数据结构

教师：姜丽红 jianglh@sjtu.edu.cn

IST 实验室 http://ist.sjtu.edu.cn

助教：芮召普 ruishaopu@qq.com 江嘉晋 IST实验室 软件大楼5号楼5308

《软件基础实践》教师：杜东 IPADS 实验室 软件大楼3号楼4层

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

第8章 集合与静态查找表

- **集合的基本概念**
- **查找的基本概念**
- **无序表的查找**
- **有序表的查找**

集合：元素互相之间没有关系

学习目标：比较集合的不同实现方式，设计并实现满足时空复杂度要求的查找算法。

集合的基本概念

```
template <class KEY, class OTHER>
struct SET {
    KEY key;
    OTHER other;
};//可以包含除了关键字域等的多个数据域
```

- 集合的物理实现
- **任何容器都能存储集合**
- **常用的表示形式是借助于线性表或树**
- **唯一一个仅适合于存储和处理集合的数据结构是散列表**

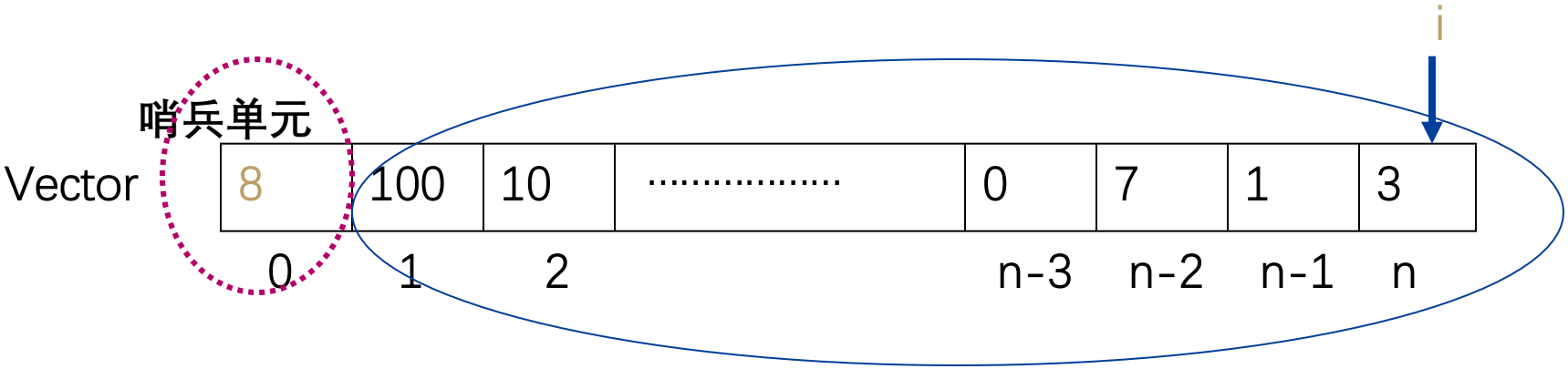
- **主要运算**
- **查找某一元素是否存在**
- **将集合中的元素按照它的唯一标识排序**

静态查找技术

静态搜索表：集合中的结点总数是固定的或者很少发生变化。
动态搜索表：集合中的结点总数是经常在发生变化。
在内存中进行的搜索：重点减少比较、或查找的次数。评价标准：平均搜索长度。
在外存中进行的搜索：重点在于减少访问外存的次数。评价标准：读盘次数。

静态查找

采用顺序存储，0号单元用作哨兵单元，1号单元到n号单元保存结点。



顺序查找：无序表的查找

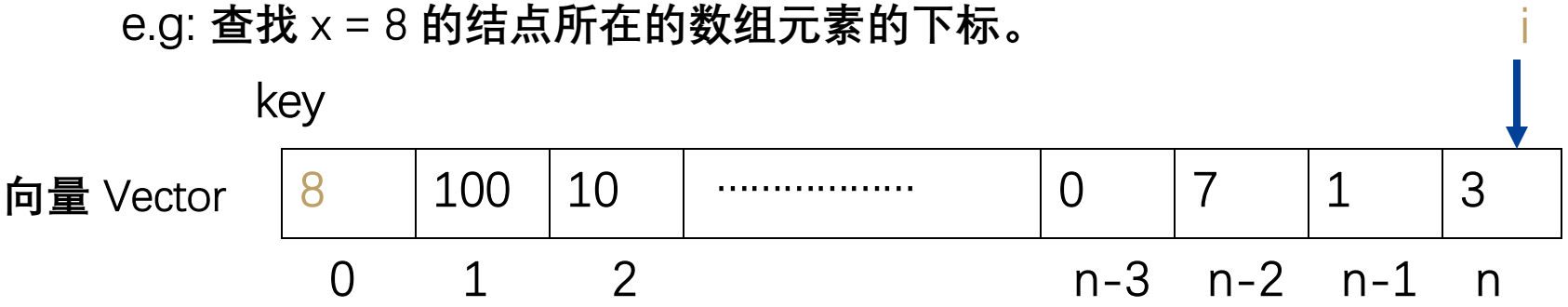
应用范围：顺序表或链表，表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
                    int size, const KEY &x)
{
            data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

e.g: 查找 x = 8 的结点所在的数组元素的下标。



顺序查找：无序表的查找

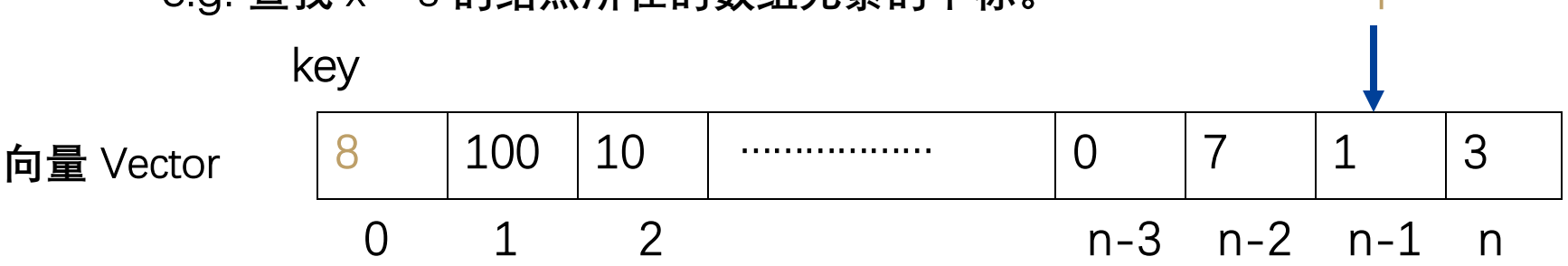
应用范围：顺序表或链表，表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
                    int size, const KEY &x)
{
            data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

