Εργασία 2

100 μονάδες (10% της συνολικής βαθμολογίας)
Bonus 10% με τη χρήση LaTeX
+5 ημέρες για εκπρόθεσμη υποβολή, με ποινή -20%

Οι απαντήσεις να παραδίδονται σε:
* **zip**, που περιλαμβάνει τα αρχεία **tex <u>και</u> pdf** (που έχει παραχθεί από το tex), αν χρησιμοποιηθεί LaTeX
* **<u>ένα</u> pdf**, σε κάθε άλλη περίπτωση

(Τηρήστε τη σειρά των ασκήσεων και των υπο-ερωτημάτων όπως δίνονται. Φροντίστε, στην περίπτωση χειρογράφου, το κείμενο να είναι ευανάγνωστο.)

∗ *Σημείωση: Όπου χρησιμοποιείτε γνωστές σχέσεις / ιδιότητες, να αναφέρετε την πηγή (π.χ. αρχείο διάλεξης L02 - σελ. 9).*

Θέμα 1 [20 μονάδες]

Για κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις, αποφασίστε αν είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής, δώστε μία σύντομη εξήγηση για την ορθότητα της πρότασης. Αν είναι ψευδής, δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

1. Έστω γράφημα G του οποίου οι ακμές έχουν διαφορετικά μεταξύ τους θετικά βάρη. Αν e είναι η ακμή με το μικρότερο βάρος, τότε η e ανήκει σε κάθε ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο του G.

2. Έστω γράφημα G του οποίου οι ακμές έχουν διαφορετικά μεταξύ τους θετικά βάρη. Αν το G έχει τουλάχιστον έναν κύκλο και e είναι η ακμή με το μεγαλύτερο βάρος, τότε η e δεν μπορεί να ανήκει σε κάποιο ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο του G.

3. Έστω ότι σας δίνεται ένα στιγμιότυπο του προβλήματος Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο για ένα γράφημα G, τα κόστη των ακμών c_e του οποίου είναι όλα θετικά και διαφορετικά μεταξύ τους. Έστω T ένα ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο για το γράφημα G. Υποθέστε τώρα ότι αντικαθιστούμε το κόστος κάθε ακμής του γραφήματος με το τετράγωνό της c_e^2, παράγοντας έτσι ένα γράφημα G' το οποίο είναι ίδιο με το G αλλά με διαφορετικά κόστη. Αληθεύει ότι το T θα είναι και πάλι ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο για το γράφημα G' ;

4. Έστω ότι σας δίνεται ένα στιγμιότυπο του προβλήματος Συντομότερης Διαδρομής $s - t$ με Βάρη για ένα γράφημα G, τα κόστη των ακμών c_e του οποίου είναι όλα θετικά και διαφορετικά μεταξύ τους. Έστω P μία διαδρομή ελάχιστου κόστους από την κορυφή s προς την κορυφή t. Υποθέστε τώρα ότι αντικαθιστούμε το κόστος κάθε ακμής του γραφήματος με το τετράγωνό της c_e^2, παράγοντας έτσι ένα γράφημα G' το οποίο είναι ίδιο με το G αλλά με διαφορετικά κόστη. Αληθεύει ότι η P θα είναι και πάλι διαδρομή ελάχιστου κόστους από την κορυφή s προς την κορυφή t στο γράφημα G' ;

Θέμα 2 [15 μονάδες]

