

# Θέματα Προόδου Γραμμικής Άλγεβρας

1. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Υπολογίστε κάθε άθροισμα ή γινόμενο πινάκων, όπου αυτό ορίζεται:

(α')  $B + 2A, AC, CD$

(β')  $C^T, BD, D + C, DC$

(γ') Να εξετάσετε αν ο πίνακας  $C$  αντιστρέφεται και αν ισχύει να υπολογίσετε τον αντίστροφό του.

**Μονάδες 3**

2. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 8 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x - 8y + 3z = -8 \end{cases}$$

**Μονάδες 2**

3. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  τέτοια ώστε

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 5y + z, x + y + 2z)$$

Να βρείτε τη διάσταση και μια βάση για τον καθένα από τους διανυσματικούς χώρους  $\text{Ker } f, \text{Im } f$ .

**Μονάδες 2**

4. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(α') Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$ .

(β') Να εξετάσετε αν ο πίνακας διαγωνιοποιείται και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ') Αν ο πίνακας διαγωνιοποιείται, να βρείτε τον πίνακα  $P$  και τον όμοιο διαγώνιο του  $D$ .

**Μονάδες 3**