Дихотомия матричного спектра мнимой осью.

Бибердорф Э.А.

Алгоритм дихотомии спектра матричного пучка единичной окружностью

Задано:
матричный пучок $A_0 - \lambda B_0$;
ε_{it} — требуемая точность итерационного процесса;
ω_{max}, μ_{max} — большие положительные числа, $C = C^* > 0$.

Шаг 1

Если $\mu(A_0 - B_0) > \mu_{\text{max}}$, то "Дихотомия невозможна ", конец расчетов.

$$H^{(0)} = (A_0 - B_0)^{-1}(A_0 C A_0^* + B_0 C B_0^*)(A_0 - B_0)^{-*}$$

Цикл пока $\|H^{(k)} - H^{(k-1)}\| > \varepsilon_{\text{it}}$

Если $\|H^{(k)}\| \geq \omega_{\text{max}}$ или $\mu(A_k + B_k) > \mu_{\text{max}}$, то "Дихотомия невозможна ", конец расчетов.

$$V^{(k+1)} = (A_k + B_k)^{-1} A_k, \quad U^{(k+1)} = I - V^{(k+1)}$$

$$H^{(k+1)} = U^{(k+1)} H^{(k)} U^{(k+1)*} + V^{(k+1)} H^{(k)} V^{(k+1)*}$$

$$\mathrm{qr}\left(\begin{bmatrix} -B_k & A_k & 0 \\ A_k & 0 & -B_k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A_{k+1} & -B_{k+1} \end{bmatrix}$$

Конец цикла

Одномерные спектральные портреты

Пусть $\gamma(\mathrm{a})$ – однопараметрическое семейство кривых.
График функции $\omega(\mathrm{a}) = \|\mathrm{H}_{\gamma(\mathrm{a})}(\mathrm{A})\|$ называется одномерным спектральным портретом.

Если $\gamma(\mathrm{r})$ – семейство окружностей с центром в начале координат и радиусом r, тогда $\omega(\mathrm{r}) = \|\mathrm{H}_{\gamma(\mathrm{r})}(\mathrm{A})\|$ – радиальный спектральный портрет

Те значения параметра, при которых $\|\mathrm{H}\|$ велика и график "уходит на бесконечность"могут образовывать целые интервалы, которые называются одномерными спектральными пятнами. Именно внутри этих пятен находятся такие r, что $|\lambda(\mathrm{A})| = \mathrm{r}$. Таким образом при помощи радиального портрета выделяются кольца, внутри которых располагается спектр матрицы.

Для визуального анализа удобно изображение графика $\log_{10}\omega(\mathrm{r})$.

Анализ одномерного матричного портрета и приведение матрицы к каноническому виду

Вне спектральных пятен пятен на каждом связном интервале $\omega(r)$ – выпуклая вниз функция. Для всех значений параметра r, принадлежащих одному такому фиксированному интервалу инвариантное подпространство, отвечающее собственным значениям матрицы A, лежащим внутри круга $|\lambda| = r$, одно и то же. Следовательно проектор $P = P(r)$ на это инвариантное подпространство не зависит от выбора параметра r из данного интервала.

Если выбрать параметры r_1 и r_2 из двух соседних интервалов, где $\|H_r\|$ конечна, то разница $P(r_2) - P(r_1)$ является проектором на нивариантное подпространство матрицы A, соответствующее собственным значениям из спектрального пятна, разделяющего эти интервалы. Таким образом вычисляются проекторы $P_1, \dots, P_k$ для каждого спектрального пятна. Производится их сингулярное разложение

$$P_i = [U_i \vdots W_i] \begin{bmatrix} \Sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_i.$$

Анализ одномерного матричного портрета и приведение матрицы к каноническому виду

$$P_i = [U_i \vdots W_i] \begin{bmatrix} \Sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_i.$$

Выделяются базисы инвариантных подпространств $U_1, \ldots, U_k$, а затем исходная матрица A приводится к клеточно-диагональному виду:

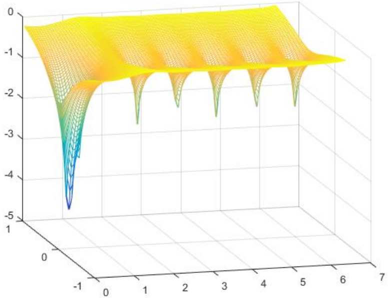
$$A = [U_1 \vdots U_2 \vdots \ldots \vdots U_k] \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{bmatrix} [U_1 \vdots U_2 \vdots \ldots \vdots U_k]^{-1}.$$

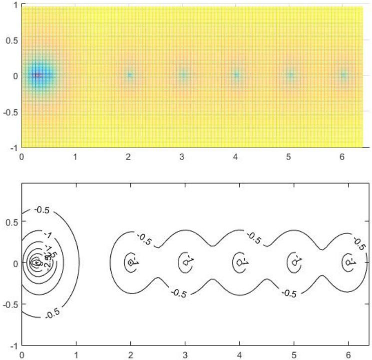
Здесь число диагональных клеток A_i равно числу спектральных пятен, выделенных при помощи одномерного спектрального портрета, а их размеры равны числу собственных значений в соответствующем спектральном пятне.

