Estatística II, 2015/16 Exame, época normal 7/6/2016

Resolução (de uma das versão do exame – as resoluções das diferentes versões são semelhantes, com alteração dos dados em cada questão).

1 No percurso casa–faculdade um aluno passa por dois semáforos de funcionamento independente. A probabilidade de cada semáforo estar "verde" é, respectivamente, 0,4 e 0,5.

a) O aluno só chega a tempo da primeira aula, se pelo menos um dos semáforos estiver "verde". Calcule a probabilidade de o aluno chegar a tempo.

Resolução

Defina-se os acontecimentos

$S1$ ($S2$): "primeiro (segundo) semáforo verde"; T: "chegar a tempo".

Tem-se, respectivamente, $\Pr(S1 \cap S2) = \Pr(S1)\Pr(S2) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$, porque os acontecimentos são independentes, e $T = S1 \cup S2$.

Então, a probabilidade pedida é

$$\Pr(T) = \Pr(S1 \cup S2) = \Pr(S1) + \Pr(S2) - \Pr(S1 \cap S2) =$$
$$\Pr(S1) + \Pr(S2) - \Pr(S1)\Pr(S2) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}7.$$

b) O aluno chegou a tempo; qual a probabilidade de ter apanhado só um semáforo "verde"?

Res.

Defina-se o acontecimento A: "ambos os semáforos verdes".

Tem-se $A = S1 \cap S2$, $A \subset T$, logo $T \cap A = A$.

O acontecimento "só um semáforo verde" é $T - A = T \cap A^C$. A probabilidade pedida é

$$\Pr(T \cap A^C | T) = \Pr(T \cap A^C \cap T)/\Pr(T) = \Pr(T \cap A^C)/0{,}7 =$$
$$\Pr(T - A)/\Pr(T) = [\Pr(T) - \Pr(T \cap A)]/\Pr(T) =$$
$$[\Pr(T) - \Pr(A)]/\Pr(T) = (0{,}7 - 0{,}4 \times 0{,}5)/0{,}7 \approx 0{,}714.$$

2 Seja a variável aleatória contínua X, com variância σ^2 e mediana M_X. Seja $Y = X + 1$.

a) Utilizando a definição de variância, determine $V(Y)$ como função de σ^2.

Res.

$$V(Y) = E\{[Y - E(Y)]^2\} = E\{[X + 1 - E(X + 1)]^2\} = E\{[X + 1 - E(X) - 1]^2\} =$$
$$E\{[X - E(X)]^2\} = V(X) = \sigma^2.$$

b) Determine a expressão da mediana de Y, M_Y, como função de M_X.

Res.

M_Y é tal, que $\Pr(Y \le M_Y) = 0{,}5$. Mas

$$\Pr(Y \le M_Y) = \Pr(X + 1 \le M_Y) = \Pr(X \le M_Y - 1) = 0{,}5,$$

o que significa que $M_Y - 1$ é a mediana de X. Ou seja,

$$M_Y - 1 = M_X \Leftrightarrow M_Y = M_X + 1.$$

3 Seja a função de distribuição da v.a. X, $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2 \\ 1 - 1/(4x^2), & x \geq 1/2 \end{cases}$

a) Determine a expressão da densidade de X.

Res.

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2 \\ 1/(2x^3), & x \geq 1/2 \end{cases}.$$

b) Calcule $E(X^3)$. Que se pode afirmar a respeito da existência de $E(X^k)$, $k > 3$?

Res.

$$E(X^3) = \int_{1/2}^{\infty} x^3/(2x^3)\,dx = \int_{1/2}^{\infty} dx/2 = (1/2)[x]_{1/2}^{\infty} = \infty,$$

donde, também não existe nenhum momento de ordem superior a 3: $E(X^k) = \infty$, $k > 3$.

4 Num aeroporto, o número de aterragens é uma variável aleatória que segue um processo Poisson. Em média, aterra 1 avião em cada 5 minutos.

a) Qual a probabilidade de decorrer menos de 5 minutos entre duas aterragens sucessivas?

Res.

Seja a variável N: "número de aterragens por cada 5 minutos". Tem-se

$$f_N(n) = e^{-1}1^n/n! = 1/(n!\,e), \quad n \in \{0,1,2,\dots\}.$$

O acontecimento "menos de 5 minutos entre duas aterragens sucessivas" corresponde a $N > 1$. Donde, a probabilidade pedida pode calcular-se a partir de

$$\Pr(N > 1) = 1 - \Pr(N \leq 1) = 1 - \Pr(N = 0) - \Pr(N = 1) = 1 - 1/e - 1/e \approx 0{,}264.$$

b) Acabou de chegar um avião; qual a probabilidade de decorrer mais de 10 minutos até à próxima aterragem?