e.g: 查找 x = 8 的结点所在的数组元素的下标。



顺序查找：无序表的查找

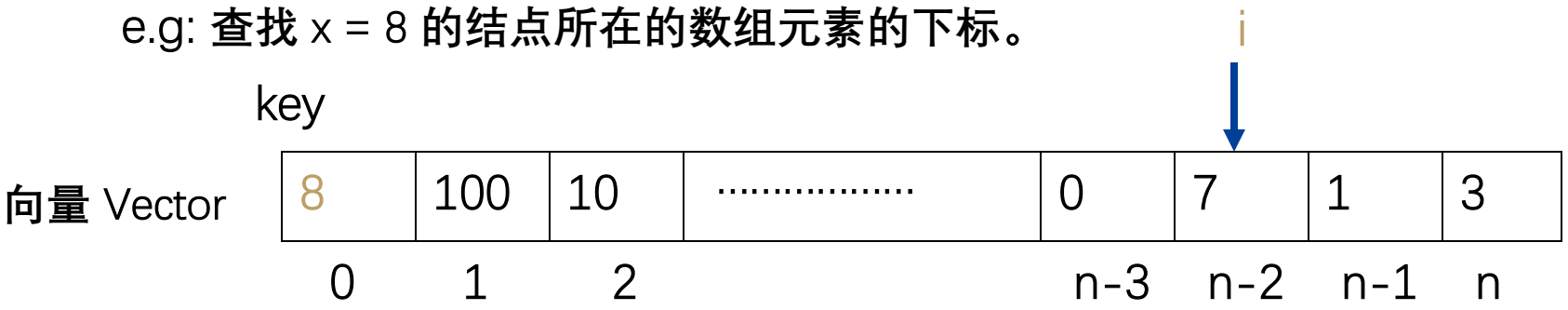
应用范围：顺序表或链表，表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
              int size, const KEY &x)
{
        data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

e.g: 查找 x = 8 的结点所在的数组元素的下标。



顺序查找：无序表的查找

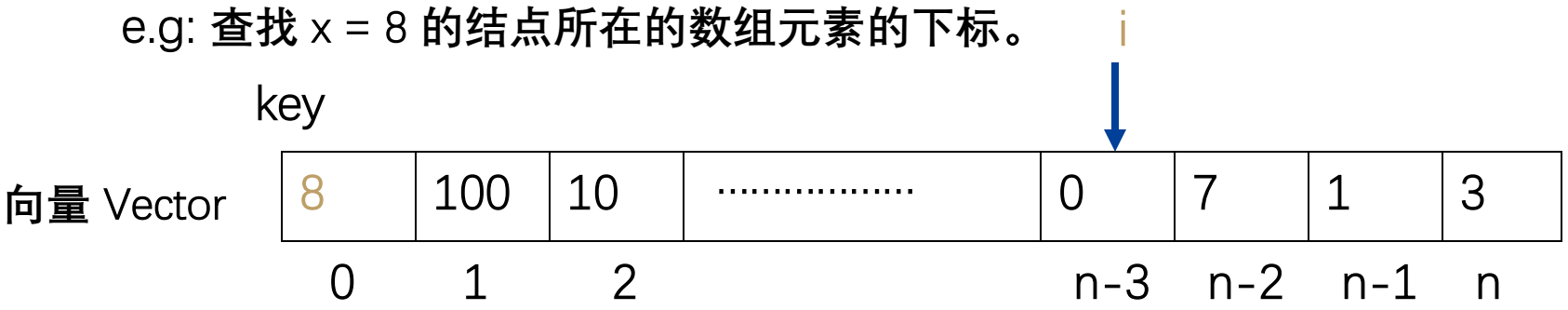
应用范围：顺序表或链表，表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
              int size, const KEY &x)
{
        data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

e.g: 查找 x = 8 的结点所在的数组元素的下标。



顺序查找：无序表的查找

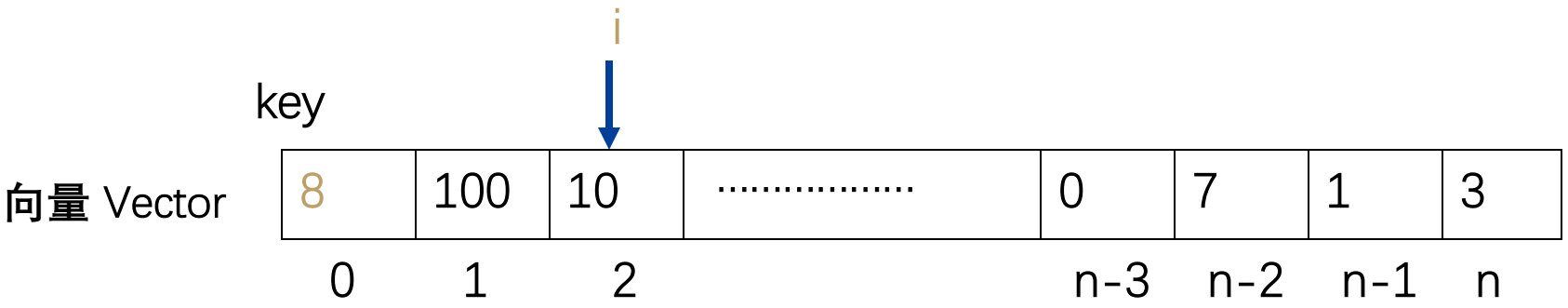
应用范围：顺序表或链表，表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
                    int size, const KEY &x)
{
            data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

e.g: 查找 x = 8 的结点所在的数组元素的下标。



顺序查找：无序表的查找

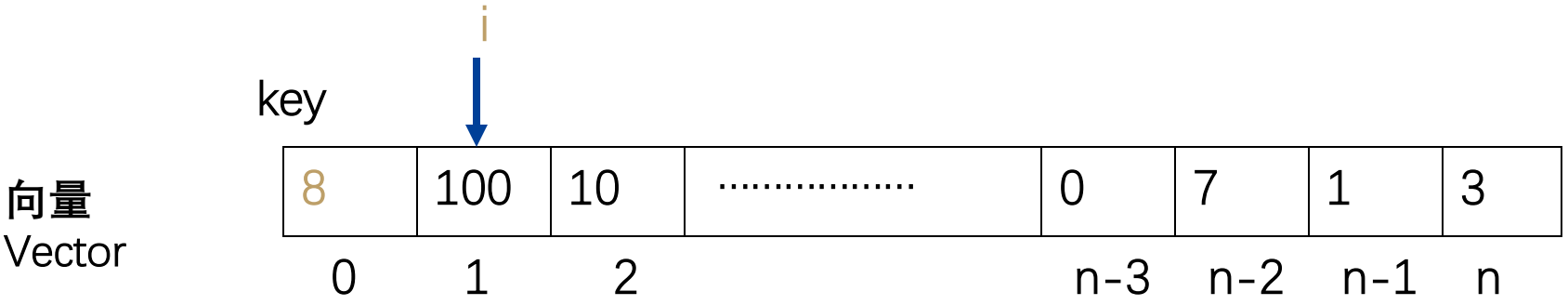
应用范围：顺序表或链表，表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
                    int size, const KEY &x)
{
            data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

