Критерии дихотомии

Бибердорф Э.А.

Проекторы на инвариантные подпространства

$\mathcal{L}$,$\mathcal{M}$ - инвариантные подпространство матрицы A, $\mathcal{L} \times \mathcal{M} = \mathrm{R}^n$
T_1 - базис в $\mathcal{L}$,
T_2 - базис в $\mathcal{M}$

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{PA} = \mathrm{AP}$

P - проектор на $\mathcal{L}$,
$\mathrm{I} - \mathrm{P}$ - проектор на $\mathcal{M}$

$\Longleftrightarrow$

$$\mathrm{P} = [\mathrm{T}_1|\mathrm{T}_2] \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [\mathrm{T}_1|\mathrm{T}_2]^{-1}$$

$$\mathrm{I}-\mathrm{P} = [\mathrm{T}_1|\mathrm{T}_2] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} [\mathrm{T}_1|\mathrm{T}_2]^{-1}$$

$$\mathrm{P} = [\mathrm{U}_1|\mathrm{W}_1] \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{V}_1^*$$

$$\mathrm{I} - \mathrm{P} = [\mathrm{U}_2|\mathrm{W}_2] \begin{pmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{V}_2^*$$

$\Longrightarrow$

U_1 - базис в $\mathcal{L}$,
U_2 - базис в $\mathcal{M}$

Проекторы на инвариантные подпространства

$$A = [T_1|T_2] \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} [T_1|T_2]^{-1},$$

$$P = [T_1|T_2] \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [T_1|T_2]^{-1}, \qquad I - P = [T_1|T_2] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} [T_1|T_2]^{-1}$$

Непрерывность проекторов: Пусть $\|B - A\| \le \varepsilon \|A\|$. тогда

$$\|P_\gamma(A) - P_\gamma(B)\| \le \frac{l_\gamma}{2\pi\|A\|} \frac{m_\gamma^2(A)\varepsilon}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)},$$

$$\text{где } m_\gamma(A) = \|A\| \max_{\lambda\in\gamma} \|(\lambda I - A)^{-1}\|$$

Формулировка задачи дихотомии матричного спектра

Пусть γ – кривая на комплексной плоскости
1) определить, есть на γ точки спектра A
2) если $\sigma(\mathrm{A})\bigcap\gamma=\emptyset$, оценить $\mathrm{dist}(\sigma(\mathrm{A}),\gamma)$
3) определить инвариантные подпространства матрицы A
3') упростить вид матрицы A

Формулировка задачи дихотомии матричного спектра

Пусть γ – кривая на комплексной плоскости
1) определить, есть на γ точки спектра A
2) если $\sigma(\mathrm{A}) \bigcap \gamma = \emptyset$, оценить $\mathrm{dist}(\sigma(\mathrm{A}), \gamma)$
3) определить инвариантные подпространства матрицы A
3') упростить вид матрицы A

$$\mathrm{H} = \oint_\gamma (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})^{-*} \mathrm{C} (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})^{-1} \mathrm{d}\lambda$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})^{-1} \mathrm{d}\lambda$$

Обобщение уравнения Ляпунова на случай дихотомии матричного спектра единичной окружностью

Theorem

Если у матрицы A отсутствуют собственные значение на единичной окружности, то система матричных уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{X} - \mathrm{A}^*\mathrm{X}\mathrm{A} = \mathrm{P}^*\mathrm{C}\mathrm{P} - (\mathrm{I}-\mathrm{P})^*\mathrm{C}(\mathrm{I}-\mathrm{P}) \\ \mathrm{X} = \mathrm{X}^* > 0,\ \mathrm{P}^2 = \mathrm{P},\ \mathrm{P}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{P},\ \mathrm{P}^*\mathrm{X} = \mathrm{X}\mathrm{P} \end{cases}$$

однозначно разрешима относительно X и P при любой $\mathrm{C} = \mathrm{C}^* > 0$, причем решение $\mathrm{X} = \mathrm{X}^* > 0$ имеет интегральное представление

$$\mathrm{H}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathrm{A} - e^{i\varphi}\mathrm{I})^{-*}\mathrm{C}(\mathrm{A} - e^{i\varphi}\mathrm{I})^{-1}d\varphi$$

Обобщение уравнения Ляпунова на случай дихотомии матричного спектра единичной окружностью

Theorem (обратная)

Если при любой $C = C^* > 0$ система

$$\begin{cases} X - A^*XA = P^*CP - (I-P)^*C(I-P) \\ X = X^* > 0, \; P^2 = P, \; PA = AP, \; P^*X = XP \end{cases}$$

однозначно разрешима относительно X и P, то у матрицы A отсутствуют собственные значение на единичной окружности.

