

تکلیف چهارم درس شناسایی الگو

وحید ملکی

شماره دانشجویی: ۴۰۳۱۳۰۰۴

۷ نوامبر ۲۰۲۵

۱ سوال ۱۰

در یک فضای یک بعدی، تابع چگالی احتمال به صورت مجموع وزن دار دو توزیع نرمال با واریانس واحد و میانگین های μ_1 و μ_2 تعریف شده است:

$$p(x) = P_1 p(x|\mu_1) + P_2 p(x|\mu_2)$$

که در آن P_1 و P_2 وزن های معلوم هستند.

۱.۱ الف) تعریف تابع درست نمایی

فرض کنید مجموعه نمونه ها $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ از توزیع $p(x)$ به دست آمده. تابع چگالی برای هر توزیع نرمال با واریانس ۱ این طوری:

$$p(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

پس تابع درست نمایی $L(\mu_1, \mu_2|X)$ برابر حاصل ضرب احتمال هر نمونه است (چون نمونه ها مستقل هستن):

$$L(\mu_1, \mu_2|X) = \prod_{i=1}^N [P_1 p(x_i|\mu_1) + P_2 p(x_i|\mu_2)]$$

برای راحت تر مشتق گرفتن، لگاریتمش رو می گیریم:

$$\mathcal{L}(\mu_1, \mu_2|X) = \sum_{i=1}^N \ln \left(P_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu_1)^2}{2}} + P_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu_2)^2}{2}} \right)$$

۲.۱ ب) پیشینه سازی تابع درست نمایی

برای پیدا کردن $\hat{\mu}_1$ و $\hat{\mu}_2$ ، مشتق جزئی \mathcal{L} رو نسبت به هر μ می گیریم و برابر صفر می ذاریم. اول نسبت به μ_1 :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{P_1 p(x_i|\mu_1) + P_2 p(x_i|\mu_2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_1} (P_1 p(x_i|\mu_1))$$

مشتق $p(x_i|\mu_1)$ نسبت به μ_1 اینه:

$$\frac{\partial p(x_i|\mu_1)}{\partial \mu_1} = p(x_i|\mu_1)(x_i - \mu_1)$$

پس:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} = \sum_{i=1}^N \frac{P_1 p(x_i | \mu_1)}{P_1 p(x_i | \mu_1) + P_2 p(x_i | \mu_2)} (x_i - \mu_1) = 0$$

عبارت کسری رو $\gamma_1(x_i)$ می‌نامیم (مسئولیت نمونه برای توزیع اول):

$$\gamma_1(x_i) = \frac{P_1 p(x_i | \mu_1)}{P_1 p(x_i | \mu_1) + P_2 p(x_i | \mu_2)}$$

پس:

$$\sum_{i=1}^N \gamma_1(x_i) x_i = \hat{\mu}_1 \sum_{i=1}^N \gamma_1(x_i) \implies \hat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_1(x_i) x_i}{\sum_{i=1}^N \gamma_1(x_i)}$$

به طور مشابه برای μ_2 ، با $\gamma_2(x_i) = \frac{P_2 p(x_i | \mu_2)}{P_1 p(x_i | \mu_1) + P_2 p(x_i | \mu_2)}$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_2(x_i) x_i}{\sum_{i=1}^N \gamma_2(x_i)}$$

این معادلات بسته نیستن چون γ ها به μ ها وابسته‌ان. برای حل، از الگوریتم EM استفاده می‌شه: اول حدس اولیه بزن، γ ها رو حساب کن (گام E)، بعد μ ها رو آپدیت کن (گام M) و تکرار کن تا همگرا بشه.