e.g: 查找 x = 8 的结点所在的数组元素的下标。



顺序查找：无序表的查找

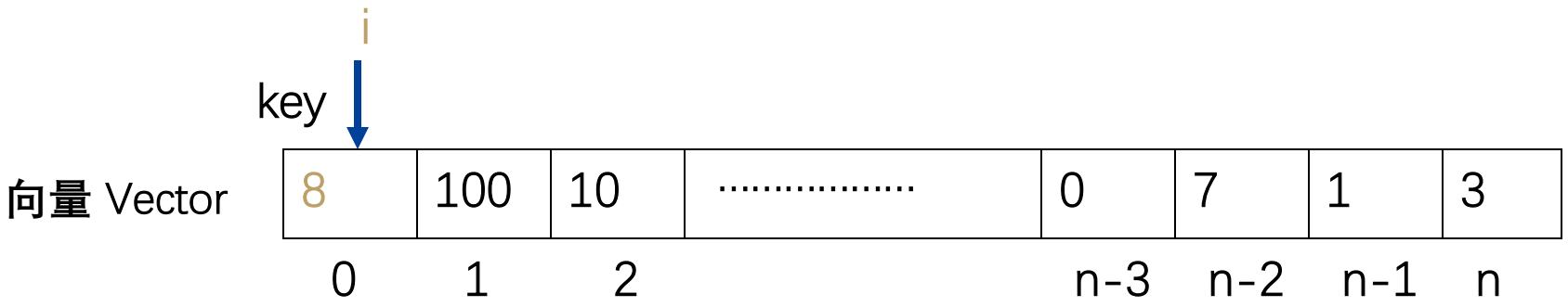
应用范围：顺序表或链表，表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
                    int size, const KEY &x)
{
            data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

e.g: 查找 x = 8 的结点所在的数组元素的下标。



顺序查找：无序表的查找

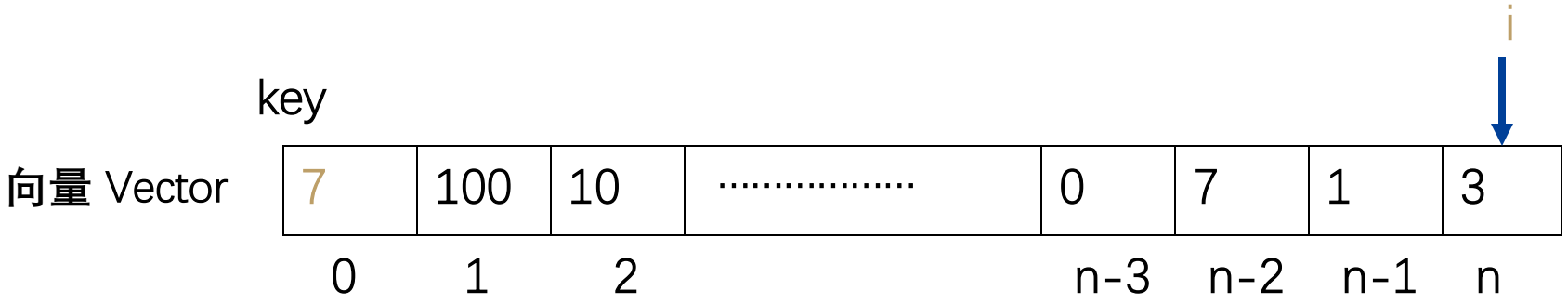
应用范围：顺序表或链表，表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
                    int size, const KEY &x)
{
            data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

e.g: 查找 x = 7 的结点所在的数组元素的下标。



顺序查找：无序表的查找

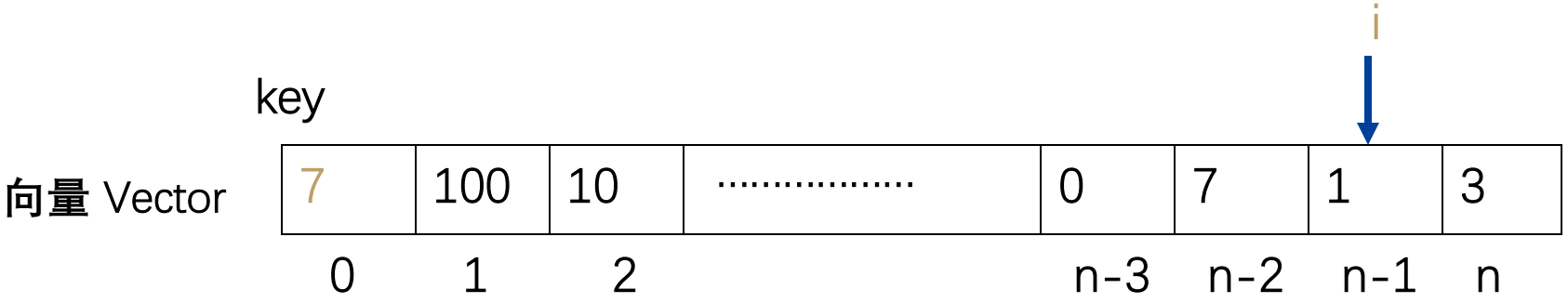
应用范围：顺序表或链表，表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
                    int size, const KEY &x)
{
            data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

