], В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [17]. Асимптотические проблемы колебаний оболочек освещены у ...

## УСТОЙЧИВОСТЬ

## § 1. Различные подходы к проблеме устойчивости

Существует классическая, хорошо развитая теория устойчивости движения [40]. По Ляпунову, процесс устойчив, если малые начальные отклонения остаются малыми и в будущем. Это относится и к состоянию равновесия. Нужно рассмотреть динамику малых отклонений от равновесной конфигурации и убедиться, что они не растут. В этом состоит **динамический подход** к проблеме устойчивости, и он справедливо считается наиболее достоверным.

Однако в задачах устойчивости равновесия упругих систем нашёл распространение иной подход, называемый **статическим** и связываемый с именем Leonhard'a Euler'a. Здесь значения параметров, при которых уравнения статики для малых отклонений приобретают нетривиальное решение, считаются критическими. Иными словами, критическим считается то равновесное состояние, которое перестаёт быть изолированным, — в его окрестности появляется множество смежных равновесных форм. При этом подходе достаточно решить задачу на собственные числа.

Но есть и другие подходы. Например, **метод несовершенств**: если малые случайные изменения начальной формы, жёсткостей, нагрузок и другие приводят лишь к малому изменению равновесной деформированной конфигурации, то имеем устойчивость. Отметим также **энергетический подход**: потеря устойчивости происходит, когда она становится энергетически выгодной, то есть ведёт к уменьшению энергии.

Перечисленные подходы составляют пёструю картину. Но в ней нетрудно разобраться на модели с конечным числом степеней свободы. Большой общностью обладают

...

## § 2. Классические проблемы со стержнями

Состояние перед варьированием описывается уравнениями нелинейной теории стержней Kirchhoff'a

...

## § 3. “Следящие” нагрузки

В проблемах устойчивости весьма весомо поведение нагрузки при деформации. Ведь в уравнения входит вариация  $\delta q$ , она равна нулю лишь для “мёртвых” нагрузок. Распространены “следящие” нагрузки, то есть определённым образом меняющиеся при смещениях частиц упругого тела. Статический подход Euler'a

...

## § 4. Роль добавочных податливостей

Для прямого консольного стержня, сжатого постоянной силой  $F$  на свободном конце, критическая нагрузка определяется формулой Euler'a

...

## § 5. Вариационные формулировки

Во всех разделах линейной теории упругости большую роль играют вариационные постановки. Среди прочего, они составляют основу метода конечных элементов как варианта метода Ritz'a.

Менее развиты вариационные постановки для проблем устойчивости. Здесь получил популярность метод

...

## § 6. Неконсервативные задачи

В уравнении динамики (...) матрица позиционных сил

...

## § 7. Случай кратных корней

Вернёмся к проблеме устойчивости (...) в случае циркуляционных сил. Как уже отмечалось (где??), критическая ситуация характеризуется

...

## Библиография

Увлекательные вопросы устойчивости упругих систем освещены в книгах ...

## Глава 14

### ДЕФЕКТЫ

#### § 1. Дислокации Вольтерры

Рассмотрим классическую линейную трёхмерную среду (гл. 4). Как показано в § 4.7, уравнение совместности деформаций

...

#### § 2. Прямолинейные дислокации

Линия дислокации может быть любой пространственной кривой, замкнутой в теле или выходящей концами на поверхность. Для дислокации произвольной формы в неограниченной среде не так уж сложно получить соответствующее решение [21]. Мы же ограничимся простейшим случаем прямолинейной дислокации. Ищется решение

...

#### § 3. Действие поля напряжений на дислокацию

Рассмотрим тело, содержащее внутри дислокацию с замкнутой линией  $C$ . Тело нагружено объёмными  $\mathbf{f}$  и поверхностными  $\mathbf{p}$  силами. Обозначим

...

#### § 4. О движении дислокаций

Рассмотрим это явление, следуя [29]. Ограничимся случаем прямолинейной винтовой дислокации, движущейся с постоянной скоростью

...

#### § 5. Точечные дефекты

Речь пойдёт о континуальной модели таких явлений как вакансии, примесные частицы или междоузельные атомы в кристаллической решётке. В случае дислокации рассматривались

...

#### § 6. Действующая на точечный дефект сила

Дефект находится в теле, нагруженном объёмными  $f$  и поверхностными  $p$  силами. Суперпозиция

...

