Лекция 5

Бибердорф Э.А.

Решение плохо обусловленных СЛАУ

Регуляризация плохо обусловленной системы

$$Ax = f.$$

Для многих приложений характерна ситуация, когда число обусловленности системы велико. В таких случаях говорят, что система плохо обусловлена. Эти системы могут быть практически неразрешимы, тем более что вектор правой части тоже может быть задан с погрешностью Δf, т.е. на самом деле вычисляется решение $x + \Delta x$ системы

$$A(x + \Delta x) = f + \Delta f.$$

Регуляризация с использованием сингулярного разложения

$$[U_1 U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} x = f, \quad \Sigma_2 \approx 0$$

Аппроксимируем матрицу

$$[U_1 U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} x \approx f,$$

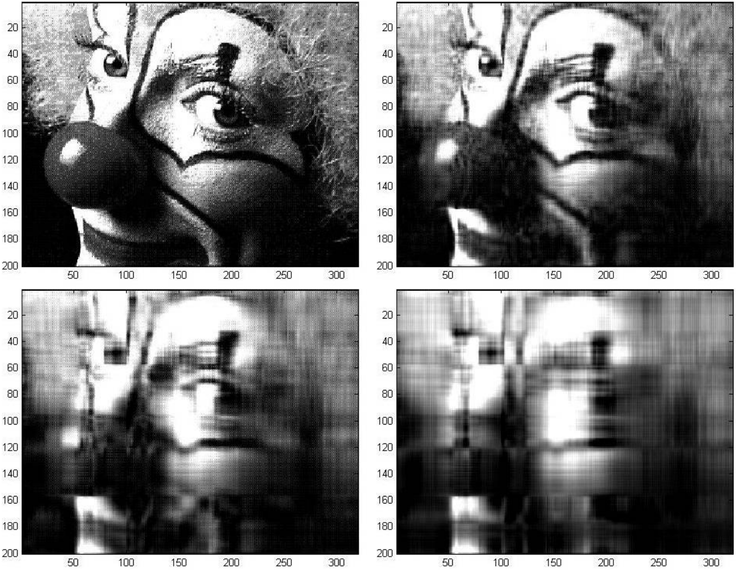
$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} x \approx \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} f,$$

Приближенное решение

$$x \approx V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^* f$$

Выбор матрицы Σ_2

Выбор матрицы Σ_2



Регуляризация по Годунову

Исходная и дополнительная системы

$$\mathrm{A}\mathrm{x} = \mathrm{f}, \qquad \mathrm{B}\mathrm{x} = \mathrm{g}.$$

Причем вектор g может быть даже неизвестен!
Выберем число τ: $\tau\|\mathrm{g}\| \approx \|\Delta\mathrm{f}\|$
Составная система и составная система с возмущенной правой частью

$$\begin{bmatrix} (1-\tau)\mathrm{A} \\ \tau\mathrm{B} \end{bmatrix} \mathrm{x} = \begin{bmatrix} (1-\tau)\mathrm{f} \\ \tau\mathrm{g} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} (1-\tau)\mathrm{A} \\ \tau\mathrm{B} \end{bmatrix} (\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} (1-\tau)(\mathrm{f}+\Delta\mathrm{f}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Погрешность правой части составной системы имеет тот же порядок, что и погрешность правой части исходной системы. Расширение системы не вносит дополнительных погрешностей.

$$\mu(\mathrm{A}) \geq \mu\left(\begin{bmatrix} (1-\tau)\mathrm{A} \\ \tau\mathrm{B} \end{bmatrix}\right).$$

Решение интегрального уравнения первого рода

$$\int_a^b K(s,t)x(t)dt = f(s), \qquad c \le s \le d.$$

Предполагаем, что решение дважды непрерывно дифференцируемо
1. Дискретизация по t. $t_j = a + (b-a)(j-1)/(M-1)$. Функция

$$\widetilde{x}(t) = \frac{x(t_j)(t_{j+1} - t) + x(t_{j+1})(t - t_j)}{t_{j+1} - t_j}.$$

совпадает с искомым решением $x(t)$ в точках t_j, а между ними является ее линейным приближением

$$|\widetilde{x}(t) - x(t)| \le \frac{(b-a)^2}{8(M-1)^2} \max_{a \le \xi \le b} |x''(\xi)|, \qquad t_j \le t, \xi \le t_{j+1}.$$

Решение интегрального уравнения. Дискретизация.

Обозначим $x_j = x(t_j) = \widetilde{x}(t_j)$ искомые значения функции $x(t)$.

$$\int_a^b K(s,t)\widetilde{x}(t)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{M-1} x_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(s,t)\frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j}dt + x_{j+1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} K(s,t)\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}dt = \sum_{j=1}^{M} a_j(s)x_j,$$

где

$$a_1(s) = \int_{t_1}^{t_2} K(s,t)\frac{t_2-t}{t_2-t_1}dt,$$

$$a_j(s) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(s,t)\frac{t-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(s,t)\frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j}dt$$

$$a_M(s) = \int_{t_{M-1}}^{t_M} K(s,t)\frac{t-t_{M-1}}{t_M-t_{M-1}}dt.$$

Решение интегрального уравнения. Дискретизация.

2. Дискретизация по s. Пусть $s_i = c + (d - c)(i - 1)/(N - 1)$ и $a_{ij} = a_j(s_i)$. Тогда в точках s_i

$$\sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_j = \widetilde{f}_i = \widetilde{f}(s_i) \qquad (1 \le i \le N).$$

Заметим, что, функция $\widetilde{f}$, а следовательно, и значения $\widetilde{f}_i$ неизвестны. Однако $\widetilde{f}_i \approx f_i$, и точное уравнение

$$Ax = \widetilde{f}$$

можно заменить приближенным

$$Ax = f.$$

Решение инт.ур-я. Оценка для правой части

$$\widetilde{f}(s) = \int_a^b K(s,t)\widetilde{x}(t)dt.$$

Тогда

$$|\widetilde{f}(s) - f(s)| \le \int_a^b |K(s,t)||\widetilde{x}(t) - x(t)|dt \le \max_{a \le \xi \le b} |x''(\xi)| \frac{(b-a)^2}{8(M-1)^2} \int_a^b |K(s,t)|dt.$$

Решение инт.ур-я. Дополнительные уравнения

Ограниченность второй производной

$$\frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{(\triangle t)^2} = \frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{((b-a)/(M-1))^2} = g_j$$

с не слишком большими коэффициентами g_j. Построим матрицу B по правилу:

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= 0 \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \\ b_{j,j} &= \frac{-2}{((b-a)/(M-1))^2}, \\ b_{j-1,j} = b_{j+1,j} &= \frac{1}{((b-a)/(M-1))^2}. \end{aligned}$$

Получим систему $Bx = g$.

