CADERNO PRÁTICO

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

Curso(s):	Eng. Informática
Unidade(s) Curricular(es):	Probabilidades e Estatística
Ano Letivo:	2020/21
Docente:	Cecília Maria Fernandes Fonseca
Data:	Outubro de 2020

1. INTRODUÇÃO À TEORIA DAS PROBABILIDADES

1.1 ENUNCIADOS DOS EXERCÍCIOS

1- Considere a experiência aleatória "lançamento de duas moedas". Indique:

a) O espaço de resultados;
b) Os acontecimentos elementares;
c) A probabilidade de que as duas moedas caiam com a mesma face voltada para cima.

2- Numa turma há 16 rapazes e 24 raparigas, onde metade dos rapazes e metade das raparigas têm cabelo preto. Qual a probabilidade de que, escolhendo um ao acaso, seja rapaz ou tenha cabelo preto?

3- Entre 180 professores de uma Universidade, 135 são doutorados, 146 dedicam parte do seu tempo à investigação e 114 são doutorados e dedicam parte do seu tempo à investigação. Se um desses professores é escolhido ao acaso para um trabalho administrativo, determine a probabilidade de que:

a) esse professor seja doutorado ou dedique parte do seu tempo à investigação;
b) esse professor não seja doutorado nem faça investigação.

4- Do conjunto de empresas que actuam num dado sector industrial

25% possuem departamento de investigação;
50% realizam lucros;
20% possuem departamento de investigação e realizam lucros.

Determine a probabilidade de uma empresa escolhida ao acaso estar nas seguintes condições:

a) Possuir departamento de investigação ou realizar lucros ou ambas as coisas;
b) Não possuir departamento de investigação;
c) Não possuir departamento de investigação nem realizar lucros;
d) Não possuir departamento de investigação ou não realizar lucros ou ambas as coisas;
e) Possuir departamento de investigação e não realizar lucros.

5- Num “stand” de automóveis, os registos indicam que 50% dos clientes pretendem ar condicionado no carro, 49% preferem carros com direcção assistida e 25% interessam-se pelas duas coisas simultaneamente. Um registo é seleccionado ao acaso.

a) Qual a probabilidade de que o ar condicionado tenha sido pretendido mas a direcção assistida não?
b) Qual a probabilidade de que nenhuma das referidas preferências tenha sido seleccionada?
c) Qual a probabilidade de exactamente uma das preferências tenha sido seleccionada?

6- Dispomos de três lotes de lâmpadas que apresentam as mesmas características técnicas, mas sabe-se que:

i) No 1º lote composto por 50% do número total de lâmpadas, há 2% que são defeituosas;
ii) No 2º lote composto por 30% do número total de lâmpadas, há 4% que são defeituosas;
iii) No 3º lote, com lâmpadas restantes, há 1% que são defeituosas.

Os três lotes são misturados e deste conjunto é retirada uma lâmpada ao acaso.
a) Qual a probabilidade de ser defeituosa ?
b) Se a lâmpada é defeituosa, qual a probabilidade de ter vindo dos lotes 1 ou 2 ?

7- Um comerciante recebe batatas de três regiões diferentes. Ao chegar, cada lote é classificado em duas classes A e B, de acordo com a qualidade do produto. Qual a proveniência mais favorável de um lote acabado de chegar, sabendo que foi classificado na categoria A e tendo em conta a distribuição dos lotes recebidos até à data é a seguinte:

Regiões	Kg	Qualidade	
		A	B
I	10000	2000	8000
II	20000	14000	6000
III	20000	10000	10000

8- Duas caixas (C1 e C2) têm, respectivamente 8 e 4 bolas brancas, 12 e 16 castanhas e C2 tem também 20 bolas vermelhas. Considere a experiência aleatória “escolha de uma bola das duas caixas”. Atendendo a que as bolas estão juntas mas identificam a caixa de proveniência, calcule:

a) O espaço de resultados;
b) A probabilidade de ser de C1;
c) A probabilidade de ser branca;
d) A probabilidade de ser branca de C1;
e) A probabilidade de ser branca ou de C1;
f) A probabilidade de ser branca ou de C1 mas não de ambas as coisas;
g) Dado que é de C1, qual a probabilidade de ser branca.

9- Suponha-se que há três caixas contendo bolas amarelas, brancas e pretas. O número de bolas de cada cor em cada uma das caixas é dado por:

Caixa1: 1 amarela, 3 brancas e 1 preta;
Caixa2: 2 amarelas, 2 brancas e 2 pretas;
Caixa3: 3 amarelas, 1 branca e 3 pretas.

Escolhe-se uma caixa ao acaso e tira-se uma bola também ao acaso. Pretende-se saber qual a caixa que dá maior probabilidade ao acontecimento B (saída de uma bola branca).

10- A probabilidade de um homem estar vivo daqui a 25 anos é de 3/5 e a de sua mulher também o estar, na mesma ocasião, é de 2/3. Determine a probabilidade de, daqui a 25 anos:

a) Ambos estarem vivos;
b) Somente o homem estar vivo;
c) Somente a mulher estar viva;
d) Um pelo menos estar vivo.

11- Uma pessoa A entrega a uma pessoa B uma carta para colocar no correio. A probabilidade de que B se esqueça de a colocar é 0,1. A probabilidade de que o correio se esqueça de a enviar, uma vez que foi colocada, é 0,09 e a probabilidade de que o destinatário não a receba, dado que foi enviada, é 0,11. Qual a probabilidade de que a pessoa B se tenha esquecido de colocar a carta no correio, dado que o destinatário não a recebeu?

12- Se a probabilidade de que uma pessoa acredite num determinado boato é de 0,25, determine a probabilidade de que a 7ª pessoa a ouvir o boato seja a 1ª a acreditar nele.

13- Sendo P(A) = 0,5 e $P(A \cup B) = 0{,}5$, determine:

a) P(B), sendo A e B independentes;
b) P(B), sendo A e B mutuamente exclusivos;

14- Uma loja de brinquedos emprega 3 mulheres para fazerem embrulhos durante a época de Natal. Raquel embrulha 30% dos presentes e esquece-se de tirar o preço 3% das vezes; Helena embrulha 20% dos presentes e esquece-se de tirar o preço em 8% das vezes; Joana, que embrulha os restantes presentes, esquece-se de tirar o preço 5% das vezes.

a) Qual a probabilidade de um presente comprado nessa loja ainda ter o preço?
b) Suponha que tinha ido a essa loja, verificando em casa que o seu presente ainda tinha preço. Calcule a probabilidade de ter sido embrulhado pela Joana.

15- Rui entrou agora na Universidade e foi informado de que há 30% de possibilidade de vir a receber uma bolsa de estudo. No caso de a receber, a probabilidade de se licenciar é de 0,85 enquanto que no caso de não a obter, a probabilidade de se licenciar é de apenas 0,45.

a) Qual a probabilidade de que ele se licencie?
b) Se, daqui a uns anos, encontrar o Rui já licenciado, qual a probabilidade de que tenha recebido a bolsa de estudo?

16- Dois peritos de fiscalização económica entraram num supermercado. Todos os tipos de produtos são examinados por um e um só dos fiscais. Suponha que o azeite em venda nesse supermercado é todo falsificado. A probabilidade de ser o 1º perito a examinar a qualidade do azeite é de 0,4. A probabilidade do azeite ser mal classificado, se examinado pelo 1º perito é de 0,08, e se for examinado pelo 2º perito, de 0,02. Durante a verificação o azeite foi classificado como falsificado. Nestas condições, calcule a probabilidade de o azeite ter sido examinado pelo 1º perito.

17- Uma fábrica produz copos de plástico em três cores: branco, verde e azul. Das análises de controle de qualidade anteriormente efectuadas verificou-se que 2% dos copos brancos são defeituosos enquanto somente 1% dos azuis o são, e ainda que 4% dos copos defeituosos são verdes. Da produção diária, metade corresponde à cor verde e 1/ 4 à cor azul.

a) Escolhido um copo ao acaso, qual a probabilidade de ser defeituoso?
b) Se um copo não é defeituoso, qual a probabilidade de ser branco?
c) Qual a probabilidade de um copo verde não ser defeituoso?

18- De 20 declarações de contribuição industrial, sabe-se que 8 apresentam erros.

a) Se um fiscal seleccionar ao acaso 2 para verificação, qual a probabilidade de essas duas conterem erros?
b) Se seleccionar 3, qual a probabilidade de pelo menos 2 conterem erros?

19- A empresa X tem prontos para venda 400 fogos assim distribuídos:

T2 - 160 T3 - 160 T4 - 80

Estimaram-se as probabilidades para o tempo que a referida empresa demoraria a vender os fogos, tendo-se chegado aos seguintes valores:

	Menos de 6 meses	Entre 6 meses e um ano	Mais de um ano
Para fog.T2	0,4	0,5	0,1
Para fog.T3	0,2	0,3	0,5
Para fog.T4	0,5	0,3	0,2

a) Tendo determinado fogo sido vendido em menos de 6 meses, qual a probabilidade de se tratar de um fogo T2?
b) Compare a probabilidade de um fogo ser vendido em menos de 6 meses com a probabilidade de ser vendido entre 6 meses e um ano.

20- O Francisco e o Afonso trabalham na empresa *NewSoft* que desenvolve *software* para as áreas de telecomunicações e turismo. Sabe-se que em 100 trabalhos da empresa o Francisco esteve envolvido em 30 e o Afonso em 70. Dos projetos em que o Afonso trabalhou 10 foram de telecomunicações. Por outro lado, o Francisco envolveu-se em 15 projetos de turismo. Selecionando um trabalho do conjunto de 100 efetuados pela empresa, qual a probabilidade de

a) sabendo que é de telecomunicações, ter sido desenvolvido com a colaboração do Francisco;

b) ser um projeto relacionado com turismo.

21- O quadro seguinte refere-se à situação de emprego dos habitantes adultos de uma comunidade e está organizado em função do sexo.

	Nº empregados	**Nº desempregados**
Homens	940	110
Mulheres	860	90

a) Seleciona-se, ao acaso, um dos habitantes. Qual a probabilidade de ser mulher?
b) Seleciona-se, ao acaso, um dos habitantes e verifica-se que é desempregado. Qual a probabilidade de ser homem?

22- Numa determinada empresa 40% dos computadores têm instalado o sistema operativo *Linux*, 30% têm os sistemas operativos *Linux* e *Windows* e 95% dos computadores têm sistema operativo *Linux* ou sistema operativo *Windows*. Escolhendo um computador ao acaso, pertencente à referida empresa, qual a probabilidade:

a) De ter sistema operativo *Windows*?
b) De o computador não ter nenhum dos sistemas operativos, ou seja, não ter *Windows* e não ter *Linux*.

1.2 Soluções

1- c) 1/2

2- 0,7

3- a) 0,928
b) 0,072

4- a) 0,55
b) 0,75
c) 0,45
d) 0,8
e) 0,05

5- a) 0,25
b) 0,26
c) 0,49

6- a) 0,024
b) 0,917

7- A proveniência mais favorável, de um lote acabado de chegar sabendo que foi classificado na classe A, é a Região II.

8- a) 60
b) 0,3
c) 0,2
d) 0,1(3)
e) 0,4
f) 0,27
g) 0,4

10- a) 2/5
b) 1/5
c) 4/15
d) 13/15

11- 0,36888

12- 0,04449

13- a) 0
b) 0

14- a) 0,05
b) 0,5

15- a) 0,57
b) 0,44736

16- 0,3849

17- a) 0,0078
b) 0,2469
c) 0,9994

18- a) 0,147
b) 0,3439

19- a) 0,471
b) A probabilidade de um fogo ser vendido entre 6 meses e um ano é superior à de ser vendido entre em menos de 6 meses.

20- a) 0,6 b)0,75

21- a) 0,475 b) 0,55
22- a) 0,85 b) 0,05

2. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E SUAS DISTRIBUIÇÕES

2.1 ENUNCIADOS DOS EXERCÍCIOS

1- A variável aleatória X tem como função de probabilidade

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}2 & x\in\{2,4,6\} \\ a & x\in\{5,7\} \\ 0{,}3 & x=8 \\ 0 & \text{outros valores de } x\in IR \end{cases}$$

a) Calcule a de modo que $f(x)$ seja de facto uma função de probabilidade,
b) Defina a função de distribuição da variável aleatória X,
c) Calcule P(X<5|2<X<6), P(X<4,5) e P(X$\geq$4).

