Разностные уравнения

Бибердорф Э.А.

Скалярные уравнения

Уравнение первого порядка записывается так:

$$u_{i+1} - au_i = 0.$$

Нетрудно определить, что любое его решение можно получить следующим образом

$$u_k = au_{k-1} = a(au_{k-2}) = \dots = a^{k-1}u_1 = a^k u_0.$$

Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами высокого порядка

$$a_0 u_k + a_1 u_{k+1} + \dots + a_n u_{k+n} = f_k.$$

Характеристическое уравнение:

$$a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n = 0.$$

Общее решение:

$$u_k = \sum_{j=1}^{n} C_j \lambda_j^k$$

Матричная форма разностных уравнений

$$au_k + bu_{k+1} + cu_{k+2} = 0, \qquad a \neq 0, c \neq 0$$

Запишем два последовательных разностных уравнения второго порядка

$$au_{2k-1} + bu_{2k} + cu_{2k+1} = 0$$

$$au_{2k} + bu_{2k+1} + cu_{2k+2} = 0$$

Мы можем переписать их в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2k+1} \\ u_{2k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Обозначим

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad -B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ b & c \end{bmatrix}, \quad U_{k+1} = \begin{bmatrix} u_{2k+1} \\ u_{2k+2} \end{bmatrix}, \quad U_k = \begin{bmatrix} u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$AU_k - BU_{k+1} = 0 \;\Rightarrow\; U_k = (B^{-1}A)^k U_0.$$

Матричная форма разностных уравнений

$$a_0 u_k + a_1 u_{k+1} + \cdots + a_{n-1} u_{k+n-1} + a_n u_{k+n} = 0.$$

Введем матрицы и векторы

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & \\ & a_0 & \dots & a_{n-2} & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_0 \end{bmatrix}, \quad -B = \begin{bmatrix} a_n & & & \\ a_{n-1} & a_n & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

$$U_k = \begin{bmatrix} u_{nk} \\ u_{nk+1} \\ \vdots \\ u_{n(k+1)-1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AU_k - BU_{k+1} = 0.$$

Краевые задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \mathrm{a}\mathrm{u}_\mathrm{k} + \mathrm{b}\mathrm{u}_{\mathrm{k}+1} + \mathrm{c}\mathrm{u}_{\mathrm{k}+2} = 0, \\ \mathrm{u}_0 = \varphi, \quad \mathrm{u}_{2\mathrm{N}} = \psi. \end{cases}$$

В матрично-векторном виде:

$$\begin{cases} \mathrm{A}\mathrm{U}_\mathrm{k} - \mathrm{B}\mathrm{U}_{\mathrm{k}+1} = 0 \\ \mathrm{L}\mathrm{U}_0 = \varphi, \quad \mathrm{R}\mathrm{U}_\mathrm{N} = \psi, \end{cases}$$

где

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Подставляем общее решение в граничные условия:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{R}(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A})^\mathrm{N} \end{bmatrix} \mathrm{U}_0 = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}.$$

Решение краевой задачи существует и единственно при любых φ и ψ тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{bmatrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{R}(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A})^\mathrm{N} \end{bmatrix} \neq 0$$

Метод удвоения для решения краевых задач

Обозначим $A_0 = A$, $B_0 = B$. Тогда два последовательных уравнения

$$A_0 U_j - B_0 U_{j+1} = 0$$

$$A_0 U_{j+1} - B_0 U_{j+2} = 0$$

можно записать в блочно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} A_0 & -B_0 & 0 \\ 0 & A_0 & -B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ U_{j+1} \\ U_{j+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Переставим столбцы

$$\begin{bmatrix} -B_0 & A_0 & 0 \\ A_0 & 0 & -B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j+1} \\ U_j \\ U_{j+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Метод удвоения для решения краевых задач

$$\begin{bmatrix} -B_0 & A_0 & 0 \\ A_0 & 0 & -B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j+1} \\ U_j \\ U_{j+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

