Теория отображений для школьников

Черногорцев Михаил

11 февраля 2026 г.

Оглавление

Глава 1

Теория множеств

Первой темой является вводный курс по теории множеств, в котором затронутся базовые термины и понятия. Очень важно освоить этот раздел, поскольку на протяжении всего курса мы будем работать именно с множествами.

1.1 Принадлежность

Само множество является неопределяемым понятием, но мы все еще можем дать интуитивное представление, поэтому

Определение 1.1.1. Множество – это набор произвольных элементов. Элементы в множестве не упорядочены и каждый элемент учитывается только один раз *(даже если случились повторения)*.

Точнее говоря, множество определяется через набор своих свойств и действий, которые вообще можно делать с ними (например объединять). По научному мы выбираем набор аксиом, то есть утверждений, которые принимаются за истину и *чаще всего* интуитивно понятны, а все остальное выводится с помощью логики. Классически используется аксиоматика Цермелло-Френкеля, мы не будем ее разбирать поскольку это выходит за рамки курса, но важно понимать, что множество – объект на поверхности очень простой, но коварный, и халатное обращение с множествами приводит к парадоксам.

Теперь подумайте, а как вообще можно задать множество? Самый простой ответ – список, т.е. явно перечислить элементы

$$M = \{a, b, c\} \; B = \{4, M, \{\delta\}\} \; Y = \{0, 1, \{x, 1\}\}$$

Классически само множество обозначается заглавной буквой латинского алфавита, а элементы перечисляются внутри фигурныйх скобок через запятую. Определение 1.1.1 не запрещает одному множеству быть элементом другого, образуя как бы пакет с пакетами. Более того множество может лежать само в себе. Отдельно отметим, что во всех приведенных выше множествах ровно три элемента ($\{x, 1\}$ считается как один элемент).

Любой элемент должен либо лежать в множестве, либо нет, третьего не дано, и самое важное что мы хотим уметь делать – это проверять лежит ли конкретный элемент в данном множестве.

Определение 1.1.2. Утверждение 'Элемент b принадлежит множеству M' на математическом языке записывается как $b \in M$. Отрицание этого утверждения как $b \notin M$, то есть b не принадлежит M.

И, к сожалению, уже это бывает сложной задачей, поэтому рассмотрим

Примеры. В следующем множестве 5 элементов и каждый выделен отдельным цветом

$$A = \{\{a, b\}, -8, \{0, \{0\}\}, \{0\}, \Gamma\}$$

и только про эти 5 наборов символов можно сказать, что они принадлежат множеству A. Записи $\{a\} \in A$ или $0 \in A$ будут неверны, в отличии от $\{a, b\} \in A$, $-8 \in A$, $\{0, \{0\}\} \in A$, $\{0\} \in A$ и $\Gamma \in A$. Утверждение $\{2\} \in \{1, \{1, 2\}\}$ так же неверно.

Еще одним важным понятием в математике является пустое множество, оно обозначается как $\varnothing$ (или просто $\{\}$), и оно так же определяется через свои свойства, а именно

Определение 1.1.3. Существует множество $\varnothing$ такое, что для всякого элемента a справедливо, что $a \notin \varnothing$.

Фраза 'для всякого элемента $a \dots$' часто требует пояснений. Она **не** означает что мы берем конкретно букву a латинского алфавита. Все ровно наоборот, так обозначается произвольный элемент, который мы вообще можем себе представить. Конкретные элементы будут обозначаться буквой с индексом: x_0, a_3, $b_1 \dots$ Словосочетание 'для всякого' принято заменять символом '$\forall$', такие символы называются кванторами и нужны для более короткой записи математических утверждений. Определение 1.1.3 записывается в кванторах как

$$\exists \varnothing : \forall a \ (a \notin \varnothing)$$

Другие частые обозначения:

'$\exists$' – существует/найдется ':' – такой, что ':=' – равенство по определению.

Из определения 1.1.3 сразу можно понять, что если вы видите запись $x_0 \in \varnothing$ *(вставьте любой набор символов вместо x_0)*, то это либо противоречие, либо парадокс, поскольку она явно противоречит определению.

