Уравнения Ляпунова

Бибердорф Э.А.

Theorem (Теорема Шура)

Для каждой квадратной матрицы A существует такая ортогональная матрица U ($\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{U}^*$), что матрица $\mathrm{B} = \mathrm{U}^*\mathrm{AU}$– нижняя треугольная. Причем собственные значения могут располагаться на диагонали матрицы B в произвольном порядке.

Theorem (Критерий разрешимости уравнения Сильвестра)

Если спектры матриц A и B не имеют общих точек $\sigma(\mathrm{A}) \cap \sigma(\mathrm{B}) = \emptyset$, то для любой матрицы G существует единственное решение уравнения Сильвестра.

Уравнение Ляпунова

$$XA + A^*X + C = 0$$

Theorem (Ляпунова)

Если спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$, матрица C – самосопряженная $C = C^*$, то существует единственное решение уравнения Ляпунова $X = X^*$.

Lemma

Если спектр матрицы A лежит строго в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\ \lambda_j < 0$, то уравнение Ляпунова $XA + A^*X + C = 0$ имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$X = \int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA} dt$$

или

$$X = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} (i\xi I - A)^{-*} C (i\xi I - A)^{-1} d\xi.$$

Обращение теоремы Ляпунова

Theorem (Оценка решения дифференциального уравнения)

Если существуют матрицы $C = C^* > 0$ и $X = X^* > 0$, которые удовлетворяют уравнению Ляпунова $XA + A^*X + C = 0$, то произвольное решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\|^2 \leq \mu(X)e^{-\alpha t}\|x(0)\|^2, \qquad \frac{1}{\|C^{-1}\|\|X\|} = \alpha.$$

Оценка решения дифференциального уравнения

Доказательство. Из того, что матрицы X и C удовлетворяют уравнению Ляпунова

$$XA + A^*X + C = 0,$$

а x(t) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

следует равенство

$$\frac{d}{dt}(Xx(t), x(t)) = \left(X\frac{d}{dt}x(t), x(t)\right) + \left(Xx(t), \frac{d}{dt}x(t)\right) =$$

$$= (XAx(t), x(t)) + (Xx(t), Ax(t)) = ((XA + A^*X)x(t), x(t)) = -(Cx(t), x(t))$$

или

$$\frac{d}{dt}(Xx(t), x(t)) = -(Cx(t), x(t))$$

Оценка решения дифференциального уравнения

Из сингулярного разложения $X = X^* > 0$

$$X = U \begin{pmatrix} \sigma_n & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_1 \end{pmatrix} U^*, \qquad UU^* = I$$

следует

$$\sigma_{\mathsf{max}} = \|X\| = \sup_{x \neq 0} \frac{(Xx, x)}{\|x\|^2}$$

и

$$\sigma_{\mathsf{min}} = \|X^{-1}\|^{-1} = \inf_{x \neq 0} \frac{(Xx, x)}{\|x\|^2}$$

Следовательно

$$(Xx, x) \leq \|X\| \|x\|^2$$

$$\frac{1}{\|C^{-1}\|} \|x\|^2 \leq (Cx, x)$$

Оценка решения дифференциального уравнения

Так как $\alpha = \frac{1}{\|C^{-1}\|\|X\|}$, то

$$\alpha(Xx, x) \le \alpha\|X\|\|x\|^2 \le \frac{1}{\|C^{-1}\|}\|x\|^2 = \sigma_{\mathsf{min}}(C)\|x\|^2 \le (Cx, x)$$

На этом основании получаем

$$\frac{d}{dt}[e^{\alpha t}(Xx(t), x(t))] = e^{\alpha t}\left(\frac{d}{dt}(Xx(t), x(t)) + \alpha(Xx(t), x(t))\right) =$$

