Advanced Topics
Quantum & Classical Mechanics

Παναγιώτης Πρεβεζάνος

1. Ένα σωματίδιο μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς την παρουσία τριβών επάνω σε μια οριζόντια κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας R και άπειρου μήκους.

   Οι συνήθεις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos\phi \\
y &= \rho\sin\phi \\
z &= z
\end{aligned}
$$

   Η Lagrangian του σωματιδίου τότε θα είναι ($V = -mgx = -mg\rho\cos\phi$)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + mg\rho\cos\phi - \lambda(\rho - R)$$

   Οι εξισώσεις Euler-Lagrange δίνουν

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\rho} &= m\rho\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi - \lambda \\
\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) &= -mg\rho\sin\phi \\
m\ddot{z} &= 0 \\
\rho &= R
\end{aligned}
$$

   Με αντικατάσταση της $\rho = R$ στις δύο πρώτες σχέσεις παίρνουμε τελικά

$$
\begin{aligned}
\lambda &= mR\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi \\
\ddot{\phi} &= -\frac{g}{R}\sin\phi \\
m\ddot{z} &= 0
\end{aligned}
$$

   Αρχικά βρίσκεται στη θέση $\phi(0) = 0, z(0) = 0$ με ταχύτητα $\dot{\phi}(0) = \Omega, \dot{z}(0) = v_0$. Η δύναμη που δέχεται αρχικά το σωματίδιο είναι

$$\mathbf{F} = -mg\hat{\boldsymbol{\rho}}(0) = -(mR\Omega^2 + mg)\hat{\boldsymbol{\rho}}(0)$$

   άρα $\Omega = 0$ (είναι $\mathbf{F} = -\lambda\nabla(\rho - R) = -\lambda\hat{\boldsymbol{\rho}}$ κλπ.). Ομοίως αν δεν υπήρχε βαρυτικό πεδίο θα ήταν $\Omega = \sqrt{g/R}$.

   Ενδιαφέρον θα ήταν επίσης να μελετούσαμε την δυναμική του προβλήματος και πιο συγκεκριμένα την δύναμη που δέχεται το σωματίδιο από την επιφάνεια του κυλίνδρου. Οι αρχικές συνθήκες είναι οι προηγούμενες, δηλαδή $\phi(0) = 0, z(0) = 0$ και $\dot{\phi}(0) = \Omega, \dot{z}(0) = v_0$. Στο πρόβλημα αυτό, η δυναμική καθορίζεται κυρίως από την γωνία ϕ (για το z θα είναι προφανώς $z = v_0 t$). Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R}\sin\phi$$

   Πολλαπλασιάζοντας με $\dot{\phi}$ και ολοκληρώνοντας, παίρνουμε το γνωστό “ολοκλήρωμα ενέργειας”

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{g}{R}\cos\phi = E$$

Επιβάλλοντας και τις αρχικές συνθήκες προκύπτει $E = \Omega^2/2 - g/R$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\dot{\phi}^2 = \Omega^2 + \frac{2g}{R}(\cos\phi - 1)$$

Και έτσι η δύναμη που δέχεται το σωματίδιο από τον κύλινδρο είναι:

$$\mathbf{F} = -(m\Omega^2 R + 2mg(\cos\phi - 1) + mg\cos\phi)\hat{\rho} = -(m\Omega^2 R + mg(3\cos\phi - 2))\hat{\rho}$$

Και τώρα τίθεται το ερώτημα: Μπορεί η δύναμη αυτή να μηδενιστεί για κάποια τιμή της γωνίας ϕ; Η απάντηση (αν και αναμενόμενη) δεν είναι τόσο προφανής και θέλει λίγη μελέτη! Στο σημείο αυτό, θα ήταν βολικό να θέσουμε $a = g/\Omega^2 R$ για διαστατική απλοποίηση των εξισώσεων. Μηδενίζουμε τη δύναμη και προκύπτει:

$$\cos\phi_0 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2a}\right)$$

Ας κρατήσουμε αυτό το αποτέλεσμα και ας βρούμε τα όρια της γωνιακής κίνησης από το ολοκλήρωμα ενέργειας. Έχουμε:

