Estatística II, 2016/17 Exame época normal
Resolução (de uma das versões do exame)

1 Num jogo de futebol, 1% das decisões do árbitro são erradas. Quando uma decisão está errada, um comentador que assiste ao jogo considera-a errada em 96% dos casos. Quando a decisão do árbitro está correcta, o comentador considera-a errada em 3% dos casos.

a) Qual a probabilidade de o comentador considerar correcta uma qualquer decisão do árbitro?

Resolução

A: decisão correcta do árbitro

C: comentador considera correcta a decisão do árbitro

$$\Pr(C) = \Pr(C|A)\Pr(A) + \Pr(C|\bar{A})\Pr(\bar{A}) = (1 - 0{,}03)(1 - 0{,}01) + (1 - 0{,}96)0{,}01 = 0{,}9607.$$

b) O comentador considerou errada uma decisão do árbitro; qual a probabilidade de a decisão do árbitro estar correcta?

Res.

$$\Pr(A|\bar{C}) = \Pr(A \wedge \bar{C})/\Pr(\bar{C}) = \Pr(\bar{C}|A)\Pr(A)/[1 - \Pr(C)] = 0{,}03(1 - 0{,}01)/(1 - 0{,}9607) = 0{,}7557.$$

2 Seja a variável aleatória contínua X, com variância σ^2 e primeiro quartil Q_X. Seja $Z = 4X - 1$.

a) Utilizando a definição de variância, determine $V(Z)$ como função de σ^2.

Res.

$$V(Z) = E\{[Z - E(Z)]^2\} = E\{[4X - 1 - E(4X - 1)]^2\} = E\{[4X - 4E(X)]^2\} = 16E\{[X - E(X)]^2\} = 16\sigma^2.$$

b) Determine a expressão do primeiro quartil de Z, Q_Z, como função de Q_X.

Res.

$$\Pr(Z \le Q_Z) = 0{,}25 \Leftrightarrow \Pr(4X - 1 \le Q_Z) = 0{,}25 \Leftrightarrow \Pr[X \le (Q_Z + 1)/4] = 0{,}25 \Leftrightarrow$$
$$Q_X = (Q_Z + 1)/4 \Leftrightarrow Q_Z = 4Q_X - 1.$$

3 Seja a função de distribuição $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 1 - 9x^{-2}, & x \ge 3 \end{cases}$. Determine a densidade de X.

Res.

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 18x^{-3}, & x > 3 \end{cases} \qquad \text{(não existe derivada para } x = 3\text{).}$$

[Nota: se pedida a distribuição, dada a densidade, $f_X(x)$, a solução vem: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$.]

4 Uma livraria online recebe em média quatro encomendas por dia (24 h). O número de encomendas segue um processo de Poisson.

a) Qual a probabilidade de haver pelo menos uma encomenda num dia escolhido ao acaso?

Res.
N: número de encomendas por dia; $N \sim \text{Poisson}(4) \equiv e^{-4}4^n/n!\,, \quad n \in \mathcal{N}_0$.
$$\Pr(N \geq 1) = 1 - \Pr(N = 0) = 1 - e^{-4} \approx 0{,}982.$$

b) Qual a probabilidade de decorrer no mínimo cinco horas entre duas encomendas consecutivas?
Res.
T: tempo, em horas, entre duas encomendas consecutivas;
$f_T(t) = \nu e^{-\nu t}, \quad t > 0,$ em que $\nu = 4/24 = 1/6$.
$$\Pr(T \geq 5) = 1 - \Pr(T < 5) = 1 - \int_0^5 \left(e^{-t/6}/6\right)dt = e^{-5/6} \approx 0{,}4346.$$

Função probabilidade Poisson: $f_N(n) = e^{-\mu}\mu^n/n!, \quad n \in \{0,1,2,\dots\}, \quad \mu > 0.$
Função densidade exponencial negativa: $f_T(t) = \nu e^{-\nu t}, \quad t > 0, \quad \nu > 0.$

