РОЗВ’ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ЯКОБІ ТА ГАУСА – ЗЕЙДЕЛЯ

Алгоритми

Лабораторна робота №4

Варіант 7

Виконав: Конча Вадим

Завдання:

Вимоги до виконання роботи

1. Складіть програму для розв'язання СЛАР методом Якобі.

2. Доповніть програму лічильником числа ітерацій та проміжним друком k, $\mathbf{x}^{(k)}$ та загальної похибки наближення $\delta_k = \max_i \left\{ \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \right\}$ після кожної ітерації (k - номер ітерації). Результати повинні мати вигляд охайної таблиці.

3. Іноді ітераційний процес може розбігатися. З метою гарантованого завершення програми навіть у випадку незбіжності до розв'язку, запровадьте в програмі обмеження на максимальну кількість ітерацій. Передбачте виведення відповідного повідомлення про незбіжність ітераційного процесу.

4. Зведіть систему $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ вашого варіанту до вигляду, необхідного для ітерацій.

5. Отримайте розв'язок системи з вашого варіанту з точністю 0.0001, ***попередньо оцінивши*** число необхідних для цього кроків. Порівняйте кількість витрачених для отримання розв'язку ітерацій з її попередньою оцінкою.

6. Для перевірки отриманого результату обчисліть і надрукуйте вектор нев'язок $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$.

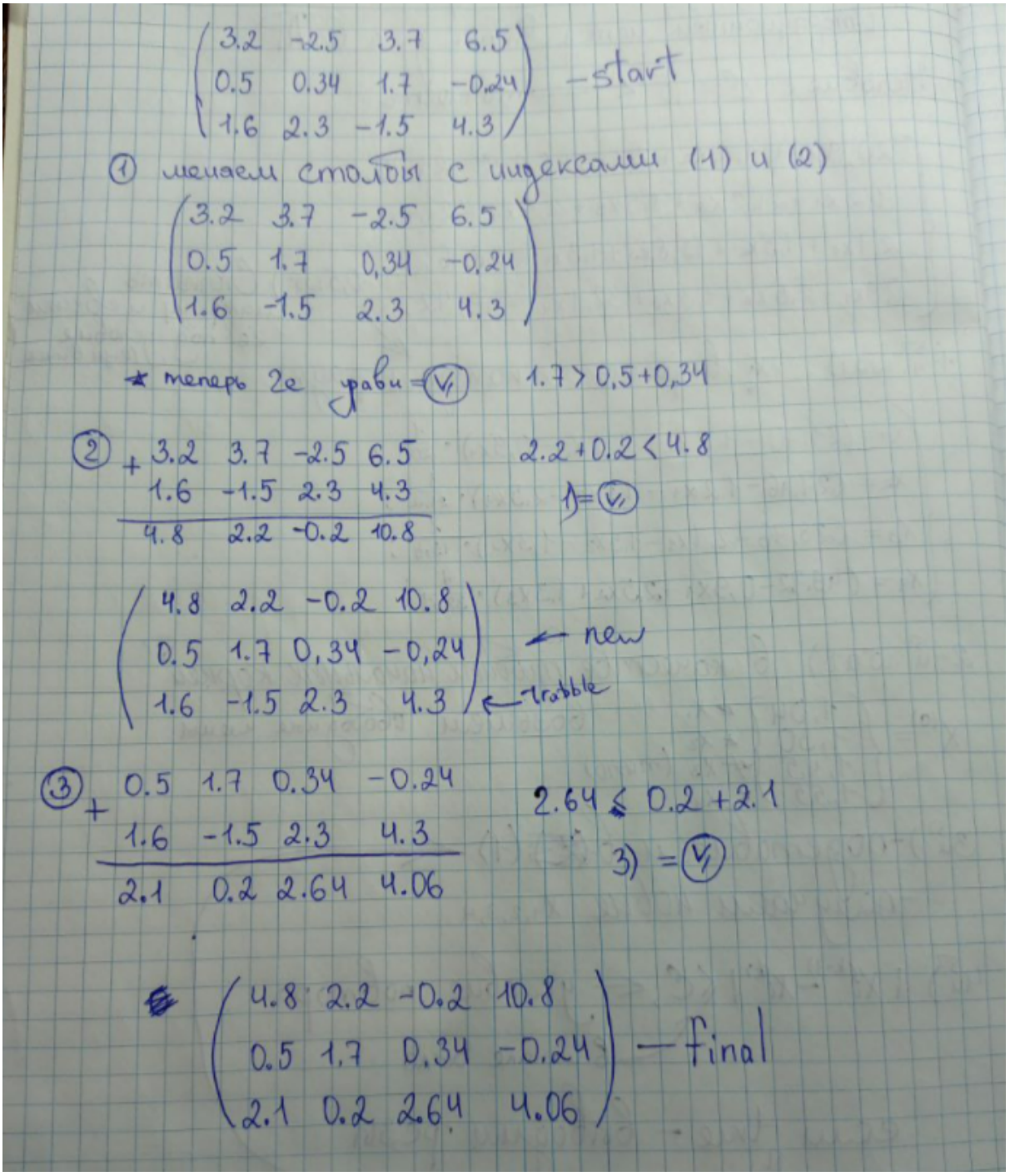
7. Дослідіть, як похибки поточного наближення до розв'язку залежать від номера ітерації. Побудуйте графік залежності $\lg \delta_k$ від k і на його основі з'ясуйте порядок збіжності методу.