$$= e^{\alpha t}\left(-(Cx(t), x(t)) + \alpha(Xx(t), x(t))\right) \le 0.$$

Оценка решения дифференциального уравнения

Интегрирование оценки

$$\frac{d}{dt}[e^{\alpha t}(Xx(t), x(t))] \leq 0$$

дает неравенство

$$e^{\alpha t}(Xx(t), x(t)) \leq (Xx(0), x(0)).$$

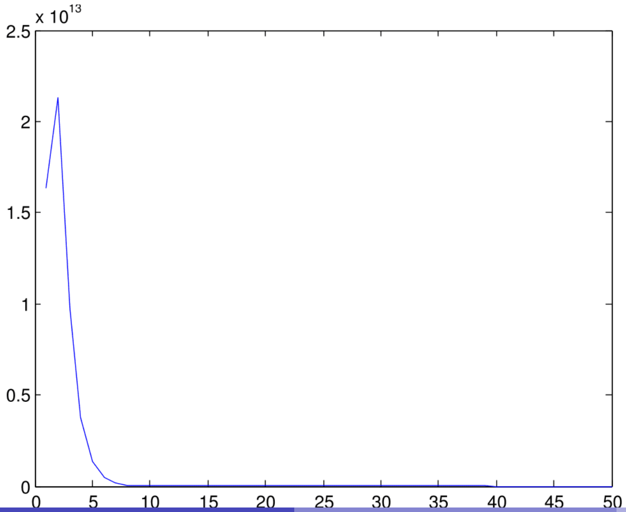
Усилим неравенство

$$\sigma_{\mathsf{min}}(X)\|x(t)\|^2 \leq (Xx(t), x(t)) \leq e^{-\alpha t}(Xx(0), x(0)) \leq e^{-\alpha t}\|X\|\|x(0)\|^2,$$

откуда следует утверждение теоремы $\diamond$

Оценка решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad \|x(t)\|^2 \leq \mu(X)e^{-\alpha t}\|x(0)\|^2$$



Theorem (Обращение теоремы Ляпунова)

Если существуют матрицы $C = C^* > 0$ и $X = X^* > 0$, которые удовлетворяют уравнению Ляпунова $XA + A^*X + C = 0$, то то спектр матрицы A лежит строго в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda_j(A) < 0$.

Упражнение. Доказать с использованием предыдущей теоремы.

Дискретное уравнение Ляпунова

$$X - A^*XA = C$$

Theorem

Если все точки спектра матрицы A лежат строго внутри единичного круга $|\lambda_j(A)| < 1$, то для любой матрицы C существует единственное решение уравнения X.

Упражнение. Доказать теорему в случае, когда среди собственных значений матрицы A нет нулевых $\lambda_j \neq 0$, используя критерий Сильвестра.

Дискретное уравнение Ляпунова

$$X - A^*XA = C$$

Упражнение. Подстановкой в уравнение проверить, что если матрица A нильпотентна ($A^N = 0$), то решение имеет вид

$$C + A^*CA + (A^*)^2CA^2 + \cdots + (A^*)^{N-1}CA^{N-1}.$$

Пусть матрица A клеточно-треугольная

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det A_{11} \neq 0, \qquad A_{22} \text{ -- нильпотентна.}$$

Представим решение и правую часть в виде блочных матриц

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Дискретное уравнение Ляпунова

Распишем уравнение $X - A^*XA = C$ поблочно:

$X_{11} - A_{11}^* X_{11} A_{11} = C_{11}$

$X_{12} - A_{12}^* X_{11} A_{12} - A_{11}^* X_{12} A_{22} = C_{12}$

$X_{21} - A_{12}^* X_{11} A_{11} - A_{22}^* X_{21} A_{11} = C_{21}$

$X_{22} - A_{12}^* X_{11} A_{12} - A_{22}^* X_{21} A_{12} - A_{12}^* X_{12} A_{22} - A_{22}^* X_{22} A_{22} = C_{22}$

Дискретное уравнение Ляпунова

Распишем уравнение $X - A^*XA = C$ поблочно:

$$\underline{X_{11}} - \underline{A_{11}^* X_{11} A_{11}} = C_{11}$$

$$\underline{X_{12}} - A_{12}^* X_{11} A_{12} - \underline{A_{11}^* X_{12} A_{22}} = C_{12}$$

$$\underline{X_{21}} - A_{12}^* X_{11} A_{11} - \underline{A_{22}^* X_{21} A_{11}} = C_{21}$$

$$\underline{X_{22}} - A_{12}^* X_{11} A_{12} - A_{22}^* X_{21} A_{12} - A_{12}^* X_{12} A_{22} - \underline{A_{22}^* X_{22} A_{22}} = C_{22}$$

