Estatística II, 2013/14, modelo de exame

Este modelo pretende dar uma ideia do grau de dificuldade/extensão do exame – não visa dar indicação a respeito das questões ou assuntos efectivamente incluídos no mesmo.
Duração: 2h.
Pode-se usar máquina de calcular sem memória de texto. As tabelas estatísticas são fornecidas com o enunciado – a/os estudantes devem familiarizar-se com a utilização das tabelas mas não devem levá-las para o exame.

1 Indique, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa (X, Y, Z: acontecimentos num mesmo espaço de resultados).

a) $\Pr(X \cap Y|Z) = \Pr(Y|X \cap Z) \Pr(X|Z)$ ***b***) $\Pr(X|Z) = \Pr(X \cap Y|Z) + \Pr(X \cap Y^C|Z)$

2 15% dos alunos de uma escola usam o telemóvel na aula, e 20% acham que podem entrar na aula atrasados. Destes últimos, 90% nunca têm dúvidas sobre a matéria; 20% dos que usam o telemóvel na aula têm dúvidas de vez em quando; 30% dos que não usam telemóvel na aula nem chegam atrasados colocam dúvidas de vez em quando.

a) Um aluno colocou uma dúvida. Qual a probabilidade de o aluno usar telemóvel na aula?

b) Calcule a probabilidade de um aluno nunca apresentar dúvidas sobre a matéria.

3 $M(s) = 1 - p + pe^s$, $0 \leq p \leq 1$, $s \in \mathcal{R}$, é a função geradora de momentos da v.a. X.

a) Obtenha a expressão de $E(X)$ e $V(X)$, como funções de p.

b) O parâmetro p denota a probabilidade de sucesso numa prova de Bernoulli: $\Pr(X = 1) = p$ ($X = 0$ representa a ocorrência de um insucesso nesta prova). Escreva a expressão da probabilidade de, numa sequência de provas de Bernoulli independentes, obter o terceiro sucesso na sétima prova.

4 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma amostra casual de uma população exponencial

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \theta > 0.$$

a) Determine a função de distribuição associada a f.

b) Calcule $\Pr(X \geq 1)$. ***c***) Calcule $E(X)$.

d) Determine o estimador de máxima verosimilhança de θ.

e) Estime $\Pr(X \geq 1)$ por máxima verosimilhança.

5 De uma população $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ recolheu-se uma amostra casual $(X_1, \dots, X_{16})$, que conduziu a $\bar{x} = 10$ e $s = 3{,}872$.

a) Construa um intervalo de confiança a 95% para $V(X)$.

b) Admita que a variância da população é igual a 36. Qual a dimensão mínima da amostra, de modo que a amplitude de um intervalo de confiança a 95% para a média da população não exceda 6,5?

6 A vida útil, X, das televisões de determinada marca é uma v.a. normal com desvio-padrão $\sigma = 500$ horas. A marca anuncia uma vida útil média das suas televisões de 9000 horas. De uma amostra casual de n televisões obteve-se, para a respectiva vida média, $\bar{x} = 8800$ horas. Teste, ao nível de 5%, a afirmação da marca, contra a alternativa unilateral esquerda, nas seguintes situações:

a) $n = 15$. ***b***) $n = 35$.