#### § 7. Непрерывно распределённые дислокации

Начнём со сложения векторов Бюргерса. При обходе сразу двух дислокаций (рис. ?? 40 ??) по контуру

...

#### § 8. Напряжение при намотке катушки

Не только дислокации и точечные дефекты, но и макроскопические факторы могут быть источниками собственных напряжений. При намотке катушки (рис. ?? 42 ??) в ней возникают напряжения от натяжения ленты. Расчёт этих напряжений очень сложен, если рассматривать детально процесс укладки ленты.

Но существует чёткий алгоритм Southwell'a [62] расчёта напряжений в катушке: укладка каждого нового витка вызывает внутри катушки приращения напряжений, определяемые соотношениями линейной упругости. Здесь два этапа, и первый состоит в решении задачи Lamé о деформации полого цилиндра под внешним давлением (рис. ?? 43 ??)

Lamé problem about deformation of a hollow cylinder under external pressure

...

### Библиография

Дислокации и точечные дефекты в линейно-упругих телах рассматривали многие авторы: John Eshelby [21], Roland deWit [18], Cristian Teodosiu [66], Alan Cottrell [29]. Теорию собственных напряжений изложил Ekkehart Kröner в [31]. Методику расчёта напряжений при намотке описал Richard Southwell в книге [62].

### § 1. Традиционные критерии прочности

**К**ак судить о прочности тела после определения напряжения в нём? При одноосном растяжении напряжением  $\sigma$  есть, очевидно, некий предел прочности  $\sigma_*$ , выше которого материал разрушается. Прочность считают достаточной при  $\sigma \leq \sigma_*/k$ , где  $k$  это так называемый коэффициент запаса. Но такой подход не вполне удовлетворяет, поскольку определяемые из опыта значения  $\sigma_*$  имеют большой разброс, а выбор коэффициента запаса нередко **становится административным актом**. Тем не менее подобные взгляды на анализ прочности широко распространены. Воздерживаясь от критики, стоит упомянуть самые популярные из них.

**Критерий максимального нормального напряжения:** разрушение происходит при  $\sigma_1 = \sigma_*$  (наибольшее из главных напряжений достигает предельного значения). Но это положение несправедливо для одноосного сжатия, при котором  $\sigma_1 = 0$ .

**Критерий максимального касательного напряжения (Tresca criterion):** разрушение наступает при  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_*$  ( $\sigma_3$  — наименьшее из главных напряжений). Это более соответствует началу пластического течения.

**Критерий максимального удлинения:** наибольшее из собственных значений тензора деформации  $\varepsilon_1 = \varepsilon_*$ . Это приемлемо и при сжатии с  $\varepsilon_1 > 0$ .

**Критерий энергии деформации:**  $\Pi = \Pi_*$ . Здесь учитывается, что разрушение требует энергии, а источником её может быть лишь само деформированное тело. Однако достаточный запас энергии — необходимое, но не единственное условие разрушения;



должен включиться некий механизм преобразования упругой энергии в работу разрушения.

**Критерий энергии формоизменения (von Mises yield criterion):**  
 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 2\tau_*^2$ ,  $\mathbf{s} \equiv \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau}$  (“девиатор напряжений”). Здесь не играет роли энергия объёмной деформации. Richard von Mises предложил\* этот критерий как гладкую аппроксимацию условия Henri Tresca.

**Критерий Mohr’a.** Представим себе множество предельных состояний ...

...

## § 2. Антиплоская деформация среды с трещиной

Любая регулярная функция комплексного переменного  $z = x + iy$  содержит в себе решение какой-либо антиплоской задачи статики без ...

...

## § 3. Трещина при плоской деформации

Рассмотрим плоскую область произвольного очертания с трещиной внутри; нагрузка приложена и “в объёме”, и на внешней границе. Как и при антиплоской деформации, решение строится в два этапа

...

## § 4. Трещинодвижущая сила

Это едва ли не основное понятие механики трещин. Рассмотрим его, следуя

\* **R. von Mises.** Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1913. Seiten 582–592.

...

### § 5. Критерий роста трещины

Связанная с энергией  $\mathcal{E}$  трещинодвижущая сила  $F$  — не единственное воздействие на фронт трещины. Должна быть ещё некая сила сопротивления  $F_*$ ; рост трещины начинается при условии

...

### § 6. J-интеграл

Одно из самых известных понятий в механике трещин выражается интегралом

$$J = \dots \quad (6.1)$$

...