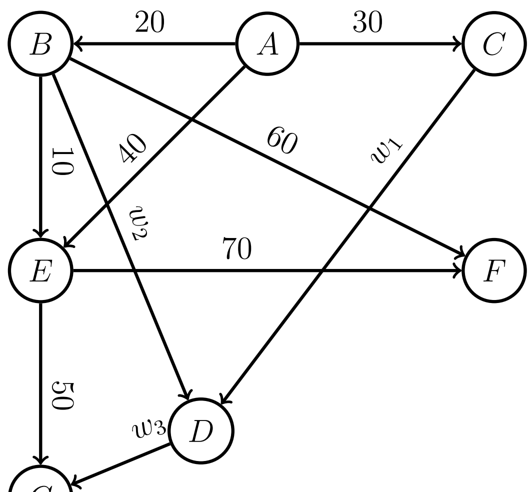
Στο κέντρο της πλατείας ενός χωριού βρίσκεται μία δεξαμενή χωρητικότητας M λίτρων (θεωρήστε ότι ο M είναι θετικός ακέραιος). Η δεξαμενή είναι κατασκευασμένη από πολύ βαρύ υλικό και για αυτό το λόγο δεν μπορούμε να την μεταφέρουμε. Θέλουμε να γεμίσουμε την δεξαμενή με νερό. Στη διάθεσή μας έχουμε 3 κουβάδες χωρητικότητας $1, 5$ και 10 λίτρων αντίστοιχα. Δυστυχώς η πηγή του νερού βρίσκεται πολύ μακριά από την δεξαμενή και για αυτό το λόγο θέλουμε να κάνουμε όσο το δυνατό λιγότερες διαδρομές από και πρός την δεξαμενή. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι σε κάθε διαδρομή από την δεξαμενή προς την πηγή (και αντίστροφα) μπορούμε να κουβαλάμε μόνο έναν κουβά, τον οποίο πρέπει να γεμίσουμε πλήρως (για παράδειγμα, δεν μπορούμε να βάλουμε στον κουβά των 5 λίτρων 2 λίτρα νερού).

1. Να περιγράψετε σύντομα άπληστο αλγόριθμο που να ελαχιστοποιεί το πλήθος των διαδρομών που πρέπει να κάνουμε ώστε να γεμίσουμε την δεξαμενή.

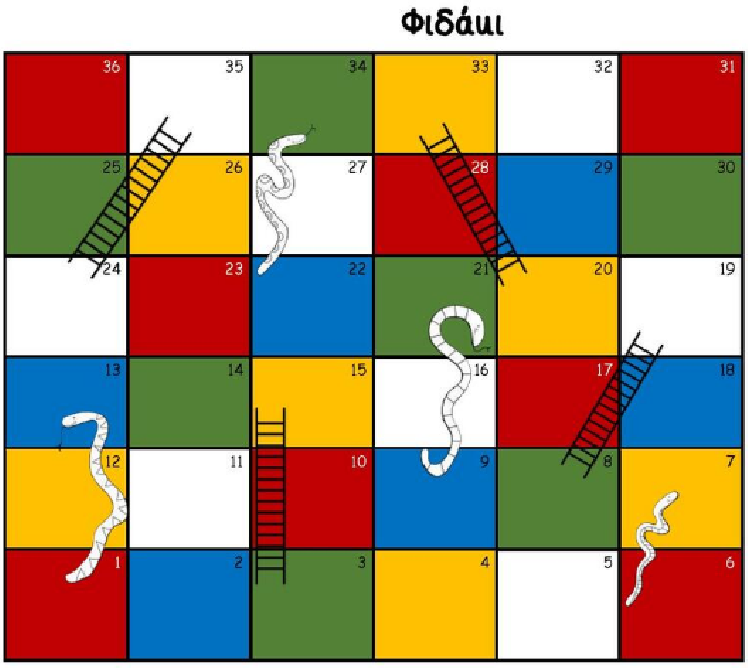
2. Θα λειτουργούσε ο άπληστος αλγόριθμος που περιγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα αν οι κουβάδες ήταν χωρητικότητας $1, 10$ και 25 λίτρων; Αν ναι, να εξηγήσετε γιατί. Διαφορετικά, να δώσετε αντιπαράδειγμα προσδιορίζοντας αριθμό M για την χωρητικότητα της δεξαμενής στο οποίο ο άπληστος αλγόριθμος αποτυγχάνει.

Θέμα 3 [15 μονάδες]

α) Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο του Dijkstra στο παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα, ξεκινώντας από την κορυφή A. Θεωρήστε για τα βάρη ότι $w_1 = 10a + b$, $w_2 = 10b + c$, $w_3 = 10c + a$, όπου a, b, c είναι τα τελευταία τρία ψηφία του ΑΜ σας. Πχ, αν ο ΑΜ σας είναι 1115188600154, τότε $a = 1$, $b = 5$ και $c = 4$. Δηλαδή $w_1 = 15$, $w_2 = 54$ και $w_3 = 41$. Τα υπόλοιπα βάρη είναι ακριβώς όπως αναγράφονται στο γράφημα.