2- Sendo a função de probabilidade de uma variável X dada por:

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/10	1/5	k	1/10

a) Calcule o valor de k e faça a representação gráfica de $f(x)$,
b) Deduza a função de distribuição de X e represente-a graficamente,
c) Determine a de modo que P(X$\leq a$)$\geq$0,5.

3- Considere a função de probabilidade:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{14} & se\ \ x\in\{1,2,3\} \\ 0 & se\ x\ \in \text{IR}\backslash\{1,2,3\} \end{cases}$$

a) Mostre que esta função satisfaz as propriedades de qualquer função de probabilidade e represente-a graficamente;
b) Defina a função de distribuição e represente-a graficamente;
c) Calcule P(X=1|$X\leq$2).

4- Uma variável aleatória discreta, X, apresenta a seguinte função de distribuição:

x	1	2	3	4
$F(x)$	0,1	0,4	0,9	1

a) Defina a função de probabilidade de X, $f(x)$, e represente as duas funções graficamente.
b) Calcule $P(X \le 2)$ e $P(X>1)$.

5- Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \le x < 1 \\ a & 1 \le x < 2 \\ -ax + 3a & 2 \le x < 3 \\ 0 & \text{outros valores de } x \in IR \end{cases}$$

a) Determine o valor de a,
b) Defina a função de distribuição.

6- Considere a seguinte função de densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se \ \ \frac{1}{2} < x < k \\ 0 & \text{outros valores de } x \in IR \end{cases}$$

a) Calcule k e represente $f(x)$,
b) Calcule b de modo que $P(X \le b)=0,5$.

7- Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & se \ \ 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{outros valores de } x \in IR \end{cases}$$

a) Calcule o valor de k,
b) Determine a função de distribuição de X e represente-a graficamente,
c) Calcule $P(1<X \le 2)$.

8- Sabendo que uma determinada tabacaria recebe diariamente 6 jornais que encerra às 19:30, que os jornais chegam à tabacaria às 17 horas e que num determinado dia às 19 horas a tabacaria tinha vendido 4 jornais, calcule a probabilidade de nesse dia haver restos, atendendo a que, a procura diária de determinado jornal da tarde nessa tabacaria é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0,05	0,06	0,06	0,08	0,125	0,25	0,125	0,05	0,06	0,06	0,08

9- Uma caixa contém cinco bolas amarelas, duas brancas e sete verdes. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso duas bolas sem reposição. Resolvendo atribuir a seguinte pontuação:

bola amarela – um ponto
bola branca – dois pontos
bola verde – três pontos

e definida a variável aleatória X= soma dos pontos obtidos,

a) determine a função de probabilidade de *X*,
b) determine a função de distribuição de *X*,
c) calcule P(*X*>3|*X*<6).

10- O tempo de espera (em minutos) numa certa central estre duas chamadas telefónicas é aleatório, sendo caracterizado pela seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} (k-2)e^{-x} & se \;\; x \geq 0 \\ 0 & se \;\; x < 0 \end{cases}$$

a) Calcule *k*.
b) Qual a probabilidade de que o tempo de espera entre duas chamadas seja inferior a 3 minutos?

11- O consumo semanal em toneladas de matéria prima A, necessária ao fabrico de um produto *Z*, é uma variável aleatória com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{25}(10-x) & \text{se} \quad 5 < x \leq 10 \\ 0 & \text{outros valores de } x \in IR \end{cases}$$

Qual o stock semanal de matéria prima que se deve assegurar de modo que seja 0,05 (no máximo) a probabilidade de ruptura dessa matéria prima.

12- Considere a v.a. *X*, discreta, com a seguinte função de probabilidade

X	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0,10	0,35	0,20	0,10	0,10	0,08	0,07

e determine:

a) O valor esperado de *X*;
b) A variância.

13- Seja *X* - Diferença absoluta de pontos no lançamento de dois dados equilibrados.

a) Deduza e represente a função de probabilidade e a função de distribuição.
b) Calcule a probabilidade de a diferença absoluta de pontos não exceder 2.

14- A função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua *X* é

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{outros valores de } x \in IR \end{cases}$$

Determine a:
a) Média;
b) Variância.

15- Relativamente à distribuição da variável aleatória *X*, sabe-se que E(*X*) = 6 e E (X^2) = 62. Sendo *Y* outra variável aleatória tal que $Y = \frac{1}{2}X + 3$, determine:

a) E(*Y*);
b) Var(*Y*).

16- Uma v.a. *X* apresenta a seguinte função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x^2 + 2x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{o.v. } x \in \text{IR} \end{cases}$$

Determine:
a) O valor de c;
b) P ($X > \frac{1}{3}$), P ($\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}$) e P($X > \frac{1}{3} \mid \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}$);
c) E (*X*);
d) Var (*X*).

17- Vendem-se 10000 bilhetes de lotaria a 5 euros cada para o sorteio de um automóvel no valor de 1200 euros. Calcule o lucro esperado de uma pessoa que comprou 3 bilhetes.

18- O nº diário de produtos vendidos por um vendedor ao domicílio é aleatório, apresentando a seguinte função de probabilidade:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
f (x)	0,10	0,15	0,20	0,20	0,20	0,10	0,025	0,025

a) Se o preço de venda do produto for de 9 euros e se o referido vendedor auferir uma comissão de 20% sobre as vendas que efectuar, quanto espera ele ganhar por dia?
b) E se além da comissão receber também um prémio de 5 euros nos dias em que venda mais de 5 artigos?

19- A v.a. *X* apresenta a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 5x^4 - 4x^5 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

a) Calcule P ($X < \frac{1}{2}$), P ($X \ge \frac{2}{3}$) e P ($\frac{1}{2} < X < \frac{2}{3}$) utilizando $F(x)$;
b) Deduza a função densidade de probabilidade de *X*;
c) Calcule E (*X*) e Var (*X*).

20- A procura mensal de uma empresa (em toneladas) comporta-se de forma aleatória de acordo com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}04 + \text{b} & 10 \le x \le 15 \\ 0 & \text{o.v. de } x \in IR \end{cases}$$

Da produção mensal (Q), cada tonelada vendida proporciona um lucro de 100 u.m. e cada tonelada não vendida origina prejuízos no montante de 20 u.m.
Determine a quantidade a produzir de forma a maximizar o lucro esperado.

21- Uma experiência consiste na extracção aleatória sem reposição de duas bolas de uma caixa. Sabendo que a caixa contém três bolas numeradas de um a três e definindo as seguintes variáveis aleatórias:

X = "número da segunda bola extraída"
Y = "menor dos números das duas bolas extraídas"

Determine:

a) A função de probabilidade conjunta do par aleatório (*X*,*Y*),
b) As seguintes probabilidades:

i) $P(X=Y)$ ii) $P(X>Y)$ iii) $P(X<Y)$
iv) $P(X \ge Y)$ v) $P(X \le Y)$ vi) $P(X+Y \le 3)$

c) As funções de probabilidade marginais,
d) A função de distribuição conjunta,
e) As funções de distribuição marginal,
f) O valor esperado e a variância de *X* e *Y*,
g) A covariância,
h) Se as variáveis são independentes,

22- Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas, conhecendo-se a informação da função de probabilidade conjunta e das funções de probabilidade marginais dada pela seguinte tabela

$X \backslash Y$	1	2	3	$f_X(x)$
1	1/12		1/12	1/3
2		1/4	1/12	
3	1/12			1/6
$f_Y(y)$	1/3		1/6	

a) Complete a tabela, por forma a obter a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y) e as funções de probabilidade marginais das duas variáveis aleatórias,
b) Determine o valor esperado e a variância de Y,
c) Calcule a P(Y ímpar|X ímpar),
d) Estude a independência entre as variáveis aleatórias X e Y.

23- Do histórico da cotação das acções de determinada empresa, sabe-se que a probabilidade da cotação das acções descer, manter-se igual e subir em qualquer dia aleatoriamente seleccionado é respectivamente de 0,5; 0,1 e 0,4. Sabe-se ainda que a evolução da cotação das acções em qualquer dia é independente das evoluções já registadas. Tendo sido seleccionado um período de dois dias consecutivos e definindo as seguintes variáveis aleatórias:

X = ”número de dias em que a cotação das acções desceu nesse período”
Y = “número de dias em que a cotação das acções subiu nesse período”

responda às seguintes questões:

a) Obtenha a função de probabilidade conjunta de X e Y, bem como as suas respectivas funções de probabilidade marginais,
b) Calcule o valor esperado e a variância de X e de Y.

24- Duma carteira de dez títulos contendo acções de 3 empresas do sector da construção civil, 2 seguradoras e 5 bancos, seleccionaram-se aleatoriamente dois títulos para colocar em venda. Definindo as seguintes variáveis aleatórias:

X = ”número de títulos de seguradoras seleccionados”
Y = “número de títulos de bancos seleccionados”

Obtenha a função de probabilidade conjunta de X e Y, bem como as suas respectivas funções de probabilidade marginais,

25- Considere o par aleatório (X,Y) com função de probabilidade conjunta dada por

X|Y	1	2	3	4
2	k	0,24	0,18	0,06
4	0,08	0,16	0,12	0,04

a) Qual o valor de k?

b) Deduza a função de probabilidade de Y.
c) Verifique se as variáveis são independentes.

26- Para certo estrato populacional cujo rendimento varia entre 100 e 200 euros e o consumo absorve entre 60% e 90% desse rendimento. A função de densidade de probabilidade conjunta supõe-se ser constante no domínio indicado.

a) Determine a função de densidade conjunta $f_{X,Y}(x,y)$.
b) Indique se as variáveis são independentes.

27- Considere a função densidade conjunta do par aleatório (X,Y)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kxy & 0 \leq x \leq 2 \ , \ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{o.v. } (x,y) \in IR^2 \end{cases}$$

a) Determine k de forma que $f_{X,Y}(x,y)$ seja uma função de densidade conjunta.
b) Obtenha a função de distribuição conjunta do par aleatório (X,Y).
c) Determine as funções de distribuição marginais de X e de Y.
d) Determine as funções de densidade marginais de X e Y.
e) Verifique se as variáveis X e Y são independentes.
f) Calcule o valor esperado de X e o de Y.
g) Avalie a covariância de (X,Y).
h) Determine a $P(X \leq 1{,}25; Y \leq 0{,}5)$.

28 – Considere a seguinte função densidade conjunta do par aleatório (X,Y)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ke^{-x-y} & x > 0 \ , \ y > 0 \\ 0 & \text{o.v.} \end{cases}$$

a) Determine k de forma que $f_{X,Y}(x,y)$ seja uma função de densidade conjunta.
b) Verifique se as variáveis *X* e *Y* são independentes.

29- Considere a seguinte função de distribuição conjunta do par aleatório (*X*,*Y*):

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-5x})(1 - e^{-3y}) & x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \\ 0 & \text{o.v.} \end{cases}$$

a) Verifique se as variáveis *X* e Y são independentes.
b) Identifique as funções densidade marginais de *X* e *Y*.

30- Sejam *X* e *Y* duas variáveis aleatórias tais que:

E[X]=4 V[*X*]=4 cov[X,Y]=10 E[*Y*]=100 V[*Y*]=100

Seja ainda *T* tal que *T*= 4*X*+*Y*. Calcule E[*T*] e V[*T*].

31- As variáveis que se seguem estão relacionadas com a produção e venda semanal de uma dada fábrica de montagem de computadores:

X = "número (em milhares) de computadores produzidos, semanalmente, pela fábrica"
Y = "número (em milhares) de computadores vendidos, semanalmente, pela fábrica".

Suponha que se conhecem as seguintes probabilidades conjuntas:

$X \ \backslash \ Y$	12	17	18	20
10	?	?	?	?
15	0,1	?	?	?
20	0,1	0,1	?	0,2

a) Determine os valores em falta na tabela, sabendo que são todos iguais e de forma que esta corresponda a uma função de probabilidade conjunta.
b) Determine a função de distribuição conjunta. (Se não resolveu a alínea a), atribua valores às probabilidades conjuntas em falta na tabela.)
c) Calcule $P(X \leq 18 \,|\, 10 < X < 21)$.