e.g: 查找 x = 7 的结点所在的数组元素的下标。



顺序查找：无序表的查找

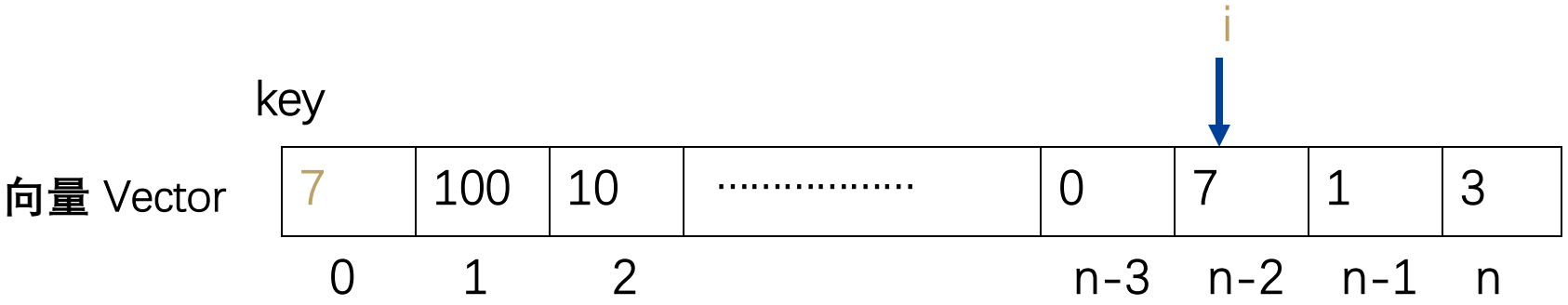
应用范围：顺序表或线性链表表示的*静态搜索表*。表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
                    int size, const KEY &x)
{
            data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

e.g: 查找 x = 7 的结点所在的数组元素的下标。



顺序查找：无序表的查找

应用范围：顺序表或线性链表表示的*静态搜索表*。表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
                    int size, const KEY &x)
{
            data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

- 性能分析： n 为结点的总数。
- 平均查找长度AVL（Average Search Length ）（比较次数）

  只考虑成功查找情况下：设每个结点的查找概率相等

$$AVL = \sum((n-i+1)/n) = (n+1)/2$$

$1<=i<=n$

顺序查找：无序表的查找

应用范围：顺序表或链表，表内元素之间无序或有序。

```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
              int size, const KEY &x)
{
        data[0].key = x;
    for (int i = size ; x != data[i].key; --i);
    return i;
}
```

// CurrentSize: 结点个数

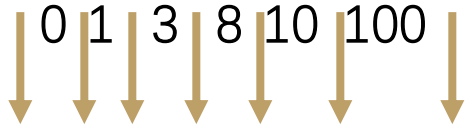
设置哨兵的好处：在顺序表中总可以找到待查结点。否则，必须将判断条件 i >= 0 加进 for 语句。

一般查找情况下（包括成功、不成功两种情况）:设成功与不成功两种情况概率相等，同时，假设每个结点的成功查找的概率也相等。

$$AVL = \sum((n-i+1)/2n) + (n+1)/2$$

$$= 3(n+1)/4$$

	100	10	0	8	1	3
0	1	2	3	4	5	6



共有n+1=7种不成功的查找情况

有序表的顺序查找


```
template <class KEY, class OTHER>
int seqSearch(SET<KEY, OTHER> data[],
              int size, const KEY &x)
{   data[0].key = x;
    for (int i = size ; x < data[i].key; --i);
    if (x == data[i].key) return i;
    else return 0;
}
```

折半查找（或二分查找法）

```
template <class KEY, class OTHER>
int binarySearch(SET<KEY, OTHER> data[],
                 int size, const KEY &x)
{
    int low = 1,  high = size, mid;
    while (low <= high ) {              //查找区间存在
        mid = (low + high) / 2;         //计算中间位置
     if ( x == data[mid].key )  return mid;
        if ( x < data[mid].key) high = mid - 1;
       else low = mid + 1;
    }
    return 0;
}
```

适用范围？有序 + 顺序存储

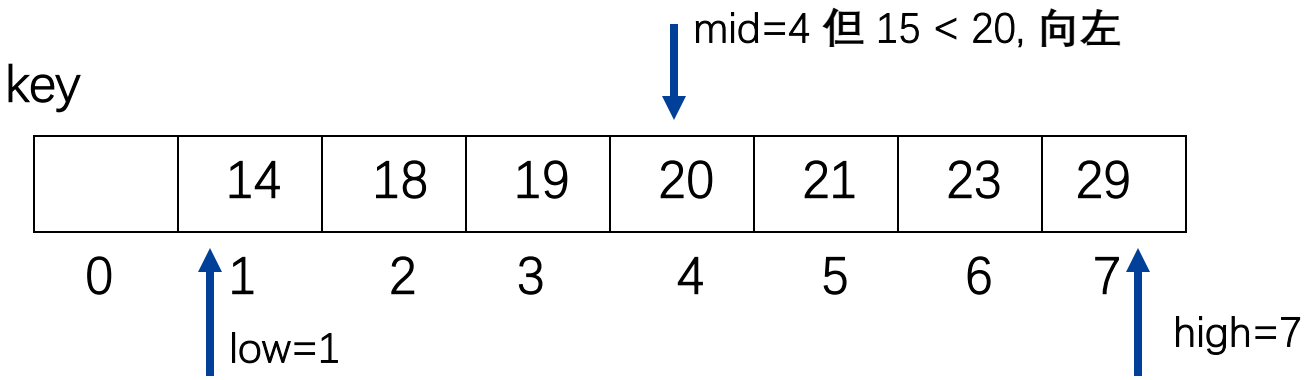
折半查找（或二分查找法）

应用范围：顺序表，表内元素之间有序。不可直接用于线性链表。

e.g: 查找 key = 15 的结点所在的数组元素的下标地址。

查找不成功的情况：数组 data 如下图所示有序

- 数组 data ：递增序 data [i]. Key <= data [i+1]. Key; i= 1,2,……n
- 查找范围 ：low（低下标）= 1; high（高下标）= 7 （初始时为最大下标 n ）;
- 比较对象：中点元素，其下标地址为 mid = （low+high）/ 2



