Estatística II, 2015/16 Exame, época especial 22/6/2016

Duração: 2h. Todas as questões têm igual cotação.

Resolução

1 O tempo de fabrico de um tipo de peça, em horas, é uma variável aleatória (v.a.) X com densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} x-1, & 1 < x < 2 \\ 3-x, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

a) Determine a expressão de $F_X(x)$.

Resolução

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du =$$

$$\begin{cases} 0, & x < 1 \\ \displaystyle\int_1^x (u-1)du = \left[\frac{u^2}{2} - u\right]_1^x = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ \displaystyle\frac{1}{2} + \int_2^x (3-u)du = \frac{1}{2} + \left[3u - \frac{u^2}{2}\right]_2^x = -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{7}{2}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

b) O custo por peça, C, é dado pela expressão $C = 20 + 25X$. Calcule o custo médio por peça.

Res.

A densidade de X é simétrica em relação à recta $x = 2$; logo, $E(X) = 2$.

$E(C) = 20 + 25E(X) = 20 + 25 \cdot 2 = 70.$

Cálculo de $E(X)$ (não é necessário, se se notou a simetria de f_X):

$$E(X) = \int_1^2 x(x-1)dx + \int_2^3 x(3-x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{5}{6} + \frac{7}{6} = 2.$$

2 Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.

a) Se existe $V(X)$, então $V(X-2) = V(2-X)$.

Res.

Afirmação verdadeira: $V(X-2) = V[-(2-X)] = (-1)^2 V(2-X) = V(2-X)$.

b) Se $Y = 2X$, então as funções geradoras de momentos de X e de Y [respectivamente, $M_X(s)$ e $M_Y(s)$] verificam a igualdade $M_Y(s) = [M_X(s)]^2$.

Res.

Afirmação falsa:

$M_Y(s) = E[\exp(sY)] = E[\exp(2sX)] = E\{[\exp(sX)]^2\} \neq \{E[\exp(sX)]\}^2 = [M_X(s)]^2.$

3 Comprou-se uma caixa com 12 lâmpadas em que consta a indicação de que a duração média de vida de uma lâmpada é de 1000 horas. Supondo que o tempo de vida de uma lâmpada tem distribuição exponencial negativa [$f_X(x) = (1/1000)\exp(-x/1000),\ x > 0$], calcule a probabilidade de a lâmpada com menor duração, entre as 12 da caixa, durar menos de 50 horas. [Sugestão: comece por determinar a distribuição de $Y = \min\{X_1, \dots, X_{12}\}$.]

Res.

Distribuição de $Y = \min\{X_1, \dots, X_{12}\}$:

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(\min\{X_1, \dots, X_{12}\} \leq y) = 1 - \Pr(\min\{X_1, \dots, X_{12}\} > y) =$$
$$1 - \Pr(X_1 > y, \dots, X_{12} > y) = 1 - \Pr(X_1 > y) \dots \Pr(X_{12} > y) =$$
$$1 - [\Pr(X > y)]^{12} = 1 - [1 - \Pr(X \leq y)]^{12} = 1 - [1 - F_X(y)]^{12}$$
$$F_X(y) = \int_0^y f_X(x)dx = \int_0^y (1/1000)\exp(-x/1000)\,dx =$$
$$[-\exp(-x/1000)]_0^y = 1 - \exp(-y/1000),$$

donde

$$F_Y(y) = 1 - [1 - F_X(y)]^{12} = 1 - [\exp(-y/1000)]^{12} = 1 - \exp(-0{,}012y).$$

Pretende-se calcular

$$\Pr(Y \leq 50) = 1 - \exp(-0{,}012 \cdot 50) \approx 0{,}451.$$

4 A v.a. contínua X tem densidade $f_X(x) = 1/10$, para $0 < x < 10$.

a) Calcule $E(X)$ e $V(X)$.

Res.

$$E(X) = \int_0^{10} \frac{x}{10}\,dx = \left[\frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 5$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^{10} \frac{x^2}{10}\,dx - 25 = \left[\frac{x^3}{30}\right]_0^{10} - 25 = \frac{25}{3}$$

b) Sejam as v.a.'s $X_1, X_2, \dots X_{300}$, independentes e identicamente distribuídas como X. Recorrendo a um teorema conhecido, calcule o valor aproximado de $\Pr(\sum_{i=1}^{300} X_i < 1600)$.

Res.

Dado que $X_1, X_2, \dots X_{300}$ são i.i.d., vem

$$E\left(\sum_{i=1}^{300} X_i\right) = 300E(X) = 1500, \qquad V\left(\sum_{i=1}^{300} X_i\right) = 300V(X) = 2500.$$

Padronizando e aplicando o Teorema do Limite Central,

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{300} X_i < 1600\right) =$$
$$\Pr\left[\left(\sum_{i=1}^{300} X_i - 1500\right)/\sqrt{2500} < (1600 - 1500)/50\right] \approx \Phi(2) = 0{,}9772.$$

5 A v.a. $X \sim \mathcal{N}(100\,;225)$ representa a nota obtida por uma pessoa num teste psicotécnico.

a) Sabendo que a nota foi superior à mediana, qual a probabilidade de ser inferior a 115?

Res.

$$\Pr(X < 115 | X > 100) = \Pr(100 < X < 115)/\Pr(X > 100) =$$
$$\Pr\left[0 < (X - 100)/\sqrt{225} < (115 - 100)/\sqrt{225}\right]/(1/2) =$$
$$2[\Phi(1) - 1/2] \approx 0{,}683$$

b) Seleccionadas 20 pessoas ao acaso, qual a probabilidade de pelo menos 2 terem nota superior ao 3º quartil?

Res.

$$\Pr(\text{Nota superior ao 3º quartil}) = 0{,}25$$

Seja N o número de pessoas, em 20, com nota superior ao 3º quartil. Pretende-se

$$\Pr(N \geq 2) = 1 - \Pr(N = 0) - \Pr(N = 1) =$$
$$1 - 0{,}75^{20} - 20 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^{19} \approx 0{,}976.$$

c) Calcule $\Pr[(X-100)^2 > 22{,}95]$, sem utilizar a tabela da distribuição normal. Indique qual a distribuição utilizada para calcular esta probabilidade.

Res.

$(X-100)^2/225 \sim \chi_1^2$, logo

$$\Pr[(X-100)^2 > 22{,}95] = \Pr[(X-100)^2/225 > 22{,}95/225] =$$
$$\Pr[(X-100)^2/225 > 0{,}102].$$

Da tabela da distribuição χ_1^2 obtém-se $\Pr[(X-100)^2/225 > 0{,}102] = 0{,}75$.

6 Um candidato a deputado por um círculo eleitoral sabe que, numa sondagem junto de $n = 350$ eleitores, 185 declaram apoiá-lo. Construa um intervalo de confiança a 95% para a proporção de eleitores favoráveis ao candidato.

Res.

A população é Bernoulli, $X \sim B(1, \theta)$, em que θ designa a proporção de apoiantes do candidato na população. Pretende-se um IC para θ.

$$\alpha = 0{,}05; \qquad 1 - \Phi(z_{0,025}) = 0{,}025; \qquad z_{0,025} = 1{,}96.$$

Utilizando a v.f.

$$Z = (\bar{X} - \theta)/\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n} \mathrel{\dot\sim} \mathcal{N}(0,1),$$

sendo $\bar{x} = 185/350 = 0{,}5286$, resulta o intervalo de confiança de extremos

$$0{,}5286 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}5286(1-0{,}5286)/350} \quad \Rightarrow \quad]0{,}4927\,;\ 0{,}5645[.$$