بسمه تعالی

بازشناسی آماری الگو

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ۱۳۰۷ | تمرین سری اول | تاریخ تحویل: ۱۴۰۴/۷/۱۴ | آزمایشگاه بینایی ماشینی و پردازش تصاویر پزشکی

۱. با فرض $P(\omega_1) = P(\omega_2)$ و $p(x|\omega_1) = N_x(0,1)$ و $p(x|\omega_2) = N_x(1,2)$ مطلوب است محاسبه و رسم $P(\omega_1|x)$ و $P(\omega_2|x)$.

۲. (اختیاری) یک بردار تصادفی مقادیر $[a \quad b]^T$، $[-a \quad -b]^T$، $[-c \quad d]^T$ یا $[c \quad -d]^T$ را با احتمال برابر ۰٫۲۵ برای هر کدام اختیار می‌کند.

الف. بردار میانگین و ماتریس کواریانس را محاسبه کنید.

ب. شرط لازم روی مقادیر a، b، c و d برای به دست آوردن $\rho = 0$ چه می باشد؟

ج. شرط لازم روی مقادیر a، b، c و d برای به دست آوردن $\rho = 1$ و $\rho = -1$ چه می باشد؟

۳. (اختیاری) تبدیل خطی غیرمنفرد[1] A را در نظر بگیرید ($|A| \neq 0$) به شکلی که $\mathbf{y} = A^T\mathbf{x}$.

الف. آیا فاصله ماهالانوبیس d_M^2 تحت تبدیل خطی فوق ثابت می ماند ($d_M^2(\mathbf{y}) = d_M^2(\mathbf{x})$) ؟

$d_M^2(\mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^T \Sigma_Y^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)$

ب. فاصله اقلیدسی $d_E^2(\mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^T (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)$ چطور؟

ج. اگر $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{m}_x, \Sigma_x)$، توزیع $\mathbf{y}$ چیست؟ پارامترهای مربوط به این توزیع را مشخص کنید.

۴. (اختیاری) یک تابع توزیع نرمال با میانگین $[0\ 0]^T$ و ماتریس کواریانس $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس کواریانس را محاسبه کنید.

ب. معادله کانتور تابع چگالی احتمال را با یک انحراف معیار[2] بیابید.

ج. کانتور محاسبه شده در بالا را رسم کنید.

د. مقادیر و بردارهای ویژه چه رابطه‌ای با شکل این کانتور دارند؟

ه. رابطه بین trace ماتریس کواریانس و مقادیر ویژه آن چیست؟

و. رابطه بین دترمینان ماتریس کواریانس و مقادیر ویژه آن چیست؟

ز. ماتریس $\Sigma - 3I$ را در نظر بگیرید که از شیفت دادن ماتریس کواریانس حاصل شده است. مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس جدید را بیابید. چه رابطه‌ای با مقادیر و بردارهای ویژه Σ دارند؟

ح. ماتریس Σ را قطری کنید.

---

[1] Non-singular

[2] one standard deviation contour

۵. (اختیاری) فرض کنید u و v متغیرهای تصادفی مستقل باشند که مقادیر آنها به شکل یکنواخت در $[0,1]$ توزیع شده‌اند. میانگین و واریانس متغیر تصادفی $y = 3u^2 - 2v$ را به دست آورید.

۶. (اختیاری) آیا تبدیلات سفیدکنندگی[3] متعامد یکه[4] هم هستند؟ چرا؟

۷. (اختیاری) فرض کنید $p(\mathbf{x}) = N_{\mathbf{x}}(\mathbf{m}, \Sigma)$ باشد طوریکه:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

نشان دهید:

(چگالی حاشیه‌ای) $p(x_1) = N_{x_1}(m_1, \sigma_1^2)$

(چگالی شرطی) $p(x_1|x_2) = N_{x_1}\left(m_1 + \frac{\rho\sigma_1(x_2-m_2)}{\sigma_2}, \sigma_1^2(1-\ \rho^2)\right)$

۸. (اختیاری) برای توزیع مسأله ۷، مکان هندسی نقاط هم چگال را به ازای $d^2(\mathbf{x}) =\ 1, 4, 9$ و مقادیر پارامترهای زیر رسم کنید:

$$m_1 = 1\,, m_2 = 2\,, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 2, \rho =\ -1, -0.5, 0, 0.5, 1$$

۹. (اختیاری) (سؤال امتحان میان ترم بازشناسی آماری الگو سال ۱۳۹۱)

در فضای n بعدی تعداد N نمونه از یک کلاس در اختیار است:

$$X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$$

نشان دهید برنامه ساده زیر میانگین نمونه‌ها ($\widehat{\mathbf{m}}$) و N برابر ماتریس کواریانس نمونه‌ها ($\widehat{\Sigma}$) را محاسبه می‌کند.

