Дихотомия спектра единичной окружностью

Бибердорф Э.А.

Критерий разрешимости краевой задачи

Задачу

$$U_{k+1} = AU_k + f_k, \qquad \|f_k\| \leq C \leq \infty,$$
$$\|U_k\| \leq C \leq \infty \quad , \quad -\infty < k < \infty.$$

можно представить как

$$\mathcal{L}U = f,$$

где U и f принадлежат пространству ограниченных дискретных вектор-функций. Норма в таком пространстве определяется следующим образом

$$\|U\| = \max_k \|U_k\|, \qquad \|f\| = \max_k \|f_k\|,$$

а $\mathcal{L}$ - линейный оператор, действующий в этом пространстве. Тогда равенство

$$U_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} G_{k,j} f_j.$$

представляет собой действие обратного оператора

$$U = \mathcal{L}^{-1} f.$$

Численный критерий разрешимости задачи

$$U = \mathcal{L}^{-1} f.$$

Это интегральный оператор, действующий в дискретном пространстве. Функция Грина - это ядро данного интегрального оператора. Так как

$$\|U\| = \max_k \|U_k\| = \max_k \|\sum_j G_{k-j} f_j\| \leq \max_k \|f_k\| \sum_j \|G_j\| = \|f\| \sum_j \|G_j\|.$$

Величину $\sum_j \|G_j\|$ можно использовать в качестве нормы оператора $\mathcal{L}^{-1}$ и в качестве критерия разрешимости краевой задачи:
Если $\sum_j \|G_j\| < \infty$, то решение существует и единственно.
Заметим, что аналогичным свойством обладает величина

$$\|H\| = \|\sum_j G_j^* G_j\| \leq \sum_j \|G_j\|^2.$$

Таким образом $\|H\|$ является критерием разрешимости краевой задачи или, что то же самое, отсутствия собственных значений матрицы A на единичной окружности.

Обобщения

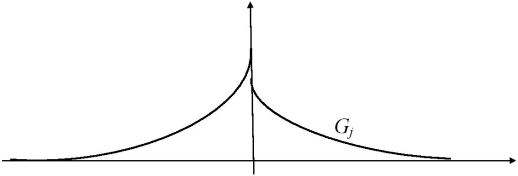
Функция Грина краевой задачи для краевой задачи на бесконечной прямой для матричного разностного уравнения

$$\mathrm{AU_j - BU_{j+1} = 0}, \qquad \|\mathrm{U_j}\| \to 0 \quad \text{for} \quad \mathrm{j} \to \pm\infty$$

определяется следующим образом:
Определение. Матричную последовательность $\mathrm{G_k}$, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{cases} \mathrm{AG_j - BG_{j+1} = 0}, & (-\infty < \mathrm{j} \le -1,\ +0 \le \mathrm{j} < +\infty) \\ \mathrm{G_{+0} - G_{-0} = I}, & \\ \|\mathrm{G_j}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{j} \to \infty, & \end{cases}$$

назовем матричной функцией Грина.



Обобщения

$$\begin{cases} \mathrm{AG_j - BG_{j+1}} = 0, & (-\infty < \mathrm{j} \le -1,\ +0 \le \mathrm{j} < +\infty) \\ \mathrm{G_{+0} - G_{-0} = I}, & \\ \|\mathrm{G_j}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{j} \to \infty, & \end{cases}$$

Theorem

Если матричный пучок $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{B}$ регулярен на единичной окружности, то матричная функция Грина существует и единственна.

Доказательство

$$\mathrm{G_j} = \begin{cases} \mathrm{S} \begin{pmatrix} \Lambda^{|\mathrm{j}|} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{S}^{-1}, & \mathrm{j} \ge +0; \\ \mathrm{S} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{M}^{|\mathrm{j}|} \end{pmatrix} \mathrm{S}^{-1}, & \mathrm{j} \le -0. \end{cases}$$

◇

Замечание.$\mathrm{G_{+0} = P}, \ \ \mathrm{G_{-0} = -(I - P)}$.

Функция Грина и критерий дихотомии

Theorem

Верно равество

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathrm{A} - e^{i\varphi}\mathrm{B})^{-*}(\mathrm{A}^*\mathrm{C}\mathrm{A} + \mathrm{B}^*\mathrm{C}\mathrm{B})(\mathrm{A} - e^{i\varphi}\mathrm{B})^{-1} d\varphi =$$

$$= \mathrm{G}_{+0}^*\mathrm{C}\mathrm{G}_{+0} + \mathrm{G}_{-0}^*\mathrm{C}\mathrm{G}_{-0} + 2\sum_{|j|=1}^{\infty} \mathrm{G}_j^*\mathrm{C}\mathrm{G}_j.$$

Theorem

Для функции Грина имеет место оценка

$$\|\mathrm{G}_{\pm j}\| \le \sqrt{\|\mathrm{C}^{-1}\|\|\mathrm{H}\|}\kappa^j, \text{ где } \kappa = \sqrt{\frac{\|\mathrm{C}^{-1}\|\|\mathrm{H}\| - 1}{\|\mathrm{C}^{-1}\|\|\mathrm{H}\| + 1}}.$$

