

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики

Курсова робота

"Дослідження моделей поширення хвороб у суспільстві та їх реалізація"

Студента 4 курсу групи ПМп-42
спеціальності "Прикладна математика"

Пишняка В. О.
Науковий керівник:
проф. Дияк І. І.

Національна шкала: _____

Кількість балів: _____ Оцінка ECTS: _____

Члени комісії:

(підпис)

(прізвище та ініціали)

(підпис)

(прізвище та ініціали)

(підпис)

(прізвище та ініціали)

Львів 2020

Зміст

Вступ	3
1 Опис і характеристика моделей	4
1.1 SIR модель	4
1.2 SEIR модель	5
1.3 SEIRD модель	6
1.4 SEIRS модель	8
2 Чисельна реалізація	10
2.1 Розгляд поставлено задачі	10
2.2 Неявний метод Рунге-Кутти-Лобатто	10
3 Чисельні експерименти	13
3.1 Модель SIR	13
3.2 Модель SEIR	15
3.3 Модель SEIRD	17
3.4 Модель SEIRS	19
3.5 Модель SEIRD для коронавірусу в Україні	21
3.6 Модель SEIRD для коронавірусу в Білорусі	25
Висновок	27
Література	28

Вступ

Поява та поширення інфекційних захворювань, являє собою складний механізм взаємодіючих факторів, таких як навколишнє середовище в якому розташовані хвороботворні мікроорганізми й організми, які їх переносять, а також внутрішня та зовнішня динаміка населення.

Математичне моделювання в епідеміології дає змогу змодельовати появу й поширення хвороботворних мікроорганізмів. Для цього населення поділяють на певні групи осіб, в залежності від стану здоров'я та рівня поширення збудника в популяції.

Основною проблемою предметної області є велика кількість даних та критеріїв аналізу даних для адекватного прогнозування. І при цьому більшість систем імітаційного моделювання, що використовуються сьогодні, не пристосовані до таких завдань і не дають змоги досягти високої якості прогнозування.

Головними чинниками, які зумовлюють складність вирішення задач оперативного аналізу і прогнозу розвитку епідемій (спалахів) ГРЗ, а також методів протидії, є наступні: масовість і висока швидкість розповсюдження патогенів, коли за короткий період часу можлива поява великого числа хворих; збої в роботі медичних установ і органів охорони здоров'я, адже число уражених людей стає надзвичайно великим, а можливості наявних сил і засобів по протидії ГРІ обмежені; гострота або навіть криза в розвитку санітарно-епідеміологічної ситуації в осередках ураження через початкову невідповідність наявних можливостей і реальних потреб в засобах протидії ГРІ.

В цих умовах особливого значення набувають випереджаючі наукові дослідження з аналізу і прогнозу вірогідних сценаріїв розвитку епідемій ГРЗ. Технології математичного і комп'ютерного моделювання епідемій (адекватний науковий інструментарій), дозволяють завчасно оцінювати масштаби і наслідки епідемій ГРЗ.

У цій курсовій роботі нашим завданням було дослідити такі моделі поширення хвороб в суспільстві як *SIR*, *SEIR*, *SEIRD*, *SEIRS* та визначити можливість передбачення розповсюдження вірусу в соціумі.

1 Опис і характеристика моделей

1.1 SIR модель



Рис.1 SIR модель

SIR – вразливих (позначають, як S — від англ. susceptible), осіб інфікованих патогеном (позначають, як I — від англ. infected) кількість осіб, які одужали (позначають, як R — від англ. recovered). Ця модель не є складною при розв’язуванні, але водночас дає змогу будувати поширення багатьох інфекційних захворювань, в тому числі проти кору, ендемічного паротиту та краснухи.

Для того щоб, показати, що значення S, I, R змінюються з часом (навіть якщо загальна чисельність населення залишається незмінною), ми позначатимемо їх як функції залежні від часу $S(t)$, $I(t)$ та $R(t)$. Ці функції будуть змінюватися в залежності від захворювання та популяції, для того щоб спрогнозувати можливі спалахи й взяти їх під контроль.

Отже наша модель показана на рис.1 описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

$$N = \text{const} = S(t) + I(t) + R(t),$$

де N - чисельність населення, яка вважається сталою. Слід зазначити, щодо вищеведеного співвідношення, слід зазначити, що постає необхідність розв’язувати рівняння для двох із трьох змінних.

$S(t)$: кількість людей, сприйнятливих в день t ;

$I(t)$: кількість людей, заражених в день t ;

$R(t)$: кількість людей, одужуваних в день t ;

β : очікувана кількість людей, яких заражає інфікована людина в день (швидкість розповсюдження хвороби);

D : кількість днів, коли інфікована людина може поширити захворювання;

γ : швидкість одужування ($\gamma = \frac{1}{D}$).

1.2 SEIR модель



Рис.2 SEIR модель

Багато захворювань мають латентну фазу, під час якої людина заражена, але ще не поширює захворювання. Ця затримка між зараженням і інфекційним станом може бути включена в модель *SIR*, шляхом додавання прихованої незахищеної популяції *E* і надання можливості інфікованим (але ще не передаючим хворобу) індивідуумам перейти від *S* до *E* і від *E* до *I*.

Так як затримка відкладає початок інфекційного періоду індивідуума. Вторинне поширення від зараженого індивідуума відбудеться в більш пізній час у порівнянні з моделлю *SIR*, яка не має затримки. Отже, включення більш тривалого латентного періоду - призведе до більш повільного початкового росту спалаху.

Після початкового швидкого зростання, епідемія виснажує вразливе населення. Зрештою вірус, не може знайти достатньо нових сприйнятливих людей і вимирає. Введення інкубаційного періоду не змінює сукупного числа інфікованих осіб.

Отже, наша модель показана на рис.2 описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

$$N = \text{const} = S(t) + I(t) + R(t),$$

де N - чисельність населення, яка вважається сталою.

$S(t)$: кількість людей, сприйнятливих в день t ;

$E(t)$: кількість людей, латентних (заражених, але поки, що в інкубаційному стані) в день t ;

$I(t)$: кількість людей, інфікованих в день t ;

$R(t)$: кількість людей, одужуваних в день t ;

β : очікувана кількість людей, яких заражає інфікована людина в день;

D : кількість днів, коли інфікована людина може поширити захворювання;

γ : швидкість одужування ($\gamma = \frac{1}{D}$);

σ : тривалість інкубаційного періоду ($\sigma = \frac{1}{d}$ (d - кількість днів інкубаційного періоду));

1.3 SEIRD модель

Для вбивчих захворювань врахування смертності дуже важливе. В інших ситуаціях нам може знадобитися додати абсолютно різні між собою варіанти та динаміку (наприклад народжуваність і смертність, не пов'язані із захворюванням, при дослідженні протягом тривалого часу); ці моделі можуть бути настільки складними, наскільки нам потрібно.

