ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ: ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ **ΛΑΡΙΣΑ 17/2/2021**
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ-ΟΜΑΔΑ Ι
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2020-2021

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^{ο}: Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές/λάθος (αιτιολόγηση).

1. Ο βαθμός των πολυωνύμων Lagrange ισούται με το πλήθος των σημείων παρεμβολής.
2. Ο βαθμός των πολυωνύμων παρεμβολής ισούται με το πλήθος των σημείων παρεμβολής.
3. Οι κυβικές splines είναι τμηματικά πολυώνυμα παρεμβολής 3^{ου} βαθμού.
4. Η ανάλυση Cholesky εφαρμόζεται σε συμμετρικά αρνητικά ορισμένους πίνακες γραμμικών συστημάτων.
5. Η σύγκλιση της μεθόδου Newton για την επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων είναι γραμμική.
6. Το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση το β ισούται με β^{1-t} (t ακρίβεια) για στρογγύλευση.
7. Η μέθοδος 3/8 του Simpson εφαρμόζεται σε άρτιο αριθμό υποδιαστημάτων του διαστήματος ολοκλήρωσης.
8. Ο σύνθετος κανόνας του τραπεζίου είναι ένας ανοικτός κανόνας ολοκλήρωσης.

(Μ=2.5 (0.3125/σωστή απάντηση))

Θέμα 2^{ο}:

(i) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα είναι μοναδικό.

(ii) Έστω $f(x)=x^4$. Να βρεθεί το κατάλληλο πολυώνυμο παρεμβολής Newton στους κόμβους $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ για την προσέγγιση του $f(1.2)$.

(iii) Να προσδιορίσετε το βήμα h για την κατασκευή ενός πίνακα με ισαπέχουσες τιμές της $f(x)=\ln x$ στο διάστημα $[1, 2]$ έτσι, ώστε η προσέγγιση της $f(x)$ σε τυχαίο σημείο $x\in[1, 2]$ με πολυώνυμο παρεμβολής δευτέρου βαθμού που παρεμβάλει την f σε τρεις διαδοχικές τιμές του πίνακα να έχει μέγιστο σφάλμα $e = 10^{-6}$.

Δίνεται

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\ \|f-p\|_\infty \le \max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|\cdot\frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!},\ \xi\in[a,b]$$

(Είναι γνωστή η νόρμα $\|h\|_\infty = \max_{x\in[a,b]}|h(x)|$). (Μ=2.5)

Θέμα 3^{ο}: Θεωρούμε την εξίσωση $x-(1+x)^{1/2}=0$.

(i) Να βρεθούν οι εκτιμήσεις της ρίζας της εξίσωσης στις 3 πρώτες επαναλήψεις της μεθόδου διχοτόμησης στο διάστημα $[0,4]$.

(ii) Πόσες επαναλήψεις απαιτούνται με τη μέθοδο της διχοτόμησης στο $[0,4]$ για να βρεθεί μία εκτίμηση της ρίζας της εξίσωσης στο διάστημα $[0,4]$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-5}; (Μ=2.5)

Θέμα 4^{ο}: Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & -2\\ 1 & 7 & -3\\ 3 & -2 & 10\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ -20\\ 70\end{bmatrix}$$

. Να βρεθεί η λύση του συστήματος εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση. (Μ=2.5)

Θέμα 5^{ο}:

(i) Να βρεθεί μία προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_1^2 e^{-x^2}\,dx$ εφαρμόζοντας τον σύνθετο κανόνα 1/3 του Simpson για n=2.

(ii) Σε πόσα το πολύ ισομήκη διαστήματα πρέπει να διαμεριστεί το διάστημα $[0, 1]$ έτσι, ώστε να προκύψει προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ με τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και με ακρίβεια 5 δ.ψ. ; (Μ=2.5)

Δίνεται $E_n^T(f)=-\frac{b-a}{12}\cdot h^2\cdot f^{(2)}(\xi)$, $\xi\in(a,b)$, $|E_n^T(f)|\le\frac{b-a}{12}\cdot h^2\cdot\|f^{(2)}\|_\infty$ για κάθε $f\in C^2([a,b])$.

Να απαντήσετε σε 4 από τα 5 θέματα (επιλογή μεταξύ του 3^{ου} και 4^{ου} θέματος).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