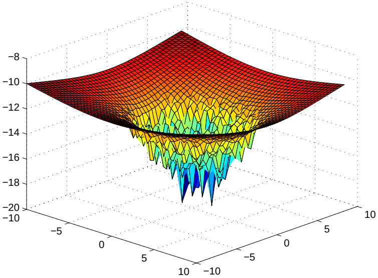
Матричные уравнения

Бибердорф Э.А.

Пример: поведение матричной экспоненты

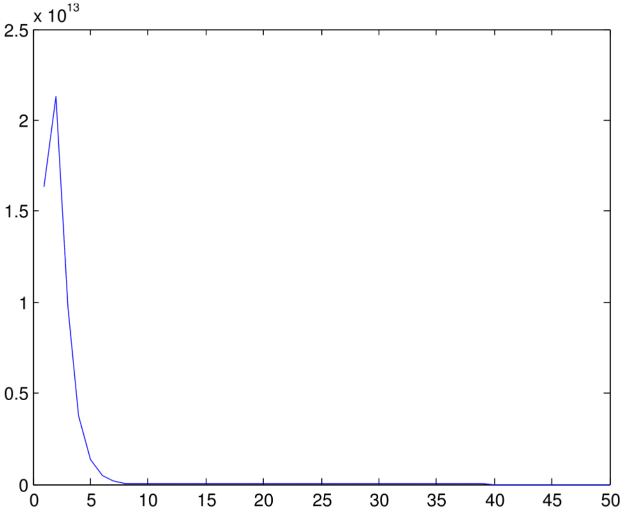
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2048 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 \\ 0 & -2 & 1024 & 512 & 256 & 128 & 32 \\ 0 & 0 & 4 & 512 & 1024 & 256 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 512 & 512 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1024 & 256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 2048 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



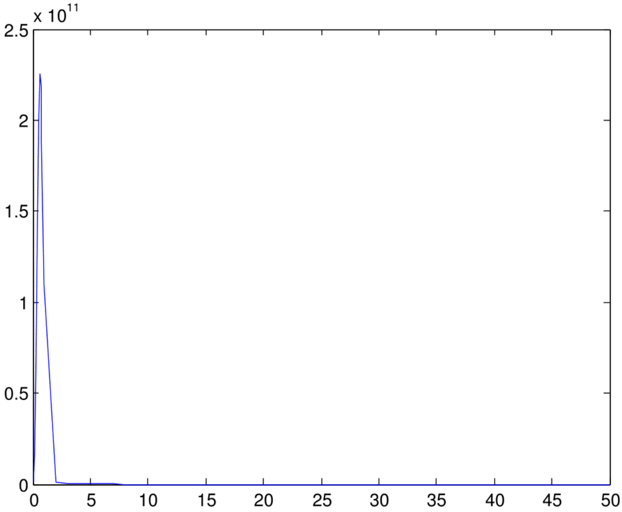
$$\log_{10}(\sigma_{\mathsf{min}}(R - \lambda I))$$