Обобщение уравнения Ляпунова на случай дихотомии матричного спектра мнимой осью

Theorem

Если у матрицы A отсутствуют собственные значение на мнимой оси, то система матричных уравнений

$$\begin{cases} XA + A^*X + P^*CP - (I-P)^*C(I-P) = 0 \\ X = X^* > 0,\ P^2 = P,\ PA = AP,\ P^*X = XP \end{cases}$$

однозначно разрешима относительно X и P при любой $C = C^* > 0$, причем решение $X = X^* > 0$ имеет интегральное представление

$$H(A) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(A^* + itI)^{-1}C(A - itI)^{-1}dt.$$

Обобщение уравнения Ляпунова на случай дихотомии матричного спектра мнимой осью

Theorem (обратная)

Если при любой $C = C^* > 0$ система

$$\begin{cases} XA + A^*X + P^*CP - (I - P)^*C(I - P) = 0 \\ X = X^* > 0, \ P^2 = P, \ PA = AP, \ P^*X = XP \end{cases}$$

однозначно разрешима относительно X и P, то у матрицы A отсутствуют собственные значение на мнимой оси.

Формулировка задачи дихотомии матричного спектра

Пусть γ – кривая на комплексной плоскости

1) определить, есть на γ точки спектра A

$\Longleftarrow$ H

2) если $\sigma(\mathrm{A})\bigcap\gamma = \emptyset$, оценить $\mathrm{dist}(\sigma(\mathrm{A}),\gamma)$

3) определить инвариантные подпространства матрицы A

$\Longleftarrow$ $\mathrm{P}, \mathrm{I}-\mathrm{P}$

3') упростить вид матрицы A

Критерии дихотомии

Критерием дихотомии можно назвать величину, которая является индикатором наличия дихотомии, т.е. дает ответ на первый поставленный вопрос задачи дихотомии, а также численно оценивает качество дихотомии (опосредованный ответ на второй вопрос).
Например,

$$\mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\| \max_{\lambda\in\gamma} \|(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\|$$

или

$$\mathcal{H}_\gamma(\mathrm{A}) = \frac{\|\mathrm{A}\|^2}{\mathrm{l}_\gamma} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*}(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}|d\lambda|$$

и

$$\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A}) = \frac{\|\mathrm{A}\|^2}{\mathrm{l}_\gamma} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*}|d\lambda|$$

Замечание Если длина γ - бесконечна, то нормировка $\frac{1}{\mathrm{l}_\gamma}$ не производится.
То, что все эти три критерия играют роль индикатора отсутствия или наличия собственных значений на кривой γ, очевидно. В случае присутствия точек спектра на кривой, все три критерия обращаются в бесконечность. Во всех остальных случаях критерии принимают конечные значения.

$$\mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\| \max_{\lambda\in\gamma} \|(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\|$$

$$\mathcal{H}_\gamma(\mathrm{A}) = \frac{\|\mathrm{A}\|^2}{\mathrm{l}_\gamma} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*}(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}|\mathrm{d}\lambda|$$

$$\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A}) = \frac{\|\mathrm{A}\|^2}{\mathrm{l}_\gamma} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*}|\mathrm{d}\lambda|$$

Theorem

об эквивалентности критериев дихотомии:
Пусть $\omega_\gamma(\mathrm{A}) = \|\mathcal{H}_\gamma(\mathrm{A})\|$ или $\|\omega_\gamma(\mathrm{A}) = \mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A})\|$. Если на гладкой кривой γ отсутствуют точки спектра матрицы A, то верны следующие двусторонние неравенства

$$\frac{\mathrm{m}_\gamma^2(\mathrm{A})}{1 + \dfrac{\mathrm{l}_\gamma}{2\|\mathrm{A}\|}\mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A})} \le \omega_\gamma(\mathrm{A}) \le \mathrm{m}_\gamma^2(\mathrm{A}),$$

$$\sqrt{\omega_\gamma(\mathrm{A})} \le \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A}) \le \frac{\omega_\gamma(\mathrm{A})\mathrm{l}_\gamma}{2\|\mathrm{A}\|} + \sqrt{\frac{\|\omega_\gamma^2(\mathrm{A})\mathrm{l}_\gamma^2}{4\|\mathrm{A}\|^2} + \omega_\gamma(\mathrm{A})}.$$

$$\mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\| \max_{\lambda\in\gamma} \|(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\|, \qquad \mathcal{H}_\gamma = \frac{\|\mathrm{A}\|^2}{\mathrm{l}_\gamma} \oint_\gamma (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*}(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} |\mathrm{d}\lambda|.$$