Решение инт.ур-я. Регуляризация.

Объединяем системы $Ax = f$ и $Bx = g$:

$$\begin{pmatrix} (1-\tau)A \\ \tau B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} (1-\tau)f \\ \tau g \end{pmatrix}, \qquad \tau\|g\| \approx \|\widetilde{f} - f\|$$

Так как

$$g_i = \frac{x(t_i+\delta) - 2x(t_i) + x(t_i-\delta)}{\delta^2} = x''(\xi), \qquad \begin{array}{l} t_i - \delta \le \xi \le t_i + \delta, \\ \delta = (b-a)/(M-1) \end{array}$$

и

$$|\widetilde{f}(s) - f(s)| \le \int_a^b |K(s,t)||\widetilde{x}(t) - x(t)|dt \le \max_{a\le\xi\le b} |x''(\xi)| \frac{(b-a)^2}{8(M-1)^2} \int_a^b |K(s,t)|dt.$$

то

$$\tau \approx \frac{(b-a)^2}{8(M-1)^2} \int_a^b |K(s,t)|dt.$$

Регуляризованная система

$$\begin{bmatrix} (1-\tau)A \\ \tau B \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} (1-\tau)f \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Задача об ускоряемом пучке заряженных частиц

Определение распределения плотности частиц, восстановление формы профиля пучка с помощью второго пучка частиц, распределение плотности частиц в котором известно, сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$\mathrm{Ax} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{K(s,t)x(t)dt = f(s)},$$

где ядро $\mathrm{K(s,t)}$ описывает известное распределение плотности частиц во втором пучке.
Пусть ответ заранее известен $\mathrm{x(t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2/\sigma_2^2}$. Распределение Гаусса:

$$\mathrm{K_g(s,t)} = \mathrm{e}^{-(\mathrm{t-s})^2/\sigma_1^2}.$$

Задача об ускоряемом пучке. Дискретизация.

Отрезок интегрирования заменяем конечным $a_t \le t \le b_t$ и делим на $M-1$ равных частей

$$t_j = a_t + (b_t - a_t)(j-1)/(M-1) \quad \text{и} \quad \triangle t = (b_t - a_t)/(M-1).$$

Разделим отрезок $a_s \le s \le b_s$ на $N-1$ равных частей точками

$$s_i = a_s + (b_s - a_s)(i-1)/(N-1) \qquad (1 \le i \le N)$$

Матрица:

$$a_{ij} = a_j(s_i) = e^{\frac{-(t_j - s_i)^2}{\sigma_1^2}} \triangle t.$$

Правая часть:

$$f_i = f(s_i) = \frac{e^{-\frac{s_i^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\pi}.$$

Параметры и результаты счета

1) $\sigma_1 = 4,0, \sigma_2 = 3,0$;
2) для аргумента t: границы интервала $a_t = -16,0$, $b_t = 16,0$, интервал разбивался на $M - 1$ равных частей, где $M = 51$;
3) для аргумента s: границы интервала $a_s = -16,0$, $b_s = 16,0$, интервал разбивался на $N - 1$ равных частей, где $N = 91$.
Результаты вычислений:

$$\mu(A) > 10^{14} \quad \Rightarrow \quad \text{система практически неразрешима}$$

Выбираем $\tau = 10^{-9}$, тогда число обусловленности составной матрицы равно

$$\mu(C) = 4,91587\,10^{7}.$$

Гарантированная оценка относительной погрешности решения системы $\epsilon_x = 5,86525\,10^{-3}$. Так как нам известно точное решение x, то мы имеем возможность вычислить реальную погрешность

$$||\widetilde{x} - x||/||x|| = 1,02059\,10^{-5},$$

которая включает в себя, кроме погрешности решения системы, также погрешность дискретизации и вычисления интегралов.

Проблемы несимметричной спектральной проблемы

Обобщение понятия спектра

λ - собственное значение A:

$$\Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\| = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\mathsf{min}}(A - \lambda I) = 0$$

Обобщение понятия спектра

λ - собственное значение A:

$$\Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\| = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\mathsf{min}}(A - \lambda I) = 0$$

λ близко к собственному значению матрицы A:

$$\Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\| \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\mathsf{min}}(A - \lambda I) \approx 0$$

Обобщение понятия спектра

λ - собственное значение A:

$$\Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\| = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\mathsf{min}}(A - \lambda I) = 0$$

λ близко к собственному значению матрицы A:

$$\Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\| \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\mathsf{min}}(A - \lambda I) \approx 0$$

ε-спектр:

$$\lambda \in \sigma_{\varepsilon}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\mathsf{min}}(A - \lambda I) \leq \varepsilon$$

Изображение ε-спектра - изображение соответствующих линий уровня функции $f(\lambda) = \sigma_{\mathsf{min}}(A - \lambda I)$ (или $\sigma_{\mathsf{min}}^{-1}(A - \lambda I)$)

ε-спектр

ε-спектр – это множество λ: $\sigma_{\text{min}}(A - \lambda I) \le \varepsilon$.