$$R_1 = R - 5I,\ R_2 = R - 10I$$

Пример: $\|\exp(R_1 t)\|$



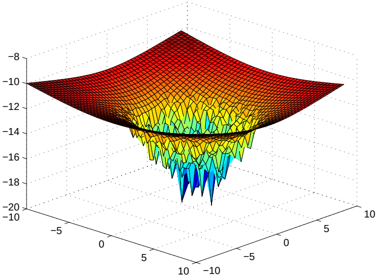
Пример: $\|\exp(R_2 t)\|$



Пример: поведение матричных степеней

$$R =$$

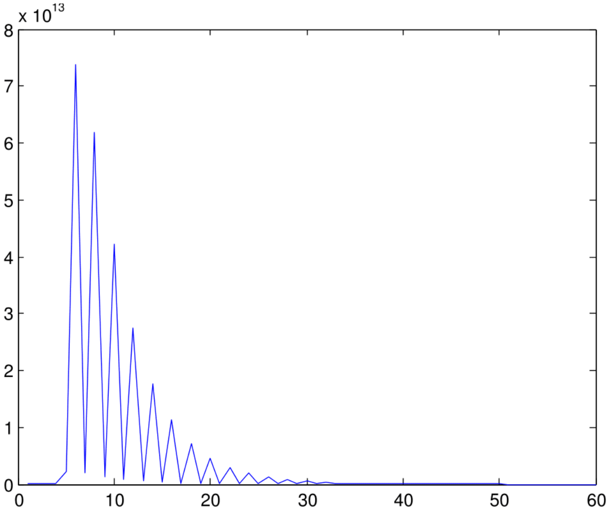
$$\begin{pmatrix}
1 & 2048 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 \\
0 & -2 & 1024 & 512 & 256 & 128 & 32 \\
0 & 0 & 4 & 512 & 1024 & 256 & 64 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 512 & 512 & 128 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1024 & 256 \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 2048 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}$$



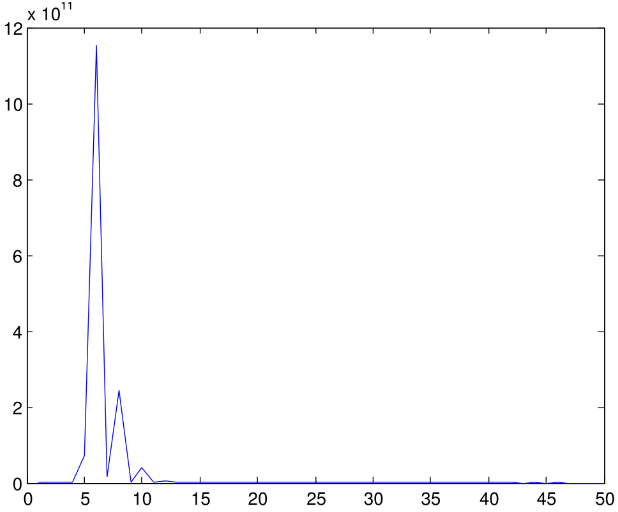
$$\log_{10}(\sigma_{\mathsf{min}}(R - \lambda I))$$

$R_3 = 1/5\ R$, $R_4 = 1/10\ R$

Пример: $\|R_3^n\|$

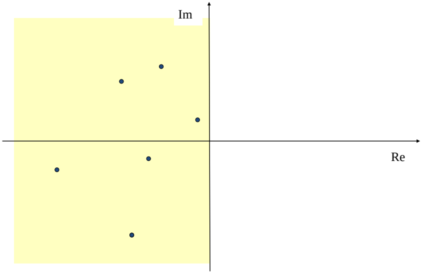


Пример: $\|R_4^n\|$



Практическое применение спектральной проблемы

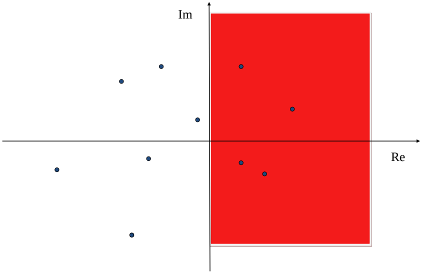
Устойчивость решений системы $\frac{d}{dt}y = Ay$



* Все ли с.зн находятся в области устойчивости

Практическое применение спектральной проблемы

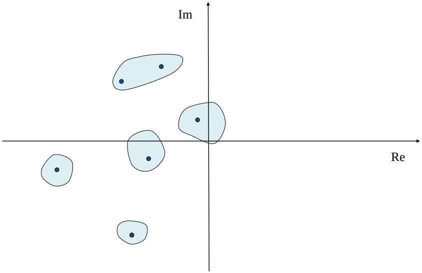
НЕустойчивость решений системы $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{y} = \mathrm{Ay}$



* Все ли с.зн находятся в области устойчивости?

