

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2022 (31/01/2022)

Μάθημα: Γραμμική Άλγεβρα

Ονοματεπώνυμο: \_\_\_\_\_ ΑΜ: \_\_\_\_\_

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες. Τα θέματα επιστρέφονται.

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

1.1) Η τάξη ενός πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 7}$  είναι  $\text{rank}(A) = 3$ . Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας

α) Πόσες μηδενικές γραμμές θα έχει ο κλιμακωτός πίνακας  $U$  που προκύπτει από τον  $A$  κάνοντας απαλοιφές μεταξύ των γραμμών

β) Πόσες βασικές και πόσες ελεύθερες μεταβλητές θα έχει ένα σύστημα της μορφής:  $A\vec{x} = \vec{b}$ ;

γ) Πόσες λύσεις έχει το σύστημα:  $A\vec{x} = \vec{0}$ ;

δ) Πόσες λύσεις έχει το σύστημα:  $A\vec{x} = \vec{b}$ ;

ε) Ποια είναι η διάσταση του μηδενохώρου και ποια η διάσταση του χώρου στηλών του  $A$ ;

1.2) Δίνονται οι πίνακες:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Να υπολογιστούν όσες παραστάσεις έχουν νόημα:

α) $A + B$	β) $AB$	γ) $AA$
δ) $AA^T$	ε) $BB$	στ) $B^T B$

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα δύο διανύσματα  $x_1 = (2, 1)$  και  $x_2 = (1, 2)$ .

α) Ελέγξτε εάν τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

β) αποτελούν μία βάση του  $\mathbb{R}^2$ ;

γ) Βρείτε την προβολή του  $x_1$  στο  $x_2$  και του  $x_2$  στο  $x_1$

δ) Υπολογίστε μία ορθογώνια βάση με την διαδικασία Gram-Schmidt

ε) Βρείτε την αντίστοιχη ορθωκανονική βάση.

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

3.1 Για τις διάφορες τιμές του  $a$  να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned}x - y + z &= 1 \\3x - y - z &= a \\5x + z - 3y &= 4\end{aligned}$$

3.2 Υπολογίστε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ -5 & x & 2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 0 & -2 & 0 \\ 10 & x & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Όπου  $x$  είναι το τελευταίο ψηφίο του ΑΜ σας.



#### Θέμα 4<sup>ο</sup>

Έστω η απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$

- α) Δείξτε ότι η  $f$  είναι γραμμική
- β) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση της εικόνας της  $f$
- γ) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του πυρήνα της  $f$
- δ) Ορίστε την απεικόνιση  $f^{-1}$  εάν ορίζεται
- ε) Βρείτε τον πίνακα αναπαράστασης της  $f$  ως προς την κανονική βάση

#### Θέμα 5<sup>ο</sup>

5.1 Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του.

5.2 Βρείτε τον αντίστροφο του  $\pi$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$