

# Теория отображений для школьников

Черногорцев Михаил

11 февраля 2026 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Теория множеств</b>	<b>3</b>
1.1	Принадлежность . . . . .	3
1.2	Включение . . . . .	5
1.3	Операции с множествами . . . . .	7
1.4	Доказательства . . . . .	9
1.5	Задачи к Главе 1 . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Отображения</b>	<b>12</b>
2.1	Терминология . . . . .	12

## 1.4 Доказательства

Напоминание кванторов

$\forall$	– для всякого
$\exists$	– существует/найдется
:	– такой, что
$:=$	– равенство по определению
$\Rightarrow$	– следовательно (импликация)
$\Leftrightarrow$	– равносильно/тогда и только тогда.

Теперь займемся практикой доказательств и работы с определениями. Ниже приведены два относительно простых утверждений и их доказательства. Доказательства намеренно сделаны претенциозно и со всей строгостью, чтобы у читателя появлялось представление того как должно оформляться математическое доказательство на примере не сложных понятий. Но сначала дадим несколько определений.

**Определение 1.4.1.** Отрезком между числами  $a$  и  $b$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $a \leq b$  называется множество

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

**Определение 1.4.2.** Множество  $X \subset \mathbb{R}$  – ограничено сверху, если

$$\exists m_0 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad a \leq m_0$$

ограничено снизу, если

$$\exists m_1 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad m_1 \leq a$$

и просто ограничено, если

$$\exists m_2 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad |a| \leq m_2$$

**Утверждение 1.4.3.** отрезок – ограниченное множество.

*Доказательство.* По определению отрезка 1.4.1

$$[a, b] := \{y \in \mathbb{R} \mid a \leq y \leq b\}$$

А доказать необходимо ограниченность, то есть

$$\exists s_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \quad |x| \leq s_0$$

Для этого достаточно явно предоставить  $s_0 \in \mathbb{R}$  и показать почему оно подходит.

Пусть

$$s_0 = |a| + |b| \quad (\text{или } s_0 = \max\{|a|, |b|\})$$

Теперь почему для этого  $s_0$  выполнено условие ограниченности. Пусть  $x_1 \in [a, b]$ , тогда

$$x_1 \in [a, b] \Rightarrow a \leq x_1 \leq b$$

Из свойств модуля получаем что

$$b \leq |b| \leq |a| + |b| = s_0 \Rightarrow b \leq s_0$$

$$a \geq -|a| \geq -(|a| + |b|) = -s_0 \Rightarrow a \geq -s_0$$

Собираем все вместе

$$-s_0 \leq x_1 \leq s_0 \Rightarrow |x_1| \leq s_0$$

Эти рассуждения справедливы для произвольного  $x_1$ , а значит все элементы отрезка ограничены числом  $s_0$ .  $\square$

**Утверждение 1.4.4.** Множество  $[0, 1] \cap [2, 3]$  – пусто.

*Доказательство.* Пусть

$$M = [0, 1] \cap [2, 3] := \{x \mid x \in [0, 1], x \in [2, 3]\}$$

Предположим противное, то есть  $M \neq \emptyset$ . Это значит что

$$\exists x_0 \in M$$

Распишем подробнее

$$x_0 \in M \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_0 \in [2, 3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x_0 \leq 1 \\ 2 \leq x_0 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x_0 \leq 1$$

Это противоречие, значит  $M$  – пусто.  $\square$

**Утверждение 1.4.5.**  $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases}$

*Доказательство.* При доказательстве  $\square$

#### Упражнения 1.4.

$$\exists M: \forall n \in \mathbb{N} \ n < M$$

6. Сформулируйте отрицание ограниченности.

7. Докажите или опровергните утверждения из предыдущего задания.

6. Докажите утверждение 1.4.3. от противного.

6. Запишите отрицание

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \ \exists m: m = 2n \\ \forall x \in \mathbb{Z} \ \exists y \in \mathbb{R}: y = \frac{1}{x} \\ \exists a: \forall n \in \mathbb{N} \ \frac{1}{n} < a \end{aligned}$$

8. Докажите  $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ и } B \subset A)$

1. Пусть  $A$  и  $B$  – множества. Докажите

$$\begin{aligned} A \times B = \emptyset &\Leftrightarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases} \\ A \cap B = \emptyset &\Leftrightarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$