Практическое применение спектральной проблемы

НЕ ???устойчивость решений системы $\frac{d}{dt}y = Ay$

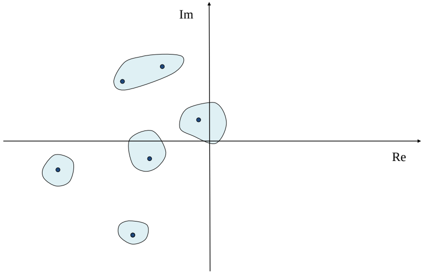


* Все ли с.зн находятся в области устойчивости?

* Как влияет на устойчивость расположение спектральных пятен?

Практическое применение спектральной проблемы

НЕ ???устойчивость решений системы $\frac{d}{dt}y = Ay$



* Все ли с.зн находятся в области устойчивости?

* Как влияет на устойчивость расположение спектральных пятен?

* Насколько точным может быть ответ?

Практические вопросы - классические ответы

* Все ли с.зн находятся в области устойчивости?

* Как влияет на устойчивость расположение спектральных пятен?

* Насколько точным может быть ответ?

* Вычисление отдельных собственных значений (всех)

* Не дает информации о спектральных пятнах

$$\sigma_{\mathsf{min}}(A - \lambda I) < \varepsilon$$

* Нет удовлетворительных оценок точности

Практические вопросы - классические ответы

* Все ли с.зн находятся в области устойчивости?

* Как влияет на устойчивость расположение спектральных пятен?

* Насколько точным может быть ответ?

* Вычисление отдельных собственных значений (всех)

* Не дает информации о спектральных пятнах

$$\sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) < \varepsilon$$

* Нет удовлетворительных оценок точности

ВЫВОД: постановку задачи необходимо менять!

Неустойчивость формы Жордана

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \overset{\text{возмущение}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda+\varepsilon \end{pmatrix} \overset{\text{диагонализуемость}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Theorem

Множество диагонализуемых матриц всюду плотно в пространстве матриц.

Альтернативные постановки

Theorem (Ляпунов)

Если существуют матрицы $C = C^* > 0$ и $X = X^* > 0$, которые удовлетворяют уравнению Ляпунова $XA + A^*X + C = 0$, то спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости.

Theorem (Теорема Шура)

Для каждой квадратной матрицы A существует такая ортогональная матрица U ($U^{-1} = U^*$), что матрица $B = U^*AU$– нижняя треугольная. Причем собственные значения могут располагаться на диагонали матрицы B в произвольном порядке.

Доказательство. Пусть λ_1 – с. зн., v_1 – с. вектор матрицы A. Выбираем ортогональное преобразование (например, преобразование отражения) $P_1^* = P_1$:

$$P_1 v_1 = \rho e^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}$$

Теорема Шура

Перепишем исходную матрицу A в новом базисе $A^{(1)} = P_1 A P_1^*$. При этом ее последний столбец преобразуется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{1N}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{NN}^{(1)} \end{pmatrix} = A^{(1)} e^{(N)} = \frac{1}{\rho} A^{(1)} P_1 v_1 = \frac{1}{\rho} P_1 A P_1^* P_1 v_1 = \frac{1}{\rho} P_1 A v_1 = \frac{\lambda_1}{\rho} P_1 v_1 =$$

$$\frac{\lambda_1}{\rho} \rho e^{(N)} = \lambda_1 e^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Теорема Шура

Следовательно,

$$A^{(1)} = P_1 A P_1^* = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \widehat{A} & & 0 \\ & & & \vdots \\ a_{N1}^{(1)} & \dots & a_{N\,N-1}^{(1)} & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Собственные значения подматрицы $\widehat{A}$ совпадают с собственными значениями исходной матрицы A за исключением значения λ_1.

