

تکلیف چهارم درس شناسایی الگو

وحید ملکی

شماره دانشجویی: ۴۰۳۱۳۰۰۴

۷ نوامبر ۲۰۲۵

۱ سوال ۱۵

یک مسئله دسته‌بندی دوکلاسه در فضای یک بعدی داریم. توابع چگالی احتمال برای هر کلاس این طوری:

$$p(x|c_1) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \theta_1 e^{-\theta_1 x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$p(x|c_2) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \theta_2 e^{-\theta_2 x} & x \geq 0 \end{cases}$$

داده‌های آموزشی: کلاس ۱: $D_1 = \{3, 5\}$ ، کلاس ۲: $D_2 = \{6, 9, 12\}$.

۱.۱ الف) برآورد θ_1 و θ_2 با MLE

برای توزیع نمایی $p(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$ ، تابع لگاریتم درست‌نمایی برای N نمونه x_i $\mathcal{L}(\theta) = N \ln \theta - \theta \sum x_i$ هست.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{N}{\theta} - \sum x_i = 0 \implies \hat{\theta} = \frac{N}{\sum x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

برای کلاس ۱: $N_1 = 2$ ، $\bar{x}_1 = \frac{3+5}{2} = 4$ ، پس $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{4} = 0.25$.

برای کلاس ۲: $N_2 = 3$ ، $\bar{x}_2 = \frac{6+9+12}{3} = 9$ ، پس $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{9} \approx 0.111$.

۲.۱ ب) نواحی و مرز تصمیم با دسته‌بند ML

فرض می‌کنیم احتمال پیشین کلاس‌ها برابر باشد ($P(c_1) = P(c_2)$). تصمیم بر اساس $p(x|c_1) > p(x|c_2)$ برای کلاس ۱.

مرز تصمیم جایی که $p(x|c_1) = p(x|c_2)$ یعنی $\hat{\theta}_1 e^{-\hat{\theta}_1 x} = \hat{\theta}_2 e^{-\hat{\theta}_2 x}$.

جایگذاری: $\frac{1}{4} e^{-x/4} = \frac{1}{9} e^{-x/9}$.

$$\frac{e^{-x/4}}{e^{-x/9}} = \frac{1/9}{1/4} = \frac{4}{9}$$

$$e^{x(1/9 - 1/4)} = \frac{4}{9}$$

$$e^{-x(5/36)} = \frac{4}{9}$$

\ln هر دو طرف:

$$-x \frac{5}{36} = \ln\left(\frac{4}{9}\right) = \ln 4 - \ln 9$$

$$x \frac{5}{36} = \ln 9 - \ln 4$$

$$x = \frac{36}{5}(\ln 9 - \ln 4) \approx 7.2 \times (2.197 - 1.386) \approx 7.2 \times 0.811 \approx 5.84$$

برای چک کردن ناحیه: در $x = 0$ ، $p(0|c_1) = 0.25 > p(0|c_2) \approx 0.111$ ، پس ناحیه $0 \leq x < 5.84$ برای c_1 و $x > 5.84$ برای c_2 .
(برای $x < 0$ ، هر دو صفره و تصمیم تعریف نشده.)