Упражнения 1.1. Проверьте следующие утверждения

1. $B = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$
$1 \in B$
$2 \in B$
$\{1\} \in B$
$\{2\} \in B$
$\{1, \{1\}\} \in B$
$\{1, 2\} \in B$

2. $D = \{\{0, \{1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}\}$
$0 \in D$
$\{0\} \in D$
$\{0, \{1\}\} \in D$
$\{\{0\}, 1\} \in D$
$\{\{0\}, \{1\}\} \in D$
$\{1\} \in D$

3. $F = \{0, 5, \{0\}, \{2\}, \{\}\}$
$\{0\} \in F$
$\{0, 5\} \in F$
$\{0, 2\} \in F$
$\{0, \{0\}\} \in F$
$\varnothing \in F$
$\{\{\}, \varnothing\} \in F$

4. $C = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
$1 \in C$
$2 \in C$
$\{1, 1\} \in C$
$\{2\} \in C$
$\{1, 2\} \in C$
$\{\{1\}, \{2\}\} \in C$

5. $G = \{1, a, \{1, a\}, \{\{1\}\}\}$
$1 \in G$
$a \in G$
$\{a\} \in G$
$\{1\} \in G$
$\{1, a\} \in G$
$\{\{1, a\}\} \in G$

6. Переведите на русский
$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \colon m = 2n$
$\forall x \in \mathbb{Z} \ \exists y \in \mathbb{R} \colon y = \dfrac{1}{x}$
$\forall n \in \mathbb{Z} \ \exists k \in \mathbb{N} \colon k > n$
$\exists a \colon \forall n \in \mathbb{N} \ \ \frac{1}{n} < a$
$\exists M \colon \forall n \in \mathbb{N} \ n < M$
$\exists c \in \mathbb{Z} \colon \forall n \in \mathbb{Z} \ n \leq c$

С помощью $\varnothing$ в теории множеств задаются натуральные числа, например число 4 будет определено следующим образом

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$$

или для большей аутентичности

$$\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}\}$$

1.2 Включение

Помимо принадлежности элемента к множеству, возникает необходимость рассматривать множество не целиком, а только его часть. Отсюда естественным образом возникает

Определение 1.2.1. Множество A включено в множество B, если:
для всякого $x \in A$ верно что $x \in B$. Обозначается как $A \subset B$. Множество A называют подмножеством множества B. В кванторах $A \subset B \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \; (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Неформальная формулировка звучит так: Все элементы первого множества должны быть элементами второго множества.

Полезно заранее выписать отрицание утверждения $A \subset B$, а именно найдется такой элемент $x_0 \in A$, что $x_0 \notin B$. Записывается оно как $A \not\subset B$.

Примеры. Пусть $A = \{1, 2, \{0\}\}$, проверим утверждение $\{1, 2\} \subset A$. В множестве $\{1, 2\}$ всего два элемента и достаточно явно проверить определение.

$$1 \in \{1, 2\} \text{ и } 1 \in A - \text{верно}$$
$$2 \in \{1, 2\} \text{ и } 2 \in A - \text{верно}$$

Значит утверждение $\{1, 2\} \subset A$ – верно. Теперь проверим $\{0, 2\} \subset A$ аналогичным образом

$$2 \in \{2, 0\} \text{ и } 2 \in A - \text{верно}$$
$$0 \in \{2, 0\} \text{ и } 0 \in A - \text{неверно}$$

Поскольку $0 \notin A$ вся логическая цепочка рушится и получается что $\{0, 2\} \not\subset A$.

Утверждение 1.2.2. Для всякого множества A справедливо что $\varnothing \subset A$.

Доказательство. На этом утверждении удобно продемонстрировать структуру математического доказательства, а также пару частых приемов. Прежде всего доказательство будет от противного, его структура выглядит так:
Предполагаем что утверждение 1.2.2 неверно $\to$ с помощью рассуждений получаем противоречие $\to$ мы предположили что 1.2.2 неверно и получили ошибку, значит 1.2.2 верно.