Теорема Шура

Фиксируем следующее собственное значение λ_2, и строим ортогональное преобразование матрицы $\widehat{\mathrm{A}}$, аналогично тому, что было проделано выше, так, чтобы

$$\widehat{\mathrm{P}}\widehat{\mathrm{A}}\widehat{\mathrm{P}}^* = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \widehat{\mathrm{A}}^{(1)} & & 0 \\ & & & \vdots \\ \times & \dots & \times & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{P}_2 = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \widehat{\mathrm{P}} & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\mathrm{A}^{(2)} = \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{A}\mathrm{P}_1^*\mathrm{P}_2^* = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & \widehat{\mathrm{A}}^{(1)} & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ \times & \dots & \times & \lambda_2 & 0 \\ \times & \dots & \times & \times & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Теорема Шура

Продолжая этот процесс, получаем

$$\mathrm{P_N P_{N-1} \dots P_1 A P_1^* \dots P_{N-1}^* P_N^* = U^* A U} = \begin{pmatrix} \lambda_{\mathrm{N}} & & & 0 \\ \times & \lambda_{\mathrm{N}-1} & & \\ \times & \times & \ddots & \\ \times & \times & \times & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Упражнение.[Теорема Шура (верхняя треугольная форма)] Доказать, что для каждой квадратной матрицы A существует такая ортогональная матрица U ($\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{U}^*$), что матрица $\mathrm{B} = \mathrm{U}^*\mathrm{AU}$– верхняя треугольная. Причем собственные значения могут располагаться на диагонали матрицы B в произвольном порядке.

Уравнения Сильвестра

Уравнение $AX - XB = G$ называется матричным уравнением Сильвестра.

Theorem (Критерий разрешимости уравнения Сильвестра)

Если спектры матриц A и B не имеют общих точек $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, то для любой матрицы G существует единственное решение уравнения Сильвестра.

Докажем теорему для матриц

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix},$$

$a_{ii} - b_{jj} \neq 0, \quad i, j = 1, 2,$

Уравнения Сильвестра

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

Покомпонентно:

$$a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21} - b_{11}y_{11} - b_{21}y_{12} = f_{11},$$

$$a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22} - b_{22}y_{12} = f_{12},$$

$$a_{22}y_{21} - b_{11}y_{21} - b_{21}y_{22} = f_{21},$$

$$a_{22}y_{22} - b_{22}y_{22} = f_{22}.$$

Уравнения Сильвестра

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

Покомпонентно:

$$\underline{a_{11}y_{11}} + a_{12}y_{21} - \underline{b_{11}y_{11}} - b_{21}y_{12} = f_{11},$$

$$\underline{a_{11}y_{12}} + a_{12}y_{22} - \underline{b_{22}y_{12}} = f_{12},$$

$$\underline{a_{22}y_{21}} - \underline{b_{11}y_{21}} - b_{21}y_{22} = f_{21},$$

$$\underline{a_{22}y_{22}} - \underline{b_{22}y_{22}} = f_{22}.$$

Уравнения Сильвестра

$$(a_{11} - b_{11})y_{11} + a_{12}y_{21} - b_{21}y_{12} = f_{11},$$

$$(a_{11} - b_{22})y_{12} + a_{12}y_{22} = f_{12},$$

$$(a_{22} - b_{11})y_{21} - b_{21}y_{22} = f_{21},$$

$$(a_{22} - b_{22})y_{22} = f_{22}.$$

В векторно-матричном виде

$$\begin{pmatrix} (a_{11} - b_{11}) & -b_{21} & a_{12} & 0 \\ 0 & (a_{11} - b_{22}) & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & (a_{22} - b_{11}) & -b_{21} \\ 0 & 0 & 0 & (a_{22} - b_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix}$$

Так как $a_{ii} \neq b_{jj}$, то система разрешима единтвенным образом при любой правой части.

Уравнения Сильвестра

Пусть A, B, F – заполненные матрицы размера 2×2. Уравнение Сильвестра

$$AX - XB = G.$$

Используем теорему Шура: $A = U^*\widetilde{A}U$, $B = V^*\widetilde{B}V$, где $U = U^*$, $UU^* = I$, $V = V^*$, $VV^* = I$, $\widetilde{A}$ – верхнетреугольная, $\widetilde{B}$ – нижнетреугольная.

$$U^*\widetilde{A}UX - XV^*\widetilde{B}V = G.$$

Домножаем уравнение справа – на V^*, слева – на U:

$$\widetilde{A}UXV^* - UXV^*\widetilde{B} = UGV^*.$$

Обозначим $Y = UXV^*$, $F = UGV^*$:

$$\widetilde{A}Y - Y\widetilde{B} = F$$

– уравнение Сильвестра с треугольными матрицами.

