

تکلیف نهم درس شناسایی الگو

وحید ملکی
شماره دانشجویی: ۴۰۳۱۳۰۰۴

۱۴۰۴ آذر ۲۹

سوال ۱۱: طراحی شبکه عصبی RBF

تحلیل داده‌ها و تعیین مراکز

هدف مساله جداسازی دو کلاس است:

- کلاس ۱ (دایره‌های مشکی): این نمونه‌ها در دو ناحیه متتمرکز شده‌اند.
 - ۱. یک خوش به شکل لوزی در سمت چپ پایین تصویر که مرکز ثقل آن تقریباً نقطه $(1, 1) = \mu_1$ است.
 - ۲. یک تک نمونه در سمت راست بالا که در مختصات $(3, 3) = \mu_2$ قرار دارد.
- کلاس ۲ (دایره‌های سفید): این نمونه‌ها اطراف خوش‌های کلاس ۱ قرار گرفته‌اند (مثلاً در نقاط $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$ و یک حلقه دور نقطه $(3, 3)$).

از آنجا که شبکه‌های RBF بر اساس فاصله از مراکز (Centroids) عمل می‌کنند، بهترین استراتژی قرار دادن نورون‌های لایه مخفی روی مراکز تجمعی یکی از کلاس‌ها (در اینجا کلاس ۱) است. بنابراین ما دو نورون در لایه مخفی در نظر می‌گیریم.

ساختار شبکه و پارامترها

شبکه پیشنهادی دارای مشخصات زیر است:

- لایه ورودی: ۲ نورون (منتاظر با مختصات x_1 و x_2)
- لایه مخفی: ۲ نورون با تابع فعالیت گوسی (RBF)
- لایه خروجی: ۱ نورون خطی با حد آستانه.

۱. مراکز (Centers)

مراکز نورون‌های لایه مخفی (μ) را روی مراکز کلاس ۱ تنظیم می‌کنیم:

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۰۲ پهنهای باند (Spread)

پارامتر σ (انحراف معیار) باید طوری انتخاب شود که تابع گوسی برای نمونه‌های کلاس ۱ خروجی بالا (نژدیک ۱) و برای نمونه‌های کلاس ۲ خروجی پایین (نژدیک ۰) تولید کند.

• فاصله نمونه‌های کلاس ۱ تا مرکز خود بسیار کم است (مثلاً در خوشة اول حدود ۰.۵ واحد).

• فاصله نژدیک ترین نمونه کلاس ۲ تا مرکز حدود ۱ واحد است (مثلاً فاصله $(2, 3)$ تا $(3, 3)$ برابر ۱ است).

برای ایجاد تفکیک مناسب، σ را می‌توان عددی مانند ۰.۶ در نظر گرفت تا در فاصله $r = 0.5$ مقدار تابع بالا باشد و در $r = 1$ افت قابل توجهی داشته باشد.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.6$$

تابع فعالیت لایه مخفی برای نورون j :

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_j\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

۰۳ وزن‌های لایه خروجی

چون هر دو نورون مخفی غایانگر کلاس ۱ هستند، وزن‌های اتصال آن‌ها به خروجی باید مثبت و برابر باشد. فرض می‌کنیم خروجی مطلوب برای کلاس ۱ برابر $+1$ و برای کلاس ۲ برابر -1 (یا 0) باشد.

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1$$

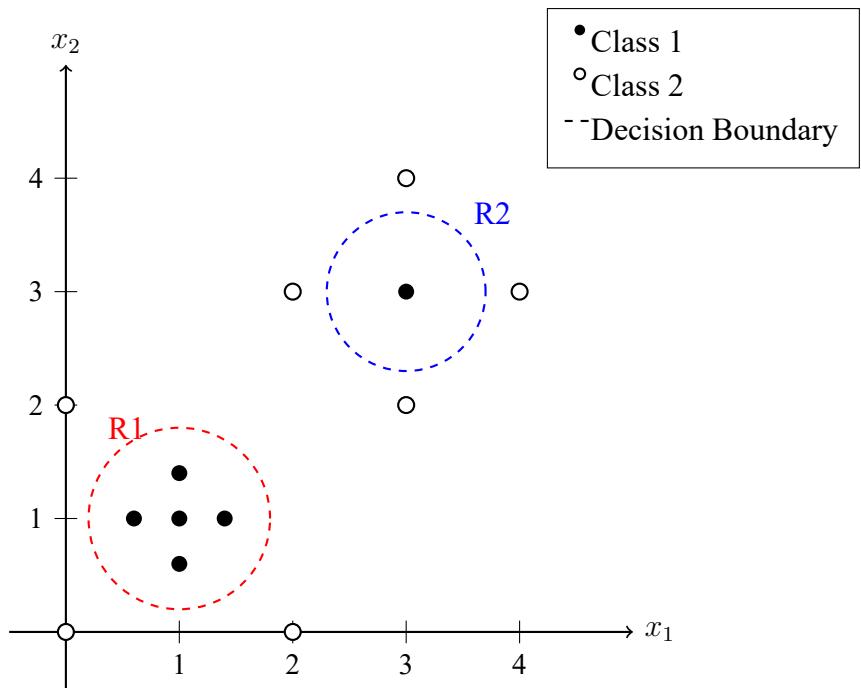
معادله نهایی خروجی شبکه (بدون بایاس):

$$y(\mathbf{x}) = w_1\varphi_1(\mathbf{x}) + w_2\varphi_2(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1\|^2}{0.72}\right) + \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2\|^2}{0.72}\right)$$

برای تصمیم‌گیری نهایی، یک حد آستانه (Threshold) مثلاً $T = 0.5$ در نظر می‌گیریم. اگر $y > 0.5$ باشد، کلاس ۱ و در غیر این صورت کلاس ۲ است.

رسم نواحی تصمیم‌گیری

نواحی تصمیم‌گیری در شبکه‌های RBF با تابع پایه گوسی و وزن‌های برابر، به صورت دایره‌هایی اطراف مرکز شکل می‌گیرند. در اینجا ما دو ناحیه تصمیم‌گیری دایروی جداگانه خواهیم داشت.



شکل ۱: نواحی تصمیم‌گیری تقریبی شبکه RBF

توضیح شکل: خطوط چین‌دار نواحی تصمیم‌گیری تقریبی را نشان می‌دهند. هر ورودی که داخل این دایره‌ها قرار گیرد (نواحی R₁ و R₂) توسط شبکه به عنوان **کلاس ۱** (دایره مشکی) و هر نقطه‌ای خارج از این دایره‌ها به عنوان **کلاس ۲** دسته‌بندی می‌شود. شعاع دایره‌ها وابسته به پارامتر پهنه‌ای باند (σ) و حد آستانه انتخاب شده است.