Функция Грина и критерий дихотомии

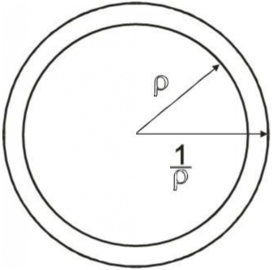
Theorem

Для функции Грина имеет место оценка

$$\|G_{\pm j}\| \leq \sqrt{\|C^{-1}\|\|H\|}\kappa^{j}, \text{ где } \kappa = \sqrt{\frac{\|C^{-1}\|\|H\| - 1}{\|C^{-1}\|\|H\| + 1}}.$$

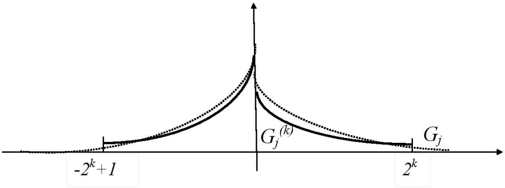
Следствие. Если $\|H\|$ – конечна, то от точек спектра пучка $A - \lambda B$ свободно кольцо с внутренним радиусом ρ и внешним радиусом $1/\rho$, где

$$\rho = \kappa = \sqrt{\frac{\|C^{-1}\|\|H\| - 1}{\|C^{-1}\|\|H\| + 1}},$$



Приближенная функция Грина, приближенная матрица H

$$\begin{cases} AG_j^{(k)} - BG_{j+1}^{(k)} = 0, \\ -2^k \le j \le -0, \\ +0 \le j \le 2^k - 1, \\ G_{+0}^{(k)} - G_{-0}^{(k)} = I, \\ AG_{2^k}^{(k)} - BG_{-2^k+1}^{(k)} = 0, \end{cases}$$



Матричные функции G_j and $G_j^{(k)}$ близки причем разница между ними оценивается через величину бесконечных "хвостов"функции Грина G_j "обрезанных"при переходе к конечномерной системе

Theorem

$$\|G_j - G_j^{(k)}\| \le \max_{-2^k+1 \le j \le 2^k} \sum_{i=1}^{\infty} \left\| G_{\pm((2^{k+1}+1)i+|j|)} \right\|.$$

Приближенная функция Грина, приближенная матрица H

Следствие

$$\max_{-J+1\le j\le J}\|G_j - G_j^{(k)}\| \le 2\sqrt{\|C^{-1}\|\|H\|}\,\frac{\kappa^{J+1}}{1-\kappa^{2J+1}}, \qquad J = 2^k.$$

Приближенная матрица H:

$$H^{(k+1)} = G_{+0}^{(k)}CG_{+0}^{(k)*} + G_{-0}^{(k)}CG_{-0}^{(k)*} + 2\left[\sum_{j=-2^k+1}^{-1} + \sum_{j=1}^{2^k}\right] G_j^{(k)}CG_j^{(k)*}$$

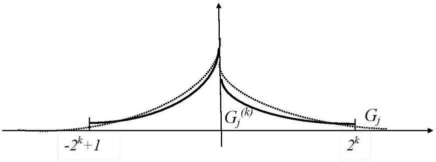
Theorem

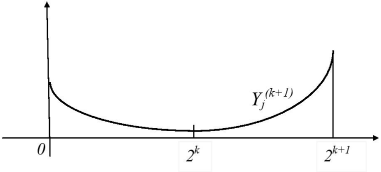
$$\|H - H^{(k+1)}\| \le 2\mu(C)\|H\|\kappa^{2J}(7\|C\|\|H\| + 16J + 2),\ \text{где } J = 2^k$$

Перенумерация

$$
\begin{aligned}
Y_j^{(k+1)} &= G_j^{(k)}, &\quad +0 \le j \le 2^k;\\
Y_{2^k+j}^{(k+1)} &= G_{-2^k+j}^{(k)}, &\quad 1 \le j \le 2^k.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
AG_j^{(k)} - BG_{j+1}^{(k)} = 0,\\
G_{+0}^{(k)} - G_{-0}^{(k)} = I,\\
AG_{2^k}^{(k)} - BG_{-2^k+1}^{(k)} = 0,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
AY_j^{(k+1)} - BY_{j+1}^{(k+1)} = 0, \quad 0 \le j < 2^{k+1},\\
Y_0^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = I.
\end{cases}
$$





Приближенная функция Грина, приближенная матрица H

Тогда

$$H^{(k+1)} = G_{+0}^{(k)} C G_{+0}^{(k)*} + G_{-0}^{(k)} C G_{-0}^{(k)*} + 2 \left[\sum_{j=-2^k+1}^{-1} + \sum_{j=1}^{2^k} \right] G_j^{(k)} C G_j^{(k)*}$$

$$= Y_0^{(k+1)} C Y_0^{(k+1)*} + Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} C Y_{2^{k+1}}^{(k+1)*} + 2 \sum_{j=1}^{2^{k+1}-1} Y_j^{(k+1)} C Y_j^{(k+1)*}.$$