Для того щоб визначити, коли люди можуть померти від хвороби(будучи тільки інфікованими), ми можемо взяти наші поточні переходи і додати стан D (смерть). Це означає, що нам потрібно додати перехід $I \rightarrow D$. Звичайно, люди не вмирають миттєво, ми визначаємо нову змінну ρ для швидкості, з якою люди вмирають (наприклад, коли помирає через 6 днів, $\rho = \frac{1}{6}$). Немає причин для зміни швидкості відновлення γ . В такому випадку наша нова модель буде виглядати приблизно так:

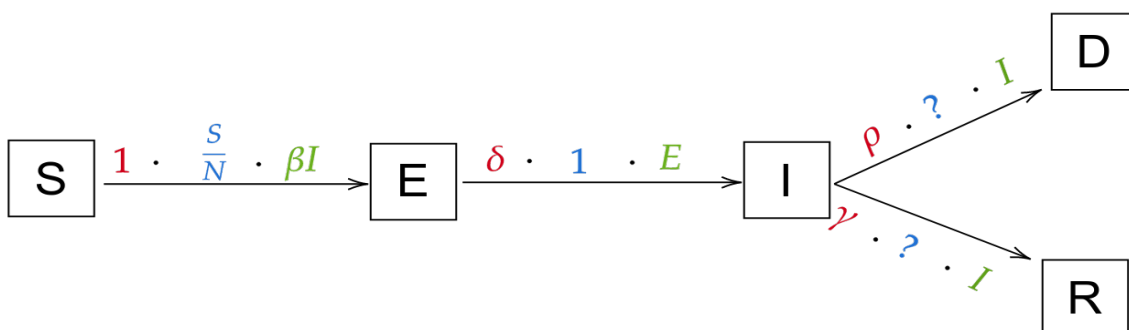


Рис.3 SEIRD модель

Єдине, чого не вистачає, - це вірогідність переходу від інфікованого до виздоровілого і від інфікованого до мертвого. Це буде ще одна змінна: рівень смертності смертності - α . Наприклад, якщо $\alpha = 5\%$, $\rho = 1$ і $\gamma = 1$ (таким чином, люди вмирають або виздоровляють за 1 день, що спрощує приклад) і 100 людей, які інфікуються, це 5% зі 100, то б то 5 людей помре. Таким чином, 95% зі 100, то б то 95 чоловік, які виздоровіли. Таким чином, імовірність $I \rightarrow D$ дорівнює α , і, наступна, ймовірність для $I \rightarrow R$ рівна $(1 - \alpha)$.

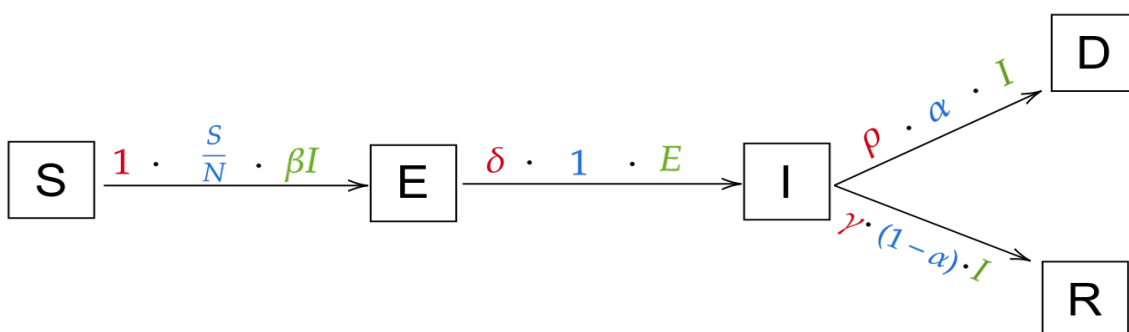


Рис.4 SEIRD модель

Отже наша модель показана на рис.3-4 описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (1 - \alpha)\gamma I - \alpha\rho I \\ \frac{dR}{dt} = (1 - \alpha)\gamma I \\ \frac{dD}{dt} = \alpha\rho I \end{cases}$$

$$N = const = S(t) + I(t) + R(t),$$

де N - чисельність населення, яка вважається сталою.

$S(t)$: кількість людей, сприйнятливих в день t ;

$E(t)$: кількість людей, латентних(заражених, але поки, що в інкубаційному стані) в день t ;

$I(t)$: кількість людей, заражених в день t ;

$R(t)$: кількість людей, одужуваних в день t ;

$D(t)$: кількість людей, померлих в день t ;

β : очікувана кількість людей, які заражає інфікована людина в день;

D : кількість днів, коли заражена людина може поширити захворювання;

γ : швидкість одужування ($\gamma = \frac{1}{D}$);

σ : тривалість інкубаційного періоду($\sigma = \frac{1}{d}$ (d - кількість днів інкубаційного періоду));

α : відсоток смертності від хвороби;

ρ : через який час людина помирає від початку захворювання;

1.4 SEIRS модель

Модель *SEIR* передбачає, що люди переносять довічний імунітет відносно захворювання після одужання, але для багатьох захворювань імунітет після зараження з часом знижується або зникає. У цьому випадку модель *SEIRS* використовується, щоб дозволити одужавшим людям повернутися в сприйнятливий стан.

Отже нам потрібно ввести перехід від стану $R \rightarrow S$. Звичайно люди не втрачають імунітет відносно хвороби миттєво після одужання. Отже, додамо новий коефіцієнт ξ - швидкість з якою одужавший повертається до сприятливого стану через втрату імунітету. Котрий знаходиться за співвідношенням $\xi = \frac{1}{n}$ (n - кількість днів через котрі людина втрачає імунітет). Якщо достатній приплив до сприйнятливої популяції, то при рівновазі, динаміка буде знаходитися в ендемічному стані з затухаючими коливаннями.

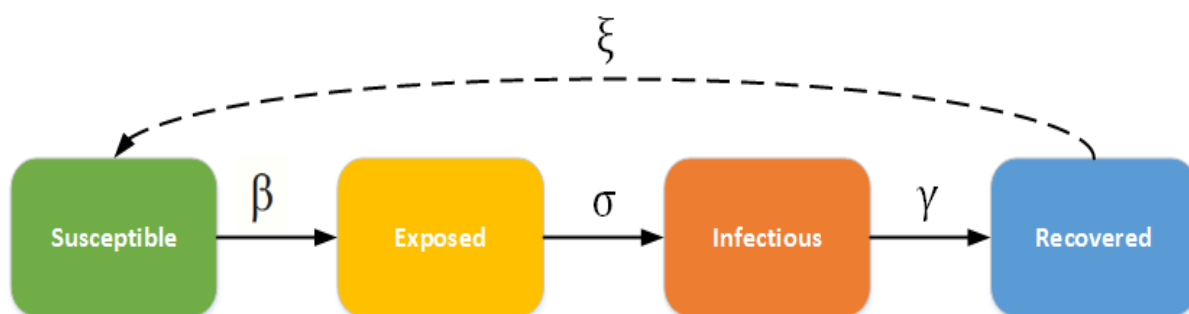


Рис.5 SEIRS модель

З попередньої моделі зберігаємо відповідний перехід смертності і наша модель характеризується такою системою:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} + \xi R \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (1 - \alpha)\gamma I - \alpha \rho I \\ \frac{dR}{dt} = (1 - \alpha)\gamma I - \xi R \\ \frac{dD}{dt} = \alpha \rho I \end{cases}$$

$$N = const = S(t) + I(t) + R(t),$$

де N - чисельність населення, яка вважається сталою.

$S(t)$: кількість людей, сприйнятливих в день t ;

$E(t)$: кількість людей, латентних(заражених, але поки, що в інкубаційному стані) в день t ;

$I(t)$: кількість людей, заражених в день t ;

$R(t)$: кількість людей, одужуваних в день t ;

$D(t)$: кількість людей, померлих в день t ;

β : очікувана кількість людей, які заражає заражена людина в день;

D : кількість днів, коли заражена людина має та може поширити захворювання;

γ : швидкість одужування ($\gamma = \frac{1}{D}$);
 σ : тривалість інкубаційного періоду($\sigma = \frac{1}{d}$ (d - кількість днів інкубаційного періоду));
 α : відсоток смертності від хвороби;
 ρ : через який час людина помирає від початку захворювання;
 ξ : швидкість втрати імунітету для певної хвороби;

Отже, проаналізувавши дані моделі можна сказати, що всі вони добре підходять для аналізу і передбачення поведінки того чи іншого захворювання. Кожна модель добре ілюструє поведінкову характеристику хвороб в соціумі зі своїми особливостями. Тому в наступному розділі перейдемо до чисельної реалізації даних моделей.

2 Чисельна реалізація

2.1 Розгляд поставленої задачі

Як нам видно з попереднього розділу ми маємо справу з системами диференціальних рівнянь. Наша задача постає в тому, що нам потрібно розв'язати задачу Коші для цієї системи.

Отже, чисельний метод повинен вміти розв'язувати задачу Коші для таких систем. В описаних моделях ми маємо жорсткі системи диференціальних рівнянь, тому чисельний метод має бути не класичним, а неявним. Адже явні методи не підходять для рішення жорстких диференціальних рівнянь через малу область їх стійкості. Нестійкість явних методів Рунге-Кутти створює доволі серйозні проблеми при чисельному рішенні диференціальних рівнянь в часткових похідних.

