Проекторы
Задача дихотомии

Бибердорф Э.А.

Проекторы

Определение. Матрица P называется проектором, если $P^2 = P$. Любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ проектор P переводит в некоторый вектор y, который, в свою очередь, переводит в себя:

$$Px = y, \qquad Py = y.$$

Упражнение. Показать, что $I - P$ тоже проектор.

Lemma

Если

$$\mathrm{Image}(P) = \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\mathrm{Image}(I - P) = \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n,$$

то $\mathbb{R}^n = \mathcal{L} \bigoplus \mathcal{M}$

Проекторы

Lemma

Если

$$\mathrm{Image}(P) = \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\mathrm{Image}(I - P) = \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n,$$

то $\mathbb{R}^n = \mathcal{L} \bigoplus \mathcal{M}$

Доказательство. 1)$u = Iu = (I - P)u + Pu = w + v$, $v \in \mathcal{L}$, $w \in \mathcal{M}$.
2)Пусть $v \in \mathcal{L} \bigcap \mathcal{M}$, тогда $v = (I - P)v = (I - P)Pv = (P - P^2)v = 0$. Значит $\mathcal{L} \bigcap \mathcal{M} = 0$. $\diamond$

Проекторы

Lemma

Если

$$\mathrm{Image}(\mathrm{P}) = \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}},$$

$$\mathrm{Image}(\mathrm{I}-\mathrm{P}) = \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}},$$

то $\mathbb{R}^{\mathrm{n}} = \mathcal{L} \bigoplus \mathcal{M}$

Пусть столбцы матрицы T_1 образуют базис в $\mathcal{L}$, столбцы матрицы T_2 образуют базис в $\mathcal{M}$

Упражнение. Имеет место представление

$$\mathrm{P} = [\mathrm{T}_1|\mathrm{T}_2] \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [\mathrm{T}_1|\mathrm{T}_2]^{-1}, \qquad \mathrm{I}-\mathrm{P} = [\mathrm{T}_1|\mathrm{T}_2] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} [\mathrm{T}_1|\mathrm{T}_2]^{-1}$$

Упражнение. Размерность $\mathcal{L}$ равна trP, размерность $\mathcal{M}$ равна $\mathrm{tr}(\mathrm{I}-\mathrm{P})$

Проекторы

Рассмотрим сингулярное разложение проекторов P и $\mathrm{I} - \mathrm{P}$:

$$\mathrm{P} = [\mathrm{U}_1|\mathrm{W}_1] \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{V}_1^*, \qquad \mathrm{I} - \mathrm{P} = [\mathrm{U}_2|\mathrm{W}_2] \begin{pmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{V}_2^*$$

Упражнение. Столбцы матрицы U_1 составляют базис $\mathcal{L}$, столбцы матрицы U_2 составляют базис $\mathcal{M}$.

Инвариантные подпространства

Определение. Подпространство $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ называется инвариантным подпространством линейного оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$.
Так как в $\mathbb{R}^n$ линейный оператор в фиксированном базисе представляется матрицей, то мы будем говорить об инвариантных подпространствах матриц. Если подпространтсво $\mathcal{L}$ является инвариантным подпространством матрицы A, то

$$\mathrm{u} \in \mathcal{L}, \quad \mathrm{Au} = \mathrm{v} \in \mathcal{L}.$$

Представление матрицы

Lemma

Если среди собственных значений квадратной матрицы A есть различные, то она представима в виде

$$A = T \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} T^{-1},$$

причем спектры матриц A_{11} и A_{22} не пересекаются.

Доказательство. 1) По теореме Шура $\exists U$, $UU^* = I$ такая, что

$$A = U \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} U^*,$$

причем спектры матриц A_{11} и A_{22} не пересекаются.

Представление матрицы

Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Упражнение. Проверить, что

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} + XA_{22} - A_{11}X \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

потребуем

$$A_{12} + XA_{22} - A_{11}X = 0$$

По критерию Сильвестра такой X всегда существует. Значит

$$A = T \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} T^{-1}, \qquad T = U \begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Инвариантные подпространства

Пусть матрица A представима в виде

$$A = [T_1|T_2]\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}[T_1|T_2]^{-1},$$

причем спектры подматриц A_1 и A_2 - не пересекаются.
Утверждение. Столбцы матриц T_1 и T_2 образуют базисы инвариантных подпространств матрицы A.
Доказательство. Пусть $v = T_1 c$. Тода

$$Av = [T_1|T_2]\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}[T_1|T_2]^{-1}T_1 c =$$

$$= [T_1|T_2]\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}[T_1|T_2]^{-1}[T_1|T_2]\begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = [T_1|T_2]\begin{bmatrix} A_1 c \\ 0 \end{bmatrix} = T_1 b,$$