Простой случай (1)

$$\begin{cases} AG_{+0}^{(0)} - BG_1^{(0)} = 0, \\ G_{+0}^{(0)} - G_{-0}^{(0)} = I, \\ AG_1^{(0)} - BG_{-0}^{(0)} = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} AY_j^{(1)} - BY_{j+1}^{(1)} = 0, \quad j = 0, 1, \\ Y_0^{(1)} - Y_2^{(1)} = I. \end{cases}$$

Следовательно грубое приближение матрицы H есть

$$H^{(1)} = G_{+0}^{(0)} C G_{+0}^{(0)*} + G_{-0}^{(0)} C G_{-0}^{(0)*} + 2G_1^{(0)} C G_1^{(0)*} =$$

$$= Y_0^{(1)} C Y_0^{(1)*} + 2Y_1^{(1)} C Y_1^{(1)*} + Y_2^{(1)} C Y_2^{(1)*}$$

Самый простой случай (0)

$$\begin{cases} AY_0^{(0)} - BY_1^{(0)} = 0, \\ Y_0^{(0)} - Y_1^{(0)} = I. \end{cases}$$

Отсюда

$$Y_0^{(0)} = -(A-B)^{-1}A, \qquad Y_1^{(0)} = -(A-B)^{-1}B$$

Самое грубое приближение матрицы H есть

$$H^{(0)} = Y_0^{(0)} C Y_0^{(0)*} + Y_1^{(0)} C Y_1^{(0)*} =$$

$$= (A-B)^{-1}(ACA^* + BCB^*)(A-B)^{-*}$$

Связь случаев (1) и (0)

Обозначим

$$\mathrm{U}^{(1)} = \mathrm{Y}_0^{(1)} - \mathrm{Y}_1^{(1)}, \qquad \mathrm{V}^{(1)} = \mathrm{Y}_1^{(1)} - \mathrm{Y}_2^{(1)}$$

Заметим, что

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{AY}_0^{(1)} - \mathrm{BY}_1^{(1)} = 0, \\ \mathrm{AY}_1^{(1)} - \mathrm{BY}_2^{(1)} = 0, \\ \mathrm{Y}_0^{(1)} - \mathrm{Y}_2^{(1)} = \mathrm{I}. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}\left(\mathrm{Y}_0^{(1)} - \mathrm{Y}_1^{(1)}\right) - \mathrm{B}\left(\mathrm{Y}_1^{(1)} - \mathrm{Y}_2^{(1)}\right) = 0, \\ \mathrm{Y}_0^{(1)} \pm \mathrm{Y}_1^{(1)} - \mathrm{Y}_2^{(1)} = \mathrm{I}. \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{AU}^{(1)} - \mathrm{BV}^{(1)} = 0, \\ \mathrm{U}^{(1)} + \mathrm{V}^{(1)} = \mathrm{I}. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathrm{U}^{(1)} = (\mathrm{A}+\mathrm{B})^{-1}\mathrm{B}, \\ \mathrm{V}^{(1)} = (\mathrm{A}+\mathrm{B})^{-1}\mathrm{A}. \end{array}$$

Связь случаев (1) и (0)

Разобьем систему для $Y_j^{(1)}$ на две половинки:

$$\begin{cases} AY_0^{(1)} - BY_1^{(1)} = 0, \\ AY_1^{(1)} - BY_2^{(1)} = 0, \\ Y_0^{(1)} - Y_2^{(1)} = I. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AY_0^{(1)} - BY_1^{(1)} = 0, \\ Y_0^{(1)} - Y_1^{(1)} = U^{(1)} \end{cases} \begin{cases} AY_1^{(1)} - BY_2^{(1)} = 0, \\ Y_1^{(1)} - Y_2^{(1)} = V^{(1)} \end{cases}$$

Сравним каждую из половинок с системой для $Y_j^{(0)}$

$$\begin{cases} AY_0^{(0)} - BY_1^{(0)} = 0, \\ Y_0^{(0)} - Y_1^{(0)} = I \end{cases}$$

Отличие только в правых частях, значит

$$Y_0^{(1)} = Y_0^{(0)} U^{(1)}, \qquad Y_2^{(1)} = Y_2^{(0)} V^{(1)},$$

$$Y_1^{(1)} = Y_1^{(0)} U^{(1)} = Y_0^{(0)} V^{(1)},$$

Связь случаев (1) и (0)

Упражнение. Проверить, что следующие матрицы перестановочны

$$Y_0^{(0)} = -(A - B)^{-1}A, \qquad Y_1^{(0)} = -(A - B)^{-1}B,$$

$$U^{(1)} = (A + B)^{-1}B, \qquad V^{(1)} = (A + B)^{-1}A.$$

Тогда

$$Y_0^{(1)} = U^{(1)}Y_0^{(0)}, \qquad Y_2^{(1)} = V^{(1)}Y_2^{(0)},$$

$$Y_1^{(1)} = U^{(1)}Y_1^{(0)} = V^{(1)}Y_0^{(0)}$$

Связь случаев (1) и (0)

$$\mathrm{H}^{(1)} = \mathrm{Y}_0^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_0^{(1)*} + 2\mathrm{Y}_1^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(1)*} + \mathrm{Y}_2^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_2^{(1)*} =$$