У цій курсовій роботі було поставлено задачу реалізувати модифікацію неявного методу Рунге-Кутти, чотиристадійний метод Рунге-Лобатто шостого порядку.

2.2 Неявний метод Рунге-Кутти-Лобатто

Метод

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0 + hc_1, x_0 + h(a_{11}k_1 + \dots + a_{1s}k_s)), \\ &\dots \\ k_s &= f(t_0 + hc_s, x_0 + h(a_{s1}k_1 + \dots + a_{ss}k_s)), \\ x_1 &= x_0 + h(b_1k_1 + \dots + b_sk_s), \end{aligned} \quad (1)$$

або

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \sum_{j=1}^s b_j k_j, \\ k_i &= f(t_0 + hc_i, x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) \quad (i = 1, \dots, s), \end{aligned} \quad (2)$$

Називається s -етапним(s -стадійним) неявним методом Рунге-Кутти.

Найпростіші приклади неявних методів - це неявний метод Ейлера(першого порядку)

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}), \quad (3)$$

і метод трапецій(другого порядку)

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})], \quad (4)$$

Неявні методи матимуть табличний вигляд

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} \quad (5)$$

Головним недоліком неявних методів Рунге-Кутти є те, що величини k_i задаються неявним чином, тому їх потрібно знаходити ітераційним способом. Для цього як правило використовують метод простих ітерацій:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{(l+1)} &= \mathbf{f} \left(t_0 + hc_1, \mathbf{x}_0 + h \left(a_{11}\mathbf{k}_1^{(l)} + \dots + a_{1s}\mathbf{k}_s^{(l)} \right) \right), \\ &\dots \\ \mathbf{k}_s^{(l+1)} &= \mathbf{f} \left(t_0 + hc_s, \mathbf{x}_0 + h \left(a_{s1}\mathbf{k}_1^{(l)} + \dots + a_{ss}\mathbf{k}_s^{(l)} \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Наш метод є неявним методом Рунге-Кутти модифікований Лобатто. Метод задається такою таблицею Бутчера:

0	0	0	0	0
$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{60}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{15-7\sqrt{5}}{60}$	0
$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{60}$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{60}$	$\frac{1}{6}$	0
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{12}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{12}$	0
$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	

($s = 4 \quad p = 6$)

(7)

Введем $K = (k_1, \dots, k_s)$ і норму $\|K\| = \max_i \|k_i\|$. Тоді (6) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} K^{(l+1)} &= F(K^{(l)}), \text{ де } F = (f_1, \dots, f_s), \\ \text{а } f_i(K) &= f(t_0 + hc_i, x_0 + h(a_{i1}k_1 + \dots + a_{is}k_s)), \text{ для } i = (1, \dots, s). \end{aligned}$$

З умови Ліпшиця :

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|,$$

для двох довільних K_1 і K_2 буде справедлива така нерівність:

$$\|F(K_1) - F(K_2)\| \leq hL \max_i \sum_j |a_{ij}| \|K_1 - K_2\|. \quad (8)$$

Для збіжності методу простих ітерацій відображення F має бути стискаючим, тоді згідно з (8) виявляється можливим за умови, коли:

$$h < \frac{1}{L \max_i \sum_j |a_{ij}|}. \quad (9)$$

Очевидно, для знаходження k_i необхідно, щонайменше, дві ітерації. Звідси всі неявні s -етапні методи вимагають обчислень функцій f на кроці не менш, ніж $2s$. (В даному випадку число s і число обчислень функцій f не одне і те ж, як в явних методах.) Таким чином, неявні методи повинні працювати повільніше, ніж явні з тим же числом етапів s .

Незважаючи на це, привабливість неявних методів полягає в тому, що при всіх s існують такі методи, які мають порядок $p = 2s$. Ж. Кунцман (1961) і Дж. Бутчер (1964) показали, що такий порядок p досягається шляхом спеціального вибору коефіцієнтів c_i .

Розглянемо два методи: явний Дорман - Прінса ($s = 13$) і неявний Рунге-Лобатто ($s = 4$). На практиці початкові наближення в неявних методах отримують з відповідних величин на попередньому кроці. Тоді при хорошому виборі початкових наближень для збіжності ітераційного процесу може знадобитися всього 2-3 ітерації. Тому можна вважати, що метод Рунге-Лобатто буде обчислювати функцію f 8-12 разів на кроці, тоді як метод Дорман - Прінса - 13. Отже, завдяки своїй чудовій властивості неявний метод буде працювати швидше. Крім того, слід зазначити, що з підвищенням порядку p різниця $s - p$ для явних методів збільшується, тому вказана перевага неявних методів буде тільки зростати.

3 Чисельні експерименти

У цьому розділі буде розглянуто всі моделі на прикладі деякої уявної хвороби, а також спробуємо змодельовати ситуацію з CoVid-19 в Україні й Білорусі. Дізнаємося чому реальний стан і розрахунок моделі іноді не відповідає дійсності.

3.1 Модель SIR

Розглянемо найлегший приклад - SIR модель. Хоч і вважається, що вона найлегша, проте іноді її доцільніше використовувати. Особливо, коли з'явився новий патоген і немає можливості дізнатися інформацію про різні, але важливі аспекти як, час інкубаційного періоду, відсоток смертності, а також чи має хвороба латентний стан чи ні. Це важливо, тому що розрахунок відносної небезпеки потрібний вже, а кожен день бездії вартуватиме чимало людських життів і ресурсів.

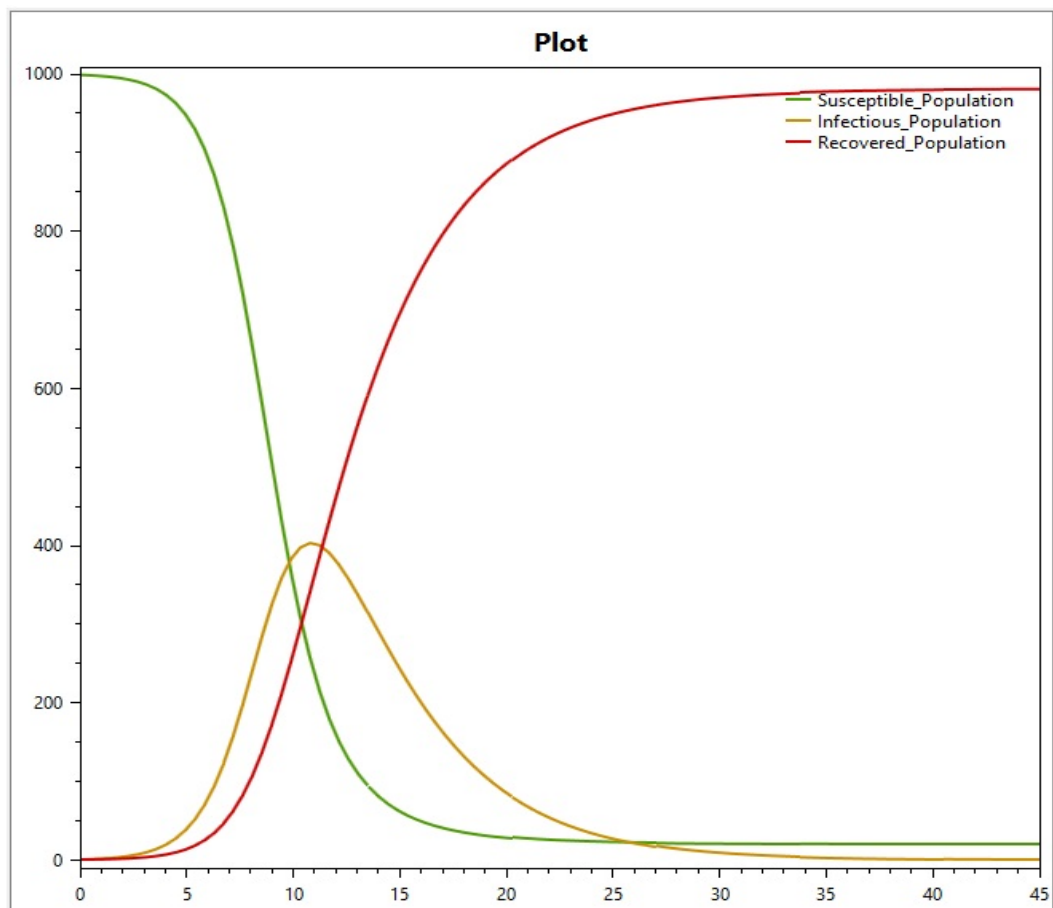


Рис.6 Графік SIR моделі

Для цієї моделі було використано такі коефіцієнти:

$S(t)$: 999

$I(t)$: 1

$R(t)$: 0

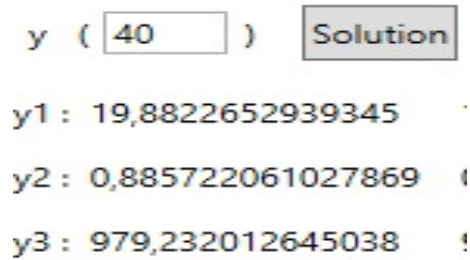
β : 1, одна людина може заразити одну людину

D : 4, дні людина може заражати інших

γ : 0,25

Такі коефіцієнти були вибрані для легкості моделювання і не відповідають жодній з існуючих хвороб світу.

Як видно з графіку при популяції всього в 1000 людей, одна хвора людина, дасть близько 98% інфікованого населення і епідемія буде припинена на 40 день.



y (40) Solution

y1 : 19,8822652939345

y2 : 0,885722061027869

y3 : 979,232012645038

Рис.7 Прогноз SIR моделі

З результатів програми видно, що патогеном перхворіє близько 980 людей, але 20 людей епідемія не доторкнеться.

3.2 Модель SEIR

Перейдемо до наступної моделі, котра більш складна, тому що потребує врахування латентного періоду, про котрий досить складно розрахувати дані на початку. Ось чому цю модель доцільніше використовувати при більш розгорнутій інформації про захворювання.

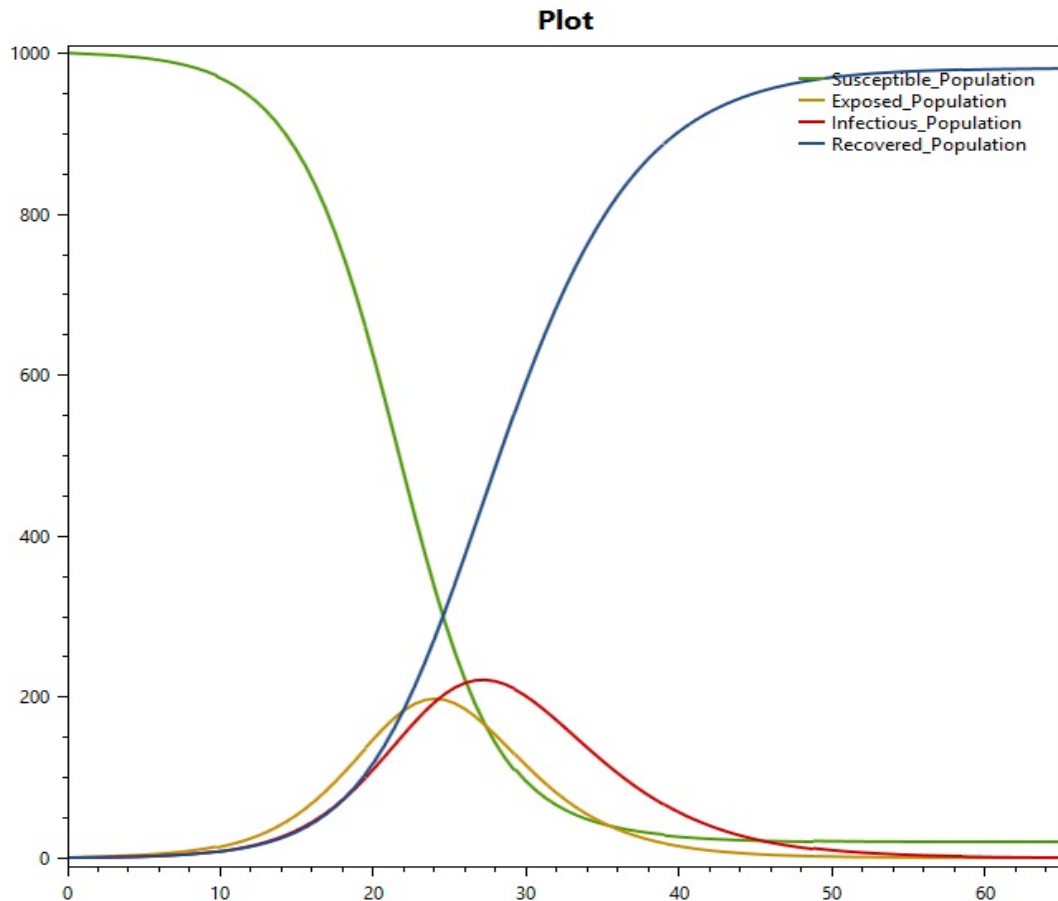


Рис.8 Графік SEIR моделі

Для SEIR моделі були обрані такі коефіцієнти:

$S(t)$: 999;

$E(t)$: 0;

$I(t)$: 1;

$R(t)$: 0;

β : 1, одна людина може заразити одну людину;

D : 4, дні людина може заражати інших;

γ : 0,25;

σ : 0,33, інкубаційний період становить 3 дні.

Як видно з інкубаційного періоду, перебіг епідемії розтягнувся в часі. Наявність латентного періоду досить ускладнює моделювання. Модель зазначає, що на відміну від звичайної SIR, з 40 днів епідемія збільшилася до 62 днів, що досить суттєво при порівнянні невеликому значенні інкубаційного періоду.

```

y ( 62 ) Solution
y1 : 19,8285052691275
y2 : 0,136342667193891
y3 : 0,87646327662288
y4 : 980,158688787055

```

Рис.9 Прогноз SEIR моделі

Так як не змінилися інші коефіцієнти і ми просто ускладнили модель, загальна кількість хворих не змінилася, проте значно збільшився час протікання епідемії. Отже, навіть введення нового стану в модель - масштабно змінило ситуацію, і наслідки стають більш сильнішими при відносно невеликій величині населення.

3.3 Модель SEIRD

Переходимо до SEIRD моделі, що більш реально ілюструє інфекції, проте ще не дає достатньо розгорнутий прогноз. Використання даної моделі дозволяє спрогнозувати смертність серед населення.

