

Теория отображений для школьников

Черногорцев Михаил

11 февраля 2026 г.

Оглавление

1	Теория множеств	3
1.1	Принадлежность	3
1.2	Включение	5
1.3	Операции с множествами	7
1.4	Доказательства	9
1.5	Задачи к Главе 1	12
2	Отображения	13
2.1	Терминология	13

Глава 1

Теория множеств

Первой темой является вводный курс по теории множеств, в котором затронутся базовые термины и понятия. Очень важно освоить этот раздел, поскольку на протяжении всего курса мы будем работать именно с множествами.

1.1 Принадлежность

Само множество является неопределяемым понятием, но мы все еще можем дать интуитивное представление, поэтому

Определение 1.1.1. Множество – это набор произвольных элементов. Элементы в множестве не упорядочены и каждый элемент учитывается только один раз (*даже если случились повторения*).

Точнее говоря, множество определяется через набор своих свойств и действий, которые вообще можно делать с ними (например объединять). По научному мы выбираем набор аксиом, то есть утверждений, которые принимаются за истину и *чаще всего* интуитивно понятны, а все остальное выводится с помощью логики. Классически используется аксиоматика Цермелло-Френкеля, мы не будем ее разбирать поскольку это выходит за рамки курса, но важно понимать, что множество – объект на поверхности очень простой, но коварный, и халатное обращение с множествами приводит к парадоксам.

Теперь подумайте, а как вообще можно задать множество? Самый простой ответ – список, т.е. явно перечислить элементы

$$M = \{a, b, c\} \quad B = \{4, M, \{\delta\}\} \quad Y = \{0, 1, \{x, 1\}\}$$

Классически само множество обозначается заглавной буквой латинского алфавита, а элементы перечисляются внутри фигурных скобок через запятую. Определение 1.1.1 не запрещает одному множеству быть элементом другого, образуя как бы пакет с пакетами. Более того множество может лежать само в себе. Отдельно отметим, что во всех приведенных выше множествах ровно три элемента ($\{x, 1\}$ считается как один элемент).

Любой элемент должен либо лежать в множестве, либо нет, третьего не дано, и самое важное что мы хотим уметь делать – это проверять лежит ли конкретный элемент в данном множестве.

Определение 1.1.2. Утверждение 'Элемент b принадлежит множеству M ' на математическом языке записывается как $b \in M$. Отрицание этого утверждения как $b \notin M$, то есть b не принадлежит M .

И, к сожалению, уже это бывает сложной задачей, поэтому рассмотрим

Примеры. В следующем множестве 5 элементов и каждый выделен отдельным цветом

$$A = \{\{a, b\}, -8, \{0, \{0\}\}, \{0\}, \Gamma\}$$

и только про эти 5 наборов символов можно сказать, что они принадлежат множеству A . Записи $\{a\} \in A$ или $0 \in A$ будут неверны, в отличии от $\{a, b\} \in A$, $-8 \in A$, $\{0, \{0\}\} \in A$, $\{0\} \in A$ и $\Gamma \in A$. Утверждение $\{2\} \in \{1, \{1, 2\}\}$ так же неверно.

Еще одним важным понятием в математике является пустое множество, оно обозначается как \emptyset (или просто $\{\}$), и оно так же определяется через свои свойства, а именно

Определение 1.1.3. Существует множество \emptyset такое, что для всякого элемента a справедливо, что $a \notin \emptyset$.

Фраза 'для всякого элемента $a\dots'$ часто требует пояснений. Она **не** означает что мы берем конкретно букву a латинского алфавита. Все ровно наоборот, так обозначается произвольный элемент, который мы вообще можем себе представить. Конкретные элементы будут обозначаться буквой с индексом: $x_0, a_3, b_1\dots$ Словосочетание 'для всякого' принято заменять символом ' \forall ', такие символы называются кванторами и нужны для более короткой записи математических утверждений. Определение 1.1.3 записывается в кванторах как

$$\exists \emptyset : \forall a (a \notin \emptyset)$$

Другие частые обозначения:

' \exists ' – существует/найдется ':=' – такой, что ':=' – равенство по определению.

Из определения 1.1.3 сразу можно понять, что если вы видите запись $x_0 \in \emptyset$ (*вставьте любой набор символов вместо x_0*), то это либо противоречие, либо парадокс, поскольку она явно противоречит определению.