$\lambda \in \varepsilon$-спектр матрицы A if $\exists$ матрица B, $\|B\| \le \varepsilon$: $\lambda \in \sigma(A + B)$

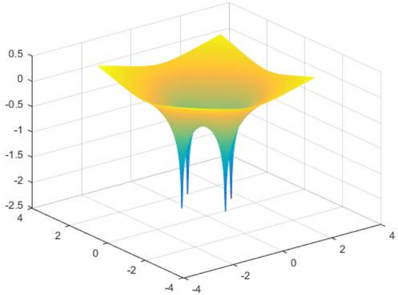
$$A - \lambda I = U \begin{pmatrix} \sigma_{\text{max}} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{\text{min}} \end{pmatrix} V$$

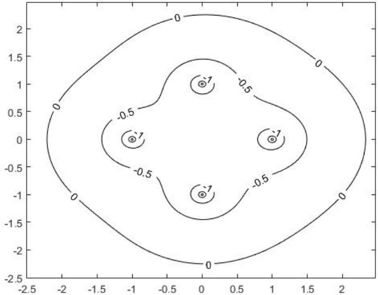
$$B = U \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & -\sigma_{\text{min}} \end{pmatrix} V$$

$$\det(A + B - \lambda I) = 0; \quad \|B\| = \sigma_{\text{min}}(A - \lambda I)$$

ε-спектр

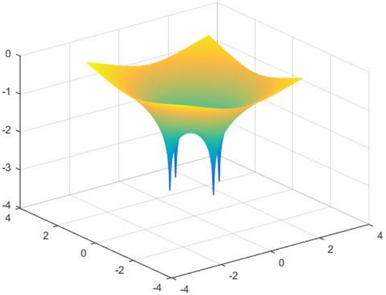
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

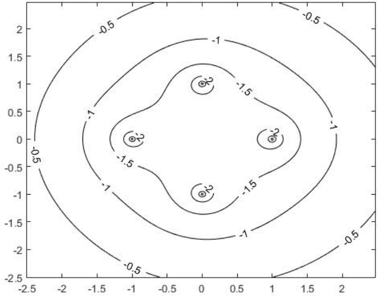




ε-спектр

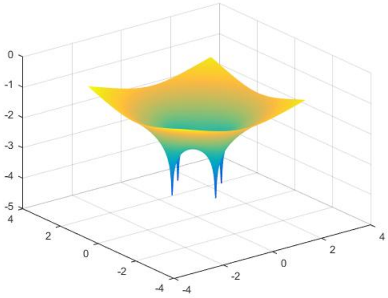
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

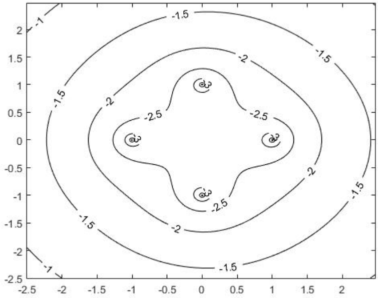




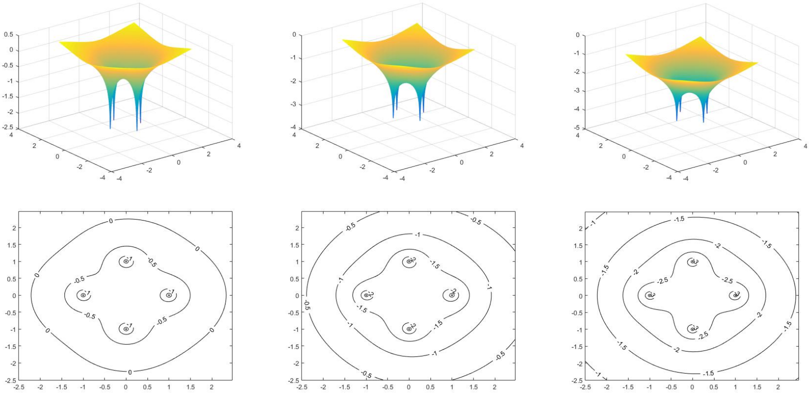
ε-спектр

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 15 & 15 \\ 1 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