β) Θεωρήστε το κλασσικό επιτραπέζιο Φιδάκι. Στο επιτραπέζιο αυτό, όλοι οι παίκτες ξεκινούν από το αρχικό κουτάκι (νούμερο 1). Σε κάθε γύρο, κάθε παίκτης ρίχνει ένα ζάρι και προχωρά τόσα κουτάκια μπροστά όσα η ένδειξη του ζαριού. Κατά τη διαδρομή, υπάρχουν εμπόδια ή βοήθειες. Τα εμπόδια, είναι τα φιδάκια ενώ οι βοήθειες είναι οι σκάλες. Αν κάποιος παίκτης πέσει πάνω σε κουτάκι στο οποίο βρίσκεται το κάτω μέρος μίας σκάλας, τότε αυτομάτως ανεβαίνει στο κουτάκι στο οποίο βρίσκεται το τέλος της αντίστοιχης σκάλας. Αντιθέτως, αν κάποιος παίκτης πέσει πάνω σε κουτάκι στο οποίο βρίσκεται το κεφάλι ενός φιδιού, τότε



Σχήμα 1: Ένα ταμπλό του επιτραπεζίου Φιδάκι.

αυτομάτως κατεβαίνει στο κουτάκι στο οποίο βρίσκεται η ουρά του φιδιού αυτού. Μία σκάλα μπορεί μόνο να ανεβάσει έναν παίχτη ψηλότερα, ενώ ένα φίδι μπορεί μόνο να τον κατεβάσει χαμηλότερα. Για παράδειγμα (βλέπε Σχήμα 1), αν κάποιος παίχτης βρίσκεται στο κουτάκι 2 και η ένδειξη της ζαριάς του είναι 3 τότε απλώς μεταβαίνει στο κουτί 5. Αν βρίσκεται στο κουτί 2 και φέρει 1 στο ζάρι, τότε μεταβαίνει στο κουτί 15 επειδή υπάρχει σκάλα που συνδέει το 3 με το 15. Τέλος, αν βρίσκεται στο κουτί 2 και φέρει 5, τότε μεταβαίνει στο κουτί 6 επειδή στο κουτί 7 οπού θα κατέληγε βρίσκεται το κεφάλι φιδιού που η ουρά του οδηγεί στο 6. Το παιχνίδι τελειώνει όταν ένας παίχτης φτάσει στο τελευταίο κουτάκι (νούμερο 36).

Να περιγράψετε αλγόριθμο που βρίσκει το ελάχιστο πλήθος ζαριών που χρειάζεται ένας παίκτης ώστε να μεταβεί από το αρχικό κουτάκι στο τελικό κουτάκι σε ένα ταμπλό του παιχνιδιού Φιδάκι.

Υπόδειξη: Περιγράψτε με κατάλληλο τρόπο το ταμπλό του παιχνιδιού ως κατευθυνόμενο γράφημα και κατόπιν εφαρμόστε κατάλληλο αλγόριθμο διάσχισης.

Θέμα 4 [20 μονάδες]

Το δίκτυο κινητής τηλεφωνίας στην χώρα Καρτεσία αναβαθμίζεται! Θέλουμε να τοποθετήσουμε νέες κεραίες καλύτερης εμβέλειας που θα καλύπτουν όλες τις πόλεις. Έτσι, μας δίνεται μία λίστα με n πόλεις οι οποίες όλες βρίσκονται πάνω στον θετικό ημιάξονα σε αποστάσεις από την αρχή των αξόνων $0 = D[1], D[2], \ldots, D[n]$ χιλιομέτρων η καθεμία (το i θεωρείται ο δείκτης της κάθε πόλης). Στόχος μας είναι να καλύψουμε τις κατοικίες με όσο το δυνατό λιγότερες κεραίες εμβέλειας r, τοποθετημένες επίσης στο θετικό ημιάξονα. Θεωρούμε ότι οι κεραίες επικοινωνούν μεταξύ τους σε όση απόσταση και αν βρίσκονται μεταξύ τους.

