Решение линейных систем

Бибердорф Э.А.

Разрешимость системы

$$Ax = f, \qquad A - n \times n \text{ матрица}$$

Система разрешима $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

Разрешимость системы

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{f}, \qquad \mathrm{A} - \mathrm{n} \times \mathrm{n} \text{ матрица}$$

Система разрешима $\Leftrightarrow$

$$\det \mathrm{A} \neq 0$$

$$\mu(\mathrm{A}) < \infty$$
$$\mu(\mathrm{A}) = \sigma_{\mathsf{max}} / \sigma_{\mathsf{min}}$$

Пример

Пусть A – матрица размера 30×30:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & 0 \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$\det(A) = 1 \neq 0$

Пример

Пусть $\widetilde{\mathrm{A}}$ – возмущенная матрица:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & 0 \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ \varepsilon & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = 2^{-29} \approx 0,18\,10^{-8}$$

$$\mathsf{det}(\widetilde{\mathrm{A}}) = \underbrace{1 \cdot 1 \ldots 1}_{30 \text{ раз}} - \underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{29 \text{ раз}} \cdot 2^{-29} = 0.$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & 0 \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$\mu(A) = 2.1449 \cdot 10^9$

Примеры

1) R размера $M \times M$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & \dots & -1 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\det(R) = 1$, т. е. матрица невырождена и соответствующая система уравнений разрешима при любом M. При этом

$$\mu(R) = M2^{M-1},$$

значит число обусловленности быстро растет с увеличением размера матрицы.

2) Пусть D – диагональная матрица размера $M \times M$:

$$D = \mathrm{diag}(10^{-1}, \dots, 10^{-1}).$$

Система с такой матрицей хорошо разрешима при любом M, при этом $\mu(D) = 1$, а $\det(D) = 10^{-M}$.

Непрерывность числа обусловленности

Lemma

Если $\mu(A)\dfrac{||\triangle A||}{||A||} < 1$, то матрицы $A + \triangle A$ и A обратимы одновременно.

Доказательство.

$$\mu(A+\Delta A) = \frac{\sigma_{\max}(A+\Delta A)}{\sigma_{\min}(A+\Delta A)} \overset{\text{т. Вейля}}{\leq} \frac{\sigma_{\max}(A) + \|\Delta A\|}{\sigma_{\min}(A) - \|\Delta A\|} \leq \frac{\mu(A) + \|\Delta A\|/\sigma_{\min}(A)}{1 - \|\Delta A\|/\sigma_{\min}(A)} =$$

$$= \frac{\mu(A) + \mu(A)\|\Delta A\|/\sigma_{\max}(A)}{1 - \mu(A)\|\Delta A\|/\sigma_{\max}(A)} = \mu(A)\frac{1 + \|\Delta A\|/\|A\|}{1 - \mu(A)\|\Delta A\|/\|A\|}.$$

Определитель и число обусловленности

Оказывается, с помощью числа обусловленности оценивается чувствительность самого определителя к возмущениям матрицы.

Lemma

Если A, $\triangle$A – матрицы размера $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$, причем

$$\mathrm{M}\,\mu(\mathrm{A})\,\frac{||\triangle \mathrm{A}||}{||\mathrm{A}||} < 1,$$

тогда

$$\left|\frac{\det(\mathrm{A}+\triangle \mathrm{A}) - \det \mathrm{A}}{\det \mathrm{A}}\right| \le \frac{\mathrm{M}\,\mu(\mathrm{A})\,\frac{||\triangle \mathrm{A}||}{||\mathrm{A}||}}{1 - \mathrm{M}\,\mu(\mathrm{A})\,\frac{||\triangle \mathrm{A}||}{||\mathrm{A}||}}.$$

Lemma

$$\mathrm{M}\,\mu(\mathrm{A})\,\frac{||\triangle \mathrm{A}||}{||\mathrm{A}||}<1 \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{\det(\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A})-\det \mathrm{A}}{\det \mathrm{A}}\right| \le \frac{\mathrm{M}\,\mu(\mathrm{A})\,\dfrac{||\triangle \mathrm{A}||}{||\mathrm{A}||}}{1-\mathrm{M}\,\mu(\mathrm{A})\,\dfrac{||\triangle \mathrm{A}||}{||\mathrm{A}||}}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\det(\mathrm{A}+t\Delta\mathrm{A})$ на отрезке $[0,1]$. Эта функция 1) непрерывна, 2) не обращается в нуль (по предыдущей лемме). Следовательно на всем отрезке она сохраняет знак.
Имеет место представление $|\det \mathrm{A}| = \prod_{j=1}^{N}\sigma_j(\mathrm{A})$.