5 Considere uma amostra casual de dimensão n, da população $X \sim \mathcal{N}(\mu; 0{,}25)$.

a) Determine a expressão do estimador de máxima verosimilhança de μ.
Res.
$$f_X(x) = \sqrt{2/\pi}\, e^{-2(x-\mu)^2} \Leftrightarrow \log f_X(x) = \log\sqrt{2/\pi} - 2(x-\mu)^2$$
$$l(\mu) = \sum_{i=1}^{n}\left[\log\sqrt{2/\pi} - 2(x_i - \mu)^2\right] = n\log\sqrt{2/\pi} - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \Rightarrow$$
$$l'(\mu) = 0 \Leftrightarrow 4\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = \bar{x}$$
$$l''(\mu) = -4n < 0, \forall\mu \quad \Rightarrow \quad \text{Estimador MV de } \mu\text{: } \hat{\mu} = \bar{X}.$$

b) Determine a expressão do estimador de máxima verosimilhança de $\Pr(X < 2\mu)$.
Res.
$$\Pr(X < 2\mu) = \Pr\left(\frac{X-\mu}{0{,}5} < \frac{2\mu - \mu}{0{,}5}\right) = \Pr\left(\frac{X-\mu}{0{,}5} < 2\mu\right) = \Phi(2\mu),$$
em que Φ denota a função de distribuição $\mathcal{N}(0,1)$. Esta função é biunívoca, logo, dada a propriedade de invariância do método MV, resulta o estimador
$$\Pr(\widehat{X < 2}\mu) = \widehat{\Phi(2\mu)} = \Phi(2\hat{\mu}) = \Phi(2\bar{X}).$$

6 Uma amostra casual de dimensão 13 da população $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, conduz a
$$\sum_{i=1}^{13} x_i = 26, \qquad \sum_{i=1}^{13} x_i^2 = 676.$$
Resolva cada uma das alíneas seguintes sem ter em conta as restantes.

a) Construa um intervalo de confiança a 99% para $E(X)$.
Res.
IC para μ (σ^2 desconhecido) a $1 - \alpha = 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995$

Variável fulcral $\quad (\bar{X}-\mu)/\left(S/\sqrt{n-1}\right) \sim t_{n-1}$

$$\mu \in \left]\bar{x}-\xi_{0,995}\, s/\sqrt{n-1}\ ;\ \bar{x}+\xi_{0,995}\, s/\sqrt{n-1}\right[$$

$$s^2 = \sum x_i^2/n - \bar{x}^2 = 676/13-(26/13)^2 = 48; \qquad \xi_{0,995} = 3{,}055$$

$$\mu \in \left]2-3.055\cdot\sqrt{48/12}\ \ ;\ \ 2+3.055\cdot\sqrt{48/12}\right[= \left]-4{,}11\ \ ;\ \ 8{,}11\right[$$

b) Suponha que a variância da população é 49. Qual a dimensão mínima da amostra que permite assegurar que a amplitude de um intervalo de confiança a 90% para $E(X)$ não excede 4?

Res.

$\sigma^2 = 49$

Variável fulcral $\quad (\bar{X}-\mu)/\left(\sigma/\sqrt{n}\right) \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$1-\alpha = 0{,}90 \Leftrightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}95 \quad \rightarrow \quad \xi_{1-\alpha/2} = \xi_{0,95} = 1{,}645$$

$$\mu \in \left]\bar{x}-\xi_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\ ;\ \bar{x}+\xi_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\right[= \left]2-1{,}645\cdot 7/\sqrt{n}\ ;\ 2+1{,}645\cdot 7/\sqrt{n}\right[$$

Amplitude do IC

$$2+1{,}645\cdot 7/\sqrt{n}-\left(2-1{,}645\cdot 7/\sqrt{n}\right) = 23{,}03/\sqrt{n} \le 4 \Leftrightarrow n \ge 5{,}7575^2 \ \rightarrow\ n \ge 34.$$

c) Teste, ao nível de significância de 1%, a hipótese $H_0\colon \sigma^2 = 100$ contra alternativa bilateral.

Res.

$H_0\colon \sigma^2 = 100 \qquad H_0\colon \sigma^2 \ne 100$

Estatística de teste $\quad 13S^2/100 = 0{,}13S^2 \sim \chi^2_{13-1}$

Rejeita-se H_0, se $\quad 0{,}13s^2 > \xi_{0,995} = 28{,}300 \quad$ ou $\quad 0{,}13s^2 < \xi_{0,005} = 3{,}074$

$0{,}13s^2 = 0{,}13\cdot 48 = 6{,}24 \ \Rightarrow\ $ Aceita-se H_0.