Пример

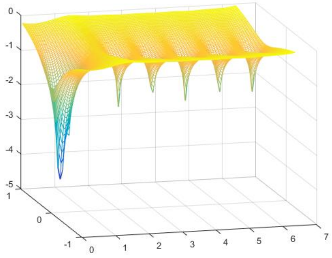
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

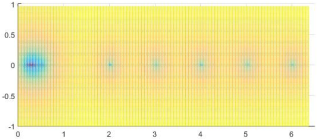
Пример.Спектральный портрет матрицы A

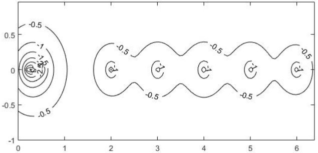


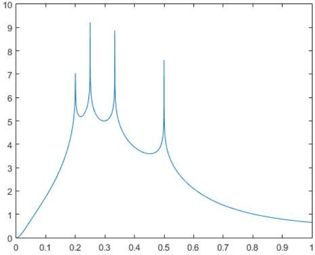


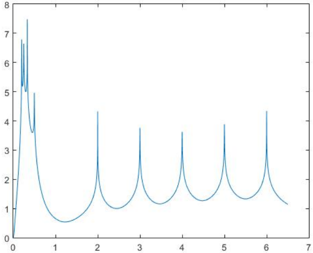
Пример.Спектральный портрет матрицы A



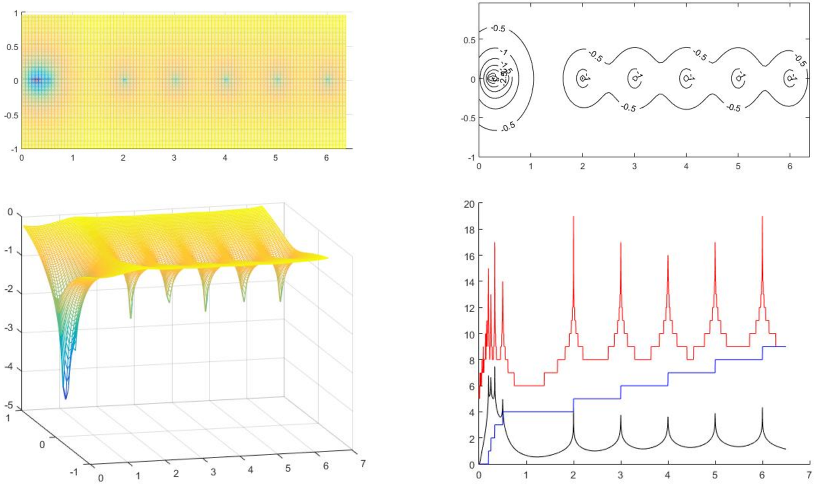




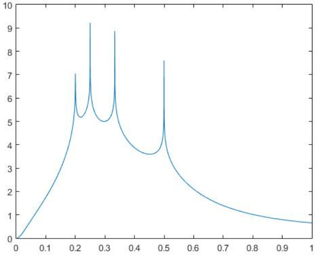


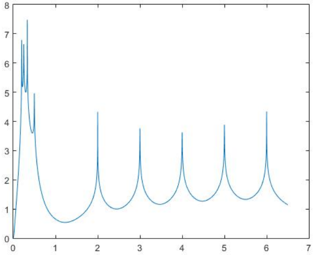


Пример.Спектральный портрет матрицы A



Пример.





Вычисляем проекторы в точках $r = 0.3, 0.4, 1, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5$:

$$\mathrm{P}(0.3),\ \ \mathrm{P}(0.4),\ \ \mathrm{P}(1),\ \ \mathrm{P}(2.5),\ \ \mathrm{P}(3.5),\ \ \mathrm{P}(4.5),\ \ \mathrm{P}(5.5).$$

Определяем проекторы на инвариантные подпространства, соответствующие спектральным пятнам

$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}(0.3)$, $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}(0.4) - \mathrm{P}(0.3)$, $\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}(1) - \mathrm{P}(0.4)$, $\mathrm{P}_4 = \mathrm{P}(2.5) - \mathrm{P}(1)$,

$\mathrm{P}_5 = \mathrm{P}(3.5) - \mathrm{P}(2.5)$, $\mathrm{P}_6 = \mathrm{P}(4.5) - \mathrm{P}(3.5)$, $\mathrm{P}_7 = \mathrm{P}(5.5) - \mathrm{P}(4.5)$, $\mathrm{P}_8 = \mathrm{I} - \mathrm{P}(5.5)$

Пример. Проектор

Рассмотрим $P_1 = P(0.3)$.
След $\mathrm{tr} P_1 = 1.99999999998068$
Сингулярное разложение $P_1 = U\Sigma V^*$
Сингулярные числа: $65.58, 1.57, 0.24 \cdot 10^{-13}, 0, 0, \ldots, 0$.

