

Εργασία 1

100 μονάδες (10% της συνολικής βαθμολογίας)

Bonus 10% με τη χρήση LaTeX

+5 ημέρες για εκπρόθεσμη υποβολή, με ποινή -20%

Οι απαντήσεις να παραδίδονται σε:

* **zip**, που περιλαμβάνει τα αρχεία **tex** και **pdf** (που έχει παραχθεί από το tex),
αν χρησιμοποιηθεί LaTeX

* ένα pdf, σε κάθε άλλη περίπτωση

(Τηρήστε τη σειρά των ασκήσεων και των υπο-ερωτημάτων όπως δίνονται.
Φροντίστε, στην περίπτωση χειρογράφου, το κείμενο να είναι ευανάγνωστο.)

* Σημείωση: Όπου χρησιμοποιείτε γνωστές σχέσεις / ιδιότητες, να αναφέρετε την πηγή (π.χ. αρχείο διάλεξης L02 - σελ. 9).

Θέμα 1 [20 μονάδες]

Προσδιορίστε την τάξη (Θ) των ακόλουθων αναδρομικών εξισώσεων.
Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. $T(n) = T(n-1) + n$

2. $T(n) = T(\sqrt{n}) + \log n$

3. $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3$

4. $T(n) = \frac{4}{3}T(n^{3/4}) + \log n$

5. $T(n) = 16T(\frac{n}{8}) + n^{2/3}$

Θέμα 2 [20 μονάδες]

Να δώσετε ακριβή λύση για τις ακόλουθες αναδρομικές εξισώσεις, δίνοντας την τάξη τους (Θ).
Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. $T(n) = 5T(n-1) - 6T(n-2)$, $T(0) = 3$ και $T(1) = 11$

2. $T(n) = 5T(n-1) - 8T(n-2) + 4T(n-3)$, $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ και $T(2) = 5$

Θέμα 3 [10 μονάδες]

Εφαρμόστε αναδρομικό αλγόριθμο πολλαπλασιασμού ακεραίων που χρησιμοποιεί την τεχνική του Gauss (δείτε L7 από τις διαλέξεις) και δείξτε τα ενδιάμεσα βήματα εκτέλεσής του για τον υπολογισμό του γινομένου $P = (2000 + 130x + 52y)(1500 + 264x + 83z)$ όπου x, y, z είναι τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας (συνολικά 4 ψηφία για κάθε αριθμό στην πράξη του πολλαπλασιασμού).

Θέμα 4 [30 μονάδες]

Θυμηθείτε το πρόβλημα της εύρεσης του αριθμού των αντιστροφών (δείτε L6 από τις διαλέξεις). Σας δίνεται μια ακολουθία από n αριθμούς a_1, \dots, a_n οι οποίοι υποθέτουμε ότι διαφέρουν μεταξύ τους. Ας ονομάσουμε ένα ζευγάρι **σημαντική αντιστροφή** αν $i < j$ και $a_i > 2a_j$. Δώστε έναν αλγόριθμο χρόνου $O(n \log n)$ που μετρά το πλήθος των σημαντικών αντιστροφών σε ένα μονοδιάστατο πίνακα.

Θέμα 5 [20 μονάδες]

Γράψτε έναν αλγόριθμο τύπου 'Διαίρει-και-Κυρίευε' που βρίσκει τη μέγιστη διαφορά μεταξύ οποιονδήποτε δύο στοιχείων ενός δοσμένου πίνακα n αριθμών σε χρόνο $O(n)$. Για παράδειγμα, για τον πίνακα $A = [3.5, 10, -2, \pi, -7.2]$, ο αλγόριθμός σας πρέπει να επιστρέφει $10 - (-7.2) = 10 + 7.2 = 17.2$. Δικαιολογείστε σύντομα και περιεκτικά ότι ο αλγόριθμός σας είναι σωστός και ότι έχει τον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης. **Σημείωση:** Για να λάβετε όλες τις μονάδες του ερωτήματος, η απάντησή σας πρέπει να βασίζεται αποκλειστικά στη μέθοδο 'Διαίρει-και-Κυρίευε'. Μέρος μόνο των μονάδων θα δοθεί για λύσεις τύπου 'Διαίρει-και-Κυρίευε' που έχουν χρόνο εκτέλεσης $O(n \log n)$.