К матрице системы применим qr-разложение:

$$\mathrm{qr} \begin{bmatrix} -B_0 & A_0 & 0 \\ A_0 & 0 & -B_0 \end{bmatrix} = \mathcal{Q}_0 \begin{bmatrix} F_1 & \tilde{A}_1 & \tilde{B}_1 \\ 0 & A_1 & -B_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F_1 & \tilde{A}_1 & \tilde{B}_1 \\ 0 & A_1 & -B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j+1} \\ U_j \\ U_{j+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A_1 U_j - B_1 U_{j+2} = 0,$$

Метод удвоения для решения краевых задач

Аналогичным образом из уравнений

$$A_1 U_j - B_1 U_{j+2} = 0$$

$$A_1 U_{j+2} - B_1 U_{j+4} = 0$$

исключаются слагаемые с U_{j+2} при помощи qr-разложения блочной матрицы

$$\mathrm{qr}\begin{bmatrix} -B_1 & A_1 & 0 \\ A_1 & 0 & -B_1 \end{bmatrix} = \mathcal{Q}_1 \begin{bmatrix} F_2 & \tilde{A}_2 & \tilde{B}_2 \\ 0 & A_2 & -B_2 \end{bmatrix}.$$

В результате чего получаем уравнения

$$A_2 U_j - B_2 U_{j+4} = 0.$$

Продолжая таким образом, через n шагов будет получена система, в которую входят только U_0 и U_N, где $N = 2^n$. Если для этих векторов имели место краевые условия, то в итоге мы получаем систему небольшого размера относительно неизвестных U_0 и U_N, которая может быть легко разрешена:

$$\begin{cases} A_n U_0 - B_n U_N = 0 \\ LU_0 = \varphi, RU_N = \psi \end{cases}$$

Метод удвоения для решения краевых задач

Остальные неизвестные U_j можно найти, используя матрицы $F_k, \tilde{A}_k, \tilde{B}_k$. Действительно,

$$U_{N/2} = -F_n^{-1}(\tilde{A}_n U_0 + \tilde{B}_n U_N),$$
$$U_{N/4} = -F_{n-1}^{-1}(\tilde{A}_{n-1} U_0 + \tilde{B}_{n-1} U_{N/2}),\; U_{3N/4} = -F_{n-1}^{-1}(\tilde{A}_{n-1} U_{N/2} + \tilde{B}_{n-1} U_N),$$
$$\vdots$$
$$U_{2j+1} = -F_1^{-1}(\tilde{A}_1 U_{2j} + \tilde{B}_1 U_{2(j+1)}),\; j = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1.$$

Краевые задачи на числовой оси. Разрешимость однородной задачи

Lemma

Однородная краевая задача

$$\begin{cases} U_{j+1}^{[\text{од}]} = AU_j^{[\text{од}]}, \\ \|U_j^{[\text{од}]}\| \le C < \infty, \quad -\infty < j < \infty \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда среди собственных значений матрицы A есть такие, модуль которых равен единице.

Доказательство следует из представления общего решения однородных разностных уравнений в виде $U_j^{[\text{од}]} = A^j U_0^{[\text{од}]}$. Решение уравнения будет нетривиальным в случае $\|U_0^{[\text{од}]}\| \neq 0$ и ограниченным, если вектор $U_0^{[\text{од}]}$ является линейной комбинацией собственных векторов, соответствующих собственным значениям $|\lambda(A)| = 1$. В противном случае нетривиальных решений однородной задачи нет.