Уравнения Сильвестра

Упражнение. Доказать теорему о критерии разрешимости уравнения Сильвестра для матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = b_{11}, \qquad F = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix}$$

Упражнение. Завершить доказательство теоремы в общем случае, используя теорему Шура и метод математической индукции.

Уравнения Сильвестра

Уравнение Сильвестра $AX - XB = G$ определяет некий линейный оператор $\mathcal{L} : X \to G$. Критерий разрешимости уравнения Сильвестра означает, что при условии отсутствия общих точек спектра у матриц A и B существует обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}$.
Если пространство прямоугольных матриц X снабдить евклидовой нормой

$$\|X\|_E = \sqrt{\sum_{ij} |x_{ij}|^2} = \sqrt{\mathrm{tr}(XX^*)},$$

то величину

$$\mathrm{sep}(A, B) = \begin{cases} \|\mathcal{L}^{-1}\|^{-1}, & \text{если } \mathcal{L}^{-1} \text{ определен} \\ 0 & \end{cases}$$

можно рассматривать как численную характеристику отдаленности спектров матриц A и B.

Уравнение Ляпунова

$$XA + A^*X + C = 0$$

Theorem (Ляпунова)

Если спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$, матрица C – самосопряженная $C = C^*$, то существует единственное решение уравнения Ляпунова $X = X^*$.

Упражнение. Доказать теорему, используя критерий разрешимости уравнения Сильвестра

Замечание. Для доказательства того, что решение самосопряженное, рассмотреть два уравнения

исходное $\quad XA + A^*X + C = 0$

и сопряженное $\quad (XA + A^*X + C)^* = 0.$

Получим, что X^* удовлетворяет тому же уравнению, что и X. Из единственности следует самосопряженность.

Решение уравнения Ляпунова

Lemma

Если спектр матрицы A лежит строго в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$, то уравнение Ляпунова $XA + A^*X + C = 0$ имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$X = \int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA} dt.$$

Функции от матриц и контурные интегралы

Пусть $f(\lambda)$ – бесконечно-дифференцируемая функция, причем ряд

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \lambda^k$$

сходится в круге $\mathbf{B}_f$, в котором содержится весь спектр матрицы A. Тогда

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (SBS^{-1})^k = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k B^k\right) S^{-1} = Sf(B)S^{-1}$$

Пусть B диагонализуема: $B = \mathrm{diag}(\lambda_j)$, тогда $f(B) = \mathrm{diag}\big(f(\lambda_j)\big)$

Функции от матриц и контурные интегралы

Пусть B - жорданова клетка

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

тогда

$$f(B) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ & & & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Формулы Коши

Theorem (Коши)

Если функция $f(\lambda)$ аналитична в области $G \subset \mathbb{C}$ вплоть до границы Γ и регулярную в области включая Γ, то для произвольной точки $\lambda_k \in G$ верны формулы

$$f(\lambda_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)} d\lambda, \quad f'(\lambda_k) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^2} d\lambda,$$

$$f''(\lambda_k) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^3} d\lambda, \ldots$$

Пусть $B = \operatorname{diag}(\lambda_j)$ диагонализуема, тогда

$$f(B) = \operatorname{diag}\big(f(\lambda_j)\big) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)} d\lambda\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda)\big(\lambda I - \operatorname{diag}(\lambda_k)\big)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda)\big(\lambda I - B\big)^{-1} d\lambda$$

Формулы Коши, жорданова клетка

$$f(B) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\lambda)\left(\lambda I - \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_k & 1 \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix}\right)^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\lambda)\begin{pmatrix} \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)} & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2} & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^3} & \dots & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^n} \\ & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)} & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^3} \\ & & & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)} & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2} \\ & & & & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)} \end{pmatrix} d\lambda =$$