### § 7. Коэффициенты интенсивности напряжений

Расчёт прочности тела с трещиной сводится к определению коэффициентов интенсивности напряжений. Методы расчёта таких коэффициентов — как аналитические, так и численные — хорошо освещены в литературе.

Рассмотрим ещё один подход к задачам механики трещин, разработанный

...

### § 8. Модель Баренблатта

Неограниченный рост напряжений на фронте трещины вызывает некоторые сомнения. Желательно “дать поддержку” сингулярным решениям какими-либо дополнительными построениями или использованием иной модели. И эту поддержку дала работа

...

## § 9. Деформационный критерий

D. S. Dugdale\*, а также М. Я. Леонов и В. В. Панасюк\*\* предложили модель, напоминающую построения Баренблатта. Также есть силы сцепления  $q$  и равен нулю итоговый коэффициент интенсивности напряжений. Но, во-первых,  $q$  имеет иной вид:

...

Второе отличие рассматриваемой модели — в формулировке критерия прочности: трещина начинает расти, когда расхождение берегов в конце свободного участка достигает критического значения  $\delta_*$  (этот параметр — константа материала), то есть при

...

## § 10. Рост трещин

Пусть нагрузка на тело с трещиной выросла настолько, что выполняется условие

...

## § 11. Упругое поле перед движущейся трещиной

Рассмотрим этот вопрос

...

\* **Dugdale, D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1960, Volume 8, Issue 2, pages 100–104.

\*\* **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твёрдом теле // Прикладная механика. 1959, Т. 5, № 4, с. 391–401.

## § 12. Баланс энергии для движущейся трещины

Уравнение баланса энергии в линейной теории ( $\Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $T = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ ):

$$\int_{\mathcal{V}} (T + \Pi)^\bullet d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{O}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathcal{O}. \quad (12.1)$$

...

## Библиография

Список книг по механике трещин уже велик. В нём сто́ит отметить работы Л. М. Качанова [25], Н. Ф. Морозова [43], В. З. Партона и Е. М. Морозова [56], Г. П. Черепанова [78]. Обзор статей есть у ... Экспериментальные данные представлены, например, в [26].

## Глава 16

# КОМПОЗИТЫ

### § 1. Вводные размышления

**И**спользуя глину как строительный материал, в неё добавляют измельчённую солому. Работая с эпоксидной смолой, полезно до затвердевания ввести наполнитель: порошок, волокна, кусочки ткани. Это примеры композитов (композиционных материалов). Новые виды композитов применяются всё шире, вытесняя сталь, алюминиевые сплавы и другие распространённые материалы.

Композиты могут быть определены как неоднородные материалы, в которых происходит некое осреднение с возникновением новых свойств. Обычная механика сплошной среды применима, разумеется, и к композитам. Но едва ли возможно учесть все детали структуры — и неразумно. Необходимы новые подходы, опирающиеся именно на сложность структуры. Ведь, например, в газе

...

### § 2. Эффективные поля

Любое поле в композите обычно представляется суммой

...

### § 3. Краевые задачи для представительного объёма

Как определяются упругие модели для “обычной” среды?

...

## § 4. Вилка Хилла

Using Voigt and Reuss theories, Hill derived upper and lower bounds on the effective properties of a composite material [Hill, R. W. The elastic behaviour of a crystalline aggregate // Proceedings of the Physical Society. Section A, Volume 65, Issue 5 (May 1952). Pages 349–354.]

Отметив, что

...

## § 5. Формулы Эшелби

Итак, эффективные модули определяются энергией представительного объёма в первой или второй задачах:

...

## § 6. Эффективные модули для материала со сферическими включениями

В однородной матрице случайным образом, но достаточно равномерно, распределены сферические включения радиусом  $a$ . Получившийся композит на макроуровне будет изотропным, его упругие свойства полностью определяются ...

...

## § 7. Метод самосогласования

Мы опирались на две задачи для представительного объёма и определяли эффективные модули из равенства энергий. В основе метода самосогласования лежит новая идея: представительный объём помещается в безграничную среду с эффективными свойствами, на бесконечности состояние считается однородным, эффективные модули находятся из некоторых дополнительных условий самосогласования.

Обратимся снова к вопросу об объёмном модуле среды со сферическими включениями. Задача сферически симметрична; для включения по-прежнему

...

## § 8. Принцип Хашина–Штрикмана

Hashin and Shtrikman derived upper and lower bounds for the effective elastic properties of quasi-isotropic and quasi-homogeneous multiphase materials using a variational approach [Hashin, Z.; Shtrikman, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. Volume 11, Issue 2 (March–April 1963). Pages 127–140.]