$$U = \begin{pmatrix} -0.0001 & 0.0001 & -0.0001 & 0.3955 & 0.1267 & 0.8970 & -0.1498 & 0.0240 & -0.0036 \\ 0.0007 & -0.0006 & 0.0007 & -0.1283 & 0.9755 & -0.1053 & -0.1401 & 0.0239 & -0.0270 \\ -0.0066 & 0.0050 & -0.0056 & 0.0139 & -0.0125 & 0.0023 & -0.0186 & -0.4949 & -0.8685 \\ 0.0487 & -0.0323 & 0.0337 & -0.0348 & -0.0546 & -0.0430 & -0.5229 & -0.7306 & 0.4269 \\ -0.2633 & 0.1359 & -0.1272 & 0.6037 & -0.0486 & -0.3593 & -0.5502 & 0.2812 & -0.1354 \\ 0.8957 & -0.2425 & 0.1811 & 0.2536 & 0.0001 & -0.1310 & -0.0966 & 0.1061 & -0.0640 \\ -0.3547 & -0.7179 & 0.5391 & 0.2109 & 0.0374 & -0.0773 & 0.1172 & -0.0466 & 0.0217 \\ 0.0032 & 0.6231 & 0.6042 & 0.3162 & 0.0815 & -0.0955 & 0.3018 & -0.1747 & 0.0964 \\ 0.0149 & -0.1343 & -0.5424 & 0.5025 & 0.1374 & -0.1456 & 0.5171 & -0.3116 & 0.1748 \end{pmatrix}$$

Пример. Проектор

Рассмотрим $P_4 = P(2.5) - P(1)$.
След $\mathrm{tr} P_4 = 0.999999999927145$
Сингулярное разложение $P_4 = U\Sigma V^*$
Сингулярные числа: $1.19, 0.3 \cdot 10^{-10}, 0.7 \cdot 10^{-12}, 0.4 \cdot 10^{-16}, 0, 0, \ldots, 0.$

$$U = \begin{pmatrix}
-0.0023 & 0.0007 & -0.0196 & -0.0072 & 0.8963 & 0.2839 & -0.3352 & 0.0443 & 0.0361 \\
0.0185 & -0.0050 & 0.1149 & -0.0021 & 0.0909 & -0.0871 & 0.0692 & -0.9396 & 0.2881 \\
-0.1111 & 0.0269 & -0.4406 & 0.0075 & -0.3835 & 0.3779 & -0.6809 & -0.1336 & 0.1464 \\
0.4444 & -0.0787 & 0.7675 & 0.0039 & -0.1844 & 0.2058 & -0.3561 & 0.0516 & 0.0380 \\
-0.8887 & -0.0428 & 0.4413 & 0.0010 & -0.0447 & 0.0531 & -0.0906 & 0.0228 & 0.0066 \\
0.0000 & 0.9956 & 0.0922 & 0.0001 & -0.0063 & 0.0077 & -0.0131 & 0.0039 & 0.0008 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9998 & -0.0092 & -0.0099 & -0.0114 & 0.0018 & 0.0012 \\
0 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0021 & 0.0103 & -0.1306 & -0.2206 & -0.2862 & -0.9232 \\
-0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0137 & 0.0714 & -0.8406 & -0.4851 & 0.1108 & 0.2013
\end{pmatrix}$$

Пример. Клеточно-диагональный вид матрицы

$$\mathrm{T} = [\mathrm{U}_1 \vdots \mathrm{U}_2 \vdots \ldots \vdots \mathrm{U}_8]$$

$$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.3056 & 0.4902 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0120 & 0.1444 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Повторение: связь решений уравнений Ляпунова

$XA + A^*X + C = 0$ – непрерывное уравнение Ляпунова
$X = \int_0^\infty e^{tA^*}Ce^{tA}dt$ – решение уравнение Ляпунова
Введем матрицы

$$B = e^{\tau A}, \qquad F = \int_0^\tau e^{tA^*}Ce^{tA}dt$$

Рассмотрим дискретное уравнение Ляпунова $Y - B^*YB = F$.
Тогда $X = Y$. Действительно,

$$Y = \sum_{k=0}^\infty (B^*)^k F B^k = \sum_{k=0}^\infty e^{k\tau A^*}\left(\int_0^\tau e^{tA^*}Ce^{tA}dt\right)e^{k\tau A} =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \left(\int_0^\tau e^{(t+k\tau)A^*}Ce^{(t+k\tau)A}dt\right) = \sum_{k=0}^\infty \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} e^{tA^*}Ce^{tA}dt = \int_0^\infty e^{tA^*}Ce^{tA}dt =$$

$$= X$$

Алгоритм дихотомии мнимой осью

Задана матрица A.
1. Нормировка матрицы A: $\tilde{A} = \tau A$, где $\tau = 1/2\|A\|$.
2. Вычислить матрицу $B = e^{\tilde{A}}$.
3. Примененить алгоритм дихотомии единичной окружностью к пучку $B - \lambda I$ и вычислить $\omega_{cal} = \|H_{cal}\|$ и P_{cal}.

В данном случае матрицы A и B одновременно приводятся к блочно-диагональной форме

$$A = (W_1 \mid W_2) \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} (W_1 \mid W_2)^{-1},$$

$$B = (W_1 \mid W_2) \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} (W_1 \mid W_2)^{-1},$$

где спектры матриц A_1, A_2 лежат справа и слева от мнимой оси, а спектры матриц B_1, B_2 внутри и вне единичного круга соответственно.

Линейный спектральный портрет

Пусть $\gamma(a) = \{\lambda = a + it,\ t \in \mathbb{R}\}$. График функции $\omega(a) = \|H_{\gamma(a)}(A)\|$ – одномерный линейный спектральный портрет.