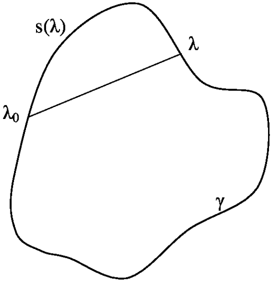
Доказательство. Очевидное неравенство:

$$\|\mathcal{H}_\gamma\| \le \mathrm{m}_\gamma^2(\mathrm{A}) \;\Rightarrow\; \sqrt{\|\mathcal{H}_\gamma} \le \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A})$$

Докажем оценки с другой стороны.

Выберем точку $\lambda_0 \in \gamma$:
$\|(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\| = \max_{\lambda \in \gamma} \|(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\|$.

Затем выберем вектор x_0:
$\|(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \mathrm{x}_0\| = \|(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\| \|\mathrm{x}_0\|$.



$$\lambda_0 \mathrm{I} - \lambda \mathrm{I} \pm \mathrm{A} = \lambda_0 \mathrm{I} - \lambda \mathrm{I}$$

$$(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A}) - (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \lambda_0 \mathrm{I} - \lambda \mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} - (\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}$$

$$(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} - (\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} = (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}$$

$$(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}_0 - (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}_0 = (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}_0$$

$$\Downarrow$$

$$\|(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\|\|\mathrm{x}_0\| \le \|(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}_0\| + |\lambda_0 - \lambda|\|(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\|\|(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}_0\|$$

$$\Downarrow$$

$$\|(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}_0\| \ge \frac{\|(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\|\|\mathrm{x}_0\|}{1 + |\lambda_0 - \lambda|\|(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\|}$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x_0\| \geq \frac{\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|\|x_0\|}{1 + |\lambda_0 - \lambda|\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|}$$

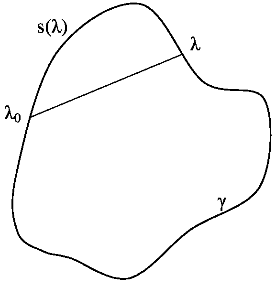
Следовательно,

$$(\mathcal{H}_\gamma x_0, x_0) = \frac{\|A\|^2}{l_\gamma} \oint_\gamma \left((\lambda I - A)^{-*}(\lambda I - A)^{-1}x_0, x_0\right) |d\lambda| =$$

$$= \frac{\|A\|^2}{l_\gamma} \int_\gamma \|(\lambda I - A)^{-1}x_0\|^2 |d\lambda| \geq$$

$$\frac{\|A\|^2}{l_\gamma} \int_\gamma \frac{\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^2\|x_0\|^2 ds(\lambda)}{\left(1 + |\lambda_0 - \lambda|\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|\right)^2} \geq$$

$$\geq \frac{\|A\|^2}{l_\gamma} \int_0^{l_\gamma} \frac{\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^2\|x_0\|^2 ds(\lambda)}{\left(1 + s(\lambda)\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|\right)^2}.$$



$$(\mathcal{H}_\gamma x_0, x_0) \geq \frac{\|A\|^2}{l_\gamma} \int_0^{l_\gamma} \frac{\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^2 \|x_0\|^2 ds(\lambda)}{(1 + s(\lambda)\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|)^2}.$$

Интегрируем и используем очевидные неравенства $l_\gamma \geq s(\lambda) \geq |\lambda - \lambda_0|$:

$$\|\mathcal{H}_\gamma\| \geq \frac{(H_\gamma x_0, x_0)}{\|x_0\|^2} \geq \frac{\|A\|^2 \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^2}{1 + l_\gamma \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|} \geq \frac{m_\gamma^2(A)}{1 + \frac{l_\gamma}{\|A\|} m_\gamma(A)}$$

Последняя оценка эквивалентна тому, что

$$m_\gamma \leq \frac{\|\mathcal{H}\| l_\gamma}{2\|A\|} + \sqrt{\frac{\|\mathcal{H}\|^2 l_\gamma^2}{\|A\|^2} + 4\|\mathcal{H}\|}.$$

Что и требовалось доказать.