8. Модифікуйте вашу програму для реалізації методу Гауса – Зейделя . Розв'яжіть задачу вашого варіанту та порівняйте розв'язок СЛАР і кількість здійснених ітерацій з отриманими раніше результатами методу Якобі.

9. З'ясуйте порядок збіжності методу Гауса – Зейделя.

7.
$$\begin{cases} 3.2x_1 - 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5; \\ 0.5x_1 + 0.34x_2 + 1.7x_3 = -0.24; \\ 1.6x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 = 4.3. \end{cases}$$

Підготовка матриці:



Код(до п.8):

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <stdlib.h> // max

using namespace std;
```

```
double E = 0.0001;
double x1, x2, x3;
double SAFEx1, SAFEx2, SAFEx3;
vector <double> x1TAB, x2TAB, x3TAB; //сюда будем писать историю итерации, для вывода

//start --- vector <double> first{ 3.2, -2.5, 3.7, 6.5 }, second{ 0.5, 0.34, 1.7, -0.24 }, third{ 1.6, 2.3, -1.5, 4.3 };
vector <double> first{ 4.8 , 2.2, -0.2, 10.8 }, second{ 0.5, 1.7, 0.34, -0.24 }, third{ 2.1, 0.2, 2.64, 4.06};
// ax1 + bx2 + cx3 = d; это коефы [a,b,c,d] ,
                    //                  что {0,1,2,3}

void x_calc()
{
        SAFEx1 = x1; x1TAB.push_back(SAFEx1);
        SAFEx2 = x2; x2TAB.push_back(SAFEx2);
        SAFEx3 = x3; x3TAB.push_back(SAFEx3);

        x1 = (first[3] - first[1] * SAFEx2 - first[2] * SAFEx3) / first[0];
        //a это уравнение x1 = (d - bx2 - cx3) / a

        x2 = (second[3] - second[0] * SAFEx1 - second[2] * SAFEx3) / second[1];
        //a это уравнение x2 = (d - ax1 - cx3) / b

        x3 = (third[3] - third[1] * SAFEx2 - third[0] * SAFEx1) / third[2];
        //a это уравнение x3 = (d - bx2 - ax1) / c
}
//даёт нам новые иксы и в сейве старые иксы
double justFUNCTION(vector <double> sho)
{
        return sho[0] * x1 + sho[1] * x2 + sho[2] * x3;
}
void printQ(vector <double> first)
{
        cout << first[0] << "x1 + " << first[1] << "x2 + " << first[2] << "x3 = " << first[3] << endl;
}
//банальный вывод для проверки уравнений
```