$$\Rightarrow\quad |\det(\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A})-\det \mathrm{A}| = \left|\prod_{j=1}^{M}\sigma_j(\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A})-\prod_{j=1}^{M}\sigma_j(\mathrm{A})\right|.$$

$$|\operatorname{det}(A+\triangle A)-\operatorname{det} A|=\left|\prod_{j=1}^{M}\sigma_j(A+\triangle A)-\prod_{j=1}^{M}\sigma_j(A)\right|.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|\operatorname{det}(A+\triangle A)-\operatorname{det} A|}{|\operatorname{det} A|}=\left|\prod_{j=1}^{N}\frac{\sigma_j(A+\triangle A)}{\sigma_j(A)}-1\right|.$$

В это равенство подставим оценки

$$\frac{\sigma_j(A+\triangle A)}{\sigma_j(A)}\overset{\text{т. Вейля}}{\leq}\frac{\sigma_j(A)+\sigma_M(\triangle A)}{\sigma_j(A)}\leq 1+\frac{\sigma_M(\triangle A)}{\sigma_1(A)}=1+\mu(A)\frac{||\triangle A||}{||A||},$$

$$\frac{\sigma_j(A+\triangle A)}{\sigma_j(A)}\overset{\text{т. Вейля}}{\geq}\frac{\sigma_j(A)-\sigma_M(\triangle A)}{\sigma_j(A)}\geq 1-\mu(A)\frac{||\triangle A||}{||A||}$$

и получим

$$\frac{|\operatorname{det}(A+\triangle A)-\operatorname{det} A|}{|\operatorname{det} A|}\leq\left(1+\mu(A)\frac{||\triangle A||}{||A||}\right)^{M}-1.$$

Так как $(1+\mathrm{x})^{\mathrm{M}} \le 1/(1-\mathrm{Mx})$ при $0 < \mathrm{x} < 1/\mathrm{M}$, то

$$\frac{|\det(\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A}) - \det\mathrm{A}|}{|\det\mathrm{A}|} \le \left(1 + \mu(\mathrm{A})\frac{||\triangle\mathrm{A}||}{||\mathrm{A}||}\right)^{\mathrm{M}} - 1 \le \frac{\mathrm{M}\,\mu(\mathrm{A})\,\frac{||\triangle\mathrm{A}||}{||\mathrm{A}||}}{1 - \mathrm{M}\,\mu(\mathrm{A})\,\frac{||\triangle\mathrm{A}||}{||\mathrm{A}||}}$$

при $\mathrm{M}\,\mu(\mathrm{A})\,\frac{||\triangle\mathrm{A}||}{||\mathrm{A}||} < 1$.

Лемма доказана $\diamond$

Таким образом, если число обусловленности матрицы велико, то ее определитель может резко изменяться при небольшом возмущении матрицы.

Вспомогательное утверждение

Если $0 < x < 1/M$, то $(1+x)^M \leq 1/(1-Mx)$.
Доказательство.

$$C_k^M = \frac{M!}{k!(M-k)!} \leq \frac{M^k}{k!} \leq M^k$$

$$(1+x)^M \leq 1 + Mx + M^2x^2 + \cdots = \frac{1}{1-Mx}$$

Решение возмущенной системы

Theorem

Рассмотрим две системы:

$$Ax = f, \qquad A(x + \triangle x) = f + \triangle f, \qquad \|\triangle f\| \le \varphi \|f\|.$$

Тогда для возмущения решения верна оценка

$$\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} \le \mu(A) \frac{\|\triangle f\|}{\|f\|}.$$

Доказательство. Пусть $\mu(A)$ – конечное число. Очевидно, что

$$A\triangle x = \triangle f, \qquad \triangle x = A^{-1}\triangle f.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}\triangle f\|}{\|x\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \frac{\|A^{-1}\triangle f\|}{\|\triangle f\|} \frac{\|\triangle f\|}{\|f\|}.$$

По определению нормы

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|, \quad \frac{\|A^{-1}\triangle f\|}{\|\triangle f\|} \le \|A^{-1}\| \ \diamond$$

Следующая теорема показывает, что число обусловленности выполняет роль коэффициента непрерывности решения и при возмущениях матрицы.

Theorem

Рассмотрим две системы:

$$\mathrm{A}\mathrm{x} = \mathrm{f}, \qquad (\mathrm{A} + \triangle \mathrm{A})(\mathrm{x} + \triangle \mathrm{x}) = \mathrm{f} + \triangle \mathrm{f},$$

причем возмущения матрицы и правой части системы подчинены неравенствам

$$\|\triangle \mathrm{A}\| \leq \alpha \|\mathrm{A}\|, \qquad \alpha \mu(\mathrm{A}) < 1, \qquad \|\triangle \mathrm{f}\| \leq \varphi \|\mathrm{f}\|.$$

Тогда оценка возмущения решения имеет вид

$$\frac{\|\triangle \mathrm{x}\|}{\|\mathrm{x}\|} \leq (\alpha + \varphi)\, \frac{\mu(\mathrm{A})}{1 - \alpha \mu(\mathrm{A})}.$$