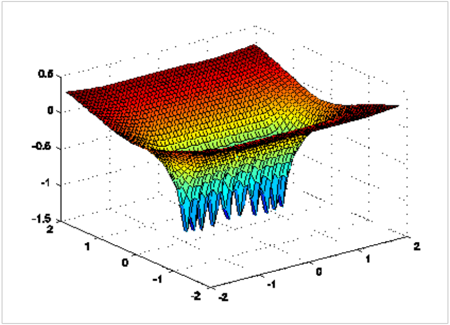


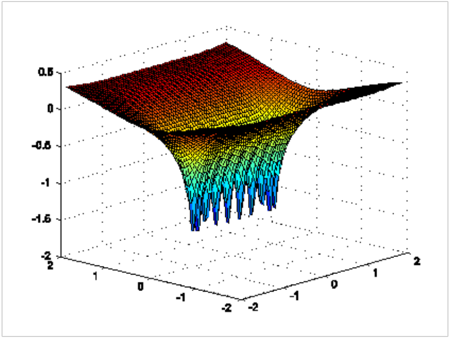


ε-спектр

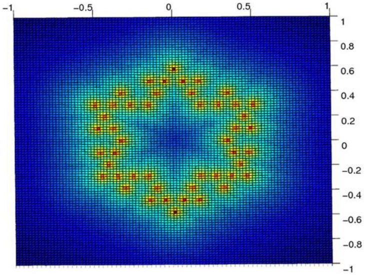


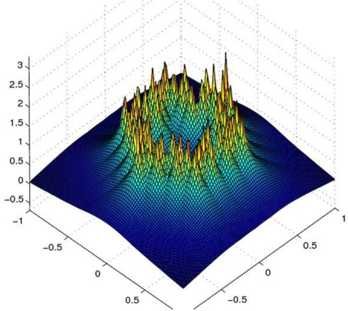
ε-спектр симметричных матриц

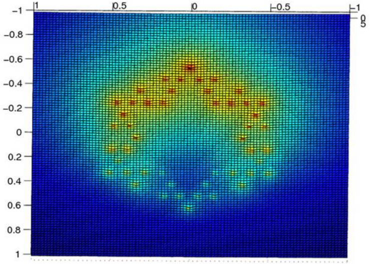


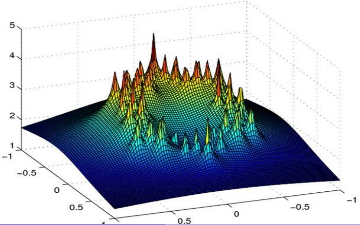


Другие примеры

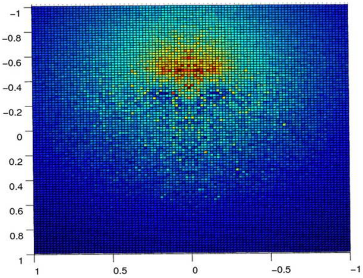


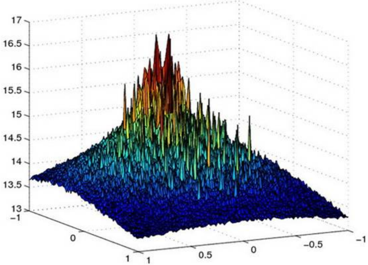




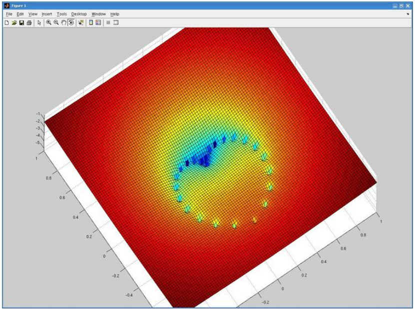


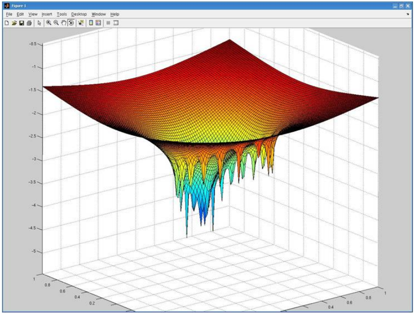
Другие примеры

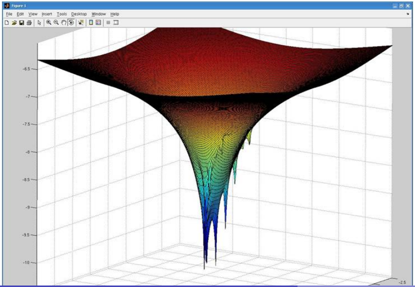


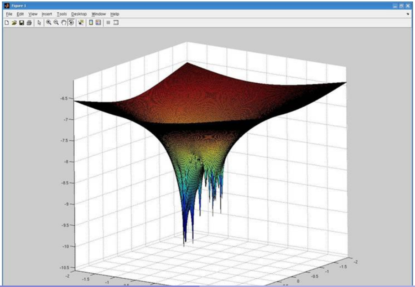


Другие примеры

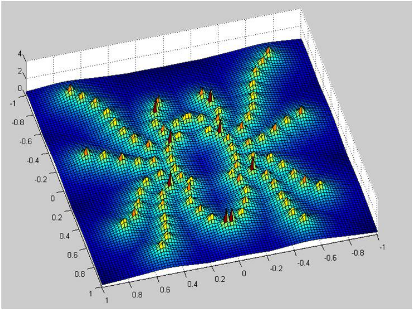


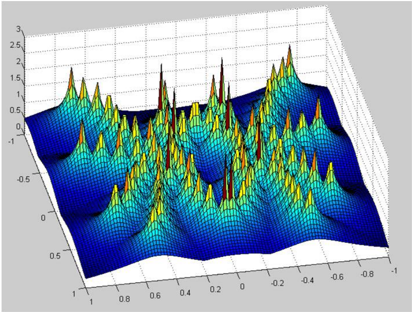


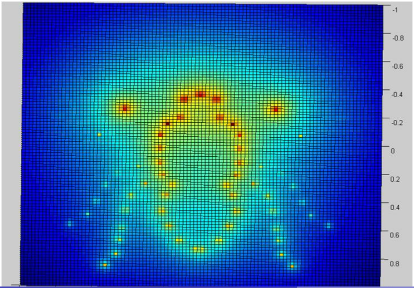


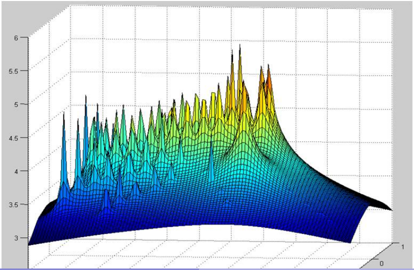


Другие примеры



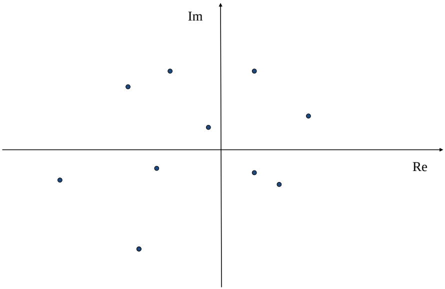






Классическая (несимметрическая) спектральная задача $Av = \lambda v$

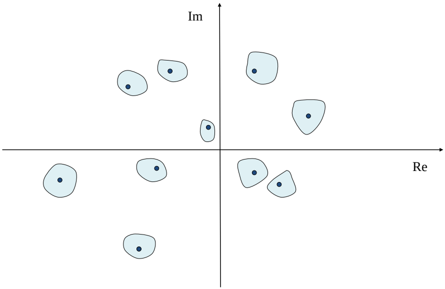
* Вычисление отдельных собственных значений (всех)



Классическая (несимметрическая) спектральная задача $Av = \lambda v$

* Вычисление отдельных собственных значений (всех)

* Не дает информации о спектральных пятнах $\sigma_{\min}(A - \lambda I) < \varepsilon$



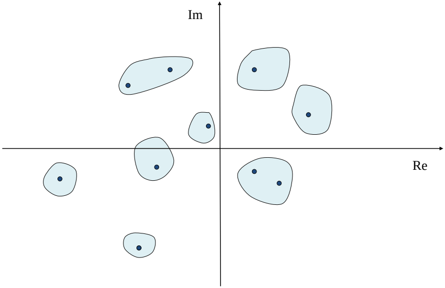
Классическая (несимметрическая) спектральная задача $Av = \lambda v$

* Вычисление отдельных собственных значений (всех)

* Не дает информации о спектральных пятнах

$$\sigma_{\min}(A - \lambda I) < \varepsilon$$

* Нет удовлетворительных оценок точности



Пример 1.

$$C = \begin{pmatrix} 289 & 2064 & 336 & 128 & 80 & 32 & 16 \\ 1152 & 30 & 1312 & 512 & 288 & 128 & 32 \\ -29 & -2000 & 756 & 384 & 1008 & 224 & 48 \\ 512 & 128 & 640 & 0 & 640 & 512 & 128 \\ 1053 & 2256 & -504 & -384 & -756 & 800 & 208 \\ -287 & -16 & 1712 & -128 & 1968 & -30 & 2032 \\ -2176 & -287 & -1565 & -512 & -541 & -1152 & -289 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