Связь случаев (1) и (0)

$$\mathrm{H}^{(1)} = \mathrm{Y}_0^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_0^{(1)*} + 2\mathrm{Y}_1^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(1)*} + \mathrm{Y}_2^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_2^{(1)*} =$$

$$= \underline{\mathrm{Y}_0^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_0^{(1)*} + \mathrm{Y}_1^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(1)*}} + \underline{\mathrm{Y}_1^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(1)*} + \mathrm{Y}_2^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_2^{(1)*}} =$$

Связь случаев (1) и (0)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}^{(1)} &= \mathrm{Y}_0^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_0^{(1)*} + 2\mathrm{Y}_1^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(1)*} + \mathrm{Y}_2^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_2^{(1)*} = \\
&= \underline{\mathrm{Y}_0^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_0^{(1)*} + \mathrm{Y}_1^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(1)*}} + \underline{\mathrm{Y}_1^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(1)*} + \mathrm{Y}_2^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_2^{(1)*}} = \\
&= \mathrm{U}^{(1)}\mathrm{Y}_0^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_0^{(0)*}\mathrm{U}^{(1)*} + \mathrm{U}^{(1)}\mathrm{Y}_1^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(0)*}\mathrm{U}^{(1)*} + \\
&+ \mathrm{V}^{(1)}\mathrm{Y}_1^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(0)*}\mathrm{V}^{(1)*} + \mathrm{V}^{(1)}\mathrm{Y}_1^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(0)*}\mathrm{V}^{(1)*} =
\end{aligned}
$$

Связь случаев (1) и (0)

$$H^{(1)} = Y_0^{(1)} C Y_0^{(1)*} + 2 Y_1^{(1)} C Y_1^{(1)*} + Y_2^{(1)} C Y_2^{(1)*} =$$

$$= \underline{Y_0^{(1)} C Y_0^{(1)*} + Y_1^{(1)} C Y_1^{(1)*}} + \underline{Y_1^{(1)} C Y_1^{(1)*} + Y_2^{(1)} C Y_2^{(1)*}} =$$

$$= U^{(1)} Y_0^{(0)} C Y_0^{(0)*} U^{(1)*} + U^{(1)} Y_1^{(0)} C Y_1^{(0)*} U^{(1)*} +$$

$$+ V^{(1)} Y_1^{(0)} C Y_1^{(0)*} V^{(1)*} + V^{(1)} Y_1^{(0)} C Y_1^{(0)*} V^{(1)*} =$$

$$= U^{(1)} \left(Y_0^{(0)} C Y_0^{(0)*} + Y_1^{(0)} C Y_1^{(0)*} \right) U^{(1)*} + V^{(1)} \left(Y_1^{(0)} C Y_1^{(0)*} + Y_1^{(0)} C Y_1^{(0)*} \right) V^{(1)*} =$$

Связь случаев (1) и (0)

$$\mathrm{H}^{(1)} = \mathrm{Y}_0^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_0^{(1)*} + 2\mathrm{Y}_1^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(1)*} + \mathrm{Y}_2^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_2^{(1)*} =$$

$$= \underline{\mathrm{Y}_0^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_0^{(1)*} + \mathrm{Y}_1^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(1)*}} + \underline{\mathrm{Y}_1^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(1)*} + \mathrm{Y}_2^{(1)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_2^{(1)*}} =$$

$$= \mathrm{U}^{(1)}\mathrm{Y}_0^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_0^{(0)*}\mathrm{U}^{(1)*} + \mathrm{U}^{(1)}\mathrm{Y}_1^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(0)*}\mathrm{U}^{(1)*} +$$

$$+ \mathrm{V}^{(1)}\mathrm{Y}_1^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(0)*}\mathrm{V}^{(1)*} + \mathrm{V}^{(1)}\mathrm{Y}_1^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(0)*}\mathrm{V}^{(1)*} =$$

$$= \mathrm{U}^{(1)}\left(\mathrm{Y}_0^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_0^{(0)*} + \mathrm{Y}_1^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(0)*}\right)\mathrm{U}^{(1)*} + \mathrm{V}^{(1)}\left(\mathrm{Y}_1^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(0)*} + \mathrm{Y}_1^{(0)}\mathrm{C}\mathrm{Y}_1^{(0)*}\right)\mathrm{V}^{(1)*} =$$

$$= \mathrm{U}^{(1)}\mathrm{H}^{(0)}\mathrm{U}^{(1)*} + \mathrm{V}^{(1)}\mathrm{H}^{(0)}\mathrm{V}^{(1)*}$$

Связь случаев (1) и (0)

Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} AY_0^{(1)} - BY_1^{(1)} = 0, \\ AY_1^{(1)} - BY_2^{(1)} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} A & -B & 0 \\ 0 & A & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_0^{(1)} \\ Y_2^{(1)} \\ Y_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Перестановка:

$$\begin{bmatrix} -B & A & 0 \\ A & 0 & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^{(1)} \\ Y_0^{(1)} \\ Y_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{qr}{\Rightarrow} Q \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A_1 & -B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^{(1)} \\ Y_0^{(1)} \\ Y_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Значит

$$\begin{cases} AY_0^{(1)} - BY_1^{(1)} = 0, \\ AY_1^{(1)} - BY_2^{(1)} = 0, \\ Y_0^{(1)} - Y_2^{(1)} = I, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 Y_0^{(1)} - B_1 Y_2^{(1)} = 0, \\ Y_0^{(1)} - Y_2^{(1)} = I, \end{cases}$$

$$Y_0^{(1)} = -(A_1 - B_1)^{-1} A_1, \qquad Y_2^{(1)} = -(A_1 - B_1)^{-1} B_1$$

Рекуррентные соотношения

Обозначим $U^{(k+1)} = Y_0^{(k+1)} - Y_{2^k}^{(k+1)}$, $\qquad V^{(k+1)} = Y_{2^k}^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)}$

Разобьем систему для $Y_j^{(k+1)}$ на две половинки:

$$\begin{cases} AY_j^{(k+1)} - BY_{j+1}^{(k+1)} = 0, \\ (0 \le j \le 2^{j+1} - 1) \\ Y_0^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = I. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} AY_j^{(k+1)} - BY_{j+1}^{(k+1)} = 0, \\ (0 \le j \le 2^k - 1) \\ Y_0^{(k+1)} - Y_{2^k}^{(k+1)} = U^{k+1}. \end{cases} \\ \\ \begin{cases} AY_j^{(k+1)} - BY_{j+1}^{(k+1)} = 0, \\ (2^k \le j \le 2^{k+1} - 1) \\ Y_{2^k}^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = V^{k+1}. \end{cases} \end{array}$$

Сравним каждую из половинок с системой для $Y_j^{(k)}$ (отличие в правых частях)

$$\begin{cases} AY_j^{(k)} - BY_{j+1}^{(k)} = 0, \\ (0 \le j \le 2^k - 1) \\ Y_0^{(k)} - Y_{2^k}^{(k)} = I \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} Y_j^{(k+1)} = Y_j^{(k)} U^{(k+1)} = U^{(k+1)} Y_j^{(k)}, \\ Y_{2^k+j}^{(k+1)} = Y_j^{(k)} V^{(k+1)} = V^{(k+1)} Y_j^{(k)}, \\ 0 \le j \le 2^k - 1 \end{array}$$

Рекуррентные соотношения

$$H^{(k+1)} = Y_0^{(k+1)} C Y_0^{(k+1)*} + 2 \sum_{j=1}^{2^{k+1}-1} Y_j^{(k+1)} C Y_j^{(k+1)*} + Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} C Y_{2^{k+1}}^{(k+1)*} =$$

$$= Y_0^{(k+1)} C Y_0^{(k+1)*} + 2 \sum_{j=1}^{2^{k}-1} Y_j^{(k+1)} C Y_j^{(k+1)*} + Y_{2^k}^{(k+1)} C Y_{2^k}^{(k+1)*} +$$

$$+ Y_{2^k}^{(k+1)} C Y_{2^k}^{(k+1)*} + 2 \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} Y_j^{(k+1)} C Y_j^{(k+1)*} + Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} C Y_{2^{k+1}}^{(k+1)*} =$$

$$= U^{(k+1)} \left(Y_0^{(k)} C Y_0^{(k)*} + 2 \sum_{j=1}^{2^k-1} Y_j^{(k)} C Y_j^{(k)*} + Y_{2^k}^{(k)} C Y_{2^k}^{(k)*} \right) U^{(k+1)*} +$$

$$+ V^{(k+1)} \left(Y_0^{(k)} C Y_0^{(k)*} + 2 \sum_{j=1}^{2^k-1} Y_j^{(k)} C Y_j^{(k)*} + Y_{2^k}^{(k)} C Y_{2^k}^{(k)*} \right) V^{(k+1)*} =$$

$$= U^{(k+1)} H^{(k)} U^{(k+1)*} + V^{(k+1)} H^{(k)} V^{(k+1)*}$$

Метод удвоений (ортогональных исключений)

Положим $A_0 = A$, $B_0 = B$. Запишем два последовательных уравнения

$$\begin{array}{rlr} A_0 Y_j^{(k+1)} - & B_0 Y_{j+1}^{(k+1)} & = 0, \\ & A_0 Y_{j+1}^{(k+1)} - B_0 Y_{j+2}^{(k+1)} & = 0 \end{array} \quad \overset{\text{искл. } Y_{j+1}^{(k+1)}}{\Rightarrow} \quad A_1 Y_j^{(k+1)} - B_1 Y_{j+2}^{(k+1)} = 0,$$