Упражнения 1.1. Проверьте следующие утверждения

$$1. B = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\} \quad 3. F = \{0, 5, \{0\}, \{2\}, \{\}\} \quad 5. G = \{1, a, \{1, a\}, \{\{1\}\}\}$$

$$1 \in B$$

$$\{0\} \in F$$

$$1 \in G$$

$$2 \in B$$

$$\{0, 5\} \in F$$

$$a \in G$$

$$\{1\} \in B$$

$$\{0, 2\} \in F$$

$$\{a\} \in G$$

$$\{2\} \in B$$

$$\{0, \{0\}\} \in F$$

$$\{1\} \in G$$

$$\{1, \{1\}\} \in B$$

$$\emptyset \in F$$

$$\{1, a\} \in G$$

$$\{1, 2\} \in B$$

$$\{\{\}, \emptyset\} \in F$$

$$\{\{1, a\}\} \in G$$

$$2. D = \{\{0, \{1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}\}$$

$$0 \in D$$

$$\{0\} \in D$$

$$\{0, \{1\}\} \in D$$

$$\{\{0\}, 1\} \in D$$

$$\{\{0\}, \{1\}\} \in D$$

$$\{1\} \in D$$

$$4. C = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$1 \in C$$

$$2 \in C$$

$$\{1, 1\} \in C$$

$$\{2\} \in C$$

$$\{1, 2\} \in C$$

$$\{\{1\}, \{2\}\} \in C$$

$$6. Переведите на русский$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m: m = 2n$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{R}: y = \frac{1}{x}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \exists k \in \mathbb{N}: k > n$$

$$\exists a: \forall n \in \mathbb{N} \frac{1}{n} < a$$

$$\exists M: \forall n \in \mathbb{N} n < M$$

$$\exists c \in \mathbb{Z}: \forall n \in \mathbb{Z} n \leq c$$

С помощью \emptyset в теории множеств задаются натуральные числа, например число 4 будет определено следующим образом

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

или для большей аутентичности

$$\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$$

1.2 Включение

Помимо принадлежности элемента к множеству, возникает необходимость рассматривать множество не целиком, а только его часть. Отсюда естественным образом возникает

Определение 1.2.1. Множество A включено в множество B , если:

для всякого $x \in A$ верно что $x \in B$. Обозначается как $A \subset B$. Множество A называют подмножеством множества B . В кванторах $A \subset B \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Неформальная формулировка звучит так: Все элементы первого множества должны быть элементами второго множества.

Полезно заранее выписать отрицание утверждения $A \subset B$, а именно найдется такой элемент $x_0 \in A$, что $x_0 \notin B$. Записывается оно как $A \not\subset B$.

Примеры. Пусть $A = \{1, 2, \{0\}\}$, проверим утверждение $\{1, 2\} \subset A$. В множестве $\{1, 2\}$ всего два элемента и достаточно явно проверить определение.

$$\begin{aligned} 1 &\in \{1, 2\} \text{ и } 1 \in A - \text{верно} \\ 2 &\in \{1, 2\} \text{ и } 2 \in A - \text{верно} \end{aligned}$$

Значит утверждение $\{1, 2\} \subset A$ – верно. Теперь проверим $\{0, 2\} \subset A$ аналогичным образом

$$\begin{aligned} 2 &\in \{2, 0\} \text{ и } 2 \in A - \text{верно} \\ 0 &\in \{2, 0\} \text{ и } 0 \in A - \text{неверно} \end{aligned}$$

Поскольку $0 \notin A$ вся логическая цепочка рушится и получается что $\{0, 2\} \not\subset A$.

Утверждение 1.2.2. Для всякого множества A справедливо что $\emptyset \subset A$.

Доказательство. На этом утверждении удобно продемонстрировать структуру математического доказательства, а также пару частых приемов. Прежде всего доказательство будет от противного, его структура выглядит так:

Предполагаем что утверждение 1.2.2 неверно \rightarrow с помощью рассуждений получаем противоречие \rightarrow мы предположили что 1.2.2 неверно и получили ошибку, значит 1.2.2 верно.

Предположим противное. Теперь необходимо сформулировать отрицание утверждения 1.2.2, оно звучит так

Нашлось такое множество A , что $\emptyset \not\subset A$ – это то, что мы предполагаем

По предположению $\emptyset \not\subset A$, распишем это утверждение – найдется $x_1 \in \emptyset$, такой что $x_1 \notin A$ (см. 1.2.1). Тот кто внимательно читал предыдущий раздел уже увидели, что фраза "найдется $x_1 \in \emptyset$ " не может быть правдой, поскольку противоречит определению 1.1.3. Мы пришли к противоречию (получили ложное утверждение), таким образом 1.2.2 верно. \square

До сих пор упоминался только один способ задать множество – явно перечислить его элементы. Этот способ удобен при работе с *маленькими* множествами и абсолютно не подходит для всего остального. На практике сначала берется уже готовое множество, и из него выбирается подмножество, отвечающее конкретному условию. Классический шаблон, котором мы будем пользоваться:

$$M = \{\text{натуральные числа со свойством меньше } 6\}$$

Или же на математическом

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$$

Разберем подробнее. **Фигурные скобки** обозначают границы множества, внутри описаны элементы, вещи снаружи нам не интересны. Далее мы видим вертикальный **разделитель** и текст по обе стороны.