Вне спектральных пятен (график "уходит на бесконечность") на каждом связном интервале $\|H_{\gamma(a)}(A)\|$ – выпуклая вниз функция. Для всех значений параметра a, принадлежащих одному такому фиксированному интервалу, инвариантное подпространство, отвечающее собственным значениям матрицы A, лежащим левее прямой $\operatorname{Re}\lambda = a$, одно и то же. Следовательно, проектор $P = P_a$ на это инвариантное подпространство не зависит от выбора параметра a из данного интервала.

Если выбрать параметры a_1 и a_2 из двух соседних интервалов, где $\omega(a) = \|H_{\gamma(a)}(A)\|$ конечна, то разница $P_{a_2} - P_{a_1}$ является проектором на инвариантное подпространство матрицы A, соответствующее собственным значениям из спектрального пятна, разделяющего эти интервалы.

Анализ линейного спектрального портрета

Если вычислить проекторы $P_1, \ldots, P_k$ для каждого спектрального пятна и произвести их сингулярное разложение

$$P_i = (U_i \,\vdots\, W_i) \begin{pmatrix} \Sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_i,$$

то базисы инвариантных подпространств – $U_1, \ldots, U_k$.

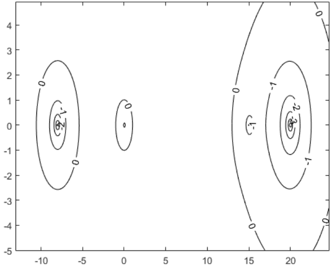
Исходная матрица A приводится к клеточно-диагональному виду:

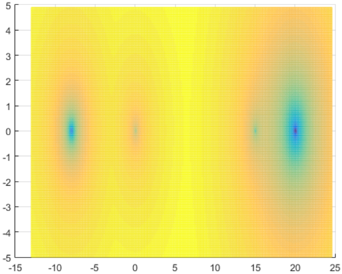
$$A = (U_1 \,\vdots\, U_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, U_k) \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix} (U_1 \,\vdots\, U_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, U_k)^{-1}.$$

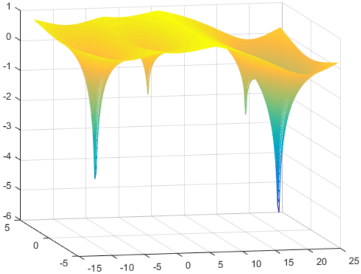
Здесь число диагональных клеток A_i равно числу спектральных пятен, выделенных при помощи одномерного спектрального портрета, а их размеры равны числу собственных значений в соответствующем спектральном пятне.

Численные примеры

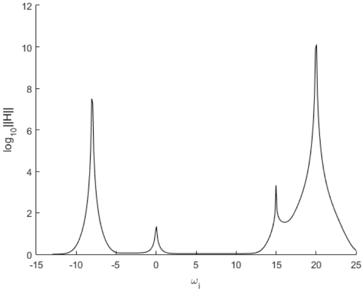
$$A = \begin{pmatrix} 20 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$







Численные примеры



Вычисляем проекторы в точках -6, 6 и 17:

$$P(-6), \ \ P(6), \ \ P(17).$$

Определяем проекторы на инвариантные подпространства, соответствующие спектральным пятнам

$$P_1 = P(-6), \ \ P_2 = P(6) - P(-6), \ \ P_3 = P(17) - P(6), \ \ P_4 = I - P(17).$$

Численные примеры

Проводим сингулярное разложение проекторов P_1, P_2, P_3, P_4. Например,

$$P_1 = \widetilde{U_1} \begin{pmatrix} 1.0084 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V_1$$

$$\widetilde{U_i} = [U_i,\ W_i]$$

U_i – столбцы, соответствующие ненулевой клетке

Так как $\mathrm{tr}(P_2) = \mathrm{tr}(P_3) = 1$, то

$$U_2 = [-0.0035, 0.0050, -0.01, 0.0665, -0.9977, 0, 0, 0]^T$$

$$U_3 = [-0.8951, 0.3197, -0.1598, 0.2664, 0, 0, 0, 0]^T$$

– собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda = 0$, $\lambda = 15$.

Численные примеры

$S = [U_1, U_2, U_3, U_4]$ – матрица перехода, $\mu(S) = 7.3888$

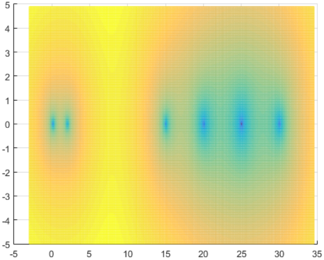
$$S^{-1}AS =$$

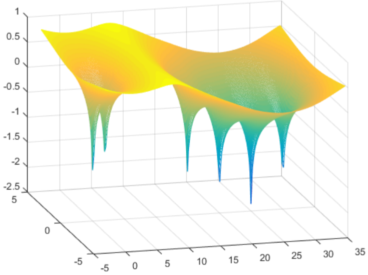
$$= \begin{pmatrix} -7.4183 & 1.3435 & 1.6019 & & & & & \\ 0.3519 & -9.7737 & 3.1147 & & & & & \\ 0.0810 & -0.9809 & -6.8080 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 15 & & & \\ & & & & & 15.1386 & -6.8298 & -10.4777 \\ & & & & & 0.7610 & 18.4180 & 4.4090 \\ & & & & & -0.2965 & -7.1980 & 26.4434 \end{pmatrix}$$