Предположим противное. Теперь необходимо сформулировать отрицание утверждения 1.2.2, оно звучит так

$$\text{Нашлось такое множество } A, \text{ что } \varnothing \not\subset A - \text{это то, что мы предполагаем}$$

По предположению $\varnothing \not\subset A$, распишем это утверждение – найдется $x_1 \in \varnothing$, такой что $x_1 \notin A$ (см. 1.2.1). Тот кто внимательно читал предыдущий раздел уже увидели, что фраза "найдется $x_1 \in \varnothing$" не может быть правдой, поскольку противоречит определению 1.1.3. Мы пришли к противоречию (получили ложное утверждение), таким образом 1.2.2 верно. □

До сих пор упоминался только один способ задать множество – явно перечислить его элементы. Этот способ удобен при работе с *маленькими* множествами и абсолютно не подходит для всего остального. На практике сначала берется уже готовое множество, и из него выбирается подмножество, отвечающее конкретному условию. Классический шаблон, котором мы будем пользользоваться:

$$M = \{\text{натуральные числа со свойством меньше } 6\}$$

Или же на математическом

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$$

Разберем подробнее. Фигурные скобки обозначают границы множества, внутри описаны элементы, вещи снаружи нам не интересны. Далее мы видим вертикальный разделитель и текст по обе стороны.

Текст слева указывает что будет являться элементами множества *(числа, формулы, функции, другие множества...)*. Здесь можно указать из какого множества будут браться элементы **или** какое преобразование нужно сделать с элементом. Но очень важно чтобы до или после '|' было указано откуда берутся элементы. В нашем примере элементы из $\mathbb{N}$. Обозначение элемента x выбрано произвольно, тоже множество можно задать и так

$$M = \{\xi \in \mathbb{N} \mid \xi < 6\} = \{t \in \mathbb{N} \mid t < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

В математике важны не столько сами символы, сколько их связь между собой и взаимное расположение.

Текст справа задает свойства, которым должны отвечать элемнты, в нашем примере элементы должны быть меньше 6. Сам разделитель заменяет слова 'со свойством' или 'такой, что'. Таким образом утверждение выше должно читаться так:

M – множество элементов ξ из натуральных чисел, со свойством ξ меньше 6.

Примеры.

$B = \{\frac{h}{3} \mid h \in \mathbb{N}, h < 4\} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ – тут h делится на 3 перед попаданием в B

$F = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ – здесь берутся натуральные числа и возводятся в квадрат

$I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$ – множество иррациональных чисел

Озвучим как читается последнее утверждение

I – множество элементов x из $\mathbb{R}$ таких, что x не является рациональным.
Или множество элементов из $\mathbb{R}$, которые не рациональны.

Не лишним будет привести примеры некорректного задания множеств и частые ошибки

$M = \{\mathbb{Z} \mid x < 6\}$ – потерян элемент, не понятно что будет лежать в множестве

$K = \{x \in \mathbb{N} \mid y < 7\}$ – нет связи между названием элемента и условием. В множестве лежат иксы, а условие наложено на y.

$B = \{x \mid x > 9\}$ – не хватает информации о том, чем является икс. Целым? Рациональным? Это вообще число?

$D = \{a \subset \mathbb{N} \mid a < 4\}$ – перепутаны знаки $\in$ и $\subset$, из за чего смысл полностью потерян.

$Z = \{z \in \mathbb{N} \mid 2x\}$ – справа нет условия.

Упражнения 1.2.

1. $C = \{1, 2, \{1, 2\}, 0, \{r\}\}$

Найдите ложные утверждения

$\{2\} \in C$,	$\{2\} \subset C$
$0 \in C$,	$0 \subset C$
$\varnothing \in C$,	$\varnothing \subset C$
$\{1, 2\} \in C$,	$\{1, 2\} \subset C$
$\{1, 0\} \in C$,	$\{1, 0\} \subset C$
$\{r\} \in C$,	$\{r\} \subset C$
$\{r, r\} \in C$,	$\{r, r\} \subset C$
$\{1, 2, 0\} \in C$,	$\{1, 2, 0\} \subset C$
$\{\{r\}\} \in C$,	$\{\{r\}\} \subset C$

2. Пусть $B = \{1, 2\}$

Перечислите все подмножества B.

