

# تکلیف پنجم درس شناسایی الگو

وحید ملکی

شماره دانشجویی: ۴۰۳۱۳۰۰۴

۲۴ آبان ۱۴۰۴

## سؤال ۱۱

فرض کنید نمونه‌های زیر مشاهده شده‌اند: کلاس اول ( $\omega_1$ ):  $-1, -2, 3, 3, 7, 7$  ( $n_1 = 6$ ) کلاس دوم ( $\omega_2$ ):  $-3, -2, 3, 5, 8$  ( $n_2 = 5$ )  
از تخمین گر پارزن با کرنل صفر-یک و پهنای پنجره  $h = 2$  استفاده شده است. هدف: نشان دادن اینکه نمونه‌ی جدید در نقطه  $x = 4$  با استفاده از کلاسیفایر پیشینه شباهت (Maximum Likelihood) در کلاس اول قرار می‌گیرد.

## تعریف کرنل

کرنل داده شده:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} & |x| < a \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با  $a = 2$ :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

## فرمول تخمین گر پارزن

$$p(x | \omega_j) = \frac{1}{n_j h} \sum_{i=1}^{n_j} \varphi\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

محاسبه  $p(x = 4 | \omega_1)$

$$p(4 | \omega_1) = \frac{1}{6 \times 2} \sum_{i=1}^6 \varphi\left(\frac{4 - x_i}{2}\right) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^6 \varphi\left(\frac{4 - x_i}{2}\right)$$

شرط فعال شدن کرنل:

$$\left| \frac{4 - x_i}{2} \right| < 2 \Rightarrow |4 - x_i| < 4 \Rightarrow 0 < x_i < 8$$

نمونه‌های کلاس اول در بازه  $(0, 8)$ :  $x_i = 3, 3, 7, 7$  نمونه ۴\*\*

$$\sum = 4 \Rightarrow p(4 | \omega_1) = \frac{1}{12} \times 4 = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

محاسبه  $p(x = 4 | \omega_2)$

$$p(4 | \omega_2) = \frac{1}{5 \times 2} \sum_{i=1}^5 \varphi\left(\frac{4 - x_i}{2}\right) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^5 \varphi\left(\frac{4 - x_i}{2}\right)$$

شرط همان است:  $0 < x_i < 8$  نمونه‌های کلاس دوم در این بازه:  $x_i = 3, 5$  نمونه ۲\*\*

$$\sum = 2 \Rightarrow p(4 | \omega_2) = \frac{1}{10} \times 2 = \frac{2}{10} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

تصمیم‌گیری با کلاسیفایر بیشینه شباهت

$$\hat{\omega} = \arg \max_{\omega_j} p(x | \omega_j)$$

مقایسه:

$$p(4 | \omega_1) = \frac{1}{3} \approx 0.333, \quad p(4 | \omega_2) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\boxed{\frac{1}{3} > \frac{1}{5}}$$

بنابراین، نمونه‌ی جدید در نقطه  $x = 4$  به کلاس اول اختصاص می‌یابد.

کلاس	تعداد نمونه در پیکره	$p(4   \omega_j)$
$\omega_1$	۴	$\frac{1}{3}$
$\omega_2$	۲	$\frac{1}{5}$
تصمیم نهایی	کلاس ۱	