Вспомогательные леммы

Lemma (Ряд Неймана)

Если $\|A\| < 1$, то

$$(I - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i, \qquad (I + A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i A^i$$

Lemma

Если $\|\triangle A\, A^{-1}\| \leq 1$, то

$$(A + \triangle A)^{-1} = A^{-1} - (A + \triangle A)^{-1} \triangle A\, A^{-1}$$

Доказательство вспомогательной леммы

$$(\mathrm{A} + \triangle \mathrm{A})^{-1} = \mathrm{A}^{-1}(\mathrm{I} + \triangle \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\left(\sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty}(-1)^{\mathrm{i}}(\triangle \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{i}}\right) =$$

$$= \mathrm{A}^{-1}\left(\mathrm{I} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty}(-1)^{\mathrm{i}}(\triangle \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{i}}\right) = \mathrm{A}^{-1}\left(\mathrm{I} - \left(\sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty}(-1)^{\mathrm{i}}(\triangle \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{i}}\right)\triangle \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}\right) =$$

$$= \mathrm{A}^{-1}\left(\mathrm{I} - (\mathrm{I} + \triangle \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1})^{-1}\triangle \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}\right) = \mathrm{A}^{-1} - (\mathrm{A} + \triangle \mathrm{A})^{-1}\triangle \mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1}$$

Theorem

$$\|\triangle \mathrm{A}\| \le \alpha\|\mathrm{A}\|, \quad \|\triangle \mathrm{f}\| \le \varphi\|\mathrm{f}\| \;\;\Rightarrow\;\; \frac{\|\triangle \mathrm{x}\|}{\|\mathrm{x}\|} \le (\alpha+\varphi)\,\frac{\mu(\mathrm{A})}{1-\alpha\mu(\mathrm{A})}.$$

По вспомогательной лемме

$$(\mathrm{A}+\triangle \mathrm{A})^{-1} = \mathrm{A}^{-1} - (\mathrm{A}+\triangle \mathrm{A})^{-1}\triangle \mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1},$$

что приводит к равенству

$$(\mathrm{A}+\triangle \mathrm{A})^{-1}\mathrm{f} - \mathrm{A}^{-1}\mathrm{f} = (\mathrm{A}+\triangle \mathrm{A})^{-1}\mathrm{f} - \mathrm{x} = -(\mathrm{A}+\triangle \mathrm{A})^{-1}\triangle \mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1}\mathrm{f}.$$

Используя свойства норм, получаем оценку

$$\|(\mathrm{A}+\triangle \mathrm{A})^{-1}\mathrm{f} - \mathrm{x}\| \le \|(\mathrm{A}+\triangle \mathrm{A})^{-1}\|\,\|\triangle \mathrm{A}\|\,\|\mathrm{x}\|.$$

Далее

$$\|\widetilde{x}-x\| = \|(A+\triangle A)^{-1}(f+\triangle f)-x\| \le \|(A+\triangle A)^{-1}f-x\| + \|(A+\triangle A)^{-1}\triangle f\|$$

$$\le \|(A+\triangle A)^{-1}\|\,\|\triangle A\|\,\|x\| + \|(A+\triangle A)^{-1}\|\|\|\triangle f\| =$$

$$= \|(A+\triangle A)^{-1}\|\left(\|\triangle A\|\|x\| + \|\triangle f\|\right).$$

Разделим это неравенство на $\|x\|$

$$\frac{\|\widetilde{x}-x\|}{\|x\|} \le \|(A+\triangle A)^{-1}\|\left(\|\triangle A\| + \frac{\|\triangle f\|}{\|f\|}\frac{\|f\|}{\|x\|}\right) \le$$

$$\le \|(A+\triangle A)^{-1}\|\left(\alpha\|A\| + \varphi\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right) \le$$

$$(\alpha+\varphi)\|A\|\,\|(A+\triangle A)^{-1}\|$$

Во-первых,

$$\|(\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A})^{-1}\| = \sigma_{\mathsf{max}}\left((\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A})^{-1}\right) = \frac{1}{\sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A})}.$$

Во-вторых,

$$\sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A}) \geq \sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{A}) - \|\triangle\mathrm{A}\| \geq \sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{A}) - \alpha\|\mathrm{A}\| = \sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{A}) - \alpha\sigma_{\mathsf{max}}(\mathrm{A}).$$

Следовательно,

$$\|(\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A})^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A})} \leq \frac{1}{\sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{A}) - \alpha\sigma_{\mathsf{max}}(\mathrm{A})} = \frac{1}{\sigma_{\mathsf{min}}(\mathrm{A})(1-\alpha\mu(\mathrm{A}))},$$

$$\|\mathrm{A}\|\,\|(\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A})^{-1}\| \leq \frac{\mu(\mathrm{A})}{1-\alpha\mu(\mathrm{A})}$$