3. Пусть $R = \{e, b\}$. Докажите от противного, что $R \subset R$.

4. Задайте явно множества

$G = \{s + f \mid s, f \in \mathbb{Z}, s^2 + f^2 < 9\}$

$P = \{3n + 2 \mid n \in \{0, 1, 2\}\}$

$X = \{\sqrt{c} \mid c \in \mathbb{N}$ и $c < 5\}$

5. Задайте через свойства множества

$\{4, 9, 16, 25\}$, $\{-1, 0, 1, 2\}$, $\{3, 5, 7, 9\}$.

6. Пусть $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$

Задайте явно множества

$L = \{e \mid e \in A$ и $e \notin B\}$

$V = \{K \mid K \subset A\}$

$J = \{y \in B \mid y < 0\}$

1.3 Операции с множествами

В прошлом разделе мы рассмотрели как задать множества через свойства, такой способ удобен, но может легко приводить к ошибкам, если не хуже. Рассмотрим пример наивного отношения к множествам, а именно парадокс Рассела. Я приведу две формулировки, школьную версию и строго математическую.

Школьная версия носит название парадокс списков. Положим мы хотим составить список всех книг, которые не содержат в своем тексте своего названия. Нужно ли в этот список вписать его название? Если да, то он будет нарушать свое же условие, если нет, то его придется вписать.

Теперь приведем математическую формулировку. Рассмотрим множество

$$M = \{A \mid \varnothing \subset A\} \text{ – множество множеств, вкючающих в себя пустое.}$$

Под условие подходит любое множество (см. 1.2.2), то есть для всякого множества D, $D \in M$. В результате получается так называемое множество всех множеств, теперь покажем к каким последствиям это приведет. Пусть

$$K = \{F \in M \mid F \notin F\} \text{ – множество множеств, не содержащих себя.}$$

Если кому-то психологически тяжело воспринимать утверждения $B \in B$ и $B \notin B$, то воспринимайте это как книгу, цитирующую саму себя.

Верно ли что $K \in K$? Докажем от противного, предположим $K \notin K$, это попадает под условие множества $K \Rightarrow K \in K$. Противоречие, значит $K \in K$.
Но подождите, давайте теперь докажем что $K \notin K$, так же от противного. Положим противное, то есть $K \in K$, тогда условие K не выполнено, ведь в K лежат множества, **не** содержащие себя $\Rightarrow K \notin K$. Получается противоричивая ситуация, $K \in K$ и $K \notin K$, а такое невозможно.

В чем же проблема? Множество M задано не корректно, в нем даже косвенно не указано откуда нужно брать элементы. Проще говоря наша аксиоматика не допускает существования множества всех множеств.

Обсудим операции с множествами. Для двух множеств A и B мы хотим иметь возможность объединить вместе все их элементы и собрать из них новое множество:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\} \text{ – объединение}$$

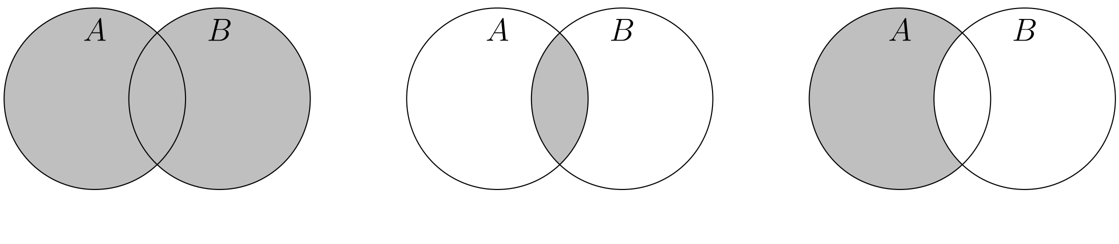
Далее мы хотим уметь отобрать общие элементы для этих двух множеств, т.е. те, где они пересекаются:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\} \text{ – пересечение}$$

А так же элементы, которые есть в первом, но не втором множестве:

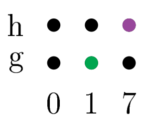
$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ – вычитание}$$

Обратите внимание, что первые две операции симметричны, а третья – нет. Эти операции удобно визуализировать диаграммами Венна, они интуитивно понятны и не требуют пояснений.