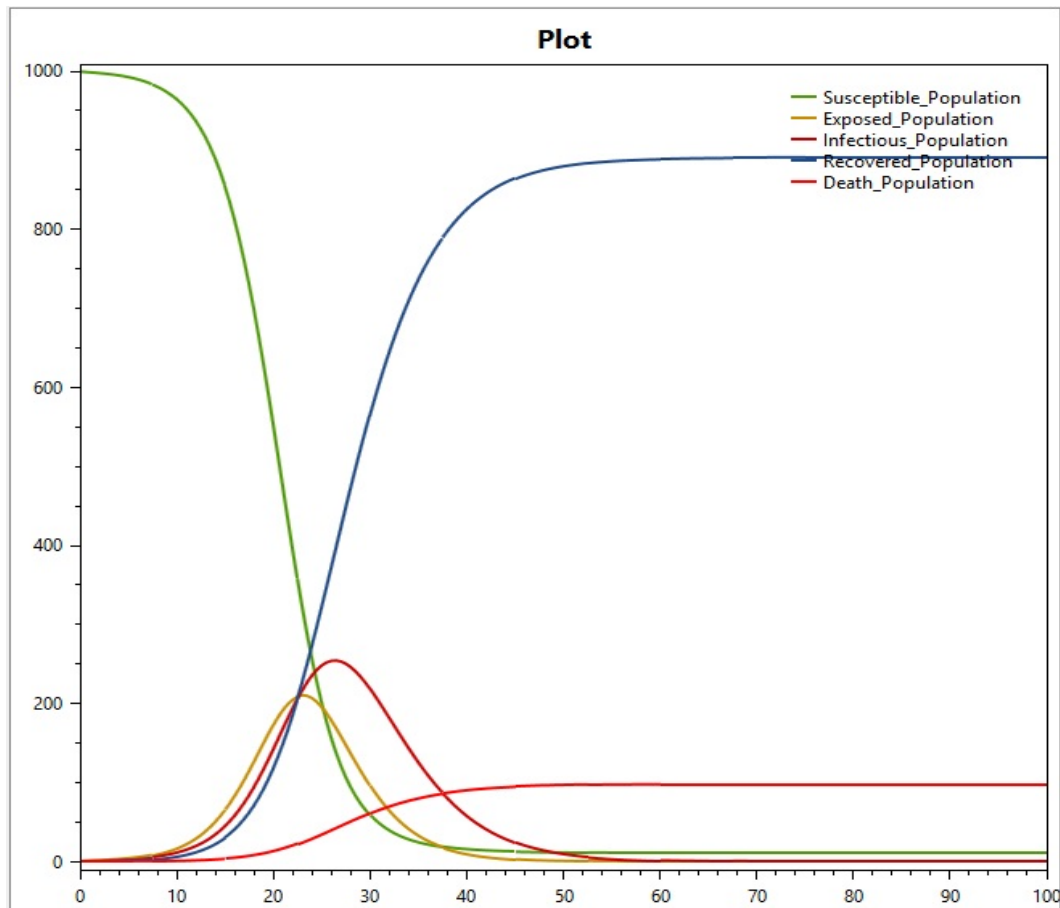


Рис.10 Графік SEIRD моделі

Після введення смертності коефіцієнти мають такі значення:

$S(t)$: 999;

$E(t)$: 0;

$I(t)$: 1;

$R(t)$: 0;

$D(t)$: 0;

β : 1, одна людина може заразити одну людину;

D : 4, дні людина може заражати інших;

γ : 0,25;

σ : 0,33, інкубаційний період становить 3 дні;

α : 0,2, смертність 20%;

ρ : 0,11, людина помирає на 9 день боротьби з інфекцією.

Незважаючи на те, що було вибрано такий великий коефіцієнт смертності, існують більш смертельні хвороби, і це моделювання дає нам змогу підготуватися й оцінити можливий розвиток подій.

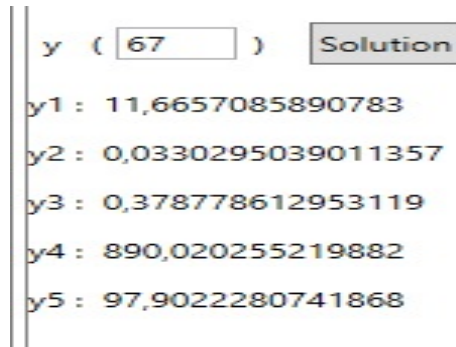


Рис.11 Прогноз SEIRD моделі

Введення смертності знову збільшило і погіршило протікання епідемії. Тепер ми маємо справу з реальними жертвами. Наслідки відчуються сильніше й інфекція не виглядає такою беззахисною. Модель спрогнозувала закінчення епідемії вже на 67 день, проте кількість смертей вражає: 97 на 1000 осіб населення. Це свідчить про критичність ситуації і необхідність прийняття швидких рішень.

3.4 Модель SEIRS

Дана модель використовується, коли маємо справу з хворобами, при яких імунітет втрачається з певним часом, що властиве більшості відомим вірусам. Вважається найбільш доцільно використовувати *SEIRS*, коли маємо справу з періодичними хворобами з відносно швидкою втратою імунітету населення, такими як сезонні ГРІ, простуди, різновиди грипу.

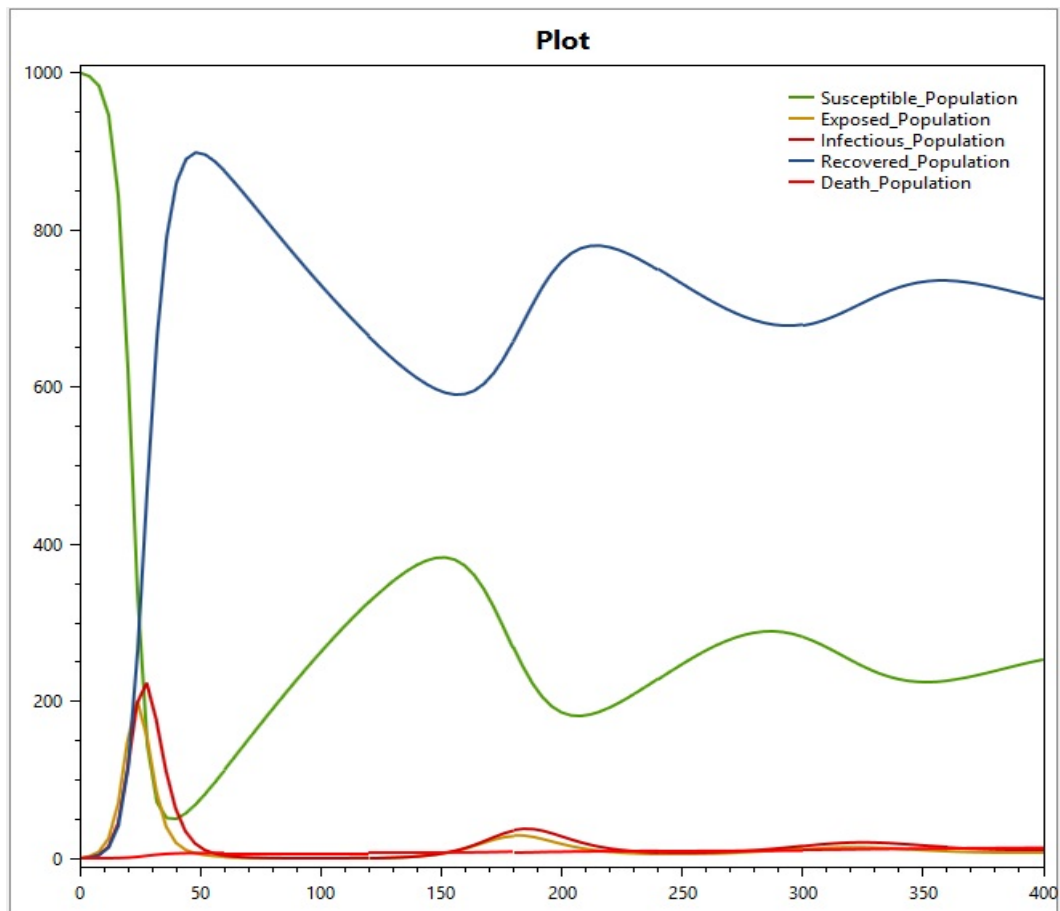


Рис.12 Графік SEIRS моделі

Для останньої моделі були введені такі коефіцієнти.

$S(t)$: 999;

$E(t)$: 0;

$I(t)$: 1;

$R(t)$: 0;

$D(t)$: 0;

β : 1, одна людина може заразити одну людину;

D : 4, дні людина може заражати інших;

γ : 0,25;

σ : 0,33, інкубаційний період становить 3 дні;

α : 0,015, смертність 1,5%, що властиво сезонному грипу;

ρ : 0,11, людина помирає на 9 день боротьби з інфекцією.

ξ : 0,005, людина втрачає імунітет в середньому через 200 днів.