$\widehat{\Sigma} = 0, \quad \widehat{\mathbf{m}} = \mathbf{0}$

for i=1:N

$\qquad \mathbf{d}_i = \mathbf{x}_i - \widehat{\mathbf{m}}$

$\qquad \widehat{\Sigma} =\ \widehat{\Sigma} + (1 - \frac{1}{i})\mathbf{d}_i\mathbf{d}_i^t$

$\qquad \widehat{\mathbf{m}} = \widehat{\mathbf{m}} + \frac{\mathbf{d}_i}{i}$

End

۱۰. (اختیاری) (سؤال امتحان میان ترم بازشناسی آماری الگو سال ۱۳۸۲)

در فضای n بعدی بردارهای $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ به ترتیب نمونه هایی از کلاس های ω_1 و ω_2 هستند. ماتریس پراکندگی بین کلاسی به صورت زیر تعریف می گردد (S_B: Between-class scattering matrix):

---

[3] whitening transformations

[4] orthonormal transformations

$S_B = E\{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T\}$

الف. S_B را بر حسب بردارهای امید ریاضی $\mathbf{m}_1$ و $\mathbf{m}_2$ و ماتریس های پراکندگی (کواریانس) $\mathbf{\Sigma}_1$ و $\mathbf{\Sigma}_2$ به ترتیب مربوط به کلاس های ω_1 و ω_2 محاسبه نمایید.

ب. در حالت کلی مرتبه ماتریس $\mathbf{x}_1$ چه می باشد؟ چرا؟

۱۱. (اختیاری) داده‌های دو بعدی متعلق به یک کلاس را در نظر بگیرید که دارای یک فرم گوسی با پارامترهای زیر می‌باشند:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad p(\mathbf{x}|\omega) \sim N(\mu, \Sigma), \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \;\&\; \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma$$

الف) رابطه فاصله اقلیدسی بین نقطه $\mathbf{x}$ و مرکز گوسی $(\boldsymbol{\mu})$ را بنویسید.

ب) رابطه فاصله ماهالانوبیس بین نقطه $\mathbf{x}$ و مرکز گوسی $(\boldsymbol{\mu})$ را بنویسید. (با ضرب ماتریس‌ها رابطه را ساده کنید.)

پ) رابطه به دست آمده در بخش قبل برای حالی که ماتریس کواریانس قطری باشد، به چه صورتی ساده خواهد شد؟ آیا ارتباطی بین رابطه به دست آمده با رابطه فاصله اقلیدسی وجود دارد؟

ت) رابطه‌های به دست آمده در بخش‌های الف و ب را با هم مقایسه کنید. در چه شرایط دو فاصله با هم برابر خواهند شد؟

ث) با توجه به نتایج مقایسه‌های بخش ت، در چه شرایطی بهتر است که از فاصله ماهالانوبیس استفاده شود؟ آیا شرایطی وجود دارد که در آن استفاده از فاصله اقلیدسی منطقی‌تر از فاصله ماهالانوبیس باشد (به جز در شرایطی که دو فاصله نتایج یکسانی را برمی‌گردانند)؟

ج) چه راهی برای محاسبه فاصله ماهالانوبیس بین دو نمونه از یک توزیع گوسی پیشنهاد می‌کنید. با استفاده از این راهکار در چه حالتی فاصله ماهالانوبیس بین دو نقطه با فاصله اقلیدسی بین آنها برابر خواهد بود؟

۱۲. (سوال امتحان میان ترم بازشناسی اماری الگو سال ۱۳۹۲)

دو متغیر تصادفی x و y را در نظر بگیرید. میانگین و انحراف معیار را به ترتیب با μ و δ نشان می‌دهیم. رابطه بین x و y به طرق مختلفی می‌تواند بیان شود. در این مسأله از دو مورد زیر استفاده می‌کنیم:

- پراکندگی توام (کواریانس): $cov(x,y) = E\left((x - \mu_{\mathrm{x}})(y - \mu_{\mathrm{y}})\right) = E(xy) - \mu_{\mathrm{x}}\mu_{\mathrm{y}}$
- ضریب همبستگی: $\rho_{\mathrm{xy}} = \frac{cov(x,y)}{\delta_{\mathrm{x}}\delta_{\mathrm{y}}}$

الف) ثابت کنید قدرمطلق ضریب همبستگی بین دو متغیر تصادفی کمتر یا مساوی یک است. (یادآوری: نامساوی کوشی-شوارتز $E(xy)^2 \leq E(x^2)E(y^2)$)

ب) تحت چه شرایطی $\rho_{XY} = 1$ می‌شود؟ در چه شرایطی $\rho_{XY} = -1$ می‌شود؟

۱۳. (اختیاری) (سوال امتحان میان ترم بازشناسی آماری الگو سال ۱۳۹۳)

نمونه‌هایی را به صورت متوالی و مستقل از هم از کلاس‌های $(i = 1, . . , n)$ ، ω_i با احتمال $P(\omega_i)$ بیرون می‌کشیم. اگر نمونه kام مربوط به کلاس ω_i باشد $z_{ik} = 1$ و در غیر این صورت $z_{ik} = 0$ نشان دهید:

$$P(z_{i1}, \dots, z_{in} | P(\omega_i)) = \prod_{k=1}^{n} P(\omega_i)^{z_{ik}} (1 - P(\omega_i))^{1 - z_{ik}}$$

۱۴. در فضای n بعدی تعداد N نمونه از یک کلاس در اختیار است:

$X = \{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_N\}$

با جایگذاری روابط ریاضی نشان دهید شبه کد زیر میانگین نمونه‌ها $(meanx)$ و ماتریس هم بستگی($\hat{S}$) نمونه‌ها را با رویکرد incremental تخمین می‌زند.

```
def online_correlation
    meanx = C = n = Ŝ = 0

   for i = 1:N
        n += 1
        di = xi − meanx_i
        meanx_i += di / n
        C += (1 − (1/i)) di ∗ di^T
        Ŝ += (C / i − 1 ) + meanx_i ∗ meanx_i^T
    end
```

۱۵. (اختیاری) فرض کنید ۱۰۰ نمونه از هر یک از دو کلاس ω_1 و ω_2 (مجموعا ۲۰۰ نمونه) در فضای دو بعدی در اختیار داریم طوریکه:

$$\mu_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \Sigma_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\mu_{\omega_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \Sigma_{\omega_2} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه راستای بیشترین پراکندگی همه نقاط داده.

۱۶. (اختیاری) کلاس درسی را در نظر بگیرید که چهار دانشجو دارد. ارزیابی دانشجویان بر اساس نمرات امتحانات و تمرینات آنان صورت می‌گیرد. بر این اساس نمره هر دانشجو در ترم گذشته یک بردار تصادفی دو بعدی بوده است: $\begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 18 \\ 16 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 15 \\ 17 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix}$

الف) ماتریس کوواریانس نمرات را محاسبه کنید. آیا از ماتریس کواریانس می‌توان دریافت که نمرات امتحانات دانشجویان تا چه حد و چگونه با نمرات تمرینات آن‌ها ارتباط دارد؟

ب) مقدار correlation را محاسبه کنید و با استفاده از آن در مورد ارتباط مذکور توضیح دهید ($\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$).

۱۷. (اختیاری) فرض کنید دو متغیر x و z از لحاظ آماری مستقلند. نشان دهید که روابط زیر در مورد آنها صادق است:

E[x+z]=E[x]+E[z]

Var[x+z]=var[x]+var[z]

۱۸. (اختیاری) (سوال امتحان میان ترم بازشناسی آماری الگو سال ۱۳۹۹) ماتریسی که دارای بردار ویژه $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ با مقدار ویژه 2 و بردار ویژه $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ با مقدار ویژه 1 باشد کدام است؟ توجه کنید که بردارهای ویژه داده شده یکه نیستند.