```
void uslovieALL()
{
	bool a, b, c;
	if ((abs(first[1]) + abs(first[2])) / abs(first[0]) > 1)
	{
		cout << "errMOMENT 1  " << (abs(first[1]) + abs(first[2])) /
abs(first[0]) << endl;
		a = true;
	}
	else a = false;
	//проверка первого уравнения

	if ((abs(second[0]) + abs(second[2])) / abs(second[1]) > 1)
	{
		cout << "errMOMENT 2  " << (abs(second[0]) + abs(second[2]))
<< endl;
		b = true;
	}
	else b = false;
	//проверка второго уравнения

	if ((abs(third[1]) + abs(third[0])) / abs(third[2]) > 1)
	{
		cout << "errMOMENT 3  " << (abs(third[1]) + abs(third[0])) <<
endl;
		c = true;
	}
	else c = false;
	//проверка третьего уравнения

	if (
		a == true
		||
		b == true
		||
		c == true
		)
	{
		cout << endl << "KOEFS are invalid." << endl;
```

```
	}
}
//проверка всех уравнений

int main()
{
	uslovieALL(); //выводит сообщение, если коэфициенты
неподходящие, и показывает где конкретно трабблы
	//x(0) - нулевая итерация
	x1 = first[3];
	x2 = second[3];
	x3 = third[3];


	int limitation = 0;
	while
		(
		abs( x1 - SAFEx1 ) >= E
		&
		abs( x2 - SAFEx2 ) >= E
		&
		abs( x3 - SAFEx3 ) >= E
		) //условием повтора - является проверка точности
	{
		x_calc(); //подсчёт иксов
		limitation += 1;//для пункта 3(бесполезная штука)

		if (limitation > 20)
		{
			cout << "\nmax limit of limitations ERROR" << endl;
			exit(0);
		}
	}

	x1TAB.push_back(SAFEx1);
	x2TAB.push_back(SAFEx2);
	x3TAB.push_back(SAFEx3);
	//запись последних иксов (последней итерации)

	//вывод
```

```
	cout << "\n" << "0" << " iteration\t" << "x1 = " << x1TAB[0] << "\tx2 = "
<< x2TAB[0] << "\tx3 = " << x3TAB[0]; //отдельно для нулевого
	for (int i = 1; i < x1TAB.size(); i++)
	{
		cout << "\n" << i << " iteration\t" << "x1 = " << x1TAB[i] << "\tx2 = "
<< x2TAB[i] << "\tx3 = " << x3TAB[i]
			<< "\tFLUFF = " << max(max(abs(x1TAB[i] - x1TAB[i - 1]),
abs(x2TAB[i] - x2TAB[i - 1])), abs(x3TAB[i] - x3TAB[i - 1]))
				;
	}