В итоге

$$\frac{\|\widetilde{\mathrm{x}}-\mathrm{x}\|}{\|\mathrm{x}\|} \le (\alpha+\varphi)\|\mathrm{A}\|\,\|(\mathrm{A}+\triangle\mathrm{A})^{-1}\| \le (\alpha+\varphi)\,\frac{\mu(\mathrm{A})}{1-\alpha\mu(\mathrm{A})}.$$

Что и требовалось доказать. $\diamond$

Решение систем

Пример. Приведем матрицу к треугольному виду, используя метод Гаусса:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 71 \end{pmatrix}.$$

Оказывается, $\mu(\mathrm{A}) \approx 6,37$, а $\mu(\mathrm{B}) \approx 173,89$, т. е. число обусловленности системы за 3 шага метода Гаусса возросло почти в 30 раз.
Вывод: желательно использовать ортогональные преобразования, которые не ухудшают число обусловленности.

Для того, чтобы решить линейную систему

$$Ax = f,$$

преобразуем ее по приведенному выше алгоритму к двухдиагональному виду $PAQ = D$, тогда $PAQQ^*x = Pf$ и исходная система получает представление

$$Dy = h, \qquad \text{где } y = Q^*x,\ h = Pf.$$

Затем решается двухдиагональная система $y = D^{-1}h$ по формулам

$$\begin{cases} d_1y_1 + b_2y_2 = h_1, \\ d_2y_2 + b_3y_3 = h_2, \\ \dots \\ d_{N-1}y_{N-1} + b_Ny_N = h_{N-1}, \\ d_Ny_N = h_N. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_N = h_N/d_N\ , \\ y_{k-1} = (h_{k-1} - b_ky_k)/d_{k-1} \end{cases}$$

и из ее решения восстанавливается решение исходой системы:

$$x = Qy.$$

Существует гарантированная оценка точности $\|x - x^{[c]}\| \le \epsilon_x(A, f)\|x\|$

Пример.

Матрица размера 30×30

$$D_{30} = \begin{pmatrix} 7/5 & 11/3 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 7/5 & 11/3 \\ 0 & & & & 7/5 \end{pmatrix}$$

Компоненты правой части:

$$f_k = \frac{152k + 118}{15(2k+1)(2k+3)}, \quad f_N = \frac{7}{5(2N+1)}.$$

Точное решение системы: $x_k = 1/(2k+1)$.
Обусловленность и гарантированная оценка точности

$$\mu(D_{30}) = 5,717288\,10^{12}, \;\; \epsilon_x(D) = 9,55875\,10^{-3}.$$

Реальная относительная погрешность

$$||x^{[c]} - x||/||x|| = 3,52535\,10^{-6}.$$

Переопределенные системы, $N > M$

$$Ax + r = f, \qquad N > M$$

Обобщенное решение - решение, минимизирующее норму невязки.
Нормальное решение - решение с минимальной нормой.

Переопределенные системы, $N > M$

$$Ax + r = f, \qquad N > M$$

Приводим матрицу к двухдиагональному виду

$$B = PAQ = \begin{pmatrix} D \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Замена $y = Q^*x$, $\rho = Pr$, $h = Pf$ приводит систему к виду $By + \rho = h$.

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^{(1)} \\ \rho^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} h^{(1)} \\ h^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} Dy + \rho^{(1)} = h^{(1)}, \\ \rho^{(2)} = h^{(2)}. \end{cases}$$

Единственный способ минимизировать невязку: $\rho^{(1)} = 0$. Тогда $Dy = h^{(1)}$ – обобщенное решение y единственно.
Обратная замена:

$$x = Qy, \qquad r = P^*\rho = P^* \begin{pmatrix} 0 \\ h^{(2)} \end{pmatrix}$$

Т.о., обобщенное нормальное решение переопределенной системы существует и единственно.

Недоопределенные системы, N < M

Ортогональная двухдиагонализация

$$\mathrm{B} = \mathrm{PAQ} = \left(\mathrm{D} \vdots 0\right).$$

Замена $\mathrm{y} = \mathrm{Q}^*\mathrm{x},\ \rho = \mathrm{Pr},\ \mathrm{h} = \mathrm{Pf}$ приводит к системе $\mathrm{By} = \mathrm{h}$:

$$\mathrm{Dy}^{(1)} + 0 * \mathrm{y}^{(2)} + \rho = \mathrm{h}$$

Минимизация невязки $\rho = 0$.
Минимизация нормы решения $\mathrm{y}^{(2)} = 0$.
$\mathrm{y}^{(1)}$ определяется единственным образом

$$\mathrm{Dy}^{(1)} = \mathrm{h}.$$

Вывод: обобщенное нормальное решение существует и единственно