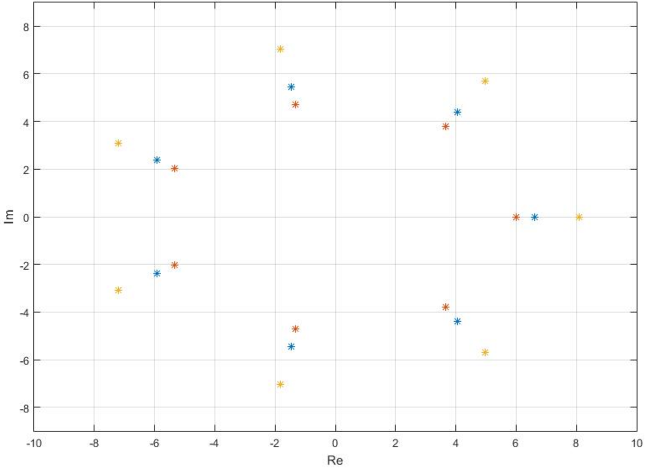
$D = P^{-1}CP$, $F = P^{-1}DP$

Пример 1.

Приближенный спектр C, D, F:

	C	D	F
λ_1	6.624	6.005	8.095
$\lambda_{2,3}$	$4.065 \pm 4.381i$	$3.651 \pm 3.784i$	$4.984 \pm 5.709i$
$\lambda_{4,5}$	$-1.472 \pm 5.449i$	$-1.331 \pm 4.699i$	$-1.825 \pm 7.052i$
$\lambda_{6,7}$	$-5.906 \pm 2.371i$	$-5.322 \pm 2.014i$	$-7.207 \pm 3.090i$

Точность вычислений с.зн. $\det(A - \lambda I) = 0$



Вычисленные собственные значения (3 варианта)

Пример 1.

$$
\begin{bmatrix}
5.05692952527466754 + 1.88360295723032634\ I \\
5.05692952527466754 - 1.88360295723032634\ I \\
1.16471266107358184 + 4.30944726731503725\ I \\
1.16471266107358184 - 4.30944726731503725\ I \\
-5.56861394159253198 + 0.\ I \\
-3.43733521555170185 + 3.33613548241681146\ I \\
-3.43733521555170185 - 3.33613548241681146\ I
\end{bmatrix}
$$

Пример 1.

$$
\begin{bmatrix}
3.86328304839787779444 + 0.\ I \\
2.82385211302736795711 + 0.\ I \\
0.70253630946883795520 + 1.49322924713100198851\ I \\
0.70253630946883795520 - 1.49322924713100198851\ I \\
-4.09101465566431130405 + 0.\ I \\
-2.00059656185990423330 + 1.04113355509187089093\ I \\
-2.00059656185990423330 - 1.04113355509187089093\ I
\end{bmatrix}
$$

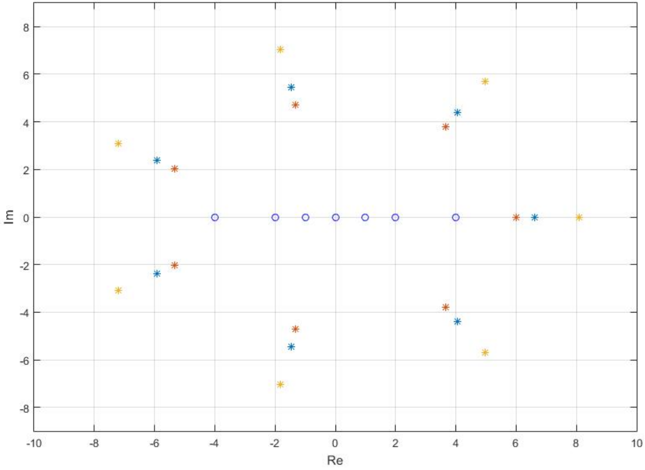
Пример 1.

$$
\begin{bmatrix}
-4.000000000000000000000012784611786867668 + 0.\ I \\
3.999999999999999999999986407376101334740 + 0.\ I \\
-1.999999999999999999997403059434314090143 + 0.\ I \\
2.000000000000000000026777424999398011513 + 0.\ I \\
0.9999999999999999999914961710350514871732 + 0.\ I \\
1.186746383871987344960841394566954906200\ 10^{-20} + 0.\ I \\
-1.000000000000000000008374545581999952990 + 0.\ I
\end{bmatrix}
$$

Пример 1.

$$\begin{bmatrix} -4.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000060579635362974500 + 0.\, I \\ 3.9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999936480539789230166 + 0.\, I \\ -1.9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999987737528909239055993 + 0.\, I \\ 2.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000012556453855103532663 + 0.\, I \\ 0.99999999999999999999999999999999999999999999999999999999999600548915506170658598 + 0.\, I \\ 5.5841910343863581687220470447081650370741836009602116278294788123669089498176403\ 10^{-60} + 0.\, I \\ -1.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000039474735874607684672 + 0.\, I \end{bmatrix}$$

