Estatística II, 2017/2018 Exame, época normal – RESOLUÇÃO
Nota: apresenta-se apenas a resolução de uma das versões do exame, reproduzida a seguir.

1 Sejam os acontecimentos A e B de um determinado espaço de resultados Ω.
[Nota: cada alínea seguinte deve resolver-se de forma independente das restantes.]
a) Suponha que $\Pr(A) = 0{,}4$, $\Pr(B) = 0{,}5$ e $\Pr(A \cap B) = 0{,}3$; calcule $\Pr(A \cup B)$.
b) Admita que $\Pr(A) = 0{,}5$ e $\Pr(B) = 0{,}7$; A e B podem ser incompatíveis? Porquê?
c) Sejam $\Pr(A) = 0{,}3$ e $\Pr(B) = 0{,}4$; mostre que, em geral, $0{,}4 \leq \Pr(A \cup B) \leq 0{,}7$.

2 Uma fábrica de cerâmica produz pratos de cor amarela (A), branca (B) e castanha (C), na proporção de, respectivamente, 25%, 40% e 35%. Sabe-se que 2% dos pratos amarelos, 4% dos brancos e 10% dos castanhos têm defeito (D). Da produção de determinado período selecciona-se um prato ao acaso. Calcule a
a) Probabilidade de que o prato seja defeituoso.
[Sugestão: identifique os valores das probabilidades condicionadas, $\Pr(D|A)$, $\Pr(D|B)$ e $\Pr(D|C)$, e os valores de $\Pr(A)$, $\Pr(B)$ e $\Pr(C)$.]
b) Probabilidade de que o prato seja branco, dado que tem defeito.

3 Num stand o número de automóveis encomendados por mês, X, é uma v.a. com função probabilidade

x	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	0,3	0,4	0,1	0,1	0,1

a) Determine a função de distribuição.
b) Calcule o número médio de automóveis encomendados mensalmente no stand.
c) Qual o número mínimo de automóveis que o stand deve ter em cada mês, para que a probabilidade de satisfazer as encomendas seja superior ou igual a 0,80?

4 Num aeroporto os aviões aterram a uma cadência de 1 por cada 5 minutos, seguindo um processo de Poisson.
a) Qual a probabilidade de que o tempo entre duas aterragens consecutivas seja inferior a 5 minutos?
b) Acabou de chegar um avião; qual a probabilidade de decorrer mais de 10 minutos até à próxima aterragem?

5 Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra casual da população $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. A v.a.

$$W = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2/\sigma^2$$

tem média $E(W) = n - 1$, e variância $V(W) = 2(n-1)$. Considere a estatística S'^2.
a) Mostre que $E(S'^2) = \sigma^2$ e $V(S'^2) = 2(\sigma^2)^2/(n-1)$.
b) Mostre que $\operatorname{plim}_{n\to\infty} S'^2 = \sigma^2$.

6 X denota a autonomia de uma pilha de determinada marca, em horas. X segue uma distribuição normal com média μ. Recolhe-se uma amostra casual de $n = 10$ pilhas, de que se obtém $\bar{x} = 5$ horas, $s = 1$ hora. Construa um intervalo de confiança a 95% para μ.

7 O tempo de vida das baterias produzidas numa fábrica é uma variável aleatória normal. Uma amostra dos tempos de vida de 31 baterias apresenta um desvio padrão $s' = 1{,}65$ horas. Teste, ao nível de 5%, a hipótese $H_0: \sigma^2 = 3$ contra $H_1: \sigma^2 < 3$.

RESOLUÇÃO

1

a)

$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.3 = 0.6$

b)

Se $A \cap B = \emptyset$, ter-se-ia $\Pr(A \cap B) = 0$ e, portanto,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}7 = 1{,}2 > 1$$

o que é impossível.

c)

$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \leq \Pr(A) + \Pr(B) = 0{,}7$

$\Pr(A \cup B) \geq \Pr(B) = 0{,}4$ porque $A \cup B \supset B$.