Враховуючи всі коефіцієнти і розвиток в складності моделювання наша система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\frac{1*y_1*y_3}{1000} + 0,005 * y_4 \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{1*y_1*y_3}{1000} - 0.33 * y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = 0.33 * y_2 - (1 - 0,015) * 0,25 * y_3 - 0,015 * 0,11 * y_3 \\ \frac{dy_4}{dt} = (1 - 0,015) * 0,25 * y_3 - 0,005 * y_4 \\ \frac{dy_5}{dt} = 0,015 * 0,11 * y_3 \end{cases}$$

dy1/dx =	-1*y1*y3/(1000)+0,005*y4	▼	y1(x)=	1000
dy2/dx =	1*y1*y3/(1000)-0,33*y2	▼	y2(x)=	0
dy3/dx =	0,33*y2-(1-0,015)*0,25*y3-0,015*0,11*y3	▼	y3(x)=	1
dy4/dx =	(1-0,015)*0,25*y3-0,005*y4	▼	y4(x)=	0
dy5/dx =	0,015*0,11*y3	▼	y5(x)=	0

Рис.13 Система рівнянь SEIRS моделі

Як видно з графіка спалахи інфекції продовжуються, до того часу поки населення здобуде так званий колективний імунітет. Проте вважається, що вірус не мутував і швидкість втрати імунітету не збільшувалася. Дана модель демонструє нам поведінку патогену з відомими коефіцієнтами передачі, смертності, втрати імунітету, латентного періоду. Навіть з відносно нереальною хворобою, можна пересвідчитися в реальності моделювання, тому що сезонні спалахи ГРІ нагадують даний графік.

В наступних підрозділах буде змодельовано поведінку коронавірусу, проте це досить складна і непередбачувана хвороба, про котру ми ще не володіємо всією повнотою даних і ситуація змінюється з кожним днем.

3.5 Модель SEIRD для коронавірусу в Україні

У цьому чисельному експерименті ми розглянемо і порівняємо розрахункові і реальні величини поширення коронавірусної інфекції в Україні.

На нашу думку саме така модель найкраще відобразить прогнози на рахунок цієї хвороби в будь-якій країні, адже вона враховує смертність і латентний період людини, котрий властивий цьому вірусу, а також на даний час невідомий коефіцієнт швидкості втрати імунітету людини. Проте результати для всього світу будуть досить не точними, тому що в кожній країні свій рівень медицини (який буде впливати на рівень смертності) і свої карантинні заходи (які впливають на швидкість розповсюдження інфекції).

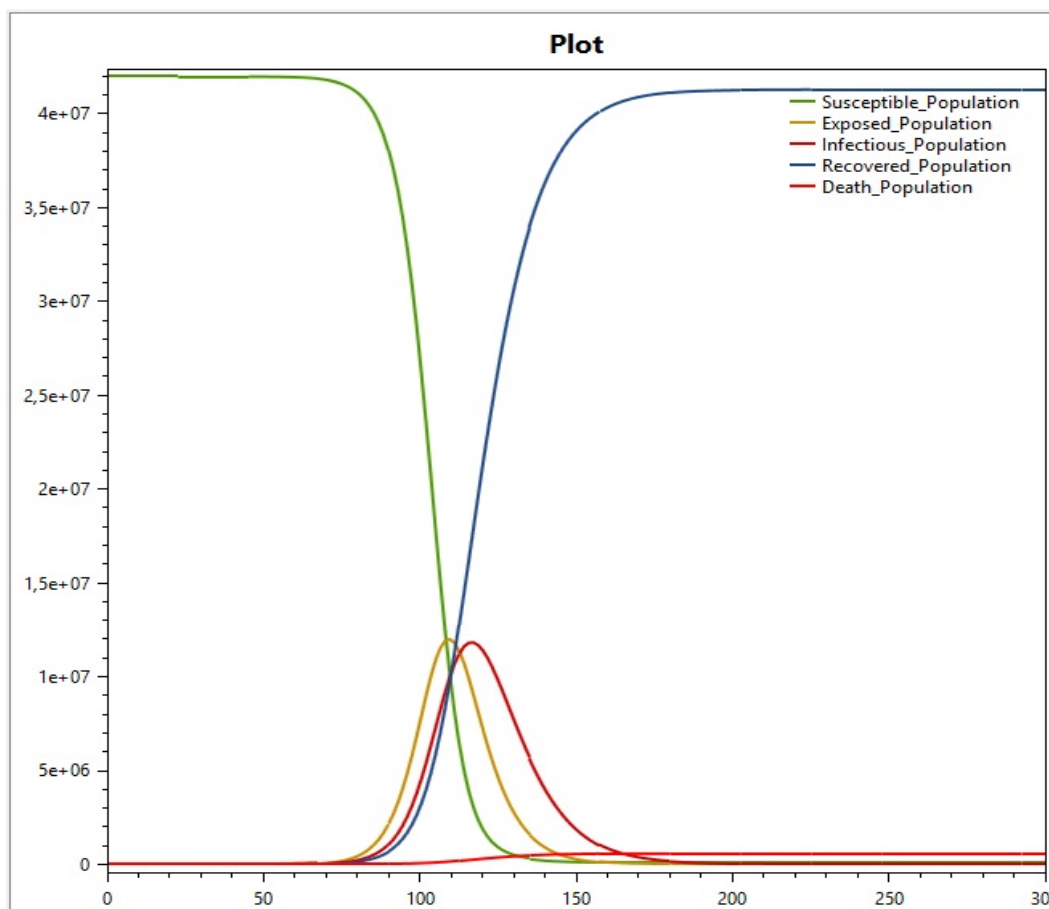


Рис.14 Графік SEIRD моделі в Україні

Наданий час в Україні проходить 65 день з моменту реєстрації першого хворого. Модель прогнозує з теперішніми даними час закінчення карантину на 276 день зі 100%. Проте дана дата може змінитися, якщо будуть введені більш строгіші карантинні міри, впливанням грошей в розвиток медицини і сумлінність громадян. На даний момент прогнози на майбутнє бажають бути кращими.

Для нашої країни, як нам вдалося дослідити з різних джерел, ймовірні такі кефіцієнти:

$$N = 41980000;$$

$$S(t): 41980000;$$

$$E(t): 0;$$

$I(t)$: 1 (третього березня був відомий перший випадок, проте невідомо чи він був єдиний, це суттєво впливає на поширення патогену);

$R(t)$: 0;

$D(t)$: 0;

β : 0,625 - тому, що було введено карантин і так вказує міністерство охорони здоров'я;

γ : 0,1 - вказується, що людина в середньому хворіє 10 днів;

σ : 0,125 - вважається, що інкубаційний період від 2 до 14 днів;

α : 0,025 - адже відсоток смертності 2,5%;

ρ : 0,054 - людина помирає на 18,5 день боротьби з хворобою;

Так виглядає задана нами система диференціальних рівнянь з вказаними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\frac{0,625*y_1*y_3}{41980000} \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{0,625*y_1*y_3}{41980000} - 0,125 * y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = 0,125 * y_2 - (1 - 0,025) * 0,1 * y_3 - 0,025 * 0,054 * y_3 \\ \frac{dy_4}{dt} = (1 - 0,025) * 0,1 * y_3 \\ \frac{dy_5}{dt} = 0,025 * 0,054 * y_3 \end{cases}$$

dy1/dx =	-0,625*y1*y3/(41980000)	y1(x)=	41980000
dy2/dx =	0,625*y1*y3/(41980000)-0,125*y2	y2(x)=	0
dy3/dx =	0,125*y2-(1-0,025)*0,1*y3-0,025*y3	y3(x)=	1
dy4/dx =	(1-0,025)*0,1*y3	y4(x)=	0
dy5/dx =	0,025*0,054*y3	y5(x)=	0
Solution			

Рис.15 Рівняння SEIRD моделі в Україні

Дні	27	50	60	64
Іфіковані	548	5994	9634	13691
Інфіковані за моделлю	48	2314	12396	24246
Одужавші	8	424	1498	2396
Одужавші за моделлю	28	1343	7201	14090
Померлі	13	174	279	340
Померлі за моделлю	0	18	99	195

Табл.1 Порівняння дійсних і вичислених даних в Україні

Як і говорилося, що спрогнозувати поведінку хвороби в суспільстві дуже важко. Величезна різниця, майже в два рази, в смертності можливо зумовлена поведінкою

українців. Більшість не усвідомлюють загрозу і не звертаються по допомоги в лікарню. Також, на початку епідемії, така різниця в кількості захворілих зумовлена великою кількістю людей які поверталися із за кордону, котрим робили тести на коронавірус. Ситуація змінилася, і модель прогнозує більшу кількість захворілих, адже наша медична система не може відслідити всіх інфікованих, тому що 80% хворих переносять вірус в легкій формі. Модель прогнозує таку кількість померлих лише через три дні, але з більшою кількістю одужавших й інфікованих.

```

y ( 67 ) Solution
y1 : 41830865,8679753
y2 : 85419,2971262399
y3 : 40086,7926285315
y4 : 23306,3391130299
y5 : 322,703156949645

```

Рис.16 Прогноз SEIRD моделі в Україні

Зі збільшенням днів, кількість людей по всіх групах збільшується в експоненційному масштабі, й епідемія зупиниться на 276-ому дні, коли вже майже неможлива передача хвороби іншим, проте смертність достатньо велика.