Для последней операции нам понадобится новый объект под названием упорядоченная пара, она обозначается как (p, q), где p – первый элемент, а q – второй. Мы не будем строго задавать этот объект и ограничемся интуитивным представлением.

Предподожим у нас есть два множества $A = \{0, 1, 7\}$ и $B = \{g, h\}$, и мы хотим составить таблицу



Каждая точка отвечает упорядоченной паре. Например, зеленая точка – это пара $(1, g)$, фиолетовая – $(7, h)$. Или можно явно записать таблицу со всеми парами вместо точек:

h	$(0,h)$	$(1,h)$	$(7,h)$
g	$(0,g)$	$(1,g)$	$(7,g)$
	0	1	7

Явно множество всех таких пар будет задаваться следующим образом:

$$\{(0, g), (1, g), (7, g), (0, h), (1, h), (7, h)\}$$

Зададим его через свойства, но для этого нужно их сформулировать. Принцип такой, на первых позициях стоят только элементы A, а на вторых только элементы B.

Определение 1.3.1. Декартовым произведением множеств A и B называется множество упорядоченных пар (p, q), со свойством $p \in A$ и $q \in B$.

$$A \times B := \{(p, q) \mid p \in A, q \in B\} \text{ – декартово произведение}$$

Если A и B – дискретные множества, то декартово произведение визуализируется через сетку или таблицу.

Примеры. Рассмотрим результаты разных операций на примере $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$.

$$\{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\}$$
$$\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\}$$
$$\{1,2\} \setminus \{1,3\} = \{2\}$$
$$\{1,3\} \setminus \{1,2\} = \{3\}$$

$$\{1,2\} \times \{1,3\} = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\}$$
$$\{1,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(3,1),(3,2)\}$$

Здесь видно что вычитание и декартово произведение не симметричны, если поменять множества местами – результат изменится, как, например, при разности чисел.

Упражнения 1.3.

1. Сформулируйте отрицание
$x_1 \in A \cup B$, $x_2 \in A \cap B$, $x_3 \in A \setminus B$.

9. Пусть A и B – произвольные множества. Докажите $A \setminus B = \varnothing \iff A \subset B$.

2. Задайте явно и визуализируйте
$\{\alpha, \beta, \gamma\} \times \{1, 2, 3\}$, $\{0, 1\}^2$,
$\{1, 2, 3\} \times \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\{0, 1\}^3$.

3. Задайте через свойства
U – множество четных чисел
S – множество нечетных чисел.

4. Докажите что нет одновременно четных и нечетных чисел
т.е. что $U \cap S$ пусто.

5. Докажите что $0 \notin S$ и $U \cup S = \mathbb{Z}$.

6. Пусть $X = \{0, 3, b, c\}, Y = \{0, c\}$,
$Z = \{3, b, d\}$. Задайте явно:

$X \cup Y$	$X \setminus Z$	$Z \cup X \cup Y$	$(Y \cap X) \times Y$
$Y \cup Z$	$Y \setminus Z$	$X \cap Y \cap Z$	$Y \cap (X \times Y)$
$Y \cap Z$	$(X \setminus Z) \setminus Y$	$(Y \cup Z) \setminus X$	$(Y \cup X) \times Y$
$Z \cap X$	$X \setminus (Z \setminus Y)$	$Y \cup (Z \setminus X)$	$Y \cup (X \times Y)$.

7. Пусть A и B – произвольные множества. Докажите
$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$
$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$
Верно ли обратное? Приведите примеры.

8. Схематично визуализируйте следующие множества: $\mathbb{N} \times \{0, 1\}, \{0, 1\} \times \mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

1.4 Доказательства

Напоминание кванторов

$\forall$	– для всякого
$\exists$	– существует/найдется
$:$	– такой, что
$:=$	– равенство по определению
$\Rightarrow$	– следовательно (импликация)
$\iff$	– равносильно/тогда и только тогда.
$\overset{\text{def}}{\iff}$	– равносильно по определению.