32- Num circuito a diferença de potencial é dada por uma equação que envolve a intensidade de corrente e a resistência. Sabe-se que a intensidade de corrente no circuito (X_1) e a resistência (X_2) são independentes e que as suas funções de densidade de probabilidade são:

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 2x_1 & 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 & \text{o.v.de } x_1 \in IR \end{cases} \quad \text{e} \quad f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_2^2}{9} & 0 \leq x_2 \leq 3 \\ 0 & \text{o.v.de } x_2 \in IR \end{cases}.$$

a) Calcule a função de densidade de probabilidade da variável aleatória (X_1, X_2).
b) Determine a intensidade média de corrente no circuito e o seu desvio padrão.
c) Determine $P(X_1 < 2, 0 \leq X_2 < 4)$.

33- Suponha que as proporções de estudantes do sexo feminino (X1) e do sexo masculino (X2) que não concluem o curso de Engenharia Informática no tempo previsto para a duração do mesmo, são descritas pela seguinte função de densidade conjunta:

a) Determine o valor de k.
b) Determine a função de densidade marginal de X2.
c) Calcule $P(X_1 > 0{,}5; X_2 > 0{,}5)$ e $P(0{,}3 < X_2 < 0{,}5)$.

34- No âmbito de uma determinada empresa, definiram-se as seguintes variáveis aleatórias:

X= "número de mulheres que faltam por dia devido a doença";
Y= "número de homens que faltam por dia devido a doença".

Suponha que $cov(X,Y)$=0, o que pode concluir? E se obtivesse $cov(X,Y)$>0 e $corr(X,Y)$=1, o que poderia concluir?

2.2 Soluções

1- a) a = 0,05

b)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ 0,2 & 2\le x<4 \\ 0,4 & 4\le x<5 \\ 0,45 & 5\le x<6 \\ 0,65 & 6\le x<7 \\ 0,7 & 7\le x<8 \\ 1 & x\ge 8 \end{cases}$$

c) 0,8, 0,4 e 0,8

2- a) k = 3/5

b)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/10 & 0\le x<1 \\ 3/10 & 1\le x<2 \\ 9/10 & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

c) a=2

3- b)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 1/14 & 1\le x<2 \\ 5/14 & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

c) 1/5

4- a)

$$f(x)=\begin{cases} 0,1 & x\in\{1,4\} \\ 0,3 & x=2 \\ 0,5 & x=3 \\ 0 & \text{o.v. de } x\in IR \end{cases}$$

b) 0,4; 0,9

5- a) a = ½

b)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4} & 1\le x<2 \\ -\dfrac{5}{4}+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{x^2}{4} & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

6- a) k = 3/2
b) 1/2 < b <3/2

7- a) k = 1/12
b)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{1}{12}\left(x^2+x\right) & 0\le x\le 3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$

c) 1/3

8- P(X<6|X>4)=0,5

9- a)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{10}{91} & x\in\{2,3\} \\ \dfrac{36}{91} & x=4 \\ \dfrac{14}{91} & x=5 \\ \dfrac{21}{91} & x=6 \\ 0 & \text{o.v. de } x\in IR \end{cases}$$

b)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ \dfrac{10}{91} & 2\le x<3 \\ \dfrac{20}{91} & 3\le x<4 \\ \dfrac{56}{91} & 4\le x<5 \\ \dfrac{70}{91} & 5\le x<6 \\ 1 & x\ge 6 \end{cases}$$

c) 5/7

10- a) k = 3

b) $\dfrac{e^3-1}{e^3}$

11- S = “Stock semanal da matéria prima A” , S $\geq$ 8,42.

12- a) 4,27
b) 3,02

13- a)

$$f(x)=\begin{cases} 1/6 & x=0;3 \\ 5/18 & x=1 \\ 2/9 & x=2 \\ 1/9 & x=4 \\ 1/18 & x=5 \\ 0 & \text{o.v. de } x \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/6 & 0\leq x<1 \\ 8/18 & 1\leq x<2 \\ 12/18 & 2\leq x<3 \\ 15/18 & 3\leq x<4 \\ 17/18 & 4\leq x<5 \\ 1 & x\geq 5 \end{cases}$$

b) 12/18

14- a) 4/3
b) 2/9

15- a) 6
b) 13/2

16- a) c= ¾
b) 49/54; 17/54 e 1
c) 11/16
d) 0,052

17- O lucro esperado é de –14,64, ou seja, será prejuízo.

18- a) b)

19- a) 3/16; 35/243 e 2599/3888

b) $f(x)=\begin{cases} 20\left(x^3-x^4\right) & 0<x<1 \\ 0 & x\leq 0 \text{ ou } x\geq 1 \end{cases}$

c) 2/3 e 2,78

20- Devem ser produzidas 14.16 toneladas.

21- a)

X\Y	**1**	**2**
1	2/6	0
2	1/6	1/6
3	1/6	1/6

b) i) 0,5 ii) 0,5 iii) 0 iv) 1 v) 0,5 vi) 0,5

c)

x	1	2	3
$f_x(x)$	2/6	2/6	2/6

x	1	2
$f_y(y)$	4/6	2/6

d) $F_{X,Y}(x,y)$ é dada por

X/Y	$y<1$	$1\leq y<2$	$y\geq 2$
$x<1$	0	0	0
$1\leq x<2$	0	2/6	2/6
$2\leq x<3$	0	3/6	4/6
$X\geq 3$	0	4/6	1

e)

X	$x<1$	$1\leq x<2$	$2\leq x<3$	$x\geq 3$
$F_x(x)$	0	2/6	4/6	1

Y	$y<1$	$1\leq y<2$	$y\geq 2$
$F_y(y)$	0	4/6	1

f) E[X] = 2; V[X] = 0,6(6); E[Y]=1,3(3) e V[Y]= 0,2(2)

g) cov[X,Y]=0,16(6)

h) As variáveis X e Y não são independentes.

22- a)

X\Y	**1**	**2**	**3**	$f_x(x)$
1	1/12	2/12	1/12	4/12
2	2/12	3/12	1/12	6/12
3	1/12	1/12	0	2/12
$f_y(y)$	4/12	6/12	2/12	1

b)) E[Y]=1,83(3) e V[Y]= 0,472(2)

c) 0,5

d) As variáveis aleatórias X e Y não são independentes.

23- a)

X\Y	**0**	**1**	**2**	$f_x(x)$
0	0,01	0,08	0,16	0,25
1	0,1	0,4	0	0,5
2	0,25	0	0	0,25
$f_y(y)$	0,36	0,48	0,16	1

b)) E[X] = 1; V[X] = 0.5; E[Y]=0.8 e V[Y]= 0.48

24- a)

X\Y	**0**	**1**	**2**	$f_X(x)$
0	6/90	30/90	20/90	56/90
1	12/90	20/90	0	32/90
2	2/90	0	0	2/90
$f_Y(y)$	20/90	50/90	20/90	1

25- a) k=0,12

b)

X\Y	**1**	**2**	**3**	**4**
2	0,12	0,24	0,18	0,06
4	0,08	0,16	0,12	0,04
$f_Y(y)$	0,2	0,4	0,3	0,1

c) As variáveis aleatórias X e Y são independentes.

26- a) X= “Rendimento familiar em certo estrato populacional”
Y=”Consumo familiar em certo estrato populacional”

K=1/4500.

c) As variáveis X e Y não são independentes.

27- a) k=1

b) $$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 0 & x<0 \vee y<0 \\ \frac{1}{4}x^2y^2 & 0\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 1 \\ \frac{1}{4}x^2 & 0\le x\le 2 \wedge y>1 \\ y^2 & x>2 \wedge 0\le y\le 1 \\ 1 & x>2 \wedge y>1 \end{cases}$$

c) $$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4}x^2 & 0\le x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases} \qquad F_Y(y)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ y^2 & 0\le y\le 1 \\ 1 & y>1 \end{cases}$$

d) $$f_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2}x & 0\le x\le 2 \\ 0 & x>2 \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ 2y & 0\le y\le 1 \\ 0 & y>1 \end{cases}$$

e) As variáveis aleatórias X e Y são insdependentes.
f) E[X] = 1,3(3), E[Y] = 0,6(6)
g) 0,098

28- a) k = 1
b) As variáveis aleatórias X e Y são independentes.

29- a) As variáveis aleatórias X e Y são independentes.
b) $f_X(x) = 5e^{-5x}$ se $x \geq 0$ e $f_Y(y) = 3e^{-3y}$ se $y \geq 0$.

30- E[T]=116 e V[T]=244.

3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E SUAS DISTRIBUIÇÕES

3.1 Enunciados dos Exercícios

1- Suponha que X tem distribuição binomial e que p = 0,2 e E (X) = 1. Calcule n e V (X).

2- Seja Y o número de sucessos em n provas de Bernoulli de uma experiência aleatória cuja probabilidade de sucesso é $p = \frac{1}{4}$. Determine o menor valor de n tal que $P(Y \geq 1) \geq 0{,}7$.

3- Uma empresa comercializa garrafas de vinho do Porto de 1 litro. Supõe-se, no entanto, que 40% dessas garrafas contém realmente uma menor quantidade de líquido do que o volume indicado no rótulo.
Tendo adquirido 6 dessas garrafas, qual a probabilidade de:

a) Duas delas conterem menos de 1 litro?
b) No máximo 2 conterem menos de um litro?
c) Pelo menos 2 conterem menos de um litro?
d) Todas conterem menos de um litro?
e) Todas conterem o volume indicado no rótulo?
f) Indique a função de probabilidade da variável aleatória em questão.

4- Qual a probabilidade de em 10 lançamentos de um dado perfeito,

a) se obterem 5 faces par;
b) se obterem 5 faces superiores a 4.

5- Se for estimada em 0,3 a probabilidade de uma pessoa contactada realizar uma compra.

a) Calcule a probabilidade de um vendedor que visita num dia 16 pessoas:
  i) realizar 5 vendas;
  ii) realizar entre 4 e 8 vendas;
  iii) realizar quando muito 2 vendas,
  iv) realizar no máximo 10 vendas;
  v) realizar pelo menos 12 vendas;
  vi) realizar no mínimo 3 vendas.

b) Calcule a probabilidade de, nas 16 pessoas visitadas pelo vendedor,
  i) 25% realizarem compras;
  ii) ser 0,5 a proporção das que realizam compras.

c) Continuando o vendedor a visitar 16 pessoas diariamente, qual o seu número médio diário de vendas?

6- A máquina 1 produz (por dia) o dobro das peças que são produzidas pela máquina 2. No entanto, 6% das peças fabricadas pela máquina 1 tendem a ser defeituosas, enquanto somente 3% o tendem a ser na máquina 2.
Qual a probabilidade de num lote de 10 peças extraídas ao acaso da produção total:

a) Haver 2 peças defeituosas?
b) Haver entre 2 e 5 (inclusive) peças defeituosas?
c) Qual o número esperado de peças defeituosas num lote de 100?

7- A probabilidade de um atirador acertar no alvo é de 0,6. Considere a variável aleatória: número de tiros que tem de efectuar até acertar 1 vez (a 1ª vez) no alvo. Calcule a probabilidade de:

a) ele ter de atirar 3 vezes para acertar no alvo;
b) serem necessários 10 tiros para obter o 1º disparo certeiro;
c) Indique a função de probabilidade.

8- O número de chamadas que chegam num período de 5 minutos à central telefónica de uma empresa é uma variável aleatória com distribuição de Poisson, de parâmetro $\lambda = 10$. Calcule a probabilidade de num período de 5 minutos:

a) chegarem exactamente 8 chamadas;
b) chegarem menos de 5 chamadas;
c) chegarem no mínimo 3 chamadas;
d) chegarem pelo menos 20 chamadas;
e) não chegar nenhuma chamada;
f) indique a função de probabilidade da variável aleatória em questão.

9- Suponha que um livro de 585 páginas contém 43 erros tipográficos. Se esses erros estiverem aleatoriamente distribuídos pelo livro, qual a probabilidade de que:

a) Uma página qualquer esteja livre de erros;
b) Onze páginas escolhidas estejam livres de erros.
Nota: Suponha que o número de erros por página segue uma distribuição de Poisson.