1. Να σχεδιάσετε άπληστο αλγόριθμο πολυπλοκότητας $\mathcal{O}(n)$ που να υπολογίζει τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό κεραίων που πρέπει να τοποθετήσουμε ώστε να καλύπτονται όλες οι πόλεις. **[10 μονάδες]**

2. Να αποδείξετε σύντομα την ορθότητα του αλγορίθμου σας. [**10 μονάδες**]

Θέμα 5 [30 μονάδες]

Μία κατασκήνωση οργανώνει ένα μίνι-δίαθλο για την λήξη των διακοπών του καλοκαιριού. Στο μίνι-δίαθλο οι νεαροί κατασκηνωτές και οι νεαρές κατασκηνώτριες καλούνται να διασχίσουν κολυμπώντας μία πισίνα μήκους 100 μέτρων και στη συνέχεια να διασχίσουν με ποδήλατο μια απόσταση 3 χλμ, αυστηρά με αυτή τη σειρά. Οι διοργανωτές/τριες έχουν στη διάθεσή τους μια λίστα n παιδιών που θα λάβουν μέρος καθώς και μια εκτίμηση για το κάθε παιδί i ότι θα κολυμπήσει την πισίνα σε χρόνο s_i και θα χρειαστεί για το ποδήλατο χρόνο b_i. Για λόγους ασφαλείας ισχύει ο περιορισμός ότι μόνο ένα παιδί μπορεί να κολυμπάει στην πισίνα κάθε στιγμή. Δηλαδή ένα παιδί μπορεί να ξεκινήσει μόνο όταν το προηγούμενο έχει βγει από την πισίνα. Θεωρούμε ότι δεν υπάρχει κενός χρόνος στην πισίνα κατά τη διάρκεια του αγωνίσματος, δηλαδή το κάθε παιδί ξεκινάει να κολυμπάει ακριβώς τη στιγμή που το προηγούμενο βγαίνει από την πισίνα. Στη ποδηλασία, τα παιδιά είναι δυνατόν να συμπέσουν, δηλαδή μπορούν να ποδηλατούν όσα παιδιά χρειαστεί ταυτόχρονα. Επειδή οι οργανωτές είναι βιαστικοί, θέλουμε να σχεδιάσουμε μία διάταξη των παιδιών στην εκκίνηση έτσι αν όντως κάνει το κάθε παιδί τον αντίστοιχο εκτιμώμενο χρόνο στο κάθε αγώνισμα, τότε η διοργάνωση θα λήξει όσον το δυνατόν νωρίτερα, δηλαδή ο χρόνος τερματισμού του τελευταίου παιδιού (ή των τελευταίων παιδιών, σε περίπτωση σύγχρονου τερματισμού στο τέλος περισσότερων του ενός παιδιών) να είναι ο νωρίτερος δυνατός (ο χρόνος έναρξης της διοργάνωσης, δηλαδή ο χρόνος εκκίνησης του πρώτου παιδιού, θεωρείται σταθερός και δεδομένος).

1. Θεωρήστε τις παρακάτω άπληστες στρατηγικές για την ταξινόμηση της σειράς που θα αγωνιστούν τα παιδιά. Να δώσετε αντιπαραδείγματα για κάθε μία από αυτές που να αποδεικνύουν ότι οι στρατηγικές αυτές δεν υπολογίζουν πάντα την βέλτιστη σειρά με την οποία θα πρέπει να αγωνιστούν τα παιδιά. Σε κάθε περίπτωση, αρκούν αντιπαραδείγματα με μόλις δύο παιδιά.

    - Ταξινομούμε την σειρά εμφάνισης των παιδιών σε φθίνουσα σειρά βάσει του χρόνου κολύμβησής τους, s_i.
    - Ταξινομούμε την σειρά εμφάνισης των παιδιών σε φθίνουσα σειρά βάσει του αθροίσματος των χρόνων κολύμβησης και ποδηλασίας αυτών, $s_i + b_i$
    - Ταξινομούμε την σειρά εμφάνισης των παιδιών σε αύξουσα σειρά βάσει του χρόνου ποδηλασίας τους b_i

    [**15 μονάδες**]

2. Δώστε έναν άπληστο αλγόριθμο διάταξης των παιδιών στην εκκίνηση που οδηγεί στο νωρίτερο δυνατό χρόνο λήξης της διοργάνωσης. Να αποδείξετε ότι ο αλγόριθμος που δώσατε όντως παράγει διάταξη των παιδιών με το νωρίτερο δυνατό χρόνο λήξης της διοργάνωσης. [**15 μονάδες**]

Υπόδειξη: Αφού δεν μπορούν να κολυμπούν δύο παιδιά ταυτόχρονα, ο συνολικός χρόνος της διοργάνωσης αποκλείεται να είναι λιγότερος από $\sum_{i=1}^{n} s_i$. Εστιάστε στους χρόνους ποδηλασίας.