

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2022 (07/09/2022)

Μάθημα: Γραμμική Άλγεβρα

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες. Τα θέματα επιστρέφονται.

Θέμα 1^ο

1.1) Η τάξη ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ είναι $\text{rank}(A) = 2$. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας

α) Πόσες μηδενικές γραμμές θα έχει ο κλιμακωτός πίνακας U που προκύπτει από τον A κάνοντας απαλοιφές μεταξύ των γραμμών

β) Πόσες βασικές και πόσες ελεύθερες μεταβλητές θα έχει ένα σύστημα της μορφής: $A\vec{x} = \vec{b}$.

γ) Πόσες λύσεις έχει το σύστημα: $A\vec{x} = \vec{0}$;

δ) Πόσες λύσεις έχει το σύστημα: $A\vec{x} = \vec{b}$;

ε) Ποια είναι η διάσταση του μηδενοχώρου και ποια η διάσταση του χώρου στηλών του A ;

1.2) Δίνονται οι πίνακες: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$. Να υπολογιστούν όσες παραστάσεις έχουν νόημα:

α) $A + B$	β) AB	γ) AA
δ) AA^T	ε) BB	στ) $B^T B$

Θέμα 2^ο

Υπολογίστε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ -5 & x & 2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 0 & -1 & 0 \\ 10 & x & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Όπου x είναι το τελευταίο ψηφίο του ΑΜ σας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Θέμα 3^ο

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του.

Θέμα 4^ο

Δίνονται τα δύο διανύσματα $x_1 = (2, 1)$ και $x_2 = (1, 2)$.

α) Ελέγξτε εάν τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

β) αποτελούν μία βάση του \mathbb{R}^2 ;

γ) Βρείτε την προβολή του x_1 στο x_2 και του x_2 στο x_1

δ) Υπολογίστε μία ορθογώνια βάση με την διαδικασία Gram-Schmidt

ε) Βρείτε την αντίστοιχη ορθωκανονική βάση.