10- Admite-se que 5% da produção de certa fábrica seja defeituosa. Numa encomenda de 100 unidades, qual a probabilidade de se encontrarem

a) 2 peças defeituosas;
b) no máximo 2 peças defeituosas.

11- O tempo de duração de pequenos anúncios (anúncios entre 5 e 12 segundos) numa cadeia de televisão é aleatório, admitindo-se seguir distribuição uniforme.

a) Indique a função densidade de probabilidade correspondente;
b) Qual a probabilidade de um anúncio ter uma duração inferior a 8 segundos? E entre 8 e 12 segundos?
c) Qual a duração média por anúncio?

12- A distribuição exponencial com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{com } \lambda > 0$$

é usada, em certas condições, para descrever:
tempo de vida (duração) / o tempo de trabalho sem falhas (tempo de espera pela próxima falha) de um dispositivo, aparelho, etc.. Mais genericamente descreve o tempo de espera por determinado acontecimento.

a) Indique μ e σ;
b) Qual a probabilidade de X assumir um valor entre a e b?

13- A v.a. X segue distribuição normal de parâmetro $\mu = 20$ e $\sigma = 3$. Determine as seguintes probabilidades:

a) $P (X \leq 23)$;
b) $P (X < 14)$;
c) $P (X > 21)$;
d) $P (X > 17)$;
e) $P (21{,}5 < X < 25)$;
f) $P (16{,}2 < X < 18{,}8)$;
g) $P (17 < X < 29{,}3)$.

14- O conteúdo de certo tipo de garrafas é aleatório e com distribuição normal de $\mu = 1$ e $\sigma = 0{,}0201$. Se 3 garrafas forem despejadas para um recipiente, qual a probabilidade de este ficar com um volume de líquido superior a 3,1 litros ?

15- O rendimento anual (em euros) em determinada região apresenta distribuição normal de parâmetros $\mu = 350$ e $\sigma = 70$. Calcule a probabilidade de:

a) Uma família escolhida ao acaso ter um rendimento superior a 400 euros;
b) Pagar menos de 49 euros de impostos, sabendo que este é proporcional ao rendimento com uma taxa de 20%.

16- Determinada companhia possui em carteira dois lotes de acções, o 1º no valor de 10000 euros e o 2º no valor de 2000 euros.
Os proveitos que a companhia espera obter destes títulos no decurso do próximo ano supõem-se variáveis aleatórias (independentes) com distribuição normal de parâmetros:

	μ	σ
lote	1000	200
2º lote	500	250

a) Calcule a probabilidade de os lucros da companhia nos referidos títulos se situarem entre 1180 e 1500 euros.
b) Os técnicos da companhia prevêem que as autoridades aumentem a carga fiscal sobre os ganhos de capital. A taxa previsível (em %) supõe-se uma variável aleatória com distribuição uniforme de parâmetros 20 e 30. Qual o montante esperado que a companhia pagará de imposto?
Nota: A taxa de imposto é independente dos lucros da companhia. Sendo X e Y duas quaisquer variáveis aleatórias independentes então $E(X\times Y)=E(X)\times E(Y)$ e $V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)$ (estas propriedades podem generalizar-se para *n* variáveis aleatórias).

17- Determinada linha de coser é comercializada em bobines cuja capacidade em metros é uma variável aleatória cuja média é 100 e variância 156,25. Sabendo que o fornecimento é feito em caixas de 200 bobines, calcule a probabilidade de em 300 caixas, 10 terem mais de 20 350 metros (por caixa).

18- Uma empresa comercializa garrafas de vinho do Porto de 1 litro. Supõe-se que 40% dessas garrafas contém realmente uma menor quantidade de líquido do que o indicado no rótulo.
Em 100 garrafas existentes numa loja, qual a probabilidade de:

a) Haver 30 com menos de 1 litro;
b) Haver não mais de 30 com menos de 1 litro;
c) Haver mais de 45 com menos de 1 litro;
d) Haver entre 44 e 50 (inclusive) com menos de 1 litro.

19- O número de chamadas que chegam num período de 5 minutos à central telefónica de uma empresa é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 10$.

a) Calcule a probabilidade de em meia hora chegarem:
 a.1) 65 chamadas;
 a.2) pelo menos 70 chamadas.
b) Calcule a probabilidade de num dia (8 horas) chegarem:
 b.1) menos de 900 chamadas;
 b.2) entre 900 e 1000 (exclusive) chamadas.

20- Admite-se ser 0,4 a probabilidade de um cliente que entra num supermercado *M* realize despesa superior a 5 euros.

a) Qual a probabilidade de, em 3 clientes, nenhum realizar despesa superior a 5 euros.
b) Qual a probabilidade de, em 15 clientes, no mínimo dois gastarem mais de 5 euros?

21- Um estudante tem 3 exames. A probabilidade de passar em cada um é de ½. Calcule a probabilidade de passar em:

a) Em pelo menos um exame.
b) Em exactamente um exame.

22- Numa fábrica o número de acidentes por semana segue uma lei de Poisson, de parâmetro igual a 2. Calcule a probabilidade de que:

a) Numa semana haja menos de um acidente.
b) Se verifiquem 4 acidentes.

23- Um retalhista vende um produto cuja procura se tem comportado segundo uma distribuição de Poisson de parâmetro 5. Nos últimos 300 dias seguiu uma política de adquirir 8 artigos por dia, tendo verificado que em 21 desses dias o seu stock não chegou para satisfazer as encomendas. Quantos produtos (no mínimo) deverá ele passar a adquirir por dia se quiser fazer baixar para 0.03 a probabilidade de ruptura de stock? (Nota: os produtos não vendidos no próprio dia são inutilizados)

24- Se a probabilidade de um carro furar um pneu durante a passagem pela ponte sobre o Tejo for de 0,0004, qual a probabilidade de que em 10000 carros haja menos de 3 a sofrer tal percalço?

25- A procura diária de um certo produto num supermercado segue uma distribuição de Poisson. Sabendo que a procura média diária é de 3 produtos e que o stock diário é mantido em 6 unidades, calcule:

a) A probabilidade de num dia serem procurados pelo menos 2 produtos.
b) A probabilidade de se registar uma ruptura de stock.
c) O número esperado de clientes que ficam por satisfazer.
d) O novo stock diário a assegurar de forma que a probabilidade de ruptura seja no máximo 0,004.

26- Uma pessoa tem no bolso 5 chaves do mesmo tipo, mas só uma abre a porta. Considere o seguinte método: *experimentar uma chave após a outra, sem as repor no bolso após cada tentativa.* Seja X a variável aleatória que corresponde ao número de chaves experimentadas (incluindo a que abre a porta).

a) Determine a lei de probabilidade da variável X.
b) Qual o número médio de chaves a experimentar pelo método considerado?

27- Sabendo que a duração (em minutos) de uma conversa telefónica é uma variável aleatória X com função de densidade,

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{3}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Calcule:
a) k;
b) A probabilidade de uma conversa durar mais de 3 minutos
c) A probabilidade de uma conversa durar mais de 3 minutos dado que a conversa já dura à 2 minutos
d) A duração média de uma conversa.

28- Em média, atraca um navio em certo porto a cada dois dias. Qual a probabilidade de que, a partir da partida de um navio, se passem 4 dias antes da chegada do próximo navio?

29- Supondo que T, tempo (em horas) de trabalho sem falhas de um dispositivo, segue uma lei exponencial com λ =0,03.

a) Determine a probabilidade de o dispositivo trabalhar sem falhas nas primeiras 100 horas de funcionamento.
b) Sabendo que o dispositivo não falhou nas primeiras 100 horas, qual a probabilidade de não falhar nas 200 horas seguintes?

30- Seja X ~ $N(\mu, \sigma)$ e $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$. Mostre que E($Z$) = 0 e V(Z) = 1.

31- O tempo (em minutos) que um operário leva a executar certa tarefa é uma variável aleatória com distribuição normal. Sabe-se que a probabilidade de o operário demorar mais de 13 minutos é de 0,0668 e a de demorar menos de 8 minutos é de 0,1587. Calcule o tempo médio requerido para executar a tarefa e o respectivo desvio padrão.

32- As pontuações obtidas com um teste psicotécnico distribuem-se de uma forma aproximadamente normal, sendo a pontuação média de 50 pontos e o desvio padrão de 10 pontos. Qual a probabilidade de, em 20 pessoas submetidas a esse teste, se registarem 5 com pontuações inferiores a 41,6 pontos.

33- A distribuição dos rendimentos familiares de certo bairro de 5000 famílias (em u.m.) é satisfatoriamente representada por uma lei normal com parâmetros 180 u.m. e 25 u.m.

a) Qual o número esperado de famílias nesse bairro auferindo entre 175 u.m. e 188 u.m.?
b) Qual a percentagem de famílias que ganham menos de 163u.m.?

34- Um estudo aprofundado sobre o tráfico de uma ponte com seis faixas de rodagem revelou que, o número de veículos que passa em cada faixa de rodagem por minuto nos dias úteis entre as 7h e as 10h e entre as 17h e as 20h, é bem descrito por uma distribuição Poisson de média 5, enquanto que entre as 10h e as 17h e entre as 20h e as 7h é bem descrito por uma distribuição Poisson de média 2. Quanto aos dias não úteis, o número de veículos que passa em cada faixa de rodagem em cada período de 5 minutos é bem descrito por uma distribuição Poisson de variância igual a 10.
Com base nos dados deste estudo, diga qual a probabilidade de:

a) Num minuto aleatoriamente seleccionado do período entre as 8h e as 9h de um dia útil, terem passado pelo menos dois veículos numa faixa de rodagem da ponte?
b) Num minuto aleatoriamente seleccionado do período entre as 21h e as 23h de um dia útil, terem passado no máximo dois veículos numa faixa de rodagem da ponte? E na ponte?
c) Num período de 5 minutos aleatoriamente seleccionado de um domingo, terem passado não menos de 2 veículos mas não mais de 4 veículos numa faixa de rodagem da ponte?

35- Admita que o tempo que cada funcionário da empresa “BelMol” trabalha por dia é em média de 10 horas com um desvio de 2 horas e segue uma distribuição Normal.
a) Determine a probabilidade de um funcionário trabalhar mais de 8 horas, num dia de trabalho escolhido aleatoriamente?
b) A empresa precisa que o funcionário da gestão de stocks realize uma determinada tarefa que exige 60 horas. Sabendo que o tempo de trabalho por dia do funcionário é descrito pela distribuição $N(\mu = 10\text{h}, \sigma = 2\text{h})$, qual a probabilidade do funcionário realizar a referida tarefa em 5 dias?

36- Admita-se que as empresas do sector têxtil e do sector da construção civil de determinada economia têm um número de trabalhadores qualificados bem descrito respectivamente por uma distribuição $P(8)$ e $B(12;0,3)$.

c) Qual a probabilidade de que uma empresa aleatoriamente seleccionada entre as do sector têxtil tenha um trabalhador qualificado?
d) Qual a probabilidade de que uma empresa aleatoriamente seleccionada de entre as do sector da construção civil tenha dois trabalhadores qualificados?
e) Comente a afirmação: “o número esperado de trabalhadores qualificados no sector da construção civil é superior ao do sector têxtil”.

37- Admita-se que o tempo (em minutos) gasto por determinado operador para afinar cada máquina de que é responsável na linha de produção é bem descrito por uma distribuição *U* (5,10). Qual a probabilidade de que uma máquina aleatoriamente seleccionada:

a) Tenha exigido ao operador um tempo de afinação superior a 7 minutos?
b) Tenha exigido ao operador um tempo de afinação não inferior a 8 minutos e não superior a 9 minutos?
c) Tenha exigido ao operador um tempo de afinação inferior a 9 minutos, sabendo que o mesmo foi superior a 6 minutos?
d) Tenha exigido ao operador um tempo de afinação situado entre 6,5 e 8,5 minutos, sabendo que o mesmo se situou entre 5,5 e 9,5 minutos?

