Estatística II, 2012/2013 Modelo de exame

NB: Este modelo pretende dar uma ideia do grau de dificuldade/extensão do exame – não visa dar indicação clara a respeito das questões efectivamente incluídas no mesmo. Em cada questão inclui-se as respectivas soluções.

Duração: 2h. Pode-se utilizar **máquina de calcular sem memória de texto**. **Tabelas estatísticas fornecidas com o enunciado** – a/os estudantes **não** devem levá-las para o exame.

Cotações

$\mathbf{1}\boldsymbol{a}) - 1, \boldsymbol{b}) - 1$; $\mathbf{2} - 2$; $\mathbf{3}\boldsymbol{a}) - 1{,}5, \boldsymbol{b}) - 1{,}5$; $\mathbf{4}\boldsymbol{a}) - 1{,}5, \boldsymbol{b}) - 2{,}5$;
$\mathbf{5}\boldsymbol{a}) - 2{,}5, \boldsymbol{b}) - 1{,}5$; $\mathbf{6} - 2$; $\mathbf{7}\boldsymbol{a}) - 1{,}5, \boldsymbol{b}) - 1{,}5$.

1 Um sistema electrónico é composto por dois subsistemas, S_1 e S_2. Sabe-se que: a probabilidade de S_1 falhar é 0,2, a probabilidade de apenas S_2 falhar é 0,15, e a probabilidade de S_1 e S_2 falharem simultaneamente é 0,15. Calcule a probabilidade de

$\boldsymbol{a})$ Falhar apenas S_1.

$\boldsymbol{b})$ Falhar pelo menos um dos dois subsistemas.

Resposta: $a)$ 0,05 $b)$ 0,35

2 Determinada doença afecta 1 em cada 10000 pessoas. Um teste clínico para a doença tem as seguintes características: se a pessoa não tem a doença, o teste confirma esta situação com probabilidade 0,9; se a pessoa tem a doença, o teste confirma o facto com a mesma probabilidade (0,9). Administrado o teste a uma pessoa escolhida ao acaso, o mesmo indicou a presença da doença.
Qual a probabilidade de a pessoa estar doente? No seu caso, ficaria preocupada/o? [Sugestão. Defina os acontecimentos, D: "ter a doença", T: "o teste indica presença da doença", e calcule $P(D|T)$ utilizando o teorema de Bayes.]

R.: Provavelmente não: $P(D|T) = 1/1112$.

3 Seja a função de densidade da v.a. X, $f(x) = (2x^3)^{-1}, \quad x > 1/2$.

$\boldsymbol{a})$ Determine a função de distribuição de X.

$\boldsymbol{b})$ Calcule $P(X > 4|X > 2)$.

R.: $a) \begin{cases} 0, & x < 1/2 \\ 1 - 1/(4x^2), & x \geq 1/2 \end{cases}$ $b)$ 1/4

4 A v.a. N representa o número de estudantes atendidos no Gabinete de Atendimento ao Estudante (GAE), por hora, durante o horário de expediente. Admita que N segue uma distribuição *Poisson* de parâmetro $\mu = 4$. Calcule

a) A probabilidade de, num período de 2 horas, o GAE atender 6 alunos.

b) O tempo médio, em minutos, que decorre entre 2 atendimentos consecutivos.

Informação adicional

Função probabilidade *Poisson* de parâmetro $\mu > 0$:

$$f_N(n) = e^{-\mu}\mu^n/n!,\ n \in \{0,1,2,\dots\}.$$

Função densidade exponencial negativa de parâmetro $\nu > 0$:

$$f_T(t) = \nu e^{-\nu t}, t > 0.$$

$R.$: $a)$ 0,122 $b)$ 15 minutos

5 A v.a. X tem média e variância finitas, dadas, respectivamente, por $E(X) = \alpha,\quad V(X) = \beta > 0$.

a) Calcule a média e variância da estatística $\bar{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$, em que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ designa uma amostra casual de dimensão n desta população.

b) Considerando a resolução da alínea anterior, calcule $\operatorname{plim}_{n\to\infty} \bar{X}$. Justifique.

$R.$: $a)$ $E(\bar{X}) = \alpha \quad V(\bar{X}) = \beta/n$ $b)$ $\operatorname{plim}_{n\to\infty} \bar{X} = \alpha$

6 Mediante registos históricos, sabe-se que o desvio-padrão das vendas de determinado produto, por retalhista, é $\sigma = 200$ euros, admitindo-se que o volume de vendas é uma v.a. normal. Qual a dimensão mínima de uma amostra casual, de modo que a amplitude de um intervalo de confiança a 95% para a média das vendas não seja superior a 200 euros?

Informação adicional Variável fulcral: $(\bar{X} - \mu)/\left(\sigma/\sqrt{n}\right) \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$R.$: 16

7 A vida útil, X, das televisões de determinada marca é uma v.a. normal com desvio-padrão $\sigma = 500$ horas. A marca anuncia uma vida útil média das suas televisões de 9000 horas. Recolhe-se uma amostra casual de n televisões, registando-se a respectiva vida média útil, $\bar{x}$. Teste, ao nível de 5%, a afirmação da marca, contra a alternativa unilateral esquerda, nas seguintes situações:

a) $n = 15, \bar{x} = 8800$ horas.

b) $n = 35, \bar{x} = 8800$ horas.

Informação adicional Estatística de teste: $(\bar{X} - \mu)/\left(\sigma/\sqrt{n}\right) \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$R.$: $a)$ Não se rejeita H_0 $b)$ Rejeita-se H_0