

Υπολογιστική Φυσική

1^η Εργασία

Πέππας Ευάγγελος (202200124)

Πρόβλημα 9 (Λύση)

Το πρώτο βήμα για να λύσουμε το πρόβλημα είναι να μετασχηματίσουμε μέσω ενός μετασχηματισμού $T(U)$, τους τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή σε τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την κατανομή πυκνότητας πιθανότητας Rayleigh:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Βρίσκουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F(x) = \int_0^x \frac{x'}{\sigma^2} e^{-x'^2/2\sigma^2} dx' = \left[-e^{-x'^2/2\sigma^2} \right]_0^x = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}$$

Για να βρούμε τον μετασχηματισμό:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(T(U) \leq x) = P(U \leq T^{-1}(x)) = T^{-1}(x)$$

Συνεπώς, πρέπει:

$$T(x) = F^{-1}(x) = \left[\ln \left(\frac{1}{(1-x)^{2\sigma^2}} \right) \right]^{1/2}$$

Φτιάχνουμε τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$, ορίζουμε τις κατάλληλες συναρτήσεις και εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό (ο κώδικας θα επισυναφθεί σε αρχείο .ipynb).

Στο τέλος, για να υπολογίσουμε το ποσοστό των κυμάτων που έχουν ύψος $3m < x < 5m$:

$$P(3 < x < 5) = \int_3^5 f(x) dx = F(5) - F(3) \approx 0.28$$