Função probabilidade Poisson: $f_N(n) = e^{-\mu}\mu^n/n!, \quad n \in \{0,1,2,\dots\}, \quad \mu > 0.$

Função densidade exponencial negativa: $f_T(t) = \nu e^{-\nu t}, \quad t > 0, \quad \nu > 0.$

Res.

Seja a variável M: "número de aterragens por cada 10 minutos". Se, em média, aterra 1 avião por cada 5 minutos, em média aterram 2 aviões por cada 10 minutos: $E(M) = 2$. Tem-se

$$f_M(m) = e^{-2}2^m/m! = , \quad m \in \{0,1,2,\dots\}.$$

O acontecimento "decorrer mais de 10 minutos até à próxima aterragem" corresponde a $M = 0$. Donde, a probabilidade pedida pode calcular-se a partir de

$$\Pr(M = 0) = e^{-2} \approx 0{,}135.$$

Nota: qualquer das alíneas da pergunta **4** se pode resolver utilizando, em alternativa, a distribuição exponencial negativa.

5 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma amostra casual da população $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sabe-se que, para a estatística S'^2, se tem $E(S'^2) = \sigma^2$; $V(S'^2) = 2(\sigma^2)^2/(n-1)$. Calcule $\operatorname{plim}_{n\to\infty} S'^2$.

Res.

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} E\left(S'^2\right) = \lim_{n\to\infty}\sigma^2 = \sigma^2 \\ \lim_{n\to\infty} V\left(S'^2\right) = \lim_{n\to\infty} 2(\sigma^2)^2/(n-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathrm{plim}_{n\to\infty} S'^2 = \sigma^2.$$

6 Considere uma amostra casual de dimensão n, da população $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$.

a) Determine o estimador de máxima verosimilhança (EMV) de μ.

Res.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, 1) \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right] \Leftrightarrow \log f_X(x) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}(x-\mu)^2$$

Função log-verosimilhança

$$l(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \log f_X(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}(x_i-\mu)^2\right] =$$
$$-\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Condição de primeira ordem para obter o EMV

$$l'(\mu) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2(x_i-\mu)(-1) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = \bar{x}.$$

EMV de μ: $\quad \hat{\mu}_{MV} = \bar{X}$.

b) Seja Q o quantil de ordem 0,95 da distribuição de X. Escreva a expressão de Q como função de μ. Obtenha a expressão do EMV de Q.

Res.

Q é tal, que $\Pr(X \le Q) = 0{,}95$. Padronizando X [tendo em atenção que $(X-\mu)/1 \sim \mathcal{N}(0{,}1)$], vem

$$\Pr(X \le Q) = \Pr\left(\frac{X-\mu}{1} \le \frac{Q-\mu}{1}\right) = 0{,}95;$$

da tabela da $\mathcal{N}(0{,}1)$ obtém-se $Q - \mu = 1{,}645$ ou seja,

$$Q = 1{,}645 + \mu.$$

Dada a propriedade da invariância do método da máxima verosimilhança, o EMV de Q vem

$$\hat{Q}_{MV} = 1{,}645 + \hat{\mu}_{MV} = 1{,}645 + \bar{X}.$$

7 X denota a v.a. "autonomia, em horas, de uma pilha de certa marca". Recolhe-se uma amostra casual de $n = 10$ pilhas, obtendo-se $\bar{x} = 10{,}5$ horas e $s = 1$ hora. Teste, ao nível de 5%, a hipótese $H_0\colon \mu = 11$, contra a alternativa unilateral esquerda. Qual seria a conclusão do teste se $n = 26$ (para idênticos $\bar{x}$ e s)?

Res.

$H_0\colon \mu = 11$ $\qquad$ $H_1\colon \mu < 11$

Estatística de teste $\ (\bar{X} - \mu_0)/\left(S/\sqrt{n-1}\right) \overset{.}{\sim} \mathcal{N}(0{,}1)$. $\qquad$ Nível de significância: 5%.

Rejeita-se H_0, se $(\bar{x} - \mu_0)/\left(s/\sqrt{n-1}\right) < -1{,}645 \leftarrow$ quantil de ordem 0,05 da $\mathcal{N}(0{,}1)$.

Estatística observada $\quad (10{,}5 - 11)/\left(1/\sqrt{10-1}\right) = -1{,}5 > -1{,}645 \Rightarrow$ aceita-se H_0.

Se $n = 25$, a estatística observada vem $\ (10{,}5 - 11)/\left(1/\sqrt{26-1}\right) = -2{,}5 < -1{,}645 \Rightarrow$ rejeita-se H_0.