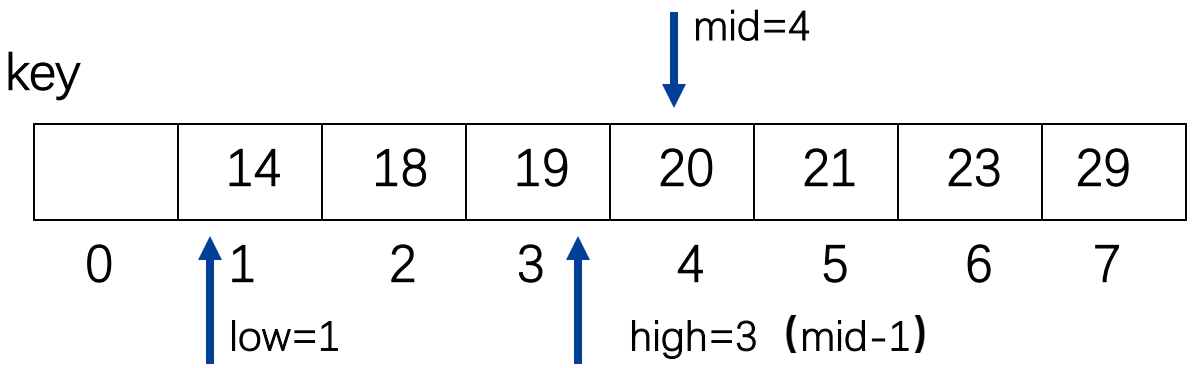
折半查找（或二分查找法）

应用范围：顺序表，表内元素之间有序。不可直接用于线性链表。

e.g: **查找** key = 15 **的结点所在的数组元素的下标地址。**

查找不成功的情况：数组 data **如下图所示有序**

- **数组** data **：递增序** data [i]. Key <= data [i+1]. Key; i= 1,2,……n
- **查找范围 ：**low**（低下标）** = 1; high**（高下标）** = 3 ;



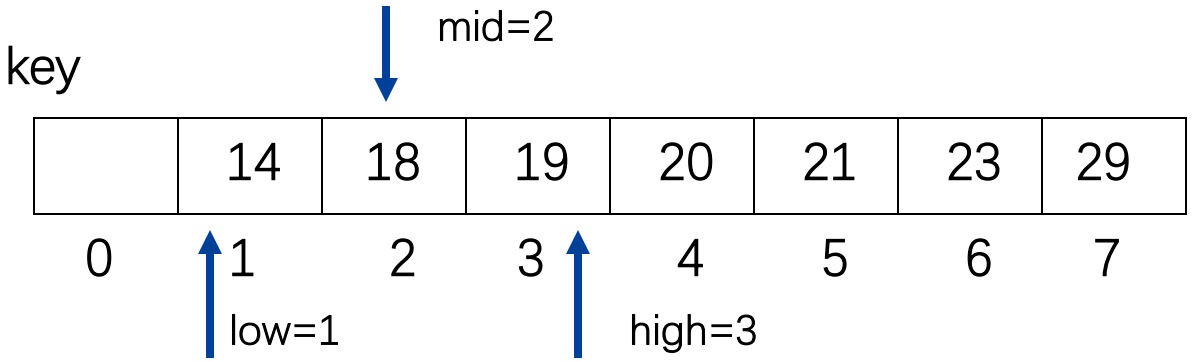
折半查找（或二分查找法）

应用范围：顺序表，表内元素之间有序。不可直接用于线性链表。

e.g: **查找** key = 15 **的结点所在的数组元素的下标地址。**

查找不成功的情况：数组 data **如下图所示有序**

- **数组** data **：递增序** data [i]. Key <= data [i+1]. Key; i= 1,2,……n
- **查找范围 ：**low**（低下标）** = 1; high**（高下标）** = 3 ;
- **比较对象：中点元素，其下标地址为** mid = **（**low+high**）/ 2** =2



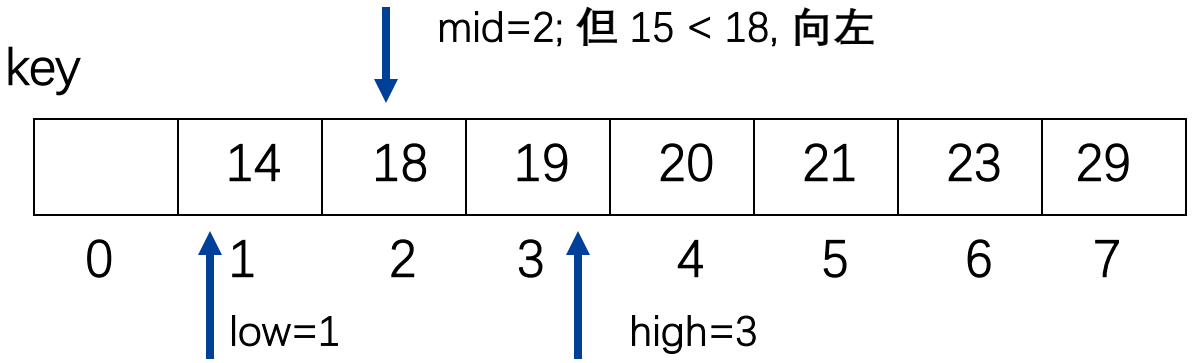
折半查找（或二分查找法）

应用范围：顺序表，表内元素之间有序。不可直接用于线性链表。

e.g: **查找** key = 15 **的结点所在的数组元素的下标地址。**

查找不成功的情况：数组 data **如下图所示有序**

- **数组** data **：递增序** data [i]. Key <= data [i+1]. Key; i= 1,2,……n
- **查找范围 ：**low**（低下标）** = 1; high**（高下标）** = 3 ;
- **比较对象：中点元素，其下标地址为** mid = **（**low+high**）** / 2 =2



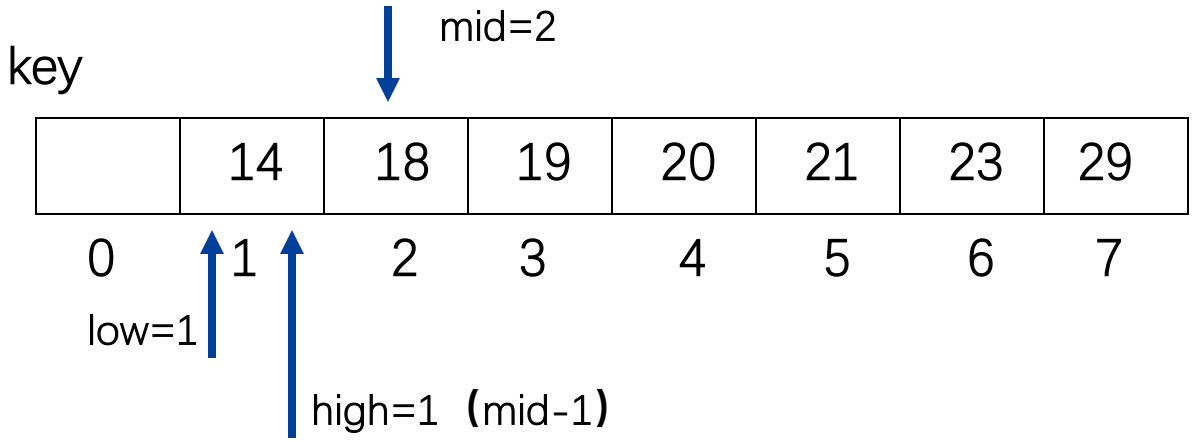
折半查找（或二分查找法）

应用范围：顺序表，表内元素之间有序。不可直接用于线性链表。

e.g: **查找** key = 15 **的结点所在的数组元素的下标地址。**

查找不成功的情况：数组 data **如下图所示有序**

- **数组** data **：递增序** data [i]. Key <= data [i+1]. Key; i= 1,2,……n
- **查找范围 ：**low**（低下标）** = 1; high**（高下标）** = 1 ;