Дискретное уравнение Ляпунова

Распишем уравнение $X - A^*XA = C$ поблочно:

$$\underline{X_{11}} - \underline{A_{11}^* X_{11} A_{11}} = C_{11}$$

$$\underline{X_{12}} - A_{12}^* X_{11} A_{12} - \underline{A_{11}^* X_{12} A_{22}} = C_{12}$$

$$\underline{X_{21}} - A_{12}^* X_{11} A_{11} - \underline{A_{22}^* X_{21} A_{11}} = C_{21}$$

$$\underline{X_{22}} - A_{12}^* X_{11} A_{12} - A_{22}^* X_{21} A_{12} - A_{12}^* X_{12} A_{22} - \underline{A_{22}^* X_{22} A_{22}} = C_{22}$$

$$X_{11} - A_{11}^* X_{11} A_{11} = C_{11}$$

$$X_{12} - A_{11}^* X_{12} A_{22} = C_{12} + A_{12}^* X_{11} A_{12}$$

$$X_{21} - A_{22}^* X_{21} A_{11} = C_{21} + A_{12}^* X_{11} A_{11}$$

$$X_{22} - A_{22}^* X_{22} A_{22} = C_{22} + A_{12}^* X_{11} A_{12} + A_{22}^* X_{21} A_{12} + A_{12}^* X_{12} A_{22}$$

Дискретное уравнение Ляпунова

Распишем уравнение $X - A^*XA = C$ поблочно:

$\underline{X_{11}} - \underline{A_{11}^* X_{11} A_{11}} = C_{11}$

$\underline{X_{12}} - A_{12}^* X_{11} A_{12} - \underline{A_{11}^* X_{12} A_{22}} = C_{12}$

$\underline{X_{21}} - A_{12}^* X_{11} A_{11} - \underline{A_{22}^* X_{21} A_{11}} = C_{21}$

$\underline{X_{22}} - A_{12}^* X_{11} A_{12} - A_{22}^* X_{21} A_{12} - A_{12}^* X_{12} A_{22} - \underline{A_{22}^* X_{22} A_{22}} = C_{22}$

$X_{11} - A_{11}^* X_{11} A_{11} = C_{11}$ – уравнение Ляпунова с невырожденной матрицей.

$(A_{11}^*)^{-1} X_{12} - X_{12} A_{22} = (A_{11}^*)^{-1} C_{12} + (A_{11}^*)^{-1} A_{12}^* X_{11} A_{12}$ – уравнение Сильвестра

$X_{21} A_{11}^{-1} - A_{22}^* X_{21} = C_{21} A_{11}^{-1} + A_{12}^* X_{11}$ – уравнение Сильвестра

$X_{22} - A_{22}^* X_{22} A_{22} = C_{22} + A_{12}^* X_{11} A_{12} + A_{22}^* X_{21} A_{12} + A_{12}^* X_{12} A_{22}$ – уравнение Ляпунова с нильпотентной матрицей.

Дискретное уравнение Ляпунова

Упражнение. Доказать теорему о разрешимости дискретного уравнения ляпунова в общем случае, используя теорему Шура.

Решение дискретного уравнения Ляпунова

Lemma

Если спектр матрицы A лежит строго внутри единичного круга $\lambda_j(A) \leq \rho < 1$, то решение дискретного уравнения Ляпунова

$$X - A^*XA = C$$

представимо в виде ряда

$$X = C + A^*CA + (A^*)^2CA^2 + \ldots$$

Решение дискретного уравнения Ляпунова

Доказательство. Пусть контур γ представляет собой окружность $\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Тогда функция степени матрицы A выражается в виде интеграла по γ

$$\mathrm{A}^{\mathrm{k}} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma}\lambda^{\mathrm{k}}(\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi\mathrm{i}}(\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^{\mathrm{k}}(\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\sqrt{\rho}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

Так как на окружности γ резольвента матрицы A ограничена некой константой

$$\|(\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\| \le \mathrm{K},$$

то степень матрицы ограничивается следующей величиной

$$\|\mathrm{A}^{\mathrm{k}}\| \le \mathrm{K}\rho^{(\mathrm{k}+1)/2}.$$

Это означает, что ряд $\sum(\mathrm{A}^*)^{\mathrm{k}}\mathrm{C}\mathrm{A}^{\mathrm{k}}$ сходится, т.к.