Формулы Коши, жорданова клетка

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\lambda)\begin{pmatrix} \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)} & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2} & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^3} & \cdots & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^n} \\ & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)} & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^3} \\ & & & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)} & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2} \\ & & & & \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)} \end{pmatrix} d\lambda =$$

$$= \begin{pmatrix} f(\lambda_k) & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} & \frac{f''(\lambda_k)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_k)}{(n-1)!} \\ & f(\lambda_k) & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda_k)}{2!} \\ & & & f(\lambda_k) & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} \\ & & & & f(\lambda_k) \end{pmatrix} = f(B)$$

Матричная экспонента

Эквивалентные определения матричной экспоненты:
1) интеграл от резольвенты

$$e^{tA} = \oint_{\gamma} e^{t\lambda}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

где γ – замкнутый контур, охватывающий все собственные значения матрицы A;
2) Решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t), \quad Y(0) = I;$$

3) Степенной ряд

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j.$$

Решение уравнения Ляпунова

Доказательство леммы.
1) Так как $\mathrm{Re}\,\lambda_j(A) \le -\sigma < 0$, то кривую γ можно выбрать специальным образом так, чтобы вся кривая лежала левее прямой $\mathrm{Re}\,\lambda = -\sigma/2$. Тогда на γ справедлива следующая оценка

$$|e^{t\lambda}| < e^{-t\sigma/2}, \quad \|(\lambda I - A)^{-1}\| < K'.$$

Используя представление $e^{tA} = \oint_\gamma e^{t\lambda}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda$, получаем при $t > 0$

$$\|e^{tA}\| \le K' l_\gamma e^{-t\sigma/2}.$$

Следовательно интеграл

$$\int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA} dt$$

сходится.

Решение уравнения Ляпунова

2) Сконструируем вспомогательную матричную функцию

$$Z(s) = \int_s^\infty e^{tA^*} C e^{tA} dt = \int_0^\infty e^{(t+s)A^*} C e^{(t+s)A} dt.$$

Дифференцирование интеграла по параметру дает следующие равенства

$$\frac{d}{ds} Z(s) = -e^{sA^*} C e^{sA} = A^* Z(s) + Z(s) A.$$

Так как $Z(0) = X$, то $C = A^* X + XA$. Лемма доказана.
$\diamond$

Второе представление решения уравнения Ляпунова

Lemma

Если спектр матрицы A лежит строго в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$, то уравнение Ляпунова $XA + A^*X + C = 0$ имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$X = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} (i\xi I - A)^{-*} C (i\xi I - A)^{-1} d\xi$$

Доказательство опирается на теоремы ТФКП:
Теорема Коши: Для любой функции $f(z)$, аналитической в некоторой односвязной области $G \subset \mathbb{C}$ и для любой замкнутой кривой $\Gamma \in G$ справедливо соотношение

$$\oint_\Gamma f(z) = 0$$

Второе представление решения уравнения Ляпунова

Доказательство леммы.
1) Пусть Γ состоит из отрезка мнимой оси $[-\mathrm{ia}, +\mathrm{ia}]$ и примыкающей к нему половины окружности радиуса a с центром в нуле, расположенной в правой полуплоскости, причем $\mathrm{a} > 2\|\mathrm{A}\|$.
По теореме Коши

$$\oint_{\Gamma} (\mathrm{zI} - \mathrm{A})^{-1} = 0$$

или

$$\mathrm{i}\int_{-\mathrm{a}}^{+\mathrm{a}} (\mathrm{i}\xi - \mathrm{A})^{-1} \mathrm{d}\xi = -\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (\mathrm{ae}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{A})^{-1} \mathrm{iae}^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{d}\varphi$$

Преобразуем подинтегральную функцию

$$(\mathrm{ae}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{A})^{-1} = \left[\mathrm{ae}^{\mathrm{i}\varphi}\left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{\mathrm{a}}\mathrm{A}\right)\right]^{-1} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{\mathrm{a}}\left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{\mathrm{a}}\mathrm{A}\right)^{-1}$$