где $b = A_1 c$. $\diamond$

Проекторы на инвариантные подпространства

Матрица P является проектором на инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ матрицы A, если для любого вектора $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ верны следующие соотношения:

$$\mathrm{Pu} \in \mathcal{L}, \quad \mathrm{v} = \mathrm{APu} \in \mathcal{L}, \quad \mathrm{Pv} = \mathrm{PAPu} = \mathrm{v}.$$

Значит, $\mathrm{AP} = \mathrm{PAP}$

$\mathrm{A(I - P) = (I - P)A(I - P)} \Leftrightarrow \mathrm{PA = PAP}$

Lemma

P и $\mathrm{I - P}$ – проекторы на инв. подпр-ва $\mathrm{A} \Leftrightarrow$

$$\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}, \qquad \text{и} \qquad \mathrm{PA} = \mathrm{AP}$$

Проекторы на инвариантные подпространства

Lemma

Если матрица P является проектором на инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ матрицы A, то имеют место представление

$$A = [T_1|T_2]\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}[T_1|T_2]^{-1}, \qquad P = [T_1|T_2]\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[T_1|T_2]^{-1},$$

где столбцы матриц T_1 и T_2 образуют базисы инвариантных подпространств матрицы A

Интегральное представление.

Theorem

Пусть γ – замкнутая кривая, охватывающая часть спектра матрицы A, P – проектор на соответствуюшее инвариантное подпространство матрицы A, тогда

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} d\lambda$$

Доказательство.

$$\mathrm{A} = \mathrm{T} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix} \mathrm{T}^{-1},$$

$$\mathrm{T}^{-1} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} d\lambda \mathrm{T} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \begin{pmatrix} \oint_{\gamma} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1)^{-1} d\lambda & 0 \\ 0 & \oint_{\gamma} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_2)^{-1} d\lambda \end{pmatrix}.$$

Интегральное представление.

Так как весть спектр матрицы A_1 полностью лежит внутри γ, то контур можно произвольно растягивать, не изменяя интеграла.
Пусть $|\lambda| = \alpha > \|A_1\|$, тогда

$$(\lambda I - A_1)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}A_1)^{-1} = \frac{1}{\lambda}I + \frac{1}{\lambda^2}A_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^m}A_1^m = \frac{1}{\lambda}I + \Delta(\lambda).$$

$$\|\Delta(\lambda)\| \leq \frac{\|A_1\|}{\alpha^2} \frac{1}{1 - \|A_1\|/\alpha},$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \Delta(\alpha e^{i\varphi}) d(\alpha e^{i\varphi}) \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\|A_1\|}{\alpha^2} \frac{1}{1 - \|A_1\|/\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \to \infty.$$

Интегральное представление.

$$(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathrm{I} + \Delta(\lambda)$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1)^{-1} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\lambda|=\alpha} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1)^{-1} \mathrm{d}\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{d}\varphi}{\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\lambda|=\alpha} \Delta(\lambda) \mathrm{d}\lambda = \mathrm{I}$$

◇

Непрерывность резольвенты матрицы на кривой

Lemma

Предположим, что для определенной кривой γ значение параметра $\mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A})$ конечно, а матрицы A и B – близки:

$$\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\| \le \varepsilon\|\mathrm{A}\|, \qquad \varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A}) < 1, \text{ где } \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\| \max_{\lambda\in\gamma} \|(\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\|.$$

Тогда

$$\|(\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1} - (\lambda\mathrm{I}-\mathrm{B})^{-1}\| \le \frac{\mathrm{m}_\gamma^2\varepsilon}{\|\mathrm{A}\|(1-\varepsilon\mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A}))}.$$

Доказательство. Рассмотрим резольвенту

$$(\lambda\mathrm{I}-\mathrm{B})^{-1} = (\lambda\mathrm{I}-\mathrm{B}\pm\mathrm{A})^{-1} = (\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A}+(\mathrm{A}-\mathrm{B}))^{-1} =$$

$$= \left(\mathrm{I}+(\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right)^{-1}(\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}.$$

Непрерывность резольвенты матрицы на кривой

Т.к. по условию $\|A - B\| \le \varepsilon\|A\|$, $\quad \varepsilon m_\gamma(A) < 1$, то

$$\|(\lambda I - A)^{-1}(A - B)\| \le \|(\lambda I - A)^{-1}\|\|(A - B)\| \le \frac{m_\gamma(A)}{\|A\|} \cdot \varepsilon\|A\| \le \varepsilon m_\gamma(A) < 1.$$

Можно применить разложение в ряд Неймана

$$\left(I + (\lambda I - A)^{-1}(A - B)\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left[(\lambda I - A)^{-1}(A - B)\right]^k = I + \Delta(\lambda).$$

При этом очевидна оценка

$$\|\Delta(\lambda)\| \le \|(\lambda I - A)^{-1}(A - B)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left[(\lambda I - A)^{-1}(A - B)\right]^k\| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)}$$