$$\|(\mathrm{A}^*)^{\mathrm{k}}\mathrm{C}\mathrm{A}^{\mathrm{k}}\| \le \|\mathrm{C}\|\|\mathrm{A}^{\mathrm{k}}\|^2 \le \mathrm{K}\|\mathrm{C}\|\rho^{\mathrm{k}+1}$$

Решение дискретного уравнения Ляпунова

То, что ряд
$$X = C + A^*CA + (A^*)^2CA^2 + \ldots$$
является решением дискретного уравнения Ляпунова
$$X - A^*XA = C$$
проверяется непосредственной подстановкой.
$\diamond$
Упражнение. Показать, что решение дискретного уравнения Ляпунова может быть представлено в интегральном виде:
$$X = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{-i\varphi}I - A^*)^{-1}C(e^{i\varphi}I - A)^{-1}d\varphi$$

Обращение теоремы Ляпунова в дискретном случае

Theorem

Если существуют самосопряженные положительно определенные матрицы $C = C^* > 0, \; X = X^* > 0$ такие, что выполнено равенство

$$X - A^*XA = C,$$

то спектр матрицы A полностью лежит внутри единичного круга

$$|\lambda_j(A)| < 1.$$

Доказательство. Пусть λ и v – собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы A: $Av = \lambda v$. Тогда из уравнения Ляпунова следует, что

$$(A^*XAv, v) = (Xv, v) - (Cv, v)$$

Обращение теоремы Ляпунова в дискретном случае

Theorem

Если существуют самосопряженные положительно определенные матрицы $C = C^* > 0,\ X = X^* > 0$ такие, что выполнено равенство

$$X - A^*XA = C,$$

то спектр матрицы A полностью лежит внутри единичного круга

$$|\lambda_j(A)| < 1.$$

Доказательство. Пусть λ и v – собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы A: $Av = \lambda v$. Тогда из уравнения Ляпунова следует, что

$$(XAv, Av) = (A^*XAv, v) = (Xv, v) - (Cv, v)$$

Обращение теоремы Ляпунова в дискретном случае

Theorem

Если существуют самосопряженные положительно определенные матрицы $\mathrm{C} = \mathrm{C}^* > 0,\ \mathrm{X} = \mathrm{X}^* > 0$ такие, что выполнено равенство

$$\mathrm{X} - \mathrm{A}^*\mathrm{X}\mathrm{A} = \mathrm{C},$$

то спектр матрицы A полностью лежит внутри единичного круга

$$|\lambda_{\mathrm{j}}(\mathrm{A})| < 1.$$

Доказательство. Пусть λ и v – собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы A: $\mathrm{Av} = \lambda\mathrm{v}$. Тогда из уравнения Ляпунова следует, что

$$(\mathrm{X}\lambda\mathrm{v}, \lambda\mathrm{v}) = (\mathrm{XAv}, \mathrm{Av}) = (\mathrm{A}^*\mathrm{XAv}, \mathrm{v}) = (\mathrm{Xv}, \mathrm{v}) - (\mathrm{Cv}, \mathrm{v})$$

Обращение теоремы Ляпунова в дискретном случае

Theorem

Если существуют самосопряженные положительно определенные матрицы $C = C^* > 0, \ X = X^* > 0$ такие, что выполнено равенство

$$X - A^*XA = C,$$

то спектр матрицы A полностью лежит внутри единичного круга

$$|\lambda_j(A)| < 1.$$

Доказательство. Пусть λ и v – собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы A: $Av = \lambda v$. Тогда из уравнения Ляпунова следует, что

$$|\lambda|^2(Xv, v) = (X\lambda v, \lambda v) = (XAv, Av) = (A^*XAv, v) = (Xv, v) - (Cv, v)$$

Отсюда и из положительной определенности матриц X и C получаем

$$(1 - |\lambda|^2)(Xv, v) = (Cv, v) > 0, \ \text{или } |\lambda| < 1$$

чтд

Оценка решения разностного уравнения

Theorem

Если существуют самосопряженные положительно определенные матрицы $C = C^* > 0, \ X = X^* > 0$ такие, что выполнено равенство

$$X - A^*XA = C,$$

то решение разностного уравнения

$$x_{k+1} = Ax_k$$

удовлетворяет оценке

$$\|x_k\| \le (1-\alpha)^{k/2} \sqrt{\mu(X)} \|x_0\|, \text{ где } \alpha = \frac{1}{\|C^{-1}\| \|X\|}$$