Краевые задачи на числовой оси. Единственность

Lemma

Решения краевой задачи

$$\begin{aligned} &U_{k+1} = AU_k + f_k, \qquad \|f_k\| \le C \le \infty, \\ &\|U_k\| \le C \le \infty \quad , \quad -\infty < k < \infty. \end{aligned}$$

единственно тогда и только тогда, когда собственные значения матрицы A не лежат на единичной окружности

$$|\lambda_i(A)| \ne 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Краевые задачи на числовой оси. Функция Грина

$$
\begin{aligned}
&U_{k+1} = AU_k + f_k, \qquad \|f_k\| \leq C \leq \infty, \\
&\|U_k\| \leq C \leq \infty \quad , \quad -\infty < k < \infty.
\end{aligned}
$$

Разрешимость этой задачи связана с существованием функции Грина, которая является решением следующей задачи

$$
\begin{aligned}
&G_{k+1,j} = AG_{k,j}, \qquad j \neq k, \ \text{однородное уравнение} \\
&G_{k+1,k} = AG_{k,k} + I, \ \text{условие «разрыва»} \\
&\|G_{k,j}\| \leq C \leq \infty \ \text{условие ограниченности.}
\end{aligned}
$$

Если матричная разностная функция существует, то

$$
U_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} G_{k,j} f_j .
$$

Однородное уравнение

Пусть среди собственных значений матрицы A нет равных 1 по модулю. Тогда

$$A = T\begin{bmatrix}\Lambda_0 & 0\\ 0 & \Lambda_\infty\end{bmatrix}T^{-1}, \qquad |\lambda_j(\Lambda_0)| < 1, \qquad |\lambda_j(\Lambda_\infty)| > 1.$$

Так как $G_{k+1,j} = AG_{k,j}, \qquad j \neq k$, то

$$G_{k,j} = \begin{cases} A^{k-j}C, k > j\\ A^{k-j}D, k \leq j\end{cases}$$

или

$$G_{k,j} = \begin{cases} T\begin{bmatrix}\Lambda_0^{k-j-1} & 0\\ 0 & \Lambda_\infty^{k-j-1}\end{bmatrix}T^{-1}C, k > j\\ T\begin{bmatrix}\Lambda_0^{k-j} & 0\\ 0 & \Lambda_\infty^{k-j}\end{bmatrix}T^{-1}D, k \leq j\end{cases}$$

Условие ограниченности

Чтобы упростить запись, введем обозначения

$$\tilde{C} = T^{-1}C = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22}, \end{bmatrix}, \qquad \tilde{D} = T^{-1}D = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{bmatrix}.$$

С ними функция Грина приобретает вид

$$G_{k,j} = \begin{cases} T \begin{bmatrix} \Lambda_0^{k-j-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_\infty^{k-j-1} \end{bmatrix} \tilde{C}, k > j \\ T \begin{bmatrix} \Lambda_0^{k-j} & 0 \\ 0 & \Lambda_\infty^{k-j} \end{bmatrix} \tilde{D}, k \leq j \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} T \begin{bmatrix} \Lambda_0^{k-j-1}\tilde{C}_{11} & \Lambda_0^{k-j-1}\tilde{C}_{12} \\ \Lambda_\infty^{k-j-1}\tilde{C}_{21} & \Lambda_\infty^{k-j-1}\tilde{C}_{22}, \end{bmatrix}, k > j \\ \\ T \begin{bmatrix} \Lambda_0^{k-j}\tilde{D}_{11} & \Lambda_0^{k-j}\tilde{D}_{12} \\ \Lambda_\infty^{k-j}\tilde{D}_{21} & \Lambda_\infty^{k-j}\tilde{D}_{22} \end{bmatrix}, k \leq j \end{cases}$$

Условие ограниченности

$$G_{k,j} = \begin{cases} T \begin{bmatrix} \Lambda_0^{k-j-1}\tilde{C}_{11} & \Lambda_0^{k-j-1}\tilde{C}_{12} \\ \Lambda_\infty^{k-j-1}\tilde{C}_{21} & \Lambda_\infty^{k-j-1}\tilde{C}_{22}, \end{bmatrix}, k > j \\ \\ T \begin{bmatrix} \Lambda_0^{k-j}\tilde{D}_{11} & \Lambda_0^{k-j}\tilde{D}_{12} \\ \Lambda_\infty^{k-j}\tilde{D}_{21} & \Lambda_\infty^{k-j}\tilde{D}_{22} \end{bmatrix}, k \le j \end{cases}$$