где

$$\begin{bmatrix} -B_0 & A_0 & 0 \\ A_0 & 0 & -B_0 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A_1 & -B_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rlr} A_1 Y_j^{(k+1)} - & B_1 Y_{j+2}^{(k+1)} & = 0, \\ & A_1 Y_{j+2}^{(k+1)} - B_1 Y_{j+4}^{(k+1)} & = 0 \end{array} \quad \overset{\text{искл. } Y_{j+2}^{(k+1)}}{\Rightarrow} \quad A_2 Y_j^{(k+1)} - B_2 Y_{j+4}^{(k+1)} = 0,$$

где

$$\begin{bmatrix} -B_1 & A_1 & 0 \\ A_1 & 0 & -B_1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A_2 & -B_2 \end{bmatrix}$$

Метод удвоений (ортогональных исключений)

Таким путем получаются системы:

$$\begin{cases} A_{k+1} Y_0^{(k+1)} - B_{k+1} Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = 0, \\ Y_0^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = I, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_k U^{(k+1)} - B_k V^{(k+1)} = 0, \\ U^{(k+1)} + V^{(k+1)} = I. \end{cases}$$

Отсюда

$$Y_0^{(k+1)} = -(A_{k+1} - B_{k+1})^{-1} A_{k+1} = P^{(k+1)},$$

$$Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = -(A_{k+1} - B_{k+1})^{-1} B_{k+1} = P^{(k+1)} - I,$$

$$U^{(k+1)} = (A_k + B_k)^{-1} B_k,$$

$$V^{(k+1)} = (A_k + B_k)^{-1} A_k.$$

Алгоритм дихотомии спектра матричного пучка единичной окружностью

Задано:
матричный пучок $A_0 - \lambda B_0$;
ε_{it} — требуемая точность итерационного процесса;
ω_{max}, μ_{max} — большие положительные числа, $C = C^* > 0$.

Шаг 1
Если $\mu(A_0 - B_0) > \mu_{max}$, то "Дихотомия невозможна ", конец расчетов.

$$H^{(0)} = (A_0 - B_0)^{-1}(A_0 C A_0^* + B_0 C B_0^*)(A_0 - B_0)^{-*}$$

Цикл пока $\|H^{(k)} - H^{(k-1)}\| > \varepsilon_{it}$

Если $\|H^{(k)}\| \geq \omega_{max}$ или $\mu(A_k + B_k) > \mu_{max}$, то "Дихотомия невозможна ", конец расчетов.

$$V^{(k+1)} = (A_k + B_k)^{-1} A_k, \quad U^{(k+1)} = I - V^{(k+1)}$$

$$H^{(k+1)} = U^{(k+1)} H^{(k)} U^{(k+1)*} + V^{(k+1)} H^{(k)} V^{(k+1)*}$$

$$\mathrm{qr}\left(\begin{bmatrix} -B_k & A_k & 0 \\ A_k & 0 & -B_k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A_{k+1} & -B_{k+1} \end{bmatrix}$$

Конец цикла

Одномерные спектральные портреты

Пусть $\gamma(a)$ – однопараметрическое семейство кривых.
График функции $\omega(a) = \|H_{\gamma(a)}(A)\|$ называется одномерным спектральным портретом.

Если $\gamma(r)$ – семейство окружностей с центром в начале координат и радиусом r, тогда $\omega(r) = \|H_{\gamma(r)}(A)\|$ – радиальный спектральный портрет

Те значения параметра, при которых $\|H\|$ велика и график "уходит на бесконечность"могут образовывать целые интервалы, которые называются одномерными спектральными пятнами. Именно внутри этих пятен находятся такие r, что $|\lambda(A)| = r$. Таким образом при помощи радиального портрета выделяются кольца, внутри которых располагается спектр матрицы.

Для визуального анализа удобно изображение графика $\log_{10}\omega(r)$.

Анализ одномерного матричного портрета и приведение матрицы к каноническому виду

Вне спектральных пятен пятен на каждом связном интервале $\omega(\mathrm{r})$ – выпуклая вниз функция. Для всех значений параметра r, принадлежащих одному такому фиксированному интервалу инвариантное подпространство, отвечающее собственным значениям матрицы A, лежащим внутри круга $|\lambda| = \mathrm{r}$, одно и то же. Следовательно проектор $\mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathrm{r})$ на это инвариантное подпространство не зависит от выбора параметра r из данного интервала.