Точность вычислений с.зн. $\det(A - \lambda I) = 0$



Точные собственные значения

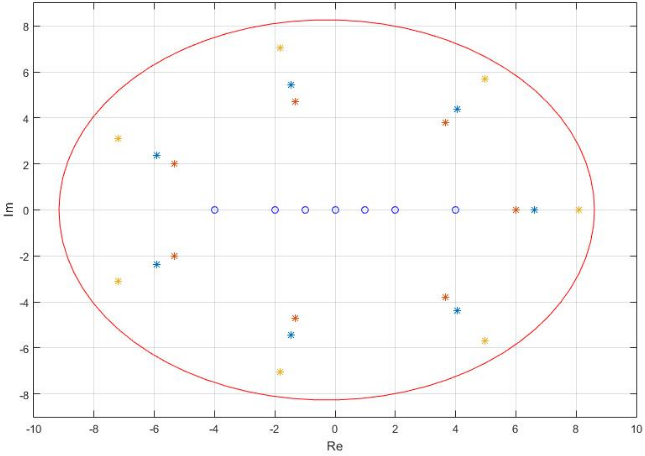
Отгадка

$$C = L^{-1}RL$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

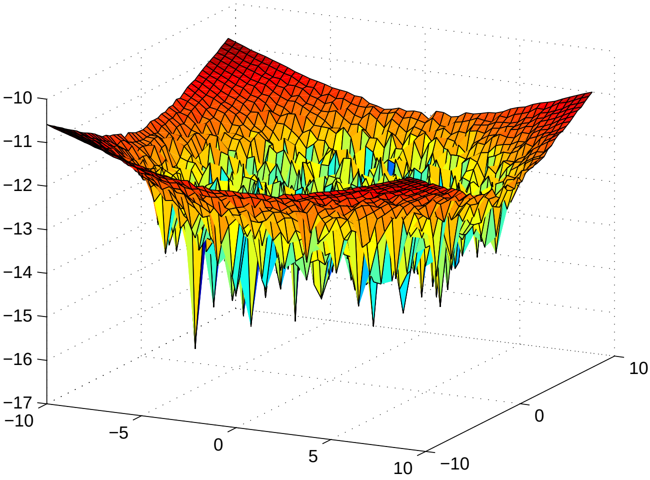
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2048 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 \\ 0 & -2 & 1024 & 512 & 256 & 128 & 32 \\ 0 & 0 & 4 & 512 & 1024 & 256 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 512 & 512 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1024 & 256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 2048 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Точность вычислений с.зн. $\det(A - \lambda I) = 0$



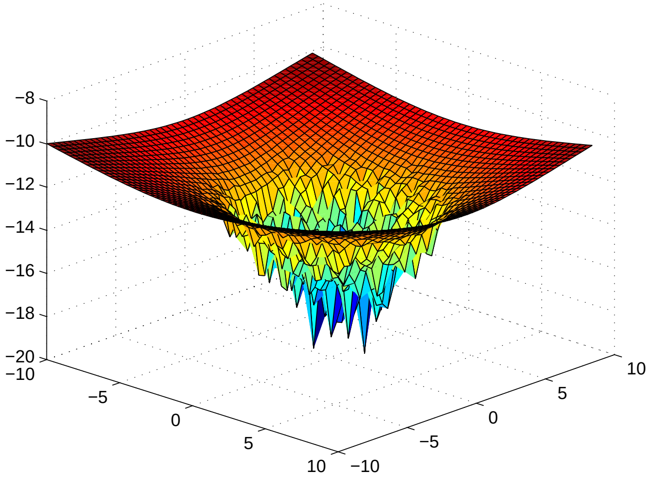
Спектральное пятно $\sigma_{\min}(A - \lambda I) < 10^{-16}$

Пример 1, продолжение



$\log_{10}(\sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{C} - \lambda \mathrm{I}))$.

Пример 1, продолжение



$\log_{10}(\sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{R} - \lambda \mathrm{I}))$.

Устойчивость

$y' = Ay$ - нулевое решение устойчиво $\Leftrightarrow \mathrm{Re}\lambda(A) < 0$

$y_n = Ay_{n-1}$ - нулевое решение устойчиво $\Leftrightarrow |\lambda(A)| < 1$

Пример устойчивой матрицы

$\mathrm{A}\ -\ [25 \times 25]$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 10 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -1 & 10 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\delta = 10 \cdot 8^{-25} \approx -2.6 \cdot 10^{-22}$
$\lambda_1(\mathrm{A}) = \dots = \lambda_1(\mathrm{A}) = -1$
$\widetilde{\lambda}_\mathrm{j} = \lambda_\mathrm{j}(\mathrm{A} + \Delta\mathrm{A})$
Характеристический многочлен: $-(\widetilde{\lambda} + 1)^{25} + \delta/10 \cdot 10^{25}$

$$\widetilde{\lambda}_\mathrm{j} = -1 + \frac{10}{8}(\cos\frac{2\mathrm{j}\pi}{25} + \mathrm{i}\sin\frac{2\mathrm{j}\pi}{25}), \qquad \widetilde{\lambda}_{25} = -1 + \frac{10}{8} = +\frac{1}{4} > 0$$

Непрерывная зависимость

Theorem (Вейль)

Пусть $A = A^*$, $\triangle A = \triangle A^*$, $\widetilde{A} = A + \triangle A$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_M \quad &\text{– с.зн.} A, \\ &\widetilde{\lambda}_1 \le \widetilde{\lambda}_2 \le \dots \le \widetilde{\lambda}_M \quad &\text{– с. зн. } \widetilde{A} \end{aligned}\right. \Longrightarrow \quad |\widetilde{\lambda}_j - \lambda_j| \le \|\triangle A\|$$

Theorem (Островский)

Пусть A: $|a_{ij}| \le 10$; $\widetilde{A} = A + \Delta A$: $|\Delta a_{ij}| \le \delta$, тогда

$$|\widetilde{\lambda}_j - \lambda_j| = 20(n+1)^2 \sqrt[M]{\frac{M^2\delta}{10}}$$

Пример устойчивой матрицы

A – $[25 \times 25]$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 10 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -1 & 10 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\delta = 10 \cdot 8^{-25} \approx -2.6 \cdot 10^{-22}$
$\lambda_1(A) = \dots = \lambda_1(A) = -1$
$\widetilde{\lambda}_j = \lambda_j(A + \Delta A)$
Характеристический многочлен: $-(\widetilde{\lambda} + 1)^{25} + \delta/10 \cdot 10^{25}$

$$\widetilde{\lambda}_j = -1 + \frac{10}{8}(\cos\frac{2j\pi}{25} + i \sin\frac{2j\pi}{25}), \qquad \widetilde{\lambda}_{25} = -1 + \frac{10}{8} = +\frac{1}{4} > 0$$

По теореме Островского

$$|\widetilde{\lambda}_j - (-1)| \le 20\frac{26^2}{8}\sqrt[25]{625} \approx 2186$$