$$1 + 2a(\cos\phi - 1) \geq 0 \Rightarrow \cos\phi \geq 1 - \frac{1}{2a}$$

δηλαδή $\phi \in [-\cos^{-1}(1 - 1/2a), \cos^{-1}(1 - 1/2a)]$. Παρατηρούμε ότι η σχέση

$$\cos\phi_0 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2a}\right)$$

δεν μπορεί να ικανοποιηθεί για καμία τιμή της γωνίας ϕ αν $a > 1/2$, αφού η γωνία ϕ_0 που υπολογίσαμε είναι εκτός των ορίων της κίνησης του σωματιδίου! Η μόνη περίπτωση που μπορεί η δύναμη να μηδενιστεί κατά τη διάρκεια της κίνησής του, είναι όταν $1/5 \leq a \leq 1/2$. Τότε, το σωματίδιο φτάνει στη θέση ϕ_0 με $\pi/2 \leq \phi_0 \leq \pi$ και χάνει την επαφή του με τον κύλινδρο. Στην περίπτωση που $a = 1/2$, το σωματίδιο φτάνει οριακά στη θέση $\phi_0 = \pi/2$ ακίνητο! Μπορούμε να υπολογίσουμε επίσης και την ταχύτητα του σωματιδίου όταν φτάσει στη θέση ϕ_0:

$$\dot{\phi}_0 = \Omega\sqrt{\frac{1-2a}{3}}$$

Συνοψίζοντας, αν $\Omega \geq \sqrt{5g/R}$ το σωματίδιο εκτελεί με ασφάλεια κυκλικές κινήσεις απεριόριστα. Αν $\sqrt{2g/R} \leq \Omega < \sqrt{5g/R}$, το σωματίδιο χάνει την επαφή του στη θέση ϕ_0 (μηδενισμός της δύναμης επαφής) και αν $\Omega < \sqrt{2g/R}$, τότε το σωματίδιο ταλαντώνεται μεταξύ των θέσεων $-\cos^{-1}(1 - 1/2a)$ και $\cos^{-1}(1 - 1/2a)$.

2. Θεωρήστε την Λαγκραντζιανή πυκνότητα (Lagrangian density):

$$\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\psi_t - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^* \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi - V\psi^*\psi$$

όπου $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ είναι ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο (κυματοσυνάρτηση/wavefunction) και ψ^* το συζυγές του πεδίο και $x^\mu = (t, \boldsymbol{x})$ με $\mu = 0, 1, 2, 3$. Θεωρήστε μεταβολές του ψ και του ψ^*:

$$\tilde{\psi} = \psi + \epsilon\delta\psi$$
$$\tilde{\psi}^* = \psi^* + \xi\delta\psi^*$$

γράψτε την δράση:

$$S = \int \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu\psi, \partial_\mu\psi^*)\, d^4x \tag{1}$$

και απαιτώντας οι πρώτης τάξης μεταβολές να είναι μηδενικές, δηλαδή $\partial S/\partial\epsilon|_{\epsilon=0} = \partial S/\partial\xi|_{\xi=0} = 0$, συνάγετε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για το πεδίο ψ και το συζυγές του ψ^*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \right) = 0$$

Οι οποίες οδηγούν φυσικά στην εξίσωση Shrodinger για το πεδίο (κυματοσυνάρτηση) ψ και το συζυγές του ψ^*. Μπορείτε, κάνοντας την αναλογία με την Lagrangian απλού σωματιδίου, να βρείτε την διατηρούμενη ποσότητα J^μ ($\partial_\mu J^\mu = 0$), από κάποια συμμετρία της δράσης S, η οποία θα πρέπει προφανώς να οδηγεί σε εξίσωση συνέχειας; Βρείτε την αντίστοιχη πυκνότητα $\rho = j^0$ και το αντίστοιχο ρεύμα $\boldsymbol{j}$ τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

Σας θυμίζει κάτι;

Σημείωση: Είναι $\partial_\mu = (\partial_t, \boldsymbol{\nabla})$.