Вилка Hill’a основана на обычных экстремальных принципах теории упругости. Специально для механики композитов Hashin и Shtrikman построили очень своеобразный функционал, который на некотором точном решении может иметь как максимум, так и минимум, давая возможность с двух сторон оценивать эффективные модули [83].

Рассмотрим первую из двух задач для представительного объёма

...

## Библиография

Книги R. Christensen’a [32] и Б. Е. Победри [57] содержат и основы механики композитов, и постановку не теряющих актуальности проблем. Для самого требовательного читателя представляет интерес монография Т. Д. Шермергора [83]. Немало книг посвящено механике разрушения композитов, здесь стоит отметить труд Г. П. Черепанова [77].

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

### § 1. Одномерная задача

В одномерной задаче статики имеем уравнение  
...

### § 2. Трёхмерный континуум

Исходим из уравнений в перемещениях  
...

### § 3. Волокнистая структура

Тензор  ${}^4\mathcal{A}$  в этом случае постоянен вдоль оси  
...

### § 4. Статика периодического стержня

В уравнениях линейной статики стержня  
...

### Библиография

Лежащий в основе этой главы асимптотический метод представлен (с разной степенью математической стройности) в книгах [5, 6, 30, 57].



## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

1. **Antman, Stuart S.** The theory of rods. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 641–703.
2. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. Изд. 2-е. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. **Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин. «Наука», 1979. 296 с.
4. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. 4-е изд. «Дрофа», 2004. 592 с.
5. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. «Наука», 1984. 352 с.
6. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.
7. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
8. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
9. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
10. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. «Наука», 1979. 336 с.
11. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
12. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. «Наука», 1976. 512 с.
13. **Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. «Наука», 1979. 383 с.

14. **Gordon, James E.** Structures, or Why things don't fall down. Penguin Books, 1978. 395 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Конструкции, или почему не ломаются вещи. «Мир», 1980. 390 с.
15. **Gordon, James E.** The new science of strong materials, or Why you don't fall through the floor. Penguin Books, 1968. 269 pages. *Перевод: Гордон Дж.* Почему мы не проваливаемся сквозь пол. «Мир», 1971. 272 с.
16. **Григолюк Э. И., Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. (Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Том 5.) М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
17. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
18. *Перевод: Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. «Мир», 1977. 208 с.
19. **Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г.** Статика упругих тонкостенных стержней. Л., М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.
20. **Елисеев В. В.** Одномерные и трёхмерные модели в механике упругих стержней. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. ЛГТУ, 1991. 300 с.
21. **Eshelby, John D.** The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics, Academic Press, vol. 3, 1956, pp. 79–144. *Перевод: Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИИЛ, 1963. 247 с.
22. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. «Мир», 1986. 318 с.
23. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 144 с.
24. **Илюхин А. А.** О построении соотношений теории упругих стержней // Механика твёрдого тела (Киев), 1990, № 22, С. 82–92.
25. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. «Наука», 1974. 312 с.
26. **Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. Изд-во МГУ, 1989. 140 с.
27. *Перевод: Кольский Г.* Волны напряжения в твёрдых телах. М.: ИИЛ, 1955. 192 с.
28. **Cosserat E. et Cosserat F.** Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
29. *Перевод: Коттрел А.* Теория дислокаций. «Мир», 1969. 96 с.

30. **Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. «Наука», 1985. 304 с.
31. **Kröner, Ekkehart** (i) *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Springer-Verlag, 1958. 180 pages. (ii) *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen* // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Volume 4, Issue 1 (January 1959), pp. 273–334. *Перевод: Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. «Мир», 1965. 104 с.
32. **Christensen, Richard M.** *Mechanics of composite materials*. New York: Wiley, 1979. 348 p. *Перевод: Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. «Мир», 1982. 336 с.
33. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. «Наука», 1980. 512 с.
34. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
35. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
36. **Лурье А. И.** Теория упругости. «Наука», 1970. 940 с.
37. *Перевод: Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
38. **Ernst Melan, Heinz Parkus.** *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*. Wein, Springer-Verlag, 1953. 114 Seiten. *Перевод: Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.
39. **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити. «Наука», 1980. 240 с.
40. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. 3-е изд. «Наука», 1987. 304 с.
41. **Mindlin, Raymond David and Tiersten, Harry F.** *Effects of couple-stresses in linear elasticity* // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Volume 11, Issue 1 (January 1962), pp. 415–448. *Перевод: Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // *Механика: Сб. переводов*. «Мир», 1964. № 4 (86). С. 80–114.
42. **Морозов Н. Ф.** Избранные двумерные задачи теории упругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 182 с.

43. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. «Наука», 1984. 256 с.
44. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. «Наука», 1966. 708 с.
45. **Naghdi P. M.** The theory of shells and plates. In: Truesdell C. (editor) Mechanics of solids. Volume II. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Linear and nonlinear theories of rods, plates, and shells. Springer-Verlag, 1973. Pages 425–640.
46. **Witold Nowacki.** Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1966. 366 stron. *Translation: Nowacki, Witold.* Dynamic problems of thermoelasticity. Leyden: Noordhoff international publishing, 1975. 436 pages. *Перевод: Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. «Мир», 1970. 256 с.
47. **Witold Nowacki.** Teoria sprężystości. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970. 769 stron. *Перевод: Новацкий В.* Теория упругости. «Мир», 1975. 872 с.
48. **Witold Nowacki.** Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Państwowe wydawnictwo naukowe, 1983. 147 stron. *Перевод: Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. «Мир», 1986. 160 с.
49. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. 2-е изд. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
50. **Пановко Я. Г.** Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы. Изд. 2-е. URSS, 2017. 288 с.
51. **Пановко Я. Г., Бейлин Е. А.** Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. В сборнике: Рабинович И. М. (редактор) Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 75–98.
52. **Пановко Я. Г., Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е изд. «Наука», 1987. 352 с.
53. **Heinz Parkus.** Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, 1959. 176 Seiten. *Перевод: Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
54. **Партон В. З.** Механика разрушения: от теории к практике. «Наука», 1990. 240 с.

55. **Партон В. З., Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. «Наука», 1988. 472 с.
56. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е изд. «Наука», 1985. 504 с.
57. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
58. **Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.** Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
59. **Понятовский В. В.** Вывод уравнений тонкостенных стержней-оболочек открытого профиля из уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования // Исследования по упругости и пластичности. Изд-во ЛГУ, 1980. Вып. 13. С. 40–48.
60. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. «Наука», 1986. 328 с.
61. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твёрдого тела. 2-е изд. «Наука», 1988. 712 с.
62. **Southwell, Richard V.** An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Dover Publications, 1970. 509 pages. *Перевод: Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ИИЛ, 1948. 675 с.
63. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Том 2. 6-е изд. «Лань», 2004. 560 с.
64. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
65. **Ciarlet, Philippe G.** Mathematical elasticity. Volume 1: Three-dimensional elasticity. Elsevier Science Publishers B.V., 1988. xlii + 452 pp. *Перевод: Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. «Мир», 1992. 472 с.
66. **Teodosiu, Cristian.** Elastic models of crystal defects. Springer-Verlag, 1982. 336 pages. *Перевод: Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. «Мир», 1985. 352 с.
67. **Тимошенко С. П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. «Наука», 1971. 808 с.
68. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. «Наука», 1966. 635 с.
69. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости. «Наука», 1979. 560 с.

70. **Timoshenko, Stephen P.; Young, Donovan H.; William Weaver, jr.** Vibration problems in engineering. 5th edition. John Wiley & Sons, 1990. 624 pages. *Перевод: Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
71. **Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. «Наука», 1995. 319 с.
72. **Truesdell, Clifford A.** A first course in rational continuum mechanics. Volume 1: General concepts. 2nd edition. Academic Press, 1991. 391 pages. *Перевод: Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. «Мир», 1975. 592 с.
73. **Whitham, Gerald B.** Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974. 636 pages. *Перевод: Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. «Мир», 1977. 624 с.
74. **Феодосьев В. И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. 2-е изд. «Наука», 1975. 173 с.
75. *Перевод: Хеллан К.* Введение в механику разрушения. «Мир», 1988. 364 с.
76. *Перевод: Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. «Мир», 1971. 192 с.
77. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. «Наука», 1983. 296 с.
78. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974. 640 с.
79. **Чернина В. С.** Статика тонкостенных оболочек вращения. «Наука», 1968. 456 с.
80. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. «Наука», 1988. 192 с.
81. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
82. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.
83. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. «Наука», 1977. 400 с.
84. **Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.** Нелинейные волны деформации. «Наука», 1981. 256 с.