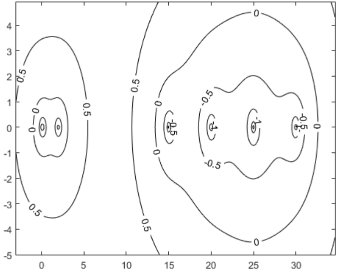
Численные примеры

A =

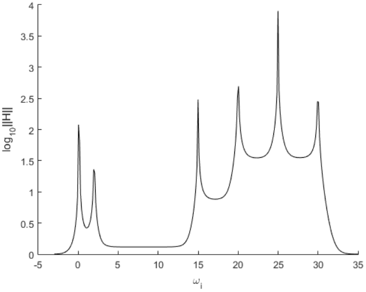
$$
\begin{pmatrix}
30 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 25 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 20 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 15 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0.1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0.01 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0.01 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20}
\end{pmatrix}
$$

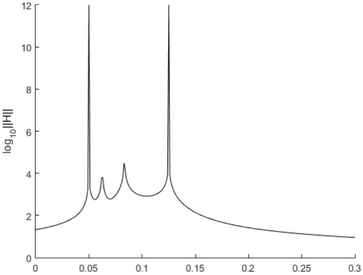






Численные примеры





Флаттер

(от англ. flutter – дрожание, вибрация) - сочетание самовозбуждающихся незатухающих изгибающих и/или крутящих колебаний, возникающих при достижении некоторой критической скорости, зависящей от характеристик конкретного элемента летательного аппарата:
крыла или других элементов конструкции самолета;
несущего винта вертолета;
пропеллеров мультикоптера.
Такие колебания в случае резонанса способны даже разрушить аппарат в воздухе.

Причиной флаттера обычно является недостаточная жесткость конструкции элемента, а также несовпадение центра жесткости с центром давления.

Одними из первых математических работ по предотвращению флаттера являются работы М.В. Келдыша. Его теоретические результаты не только привели к пониманию этого эффекта, но и к разработке эффективных мер по предотвращению возникновения флаттера.

Модель флаттера

Крыло-пластина

$$(\mathrm{G}+\mathrm{v}^2\mathrm{F})\mathrm{y}+\mathrm{v}\mathrm{D}\mathrm{y}'+\mathrm{y}''=0$$

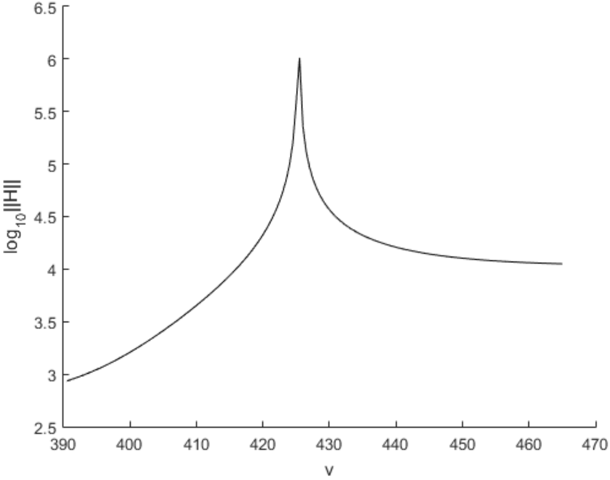
v – скорость потока,
G – матрица частот собственных колебаний,
vD – матрица трения,
$\mathrm{v}^2\mathrm{F}$ – матрица взаимодействий между частями крыла,
y – вектор перемещений.

$$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}=\mathrm{Az},\quad \mathrm{z}=\begin{pmatrix}\mathrm{y}\\ \mathrm{y}'\end{pmatrix},\quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix}-\mathrm{vD} & -(\mathrm{G}+\mathrm{v}^2\mathrm{F})\\ \mathrm{I} & 0\end{pmatrix},\quad \mathrm{D}=0.73\cdot 10^{-2}\,\mathrm{I}$$

$$\mathrm{G}=\begin{pmatrix}37.7 & & & \\ & 169 & & \\ & & 899 & \\ & & & 1792\end{pmatrix},\quad \mathrm{F}=10^{-3}\begin{pmatrix}0 & -1.97 & 0 & 0\\ 0.12 & 0 & -4.19 & 0.171\\ 0 & 0.176 & 0 & 0\\ 0 & -0.154 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Модель флаттера

График зависимости критерия дихотомии мнимой осью от скорости набегающего потока:



Дихотомия мнимой осью для матриц с большой нормой

Если норма матрицы A — велика, то вычисление матрицы e^{A}, может оказаться невозможным, так как значения элементов будут выходить за границы машинной арифметики.

В то же время переход к нормированной матрице τA, $\tau \approx 1/2\|A\|$ приводит к тому, что ее спектр как бы прижимается к мнимой оси, соответственно спектр матричной экспоненты $e^{\tau A}$ становится практически неотделим от единичной окружности. В итоге может быть получено слишком большое значение критерия дихотомии $\|H(A)\|$ даже в том случае, если спектр исходной матрицы находился на существенном расстоянии от мнимой оси.