	//невязка (пункт 6)
	cout << "\nfirst: " << justFUNCTION(first) << "\t real be === " << first[3]
<< "\t NEVAZKA: " << abs(justFUNCTION(first) - first[3])
		<< "\nsecond: " << justFUNCTION(second) << "\t real be === "
<< second[3] << "\t NEVAZKA: " << abs(justFUNCTION(second) - second[3])
		<< "\nthird: " << justFUNCTION(third) << "\t real be === " <<
third[3] << "\t NEVAZKA: " << abs(justFUNCTION(third)- third[3]);
}
```

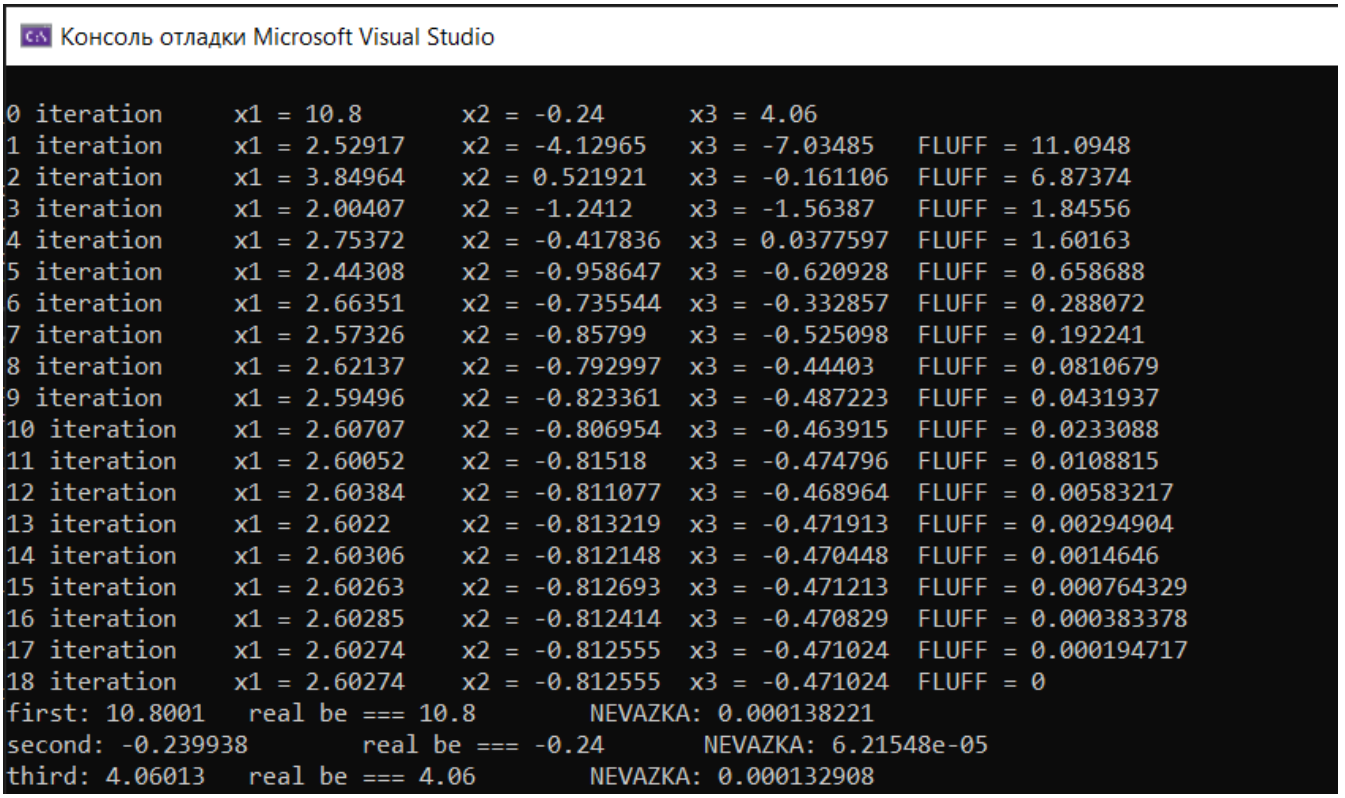
Код(після):

```
void x_calc()
{
    SAFEx1 = x1; x1TAB.push_back(x1);
    SAFEx2 = x2; x2TAB.push_back(x2);
    SAFEx3 = x3; x3TAB.push_back(x3);

    x1 = (first[3] - first[1] * x2 - first[2] * x3) / first[0];
    //а это уравнение x1 = (d - bx2 - cx3) / a

    x2 = (second[3] - second[0] * x1 - second[2] * x3) / second[1];
    //а это уравнение x2 = (d - ax1 - cx3) / b

    x3 = (third[3] - third[1] * x2 - third[0] * x1) / third[2];
    //а это уравнение x3 = (d - bx2 - ax1) / c
}
//даёт нам новые иксы и в сейве старые иксы
```

*Зміни тільки у функції “x_calc”

```
void x_calc()
{
	SAFEx1 = x1; x1TAB.push_back(x1);
	SAFEx2 = x2; x2TAB.push_back(x2);
	SAFEx3 = x3; x3TAB.push_back(x3);

	x1 = (first[3] - first[1] * x2 - first[2] * x3) / first[0];
	//a это уравнение x1 = (d - bx2 - cx3) / a

	x2 = (second[3] - second[0] * x1 - second[2] * x3) / second[1];
	//a это уравнение x2 = (d - ax1 - cx3) / b