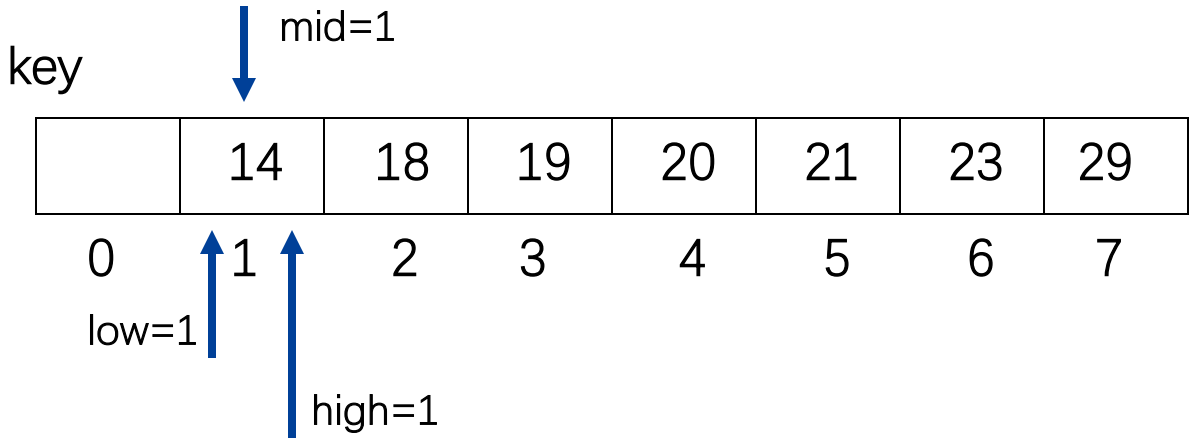
折半查找（或二分查找法）

应用范围：顺序表，表内元素之间有序。不可直接用于线性链表。

e.g: **查找** key = 15 **的结点所在的数组元素的下标地址。**

查找不成功的情况：数组 data **如下图所示有序**

- **数组** data **：递增序** data [i]. Key <= data [i+1]. Key; i= 1,2,……n
- **查找范围 ：**low**（低下标）** = 1; high**（高下标）** = 1 ;
- **比较对象：中点元素，其下标地址为** mid = **（**low+high**）** / 2 = 1



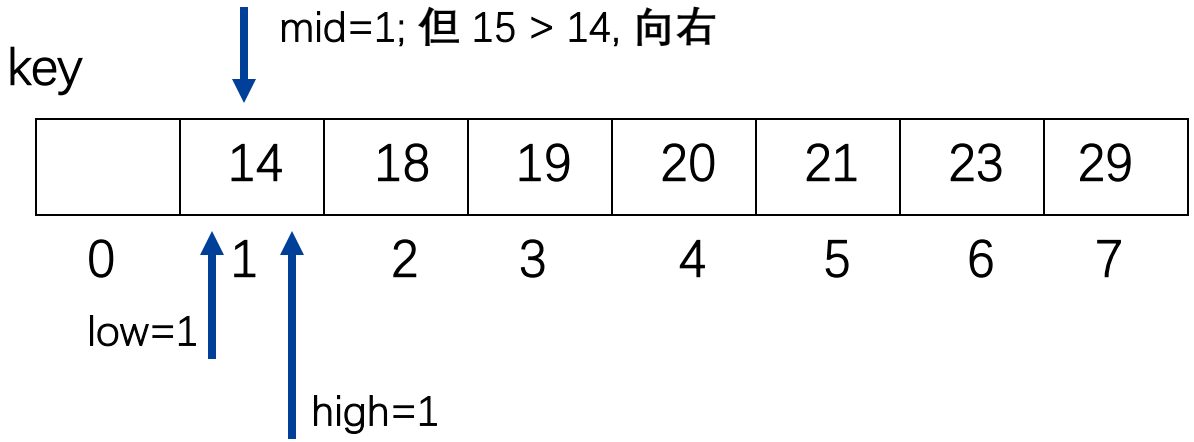
折半查找（或二分查找法）

应用范围：顺序表，表内元素之间有序。不可直接用于线性链表。

e.g: **查找** key = 15 **的结点所在的数组元素的下标地址。**

查找不成功的情况：数组 data **如下图所示有序**

- **数组** data **：递增序** data [i]. Key <= data [i+1]. Key; i= 1,2,……n
- **查找范围 ：**low**（低下标）** = 1; high**（高下标）** = 1 ;
- **比较对象：中点元素，其下标地址为** mid = **（**low+high**）** / 2 = 1



