Estatística II, 2014/2015, Exame época recurso, 2015/06/29

Duração: 2h. Pode-se utilizar máquina de calcular sem memória de texto.
Entregar as tabelas estatísticas e o enunciado **identificado**, com a prova.
Cotações: todas as questões têm igual cotação (20/12).

---

1 Um agricultor compra sementes ao fornecedor A (a quem compra 40% do total) e ao fornecedor B (60% do total); das sementes vendidas por A, só 85% germinam; só 75% das sementes fornecidas por B germinam.

a) Calcule a probabilidade de que uma semente escolhida ao acaso germine.

Resolução

S: "semente germina"

$\Pr(S) = \Pr(S|A)\Pr(A) + \Pr(S|B)\Pr(B) = 0{,}85 \times 0{,}4 + 0{,}75 \times 0{,}6 = 0{,}79$.

b) Uma determinada semente germinou; qual a probabilidade de ter sido vendida por A?

Res.:

$\Pr(A|S) = \Pr(S \wedge A)/\Pr(S) = \Pr(S|A)\Pr(A)/\Pr(S) = 0{,}85 \times 0{,}4/0{,}79 \approx 0{,}378$.

2 Considere a função probabilidade da variável aleatória X (a constante)

x	-2	-1	a	1	2
$f_X(x)$	12/60	15/60	10/60	6/60	17/60

a) Determine a expressão de $E(X)$ como função da constante a. Calcule o valor de a, sabendo que $E(X) = 1/60$.

Res.:

$E(X) = -2 \times 12/60 - 1 \times 15/60 + a \times 10/60 + 1 \times 6/60 + 2 \times 17/60 = 1/60 \Leftrightarrow$
$1 + 10a = 1 \Leftrightarrow a = 0$.

b) Considere $a = 0$. Determine a função probabilidade da variável $Y = X^2$.

Res.:

Suporte de Y: $\{0,1,4\}$

$\Pr(Y = 0) = \Pr(X = 0) = 10/60$

$\Pr(Y = 1) = \Pr(X = -1) + \Pr(X = 1) = 15/60 + 6/60 = 21/60$

$\Pr(Y = 4) = \Pr(X = -2) + \Pr(X = 2) = 12/60 + 17/60 = 29/60$

A função probabilidade de Y pode exprimir-se, por ex., como

$$f_Y(y) = \begin{cases} 10/60\,, & y = 0 \\ 21/60\,, & y = 1 \\ 29/60\,, & y = 4 \end{cases}.$$

3 Considere a função (c: constante) $f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0 \vee x > 1. \end{cases}$

a) Determine c, de modo que f seja uma função densidade.

Res.:

$f(x) \ge 0, \forall x \Leftrightarrow c > 0$

$$\int_0^1 cx\,dx = 1 \Leftrightarrow c[x^2/2]_0^1 = 1 \Leftrightarrow c/2 = 1 \Leftrightarrow c = 2\,.$$

b) Determine a expressão da função de distribuição.

Res.:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^x 2udu=[u^2]_0^x=x^2, & 0\leq x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}.$$

c) Calcule a mediana da distribuição.

Res.:

$F(Me)=1/2 \Leftrightarrow Me^2=1/2 \Leftrightarrow Me=1/\sqrt{2}$.

4 O número de clientes que chega a uma loja é uma variável aleatória Poisson. Suponha que, em média, chegam à loja 20 clientes por hora.

a) Calcule a probabilidade de chegarem 5 clientes em 15 minutos.

Res.:

X: "nº de clientes em cada 15 minutos"; $X \sim$ Poisson$(20/4) \equiv e^{-5}5^x/x!$.

$\Pr(X=5)=e^{-5}5^5/5! \approx 0{,}175$.

b) Acabou de chegar um cliente. Qual a probabilidade de não chegar ninguém nos próximos 5 minutos?

Res.:

T: "tempo, em períodos de 5 minutos, entre dois clientes consecutivos"

$T \sim f_T(t)=(20/12)e^{-(20/12)t}$.

$$\Pr(T>1)=1-\Pr(T\leq 1)=1-\int_0^1 (20/12)e^{-(20/12)t}dt=e^{-(20/12)}\approx 0{,}189.$$

Informação adicional

Função probabilidade Poisson $f_X(x)=e^{-\lambda}\lambda^x/x!,\quad \lambda>0,\quad x\in\mathbb{N}_0$.

Função densidade exponencial negativa $f_T(t)=\lambda e^{-\lambda t},\quad \lambda>0,\quad t>0$.

5 Seja θ um parâmetro populacional desconhecido e T um seu estimador, obtido a partir de uma amostra casual. Verifique que $EQM(T)=[B(T)]^2+V(T)$, em que $B(T)=E(T)-\theta$.

Res.:

$$EQM(T)=E[(T-\theta)^2]=E\{[T-E(T)+E(T)-\theta]^2\}=$$
$$E\{[T-E(T)]^2+2[T-E(T)][E(T)-\theta]+[E(T)-\theta]^2\}=$$
$$\underbrace{E\{[T-E(T)]^2\}}_{=V(T)}+2[E(T)-\theta]\underbrace{E[T-E(T)]}_{=0}+\underbrace{[E(T)-\theta]^2}_{=[B(T)]^2}=V(T)+[B(T)]^2.$$

6 Recolhida uma amostra casual de 30 observações de uma população $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, obteve-se $\sum_{i=1}^{30} x_i=30$ e $\sum_{i=1}^{30} x_i^2=300$.

a) Admita que $\sigma^2=4$. Teste, ao nível de 10%, a hipótese $H_0\colon \mu=0{,}9$ contra a alternativa $H_1\colon \mu\neq 0{,}9$.

Res.:

Estatística de teste $(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim \mathcal{N}(0{,}1)$

Rejeita-se H_0, se $|(\bar{x}-0{,}9)/(2/\sqrt{30})|>1{,}645$ ← percentil 0,95, $\mathcal{N}(0{,}1)$;

$|(30/30-0{,}9)/(2/\sqrt{30})|\approx 0{,}274<1{,}645 \Rightarrow$ aceita-se H_0.

b) Repita o teste da alínea ***a***) supondo σ^2 desconhecido.

Res.:

Estatística de teste $(\bar{X} - \mu)/\left(S/\sqrt{n-1}\right) \sim t(29)$

Rejeita-se H_0, se $\left|(\bar{x} - 0{,}9)/\left(s/\sqrt{29}\right)\right| > 1{,}699 \quad \leftarrow$ percentil 0,95, $t(29)$;

$s^2 = 300/30 - (30/30)^2 = 9$

$\left|(30/30 - 0{,}9)/\left(3/\sqrt{29}\right)\right| \approx 0{,}180 < 1{,}699 \Rightarrow$ aceita-se H_0.