Другая нормировка

Следующие матрицы обобщают матричные интегральные критерии путем введения произвольной матричной нормировки $\mathrm{C} = \mathrm{C}^* > 0$:

$$\mathcal{H}_\gamma(\mathrm{A}) = \frac{1}{\mathrm{l}_\gamma} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*} \mathrm{C} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} |\mathrm{d}\lambda|$$

и

$$\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A}) = \frac{1}{\mathrm{l}_\gamma} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \mathrm{C} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*} |\mathrm{d}\lambda|$$

Предыдущие варианты получаются в частном случае $\mathrm{C} = \|\mathrm{A}\|^2 \mathrm{I}$.

Единичная окружность

$$H_\gamma(A) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma (\lambda I - A)^{-*} C (\lambda I - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (e^{i\varphi} I - A)^{-*} C (e^{i\varphi} I - A)^{-1} d\varphi$$

В том случае, когда весь спектр матрицы A лежит строго внутри единичной окружности $|\lambda_j(A)| < 1$, матрица $H_\gamma(A)$ совпадает с решением уравнения Ляпунова $X - A^* X A = C$

Окружность произвольного радиуса с центром в начале координат.

$$\mathcal{H}_\gamma(A) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} (re^{i\varphi} I - A)^{-*} C (re^{i\varphi} I - A)^{-1} r d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} (e^{i\varphi} I - \frac{1}{r} A)^{-*} C (e^{i\varphi} I - \frac{1}{r} A)^{-1} d\varphi$$

и

$$H_\gamma(A) = \frac{1}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} (e^{i\varphi} I - \frac{1}{r} A)^{-1} C (e^{i\varphi} I - \frac{1}{r} A)^{-*} d\varphi.$$

Частные случаи

Мнимая ось

$$\mathcal{H}_\gamma(\mathrm{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*} \mathrm{C} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} |\mathrm{d}\lambda|$$

В том случае, когда весь спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости, то $\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A})$ точностью до множителя $1/2\pi$ совпадает с решением уравнения Ляпунова

$$\mathrm{XA} + \mathrm{A}^*\mathrm{X} + \mathrm{C} = 0$$

Прямая, параллельная мнимой оси.

$\lambda = \mathrm{a} + \mathrm{i}\xi$

$$\mathcal{H}_\gamma(\mathrm{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda \mathrm{I} - (\mathrm{A} - \mathrm{aI}))^{-*} \mathrm{C} (\lambda \mathrm{I} - (\mathrm{A} - \mathrm{aI}))^{-1} |\mathrm{d}\lambda|,$$

$$\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda \mathrm{I} - (\mathrm{A} - \mathrm{aI}))^{-1} \mathrm{C} (\lambda \mathrm{I} - (\mathrm{A} - \mathrm{aI}))^{-*} |\mathrm{d}\lambda|$$

Непрерывность матричного критерия отсутствия спектра на кривой

Определим симметрические матрицы

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\gamma(\mathrm{A}) = \frac{1}{\mathrm{l}_\gamma} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*}(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} |\mathrm{d}\lambda| = \frac{1}{\|\mathrm{A}\|^2} \mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A})$$

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\gamma(\mathrm{B}) = \frac{1}{\mathrm{l}_\gamma} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{B})^{-*}(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{B})^{-1} |\mathrm{d}\lambda| = \frac{1}{\|\mathrm{B}\|^2} \mathrm{H}_\gamma(\mathrm{B})$$

Theorem

Если

$$\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\| \le \varepsilon \|\mathrm{A}\|, \qquad \varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A}) < 1,$$

то

$$\|\widetilde{\mathrm{H}}_\gamma(\mathrm{A}) - \widetilde{\mathrm{H}}_\gamma(\mathrm{B})\| \le \frac{\varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A})}{1 - \varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A})} \left(2 + \frac{\varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A})}{1 - \varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A})} \right) \|\widetilde{\mathrm{H}}_\gamma(\mathrm{A})\|.$$