Θεωρούμε τις μεταβολές της ψ και ψ^* που γράψαμε παραπάνω και έχουμε:

$$\tilde{S} = \int \mathcal{L}(\psi + \epsilon\delta\psi, \partial_\mu\psi + \epsilon\partial_\mu\delta\psi, \psi^* + \xi\delta\psi^*, \partial_\mu\psi^* + \xi\partial_\mu\delta\psi^*) d^4x =$$

$$\int \left[\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu\psi, \partial_\mu\psi^*) + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu(\delta\psi) + \xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*}\delta\psi^* + \xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)}\partial_\mu(\delta\psi^*) \right] d^4x + \mathcal{O}(\epsilon^2, \xi^2) =$$

$$S + \epsilon \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right)\delta\psi \right] d^4x + \xi \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*}\delta\psi^* + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)}\delta\psi^* \right) \right.$$

$$\left. - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)} \right)\delta\psi^* \right] d^4x + \mathcal{O}(\epsilon^2, \xi^2) =$$

$$S + \epsilon \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right) \right] \delta\psi \, d^4x + \xi \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)} \right) \right] \delta\psi^* \, d^4x + \mathcal{O}(\epsilon^2, \xi^2)$$

Απαιτώντας τώρα οι πρώτης τάξης μεταβολές της S να είναι μηδενικές, ήτοι:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \left.\frac{\partial S}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0$$

λαμβάνουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για τα πεδία ψ και ψ^*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \right) = 0$$

Βρίσκουμε τις παραγώγους:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -V\psi^*$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = \partial_t(i\hbar\psi^*) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^* \right) = i\hbar\psi^*_t - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar\psi_t - V\psi$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla}\psi^* \right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$$

και τελικά λαμβάνει κανείς την εξίσωση Shrodinger για το πεδίο/κυματοσυνάρτηση ψ και το αντίστοιχο συζυγές του πεδίο ψ^* μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange:

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi$$

$$-i\hbar\psi_t^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι η δράση παραμένει αναλλοίωτη αν αλλάξουμε τα πεδία κατά έναν παράγοντα φάσης $a \in \mathbb{R}$ (Gauge Transformation), δηλαδή:

$$\tilde{\psi} = e^{-ia/\hbar}\psi$$

$$\tilde{\psi}^* = e^{ia/\hbar}\psi^*$$

ή σε πρώτη τάξη:

$$\tilde{\psi} = (1 - ia/\hbar)\psi \tag{2}$$

$$\tilde{\psi}^* = (1 + ia/\hbar)\psi^* \tag{3}$$

Η δράση είναι

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \int \mathcal{L}(\psi - ia\psi/\hbar, \partial_\mu\psi - ia\partial_\mu\psi/\hbar, \psi^* + ia\psi^*/\hbar, \partial_\mu\psi^* + ia\partial_\mu\psi^*/\hbar)d^4x \\
&= \int \left[\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, \psi^*, \partial_\mu\psi^*) - \frac{ia}{\hbar}\psi\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{ia}{\hbar}\partial_\mu\psi\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} + \frac{ia}{\hbar}\psi^*\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi^*} + \frac{ia}{\hbar}\partial_\mu\psi^*\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)} \right] d^4x + \mathcal{O}(a^2) \\
&= S + a\int \left[\frac{i}{\hbar}\psi^*\partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi^*)}\right) + \frac{i}{\hbar}\partial_\nu\psi^*\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi^*)}\right) - \frac{i}{\hbar}\psi\partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)}\right) - \frac{i}{\hbar}\partial_\nu\psi\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)}\right) \right] d^4x + \mathcal{O}(a^2) \\
&= S + a\int \partial_\nu\left(\frac{i}{\hbar}\psi^*\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi^*)} - \frac{i}{\hbar}\psi\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)} \right) d^4x + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned}$$

Και συνεπώς

$$\left.\frac{dS}{da}\right|_{a=0} = \int \partial_\nu j^\nu d^4x \tag{4}$$

με το ακόλουθο ρεύμα j^ν:

$$j^\nu = \frac{i}{\hbar}\psi^*\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi^*)} - \frac{i}{\hbar}\psi\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)} \tag{5}$$

Αν θέλουμε οι μετασχηματισμοί (2) και (3) να είναι συμμετρία της δράσης, τότε θα είναι:

$$\left.\frac{dS}{da}\right|_{a=0} = \int \partial_\nu j^\nu d^4x = 0$$

δηλαδή θα ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας $\partial_\nu j^\nu = 0$, όπου j^ν το διατηρούμενο ρεύμα. Ισοδύναμα, σε $3-$διάστατη διαφορική μορφή γράφεται ως εξής:

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

όπου $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \equiv \partial_i j^i$ και αντίστοιχα σε ολοκληρωτική μορφή ως

$$\int_D \frac{\partial j^0}{\partial t} d^3x = -\int_D \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}\, d^3x$$
$$= -\oint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (6)$$

όπου S η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο D και $d\boldsymbol{S}$ το στοιχείο επιφάνειας με κατεύθυνση προς το εξωτερικό της επιφάνειας και κάθετο στο εκάστοτε στοιχείο της επιφάνειας. Έτσι, θεωρώντας τον όγκο σταθερό (ανεξάρτητο του χρόνου), θα ισχύει ο νόμος διατήρησης

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V j^0 d^3x = 0$$

θεωρώντας ότι τα πεδία μηδενίζονται στο σύνορο του χωρίου[1], V ο ολικός όγκος του φυσικού συστήματος και

$$Q = \int_V j^0 d^3x$$

το ολικό φορτίο ή το αποκαλούμενο φορτίο Noether. Στην περίπτωση μας, δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς, με χρήση της (5) ότι το αντίστοιχο "φορτίο" είναι η πιθανότητα P:

$$P = \int |\psi|^2 d^3x$$

με $j^0 \equiv \rho = \psi^*\psi = |\psi|^2$ ($Q \equiv P$) και το αντίστοιχο διάνυσμα ροής $\boldsymbol{j}$ θα είναι το γνωστό μας και πάλι

$$\boldsymbol{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*)$$

ή πιο "κβαντομηχανικά" γραμμένο ως

$$\boldsymbol{j} = \mathrm{Re}(\psi^*\boldsymbol{v}\psi)$$

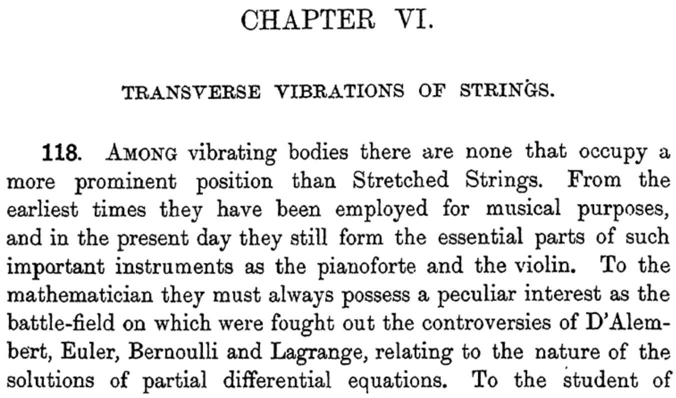
όπου $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/m = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}/m$ ο κβαντομηχανικός τελεστής της ταχύτητας. Φαίνεται επίσης και η ομοιότητα με τον κλασσικό υδροδυναμικό τύπο $\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v} = |\psi|^2\boldsymbol{v}$, τοποθετώντας καταλλήλως τα αντίστοιχα μεγέθη/τελεστές και παίρνοντας το πραγματικό μέρος της αντίστοιχης ποσότητας, ώστε το αποτέλεσμα να είναι πραγματικό και να έχει φυσική σημασία.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι εξέχουσας σημασίας. Ας συνοψίσουμε τι είναι αυτό που μόλις κάναμε. Από την Lagrangian την οποία μπορεί κανείς να κατασκευάσει, ώστε οι πεδιακές εξισώσεις Euler-Lagrange να του δίνουν την εξίσωση Shrodinger[2], μπορούμε βρίσκοντας συμμετρίες της δράσης (1) να βρούμε μέσω των σχέσεων (4) και (5) τις διατηρούμενες ποσότητες και την αντίστοιχη εξίσωση συνέχειας που αυτές ικανοποιούν. Τώρα βεβαίως είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε και φυσικά αυτό το αποτέλεσμα, το οποίο δεν είναι τίποτε άλλο από την διατήρηση της πιθανότητας. Η κυματοσυνάρτηση αλλάζει με τέτοιον τρόπο με την πάροδο του χρόνου, ώστε η ολική πιθανότητα να διατηρείται.