	x3 = (third[3] - third[1] * x2 - third[0] * x1) / third[2];
	//a это уравнение x3 = (d - bx2 - ax1) / c
}
```

Вивід(до п.8):

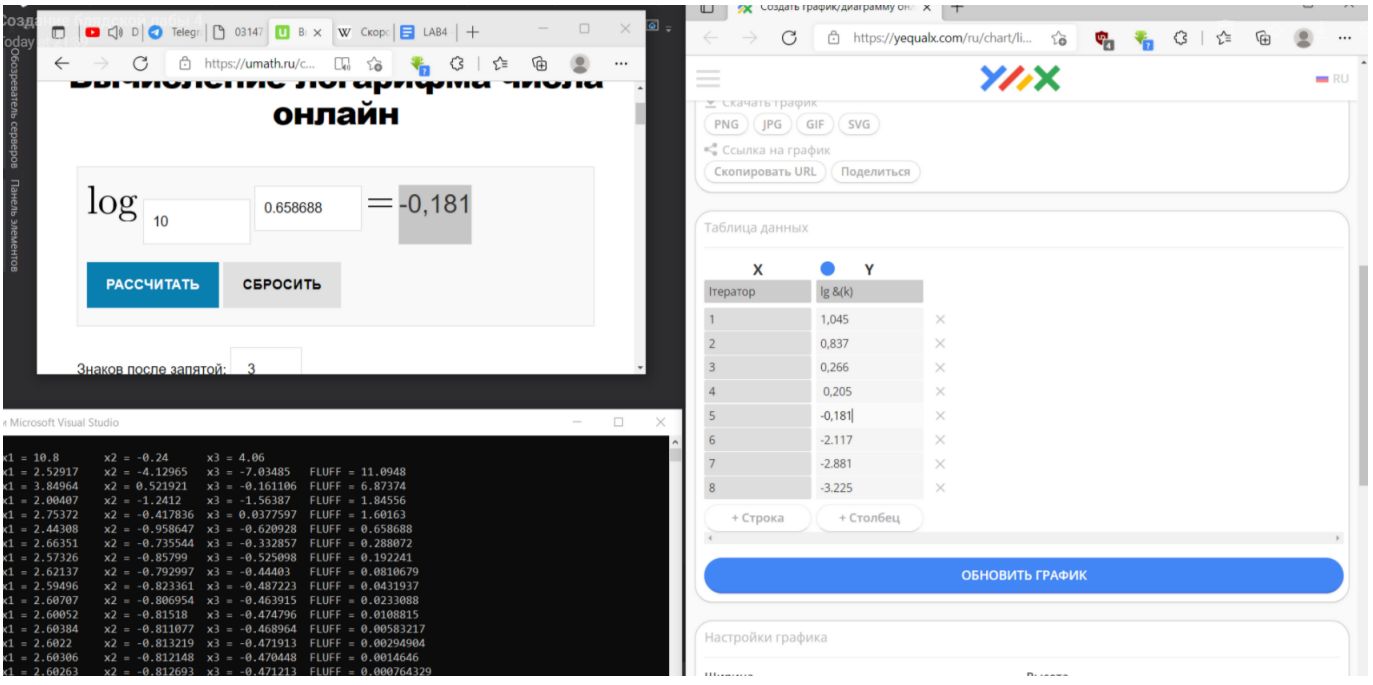


Після редагування коду:

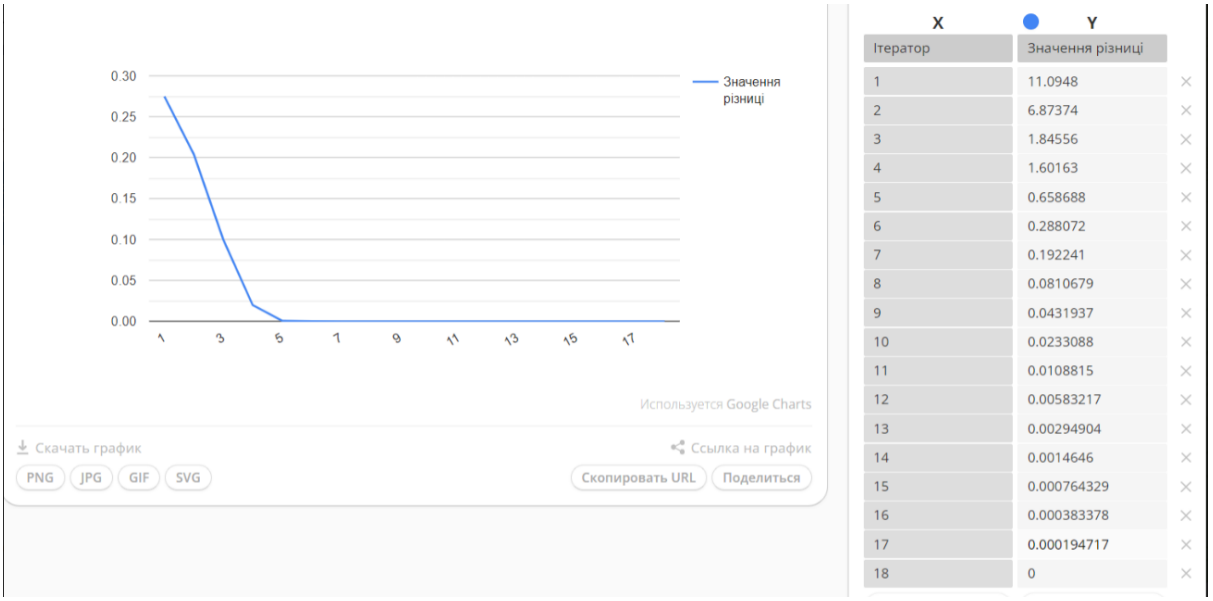
```
Консоль отладки Microsoft Visual Studio