Текст **слева** указывает что будет являться элементами множества (*числа, формулы, функции, другие множества...*). Здесь можно указать из какого множества будут браться элементы **или** какое преобразование нужно сделать с элементом. Но очень важно чтобы до или после ' $|$ ' было указано откуда берутся элементы. В нашем примере элементы из \mathbb{N} . Обозначение элемента x выбрано произвольно, тоже множество можно задать и так

$$M = \{\xi \in \mathbb{N} \mid \xi < 6\} = \{t \in \mathbb{N} \mid t < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

В математике важны не столько сами символы, сколько их связь между собой и взаимное расположение.

Текст **справа** задает свойства, которым должны отвечать элементы, в нашем примере элементы должны быть меньше 6. Сам **разделитель** заменяет слова 'со свойством' или 'такой, что'. Таким образом утверждение выше должно читаться так:

M – множество элементов ξ из натуральных чисел, со свойством ξ меньше 6.

Примеры.

$$B = \left\{ \frac{h}{3} \mid h \in \mathbb{N}, h < 4 \right\} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\} \text{ – тут } h \text{ делится на 3 перед попаданием в } B$$

$$F = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} \text{ – здесь берутся натуральные числа и возводятся в квадрат}$$

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\} \text{ – множество иррациональных чисел}$$

Озвучим как читается последнее утверждение

I – множество элементов x из \mathbb{R} таких, что x не является рациональным.

Или множество элементов из \mathbb{R} , которые не рациональны.

Не лишним будет привести примеры некорректного задания множеств и частые ошибки
 $M = \{\mathbb{Z} \mid x < 6\}$ – потерян элемент, не понятно что будет лежать в множестве

$K = \{x \in \mathbb{N} \mid y < 7\}$ – нет связи между названием элемента и условием. В множестве лежат иксы, а условие наложено на y .

$B = \{x \mid x > 9\}$ – не хватает информации о том, чем является икс. Целым? Рациональным?
 Это вообще число?

$D = \{a \subset \mathbb{N} \mid a < 4\}$ – перепутаны знаки \in и \subset , из за чего смысл полностью потерян.

$Z = \{z \in \mathbb{N} \mid 2x\}$ – справа нет условия.

Упражнения 1.2.

1. $C = \{1, 2, \{1, 2\}, 0, \{r\}\}$

Найдите ложные утверждения

$$\{2\} \in C, \quad \{2\} \subset C$$

$$0 \in C, \quad 0 \subset C$$

$$\emptyset \in C, \quad \emptyset \subset C$$

$$\{1, 2\} \in C, \quad \{1, 2\} \subset C$$

$$\{1, 0\} \in C, \quad \{1, 0\} \subset C$$

$$\{r\} \in C, \quad \{r\} \subset C$$

$$\{r, r\} \in C, \quad \{r, r\} \subset C$$

$$\{1, 2, 0\} \in C, \quad \{1, 2, 0\} \subset C$$

$$\{\{r\}\} \in C, \quad \{\{r\}\} \subset C$$

2. Пусть $B = \{1, 2\}$

Перечислите все подмножества B .

3. Пусть $R = \{e, b\}$. Докажите от противного, что $R \subset R$.

4. Задайте явно множества

$$G = \{s + f \mid s, f \in \mathbb{Z}, s^2 + f^2 < 9\}$$

$$P = \{3n + 2 \mid n \in \{0, 1, 2\}\}$$

$$X = \{\sqrt{c} \mid c \in \mathbb{N} \text{ и } c < 5\}$$

5. Задайте через свойства множества

$$\{4, 9, 16, 25\}, \quad \{-1, 0, 1, 2\}, \quad \{3, 5, 7, 9\}.$$

6. Пусть $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$

Задайте явно множества

$$L = \{e \mid e \in A \text{ и } e \notin B\}$$

$$V = \{K \mid K \subset A\}$$

$$J = \{y \in B \mid y < 0\}$$

1.3 Операции с множествами

В прошлом разделе мы рассмотрели как задать множества через свойства, такой способ удобен, но может легко приводить к ошибкам, если не хуже. Рассмотрим пример наивного отношения к множествам, а именно парадокс Рассела. Я приведу две формулировки, школьную версию и строго математическую.