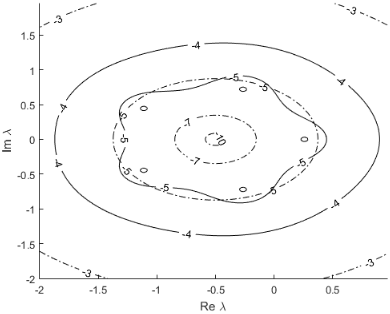
Пример изменения ε-спектра

A =

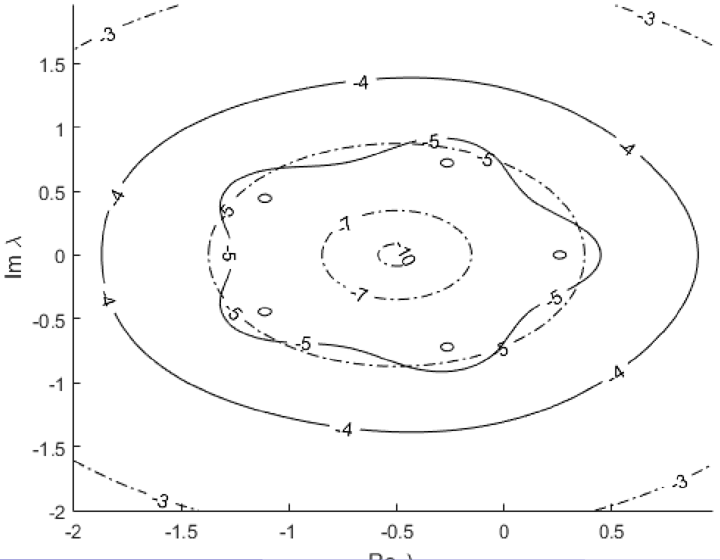
$$\begin{pmatrix} -0.5 & 15 & & & \\ & -0.5 & 15 & & \\ & & -0.5 & 15 & \\ & & & -0.5 & 15 \\ & & & & -0.5 \end{pmatrix}$$

B =

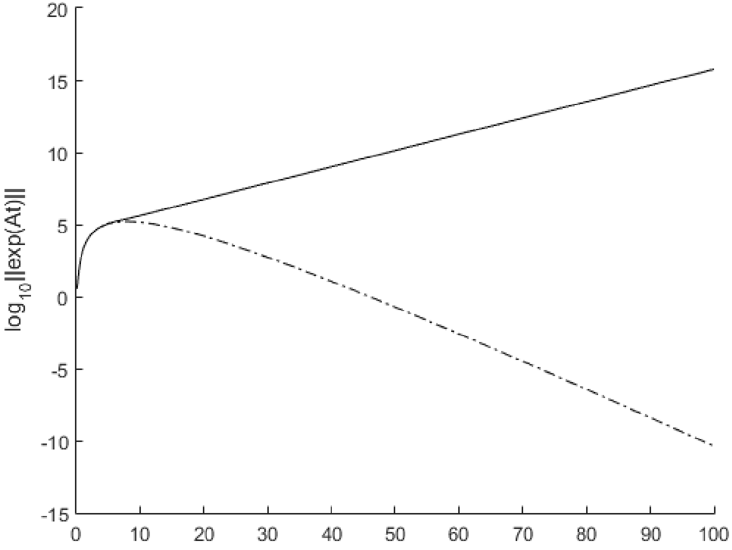
$$\begin{pmatrix} -0.5 & 15 & & & \\ & -0.5 & 15 & & \\ & & -0.5 & 15 & \\ & & & -0.5 & 15 \\ 5 \cdot 10^{-6} & & & & -0.5 \end{pmatrix}$$



Пример изменения ε-спектра



Поведение матричной экспоненты

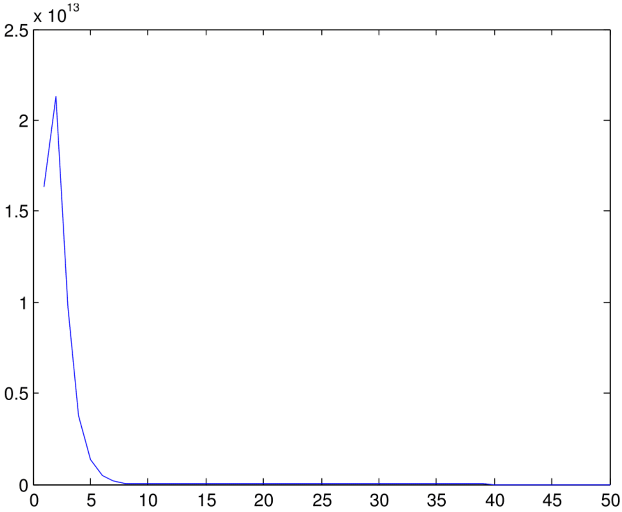


Пример: поведение матричной экспоненты

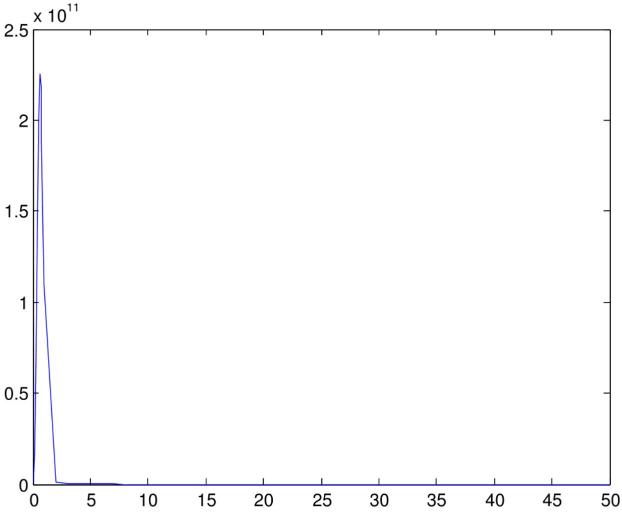
$$
R = \begin{pmatrix}
1 & 2048 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 \\
0 & -2 & 1024 & 512 & 256 & 128 & 32 \\
0 & 0 & 4 & 512 & 1024 & 256 & 64 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 512 & 512 & 128 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1024 & 256 \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 2048 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}.
$$