0 iteration     x1 = 10.8       x2 = -0.24      x3 = 4.06
1 iteration     x1 = 2.52917    x2 = -1.69705   x3 = -0.345394  FLUFF = 8.27083
2 iteration     x1 = 3.01342    x2 = -0.958398  x3 = -0.786556  FLUFF = 0.738651
3 iteration     x1 = 2.65649    x2 = -0.765187  x3 = -0.517272  FLUFF = 0.35693
4 iteration     x1 = 2.57916    x2 = -0.796298  x3 = -0.453398  FLUFF = 0.0773352
5 iteration     x1 = 2.59608    x2 = -0.814049  x3 = -0.465513  FLUFF = 0.0177514
6 iteration     x1 = 2.60371    x2 = -0.813871  x3 = -0.471597  FLUFF = 0.00763127
7 iteration     x1 = 2.60337    x2 = -0.812555  x3 = -0.47143   FLUFF = 0.00131539
8 iteration     x1 = 2.60278    x2 = -0.812414  x3 = -0.470967  FLUFF = 0.000595924
9 iteration     x1 = 2.60278    x2 = -0.812414  x3 = -0.470967  FLUFF = 0
first: 10.7998   real be === 10.8        NEVAZKA: 0.000182737
second: -0.239986        real be === -0.24       NEVAZKA: 1.44042e-05
third: 4.06      real be === 4.06        NEVAZKA: 0
```

*знадобилося у два рази меньше ітерацій
*розв’язки схожі

Процес розрахунку для графіку залежності:

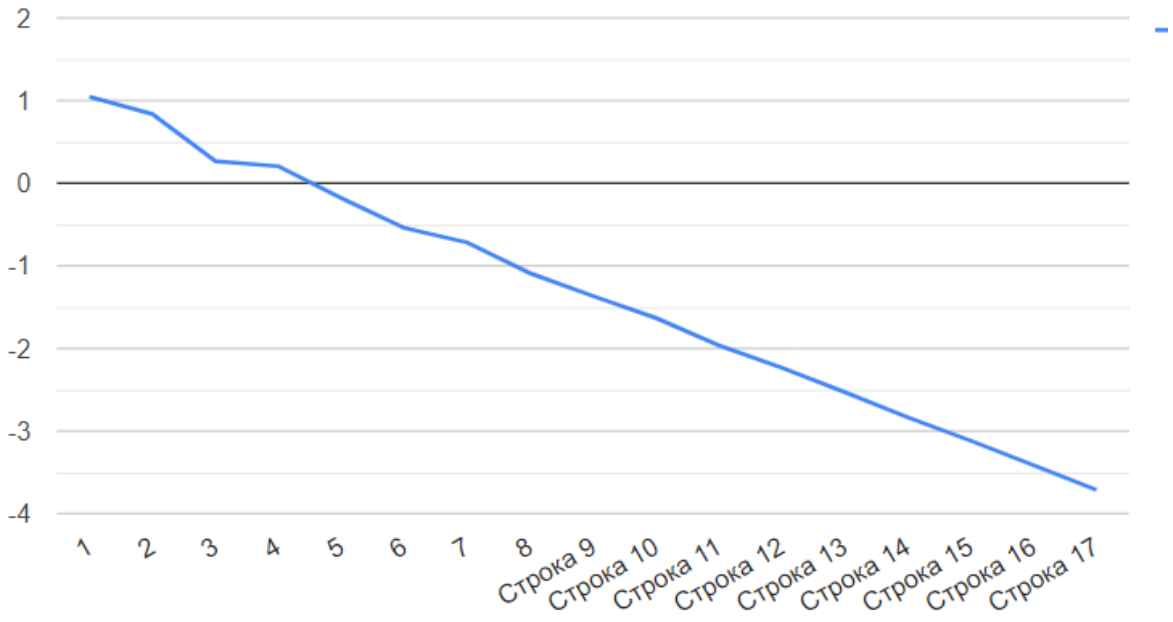