38- Admitindo que a intensidade dos sismos registados na América do Norte pode ser modelada por uma distribuição Exponencial, com média igual a 2 segundo a escala de Richter. Determine a probabilidade de que um sismo que abale essa região:

a) Exceda 4 na escala de Richter.
b) Varie entre 2,5 e 3,5 na mesma escala.
c) Calcule a variância da intensidade dos sismos.

39- Após um estudo a três sectores de determinada economia, um economista concluiu quanto às empresas do sector S1 que: o lucro anual é bem modelado por uma distribuição N(10;9) em milhares de euros; o volume de vendas anual é bem modelado por uma distribuição U(0,08;0,1) em milhões de euros e ainda que o número de operações de venda por semana é bem descrito por uma distribuição de Poisson de média igual a 4.
Seleccionando aleatoriamente uma empresa do sector S1 diga qual a probabilidade de que a mesma tenha:

a) Um lucro anual superior a 11 000 euros?
b) Um volume de vendas anual inferior a 82 000 euros?
c) Gerado ao fim de cinco anos consecutivos um lucro situado entre 50 000 e 60 000 euros, sabendo que o lucro anual é independente de ano para ano?
d) Efectuada 3 operações numa semana aleatoriamente seleccionada?
e) Efectuado 10 operações num período de três semanas aleatoriamente seleccionado?

40- O Serviço de *mailing* de uma empresa está encarregado de manter e desenvolver uma extensa lista de moradas de clientes. O serviço afirma que a probabilidade de qualquer dado da sua lista se encontrar desactualizado, dando assim origem a extravio é de 0,05.

a) Calcule o risco de mais de 3 cartas se extraviarem, ou menos de 10 chegarem aos clientes, caso sejam expedidas 15 cartas.
b) Se forem expedidas 100 cartas, qual a probabilidade de no máximo 10 se extraviarem?
c) Qual a probabilidade do responsável do serviço ter de investigar 5 registos da lista para encontrar o primeiro que está desactualizados?

41-- A produção total de uma dada empresa depende de duas máquinas. A máquina 1 produz (por dia) o dobro das peças que são produzidas pela máquina 2. No entanto, 6% das peças fabricadas pela máquina 1 tendem a ser defeituosas, enquanto somente 3% o tendem a ser na máquina 2.

a) Qual a probabilidade de uma peça, selecionada aleatoriamente da produção, ser defeituosa?
b) Qual a probabilidade de num lote de 10 peças, extração com reposição da produção total, haver entre 2 e 3 (inclusive) peças defeituosas?
c) Qual o número esperado de peças defeituosas num lote de 100?

42- A empresa NovaEra repara todo o tipo de avarias no hardware de qualquer marca de computadores. O número de computadores que chegam diariamente à empresa para reparação é, em média, de 100. Considere a variável:

X= "número de computadores recebidos diariamente para reparação de hardware".

a) Tendo em conta as distribuições que estudou, que distribuição poderá seguir a variável X? Defina a sua função de probabilidade.
b) Determine a probabilidade de, num dia, a empresa não receber nenhum computador para reparar?

43- As resistências elétricas de 200 ohms (valor nominal) produzidas por uma fábrica, têm uma distribuição normal com média de 200 *ohms* e desvio padrão de 10 ohms. Antes de serem armazenadas, as resistências são medidas e aquelas cujo valor não esteja compreendido entre 185 e 215 ohms vão para a sucata.

a) Qual a percentagem de resistências que vão para a sucata?
b) Considere uma amostra de 6 resistências. Qual a probabilidade de metade ir para a sucata?

44- Admita que o tempo que cada funcionário da empresa "BelMol" trabalha por dia é em média de 10 horas com um desvio de 2 horas e segue uma distribuição Normal. A empresa precisa que o funcionário da gestão de stocks realize uma determinada tarefa que exige 60 horas. Sabendo que o tempo de trabalho por dia do funcionário é descrito pela distribuição $N(\mu = 10\text{ h}, \sigma = 2\text{ h})$, qual a probabilidade do funcionário realizar a referida tarefa em 5 dias?

45- Uma pessoa pretende aceder a um computador, mas não sabe a password. Contudo, dispõe de uma caixa com 10 papeis em que cada um tem escrito uma password, mas apenas uma permite o acesso ao computador. Considere o seguinte método: retirar um papel da caixa, experimentar a password e, caso não seja a correta, repor o papel na caixa. Este método será aplicado até encontrar a password de acesso ao computador. Tendo em conta as distribuições que estudou considere a que se poderá adequar a esta situação e responda às questões que se seguem.

a) Qual a probabilidade de ser necessário experimentar 5 passwords para
b) Qual o número médio de passwords a experimentar para encontrar a que permite aceder ao computador?

3.2 SOLUÇÕES

1- a) n=5, V(X)=0.8

2- n=5

3- a) 0,311 b) 0,544
c) 0,7667 d) 0,0041 e) 0,0466
f)

$$f(x)=\begin{cases}\binom{6}{x}0,4^x 0,6^{6-x} & x\in\{0,1,2,3,4,5,6\}\\ 0 & x\in IR\setminus\{0,1,2,3,4,5,6\}\end{cases}$$

4- a) 0,2461 b) 0,1332

5- a-i) 0,2099 a-ii) 0,7285 a-iii) 0,0993 a-iv) 0,9981 a-v) 0,0002 a-vi) 0,9007
b-i) 0,204 b-ii) 0,0487
c) 4,8

6- a) 0,0746 b) 0,0862 c) 5

7- a) 0,096 b) 0,00016 c)

$$f(x)=\begin{cases}0,6\times 0,4^{x-1} & x\in\{1,2,3,\ldots\}\\ 0 & o.v.\ de\ x\in IR\end{cases}$$

8- a) 0,1126 b) 0,0293 c) 0,9972 d)1-$\sum_{i=1}^{20} f(i)$ e) 0

f)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10^x e^{-10}}{x!} & x\in\{0,1,2,\ldots\}\\ 0 & o.v.\ de\ x\in IR\end{cases}$$

9- a) 0,923 b) 0,443

10- a)0,0703 b) 0,1251

11- a)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{7} & 5\le x\le 12\\ 0 & o.v.dex\end{cases}$$

b) 3/7; 4/7 c) 8,5

12- a) $\mu = \frac{1}{\lambda}$; $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ b) $e^{-\lambda}\left(e^{a} - e^{b}\right)$

13- a) 0,8413 b) 0,223 c) 0,3707 d)0,8413
e) 0,2701 f) 0,2426 g) 0,8403

14- 0,0019

15- a) 0,2389 b) 0,668

16- a) 0,3413 b) 375 euros

17- 0,0856

18- a) 0,01 b) 0,0262 c) 0,1788 d) 0,2227

19- a.1) 0,0421 a.2) 0,1093
b.1) 0,9726 b.2) 0,8793

20- a) 0,216 b) 0,9903

21- a) 0,875 b) 0,375

22- a) 0,1353 b) 0,0902

23- Deve adquirir (no mínimo) 9 produtos por dia.

24- 0,8968

25- a)0,8008 b) 0,03
c) Considerando 100 clientes é de esperar que 3 fiquem por satisfazer.
d) Deve assegurar um stock diário (mínimo) de 8 produtos.

26- a)

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1} \frac{1}{5} & x \in \{1, 2, 3, \ldots\} \\ 0 & o.v.dex \end{cases}$$

b) 5

27- a) b) c) d)

29- a) P(X>100)=0,0498 b) P(X>300|X>100)=0,0025

34- a) 0,9596 b) 0,6767 ; 0,0019 c) 0,028753

35-

36- a) 0,00268 b) 0,16779
c) A afirmação é falsa, pois $E(X) = 8 > E(Y) = 3,6$

37- a) 0,6 b) 0,2 c) 0,75 d) 0,5

38- a) 0,135335 b) 0,1127 c) 4

39- a) 0,3707 b) 0,1 c) 0,432 d) 0,195 e) 0,105

40- a) 0,005 b) 0,9864

4. DISTRIBUIÇÕES AMOSTRAIS

4.1 ENUNCIADOS DOS EXERCÍCIOS

1- Supondo que o universo ou população em consideração é

X= "número de filhos por família em certo país hipotético"

Com X=0, 1, 2, 3, 4 (não há famílias com mais de 4 filhos).
Suponha ainda que conhece a distribuição do universo. A função de probabilidade de X é dada por:

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
f(x)	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

a) Quais os valores de μ e de σ^2 (parâmetros da população)?
b) Recolhe-se uma amostra aleatória de 2 famílias: (X_1,X_2). Indique a distribuição de probabilidade de X1 e de X2, bem como os respectivos parâmetros.
c) Qual a distribuição conjunta da amostra (X1,X2)?
d) Calcule a probabilidade de se obter a amostra (3;1), isto é, a 1ª família ter três filhos e a 2ª família ter um.
e) Se tivesse recolhido uma amostra de 10 famílias, qual a probabilidade de se obter (1;3;0;0;2;3;0;2;4;1).
f) Faça uma lista de todas as amostras de dimensão n=2 que se podem recolher do universo.
g) Em relação a cada uma das amostras, calcule o valor da estatística $\overline{X}$ (média amostral).
h) Encontre a distribuição de amostragem da média, calcule os respectivos parâmetros.
i) Comprove que $E(\overline{X})=\mu$ e $V(\overline{X})=\sigma^2/n$.

2- Suponhamos que as alturas de 3000 estudantes do sexo masculino de uma Universidade tenha média de 68 polegadas e desvio padrão 3 polegadas. Extraindo-se 80 amostras de 30 estudantes cada uma.

a) Qual seria a média e o desvio padrão da distribuição de amostral de médias no caso:

- a.1.) Amostragem com reposição;
- a.2.) Amostragem sem reposição;

b) Em quantas amostras podemos esperar que a média esteja entre 66,8 e 68,3 polegadas?
c) Em quantas amostras podemos esperar que a média esteja abaixo de 66,4 polegadas?

3- Certas válvulas fabricadas por uma companhia acusam vida média de 800 horas e desvio padrão de 60 horas. Determine a probabilidade de uma amostra aleatória de 35 válvulas acusar vida média:

a) entre 790 e 810 horas;
b) de menos de 785 horas;
c) entre 770 e 830 horas.

4- Determine a probabilidade de que, em 120 lançamentos de uma moeda, apareçam:

a) entre 40% e 60% de caras;
b) 5/8 ou mais caras.

5- Em determinadas eleições um dado candidato teve 46% dos votos. Determine a probabilidade de que, num escrutínio efectuado em:

a) 200;
b) 1000;

dos votantes, se obtenha maioria em favor do candidato.

6- Determine a probabilidade de que, das próximas 200 crianças a nascerem:

a) menos de 40% sejam meninos;
b) entre 43% e 57% sejam meninas;
c) mais de 54% sejam meninos.
Nota: Admita probabilidades iguais de nascimento para menino e menina.

7- Constata-se que 2% das peças fabricadas por uma máquina são defeituosas. Qual a probabilidade de num lote de 400 de tais peças, 3% ou mais sejam defeituosas?

8- Certa marca de lâmpada eléctrica tem vida média de 1500 horas, com desvio padrão de 150 horas. Ligam-se três lâmpadas de tal modo que, quando uma queima, a outra acende. Admitindo-se que as vidas médias são normalmente distribuídas, qual a probabilidade de o iluminamento permanecer:

a) no mínimo 5000 horas?
b) no máximo 4200 horas?

9- O conteúdo (em litros) de garrafas de óleo alimentar segue distribuição normal. Admita que os respectivos parâmetros sejam μ=0,99 litros e σ = 0,22 litros.

a) Qual a probabilidade de o conteúdo médio numa amostra de 16 garrafas seleccionadas para inspecção seja superior a 1 litro?

b) Qual a probabilidade de numa amostra de 100 garrafas o conteúdo médio ser inferior a 9,85 decilitros?

c) Encontre um intervalo tal que a probabilidade de $\overline{X}$, na amostra de 100 garrafas, nele estar contida seja de 0,95, ou seja, determine a e b de forma que $P(a \leq \overline{X} \leq b) = 0{,}95$.

10- Certa população tem a seguinte distribuição de idades:

Idade	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
% de elementos em cada categoria	30	20	15	15	10	5	5

Desta população escolhemos aleatoriamente e com reposição 100 elementos. Qual a probabilidade de a idade média na amostra ser $\geq$ 22?