Если выбрать параметры r_1 и r_2 из двух соседних интервалов, где $\|\mathrm{H}_\mathrm{r}\|$ конечна, то разница $\mathrm{P}(\mathrm{r}_2) - \mathrm{P}(\mathrm{r}_1)$ является проектором на нивариантное подпространство матрицы A, соответствующее собственным значениям из спектрального пятна, разделяющего эти интервалы. Таким образом вычисляются проекторы $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\mathrm{k}$ для каждого спектрального пятна. Производится их сингулярное разложение

$$\mathrm{P}_\mathrm{i} = [\mathrm{U}_\mathrm{i} \vdots \mathrm{W}_\mathrm{i}] \begin{bmatrix} \Sigma_\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{V}_\mathrm{i}.$$

Анализ одномерного матричного портрета и приведение матрицы к каноническому виду

$$\mathrm{P_i} = [\mathrm{U_i} \vdots \mathrm{W_i}] \begin{bmatrix} \Sigma_\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{V_i}.$$

Выделяются базисы инвариантных подпространств $\mathrm{U_1}, \ldots, \mathrm{U_k}$, а затем исходная матрица A приводится к клеточно-диагональному виду:

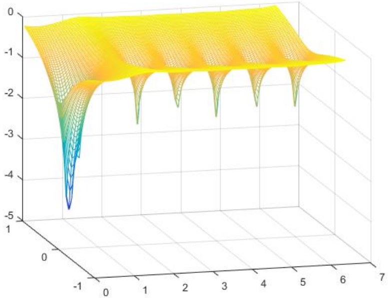
$$\mathrm{A} = [\mathrm{U_1} \vdots \mathrm{U_2} \vdots \ldots \vdots \mathrm{U_k}] \begin{bmatrix} \mathrm{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A_2} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{A_k} \end{bmatrix} [\mathrm{U_1} \vdots \mathrm{U_2} \vdots \ldots \vdots \mathrm{U_k}]^{-1}.$$

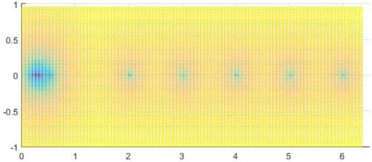
Здесь число диагональных клеток $\mathrm{A_i}$ равно числу спектральных пятен, выделенных при помощи одномерного спектрального портрета, а их размеры равны числу собственных значений в соответствующем спектральном пятне.

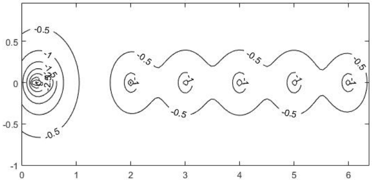
Пример

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

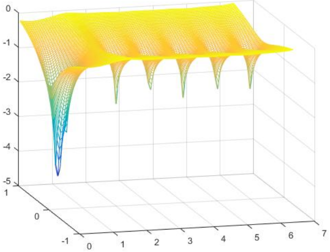
Пример.Спектральный портрет матрицы A

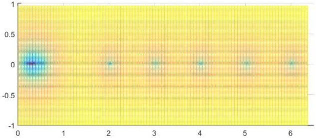


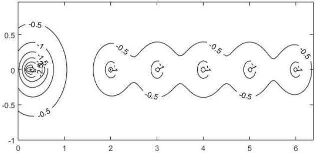


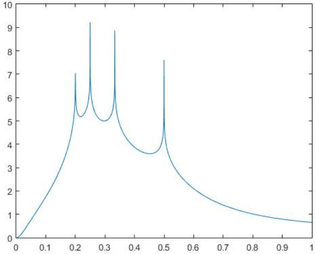


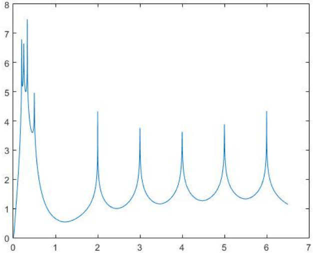
Пример.Спектральный портрет матрицы A



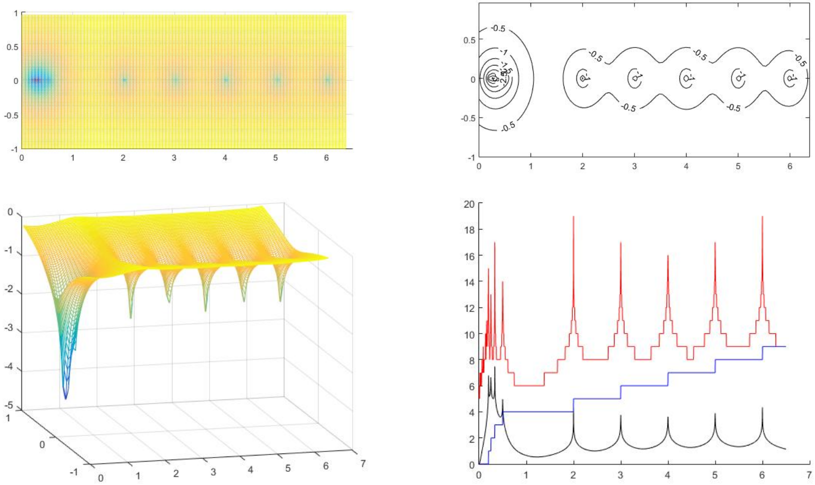




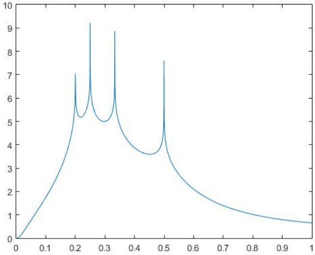


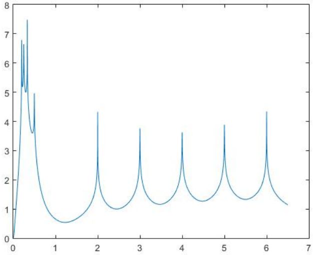


Пример.Спектральный портрет матрицы A



Пример.