Непрерывность резольвенты матрицы на кривой

Получили $\left(\mathrm{I} + (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{A} - \mathrm{B})\right)^{-1} = \mathrm{I} + \Delta(\lambda)$.

$$\|\Delta(\lambda)\| \leq \frac{\varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A})}{1 - \varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A})}$$

$$(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{B})^{-1} = \left(\mathrm{I} + (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{A} - \mathrm{B})\right)^{-1}(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} = (\mathrm{I} + \Delta)(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}$$

$$(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{B})^{-1} - (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} = (\mathrm{I} + \Delta)(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} - (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} = \Delta(\lambda)(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}$$

Следовательно,

$$\|(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} - (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{B})^{-1}\| \leq \frac{\mathrm{m}_\gamma^2 \varepsilon}{\|\mathrm{A}\|(1 - \varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A}))}.$$

$\diamond$

Непрерывность резольвенты матрицы на кривой

Следствие. Если

$$\|A - B\| \leq \varepsilon \|A\|, \qquad \varepsilon m_\gamma(A) < \frac{1}{2},$$

(усиление условия) то разница резольвент оценивается следующим образом

$$\|(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - B)^{-1}\| \leq \frac{2m_\gamma^2 \varepsilon}{\|A\|}.$$

Следствие. Пусть для матриц A и B выполнено условие леммы, тогда их резольвенты близки также в смысле следующего неравенства

$$\|I - (\lambda I - B)^{-1}(\lambda I - A)\| \leq \frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)}$$

Доказательство

$$(\lambda I - B)^{-1}(\lambda I - A) - I = \Delta(\lambda)$$

◇

Непрерывность проекторов

$$\|(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - B)^{-1}\| \leq \frac{m_\gamma^2 \varepsilon}{\|A\|(1 - \varepsilon m_\gamma(A))}.$$

Следствие (непрерывность проекторов) Пусть $\|B - A\| \leq \varepsilon \|A\|$.

$$P_\gamma(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \qquad P_\gamma(B) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (\lambda I - B)^{-1} d\lambda$$

тогда

$$\|P_\gamma(A) - P_\gamma(B)\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma [(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - B)^{-1}] d\lambda \right\| \leq$$

$$\leq \frac{l_\gamma}{2\pi \|A\|} \frac{m_\gamma^2(A) \varepsilon}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)},$$

Постановка задачи дихотомии матричного спектра

* Определить, есть ли на заданной кривой собственные значения матрицы

* Если на кривой с.зн нет, то вычислить базисы инвариантных подпространств.

* Оценить расстояние от спектра до кривой

* Привести матрицу к клеточно-диагональной форме

Постановка задачи дихотомии матричного спектра

* Определить, есть ли на заданной кривой собственные значения матрицы A

* Если на кривой с.зн нет, то вычислить базисы инвариантных подпространств.

* Оценить расстояние от спектра до кривой

* Привести матрицу к клеточно-диагональной форме

$$\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A}) = \frac{\|\mathrm{A}\|^2}{\mathrm{l}_\gamma} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} |\mathrm{d}\lambda|$$

$$\mathrm{P}_\gamma(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \mathrm{d}\lambda$$

Обобщение уравнения Ляпунова на случай дихотомии матричного спектра единичной окружностью

Theorem

Если у матрицы A отсутствуют собственные значение на единичной окружности, то система матричных уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{X} - \mathrm{A}^*\mathrm{X}\mathrm{A} = \mathrm{P}^*\mathrm{C}\mathrm{P} - (\mathrm{I}-\mathrm{P})^*\mathrm{C}(\mathrm{I}-\mathrm{P}) \\ \mathrm{X} = \mathrm{X}^* > 0,\ \mathrm{P}^2 = \mathrm{P},\ \mathrm{P}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{P},\ \mathrm{P}^*\mathrm{X} = \mathrm{X}\mathrm{P} \end{cases}$$

однозначно разрешима относительно X и P при любой $\mathrm{C} = \mathrm{C}^* > 0$, причем решение $\mathrm{X} = \mathrm{X}^* > 0$ имеет интегральное представление

$$\mathrm{H}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathrm{A} - e^{i\varphi}\mathrm{I})^{-*}\mathrm{C}(\mathrm{A} - e^{i\varphi}\mathrm{I})^{-1}d\varphi$$

Обобщение уравнения Ляпунова на случай дихотомии матричного спектра единичной окружностью

Theorem (обратная)

Если при любой $C = C^* > 0$ система

$$\begin{cases} X - A^*XA = P^*CP - (I - P)^*C(I - P) \\ X = X^* > 0, \; P^2 = P, \; PA = AP, \; P^*X = XP \end{cases}$$

однозначно разрешима относительно X и P, то у матрицы A отсутствуют собственные значение на единичной окружности.