11- Num determinado curso, 150 alunos escolheram a opção "Estatística". Sabe-se que o valor médio e o desvio padrão das classificações obtidas naquela opção foram de 12 e 1,5, respectivamente. Qual é a distribuição amostral de médias das classificações relativamente a amostras de 30 estudantes?

a) Considere amostragem com reposição?
b) Considere que é feita uma extracção sem reposição.

12- Os Q. I. (quocientes de inteligência) de uma certa população estudantil consideram-se normalmente distribuídos, com valor médio 123 e desvio padrão 4.

a) Observando 200 amostras de dimensão 20, determine o número provável destas, para as quais $\overline{X} < 125$.
b) Qual o valor de $P(\overline{X} < 121$ ou $\overline{X} > 125)$?

13- Em determinada cidade, os resultados de um exame oficial acusaram média 72 e desvio padrão 8.

a) Determine a nota mínima dos primeiros 20% de estudantes, considerando que a distribuição das notas é normal.
b) Em amostras aleatórias de 100 desses estudantes, determine a nota média mínima dos 20% melhor classificados.
c) Qual a percentagem de amostras de dimensão 100 onde se encontra uma média amostral superior a 74?

14- A variância de uma distribuição amostral de médias, para amostras de 100 elementos retiradas de uma população infinita, é 20. Qual a dimensão da amostra para reduzir para metade:

a) a variância;
b) o desvio padrão.

15- O conteúdo de frascos de certo xarope segue uma distribuição normal. Admita que os respectivos parâmetros sejam μ=199 ml e σ = 2 ml. Qual a probabilidade de que:

a) O conteúdo médio numa amostra de 16 frascos seleccionados para inspecção seja superior a 200 ml?
b) Numa amostra de 100 frascos, o conteúdo médio seja inferior a 198,5 ml?
c) Encontre um intervalo tal que P($a \leq \overline{X} \leq b$)=0,95, considerando amostras de 100 frascos.

16- Depois de fabricado e embalado, a vida de um certo fármaco é normal com média de 1200 dias e desvio padrão de 40 dias. Deseja-se enviar um lote do medicamento de modo que a vida média amostral não seja inferior a 1180 dias com probabilidade de 0,95. Calcule a dimensão do lote.

17- Sabe-se que em cada 100 alunos de uma escola primária duma zona rural, 60 têm mau aproveitamento escolar.

a) Qual a distribuição amostral de proporções relativa a amostras com 75 alunos?
b) Admitindo que a escola tem 150 alunos inscritos, qual a probabilidade de que, numa amostra de 75, pelo menos 45% tenham bom aproveitamento escolar?

18- A vida de certa componente eletrónica tem distribuição aproximadamente normal com média de 2000 dias e desvio padrão σ = 60 dias. Num lote de 10 componentes, qual a probabilidade de que o desvio padrão amostral não exceda os 64 dias?

19- Os resultados de uma eleição acusam 65% de votos a favor de determinado candidato. Determine a probabilidade de numa amostra de 200 eleitores se observar 10% de votos a favor do candidato.

20- Considere uma amostra aleatória de dimensão n=2, (X_1,X_2), retirada da população

X = ”número de computadores portáteis por família”,

cuja distribuição é a seguinte:

x	**0**	**1**	**2**	**3**
f(x)	0,6	0,25	0,1	0,05

a) Qual a probabilidade de obter a amostra (3,1), ou seja, qual a probabilidade de a primeira família seleccionada ter três computadores portáteis e a segunda família seleccionada ter um computador portátil?
b) Liste todas as possíveis amostras dimensão 2.
c) Qual das amostras possíveis de dimensão 2 é a mais provável?
d) Qual a probabilidade de a média amostral, $\overline{X}$, ser igual a 2,5?

21- Suponha que a percentagem de consumidores que prefere a marca de computadores portáteis “Tosca” é de 10%. Recolheu-se uma amostra de 200 indivíduos, que é representativa da população dos consumidores de portáteis.

a) Qual a probabilidade da proporção amostral ser superior a 0,15?
b) Com base nas condições dadas, determine a de forma que $P(\hat{P} \leq a)$=0,95.

22- A vida média das fontes de alimentação XPTO é de 7 anos com desvio padrão 1 ano, a variável em causa comporta-se segundo uma lei normal. Do universo das fontes de alimentação XPTO selecionaram-se, aleatoriamente, 100 para avaliação.

a) Qual a probabilidade da vida média amostral ser superior a 7,3 anos?

b) Com base nas condições dadas, determine a de forma que $P(\overline{X} \geq a) = 0,0455$.

c) Selecionou-se uma amostra de 101 fontes de alimentação, determine a probabilidade do desvio amostral da vida das fontes de alimentação ser superior a 1,1325 anos? Determine o valor do desvio amostral, S_1 anos, que permite ter probabilidade de 0,99 para o desvio amostral da vida das fontes de alimentação inferior a S_1 anos.

23-Assumindo que o lucro mensal da venda de material informático de uma qualquer loja, pertencente a uma cadeia multinacional, é bem descrito por uma distribuição normal com média 5 000 euros e desvio 500 euros. Do universo das lojas da referida cadeia multinacional selecionaram-se, aleatoriamente, 51 para avaliação.

a) Qual a probabilidade do lucro médio mensal na amostra ser superior a 5200 euros?

b) Qual a probabilidade do desvio padrão do lucro na amostra ser inferior a 575,22 euros?

4.2 SOLUÇÕES

1- a) $\mu = 1{,}85$ e $\sigma^2 = 1{,}4275$

b) As variáveis são independentes e identicamente distribuídas com $\mu = 1{,}85$ e $\sigma^2 = 1{,}4275$

c)

X1\X2	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0,0225	0,0375	0,045	0,03	0,015
1	0,0375	0,0625	0,075	0,05	0,025
2	0,045	0,075	0,09	0,06	0,03
3	0,03	0,05	0,06	0,04	0,02
4	0,015	0,025	0,03	0,02	0,01

d) 0,05 e) 0,000000075

f) (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4); (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4); (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4); (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4); (4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4).

g)

X1\X2	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0,5	1	1,5	2
1	0,5	1	1,5	2	2,5
2	1	1,5	2	2,5	3
3	1,5	2	2,5	3	3,5
4	2	2,5	3	3,5	4

h)

$\bar{x}$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f(\bar{x})$	0,0225	0,075	0,1525	0,21	0,22	0,17	0,1	0,04	0,01

i) $\mathrm{E}\left(\overline{X}\right)=1.85=\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{V}\left(\overline{X}\right)=0.71375$

2- a.1) $\mathrm{E}\left(\overline{X}\right)=68$ e $\sigma_{\overline{X}}=0.6$ a.2) $\mathrm{E}\left(\overline{X}\right)=68$ e $\sigma_{\overline{X}}=0.5975$
b) 53 c) Não se têm amostras com média abaixo de 66.4.

3- a) 0,6778 b) 0,9306 c) 0,997

4- a) 0,9714 b) 0,0031

5- a) 0,1271 b) 0,0057

6- a) 0,0023 b) 0,9522 c) 0,1292

7- 0,0764

8- a) 0,0005 b) 0,0228

9- a) F(0,18) = 0,5714 b) 1-F(0,23)=0,409
c) $P(u_1 < U < u_2) = 0{,}95$ com $u_1 = \dfrac{a-0{,}99}{0{,}022} = -1{,}96 \ldots e \ldots u_2 = \dfrac{b-0{,}99}{0{,}022} = 1{,}96\ldots$

10- $\cong 0{,}29$

11- a) $\mu = 12$ e $\sigma^2 = 0{,}075$
b) $\mu = 12$ e $\sigma^2 = 0{,}06$

12- a) $\cong 198$ amostras b) 0,0244

14- a) Duplica o valor de *n*.
b) Quadruplica o valor de *n*.

15- a) 0,0228 b) 0,0062 c) Considerando $n=100$ tem-se a = 198,61 e b = 199,39

16- ≈11

17- a) $\hat{p} \sim N(0.6, 0.057)$ b) 0,1056

18- 0,75

21- a) 0,0091 b) a ≈ 0,134 ou seja 13,4%

22- a) 0,0013 b) a ≈ 7,169 anos c) ≈0,025 ; S_1=1,159

23- a) 0,0023 b) 0,95

5. ESTIMAÇÃO PONTUAL E INTERVALAR

5.1 ENUNCIADOS DOS EXERCÍCIOS

1- Uma amostra de 8 animais alimentados com base na ração A forneceu os seguintes pesos (em Kg):

4 ; 6 ; 4,5 ; 4 ; 5,6 ; 6,2 ; 5,8 ; 6

Considere que o peso dos animais se comporta normalmente:

a) Construa um intervalo de confiança a 95% para o verdadeiro peso médio dos animais, que é possível alcançar quando alimentados pela ração A.
b) Construa outro intervalo de confiança a 95% para o mesmo parâmetro, supondo agora que conhece o desvio padrão $\sigma = 0,9$.
c) Comente os resultados obtidos, explicando as razões da diferença entre ambos.

2- Pretende-se estimar a média de uma variável aleatória X que segue uma lei normal, de variância 100. Utiliza-se uma amostra com 25 observações cuja média é igual a 42. Calcule o grau de confiança associado ao intervalo]39,2;44,8[e diga, justificando se existe, para o mesmo nível de confiança, outro intervalo que seja preferível ao intervalo dado.

3- A característica X de certo artigo produzido em série segue distribuição normal com desvio padrão 3. Com base numa amostra aleatória de 25 unidades que forneceu um valor médio $\bar{x} = 48$, construa um intervalo de confiança de 95% para o valor médio da população.

4- Certo equipamento de empacotamento automático encontra-se regulado para encher embalagens de um quilo de certo produto. O seu deficiente funcionamento origina prejuízo para a empresa: se a maioria das embalagens têm peso inferior ao estabelecido, haverá reclamações por parte dos clientes e perda de prestígio; por outro lado, peso excessivo será anti-económico. Aceita-se, da experiência passada que o peso das embalagens se comporta normalmente com dispersão dada por $\sigma = 12$ gramas. Para verificar a afinação do equipamento, seleccionaram-se em certo período, nove embalagens cujos pesos exactos foram anotados (em gramas):

983	992	1011
976	997	1000
1004	983	998

a) Construa intervalos de confiança para μ com os seguintes graus de confiança: 90%, 95%, 99%. Como varia a precisão do intervalo (a sua amplitude) com a variação do grau de confiança?
b) Supondo que, em vez da amostra de nove embalagens, tinha sido obtida uma outra de 100 embalagens, que após os necessários cálculos, tinha fornecido um peso médio $\bar{x}$=994 gramas. Construa novo intervalo de confiança, a 95%, com base nesta segunda amostra. Que ilação retira do aumento da dimensão da amostra?
c) Qual deverá ser a dimensão da amostra a recolher, de tal forma que a amplitude do intervalo (a 95%) seja 2?

5- Para saber a proporção de HIV seropositivos num determinado país um certo farmacêutico recolhe uma amostra de sangue de 100 indivíduos escolhidos aleatoriamente, tendo 20 deles sido registados seropositivos. Construa um intervalo de confiança a 95% para a verdadeira proporção de seropositivos nesse país.

6- Pretende-se estimar a proporção de pessoas que, em certa região, é potencial compradora do novo produto PL a lançar no mercado pela empresa F. Numa amostra de 500 pessoas dessa região, 180 afirmaram-se receptivas ao novo produto.

a) Apresente uma estimativa para a proporção de pessoas que comprarão o referido produto.
b) Faça o mesmo através de um intervalo de confiança a 99%.

7- De um total de 200 notas em matemática, uma amostra aleatória de 50 notas acusa média de 75 e desvio padrão 10.

a) Quais os limites de confiança a 95% para estimar a média das 200 notas?
b) Com que grau de confiança poderiamos afirmar que a média das 200 notas é 75 $\pm$ 1?

8- No ano passado, a percentagem de reclamações de acidentes pagos por uma seguradora foi 7%. Sabendo que a seguradora tem um total de 7000 apólices, obtenha o intervalo de confiança a 90% para o número de reclamações de acidentes que serão pagos durante o corrente ano.

