

تکلیف هفتم درس شناسایی الگو

وحید ملکی
شماره دانشجویی: ۴۰۳۱۳۰۰۴

۱۴۰۴ آذر ۱۰

سؤال ۱۰

صورت سؤال: الگوریتم پرسپترون با وزن‌های اولیه $w = [1, 1]^T$ و بیاس $b = 0$ و نرخ یادگیری $\mu = 1$ داده شده است. با توجه به داده‌های جدول، خط جداسازی پس از یک دور (Epoch) مشاهده‌ی تمام نمونه‌ها را بیایید. شرط برروزرسانی: اگر $y_i(w^T X_i + b) \leq 0$ باشد، آپدیت انجام می‌شود.

داده‌های مسئله

داده‌های آموزشی به شرح زیر هستند:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad y_1 = +1 \quad \bullet$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_2 = -1 \quad \bullet$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y_3 = +1 \quad \bullet$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y_4 = -1 \quad \bullet$$

مراحل اجرا (پیاپیش نمونه‌ها)

۱. بررسی نمونه اول (X_1, y_1) : مقادیر فعلی: $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b = 0$

$$g(X_1) = w^T X_1 + b = (1 \times 10) + (1 \times 10) + 0 = 20$$

بررسی شرط خطای:

چون حاصل مثبت است، دسته‌بندی صحیح بوده و نیازی به برروزرسانی نیست.

۲. بررسی نمونه دوم (X_2, y_2) : مقادیر فعلی: همان مقادیر اولیه.

$$g(X_2) = (1 \times 0) + (1 \times 0) + 0 = 0$$

بررسی شرط خطای:

طبق صورت سؤال، در حالت مساوی با صفر به روزرسانی انجام می‌شود:

$$w_{\text{new}} = w_{\text{old}} + \mu y_2 X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1(-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{\text{new}} = b_{\text{old}} + \mu y_2 = 0 + 1(-1) = -1$$

(دقت کنید که چون بردار ورودی صفر بود، بردار وزن تغییری نکرد اما بایاس تغییر یافت).

۳. بررسی نمونه سوم (X_3, y_3): مقادیر فعلی:

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = -1$$

$$g(X_3) = (1 \times 8) + (1 \times 4) + (-1) = 11$$

بررسی شرط خطای:

دسته‌بندی صحیح است، بدون تغییر.

۴. بررسی نمونه چهارم (X_4, y_4): مقادیر فعلی:

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = -1$$

$$g(X_4) = (1 \times 3) + (1 \times 3) + (-1) = 5$$

بررسی شرط خطای:

خطای داده است. به روزرسانی انجام می‌شود:

$$w_{\text{new}} = w_{\text{old}} + \mu y_4 X_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1(-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$b_{\text{new}} = b_{\text{old}} + \mu y_4 = -1 + 1(-1) = -2$$

پاسخ نهایی

پس از مشاهده‌ی تمام نمونه‌ها، پارامترهای نهایی شبکه عبارتند از:

$$w = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b = -2$$

معادله‌ی خط جداکننده ($g(x) = 0$) به صورت زیر خواهد بود:

$$-2x_1 - 2x_2 - 2 = 0$$

که با ساده‌سازی (نقسیم بر -2) به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\boxed{x_1 + x_2 + 1 = 0}$$