Непрерывность матричного критерия

Доказательство. Так как по лемме о непрерывности резольвенты на кривой γ

$$(\lambda I - B)^{-1} = (I + \Delta)(\lambda I - A)^{-1}, \qquad \|\Delta(\lambda)\| \leq \frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)},$$

то

$$\begin{gathered}(\lambda I - B)^{-*}(\lambda I - B)^{-1} - (\lambda I - A)^{-*}(\lambda I - A)^{-1} = \\ = (\lambda I - A)^{-*}\Delta^*(\lambda I - A)^{-1} + (\lambda I - A)^{-*}\Delta(\lambda I - A)^{-1} + \\ +(\lambda I - A)^{-*}\Delta^*\Delta(\lambda I - A)^{-1}.\end{gathered}$$

Рассмотрим действие этих квадратичных форм на произвольный вектор

$$\begin{gathered}\left(\left[(\lambda I - A)^{-*}\Delta^*(\lambda I - A)^{-1} + (\lambda I - A)^{-*}\Delta(\lambda I - A)^{-1}\right] x, x\right) = \\ \left([\Delta + \Delta^*]\,(\lambda I - A)^{-1}x, (\lambda I - A)^{-1}x\right),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left((\lambda I - A)^{-*}\Delta^*\Delta(\lambda I - A)^{-1}x, x\right) = \\ \left(\Delta(\lambda I - A)^{-1}x, \Delta(\lambda I - A)^{-1}x\right).\end{gathered}$$

Непрерывность матричного критерия

Согласно вариационным принципам Фишера-Куранта имеем

$$\lambda_{\mathsf{min}}(\Delta+\Delta^*)\left((\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{x},(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}\right)\leq$$

$$\leq\left([\Delta+\Delta^*](\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{x},(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}\right)\leq$$

$$\leq\lambda_{\mathsf{max}}(\Delta+\Delta^*)\left((\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{x},(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}\right),$$

а также

$$0\leq\left(\Delta(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{x},\Delta(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}\right)\leq\|\Delta\|^2\left((\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{x},(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}\right).$$

В результате получаем

$$\lambda_{\mathsf{min}}(\Delta+\Delta^*)(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-*}(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\leq$$

$$\leq(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{B})^{-*}(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{B})^{-1}-(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-*}(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\leq$$

$$\leq\left[\lambda_{\mathsf{max}}(\Delta+\Delta^*)+\|\Delta\|^2\right](\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-*}(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}$$

Непрерывность матричного критерия

Согласно вариационным принципам Фишера-Куранта
$A = A^*$

$$\lambda_{n-k} = \min_{\substack{\|q_i\| = 1, \\ i = 1, \dots, k}} \; \max_{\substack{\|x\| \neq 0 \\ (q_i, x) = 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

$$\lambda_{k+1} = \max_{\substack{\|q_i\| = 1, \\ i = 1, \dots, k}} \; \min_{\substack{\|x\| \neq 0 \\ (q_i, x) = 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

$$\lambda_{\mathsf{min}}(A)\|x\|^2 \leq (Ax, x) \leq \lambda_{\mathsf{max}}(A)\|x\|^2$$

Непрерывность матричного критерия

имеем $\lambda_{\mathsf{min}}(\mathrm{A})\|\mathrm{x}\|^2 \le (\mathrm{Ax}, \mathrm{x}) \le \lambda_{\mathsf{max}}(\mathrm{A})\|\mathrm{x}\|^2$. Следовательно

$$\lambda_{\mathsf{min}}(\Delta + \Delta^*) \left((\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}, (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}\right) \le$$

$$\le \left([\Delta + \Delta^*] (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}, (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}\right) \le$$

$$\le \lambda_{\mathsf{max}}(\Delta + \Delta^*) \left((\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}, (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}\right),$$

а также

$$0 \le \left(\Delta(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}, \Delta(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}\right) \le \|\Delta\|^2 \left((\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}, (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x}\right).$$

В результате получаем

$$-2\|\Delta\|(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*}(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \le$$

$$\le \lambda_{\mathsf{min}}(\Delta + \Delta^*)(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*}(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \le$$

$$\le (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{B})^{-*}(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{B})^{-1} - (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*}(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \le$$

$$\le \left[\lambda_{\mathsf{max}}(\Delta + \Delta^*) + \|\Delta\|^2\right] (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*}(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \le$$

$$\le (2 + \|\Delta\|)\|\Delta\|(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-*}(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}$$

