

Εργασία 3

100 μονάδες (10% της συνολικής βαθμολογίας)

Bonus 10% με τη χρήση LaTeX

Οι απαντήσεις να παραδίδονται σε:

* **zip**, που περιλαμβάνει τα αρχεία **tex** και **pdf** (που έχει παραχθεί από το tex), αν χρησιμοποιηθεί LaTeX

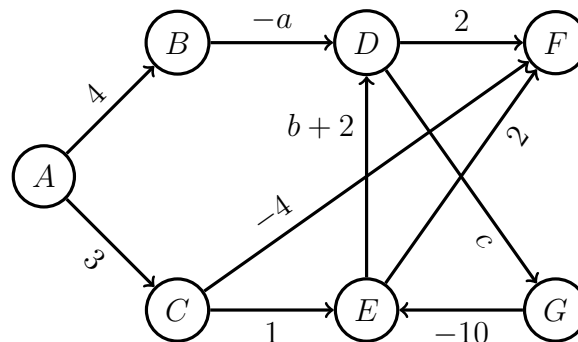
* **ένα pdf**, σε κάθε άλλη περίπτωση

(Τηρήστε τη σειρά των ασκήσεων και των υπο-ερωτημάτων όπως δίνονται. Φροντίστε, στην περίπτωση χειρογράφου, το κείμενο να είναι ευανάγνωστο.)

* Σημείωση: Όπου χρησιμοποιείτε γνωστές σχέσεις / ιδιότητες, να αναφέρετε την πηγή (π.χ. αρχείο διάλεξης L02 - σελ. 9).

Θέμα 1 [10 μονάδες]

Εκτελέστε τον αλγόριθμο Bellman-Ford με είσοδο το παρακάτω γράφημα, ξεκινώντας από την κορυφή A , όπου a, b, c (με αυτή τη σειρά) είναι τα 3 τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας (εκτός αν κάποιο από τα a, c είναι 0, στην οποία περίπτωση αντικαταστήστε το με 1):



Θέμα 2 [20 μονάδες]

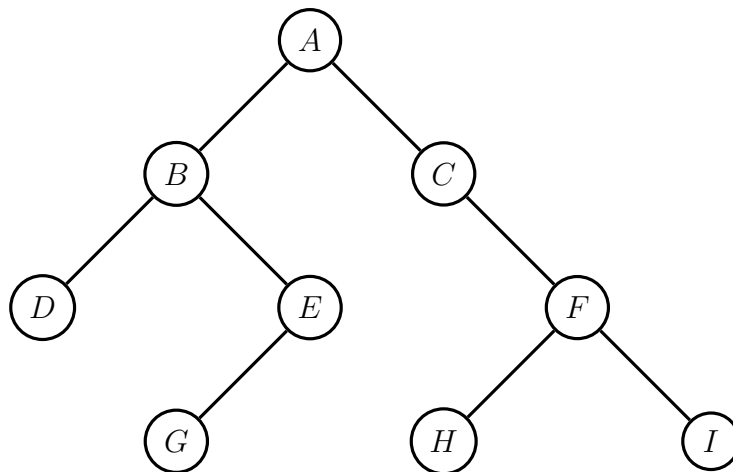
Μία συμβολοσειρά λέγεται παλινδρομική, αν διαβάζεται το ίδιο από τα αριστερά προς τα δεξιά και ανάποδα (π.χ. «acbbabbbca»). Σχεδιάστε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού χρόνου $O(n^2)$ που να παίρνει ως είσοδο μία συμβολοσειρά μήκους n και να επιστρέφει το μέγιστο μήκος μίας παλινδρομικής υποσυμβολοσειράς της και την πρώτη θέση στην οποία ξεκινά μία παλινδρομική υποσυμβολοσειρά που επιτυγχάνει αυτό το μήκος. Για παράδειγμα, για τη συμβολοσειρά «aabbbccc», το ζητούμενο μήκος είναι 3 (έχουμε τις υποσυμβολοσειρές «bbb» και «ccc») και η ζητούμενη θέση είναι 3, αφού η πρώτη από αυτές με το μέγιστο μήκος, η «bbb», ξεκινά στη θέση 3.

Σημείωση: Μία υποσυμβολοσειρά πρέπει να αποτελείται από συνεχόμενα στοιχεία της αρχικής συμβολοσειράς. Για παράδειγμα, η «ab» είναι υποσυμβολοσειρά της «abc», αλλά η «ac» δεν είναι.

Θέμα 3 [20 μονάδες]

Ένα σύνολο S από κορυφές ενός γραφήματος G λέγεται ανεξάρτητο σύνολο του G , αν δεν υπάρχει ακμή στο G μεταξύ δύο κορυφών του S . Ένα ανεξάρτητο σύνολο S του G λέγεται μέγιστο, αν δεν υπάρχει άλλο ανεξάρτητο σύνολο S' του G , με $|S'| > |S|$.

- α) Σχεδιάστε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού που να παίρνει ως είσοδο ένα δυαδικό δέντρο και να επιστρέφει ένα μέγιστο ανεξάρτητο σύνολό του και βρείτε τη χρονική του πολυπλοκότητα. [15 μονάδες]
- β) Εκτελέστε τον αλγόριθμό σας με είσοδο το παρακάτω δέντρο:



[5 μονάδες]

Θέμα 4 [20 μονάδες]

Σχεδιάστε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού που να παίρνει ως είσοδο ένα πεπερασμένο $A \subseteq \mathbb{Z}$ και να αποφασίζει αν υπάρχει $B \subseteq A$, τέτοιο ώστε τα αθροίσματα των στοιχείων του B και του $A \setminus B$ να είναι ίσα.

Θέμα 5 [30 μονάδες]

Έστω m, n θετικοί ακέραιοι και πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Θεωρήστε την εξής διαδικασία: Ξεκινάτε στη θέση $[1, 1]$ του A και θέλετε να καταλήξετε στη θέση $[m, n]$. Κάθε φορά μπορείτε να κινηθείτε είτε ένα βήμα κάτω είτε ένα βήμα δεξιά. Για κάθε τέτοια διαδρομή ορίζουμε ως άθροισμα της διαδρομής το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα που βρίσκονται στις θέσεις από τις οποίες διέρχεται η διαδρομή. Για παράδειγμα, το άθροισμα της διαδρομής $[1, 1], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 3], [3, 4]$ στον παρακάτω πίνακα είναι το άθροισμα των κόκκινων στοιχείων, δηλαδή 33.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 \\ 12 & 6 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

- α) Σχεδιάστε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού πολυωνυμικού χρόνου που να υπολογίζει το μέγιστο δυνατό άθροισμα οποιασδήποτε διαδρομής από τη θέση $[1, 1]$ στη θέση $[m, n]$ και βρείτε τη χρονική του πολυπλοκότητα. [15 μονάδες]

- β) Υποθέστε επιπλέον ότι τα στοιχεία του A είναι ακέραιοι. Σχεδιάστε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού που, για δοθέν άθροισμα $S \in \mathbb{Z}$, να υπολογίζει το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών από τη θέση $[1, 1]$ στη θέση $[m, n]$ που έχουν άθροισμα ακριβώς S και βρείτε τη χρονική του πολυπλοκότητα. **[15 μονάδες]**