

Θέμα 1^ο: Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές/λάθος (αιτιολόγηση).

1. Ο βαθμός των πολυωνύμων παρεμβολής Lagrange ισούται με το πλήθος των πολυωνύμων Lagrange.
 2. Η σύγκλιση της μεθόδου Newton-Raphson για την επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων είναι γραμμική.
 3. Το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση το β ισούται με β^{1-t} (t ακρίβεια) για αποκοπή.
 4. Η μέθοδος 1/3 του Simpson εφαρμόζεται σε αριθμό υποδιαστημάτων του διαστήματος ολοκλήρωσης πολλαπλάσιο του 3.
 5. Οι μέθοδοι Runge-Kutta είναι μέθοδοι πολλαπλού βήματος αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών.
 6. Ο αλγόριθμος Thomas χρησιμοποιείται για την επίλυση τρισδιαγώνιων συστημάτων.
 7. Οι κυβικές splines είναι τμηματικά πολυώνυμα παρεμβολής 3ου βαθμού.
 8. Η ανάλυση Cholesky εφαρμόζεται σε συμμετρικά αρνητικά ορισμένους πίνακες γραμμικών συστημάτων.
 9. Η μέθοδος 3/8 του Simpson εφαρμόζεται σε άρτιο αριθμό υποδιαστημάτων του διαστήματος ολοκλήρωσης.
 10. Ο σύνθετος κανόνας του τραπεζίου είναι ένας ανοικτός κανόνας ολοκλήρωσης.
- (M=2.5 (0.25/σωστή απάντηση))

Θέμα 2^ο: (i) Να βρεθεί μία προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ εφαρμόζοντας τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου για $n=4$. (ii) Πόσα σημεία παρεμβολής πρέπει να χρησιμοποιηθούν έτσι, ώστε να προκύψει προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ με τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και με ακρίβεια 5 δ.ψ.;

(M=2.5)

$$\Deltaίνεται \ A_{n+1}^T(f) = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right], \ E_n^T(f) = -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f^{(2)}(\xi), \ \xi \in (a, b),$$

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot \|f^{(2)}\|_{\infty}, \text{ για κάθε } f \in C^2([a, b]).$$

Θέμα 3^ο: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 25$, $x > 0$. Να δείξετε ότι η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει στην τετραγωνική ρίζα του 25, για κάθε $x_0 > 0$. Να γίνουν 3 επαναλήψεις της μεθόδου ($x_0=4.5$).

(M=2.5)

Θέμα 4^ο: Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Να λυθεί το σύστημα εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gauss-Seidel ($\underline{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$) (Να γίνουν τρεις επαναλήψεις).

(M=2.5)

Θέμα 5^ο: (i) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα είναι μοναδικό.

(ii) Κατά τον σχεδιασμό της διαδρομής ενός οχήματος robot, το οποίο πρόκειται να κινηθεί σε ένα επίπεδο χώρο μεταξύ δύο γνωστών σημείων (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, 3$, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη τα διάφορα εμπόδια στο χώρο έτσι, ώστε να αποφεύγονται κατά τη διαδρομή του robot με στόχο τον περιορισμό της πιθανότητας ατυχήματος. Ο πίνακας περιγράφει τις συντεταγμένες κάποιων σημείων της διαδρομής του robot. Να βρεθεί μία προσέγγιση της διαδρομής που διέρχεται από αυτά τα σημεία με χρήση γραμμικών τμηματικών splines.

(M=2.5)

(Να απαντήσετε σε 4 θέματα από τα 5 εκτός του 1^{ου} θέματος)

x_i	y_i
0.0 = x_0	0.0 = y_0
0.4 = x_1	0.6 = y_1
0.6 = x_2	0.8 = y_2
1.2 = x_3	0.6 = y_3