9- Fizeram-se 5 medições do tempo de reacção de um indivíduo a um dado estímulo (assuma que segue uma distribuição normal), obtendo-se os seguintes valores em segundos:

$$(0.28, 0.3, 0.27, 0.31, 0.33)$$

a) Determine o intervalo de confiança a 99% para o tempo médio de reacção do indivíduo ao estímulo.
b) Considerando a mesma amostra, qual o nível de confiança do intervalo (0,269;0,2729)?

10- Pretendendo-se conhecer o peso médio, μ, do fígado de certa espécie animal, pesaram-se 70 fígados e obteve-se a média aritmética $\bar{x} = 76g$.

a) Sabendo que $\sum_{i=1}^{70}(x_i - 76)^2 = 4480$ determine o intervalo de confiança a 99% para o parâmetro μ.

b) Resolva a alínea a) supondo que o desvio padrão do peso do fígado do animal é σ=7,5 gr.

c) Considere $\bar{x} = 76g$, σ=7,5 gr e determine o intervalo de confiança para μ supondo agora que n = 280.

d) Relacione as amplitudes dos intervalos calculados em b) e c) com as dimensões das amostras utilizadas.

11- Numa sondagem a 100 pessoas seleccionadas aleatoriamente numa população de 10 000 adultos, inquiriu-se sobre a existência de uma religião oficial. Trinta pessoas afirmaram estar de acordo, e as restantes declararam o contrário. Conclui-se então que entre 2 100 e 3 900 pessoas estariam de acordo com a existência de uma religião oficial. Qual o nível de confiança utilizado?

12- Obteve-se a seguinte distribuição de alturas para uma amostra aleatória de 100 indivíduos de certa população:

Altura(cm)	Frequência
150-160	2
160-165	10
165-170	40
170-175	35
175-180	8
180-190	5

a) Determine o intervalo de confiança a 99% para a altura média da população onde foi recolhida a amostra.

b) Calcule o intervalo de confiança a 95% para a proporção de indivíduos com altura inferior a 1,70 m, em termos populacionais.

13- Supondo uma população normal, contrua um intervalo de confiança a 90% para a variância σ^2 utilizando a amostra: 44.9, 44.1, 43, 42.9, 44.5.

14- Suponha que a variância de certa característica de um produto fabricado em série deve ser, de acordo com as normas de fabrico igual a 4. Existindo indícios de que os produtos apresentam essa característica com variância superior à estipulada, foi recolhida uma amostra de 9 artigos desse produto que forneceu os seguintes valores:

5; 7; 2; 4; 8; 9; 8; 6; 5

Através da construção de um intervalo de confiança apropriado, com nível de confiança 90%, diga se será de admitir que a variância da característica em causa continua a ser 4.

15- Ao estudar-se a resistência de certo tipo de plásticos, chegou-se à conclusão de que o seu ponto de fusão era uma variável aleatória com distribuição normal, expressa em dezenas de graus centígrados. Experimentaram-se num forno apropriado 5 peças daquele material, tendo-se verificado fusão, respectivamente, para: 70, 40, 50, 30, 60.
Calcule:

a) Um intervalo de confiança a 95% para o ponto médio de fusão daquele tipo de plástico.
b) Um intervalo de confiança a 95% para a variância.

16- Com o objetivo de inspecionar o respeito pelos direitos de autor na utilização de software informático nas empresas portuguesas, inspecionou-se uma amostra de 220 empresas. Neste conjunto, verificou-se que 60 empresas não cumpriam a lei e utilizavam software para o qual não tinham licença de utilização.

a) Construa um intervalo de confiança, a 97%, para a proporção de empresas do país que utilizam software sem terem licenças de utilização. Interprete o resultado obtido.
b) Que nível de confiança deveríamos considerar se pretendesse obter um intervalo de confiança com metade da amplitude do obtido na alínea anterior.
c) Qual a importância da amplitude do intervalo de confiança? Como poderíamos diminuir a amplitude do intervalo de confiança?

17- Foi efetuado um estudo relacionado com distúrbios do sono na região de Lisboa. Recolheu-se uma amostra aleatória de 21 indivíduos saudáveis e registou-se a duração dos períodos de vigília (em unidades de tempo). A variância obtida a partir da amostra foi de 2,25. Assuma que a população, de onde é oriunda a amostra, é normal.

a) Determine um intervalo de confiança a 95% para o desvio padrão da duração dos períodos de vigília da população. Sendo o valor usual para o desvio padrão da duração dos períodos de vigília de 1 unidade de tempo, o que pode concluir?
b) Diga, justificando, como poderá variar a amplitude do intervalo de confiança se mantivermos o grau de confiança e variarmos a dimensão da amostra.

18- Um fabricante de uma dada marca de cigarros diz que o teor médio de nicotina dos seus cigarros não excede 6,5 mg por cigarro. Em 50 cigarros, da marca em causa, avaliou-se a quantidade de nicotina (X) e obtiveram-se os seguintes resultados

$$\sum_{i=1}^{50}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=2{,}12\ \text{mg}^2 \qquad \sum_{i=1}^{50}x_i=340{,}7\ \text{mg}\ .$$

a) Tendo em conta a amostra, determine o intervalo de confiança a 97% para o valor médio de nicotina da marca em causa.
b) Determine a dimensão da amostra que permite obter um intervalo de confiança a 99%, para a média de nicotina, com 1 mg de amplitude.

19- Numa determinada zona da cidade de Lisboa efetuaram-se medições da concentração de monóxido de carbono. Os dados recolhidos, em dias selecionados aleatoriamente, relativos aos valores de concentração medidos em ppm (partes por milhão) foram:

102,2	98,4	104,1	101,0	102,2	100,4	98,6	88,2	78,8	83,0
84,7	94,8	105,1	106,2	111,2	108,3	105,2	103,2	99,0	98,8

Assume-se que a concentração de monóxido de carbono na cidade de Lisboa se comporta segundo uma distribuição normal.
Determine um intervalo de confiança a 95% para a concentração esperada de monóxido de carbono, assim como para o desvio padrão.

20- Com o objectivo de inspeccionar o respeito pelos direitos de autor na utilização de software informático nas empresas portuguesas, inspeccionou-se uma amostra de 220 empresas. Neste conjunto, verificou-se que 60 empresas não cumpriam a lei e utilizavam software para o qual não tinham licença de utilização.

a) Construa um intervalo de confiança, a 97%, para a proporção de empresas do país que utilizam software sem terem licenças de utilização. Interprete o resultado obtido.
b) Que nível de confiança deveríamos considerar se pretendesse obter um intervalo de confiança com o dobro da amplitude do obtido na alínea anterior.
c) Qual a importância da amplitude do intervalo de confiança? Como poderíamos diminuir a amplitude do intervalo de confiança?
d) O que distingue a estimação pontual da estimação intervalar?

21- Num determinado problema utilizou-se

$$\boldsymbol{IC_\mu = \left]\overline{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[}$$

para determinar os seguintes intervalos de confiança para a média da população

Intervalo de confiança para μ a 90%]0.922,1.078[,
Intervalo de confiança para μ a 95%]0.907,1.093[,
Intervalo de confiança para μ a 99%]0.878,1.122[.

a) Compare os intervalos obtidos e justifique as diferenças.
b) Deduza o IC_μ utilizado.

5.2 SOLUÇÕES

1- a)]4,47947; 6,04553[b)]4,63883;5,88617[c) a amplitude do intervalo de a) é superior à amplitude de b), o que era de esperar, dado que em a) foi utilizado o desvio padrão amostral e em b) o desvio padrão da população.

7- a)]72,23;77,77[

8-]0,0649; 0,075[

9- a)]0,238; 0,35[b) Entre 80% e 95%.

10- a)]73,5; 78,5[b)]73,6; 78,3[c)]74,9;77,2[

11- Aproximadamente 95%.

12- a)]168,8; 171,6[b)]0,379; 66,1[

13-]0,2;1,9 [

14-]2,52;14,7[

15- a)]30,4; 69,6[b)]89,8; 2066,1[

6. TESTES DE HIPÓTESES

6.1 ENUNCIADOS DOS EXERCÍCIOS [1]

1- Uma máquina está preparada para encher sacos de café com o peso médio de 250 gramas e desvio padrão de 5 gramas. Uma amostra aleatória de 25 sacos escolhidos da produção de um dia proporcionou a média de 252,2 gramas.
Com base na informação fornecida pela amostra e utilizando níveis de significância de 5% e 1%, diga o que pode concluir quanto às condições de funcionamento da máquina, supondo que o universo é normal.

2- Uma multinacional farmacêutica produz um medicamento afirmando que ele é eficaz no tratamento de 95% dos doentes a que é ministrado. Aplicada a droga a uma amostra de 400 indivíduos que sofrem da doença em causa verificou-se um resultado positivo em 321 pacientes.
Discuta a afirmação da multinacional para um nível de significância de 5%.

3- A vida média de uma amostra de 100 lâmpadas fluorescentes fabricadas por determinada companhia é de 1570 horas, com desvio padrão de 120 horas. Se μ é a vida média de todas as lâmpadas fabricadas pela companhia, teste a hipótese $\mu = 1600$

[1] **Resolva os exercícios deste capítulo, sempre que possível, pelos dois processos alternativos: apresentando as regiões de rejeição e de não rejeição de H0 e recorrendo ao cálculo do *valor-p*.**

horas contra a hipótese alternativa $\mu \neq 1600$ horas, utilizando um nível de significância de

a) 0,05;

b) 0,01.

4- No problema anterior teste a hipótese $\mu = 1600$ horas contra a hipótese $\mu < 1600$ horas, utilizando um nível de significância

a) 0,02;

b) 0,03.

5- O fabricante de determinado remédio alega que o mesmo acusou 90% de eficiência em aliviar a alergia por um período de 8 horas. Em uma amostra de 200 indivíduos que sofriam de alergia, o remédio deu resultado positivo em 160. Determine se a alegação do fabricante é legítima, ou não ($\alpha = 1{,}5\%$).

6- Numa amostra de 100 homens de certa idade, 38 afirmaram preferir lâminas da marca "Dural". Ensaie a hipótese de a percentagem dos que preferem a referida marca ser de 40% contra a alternativa de ser inferior ($\alpha = 1\%$).

7- Uma empresa tenciona importar um grande lote de instrumentos de precisão, a serem usados nos laboratórios de análise. Os fabricantes garantem que o respectivo peso médio é de 100 gramas. Sendo, no entanto, o peso uma característica importante na qualidade do produto, resolveu-se testar a garantia do fabrico. Para tal, o departamento técnico da empresa importadora obteve uma amostra de 15 instrumentos, de onde resultaram os seguintes valores:

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 1344g \qquad \sum_{i=1}^{15}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 3000.$$

a) Admitindo que o peso é normalmente distribuído, diga qual a conclusão a tirar ($\alpha = 5\%$).

b) Considerando que o desvio minímo é traduzido por $\sigma \geq 15$ g, utilize a amostra anterior para concluir se a especificação está a ser respeitada. ($\alpha = 1\%$).

8- Com o intuito de investigar o tipo de audiência de certo programa televisivo:

a) Obtiveram-se as idades de 100 telespectadores, seleccionados de forma aleatória, cujo desvio padrão é s = 6,15 anos. Convencionando-se que a assistência é considerada heterogénea se a variação das idades, em relação à média, ultrapassar os 6 anos, que conclui para $\alpha = 5\%$?

b) Recolhemos uma amostra de 200 telespectadores, dos quais 110 eram do sexo feminino. Podemos concluir, para $\alpha = 1\%$, que o programa é menos cativante para os indivíduos do sexo masculino?