Непрерывность матричного критерия

$$
\begin{aligned}
&-2\|\Delta\|(\lambda I - A)^{-*}(\lambda I - A)^{-1} \leq \\
&\leq (\lambda I - B)^{-*}(\lambda I - B)^{-1} - (\lambda I - A)^{-*}(\lambda I - A)^{-1} \leq \\
&\leq (2 + \|\Delta\|)\|\Delta\|(\lambda I - A)^{-*}(\lambda I - A)^{-1}
\end{aligned}
$$

Оценка

$$
\|\widetilde{H}_\gamma(A) - \widetilde{H}_\gamma(B)\| \leq \frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)} \left(2 + \frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)}\right) \|\widetilde{H}_\gamma(A)\|.
$$

является результатом интегрирования этих неравенств. $\diamond$

Непрерывность матричного критерия

Следствие 1. Если для матриц A и B выполнено условие

$$\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\| \le \varepsilon\|\mathrm{A}\|, \qquad \varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A}) < 1.$$

то для матриц $\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A})$, $\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{B})$

$$\mathrm{H}_\gamma = \frac{\|\mathrm{A}\|^2}{\mathrm{l}_\gamma} \oint_\gamma (\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-*}(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}|\mathrm{d}\lambda|.$$

имеет место оценка

$$\|\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A})-\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{B})\| \le (\delta+2\varepsilon+2\varepsilon\delta)\|\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A}),$$

где

$$\delta = \frac{\varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A})}{1-\varepsilon \mathrm{m}_\gamma(\mathrm{A})}$$

Доказательство основывается на представлении

$$\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{A})-\mathrm{H}_\gamma(\mathrm{B}) =$$

$$\|\mathrm{A}\|^2\Big(\widetilde{\mathrm{H}}_\gamma(\mathrm{A})-\widetilde{\mathrm{H}}_\gamma(\mathrm{B})\Big)+(\|\mathrm{B}\|^2-\|\mathrm{A}\|^2)\Big(\widetilde{\mathrm{H}}_\gamma(\mathrm{A})+(\widetilde{\mathrm{H}}_\gamma(\mathrm{B})-\widetilde{\mathrm{H}}_\gamma(\mathrm{A}))\Big).$$

◇

Непрерывность матричного критерия

Следствие 2. Если

$$\|A - B\| \leq \varepsilon \|A\|, \qquad \varepsilon m_\gamma(A) < \frac{1}{2},$$

то

$$\|H_\gamma(A) - H_\gamma(B)\| \leq \varepsilon(6m_\gamma + 8)\|H_\gamma(A)\|.$$

Замечание. Эти оценки непрерывности не зависят от того, является ли длина кривой конечной или бесконечной.

Матричный пучок, регулярный на единичной окружности

Матричным пучком называется выражение $A - \lambda B$.
Собственные значения матричного пучка являются корнями уравнения $\det(A - \lambda B) = 0$.
Если λ - собственное значение пучка $A - \lambda B$, то правый собственный вектор определен равенством $(A - \lambda B)v = 0$.
Левый собственный вектор (вектор-строка) удовлетворяет соотношению $u(A - \lambda B) = 0$.
Правой жордановой цепочкой пучка называется последовательность векторов $v_1, \ldots, v_k$ таких, что

$$(A - \lambda B)v_1 = 0, (A - \lambda B)v_2 = Bv_1, \ldots (A - \lambda B)v_k = Bv_{k-1}.$$

Левые жордановы цепочки определяются аналогично.

Матричный пучок, регулярный на единичной окружности

Определение. Линейная оболочка правых (левых) собственных векторов и их жордановых цепочек, сответствующих выделенной группе собственных значений, называется правым (левым) приводящим подпространством матричного пучка, соответствующим данным собственным значениям.

Замечание. Если $B = I$, то приводящие подпространства пучка совпадают с инвариантными подпространствами матрицы A.

Определение. Матричный пучок $A - \lambda B$ является регулярным на единичной окружности, если на единичной окружности отсутствуют собственные значения пучка: $\det(A - e^{i\varphi}B) \neq 0$ при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Каноническое разложение

Theorem

Для матричного пучка, регулярного на единичной окружности, имеет место каноническое разложение

$$A - \lambda B = T \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} S - \lambda T \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} S,$$

причем

$$\sigma(A, B) = \sigma(\Lambda) \cup \sigma(M^{-1}), \det S \neq 0, \det T \neq 0.$$

Матрицы T и S называются левой и правой приводящими матрицами соответственно.