Важнейшим умением в математических доказательств является формулирование отрицаний, т.е. утверждений, опровергающий изначальное. Это умение нарабатывается с опытом, поэтому приведем только общие соображения. Следующие закономерности не являются универсальными и каждое отрицание должно появляться из логических соображений.

Если увеждение верно для всех объектов, то опровержением будет не выполнение даже для одного объекта. Напротив, если утверждение верно для какого-то объекта, то отрицанием будет не выполнение для всех объектов.

Отдельно необходимо сказать про импликацию двух утверждений $P \Rightarrow Q$. Ее отрицанием будет выполнение P и **не** выполнение Q, и никак иначе. Любая другая ситуация не будет опровергать $P \Rightarrow Q$.

Теперь займемся практикой доказательств и работы с определениями. Ниже приведены несколько относительно простых утверждений и их доказательства. Доказательства намеренно сделаны претенциозно и со всей строгостью, чтобы у читателя появлялось представление того, как должно оформляться математическое доказательство. Но сначала дадим несколько определений.

Определение 1.4.1. Отрезком между числами a и b, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \leq b$, называется множество

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Определение 1.4.2. Множество $X \subset \mathbb{R}$ – ограничено сверху, если

$$\exists m_0 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad a \leq m_0$$

ограничено снизу, если

$$\exists m_1 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad m_1 \leq a$$

и просто ограничено, если

$$\exists m_2 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad |a| \leq m_2$$

Утверждение 1.4.3. отрезок – ограниченное множество.

Доказательство. По определению отрезка 1.4.1

$$[a, b] := \{y \in \mathbb{R} \mid a \leq y \leq b\}$$

А доказать необходимо ограниченность, то есть

$$\exists s_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \quad |x| \leq s_0$$

Для этого достаточно явно предоставить $s_0 \in \mathbb{R}$ и показать почему оно подходит.
Пусть

$$s_0 = |a| + |b| \quad (\text{или } s_0 = \max\{|a|, |b|\})$$

Теперь почему для этого s_0 выполнено условие ограниченности. Пусть $x_1 \in [a, b]$, тогда

$$x_1 \in [a, b] \Rightarrow a \le x_1 \le b$$

Из свойств модуля получаем что

$$b \le |b| \le |a| + |b| = s_0 \Rightarrow b \le s_0$$

$$a \ge -|a| \ge -(|a| + |b|) = -s_0 \Rightarrow a \ge -s_0$$

Собираем все вместе

$$-s_0 \le x_1 \le s_0 \Rightarrow |x_1| \le s_0$$

Эти рассуждения справедливы для произвольного x_1, а значит все элементы отрезка ограничены числом s_0. □

Утверждение 1.4.4. Множество $[0, 1] \cap [2, 3]$ – пусто.

Доказательство. Пусть

$$M = [0, 1] \cap [2, 3] := \{x \mid x \in [0, 1], x \in [2, 3]\}$$

Предположим противное, то есть $M \neq \varnothing$. Это значит что

$$\exists x_0 \in M$$

Распишем продробнее

$$x_0 \in M \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_0 \in [2, 3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x_0 \le 1 \\ 2 \le x_0 \le 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \le x_0 \le 1$$

Это противоречие, значит M – пусто. □

Утверждение 1.4.5. $A \cup B = \varnothing \iff \begin{cases} A = \varnothing \\ B = \varnothing \end{cases}$

При доказательстве тождества двух утверждений $P \iff Q$, необходимо доказывать сразу две импликации: $P \Rightarrow Q$ и $P \Leftarrow Q$. Тут можно привести аналогию – чтобы доказать равенство двух чисел $a = b$, мало доказать что $a \le b$, необходимо доказывать и $a \ge b$.

Доказательство. Сначала докажем импликацию вправо ($\Rightarrow$), то есть докажем что

$$A \cup B = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} A = \varnothing \\ B = \varnothing \end{cases}$$

По определению $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$. Докажем от противного, что, если $A \cup B = \varnothing$, то $A = \varnothing$ ($A \cup B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$). Действительно, если $A \neq \varnothing$, то

$$\exists x_0 \in A \Rightarrow \exists x_0 \in A \cup B \Rightarrow A \cup B \neq \varnothing$$

Это противоречие, значит A – пусто. Аналогичные утверждения справедливы и для B, таким образом и A, и B – пусты. Импликация вправо доказана.

