

تکلیف پنجم درس شناسایی الگو

وحید ملکی
شماره دانشجویی: ۴۰۳۱۳۰۰۴

۱۴۰۴ آبان ۲۴

سؤال ۱۱

فرض کنید نمونه‌های زیر مشاهده شده‌اند: کلاس اول (ω_1) کلاس دوم (ω_2)
 $(n_1 = 6) \quad -1, -2, 3, 3, 7, 7$:
 $(n_2 = 5) \quad -3, -2, 3, 5, 8$:
از تخمین‌گر پارزن با کرنل صفر-یک و پهنای پنجه $h = 2$ استفاده شده است. هدف: نشان دادن اینکه نمونه‌ی جدید در نقطه $x = 4$ با استفاده از کلاسیفایر بیشینه شباهت (Maximum Likelihood) در کلاس اول قرار می‌گیرد.

تعریف کرنل

کرنل داده شده:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} & |x| < a \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

: $a = 2$ با

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

فرمول تخمین‌گر پارزن

$$p(x | \omega_j) = \frac{1}{n_j h} \sum_{i=1}^{n_j} \varphi\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

محاسبه $p(x = 4 | \omega_1)$

$$p(4 | \omega_1) = \frac{1}{6 \times 2} \sum_{i=1}^6 \varphi\left(\frac{4 - x_i}{2}\right) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^6 \varphi\left(\frac{4 - x_i}{2}\right)$$

شرط فعال شدن کرنل:

$$\left|\frac{4 - x_i}{2}\right| < 2 \Rightarrow |4 - x_i| < 4 \Rightarrow 0 < x_i < 8$$

نمونه‌های کلاس اول در بازه $(0, 8)$ نمونه $x_i = 3, 3, 7, 7$ هستند.

$$\sum = 4 \Rightarrow p(4 | \omega_1) = \frac{1}{12} \times 4 = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

محاسبه $p(x = 4 | \omega_2)$

$$p(4 | \omega_2) = \frac{1}{5 \times 2} \sum_{i=1}^5 \varphi\left(\frac{4 - x_i}{2}\right) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^5 \varphi\left(\frac{4 - x_i}{2}\right)$$

شرط همان است: $0 < x_i < 8$ نمونه دوم در این بازه $x_i = 3, 5$ نمونه هست.

$$\sum = 2 \Rightarrow p(4 | \omega_2) = \frac{1}{10} \times 2 = \frac{2}{10} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

تصمیم‌گیری با کلاسیفایر بیشینه شباهت

$$\hat{\omega} = \arg \max_{\omega_j} p(x | \omega_j)$$

مقایسه:

$$p(4 | \omega_1) = \frac{1}{3} \approx 0.333, \quad p(4 | \omega_2) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\boxed{\frac{1}{3} > \frac{1}{5}}$$

بنابراین، نمونه جدید در نقطه $x = 4$ به کلاس اول اختصاص می‌یابد.

$p(4 \omega_j)$	تعداد نمونه در پنجه	کلاس
$\frac{1}{3}$	۴	ω_1
$\frac{1}{5}$	۲	ω_2
کلاس ۱		تصمیم نهایی