Замечание. Каноническое представление неоднозначно:

$$T_1 = T \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_\infty \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} R_0^{-1} & 0 \\ 0 & R_\infty^{-1} \end{pmatrix} S,$$

$$\Lambda_1 = R_0^{-1} \Lambda R_0, \quad M_1 = R_\infty^{-1} M R_\infty, \quad \det R_0 \neq 0, \quad \det R_\infty \neq 0.$$

Каноническое разложение

$$A - \lambda B = T \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} S - \lambda T \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} S,$$

$$S = [V_1, V_2]^{-1}, \qquad T = [U_1, U_2]$$

V_1 - $l \times n$ матрица, составленная из базисных векторов (столбцов) правого приводящего подпространства, соответствующего собственным значениям пучка, лежащим внутри единичной окружности,
V_2 - $(n - l) \times n$ матрица, составленная из базисных векторов (столбцов) правого приводящего подпространства, соответствующего собственным значениям пучка, лежащим вне единичной окружности,
U_1 - $n \times l$ матрица, составленная из базисных векторов (строк) левого приводящего подпространства, соответствующего собственным значениям пучка, лежащим внутри единичной окружности;
U_2 - $n \times (n - l)$ матрица, составленная из базисных векторов (строк) левого приводящего подпространства, соответствующего собственным значениям пучка, лежащим вне единичной окружности.

Проекторы на приводящие подпространства

Проекторы на правые приводящие подпространства, соответсвующие собственным значениям регулярного на единичной окружности пучка, лежащим внутри и вне этой окружности:

$$P = S^{-1}\begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S, \qquad I - P = S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{pmatrix} S$$

Если наоборот проекторы P и $I - P$ известны, то можно найти приводящие матрицы T, S. Для этого необходимо сделать сингулярное разложение проекторов

$$P = [W_1 \vdots \hat{W}_1]\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_1, \qquad I - P = [W_2 \vdots \hat{W}_2]\begin{bmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_2$$

В этих обозначениях $S = [W_1 \vdots W_2]$. Далее т.к.

$$BP = T\begin{bmatrix} I_- & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S, \;\; A(I - P) = T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_+ \end{bmatrix} S$$

то

$$A(I - P) + BP = TS, \qquad T = (A(I - P) + BP)S^{-1}.$$

Обобщение уравнения Ляпунова на случай дихотомии спектра матричного пучка единичной окружностью

Theorem

Если пучок $A - \lambda B$ регулярен на единичной окружности, то уравнения

$$BHB^* - AHA^* = A\Big[PCP^* - (I-P)C(I-P)^*\Big]A^* + B\Big[PCP^* - (I-P)C(I-P)^*\Big]B^*$$

$$PH = HP^*, \quad P^2 = P, \quad P(A+B)^{-1}B = (A+B)^{-1}BP$$

имеют единственное решение при любом $C = C^* > 0$, причем

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(A - e^{i\varphi}B)^{-1}(ACA^* + BCB^*)(A - e^{i\varphi}B)^{-*}d\varphi,$$

а P – проектор на правое приводящее подпространство, соответствующее $|\lambda| < 1$.

Обобщение уравнения Ляпунова на случай дихотомии спектра матричного пучка единичной окружностью

Theorem (обратная)

Пусть $\det(A + B) \neq 0$ и существуют матрицы P, $H = H^* > 0$ и $C = C^* > 0$, связанные обобщенными уравнениями Ляпунова

$$BHB^* - AHA^* =$$

$$= A\Big[PCP^* - (I - P)C(I - P)^*\Big]A^* + B\Big[PCP^* - (I - P)C(I - P)^*\Big]B^*$$

$$PH = HP^*, \quad P^2 = P, \quad P(A + B)^{-1}B = (A + B)^{-1}BP.$$

Тогда пучок $A - \lambda B$ регулярен на единичной окружности,

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (A - e^{i\varphi}B)^{-1}(ACA^* + BCB^*)(A - e^{i\varphi}B)^{-*}d\varphi,$$

а P – проектор на правое приводящее подпространство, соответствующее $|\lambda| < 1$.