Нище показано графіки розрахованої й реальної смертності по дням при різному розбитті для методу. Жовтим кольором відмічено точні дані, котрі нам відомі на даний момент. Зеленим кольором позначено змодельований графік.

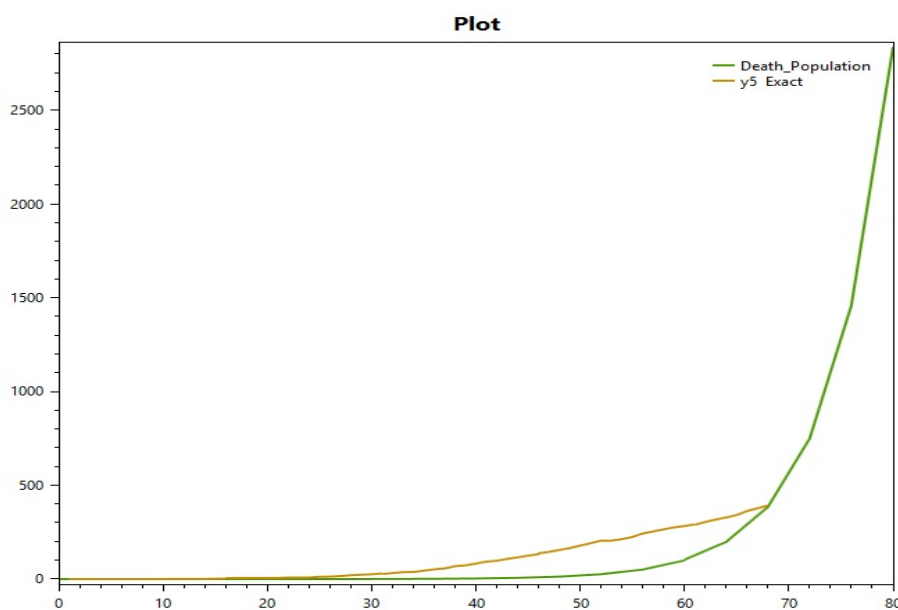


Рис.17 Графік Розрахованої й реальної смертності в Україні при розбитті $n = 20$

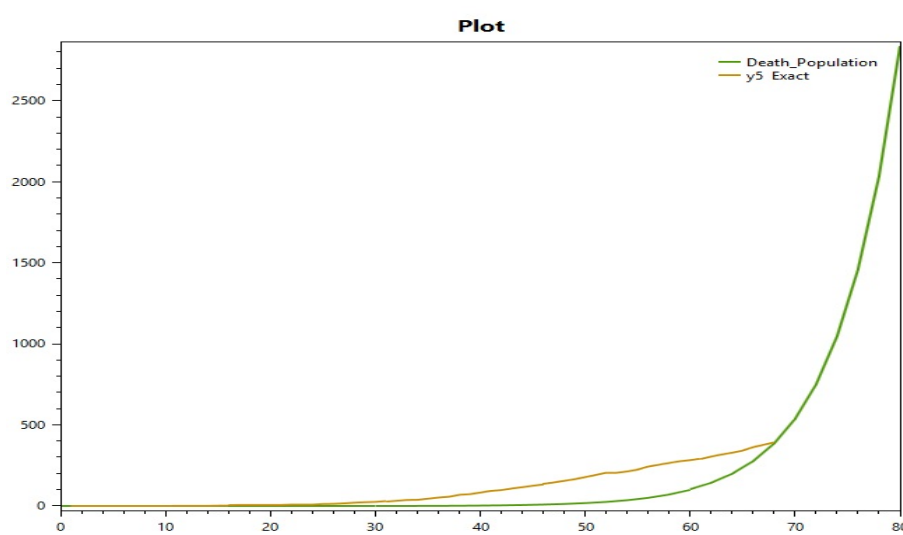


Рис.18 Графік Розрахованої й реальної смертності в Україні при розбитті $n = 40$

Збільшимо розбиття ще в два рази, аби досягти найкращої гладкості графіку. З Рис.18, видно, що нам достатньо 40 розбиттів при прогнозуванні, проте потрібно досягти якомога кращої точності.

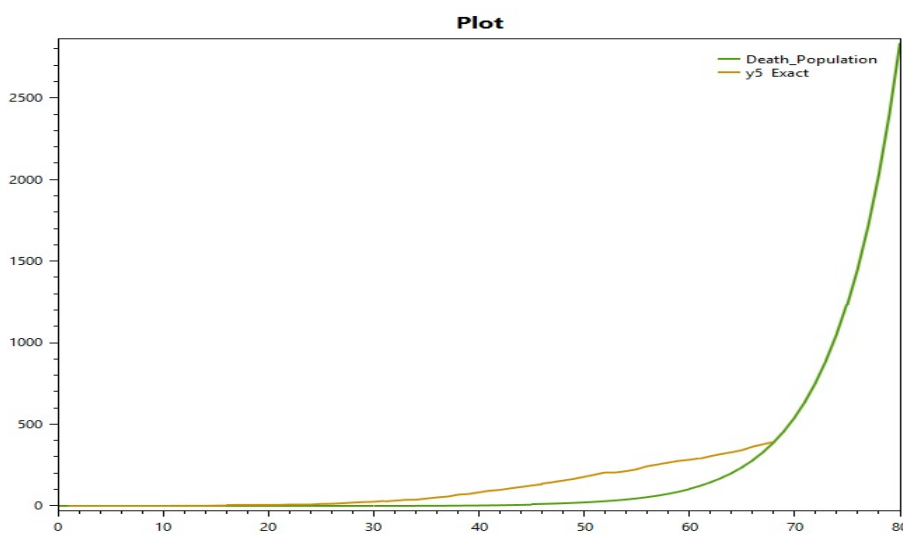


Рис.19 Графік Розрахованої й реальної смертності в Україні при розбитті $n = 80$

3.6 Модель SEIRD для коронавірусу в Білорусі

Розглянемо на перебіг обставин в Білорусі. Цей приклад має бути більш точнішим, тому що країна не вводила карантинний режим і не потрібно досліджувати коефіцієнт швидкості поширення інфекції.