Свойства метода удвоений

$$\mathrm{qr}\left(\begin{bmatrix} -B_k & A_k & 0 \\ A_k & 0 & -B_k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A_{k+1} & -B_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A_k - \lambda B_k = T_k \begin{bmatrix} \Lambda_k - \lambda I_\Lambda & 0 \\ 0 & I_M - \lambda M_k \end{bmatrix} S$$

$$A_{k+1} - \lambda B_{k+1} = T_{k+1} \begin{bmatrix} \Lambda_k^2 - \lambda I_\Lambda & 0 \\ 0 & I_M - \lambda M_k^2 \end{bmatrix} S$$

$$\det T_k \neq 0, \quad \det T_{k+1} \neq 0, \quad \det S \neq 0,$$

Дихотомия мнимой осью для матриц с большой нормой

$\tau = 2^{-k}$
Обозначим $A_0 = e^A, A_{-k} = e^{\tau A}$, тогда $A_0 = A_{-k}^{2^k}$.

Существуют матрицы S, L_0, L_∞ такие, что

$$A_{-k} = S^{-1} \begin{pmatrix} L_0 & \\ & L_\infty \end{pmatrix} S,$$

где S — невырождена, спектр L_0 лежит строго внутри, а спектр L_∞ строго вне единичной окружности.

Аналогичное представление для A_0:

$$A_0 = S^{-1} \begin{pmatrix} L_0^{2^k} & \\ & L_\infty^{2^k} \end{pmatrix} S = S^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda_0 & \\ & \Lambda_\infty \end{pmatrix} S$$

Дихотомия мнимой осью для матриц с большой нормой

Если $B_0 = I$, то правильный результат вычисления критерия дихотомии мог бы быть получен при применении алгоритма дихотомии единичной окружностью к пучку матриц $A_0 - \lambda B_0$.
По предположению выше данный пучок регулярен на единичной окружности, следовательно имеет место каноническое разложение:

$$A_0 = T \begin{pmatrix} \Lambda & \\ & I \end{pmatrix} S, \quad B_0 = T \begin{pmatrix} I & \\ & M \end{pmatrix} S = I \;\Rightarrow\; T = S^{-1} \begin{pmatrix} I & \\ & \Lambda_\infty \end{pmatrix},$$

а спектры матриц $\Lambda = \Lambda_0$ и $M = \Lambda_\infty^{-1}$ лежат строго внутри единичной окружности.

Аналогичное разложение для пучка $A_{-k} - \lambda B_{-k} = A_{-k} - \lambda I$:

$$A_{-k} = T_{-k} \begin{pmatrix} L_0 & \\ & I \end{pmatrix} S, \quad B_{-k} = T_{-k} \begin{pmatrix} I & \\ & L_\infty^{-1} \end{pmatrix} S,$$

Дихотомия мнимой осью для матриц с большой нормой

$$A_{-k} = T_{-k} \begin{pmatrix} L_0 & \\ & I \end{pmatrix} S, \quad B_{-k} = T_{-k} \begin{pmatrix} I & \\ & L_\infty^{-1} \end{pmatrix} S,$$

Применяем к данному пучку k раз ортогональные исключения

$$\begin{bmatrix} -B_i & A_i & 0 \\ A_i & 0 & -B_i \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A_{i+1} & -B_{i+1} \end{bmatrix}$$

Получаем пучок $\tilde{A}_0 - \lambda \tilde{B}_0$ такой, что

$$\tilde{A}_0 = T_0 \begin{pmatrix} L_0^{2^k} & \\ & I \end{pmatrix} S, \quad \tilde{B}_0 = T_0 \begin{pmatrix} I & \\ & \left(L_\infty^{-1}\right)^{2^k} \end{pmatrix} S.$$

Дихотомия мнимой осью для матриц с большой нормой

Пучок

$$\tilde{A}_0 = T_0 \begin{pmatrix} L_0^{2^k} & \\ & I \end{pmatrix} S, \quad \tilde{B}_0 = T_0 \begin{pmatrix} I & \\ & (L_\infty^{-1})^{2^k} \end{pmatrix} S.$$

отличается от пучка

$$A_0 = T \begin{pmatrix} \Lambda & \\ & I \end{pmatrix} S, \quad B_0 = T \begin{pmatrix} I & \\ & M \end{pmatrix} S,$$

только левой приводящей матрицей, так как

$$\Lambda = \Lambda_0 = L_0^{2^k}, \quad M = \Lambda_\infty^{-1} = (L_\infty^{2^k})^{-1}.$$

Но критерий дихотомии относительно единичной окружности

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A - e^{i\varphi} B)^{-1} (ACA^* + BCB^*)(A - e^{i\varphi} B)^{-*} d\varphi$$

от этой матрицы не зависит.

Дихотомия мнимой осью для матриц с большой нормой

Задана матрица A, $\|A\| >> 1$.
1. Выбрать k из условия $2^k \approx 2\|A\|$.
2. Присвоить $A_{-k} = e^{\tau A}$, где $\tau = 2^{-k}$, $B_{-k} = I$.
3. Применить k раз ортогональные исключения к матричному пучку $A_{-k} - \lambda B_{-k}$:

$$\begin{pmatrix} -B_j & A_j & 0 \\ A_j & 0 & -B_j \end{pmatrix} = \mathcal{Q}_j \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & A_{j+1} & -B_{j+1} \end{pmatrix}.$$

Результат — матричный пучок $\tilde{A}_0 - \lambda \tilde{B}_0$.
4. Примененить Алгоритм 1 к пучку $\tilde{A}_0 - \lambda \tilde{B}_0$.