Ряд Неймана

Ряд Неймана $\approx$ сумма геом. прогрессии.
If $\forall i \ \ |\lambda_i(A)| < 1 \ \ \Rightarrow$

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I - A)^{-1}$$

Доказательство по индукции:

$$\sum_{j=0}^{k} A^j = (I - A^{k+1})(I - A)^{-1}$$

$$\sum_{j=0}^{k+1} A^j = \sum_{j=0}^{k} A^j + A^{k+1} = (I - A^{k+1})(I - A)^{-1} + A^{k+1}(I - A)(I - A)^{-1} =$$

$$= [I - A^{k+1} + A^{k+1} - A^{k+2}](I - A)^{-1}$$

При $k \to \infty \ \|A^{k+1}\| \to 0$

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} A^j = \lim_{k\to\infty} (I - A^{k+1})(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}$$

Второе представление решения уравнения Ляпунова

Используем ряд Неймана

$$(ae^{i\varphi} - A)^{-1} = \frac{e^{-i\varphi}}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-i\varphi}}{a} A \right)^{j} = \frac{e^{-i\varphi}}{a} \left[I + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-i\varphi}}{a} A \right)^{j} \right] =$$

$$= \frac{e^{-i\varphi}}{a} \left[I + \Delta \right]$$

$$\|\Delta\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-i\varphi}}{a} A \right)^{j} \right\| \le \frac{\|A\|}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{a} \right)^{j} = \frac{\|A\|}{a} \frac{1}{1 - \|A\|/a} \le \frac{2\|A\|}{a}$$

Следовательно,

$$i \int_{-a}^{+a} (i\xi - A)^{-1} d\xi = - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (ae^{i\varphi} - A)^{-1} iae^{i\varphi} d\varphi = - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{e^{-i\varphi}}{a} \left[I + \Delta \right] iae^{i\varphi} d\varphi$$

$$= -i \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[I + \Delta \right] d\varphi = -i\pi - i \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Delta d\varphi$$

Второе представление решения уравнения Ляпунова

$$\mathrm{i}\int_{-\mathrm{a}}^{+\mathrm{a}}(\mathrm{i}\xi-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{d}\xi=-\mathrm{i}\pi-\mathrm{i}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\Delta\mathrm{d}\varphi$$

Сокращаем на i, делим на 2π и переходим к пределу

$$\lim_{\mathrm{a}\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{a}}^{+\mathrm{a}}(\mathrm{i}\xi\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{d}\xi=\lim_{\mathrm{a}\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\pi-\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\Delta\mathrm{d}\varphi\right]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{I}-\lim_{\mathrm{a}\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\Delta\mathrm{d}\varphi\right]=\frac{1}{2}\mathrm{I}$$

Второе представление решения уравнения Ляпунова

В итоге

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}(i\xi I - A)^{-1}d\xi = \frac{1}{2}I, \qquad \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}(i\xi I - A)^{-*}d\xi = \frac{1}{2}I.$$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\left[C(i\xi I - A)^{-1} + (i\xi I - A)^{-*}C\right]d\xi = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = C$$

Второе представление решения уравнения Ляпунова

$$A^*(i\xi I - A)^{-*}C(i\xi I - A)^{-1} + (i\xi I - A)^{-*}C(i\xi I - A)^{-1}A =$$

Прибавляем ноль:

$$= (A - \mathbf{i\xi I})^*(i\xi I - A)^{-*}C(i\xi I - A)^{-1} - \boldsymbol{i\xi}(i\xi I - A)^{-*}C(i\xi I - A)^{-1} +$$

$$+(i\xi I - A)^{-*}C(i\xi I - A)^{-1}(A - \mathbf{i\xi I}) + \boldsymbol{i\xi}(i\xi I - A)^{-*}C(i\xi I - A)^{-1} =$$

$$= -C(i\xi I - A)^{-1} - (i\xi I - A)^{-*}C$$

Подставляем в уравнение Ляпунова

$$A^*\left[\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}(i\xi I - A)^{-*}C(i\xi I - A)^{-1}d\xi\right] +$$

$$+\left[\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}(i\xi I - A)^{-*}C(i\xi I - A)^{-1}d\xi\right]A =$$

$$= -\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\left[C(i\xi I - A)^{-1} + (i\xi I - A)^{-*}C\right]d\xi = -\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C = -C$$