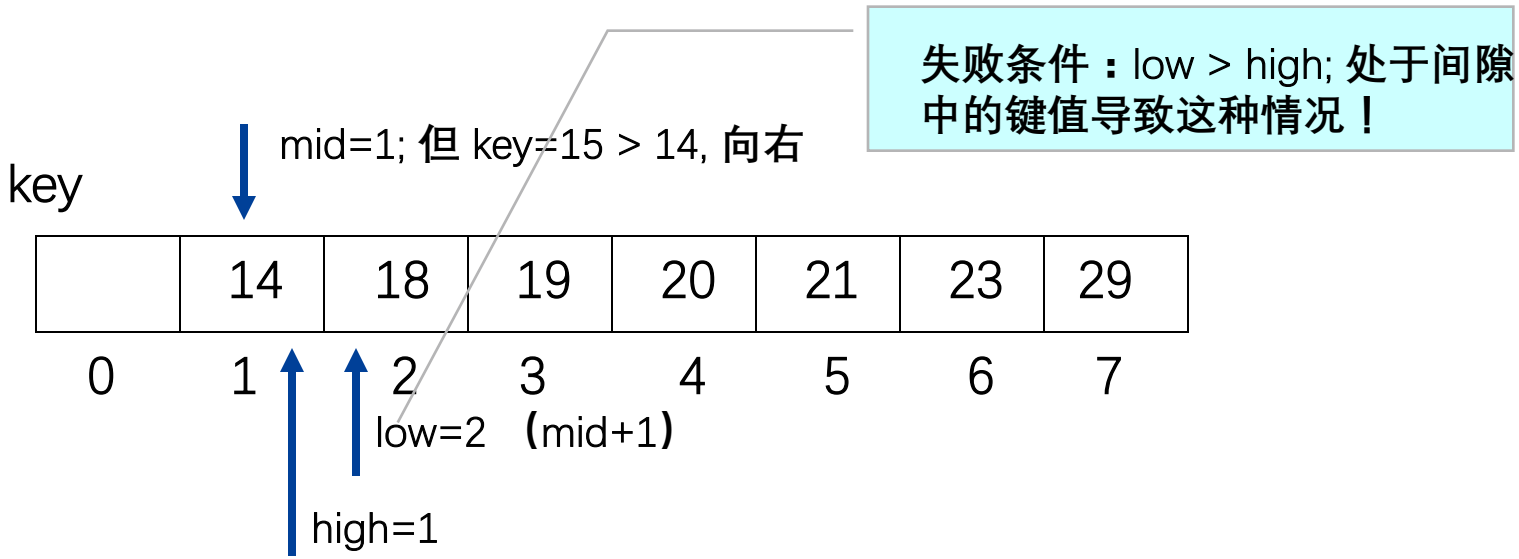
折半查找（或二分查找法）

应用范围：顺序表，表内元素之间有序。不可直接用于线性链表。

e.g: **查找** key = 15 **的结点所在的数组元素的下标地址。**

查找不成功的情况：数组 data **如下图所示有序**

- **数组** data **：递增序** data [i]. Key <= data [i+1]. Key; i= 1,2,……n
- **查找范围 ：**low**（低下标）** = 1; high**（高下标）** = 1 ;
- **比较对象：中点元素，其下标地址为** mid = **（**low+high**）** / 2 = 1



折半查找（或二分查找法）

注意：$(n-1)/2 = \lfloor n/2 \rfloor$

注意：$n/2 = \lfloor n/2 \rfloor$

应用范围：顺序表，表内元素之间有序。不可直接用于线性链表。

1、最坏情况分析：设 key 和中点的二次比较的时间代价 1

如果 n = 1, 则 low = high = mid , 则代价为 1，记为 S（1） = 1

如果 n 是奇数，那么中点元素的左、右段各有 (n-1)/2 个元素

如果 n 是偶数，中点元素的左段有 n/2-1 个元素；右段有 n/2 个元素

因此，算法工作的那一段，最多有 $\lfloor n/2 \rfloor$ 项

$$\therefore S(n) = 1 + S(\lfloor n/2 \rfloor)$$

$$= 1 + 1 + S(\lfloor n/2^2 \rfloor)$$

$$= 1 + 1 + 1 + S(\lfloor n/2^3 \rfloor)$$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots\cdots + 1}_{\text{总共 K 个 1}} + S(\lfloor n/2^k \rfloor)$$

当 $1 <= n/2^k < 2$ 时；则 $S(\lfloor n/2^k \rfloor) = 1$

此时： $2^k <= n < 2^{k+1}$ 即 $k <= \log_2 n < k+1$

注意：k 不可为小数，它是正整数。 $\therefore k = \lfloor \log_2 n \rfloor$

故： $S(n) = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$

折半查找（或二分查找法）

应用范围：顺序表，表内元素之间有序。不可直接用于线性链表。

1、最坏情况分析：

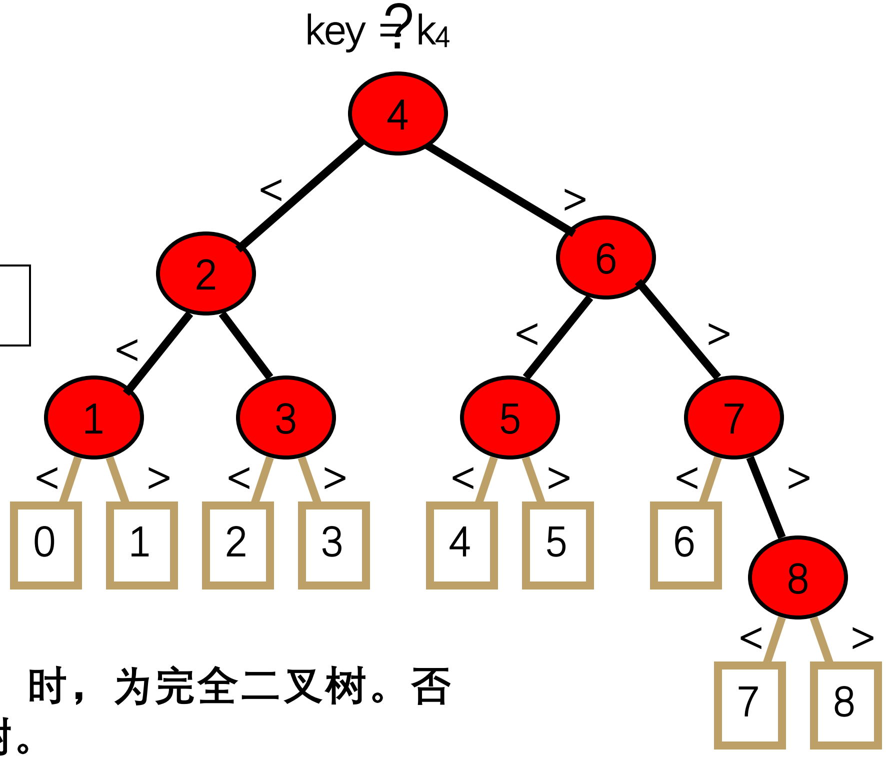
定理：在最坏情况下，二分查找法的查找有序表的最大的比较次数为 $1+\lfloor \log_2 n \rfloor$，大体上和 $\log_2 n$ 成正比。

也可用判定树的方法进行推导。

如：

1	2	3	4	5	6	7	8
4	8	9	10	11	13	19	29

当寻找 key = 9 及小于、大于 9 的键值的相应结点时，查找次数最大。达到了判定树的深度或高度。



注意：当判定树为 $n = 2^t - 1$ （t=1,2,3 ……）时，为完全二叉树。否则，除最下一层外，余为完全二叉树。

折半查找（或二分查找法）

应用范围：顺序表，表内元素之间有序。不可直接用于线性链表。

2、平均情况分析（在成功查找的情况下）：设每个 结点的查找概率相同都为 1/n。为了简单起见，设结点个数为 $n = 2^t - 1$ （$t = 1,2,3 \cdots\cdots$）。