Дихотомия мнимой осью спектра матриц с большой нормой

Обычная схема алгоритма дихотомии
мнимой осью:

$A_0 = \mathsf{exp}(\tau A)$, $\omega_0 = 1$
Цикл $j = 0, 1, \ldots$

$$A_j - \lambda B_j \overset{QR}{\Rightarrow} A_{j+1} - \lambda B_{j+1}$$

$\omega_j \Rightarrow \omega_{j+1}$

При этом

$$(\lambda(A_j, B_j))^2 = \lambda(A_{j+1}, B_{j+1})$$

Дихотомия мнимой осью спектра матриц с большой нормой

Обычная схема алгоритма дихотомии мнимой осью:

$A_0 = \exp(\tau A)$, $\omega_0 = 1$
Цикл $j = 0, 1, \ldots$

$$A_j - \lambda B_j \overset{QR}{\Rightarrow} A_{j+1} - \lambda B_{j+1}$$

$\omega_j \Rightarrow \omega_{j+1}$

При этом

$$(\lambda(A_j, B_j))^2 = \lambda(A_{j+1}, B_{j+1})$$

Модификация алгоритма дихотомии мнимой осью:

$A_{-k} = \exp(A/2^k)$,
Цикл $j = -k, -k+1, \ldots, -1$

$$A_j - \lambda B_j \overset{QR}{\Rightarrow} A_{j+1} - \lambda B_{j+1}$$

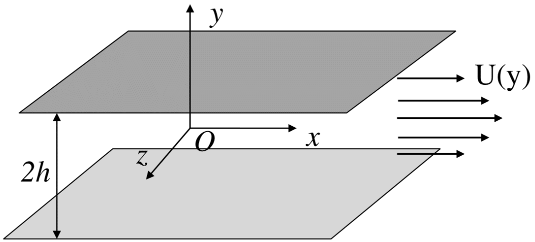
При этом

$$(\lambda(A_0, B_0))^2 = \exp(\lambda(A))$$

Далее обычный алгоритм дихотомии единичной окружностью:
$\omega_0 = 1$
Цикл $j = 0, 1, \ldots$

$$A_j - \lambda B_j \overset{QR}{\Rightarrow} A_{j+1} - \lambda B_{j+1}$$

Пример линейной дихотомии спектра матрицы с большой нормой.



Скорость $\vec{U}(\vec{r})$ и давление $P(\vec{r})$ установившегося течения, а также результат их возмущения $\vec{U}_1(\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r}) + \vec{u}(\vec{r}, t)$ и $P_1(\vec{r}) = P(\vec{r}) + p(\vec{r}, t)$ удовлетворяют уравнениям Навье-Стокса. Разность двух этих систем после отбрасывания квадратичных членов представляет собой линейную систему для возмущений установившегося течения. Она должна быть дополнена условиями на плоскостях ограничивающих течение, а именно условиями прилипания и непротекания.

Турбулентность

– явление, заключающееся в том, что, обычно, при увеличении скорости течения жидкости или газа в среде самопроизвольно образуются многочисленные волны различных размеров, без наличия внешних, случайных, возмущающих среду сил и/или при их присутствии. Волны появляются случайно, и их амплитуда меняется хаотически в некотором интервале. Они возникают чаще всего либо на границе, у стенки, и/или при разрушении или опрокидывании волны. Количественные условия перехода к турбулентности были экспериментально открыты английским физиком и инженером О. Рейнольдсом в 1883 году при изучении течения воды в трубах.

Пример.

Для изучения условий роста возмущений рассматриваются частные решения вида

$$\{u, v, w, p\} = \{\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y), \hat{p}(y)\}e^{i[(\alpha x+\beta z)-wt]},$$

Очевидно, что частное решение растет, если $\operatorname{Im} w > 0$ или $\operatorname{Im} \alpha < 0$ или $\operatorname{Im} \beta < 0$. При подстановке решений в описанную выше линейную систему уравнений получается, в частности, уравнение Орра-Зоммерфельда

$$\left\{ i(\alpha U - w)\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right) - i\alpha U'' - \frac{1}{Re}\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)^2 \right\}\hat{v} = 0,$$

где $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $Re = UL/\nu$ — число Рейнольдса, U, L — характерные скорость и длина рассматриваемого течения, ν —кинематический коэффициент вязкости среды. Профиль установившегося течения как правило принимается квадратичным $U(y) = 1 - y^2$ (течение Пуазейля). Условия прилипания и непротекания влекут за собой краевые условия для $\hat{v}$:

$$\hat{v}|_{y=\pm 1} = 0, \qquad \hat{v}'|_{y=\pm 1} = 0.$$

Пример.