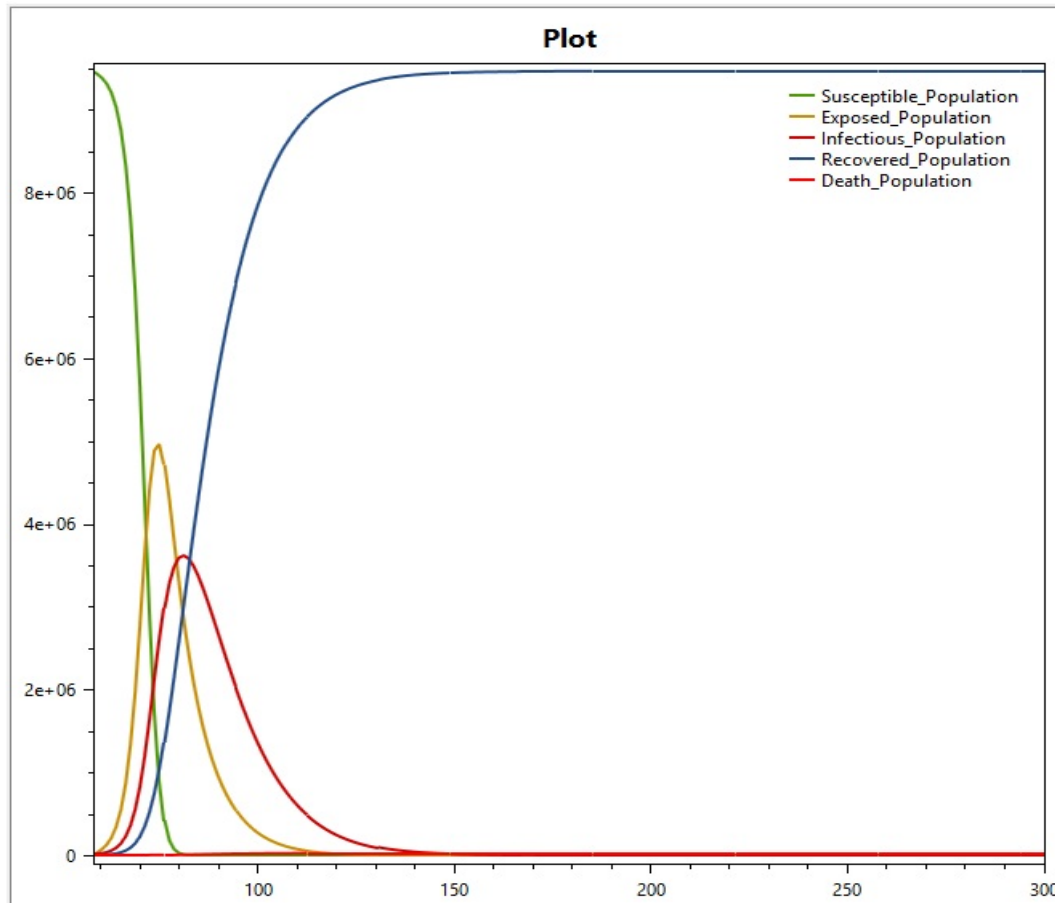


Рис.20 Прогноз SEIRD моделі в Білорусі

На даний час в Білорусі проходить 63 день епідемії і модель прогнозує закінчення епідемії на 220 день, порівняно швидше ніж в нас, проте населення менше і немає карантинних заходів, які розтягують пік в часі для зменшення навантаження на медичну систему і, як наслідок, в майбутньому підвищення рівня смертності.

Для Білорусії відповідають такі величини коефіцієнтів:

$N = 9480000$;

$S(t): 9480000$;

$E(t): 0$;

$I(t): 14917$ - данні на 1 травня;

$R(t): 2918$ - данні на 1 травня;

$D(t): 93$ - данні на 1 травня;

$\beta: 2,15$ - тому, що не було введено карантину і таке значення брали вчені Імперського університету Лондона;

$\gamma: 0,1$ - вказується що людина в середньому хворіє 10 днів;

$\sigma: 0,125$ - вважається, що інкубаційний період від 2 до 14 днів;

α : 0,006 - адже відсоток смертності 0,6%;

ρ : 0,054 - людина помирає на 18,5 день боротьби з хворобою;

Помічаємо, що змінилося значення коефіцієнтів смертності і швидкості передачі захворювання, а також значення кількості інфікованих, мертвих і одужавших. В цьому прикладі ми побачимо, що при прогнозуванні на невеликий період і брати початкове значення в той термін коли нам добре відомі данні і ,як наслідок, прогноз стає більш точнішим і ймовірним.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\frac{2,15*y_1*y_3}{9480000} \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{2,15*y_1*y_3}{9480000} - 0,125 * y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = 0,125 * y_2 - (1 - 0,006) * 0,1 * y_3 - 0,006 * 0,054 * y_3 \\ \frac{dy_4}{dt} = (1 - 0,006) * 0,1 * y_3 \\ \frac{dy_5}{dt} = 0,006 * 0,054 * y_3 \end{cases}$$

$dy_1/dx =$	$-2,15*y_1*y_3/(9480000)$	$y_1(x)=$	9480000
$dy_2/dx =$	$2,15*y_1*y_3/(9480000)-0,125*y_2$	$y_2(x)=$	0
$dy_3/dx =$	$0,125*y_2-(1-0,006)*0,1*y_3-0,006*($	$y_3(x)=$	14917
$dy_4/dx =$	$(1-0,006)*0,1*y_3$	$y_4(x)=$	2918
$dy_5/dx =$	$0,006*0,054*y_3$	$y_5(x)=$	93

Рис.21 Рівняння SEIRD моделі в Білорусі

Дні	58	60	62	64
Іфіковані	14917	17489	19255	20168
Інфіковані за моделлю	14917	19254	26863	39153
Одужавші	2918	3259	4388	5067
Одужавші за моделлю	2918	6081	8340	11576
Померлі	93	103	112	116
Померлі за моделлю	93	103	110	121

Табл.2 Порівняння дійсних і вичислених даних в Білорусі

Як видно з таблиці, прогнозування має місце зі збереженням точності приблизно на 4-5 днів, потім за моделлю йде експоненційне збільшення хворих, а з часом і померлих. Тому потрібно постійно корегувати дані й намагатися перерахувати всі коефіцієнти.

Висновок

У курсовій роботі досліджені різні моделі поширення вірусних інфекцій. Розглянуті позитивні та негативні сторони цих моделей. Можна зробити висновок, що *SEIRD* – модель реальніше прогнозує поведінку хвороби, актуальної тепер. Прогнозування епідемії коронавірусної інфекції у рамках розглянутих моделей є непростим завданням і результати математичного моделювання дають можливість з деякою точністю роботи прогноз лише на декілька днів, а потім потрібно перераховувати всю модель і корегувати вхідні дані.

Інші моделі можна також використати для прогнозування. *SEIRD* – модель надає найбільшу повноту інформації, але є однією з найскладніших у використанні.

Відмінність реальних результатів відносно змодельованих, зумовлена великою кількістю економічних і соціальних факторів, адже важливу роль може відіграти кожен чинник, котрий динамічно змінюється з часом, а модель потрібно корегувати відносно всього цього. Наприклад, введення карантину - сильно розтягує момент від початку бурхливого інфікування до згасання епідемії. Це добре для медичної системи, тому що збільшує можливість врятувати життя людей.

З іншої сторони, на прикладі Білорусі видно, що не введення карантину збільшує швидкість інфікування населення (коефіцієнт передачі хвороби) і тим самим швидкість виходу з епідемії, але й рівень смертності не буде таким низьким як на даний момент.

На сьогодні, особливо важливе моделювання розповсюдження патогенів, тому що воно дає можливість усвідомити всю небезпеку й підготувати відповідні міри. З деяким часом буде необхідно перевизначити коефіцієнти для CoVid-19, тому що збільшиться кількість статистичних даних. Опрацювання статистики потрібне для того, щоб моделювання змогло надати всю необхідну інформацію для дослідження вірусу й шляхи протидії йому й іншим подібним інфекціям, що дуже важливо.

Література

- [1] Іванків К. С., Щербатий М. В. (2005р.) "Математичне моделювання біологічних та економіко-екологічних процесів" видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, Львів
- [2] <https://towardsdatascience.com/infectious-disease-modelling-beyond-the-basic-sir-model-216369c584c4>
- [3] <https://www.idmod.org/docs/hiv/model-seir.html>
- [4] <http://indico.ictp.it/event/7960/session/3/contribution/19/material/slides/0.pdf>
- [5] <https://index.minfin.com.ua/reference/coronavirus/>
- [6] <https://nfp2b.ru/2020/04/06/modelirovanie-rasprostraneniya-virusa/>
- [7] <https://ru.tradingview.com/covid19/>
- [8] <http://www.astro.tsu.ru/ChIntODY/text/37.html>
- [9] <http://wdc.org.ua/uk/covid19>