الف- $\begin{bmatrix}9/5 & -2/5\\-2/5 & 6/5\end{bmatrix}$

ب- $\begin{bmatrix}9 & -2\\-2 & 6\end{bmatrix}$

ج- $\begin{bmatrix}6 & 2\\2 & 9\end{bmatrix}$

د- $\begin{bmatrix}6/5 & 2/5\\2/5 & 9/5\end{bmatrix}$

۱۹. (اختیاری) (سوال امتحان میان ترم بازشناسی آماری الگو سال ۱۳۹۹) در کدامیک از موارد زیر می توان تضمین کرد که متغیرهای تصادفی اسکالر x1 و x2 از هم مستقلند؟ (توجه کنید که بیش از یک گزینه می تواند درست باشد)

الف- $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\sim N(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 7\end{bmatrix})$

ب- $x_1\sim N(0,1)$ و $x_2\sim N(0,1)$

ج- $E[(x_1-E[x_1])(x_2-E[x_2])]=-1$

د- $cov(x_1,x_2)=0$ و $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ یک توزیع نرمال چند متغیره داشته باشد.

۲۰. (اختیاری) (سوال امتحان میان ترم بازشناسی آماری الگو سال ۱۳۹۹) فرض کنید ماتریس کواریانسی به شکل $\begin{bmatrix}5 & a\\a & 4\end{bmatrix}$ داریم. مجموعه مقادیری که a می تواند اختیار کند تا ماتریس کواریانس مذکور معتبر باشد کدام است؟

الف- $a\geq 0$

ب- $a\in R$

ج- $-\sqrt{20}\leq a\leq\sqrt{20}$

د- $-\sqrt{20}<a<\sqrt{20}$

۲۱- (اختیاری) (سوال امتحان میان ترم بازشناسی آماری الگو سال ۱۳۹۹) فرض کنید که A یک ماتریس n×n متقارن و حقیقی است. کدامیک از گزینه های زیر در باره بردارهای ویژه و مقادیر ویژه آن صحیح هستند؟ (توجه کنید که بیش از یک گزینه می تواند صحیحی باشد.)

الف- ماتریس A نمی تواند بیش از 2n بردار ویژه یکه متمایز داشته باشد.

ب- بردار $\vec{0}$ یک بردار ویژه است، زیرا $A\vec{0} = \lambda\,\vec{0}$

ج- می توانیم n بردار ویژه دو به دو عمود بر هم برای A بیابیم.

د- ماتریس Aنمی تواند بیشتر از n مقدار ویژه متمایز داشته باشد.

۲۲- (اختیاری) ماتریس A، یک ماتریس حقیقی- متقارن می‌باشد. مقادیر ویژه این ماتریس $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$ و با بردارهای ویژه $v_1 = (1,1,1)^T$ و $v_2 = (1,-1,0)^T$ متناظر می‌باشند. مقدار ویژه سوم $\lambda_3 = 0$ است.

الف) بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه سوم را بیابید.

ب) با استفاده از نتایج به دست آمده از بند الف، ماتریس A را به صورت حاصلضرب سه ماتریس بنویسید.

۲۳- (میان ترم ۱۴۰۱) ماتریسی که دارای بردار ویژه $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ با مقدار ویژه ۲ و بردار ویژه $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ با مقدار ویژه ۱ باشد کدام است؟ توجه کنید که بردارهای ویژه داده شده یکه نیستند. برای انتخاب خود دلیل ذکر کنید.

الف- $\begin{bmatrix}9/5 & -2/5\\-2/5 & 6/5\end{bmatrix}$ ب- $\begin{bmatrix}9 & -2\\-2 & 6\end{bmatrix}$ ج- $\begin{bmatrix}6 & 2\\2 & 9\end{bmatrix}$ د- $\begin{bmatrix}6/5 & 2/5\\2/5 & 9/5\end{bmatrix}$

۲۴- (میان ترم ۱۴۰۱) فرض کنید λ_i و v_i مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A باشند ($i = 1, \dots, n$). ماتریس AA^T ماتریس کواریانس تعدادی نمونه است. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن را بر حسب λ_i، v_i و A محاسبه نمایید.

۲۵- (میان ترم ۱۴۰۳) داده های دوبعدی زیر داده شده اند:

C1={(0,-1)^T, (1,0)^T, (2,1)^T}
C2={(1,1)^T, (-1,1)^T, (-1,-1)^T, (-2,-1)^T}

الف- با انجام تحلیل مولفه های اصلی، مولفه اصلی برای همه نقاط را محاسبه کنید.
ب- داده ها را بر روی اولین مولفه اصلی نگاشت کنید.
ج- مختصات نگاشت داده ها بر روی مولفه اصلی را در فضای ویژگی اولیه محاسبه کنید.
د- مجموع مربعات خطای بازسازی چقدر است؟

موفق باشید