

تکلیف هفتم درس شناسایی الگو

وحید ملکی
شماره دانشجویی: ۴۰۳۱۳۰۰۴

۱۰ آذر ۱۴۰۴

سؤال ۱۱

صورت سؤال: الگوریتم پرسپترون با شرایط زیر داده شده است:

• وزن‌های اولیه: $w = [\frac{3}{2}, 1]^T = [1.5, 1]^T$

• بایاس اولیه: $b = -\frac{1}{2} = -0.5$

• نرخ یادگیری: $\mu = 0.75$

باید خط جداسازی پس از مشاهده‌ی تمام نمونه‌ها مشخص شده و در انتهای هر مرحله رسم گردد.

داده‌های آموزشی

• نمونه ۱: $X_1 = (0, 0), y_1 = -1$

• نمونه ۲: $X_2 = (1, 0), y_2 = -1$

• نمونه ۳: $X_3 = (0, 2), y_3 = +1$

• نمونه ۴: $X_4 = (2, 0), y_4 = +1$

مرحله اول (Epoch 1)

در این مرحله نمونه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

۰۱. بررسی نمونه اول (X_1, y_1) :

$$g(X_1) = w^T X_1 + b = (1.5 \times 0) + (1 \times 0) - 0.5 = -0.5$$

$$y_1 g(X_1) = (-1)(-0.5) = +0.5 > 0 \quad (\text{صحیح، بدون تغییر})$$

۰۲. بررسی نمونه دوم (X_2, y_2) :

$$g(X_2) = (1.5 \times 1) + (1 \times 0) - 0.5 = 1.0$$

$$y_2 g(X_2) = (-1)(1.0) = -1.0 \leq 0 \quad (\text{خطا رخ داده است})$$

به روزرسانی وزن‌ها:

$$w_{\text{new}} = w_{\text{old}} + \mu y_2 X_2 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.75(-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{\text{new}} = b_{\text{old}} + \mu y_2 = -0.5 + 0.75(-1) = -1.25$$

پارامترهای جدید: $w = [0.75, 1]^T$, $b = -1.25$

۰۳. بررسی نمونه سوم (X_3, y_3) با پارامترهای جدید:

$$g(X_3) = (0.75 \times 0) + (1 \times 2) - 1.25 = 0.75$$

$$y_3 g(X_3) = (+1)(0.75) = 0.75 > 0 \quad (\text{صحیح})$$

۰۴. بررسی نمونه چهارم (X_4, y_4) با پارامترهای جدید:

$$g(X_4) = (0.75 \times 2) + (1 \times 0) - 1.25 = 1.5 - 1.25 = 0.25$$

$$y_4 g(X_4) = (+1)(0.25) = 0.25 > 0 \quad (\text{صحیح})$$

بررسی همگرایی (Epoch 2)

چون در مرحله اول تغییر داشتیم، یک دور دیگر چک می‌کنیم. با بررسی مجدد مشخص می‌شود که تمام نمونه‌ها با وزن‌های جدید $w = [0.75, 1]^T$ و $b = -1.25$ به درستی دسته‌بندی می‌شوند (خطا صفر است). بنابراین الگوریتم همگرا شده است.

پاسخ نهایی و رسم نمودار

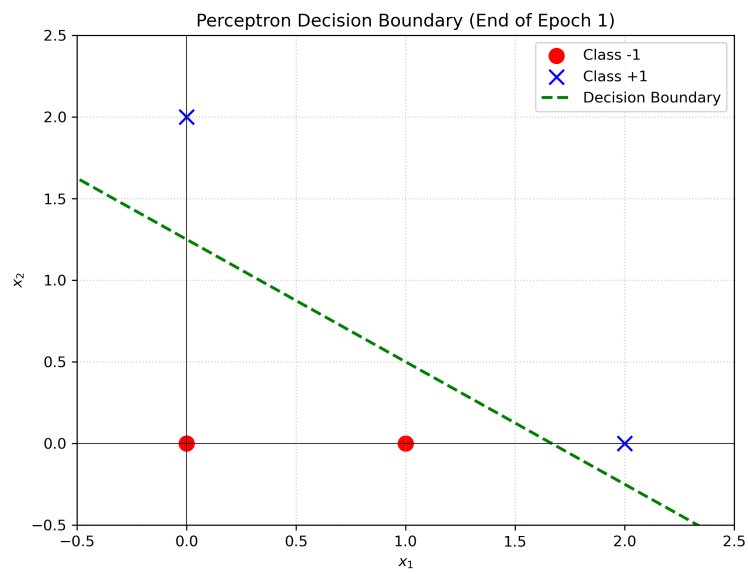
معادله خط جداکننده نهایی عبارت است از:

$$0.75x_1 + 1x_2 - 1.25 = 0$$

که با ضرب در ۴ می‌توان به فرم زیبای زیر رسید:

$$3x_1 + 4x_2 - 5 = 0$$

در شکل زیر، خط جداکننده و وضعیت نمونه‌ها در پایان مرحله اول رسم شده است:



شکل ۱: خط جداکننده به دست آمده توسط پرسپترون پس از همگرایی.