Графік(з даних Якобі - значення різниці\ітератора):

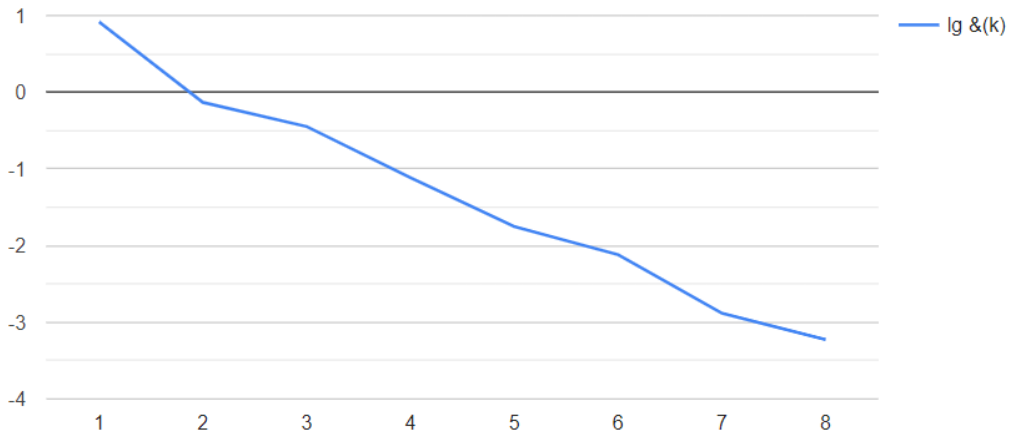


X	Y
Ітератор	Значення різниці
1	11.0948
2	6.87374
3	1.84556
4	1.60163
5	0.658688
6	0.288072
7	0.192241
8	0.0810679
9	0.0431937
10	0.0233088
11	0.0108815
12	0.00583217
13	0.00294904
14	0.0014646
15	0.000764329
16	0.000383378
17	0.000194717
18	0

Графік(з даних Якобі - залежності $\lg \delta_k$):



Графік(з даних методу Зейделя залежності $\lg \delta_k$):



Висновок: з кожною новою ітерацією похибка меньше

Непосредственно скорость сходимости оценивают по тангенсу угла наклона логарифмического графика зависимости $||x_n - x^*||$ от $||x_{n-1} - x^*||$.

Виходячи з цього(дуже приблизно),
порядок збіжності по Якобі tg(a) ≈ f’(x)≈-1
а порядок збіжності по методу Зейделя ≈ -0.3679

Джерела:

Итерационные методы решения СЛАУ: метод Якоби, Зейделя, простой итерации (zaochnik.com)
1.2.1. Метод простой итерации (метод Якоби) (matica.org.ua)
1.2.3. Метод Зейделя (метод Гаусса-Зейделя, метод последовательных замещений) (matica.org.ua)
Скорость сходимости — Википедия (wikipedia.org)
Вычисление логарифма числа онлайн | umath.ru
І посібники