Обращение теоремы Ляпунова

Theorem (Оценка решения дифференциального уравнения)

Если существуют матрицы $C = C^* > 0$ и $X = X^* > 0$, которые удовлетворяют уравнению Ляпунова $XA + A^*X + C = 0$, то произвольное решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\|^2 \leq \mu(X)e^{-\alpha t}\|x(0)\|^2, \qquad \frac{1}{\|C^{-1}\|\|X\|} = \alpha.$$

Оценка решения дифференциального уравнения

Доказательство. Из того, что матрицы X и C удовлетворяют уравнению Ляпунова, а x(t) является решением дифференциального уравнения, следует равенство

$$\frac{d}{dt}(Xx(t), x(t)) = -(Cx(t), x(t))$$

Так как $\alpha \leq \frac{1}{\|C^{-1}\|\|X\|}$, то

$$\alpha(Xx, x) \leq \alpha\|X\|\|x\|^2 \leq \frac{1}{\|C^{-1}\|}\|x\|^2 = \sigma_{\mathsf{min}}(C)\|x\|^2 \leq (Cx, x)$$

На этом основании получаем

$$\frac{d}{dt}[e^{\alpha t}(Xx(t), x(t))] = e^{\alpha t}\left(\frac{d}{dt}(Xx(t), x(t)) + \alpha(Xx(t), x(t))\right) =$$

$$= e^{\alpha t}\left(-(Cx(t), x(t)) + \alpha(Xx(t), x(t))\right) \leq 0.$$

Оценка решения дифференциального уравнения

Интегрирование оценки

$$\frac{d}{dt}[e^{\alpha t}(Xx(t), x(t))] \leq 0$$

дает неравенство

$$e^{\alpha t}(Xx(t), x(t)) \leq (Xx(0), x(0)).$$

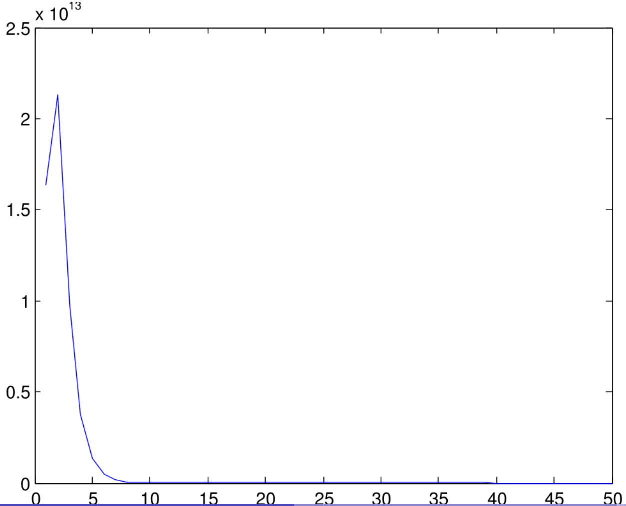
Усилим неравенство

$$\sigma_{\mathsf{min}}(X)\|x(t)\|^2 \leq (Xx(t), x(t)) \leq e^{-\alpha t}(Xx(0), x(0)) \leq e^{-\alpha t}\|X\|\|x(0)\|^2,$$

откуда следует утверждение теоремы $\diamond$

Оценка решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad \|x(t)\|^2 \le \mu(X)e^{-\alpha t}\|x(0)\|^2$$



Theorem (Обращение теоремы Ляпунова)

Если существуют матрицы $C = C^* > 0$ и $X = X^* > 0$, которые удовлетворяют уравнению Ляпунова $XA + A^*X + C = 0$, то то спектр матрицы A лежит строго в левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$.

Упражнение. Доказать с использованием предыдущей теоремы.