

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο: Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές/λάθος.

1. Αν μία συνάρτηση είναι άρτια, τότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των τετμημένων.
2. Αν μία συνάρτηση είναι αύξουσα, τότε και η αντίστροφή της είναι αύξουσα.
3. Για κάθε συνεχή συνάρτηση σε κλειστό διάστημα ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμά της στο διάστημα αυτό.
4. Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.
5. Η απόλυτη σύγκλιση μιας σειράς συνεπάγεται τη σχετική σύγκλιση της.
6. Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης είναι πραγματικός αριθμός.
7. Το Θεώρημα Rolle χρησιμεύει για την εύρεση ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$ σε ένα διάστημα.
8. Το ανάπτυγμα Taylor μιας συνεχούς συνάρτησης στο σημείο x_0 (αν υπάρχει) παρέχει προσεγγιστικά την έκφραση μιας συνάρτησης υπό μορφή πολυωνύμου κατά τις δυνάμεις του $(x-x_0)$.

(M=3.0 (0.375/σωστή απάντηση))

Θέμα 2^ο: Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (M=2.0)$$

Θέμα 3^ο: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f = f(x, y)$ με

$$x = u \cos \theta - v \sin \theta, \quad y = u \sin \theta + v \cos \theta, \quad \alpha \text{ σταθερά}$$

ικανοποιεί τη σχέση:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

(M=2.5)

Θέμα 4^ο: Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που δημιουργείται από την περιστροφή του γραφήματος της $y(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$, γύρω από τον άξονα $x'x$.

$$(\text{Δίνεται: } \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \sinh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R})$$

$$E = 2\pi \int_0^\pi |y(x)| \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (M=2.5)$$

Θέμα 5^ο: Να βρεθεί η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης f με

$$f(x) = \frac{x+7}{x+4}, \quad x \neq -4,$$

η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(M=2.5)

Να απαντήσετε σε 4 από τα 5 θέματα (επιλογή μεταξύ του 3^{ου} και 4^{ου} θέματος).