Учтем условие ограниченности функции Грина. Для этого необходимо

$$\tilde{C}_{21} = 0, \quad \tilde{C}_{22} = 0, \quad \tilde{D}_{11} = 0, \quad \tilde{D}_{12} = 0,$$

то есть

$$G_{k,j} = \begin{cases} T \begin{bmatrix} \Lambda_0^{k-j-1}\tilde{C}_{11} & \Lambda_0^{k-j-1}\tilde{C}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, k > j \\ \\ T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Lambda_\infty^{k-j}\tilde{D}_{21} & \Lambda_\infty^{k-j}\tilde{D}_{22} \end{bmatrix}, k \le j \end{cases}$$

Условие «разрыва»

Подставим полученный вид функции Грина в условие «разрыва»

$$G_{k+1,k} - AG_{k,k} = I.$$

Получаем следующее

$$T\begin{bmatrix}\tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix} - T\begin{bmatrix}0 & 0\\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22}\end{bmatrix} = I \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix}\tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12}\\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix} T^{-1}$$

или

$$C = T\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} T^{-1}, \qquad D = T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix} T^{-1}.$$

Функция Грина

В итоге мы построили функцию Грина

$$G_{k,j} = \begin{cases} T \begin{bmatrix} \Lambda_0^{k-j-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}, k > j \\ T \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \Lambda_\infty^{k-j} \end{bmatrix} T^{-1}, k \leq j \end{cases}$$

или

$$G_{k} = \begin{cases} T \begin{bmatrix} \Lambda_0^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}, k > 0 \\ T \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \Lambda_\infty^{k} \end{bmatrix} T^{-1}, k \leq 0 \end{cases}$$

Существование и единственность

При построении мы использовали условие отсутствия собственных значений матрицы A на единичной окружности. Если бы это условие не было выполнено, причем среди собственных значений были бы кратные, то функции Грина не существовало бы.

Если среди собственных значений матрицы A,лежащих на единичной окружности, нет кратных, то невозможно однозначно определить представление матрицы A в клеточно-диагональном виде. Таким образом функция Грина тоже будет в этом случае не единственной.

При условии же разделения собственных значений A единичной окружностью, функция Грина существует (см. выше) и единственна. Единственность доказывается от противного.

Численный критерий разрешимости задачи

Задачу

$$\begin{array}{ll} U_{k+1} = AU_k + f_k, & \|f_k\| \le C \le \infty, \\ \|U_k\| \le C \le \infty \quad , & -\infty < k < \infty. \end{array}$$

можно представить как

$$\mathcal{L}U = f,$$

где U и f принадлежат пространству ограниченных дискретных вектор-функций. Норма в таком пространстве определяется следующим образом

$$\|U\| = \max_k \|U_k\|, \qquad \|f\| = \max_k \|f_k\|,$$

а $\mathcal{L}$ - линейный оператор, действующий в этом пространстве. Тогда равенство

$$U_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} G_{k,j} f_j.$$

представляет собой действие обратного оператора

$$U = \mathcal{L}^{-1} f.$$

Численный критерий разрешимости задачи

$$U = \mathcal{L}^{-1} f.$$

Это интегральный оператор, действующий в дискретном пространстве. Функция Грина - это ядро данного интегрального оператора. Так как

$$\|U\| = \max_k \|U_k\| = \max_k \|\sum_j G_{k-j} f_j\| \le \max_k \|f_k\| \sum_j \|G_j\| = \|f\| \sum_j \|G_j\|.$$

Величину $\sum_j \|G_j\|$ можно использовать в качестве нормы оператора $\mathcal{L}^{-1}$ и в качестве критерия разрешимости краевой задачи:
Если $\sum_j \|G_j\| < \infty$, то решение существует и единственно.
Заметим, что аналогичным свойством обладает величина

$$\|H\| = \|\sum_j G_j^* G_j\| \le \sum_j \|G_j\|^2.$$

Таким образом $\|H\|$ является критерием разрешимости краевой задачи или, что то же самое, отсутствия собственных значений матрицы A на единичной окружности.