Оценка решения разностного уравнения

Доказательство.
Используя уравнения и свойства матриц X и C, получим следующую цепочку:

$$0 \le (Xx_k, x_k) = (XAx_{k-1}, Ax_{k-1}) = (A^*XAx_{k-1}, x_{k-1}) =$$

$$= (Xx_{k-1}, x_{k-1}) - (Cx_{k-1}, x_{k-1}) \le (Xx_{k-1}, x_{k-1}) - \frac{1}{\|C^{-1}\|\|X\|}(Xx_{k-1}, x_{k-1})$$

Отсюда получаем, во-первых, $\|C^{-1}\|\|X\| > 1$, а во-вторых,

$$(Xx_k, x_k) \le \left(1 - \frac{1}{\|C^{-1}\|\|X\|}\right)^k (Xx_0, x_0)$$

Так как

$$\frac{\|x_k\|^2}{\|X^{-1}\|^{-1}} \le (Xx_0, x_0) \le \|X\|\|x_k\|^2,$$

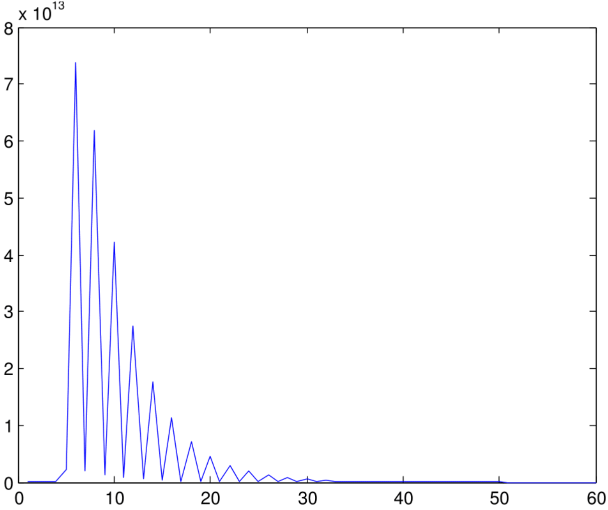
то окончательная оценка принимает вид

$$\|x_k\| \le \left(1 - \frac{1}{\|C^{-1}\|\|X\|}\right)^{k/2} \sqrt{\|X\|\|X^{-1}\|}\|x_0\|.$$

Тем самым теорема доказана. ◇

Оценка решения разностного уравнения

$$x_{k+1} = Ax_k, \qquad \|x_k\| \leq (1-\alpha)^{k/2}\sqrt{\mu(X)}\|x_0\|$$



Оценка решения разностного уравнения

Оценка

$$\|x_k\| \leq (1-\alpha)^{k/2}\sqrt{\mu(X)}\|x_0\|, \quad x_{k+1} = Ax_k, \quad X - A^*XA = C$$

для решения разностного уравнения, использующая решение X дискретного уравнения Ляпунова является аналогом оценки решения дифференциального уравнения

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\mu(X)}e^{-\alpha t/2}\|x(0)\|, \quad \frac{dx}{dt} = Ax, \quad XA + A^*X + C = 0,$$

где X – решение непрерывного уравнения Ляпунова.

Связь решений уравнений Ляпунова

$XA + A^*X + C = 0$ – непрерывное уравнение Ляпунова
$X = \int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA} dt$ – решение уравнение Ляпунова
Введем матрицы

$$B = e^{\tau A}, \qquad F = \int_0^\tau e^{tA^*} C e^{tA} dt$$

Рассмотрим дискретное уравнение Ляпунова $Y - B^*YB = F$.
Тогда $X = Y$. Действительно,

$$Y = \sum_{k=0}^\infty (B^*)^k F B^k = \sum_{k=0}^\infty e^{k\tau A^*} \left(\int_0^\tau e^{tA^*} C e^{tA} dt \right) e^{k\tau A} =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \left(\int_0^\tau e^{(t+k\tau)A^*} C e^{(t+k\tau)A} dt \right) = \sum_{k=0}^\infty \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} e^{tA^*} C e^{tA} dt = \int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA} dt =$$
$$= X$$