*Тензоры и тензорное исчисление*

85. **McConnell, Albert Joseph.** Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957. 318 pages. *Перевод: Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
86. **Schouten, Jan A.** Tensor analysis for physicists. 2nd edition. Dover Publications, 2011. 320 pages. *Перевод: Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. «Наука», 1965. 456 с.
87. **Борисенко А. И., Тарапов И. Е.** Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Изд. 6-е. Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьковском ун-те, 1986. 216 с.
88. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд. 3-е. «Наука», 1967. 664 с.
89. **Сокольников И. С.** Тензорный анализ. «Наука», 1971. 376 с.

*Общая механика, термодинамика, электромагнетизм*

90. **Feynman, Richard Ph. • Leighton, Robert B. • Sands, Matthew.** The Feynman Lectures on Physics. New millennium edition. Volume II: Mainly electromagnetism and matter. Basic Books, 2011. 566 pages. *Online: The Feynman Lectures on Physics. Online edition.*
91. **Goldstein, Herbert; Poole, Charles P.; Safko, John L.** Classical Mechanics. 3rd edition. Addison-Wesley, 2001. 638 pages. *Перевод: Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж.* Классическая механика. URSS, 2012. 828 с.
92. **Pars, Leopold A.** A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 pages. *Перевод: Парс Л. А.* Аналитическая динамика. «Наука», 1971. 636 с.
93. **Ter Haar, Dirk.** Elements of hamiltonian mechanics. 2nd edition. Pergamon Press, 1971. 201 pages. *Перевод: Тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. «Наука», 1974. 223 с.
94. **Беляев Н. М., Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. В 2-х томах. Том 1, 328 с. Том 2, 304 с.
95. **Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.** Классическая электродинамика. «Наука», 1985. 400 с.
96. **Гантмахер Ф. Р.** Лекции по аналитической механике. Изд. 2-е. «Наука», 1966. 300 с.

97. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. «Наука», 1969. 271 с.
98. **Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.** Курс теоретической механики: В 2-х томах. «Дрофа», 2006. Том 1: Статика и кинематика. 9-е изд. 447 с. Том 2: Динамика. 7-е изд. 719 с.
99. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
100. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. 3-е изд. Изд-во МГУ, 1978. 575 с.
101. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. 11-е изд. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

*Вариационные методы*

102. **Karel Rektorys.** Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL (Státní nakladatelství technické literatury), 1974. 593 s. *Translation: Rektorys, Karel.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. D. Reidel Publishing Company, 1980. 571 p. *Перевод: Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике. «Мир», 1985. 590 с.
103. **Washizu, Kyuichiro.** Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1982. 630 pages. *Перевод: Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. «Мир», 1987. 542 с.
104. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. «Наука», 1983. 448 с.
105. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. Изд. 2-е. «Наука», 1970. 512 с.

*Методы возмущений (асимптотические методы)*

106. **Cole, Julian D.** Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing Co., 1968. 260 pages. *Перевод: Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», 1972. 274 с.
107. **Nayfeh, Ali H.** Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1981. 536 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Введение в методы возмущений. «Мир», 1984. 535 с.
108. **Nayfeh, Ali H.** Perturbation methods. Wiley-Interscience, 1973. 425 pages. *Перевод: Найфэ Али Х.* Методы возмущений. «Мир», 1976. 456 с.



109. **Бабич В. М., Булдырев В. С.** Искусство асимптотики // Вестник ЛГУ, 1977, № 13, вып. 3, С. 5–12.
110. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1974. 504 с.
111. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
112. **Зино И. Е., Тропп Э. А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
113. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е изд. «Наука», 1981. 400 с.

*Другие темы математики*

114. **Collatz, Lothar.** Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963. 500 Seiten. *Перевод: Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). «Наука», 1968. 504 с.
115. **Dwight, Herbert Bristol.** Tables of integrals and other mathematical data. 4th edition. The Macmillan Co., 1961. 336 pages. *Перевод: Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд. 4-е. «Наука», 1973. 228 с.
116. **Kamke, Erich.** Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 10. Auflage. Teubner Verlag, 1977. 670 Seiten. *Перевод: Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд. «Лань», 2003. 576 с.
117. **Korn, Granino A. and Korn, Theresa M.** Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Revised edition. Dover Publications, 2013. 1152 pages. *Перевод: Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1974. 832 с.
118. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. «Наука», 1971. 416 с.
119. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд. «Наука», 1973. 736 с.
120. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Изд. 6-е. «Наука», 1974. 176 с.
121. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. 6-е изд. Изд-во МГУ, 1999. 798 с.