$R_1 = R - 5I$, $R_2 = R - 10I$

Пример: $\|\exp(R_1 t)\|$



Пример: $\|\exp(R_2 t)\|$

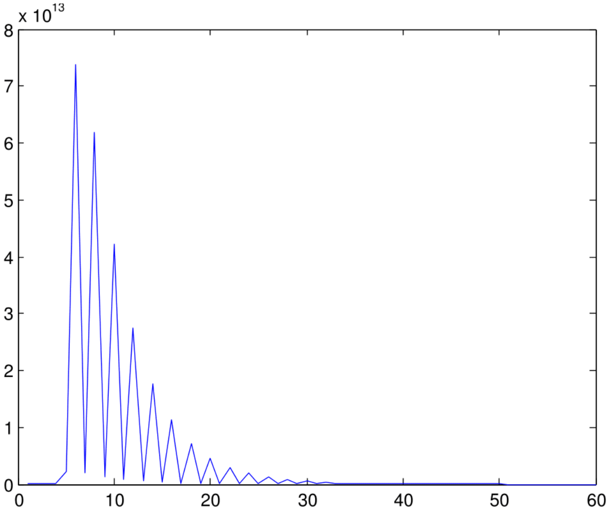


Пример: поведение матричных степеней

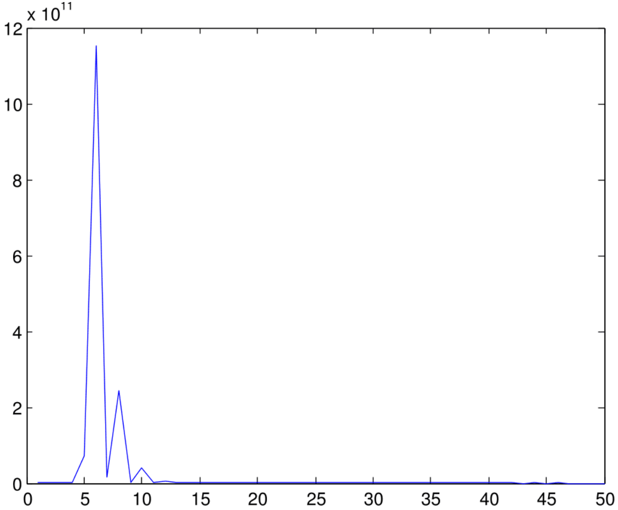
$$
R = \begin{pmatrix}
1 & 2048 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 \\
0 & -2 & 1024 & 512 & 256 & 128 & 32 \\
0 & 0 & 4 & 512 & 1024 & 256 & 64 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 512 & 512 & 128 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1024 & 256 \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 2048 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}.
$$

$R_3 = 1/5\ R$, $R_4 = 1/10\ R$

Пример: $\|R_3^n\|$

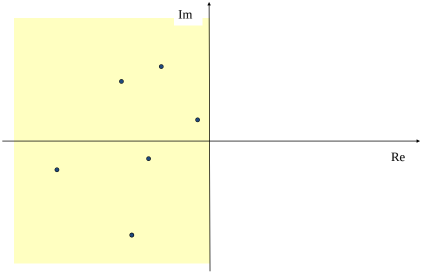


Пример: $\|R_4^n\|$



Практическое применение спектральной проблемы

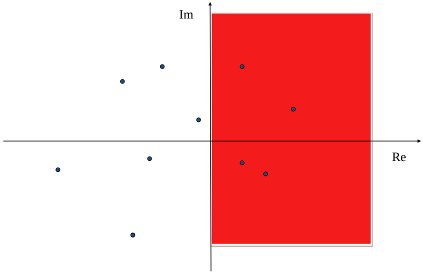
Устойчивость решений системы $\frac{d}{dt}y = Ay$



* Все ли с.зн находятся в области устойчивости

Практическое применение спектральной проблемы

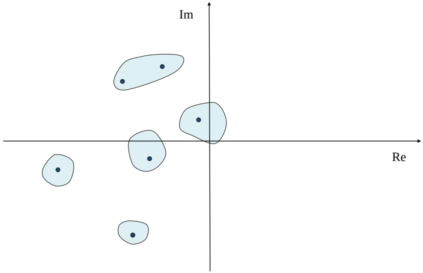
НЕустойчивость решений системы $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{y} = \mathrm{Ay}$



* Все ли с.зн находятся в области устойчивости?

Практическое применение спектральной проблемы

НЕ ???устойчивость решений системы $\frac{d}{dt}y = Ay$

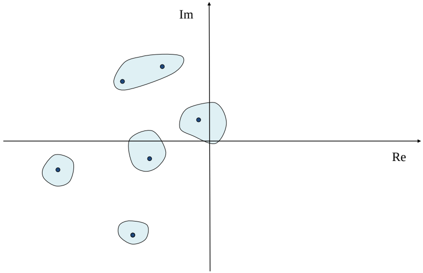


* Все ли с.зн находятся в области устойчивости?

* Как влияет на устойчивость расположение спектральных пятен?

Практическое применение спектральной проблемы

НЕ ???устойчивость решений системы $\frac{d}{dt}y = Ay$



* Все ли с.зн находятся в области устойчивости?

* Как влияет на устойчивость расположение спектральных пятен?

* Насколько точным может быть ответ?

Практические вопросы - классические ответы

* Все ли с.зн находятся в области устойчивости?

* Как влияет на устойчивость расположение спектральных пятен?

* Насколько точным может быть ответ?

* Вычисление отдельных собственных значений (всех)

* Не дает информации о спектральных пятнах

$$\sigma_{\mathsf{min}}(A - \lambda I) < \varepsilon$$

* Нет удовлетворительных оценок точности

Практические вопросы - классические ответы

* Все ли с.зн находятся в области устойчивости?

* Как влияет на устойчивость расположение спектральных пятен?

* Насколько точным может быть ответ?

* Вычисление отдельных собственных значений (всех)

* Не дает информации о спектральных пятнах

$$\sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}) < \varepsilon$$

* Нет удовлетворительных оценок точности

ВЫВОД: постановку задачи необходимо менять!

Неустойчивость формы Жордана

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \overset{\text{возмущение}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda+\varepsilon \end{pmatrix} \overset{\text{диагонализуемость}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Theorem

Множество диагонализуемых матриц всюду плотно в пространстве матриц.

Постановка задачи дихотомии матричного спектра

* Определить, есть ли на заданной кривой собственные значения матрицы A (матричного пучка $A - \lambda B$), т.е. вычислить критерий дихотомии.

* Если на кривой с.зн нет, то вычислить базисы инвариантных (в случае матрицы A) или приводящих (в случае матричного пучка $A - \lambda B$) подпространств.

* Оценить расстояние от спектра до кривой

* Привести матрицу (пучок) к клеточно-диагональной форме