Μπορείτε να κατασκευάσετε Hamiltonian από αυτή τη Lagrangian και να γράψετε μέσω αγκυλών Poisson την δυναμική εξέλιξη του φυσικού συστήματος; Πώς θα βρίσκατε τις διατηρούμενες ποσότητες τότε; Σκεφτείτε επίσης πώς θα μπορούσατε να το κάνετε και στο παρακάτω πρόβλημα της μονοδιάστατης χορδής.

[1] Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να κάνουμε τον όγκο άπειρο, ώστε ο επιφανειακός όρος της (6) να μηδενίζεται ούτως ή άλλως εξαιτίας του μηδενισμού των πεδίων —ως κυματοσυναρτήσεις βεβαίως— στο άπειρο.

[2] Για να το κάνει κανείς αυτό πρέπει να θεωρήσει τα δύο —συζυγή— πεδία $\psi(x^\mu)$ και $\psi^*(x^\mu)$ ως ξεχωριστά και ανεξάρτητα πεδία της Lagrangian $\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu\psi, \partial_\mu\psi^*)$. Οι πεδιακές εξισώσεις Euler-Lagrange τότε, θα είναι δύο, μια για το πεδίο ψ και μια για το πεδίο ψ^*.

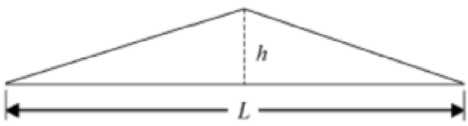


CHAPTER VI.

TRANSVERSE VIBRATIONS OF STRINGS.

118. AMONG vibrating bodies there are none that occupy a more prominent position than Stretched Strings. From the earliest times they have been employed for musical purposes, and in the present day they still form the essential parts of such important instruments as the pianoforte and the violin. To the mathematician they must always possess a peculiar interest as the battle-field on which were fought out the controversies of D'Alembert, Euler, Bernoulli and Lagrange, relating to the nature of the solutions of partial differential equations. To the student of

Σχήμα 1: Από το Theory of Sound του Rayleigh.



Σχήμα 2: Το αρχικό τριγωνικό σχήμα της χορδής.

3. Ανασηκώνουμε το μέσο μιας τεντωμένης χορδής που είναι στερεωμένη στα άκρα της. Θεωρούμε ότι τα άκρα είναι στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$ και ότι η ανύψωση γίνεται κατά $h = 1$ (βλ. Σχήμα 2). Μέσω της λύσης του πολύ όμορφου αυτού προβλήματος, δείξτε όπως και ο Euler (1737) ότι:

$$S_o = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad S_e = \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

αφού πρώτα δείξετε ότι $S_e = S/4$.

Λαμβάνοντας $c = 1$ και λόγω της συμμετρίας στον άξονα x και της μηδενικής αρχικής ταχύτητας, διαπιστώνουμε ότι η χορδή θα έχει σχήμα:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2} \cos\frac{n\pi t}{2}$$

όπου

$$a_n = \int_{-1}^{1} \psi(x,0) \cos\frac{n\pi x}{2} dx = \frac{8}{n^2\pi^2}, n = 1, 3, 5, \ldots$$

Η μείωση των πλατών κατά $1/n^2$ αναμένεται λόγω της ασυνέχειας της παραγώγου της αρχικής μετατόπισης στο $x = 0$.

$$\psi(0,0) = 1 = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2}$$

Συνεπώς:

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Προφανώς ισχύει ότι:

$$4\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

δηλαδή $S_e = S/4$ και $S_o = 3S/4$. Έτσι βγάζουμε το πολύ όμορφο και ενδιαφέρον αποτέλεσμα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Κατόπιν του εύλογου ενθουσιασμού σας, υπολογίστε το ποσοστό της ολικής αρχικής δυναμικής ενέργειας της χορδής που “μοιράστηκε” στις πρώτες τρεις αρμονικές. Ερμηνεύστε με φυσικά επιχειρήματα το αποτέλεσμα σας.

Σκεφθείτε επίσης πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε αθροίσματα της μορφής:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N} > 1$$

Συνεχίζεται...