Вычисляем проекторы в точках $r = 0.3, 0.4, 1, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5$:

$$P(0.3),\ \ P(0.4),\ \ P(1),\ \ P(2.5),\ \ P(3.5),\ \ P(4.5),\ \ P(5.5).$$

Определяем проекторы на инвариантные подпространства, соответствующие спектральным пятнам

$$P_1 = P(0.3),\ \ P_2 = P(0.4) - P(0.3),\ \ P_3 = P(1) - P(0.4),\ \ P_4 = P(2.5) - P(1),$$

$$P_5 = P(3.5) - P(2.5),\ \ P_6 = P(4.5) - P(3.5),\ \ P_7 = P(5.5) - P(4.5),\ \ P_8 = I - P(5.5)$$

Пример. Проектор

Рассмотрим $P_1 = P(0.3)$.
След $\mathrm{tr}P_1 = 1.99999999998068$
Сингулярное разложение $P_1 = U\Sigma V^*$
Сингулярные числа: $65.58, 1.57, 0.24 \cdot 10^{-13}, 0, 0, \dots, 0$.

$$U = \begin{pmatrix} -0.0001 & 0.0001 & -0.0001 & 0.3955 & 0.1267 & 0.8970 & -0.1498 & 0.0240 & -0.0036 \\ 0.0007 & -0.0006 & 0.0007 & -0.1283 & 0.9755 & -0.1053 & -0.1401 & 0.0239 & -0.0270 \\ -0.0066 & 0.0050 & -0.0056 & 0.0139 & -0.0125 & 0.0023 & -0.0186 & -0.4949 & -0.8685 \\ 0.0487 & -0.0323 & 0.0337 & -0.0348 & -0.0546 & -0.0430 & -0.5229 & -0.7306 & 0.4269 \\ -0.2633 & 0.1359 & -0.1272 & 0.6037 & -0.0486 & -0.3593 & -0.5502 & 0.2812 & -0.1354 \\ 0.8957 & -0.2425 & 0.1811 & 0.2536 & 0.0001 & -0.1310 & -0.0966 & 0.1061 & -0.0640 \\ -0.3547 & -0.7179 & 0.5391 & 0.2109 & 0.0374 & -0.0773 & 0.1172 & -0.0466 & 0.0217 \\ 0.0032 & 0.6231 & 0.6042 & 0.3162 & 0.0815 & -0.0955 & 0.3018 & -0.1747 & 0.0964 \\ 0.0149 & -0.1343 & -0.5424 & 0.5025 & 0.1374 & -0.1456 & 0.5171 & -0.3116 & 0.1748 \end{pmatrix}$$

Пример. Проектор

Рассмотрим $P_4 = P(2.5) - P(1)$.
След $\mathrm{tr}P_4 = 0.999999999927145$
Сингулярное разложение $P_4 = U\Sigma V^*$
Сингулярные числа: $1.19, 0.3 \cdot 10^{-10}, 0.7 \cdot 10^{-12}, 0.4 \cdot 10^{-16}, 0, 0, \dots, 0.$

$$U = \begin{pmatrix}
-0.0023 & 0.0007 & -0.0196 & -0.0072 & 0.8963 & 0.2839 & -0.3352 & 0.0443 & 0.0361 \\
0.0185 & -0.0050 & 0.1149 & -0.0021 & 0.0909 & -0.0871 & 0.0692 & -0.9396 & 0.2881 \\
-0.1111 & 0.0269 & -0.4406 & 0.0075 & -0.3835 & 0.3779 & -0.6809 & -0.1336 & 0.1464 \\
0.4444 & -0.0787 & 0.7675 & 0.0039 & -0.1844 & 0.2058 & -0.3561 & 0.0516 & 0.0380 \\
-0.8887 & -0.0428 & 0.4413 & 0.0010 & -0.0447 & 0.0531 & -0.0906 & 0.0228 & 0.0066 \\
0.0000 & 0.9956 & 0.0922 & 0.0001 & -0.0063 & 0.0077 & -0.0131 & 0.0039 & 0.0008 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9998 & -0.0092 & -0.0099 & -0.0114 & 0.0018 & 0.0012 \\
0 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0021 & 0.0103 & -0.1306 & -0.2206 & -0.2862 & -0.9232 \\
-0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0137 & 0.0714 & -0.8406 & -0.4851 & 0.1108 & 0.2013
\end{pmatrix}$$

Пример. Клеточно-диагональный вид матрицы

$$T = [U_1 \vdots U_2 \vdots \ldots \vdots U_8]$$

$$T^{-1}AT =$$

$$\begin{pmatrix} 0.3056 & 0.4902 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0120 & 0.1444 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$