

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο: Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές/λάθος (αιτιολόγηση).

1. Ο βαθμός των πολυωνύμων παρεμβολής Lagrange ισούται με το πλήθος των πολυωνύμων Lagrange.
2. Η μέθοδος δυνάμεων χρησιμοποιείται στη διαγωνοποίηση ενός συμμετρικού πίνακα και στην εύρεση των ιδιοτιμών του.
3. Η τάξη του σφάλματος του σύνθετου κανόνα του τραπεζίου είναι τουλάχιστον 3 στην περίπτωση που η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι ομαλή.
4. Η σύγκλιση της μεθόδου Newton για την επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων είναι τετραγωνική.
5. Το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση το β ισούται με β^{1-t} (t ακρίβεια) για αποκοπή.
6. Η μέθοδος 1/3 του Simpson εφαρμόζεται σε αριθμό υποδιαστημάτων του διαστήματος ολοκλήρωσης πολλαπλάσιο του 3.
8. Ο αλγόριθμος Thomas χρησιμοποιείται για την επίλυση τριδιαγώνιων συστημάτων.
(M=2.5 (0.3125/σωστή απάντηση))

Θέμα 2^ο:

- (i) Να βρεθεί μία προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_1^2 e^{-x^2} dx$ εφαρμόζοντας τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου για $n=4$.
- (ii) Σε πόσα το πολύ ισομήκη διαστήματα πρέπει να διαμεριστεί το διάστημα $[1, 2]$ έτσι ώστε να προκύψει προσέγγιση με ακρίβεια 5 δ.ψ. ;
(M=2.5)

$$\text{Δίνεται } E_n^I(f) = -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b), \quad |E_n^I(f)| \leq \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot \|f^{(2)}\|, \quad \text{για κάθε } f \in C^2([a, b]).$$

Θέμα 3^ο: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - a$, $x > 0$, a γνωστός πραγματικός αριθμός.

- (i) Να δείξετε ότι η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει στην τετραγωνική ρίζα του a για κάθε $x_0 > 0$.
- (ii) Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του 3 με τη μέθοδο Newton-Raphson και με ακρίβεια $\epsilon = 10^{-1}$ ($x_0 = 1.75$)
(M=2.5)

Θέμα 4^ο: Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -20 \\ 70 \end{bmatrix}.$$

Να λυθεί το σύστημα εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gauss-Seidel ($x^{(0)} = (0, 0, 0)$) (Να γίνουν τρεις επαναλήψεις).
(M=2.5)

Θέμα 5^ο: (i) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα είναι μοναδικό.

(ii) Κατά τον σχεδιασμό της διαδρομής ενός οχήματος robot, το οποίο πρόκειται να κινηθεί σε ένα επίπεδο χώρο μεταξύ δύο γνωστών σημείων (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, 4$, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη τα διάφορα εμπόδια στο χώρο έτσι, ώστε να αποφεύγονται κατά τη διαδρομή του robot με στόχο τον περιορισμό της πιθανότητας ατυχήματος. Ο πίνακας περιγράφει τις συντεταγμένες κάποιων σημείων της διαδρομής του robot. Να βρεθεί μία προσέγγιση της διαδρομής που διέρχεται από αυτά τα σημεία με χρήση γραμμικών τμηματικών splines. (M=2.5)

x_i	y_i
$0.0 = x_0$	$0.0 = y_0$
$0.1 = x_1$	$0.2 = y_1$
$0.2 = x_2$	$0.8 = y_2$
$1.4 = x_3$	$0.4 = y_3$
$1.5 = x_4$	$1.1 = y_4$

Να απαντήσετε σε 4 από τα 5 θέματα (επιλογή μεταξύ του 2^{ου} και 4^{ου} θέματος).