

تکلیف چهارم درس شناسایی الگو

وحید ملکی

شماره دانشجویی: ۴۰۳۱۳۰۰۴

۷ نوامبر ۲۰۲۵

۱ سوال ۱۷

متغیر تصادفی x از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر پیروی می کند:

$$p(x; \theta) = \frac{\theta^3}{2} x^2 e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0$$

فرض کنید N نمونه‌ی مستقل x_1, x_2, \dots, x_N از این توزیع در اختیار است. مطلوب است تخمین بیشینه‌ی درست‌نمایی (Maximum Likelihood Estimation) برای پارامتر θ محاسبه شود.

۱.۱ جواب

۱.۱.۱ ۱. تشکیل تابع درست‌نمایی (Likelihood Function)

تابع درست‌نمایی $L(\theta)$ برابر با حاصل ضرب تابع چگالی احتمال برای هر یک از N نمونه‌ی مستقل است:

$$L(\theta) = P(x_1, \dots, x_N | \theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i; \theta)$$

با جایگذاری $p(x; \theta)$ داده شده:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N \left(\frac{\theta^3}{2} x_i^2 e^{-\theta x_i} \right)$$

ساده‌سازی عبارت:

$$L(\theta) = \left(\frac{\theta^3}{2} \right)^N \left(\prod_{i=1}^N x_i^2 \right) \left(\prod_{i=1}^N e^{-\theta x_i} \right) = \frac{\theta^{3N}}{2^N} \left(\prod_{i=1}^N x_i^2 \right) e^{-\theta \sum_{i=1}^N x_i}$$

۲. ۲.۱.۱ ۲. تشکیل تابع لگاریتم درست‌نمایی (Log-Likelihood)

$$\mathcal{L}(\theta) = \ln L(\theta) = \ln \left[\frac{\theta^{3N}}{2^N} \left(\prod_{i=1}^N x_i^2 \right) e^{-\theta \sum_{i=1}^N x_i} \right]$$

با استفاده از خواص لگاریتم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta) &= \ln\left(\frac{\theta^{3N}}{2^N}\right) + \ln\left(\prod_{i=1}^N x_i^2\right) + \ln\left(e^{-\theta \sum_{i=1}^N x_i}\right) \\ &= 3N \ln \theta - N \ln 2 + \sum_{i=1}^N \ln(x_i^2) - \theta \sum_{i=1}^N x_i = 3N \ln \theta - N \ln 2 + 2 \sum_{i=1}^N \ln x_i - \theta \sum_{i=1}^N x_i\end{aligned}$$

۳.۱.۱ مشتق گیری و یافتن نقطه اکسترمم

مشتق نسبت به θ :

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[3N \ln \theta - N \ln 2 + 2 \sum_{i=1}^N \ln x_i - \theta \sum_{i=1}^N x_i \right] = \frac{3N}{\theta} - \sum_{i=1}^N x_i$$

قرار دادن مشتق برابر صفر:

$$\frac{3N}{\theta} - \sum_{i=1}^N x_i = 0 \quad \implies \quad \frac{3N}{\theta} = \sum_{i=1}^N x_i$$

۴.۱.۱ محاسبه تخمین $\hat{\theta}_{MLE}$

$$\theta = \frac{3N}{\sum_{i=1}^N x_i} \quad \implies \quad \hat{\theta}_{MLE} = \frac{3N}{\sum_{i=1}^N x_i}$$

اگر میانگین نمونه‌ها را $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ تعریف کنیم، می‌توان نوشت:

$$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{3}{\bar{x}}$$