Дискретизация дифференциальных операторов с учетом краевых условий приводит к дискретному уравнению Орра-Зоммерфельда

$$\{(\mathrm{D}_\mathrm{N}^2 - \mathrm{k}^2\mathrm{I}_\mathrm{N})^2 - \mathrm{i}\mathrm{Re}[\mathrm{diag}(\alpha\mathrm{U} - \mathrm{w})(\mathrm{D}_\mathrm{N}^2 - \mathrm{k}^2\mathrm{I}_\mathrm{N}) - \mathrm{diag}(\alpha\mathrm{U}'')]\}\hat{\mathrm{v}} = 0,$$

которое равносильно алгебраической задаче на собственные значения

$$(\mathrm{A} - (\omega_\mathrm{i} - \mathrm{i}\omega_\mathrm{r})\mathrm{B})\hat{\mathrm{v}} = 0,$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\mathrm{Re}}(\mathrm{D}_\mathrm{N}^2 - \mathrm{k}^2\mathrm{I})^2 - \mathrm{i}\alpha\mathrm{diag}\mathrm{U}(\mathrm{D}_\mathrm{N}^2 - \mathrm{k}^2\mathrm{I}) - 2\mathrm{i}\alpha\mathrm{I}, \qquad \mathrm{B} = (\mathrm{D}_\mathrm{N}^2 - \mathrm{k}^2\mathrm{I})$$

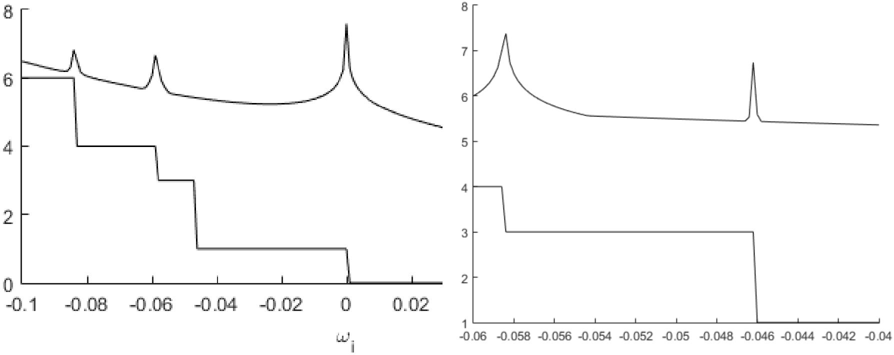
или

$$(\widetilde{\mathrm{A}} - \widetilde{\omega}\mathrm{I})\hat{\mathrm{v}} = 0, \text{ где } \widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}, \quad \widetilde{\omega} = -\mathrm{i}\omega = \omega_\mathrm{i} - \mathrm{i}\omega_\mathrm{r}.$$

Чтобы установить, устойчиво течение Пуазейля или нет, необходимо определить, есть ли в правой полуплоскости собственные значения матрицы $\widetilde{\mathrm{A}}$.

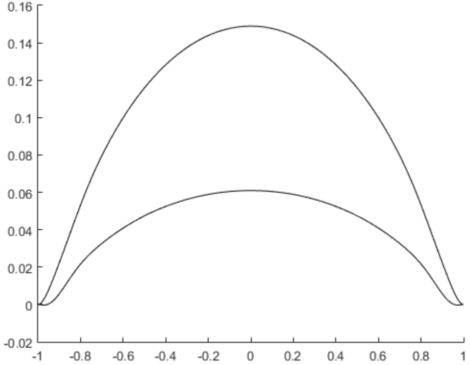
Пример.

$\mathrm{Re} = 5900,\ \alpha = 1.02,\ \beta = 0,\ \mathrm{N} = 50$



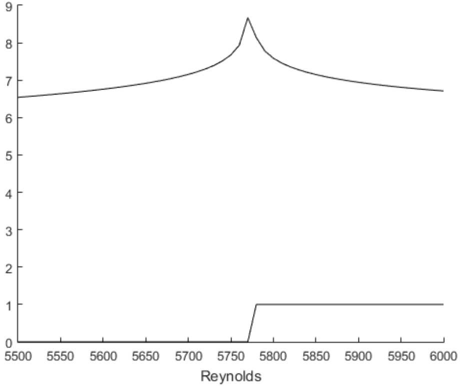
$\log_{10} \|\mathrm{H}(\widetilde{\mathrm{A}} - \omega_{\mathrm{i}}\mathrm{I})\|$ (кривая), $\mathrm{trP}(\widetilde{\mathrm{A}} - \omega_{\mathrm{i}}\mathrm{I})$ (ломаная)

Пример.



Вещественная и мнимая части собственной функции $\hat{\mathrm{v}}(\mathrm{y})$ оператора Орра-Зоммерфельда, соответствующей неустойчивому собственному значению ω ($\mathrm{Im}\omega > 0$) при $\mathrm{Re} = 5900$, $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$, $\mathrm{N} = 50$.

Пример.



спектральный портрет в зависимости от числа Рейнольдса при $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$, $\mathrm{N} = 50$, $\log_{10} \|\mathrm{H}(\widetilde{\mathrm{A}}(\mathrm{Re}))\|$ (кривая), $\mathrm{tr}\mathrm{P}(\widetilde{\mathrm{A}}(\mathrm{Re}))$ (ломаная).
Полученные результаты полностью соответсвуют известному факту, что плоско-параллельное течение Пуазейля теряет устойчивость при $\mathrm{Re} = 5772.22$, $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$.