Обобщения

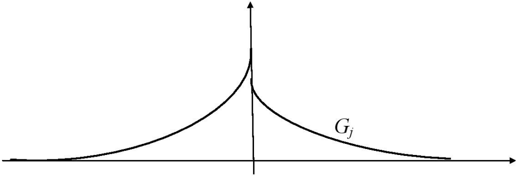
Функция Грина краевой задачи для краевой задачи на бесконечной прямой для матричного разностного уравнения

$$\mathrm{AU_j - BU_{j+1} = 0}, \qquad \|\mathrm{U_j}\| \to 0 \quad \text{for} \quad \mathrm{j} \to \pm\infty$$

определяется следующим образом:
Определение. Матричную последовательность $\mathrm{G_k}$, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{cases} \mathrm{AG_j - BG_{j+1} = 0}, & (-\infty < \mathrm{j} \le -1,\ +0 \le \mathrm{j} < +\infty) \\ \mathrm{G_{+0} - G_{-0} = I}, & \\ \|\mathrm{G_j}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{j} \to \infty, & \end{cases}$$

назовем матричной функцией Грина.



Обобщения

$$\begin{cases} AG_j - BG_{j+1} = 0, & (-\infty < j \le -1, \ +0 \le j < +\infty) \\ G_{+0} - G_{-0} = I, & \\ \|G_j\| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty, & \end{cases}$$

Theorem

Если матричный пучок $A - \lambda B$ регулярен на единичной окружности, то матричная функция Грина существует и единственна.

Доказательство

$$G_j = \begin{cases} S \begin{pmatrix} \Lambda^{|j|} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}, & j \ge +0; \\ S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M^{|j|} \end{pmatrix} S^{-1}, & j \le -0. \end{cases}$$

$\diamond$

Замечание.$G_{+0} = P, \ \ G_{-0} = -(I - P).$

Функция Грина и критерий дихотомии

Theorem

Верно равество

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathrm{A} - e^{i\varphi}\mathrm{B})^{-*}(\mathrm{A}^*\mathrm{C}\mathrm{A} + \mathrm{B}^*\mathrm{C}\mathrm{B})(\mathrm{A} - e^{i\varphi}\mathrm{B})^{-1} d\varphi =$$

$$= \mathrm{G}_{+0}^*\mathrm{C}\mathrm{G}_{+0} + \mathrm{G}_{-0}^*\mathrm{C}\mathrm{G}_{-0} + 2\sum_{|j|=1}^{\infty} \mathrm{G}_j^*\mathrm{C}\mathrm{G}_j.$$

Theorem

Для функции Грина имеет место оценка

$$\|\mathrm{G}_{\pm j}\| \le \sqrt{\|\mathrm{C}^{-1}\|\|\mathrm{H}\|}\kappa^j, \text{ где } \kappa = \sqrt{\frac{\|\mathrm{C}^{-1}\|\|\mathrm{H}\| - 1}{\|\mathrm{C}^{-1}\|\|\mathrm{H}\| + 1}}.$$

Функция Грина и критерий дихотомии

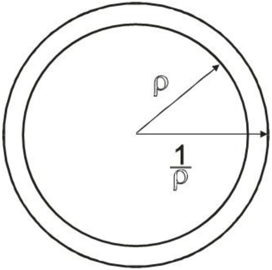
Theorem

Для функции Грина имеет место оценка

$$\|G_{\pm j}\| \le \sqrt{\|C^{-1}\|\|H\|}\kappa^{j},\ \text{где } \kappa = \sqrt{\frac{\|C^{-1}\|\|H\|-1}{\|C^{-1}\|\|H\|+1}}.$$