∴ 经过 1 次比较确定的结点个数为 $1 = 2^0$ 个 。

经过 2 次比较确定的结点个数为 $2 = 2^1$ 个 。

经过 3 次比较确定的结点个数为 $4 = 2^2$ 个 。

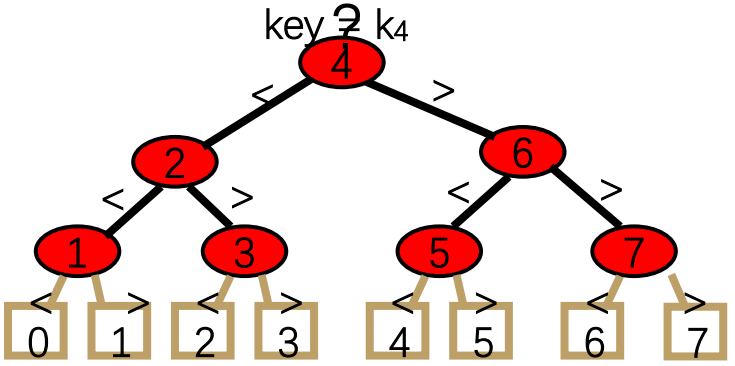
⋮

经过 t 次比较确定的结点个数为 2^{t-1} 个 。

注意： $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{t-1} = 2^t - 1$

∴ 最多经过 t 次比较可以找到有序表中的任何一个结点

e.g: 当 t = 4 时的例子：最多经过 t=4 次比较找到任何一个结点



折半查找（或二分查找法）

2、平均情况分析（只考虑查找成功的情况下）：

$$\therefore \quad ASL = (2^0 \times 1 + 2^1 \times 2 + 2^2 \times 3 + \cdots + 2^{t-1} \times t) / n$$

$$= \sum_{i=1}^{t} (i \times 2^{i-1}) / n$$

$$= [(n + 1) \times (\log_2(n + 1) - 1) + 1] / n$$

$$= (n + 1) \times (\log_2(n + 1) / n - 1$$

结论：在成功查找的情况下，平均查找的代价约为 $ASL = \log_2(n + 1) - 1$

或者简单地记为： $ASL = \log_2 n - 1$

折半查找（或二分查找法）

3、平均情况分析（考虑成功、非成功查找两种的情况下）：

为了简单起见，设结点个数为 $n = 2^t - 1$ （$t = 1,2,3 \cdots\cdots$）。成功查找的情况共有 n 种情况，非成功查找的情况共有 n + 1 情况。

设每种情况出现的概率相同，即都为 1/(2n+1) 。

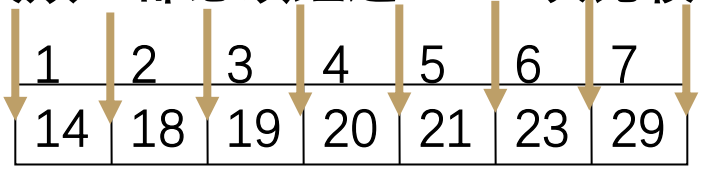
$$AVG = \left(\sum_{i=1}^{t} (i \times 2^{i-1}) + t \times (n+1) \right) / (2n+1)$$

$$= \log_2 n + 1/2$$

e.g: 当 t = 3 时的例子：

成功：最多经过 t=3 次比较

失败：都必须经过 t = 3 次比较



共有7+1=8种不成功的查找情况

插值查找

- 适用于数据的分布比较均匀的情况，可以快速定位
- 查找位置的估计

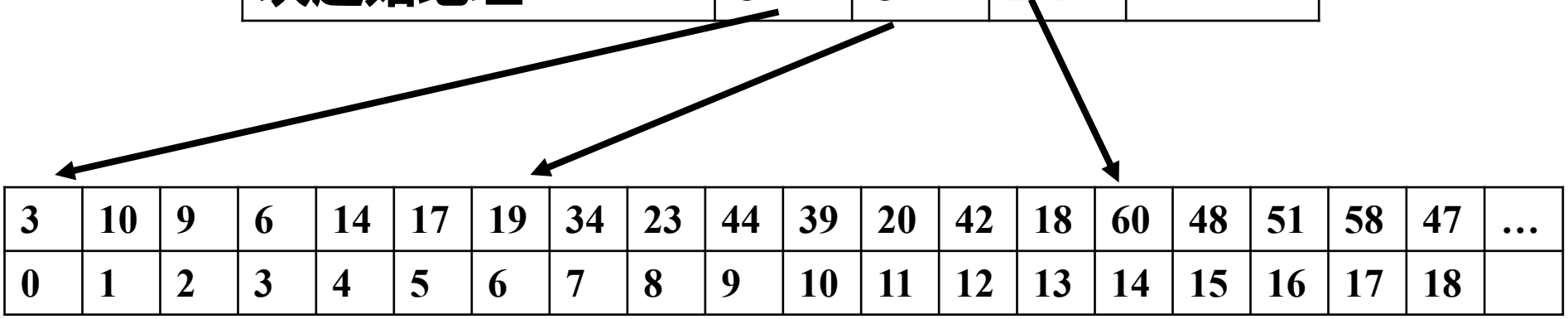
$$next = low + \left[\frac{x - a[low]}{a[high] - a[low]} \times (high - low + 1) \right]$$

- 缺点：计算查找位置比较复杂

分块查找：索引顺序块的查找

- 它把整个有序表分成若干块，块内的数据元素可以是有序存储，也可以是无序的，但块之间必须是有序的。

块内最大关键字	17	44	60	……
块起始地址	0	6	14	



3	10	9	6	14	17	19	34	23	44	39	20	42	18	60	48	51	58	47	…
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	

查找由两个阶段组成：查找索引(有序)和查找块

总结

- **本章介绍了集合关系的基本概念，以及集合类型的数据结构中的基本操作。**
- **针对静态的集合，介绍了查找操作的实现。包括顺序查找、二分查找、插值查找和分块查找。**

学习目标：综合应用数据结构与算法设计方法，实现满足时空复杂度要求的查找任务。

练习题

一、对于长度为18的有序顺序表，若采用折半查找，给出查找到表中第15个元素所需要的查找次数是多少？

二、设有序顺序表中的元素依次为：017，094，154，170，275，503，509，512，553，612，677，765，897，908。试画出对其进行折半查找时的二叉判定树，并计算平均查找长度（假定查找成功与查找失败等概率分布，并且元素查找等概率分布）

三、线性表中各结点的查找概率不等时，可以采用如下策略提高顺序查找的效率：若找到所查找的元素，则将该元素与其直接前驱元素（若存在前驱元素）交换，使得经常被查找的元素尽量位于表的前端。试写出该算法（用单链表方式存储）。

Thanks! & QA