Em suma,

$$0{,}4 \leq \Pr(A \cup B) \leq 0{,}7.$$

2

a)

$$\Pr(D) = \Pr(D|A)\Pr(A) + \Pr(D|B)\Pr(B) + \Pr(D|C)\Pr(C) =$$
$$0{,}25 \times 0{,}02 + 0{,}40 \times 0{,}04 + 0{,}35 \times 0{,}1 = 0{,}056$$

b)

$$\Pr(B|D) = \Pr(B \cap D)/\Pr(D) = 0{,}016/0{,}056 = 0{,}2857$$

3

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0{,}3, & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7, & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}7 + 0{,}1 = 0{,}8, & 2 \leq x < 3 \\ 0{,}8 + 0{,}1 = 0{,}9, & 3 \leq x < 4 \\ 0{,}9 + 0{,}1 = 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

b)

$$\mathrm{E}(X) = \sum\nolimits_{x \in \{0,1,2,3,4\}} x \Pr(X = x) =$$
$$0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}1 = 1{,}3$$

c)

$\Pr(X \le x) \ge 0{,}80$ ou seja, $F(x) \ge 0{,}80$. Da alínea ***a***), verifica-se que o menor valor para o qual se verifica a condição é 2.

4

T: lapso de tempo entre duas ocorrências, medido em períodos de 5 minutos

$T \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}, t > 0, \lambda > 0.$

Se a unidade de tempo for 5 minutos, vem $\lambda = 1$: $f(t) = 1\, e^{-1t} = e^{-t}$

a)

$$\Pr(T < 1) = \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 = -e^{-1} + 1 = 0{,}6321$$

b)

$$\Pr(T > 2) = \int_2^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_2^\infty = -0 + e^{-2} = 0{,}1353$$

5

a)

$$\mathrm{E}\left(S'^2\right) = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2/(n-1)\right] = \mathrm{E}[\sigma^2 W/(n-1)] = \sigma^2 \mathrm{E}(W)/(n-1) = \sigma^2(n-1)/(n-1) = \sigma^2$$

$$\mathrm{V}\left(S'^2\right) = \mathrm{V}[\sigma^2 W/(n-1)] = (\sigma^2)^2 \mathrm{V}(W)/(n-1)^2 = (\sigma^2)^2 2(n-1)/(n-1)^2 = 2(\sigma^2)^2/(n-1)$$

b)

Condição suficiente de convergência em probabilidade de S'^2 para σ^2

$$\begin{cases} \mathrm{E}\left(S'^2\right) = \sigma^2 \\ \mathrm{V}\left(S'^2\right) = 2(\sigma^2)^2/(n-1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

6

IC para μ a 95% (σ desconhecido)

Variável fulcral $\quad (\bar{X} - \mu)/\left(S'/\sqrt{n}\right) \sim t_{n-1}$

$$\text{IC: } \left]\bar{x} - \xi_{1-\alpha/2}\, s'/\sqrt{n}\,, \bar{x} + \xi_{1-\alpha/2}\, s'/\sqrt{n}\right[\qquad s'/\sqrt{n} = s/\sqrt{n-1}$$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Leftrightarrow \alpha = 0{,}95 \Leftrightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975$$

$$\text{IC: } \left]\bar{x} - \xi_{0{,}975}\, s/\sqrt{n-1} \;\; ; \;\; \bar{x} + \xi_{0{,}975}\, s/\sqrt{n-1}\right[= \left]5 - 2{,}262/\sqrt{9} \;\; ; \;\; 5 + 2{,}262/\sqrt{9}\right[=]4{,}246 \;\; ; \;\; 5{,}754[$$

7

$H_0: \sigma^2 = 3 \qquad H_1: \sigma^2 < 3 \qquad n = 31$

Estatística de teste $\quad (n-1)S'^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$

Regra de rejeição $\quad$ Rejeita-se H_0, se $(31-1)s'^2/3 < c$

$\alpha = 0{,}05 = \Pr\left[(31-1)S'^2/3 < c \middle| \sigma^2 = 3\right] \Leftrightarrow c = 18{,}493$

$(31-1)s'^2/3 = 10 \times 1{,}65^2 = 27{,}225 > 18{,}493$, $\quad$ logo aceita-se H_0.