

Θέματα Εξετάσεων Γραμμικής Άλγεβρας

1. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Υπολογίστε κάθε άθροισμα ή γινόμενο πινάκων, όπου αυτό ορίζεται:

$$A - 3B, A + C, DB, CD, AB, BC. \quad (\text{Μονάδες } 2)$$

2. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(α') Να δείξετε ότι ο πίνακας A αντιστρέφεται και να υπολογίσετε τον αντίστροφο πίνακα του A .

(β') Να εξετάσετε αν ο A είναι ορθογώνιος. (Μονάδες 2)

3. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + y - z)$$

Να βρείτε τη διάσταση και μια βάση για τον καθένα από τους διανυσματικούς χώρους $\text{Ker } f, \text{Im } f$. (Μονάδες 2)

4. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(α') Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .

(β') Να εξετάσετε αν ο πίνακας διαγωνιοποιείται και ισχύει, να βρείτε τον πίνακα P και τον όμοιο διαγώνιο του D . (Μονάδες 2)

5. Δίνεται ο διανυσματικός υποχώρος $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$ του \mathbb{R}^3 .

(α') Να βρείτε μια βάση και τη διάστασή του.

(β') Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων της βάσης που προκύπτουν και να εξετάσετε αν αυτά είναι ορθογώνια.

(Μονάδες 2)