Теперь импликация влево ($\Leftarrow$), а именно

$$A \cup B = \varnothing \Leftarrow \begin{cases} A = \varnothing \\ B = \varnothing \end{cases}$$

По условию $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$. Предположим что $A \cup B \neq \varnothing$, тогда

$$\exists x_0 \colon x_0 \in A \cup B \Rightarrow x_0 \in A \text{ или } x_0 \in B$$

Но и A, и B – пусты, а это противоречие. Таким образом утверждение доказано. □

Поговорим чуть больше про $\varnothing$. Почему мы решили что оно такое одно в природе, ведь почему нельзя сказать что пустота бывает разной? Для ответа на этот вопрос сначала нужно сказать что значит, что множества разные или одинаковы.

Определение 1.4.6. Множества A и B одинаковы (или равны), если

$$\forall x\ (x \in A \iff x \in B) \overset{\text{def}}{\iff} A = B$$

Неформально можно сказать так, в A и B лежат одни и теже элементы.

Теперь можно ответить на изначальный вопрос.

Утверждение 1.4.7. Пустое множество – единственно.

Доказательство. Предположим противное. То есть нашлись два разных пустых множеств $\varnothing_1$ и $\varnothing_2$, причем $\varnothing_1 \neq \varnothing_2$. Если оба этих множеств пусты, то по определению 1.1.3

$$\forall x\ (x \notin \varnothing_1) \text{ и } \forall y\ (y \notin \varnothing_2)$$

□

Утверждение 1.4.8. (Критерий равенства множеств)

$$A = B \iff (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$$

Доказательство. ($\Rightarrow$)
Положим $A = B$, тогда $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$, а по утверждению 1.4.5. мы знаем что $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$. Таким образом $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$.

($\Leftarrow$)
Положим $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$, тогда по утверждению 1.4.5. получаем что

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} (A \setminus B) = \varnothing \\ (B \setminus A) = \varnothing \end{cases}$$

Если $(A \setminus B) = \varnothing$, то □

Упражнения 1.4.

1. Сформулируйте отрицание ограниченности.

2. Докажите утверждение 1.4.3. от противного.

3. Запишите отрицание

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{N} < \varepsilon$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \colon m = 2n$$
$$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{R} \colon y = \frac{1}{x}$$
$$\exists a \colon \forall n \in \mathbb{N}\ \frac{1}{n} < a$$
$$\exists M \colon \forall n \in \mathbb{N}\ n < M$$

4. Докажите или опровергните утверждения из предыдущего задания.

5. Докажите что $\{0,1\} \neq \{0,2\}$.

5. Докажите $A = B \iff (A \subset B \text{ и } B \subset A)$. Проведите аналогию с $a = b \iff (a \leq b \text{ и } a \geq b)$.

6. Пусть A и B – множества. Докажите

$$A \times B = \varnothing \iff \left[\begin{aligned} A = \varnothing \\ B = \varnothing \end{aligned}\right.$$

7. Докажите что $[0,1] \subset [0,2]$.

8. Докажите что $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ – ограниченное множество.

1.5 Задачи к Главе 1

1.

2. Пусть A, B, C – множества. Докажите
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

3. Пусть A и B – множества.
Докажите что

- $A \setminus B \subset A$
- $A \cap B \subset A \cup B$

5. Пусть A и B – множества.
Докажите что $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$.

6. Пусть $A, B \subset X$. Докажите, что
$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset X \setminus B$.

7. Пусть A, B, C – множества. Докажите
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

9. Пусть A, B, C, D – множества.
Докажите или опровергните
$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

10. Пусть A и B – множества. Докажите
$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

11. Пусть A и B – множества. Докажите
$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

12. Пусть A, B, C – множества.
Верны ли следующие утверждения?
Если $A \subset B$, то $A \times C \subset B \times C$.
Если $A \times C = B \times C$ и $C \neq \varnothing$, то $A = B$.

