حل سوال ۱۰ - پایان ترم ۱۴۰۳ (Kernel SVM)

وحید ملکی

۲۲ آذر ۱۴۰۴

سوال ۱۰: دسته‌بندی با Kernel-SVM

داده‌های آموزشی داده شده عبارتند از:

- **کلاس مثبت (+):**

$$x_1 = (0.2, 0.4), \quad x_2 = (0.4, 0.8), \quad x_3 = (0.8, 0.4), \quad x_4 = (2, 4.0)$$

- **کلاس منفی (−):**

$$x_5 = (0.4, 0.4), \quad x_6 = (0.8, 0.8)$$

تابع کرنل داده شده به صورت زیر است (نرمال‌سازی کسینوسی):

$$k(x, x') = \frac{x^T x'}{\|x\| \|x'\|}$$

الف) رسم داده‌ها و بررسی تفکیک‌پذیری خطی

ابتدا شیب خط واصل از مبدا به هر نقطه را بررسی می‌کنیم ($m = y/x$):

- برای x_1, x_2, x_4: شیب برابر است با $0.4/0.2 = 2$. (همه روی خط $y = 2x$ هستند).
- برای x_3: شیب برابر است با $0.4/0.8 = 0.5$. (روی خط $y = 0.5x$ است).
- برای x_5, x_6 (کلاس منفی): شیب برابر است با $0.4/0.4 = 1$. (روی خط $y = x$ هستند).

تحلیل هندسی: داده‌های کلاس منفی (روی خط $y = x$) دقیقاً بین دو دسته از داده‌های کلاس مثبت (روی خطوط $y = 2x$ و $y = 0.5x$) قرار گرفته‌اند. به عبارت دیگر، کلاس مثبت کلاس منفی را از نظر زاویه‌ای «ساندویچ» کرده است.

نتیجه: خیر، داده‌ها در فضای اصلی دوبعدی **بصورت خطی تفکیک‌پذیر نیستند.** هیچ خط راستی نمی‌تواند کشید که نقاط روی خط $y = x$ را از نقاطی که در دو طرف آن ($y = 2x$ و $y = 0.5x$) قرار دارند، جدا کند (مسئله شبیه به XOR اما در مختصات قطبی است).

ب) بردار ویژگی $\phi(x)$ و تفکیک‌پذیری در فضای جدید

با توجه به فرمول کرنل $k(x,x') = \left(\frac{x}{\|x\|}\right)^T \left(\frac{x'}{\|x'\|}\right)$، نگاشت $\phi(x)$ به صورت زیر است:

$$\phi(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

این نگاشت تمام داده‌ها را به بردارهایی با طول واحد تبدیل می‌کند (تصویر روی دایره واحد).

محاسبه نقاط در فضای ویژگی (Φ):

- گروه ۱ مثبت (x_1, x_2, x_4): همگی روی یک شعاع هستند.

$$\|x_1\| = \sqrt{0.2^2 + 0.4^2} = \sqrt{0.2} \approx 0.447$$

$$\phi(x_1) = \left(\frac{0.2}{\sqrt{0.2}}, \frac{0.4}{\sqrt{0.2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx (0.45, 0.89)$$

- گروه ۲ مثبت (x_3):

$$\phi(x_3) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx (0.89, 0.45)$$

- گروه منفی (x_5, x_6):

$$\phi(x_5) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx (0.71, 0.71)$$

رسم در فضای ویژگی: همه نقاط روی کمانی از دایره واحد در ربع اول قرار دارند.

- نقطه مثبت P_1 در زاویه $\approx 63°$.
- نقطه مثبت P_2 در زاویه $\approx 26°$.
- نقطه منفی N در زاویه $45°$ (بین دو نقطه مثبت).

آیا تفکیک‌پذیر خطی هستند؟ بله. اگرچه روی محیط دایره ترتیب $+ - +$ دارند، اما فضای ویژگی ما یک فضای اقلیدسی دوبعدی است. نقاط کلاس مثبت (P_1 و P_2) یک وتر **(Chord)** از دایره را تشکیل می‌دهند. ناحیه محدب (Convex Hull) کلاس مثبت، پاره‌خط واصل P_1P_2 است. نقطه کلاس منفی N روی محیط دایره قرار دارد و «بیرون» این پاره‌خط است. بنابراین می‌توان یک خط مستقیم رسم کرد که پاره‌خط P_1P_2 را از نقطه N (که روی برآمدگی کمان دایره است) جدا کند.

ج) یافتن خط جداکننده و بردارهای پشتیبان

به دلیل تقارن مسئله نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول)، خط جداکننده باید بر نیمساز عمود باشد.

- بردار نرمال خط جداکننده w در راستای نیمساز است: $w = (1, 1)$.
- تصویر نقاط روی بردار w (محاسبه $x + y$):
  - برای کلاس منفی (N): $0.71 + 0.71 = 1.414$ ($\sqrt{2}$)

- برای کلاس مثبت (P_1, P_2): $1.34 = 0.89 + 0.45$ $(3/\sqrt{5})$

خط جداکننده باید عددی بین 1.34 و 1.41 باشد. برای بیشینه کردن حاشیه، میانگین را می‌گیریم:

$$b_{thresh} = \frac{1.414 + 1.342}{2} \approx 1.378$$

معادله خط در فضای ویژگی:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 1.378$$

یا به فرم استاندارد SVM (که جهت مثبت به سمت کلاس + باشد):

$$-(\Phi_1 + \Phi_2) + 1.378 = 0$$

بردارهای پشتیبان: هر سه نقطه متمایز در فضای ویژگی بردارهای پشتیبان هستند:

۱. نگاشتِ x_1, x_2, x_4 (همه یک نقطه می‌شوند).

۲. نگاشتِ x_3.

۳. نگاشتِ x_5, x_6 (همه یک نقطه می‌شوند).

د) رسم مرز تصمیم‌گیری در فضای اولیه

معادله خط در فضای ویژگی را به فضای اصلی برمی‌گردانیم:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = C \Rightarrow \frac{x_1}{\|x\|} + \frac{x_2}{\|x\|} = C$$

$$\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 1.378$$

این معادله فقط به نسبت x_1 و x_2 (زاویه) وابسته است و مستقل از طول بردارهاست. این یعنی مرزهای تصمیم‌گیری به صورت **پرتوهایی از مبدا (Rays)** هستند.

در واقعیت، این نامساوی یک **مخروط (Cone)** زاویه‌ای حول خط $y = x$ را تعریف می‌کند. ناحیه کلاس منفی، یک قطاع باریک حول زاویه ۴۵ درجه است و ناحیه کلاس مثبت خارج از این قطاع قرار دارد.

شکل تقریبی: دو خط راست که از مبدا می‌گذرند. یکی با زاویه‌ای کمی بیشتر از $26°$ و دیگری با زاویه‌ای کمی کمتر از $63°$. ناحیه بین این دو خط متعلق به کلاس منفی و ناحیه بیرون آن‌ها متعلق به کلاس مثبت است.