9- Um analista político admite que certo candidato possa ter 20% dos votos. Feita uma sondagem, 14 dos 100 inquiridos revelam que tencionam votar no referido candidato.

a) Que pode concluir para $\alpha = 5\%$?

b) No caso de em 1000 inquiridos, 850 se declararem contra o candidato em causa, qual a conclusão a tirar? ($\alpha = 1\%$)

10- Um laboratório lançou no mercado um novo medicamento para combater a insónia, afirmando a sua eficácia em 90% dos casos. A aplicação do fármaco a uma amostra de 200 indivíduos revelou-se positiva em 170. Poderemos concluir que a afirmação do fabricante é correcta? ($\alpha = 1\%$)

11- Seja X o Q.I. dos estudantes de certa escola, com distribuição normal de média desconhecida e desvio padrão 15. Foi retirada uma amostra aleatória de 25 estudantes cujo Q.I. médio é 106. Teste as hipóteses de a verdadeira média dos Q. I. da população de alunos da escola ser 100 contra a alternativa de ser 110. ($\alpha = 1\%$)

12- Uma fábrica produz memórias de computador. No passado, essas memórias tinham probabilidade 0,15 de avariarem nas primeiras 500 horas de funcionamento. Entretanto, devido ao forte investimento em nova tecnologia, a direção espera ter reduzido essa probabilidade. Para verificar esta suposição, testaram-se 40 memórias e observou-se que 5 avariaram nas primeiras 500 horas de funcionamento. Com base nos dados, realize o teste de hipóteses adequado para averiguar a veracidade da suposição da direção da fábrica. ($\alpha = 1{,}5\%$)

13- O tempo de execução (segundos) de um algoritmo usado em optimização é uma variável aleatória X aproximadamente normal, com variância desconhecida. Resultados preliminares sugerem que $\mu_X \leq 10$ segundos, pelo que decidiu-se testar o algoritmo em 50 casos que cobrissem uma grande variedade de aplicações, onde se observou $\bar{x} = 12$ segundos e $s = 3$ segundos. Os dados recolhidos corroboram a média de tempo de execução do algoritmo sugerida pelos resultados preliminares? ($\alpha = 2{,}5\%$)

14- Um fabricante de telemóveis assegura que um dos seus modelos funciona durante 200 horas com um desvio padrão de 30 minutos, sem que a bateria precise de ser carregada. Uma organização de defesa dos consumidores, depois de algumas reclamações suspeita que o tempo de funcionamento é inferior a 200 horas e que o desvio padrão é superior a 30 minutos. No sentido de averiguar de que lado está a razão testaram-se 101 telemóveis observando-se uma média de tempo de funcionamento de 195 horas com um desvio padrão de 1 hora. Com base nos dados, discuta as alegações do fabricante e da organização de defesa dos consumidores relativamente à média e desvio padrão do tempo de funcionamento dos telemóveis? ($\alpha = 1\%$)

15- O tempo entre avarias, X, de um tipo de motores produzidos por uma fábrica é uma variável aleatória com média de 7500 horas e desvio padrão de 240 horas. A equipa de engenharia, depois de alterar algumas das características técnicas, testou 36 motores, escolhidos aleatoriamente, e verificou que o tempo médio entre avarias era de $\bar{x} = 7600$ horas. Será que o tempo entre avarias é superioe a 7500 horas? ($\alpha = 3\%$)

16-Uma empresa que desenvolveu um novo programa de computador de tratamento de imagem afirma que o programa é compatível com mais de 99% do equipamento computacional de uso corrente. Assim, efectuou-se um teste em 200 equipamentos e verificou-se que o programa corria sem problemas em 197 deles. Discuta a afirmação da empresa face aos dados recolhidos. Considere um nível de significância de 2%.

17- Uma empresa desenvolveu um novo software de tratamento de imagem e afirma que o programa é compatível com mais de 99% do equipamento computacional. Efectuou-se um teste a 200 equipamentos e verificou-se que o software corria sem problemas em 197 deles. Que validade tem a afirmação da empresa que produziu o software? Considere um nível de significância de 2,5%.

18- Uma fábrica que produz fontes de alimentação para computadores sabe que, no passado, 0,1% das fontes que produzia avariavam nas primeiras 1000 horas de funcionamento. Para combater o problema a fábrica fez grandes investimentos em nova tecnologia esperando melhorar a qualidade do seu produto. Verificaram-se 2000 fontes de alimentação das produzidas pela fábrica e apenas uma delas avariou ao fim de 1000 horas de funcionamento.

a) Pretende-se inferir se de facto existem sinais de ter havido diminuição na proporção de fontes de alimentação que avariam ao fim de 1000 horas de funcionamento. Para tal, efetue o teste de hipóteses adequado e diga o que pode concluir. (Use um nível de significância de 1,5%)
b) Determine o valor-p do teste realizado na alínea anterior. O que pode concluir?

19- Um fabricante de uma dada marca de cigarros diz que o teor médio de nicotina dos seus cigarros não excede 6,5 mg por cigarro. Em 50 cigarros, da marca em causa, avaliou-se a quantidade de nicotina (X) e obtiveram-se os seguintes resultados

$$\sum_{i=1}^{50}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 2{,}12 \text{ mg}^2 \qquad \sum_{i=1}^{50} x_i = 340{,}7 \text{ mg} \; .$$

a) Tendo em conta a amostra, será sustentável a afirmação do fabricante? Considere um nível de significância de 0,0005.
b) Determine o valor-p do teste realizado na alínea anterior. O que pode concluir?

20- O tempo de funcionamento (em horas), sem ocorrerem falhas, de um determinado tipo de servidores *WEB* (representado pela variável X) segue uma distribuição aproximadamente normal. Observaram-se 51 servidores durante o mesmo período de tempo e obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{51} x_i = 3500 \; horas \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{51}(x_i - \bar{x})^2 = 1250 \; horas^2.$$

A empresa que fabrica os servidores em causa alega que o tempo médio de funcionamento sem falhas não ultrapassa as 65 horas.

a) Pretende-se averiguar se os resultados da amostra corroboram ou não as alegações do fabricante. Para tal, efetue o teste de hipóteses adequado, através da determinação da região crítica, e diga o que pode concluir. (Use um nível de significância de 1,7%)

b) Determine o valor-p do teste realizado na alínea anterior. O que pode concluir?

7. TESTES NÃO PARAMÉTRICOS

7.1 ENUNCIADOS DOS EXERCÍCIOS

1- Considere o registo dos últimos 1000 tempos entre avarias de componentes de uma rede de computadores que correspondem a ocorrências de uma variável aleatória X, que se supõe ter distribuição normal com parâmetros, μ e σ, desconhecidos. A distribuição de frequências apresenta-se na tabela seguinte:

Tempos	[0,1[	[1,1.5[	[1.5,2[	[2,3[
Frequência	500	260	200	40

Será que os dados recolhidos permitem dizer que o tempo entre avarias segue uma distribuição normal? (Considere um nível de significância de 1%)

2- O fluxo de tráfego num cruzamento, definido pelo número de veículos X que chegam ao cruzamento por minuto, tem uma distribuição que se supõe de Poisson (λ), sendo λ desconhecido. Efectuou-se um conjunto de 1000 observações independentes de X e com a distribuição de frequências da tabela seguinte:

Nº de veículos	0	1	2	3	4	5	6	7
Frequência	136	294	257	165	81	44	8	15

Será que o fluxo de tráfego no referido cruzamento segue uma distribuição de Poisson? (Considere um nível de significância de 2,5%)

3- O fluxo de clientes a numa empresa que vende hardware, definido pelo número de clientes, X, que chegam à empresa por minuto tem uma distribuição que se supõe de Poisson, $P(\lambda)$, de parâmetro λ desconhecido. Efetuou-se um conjunto de 1000 observações independentes de X e obtiveram-se os resultados que se apresentam na tabela que se segue.

nº de clientes	0	1	2	3
nº de ocorrências	268	234	253	245

Utilize o teste de hipóteses adequado para averiguar se a amostra recolhida se ajusta a uma distribuição de Poisson?

4- Os resultados de 82 crianças duma escola num teste de leitura são os seguintes (de 0 a 100):

Resultados	[35,45[	[45,55[	[55,65[	[65,75[	[75,85[
Frequência	12	26	31	11	2

Poderemos afirmar que a distribuição experimental se ajusta ao modelo Normal? (Considere um nível de significância de 5%)

5- Suponha que a distribuição do tempo (em meses) necessário para 100 programadores desenvolverem uma base de dados com determinadas especificações foi:

Tempo de desenvolvimento (meses)	Nº de programadores
]15,30]	35
]30,60]	21
]60,120]	44

Será que o referido tempo de desenvolvimento da base de dados se ajusta a uma distribuição Normal? (Considere um nível de significância de 1%)

6- A distribuição da Taxa de Colesterol Total (TCT) de uma amostra aleatória de 220 indivíduos é a seguinte:

TCT	[100;190[	[190;220[	[220;280[	[280;310[
Nº de ocorrências	30	80	70	40

Será que a amostra provém de uma população em que a TCT segue uma distribuição Normal? (Considere um nível de significância de 2,5%.)

7- Vai ser proposta uma nova regulamentação para as residências do IPG. Foi pedida a opinião sobre a referida regulamentação a um grupo de 350 estudantes e obtiveram-se os seguintes resultados:

Sexo \ Opinião	A favor	Contra	Indiferente
Masculino	93	21	72
Feminino	55	30	79

Verifique se estes dados são consistentes com a afirmação "a opinião sobre a nova regulamentação é independente do sexo do estudante". Considere um nível de significância de 1%.

8- Uma sondagem procura saber qual o grau de associação entre o sexo e a intenção de voto. Os resultados aparecem no quadro:

Sexo \ Partido	A	B
Masculino	23	97
Feminino	45	75

Que poderemos concluir? Considere um nível de significância de 2.5 %.

9- Em indivíduos com idades compreendidas entre os 35 e 65 anos, formaram-se três grupos etários, para estudarmos as pontuações obtidas numa bateria de testes. Os resultados constam na tabela seguinte:

Idade \ Pontuações	>145	≤145
Grupo A	29	20
Grupo B	13	14
Grupo C	34	10

Teste para um nível de significância de 5% se existe dependência entre as pontuações obtidas no teste e a idade.

10- Foi realizado um inquérito sobre o consumo de vitaminas. Os resultados, expressos em função do nível cultural dos indivíduos, medido em nº de anos de escolaridade, foram os seguintes:

		Nº de anos de escolaridade			
		< 7	**[7,12[**	**[12,15[**	**≥ 15**
Consome Vitaminas?	**Sim**	46	392	290	249
	Não	461	3305	1738	1059

Será que existe dependência entre o consumo de vitaminas e o nº de anos de escolaridade? (Aplique o teste de hipóteses adequado com um nível de significância de 5%.)

11- Dum questionário sobre consumo constava a identificação do género dos indivíduos e a sua preferência por uma de três marcas de smartphones: A, B e C. Dos 51 homens, 10 manifestaram preferência pelo smartphone A, 30 pelo B e os restantes pelo C. Das 48 mulheres, 30 manifestaram preferência pelo smartphone A, 2 pelo B e os restantes pelo C.

a) Resuma os dados apresentados numa tabela de contingência.
b) Será que preferência pelas marcas de *smartphones* é dependentes do sexo dos indivíduos? Aplique o teste de hipóteses adequado ao problema considerando um nível de significância de 1%.

12- Os resultados de 82 alunos, de uma determinada escola, num teste de Português foram os seguintes (considerando a classificação de 0-100 valores)

Classificação	Nº de alunos
45-55	31
55-65	36
65-75	13
75-85	2

Pode afirmar-se que esta distribuição da classificação se ajusta à distribuição Normal? (Considere um nível de significância de 5%)

BIBLIOGRAFIA

[1] Fonseca, J. e Torres, D. (2000). Exercícios de Estatística. Edições Sílabo.

[2] Guimarães, R. Campos e Cabral, J. (2005). Estatística. McGraw-Hill.

[3] Pedrosa, António; Gama, Sílvio (2016). Introdução Computacional à Probabilidade e Estatística. 3ª edição, Porto Editora.

[4] Reis, E.; Melo, P.; Andrade, R. e Calapez, T. (2015). Estatística Aplicada. Volume I, 6ª edição, Ed. Sílabo.

[5] Reis, E.; Melo, P.; Andrade, R. e Calapez, T. (2005). Estatística Aplicada. Vol.2, 5ª edição, Edições Sílabo.

[6] Murteira B. e Antunes, M. (2012). Probabilidades e Estatística. Volume I, Escolar Editora.

[7] Murteira B. e Antunes, M. (2013). Probabilidades e Estatística. Volume II, Escolar Editora.