13. Пусть B – фиксированное множество.
Найдите все множества A, для которых
$A \cup B = A \cap B$.

14. Найдите все множества A и B, такие что
$A \times B = B \times A$.

15. Пусть B – фиксированное множество.
Найдите все множества A, для которых
$A \setminus B = A$.

Глава 2

Отображения

2.1 Терминология

Определение 2.1.1. Отображением множества A в множество B называется сопоставление каждому элементу A, ровно одного элемента B.

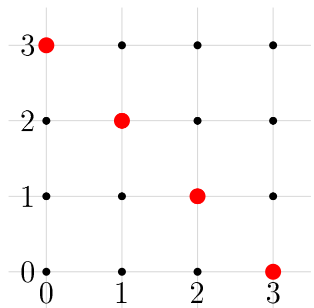
Почти всегда одновременно речь будет идти про несколько разных отображений, поэтому принято давать им обозначения в виде букв, например f, g, φ, Γ и тд.

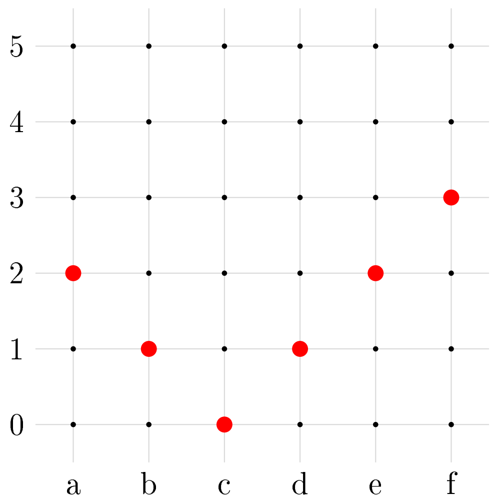
Фраза 'Отображение f множества A в множество B' на математическом языке записывается как $f : A \to B$.

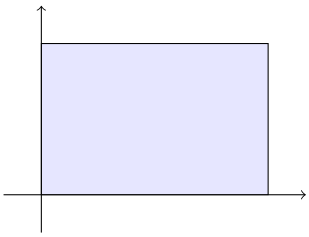
Если отображение f сопоставляет элементу d элемент v, то это можно обозначить двумя способами:

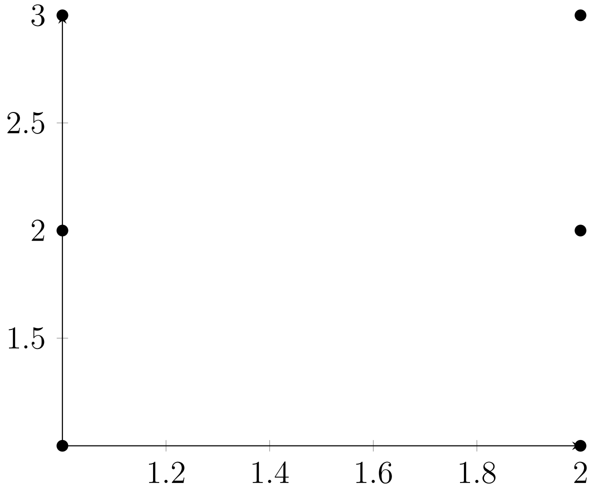
$$d \mapsto v \text{ или } v = f(d)$$

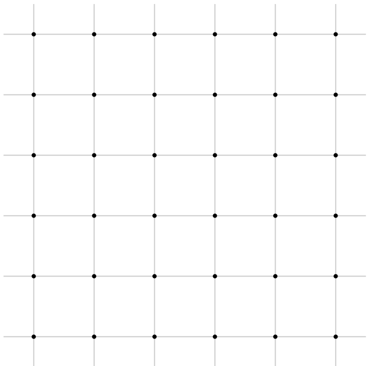
первый способ прост для понимания и удобен когда мы хотим сказать что d переходит в v. Второй способ использует название отображения и удобен когда в рассуждениях фигурируют несколько отображений.











определение, примеры, график,