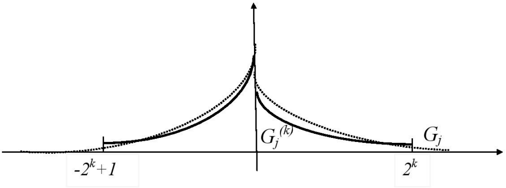
Следствие. Если $\|H\|$ – конечна, то от точек спектра пучка $A - \lambda B$ свободно кольцо с внутренним радиусом ρ и внешним радиусом $1/\rho$, где

$$\rho = \kappa = \sqrt{\frac{\|C^{-1}\|\|H\|-1}{\|C^{-1}\|\|H\|+1}},$$



Приближенная функция Грина, приближенная матрица H

$$\begin{cases} AG_j^{(k)} - BG_{j+1}^{(k)} = 0, \\ -2^k \le j \le -0, \\ +0 \le j \le 2^k - 1, \\ G_{+0}^{(k)} - G_{-0}^{(k)} = I, \\ AG_{2^k}^{(k)} - BG_{-2^k+1}^{(k)} = 0, \end{cases}$$



Матричные функции G_j and $G_j^{(k)}$ близки причем разница между ними оценивается через величину бесконечных "хвостов"функции Грина G_j "обрезанных"при переходе к конечномерной системе

Theorem

$$\|G_j - G_j^{(k)}\| \le \max_{-2^k+1 \le j \le 2^k} \sum_{i=1}^{\infty} \left\| G_{\pm((2^{k+1}+1)i+|j|)} \right\| .$$

Приближенная функция Грина, приближенная матрица H

Следствие

$$\max_{-J+1\le j\le J} \|G_j - G_j^{(k)}\| \le 2\sqrt{\|C^{-1}\|\|H\|}\frac{\kappa^{J+1}}{1-\kappa^{2J+1}}, \qquad J = 2^k.$$

Приближенная матрица H:

$$H^{(k+1)} = G_{+0}^{(k)}CG_{+0}^{(k)*} + G_{-0}^{(k)}CG_{-0}^{(k)*} + 2\left[\sum_{j=-2^k+1}^{-1} + \sum_{j=1}^{2^k}\right] G_j^{(k)}CG_j^{(k)*}$$

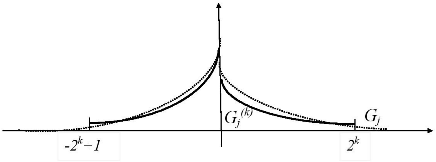
Theorem

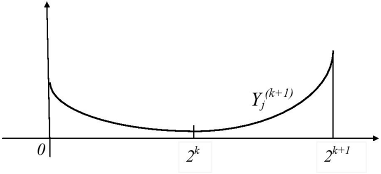
$$\|H - H^{(k+1)}\| \le 2\mu(C)\|H\|\kappa^{2J}(7\|C\|\|H\| + 16J + 2), \text{ где } J = 2^k$$

Перенумерация

$$\begin{aligned} Y_j^{(k+1)} &= G_j^{(k)}, \qquad +0 \le j \le 2^k; \\ Y_{2^k+j}^{(k+1)} &= G_{-2^k+j}^{(k)}, \quad 1 \le j \le 2^k. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} AG_j^{(k)} - BG_{j+1}^{(k)} = 0, \\ G_{+0}^{(k)} - G_{-0}^{(k)} = I, \\ AG_{2^k}^{(k)} - BG_{-2^k+1}^{(k)} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} AY_j^{(k+1)} - BY_{j+1}^{(k+1)} = 0, \quad 0 \le j < 2^{k+1}, \\ Y_0^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = I. \end{cases}$$





Приближенная функция Грина, приближенная матрица H

Тогда

$$H^{(k+1)} = G_{+0}^{(k)} C G_{+0}^{(k)*} + G_{-0}^{(k)} C G_{-0}^{(k)*} + 2\left[\sum_{j=-2^k+1}^{-1} + \sum_{j=1}^{2^k}\right] G_j^{(k)} C G_j^{(k)*}$$

$$= Y_0^{(k+1)} C Y_0^{(k+1)*} + Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} C Y_{2^{k+1}}^{(k+1)*} + 2\sum_{j=1}^{2^{k+1}-1} Y_j^{(k+1)} C Y_j^{(k+1)*}.$$