Школьная версия носит название парадокс списков. Положим мы хотим составить список всех книг, которые не содержат в своем тексте своего названия. Нужно ли в этот список вписать его название? Если да, то он будет нарушать свое же условие, если нет, то его придется вписать.

Теперь приведем математическую формулировку. Рассмотрим множество

$$M = \{A \mid \emptyset \subset A\} \text{ – множество множеств, включающих в себя пустое.}$$

Под условие подходит любое множество (см. 1.2.2), то есть для всякого множества D , $D \in M$. В результате получается так называемое множество всех множеств, теперь покажем к каким последствиям это приведет. Пусть

$$K = \{F \in M \mid F \notin F\} \text{ – множество множеств, не содержащих себя.}$$

Если кому-то психологически тяжело воспринимать утверждения $B \in B$ и $B \notin B$, то воспринимайте это как книгу, читирующую саму себя.

Верно ли что $K \in K$? Докажем от противного, предположим $K \notin K$, это попадает под условие множества $K \Rightarrow K \in K$. Противоречие, значит $K \in K$.

Но подождите, давайте теперь докажем что $K \notin K$, так же от противного. Положим противное, то есть $K \in K$, тогда условие K не выполнено, ведь в K лежат множества, **не** содержащие себя $\Rightarrow K \notin K$. Получается противоречивая ситуация, $K \in K$ и $K \notin K$, а такое невозможно.

В чем же проблема? Множество M задано не корректно, в нем даже косвенно не указано откуда нужно брать элементы. Проще говоря наша аксиоматика не допускает существования множества всех множеств.

Обсудим операции с множествами. Для двух множеств A и B мы хотим иметь возможность объединить вместе все их элементы и собрать из них новое множество:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\} \text{ – объединение}$$

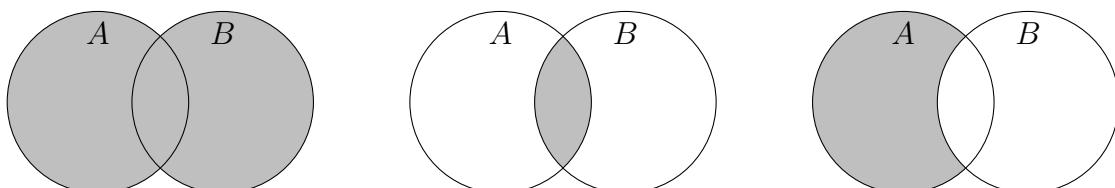
Далее мы хотим уметь отобрать общие элементы для этих двух множеств, т.е. те, где они пересекаются:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\} \text{ – пересечение}$$

А также элементы, которые есть в первом, но не во втором множестве:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ – вычитание}$$

Обратите внимание, что первые две операции симметричны, а третья – нет. Эти операции удобно визуализировать диаграммами Венна, они интуитивно понятны и не требуют пояснений.



Для последней операции нам понадобится новый объект под названием упорядоченная пара, она обозначается как (p, q) , где p – первый элемент, а q – второй. Мы не будем строго задавать этот объект и ограничимся интуитивным представлением.

Предположим у нас есть два множества $A = \{0, 1, 7\}$ и $B = \{g, h\}$, и мы хотим составить таблицу

h	●	●	●
g	●	●	●

Каждая точка отвечает упорядоченной паре. Например, зеленая точка – это пара $(1, g)$, фиолетовая – $(7, h)$. Или можно явно записать таблицу со всеми парами вместо точек:

0 1 7

h	(0, h)	(1, h)	(7, h)
g	(0, g)	(1, g)	(7, g)
	0	1	7

Явно множество всех таких пар будет задаваться следующим образом:

$$\{(0, g), (1, g), (7, g), (0, h), (1, h), (7, h)\}$$

Зададим его через свойства, но для этого нужно их сформулировать. Принцип такой, на первых позициях стоят только элементы A , а на вторых только элементы B .

Определение 1.3.1. Декартовым произведением множеств A и B называется множество упорядоченных пар (p, q) , со свойством $p \in A$ и $q \in B$.

$$A \times B := \{(p, q) \mid p \in A, q \in B\} \text{ – декартово произведение}$$

Если A и B – дискретные множества, то декартово произведение визуализируется через сетку или таблицу.

Примеры. Рассмотрим результаты разных операций на примере $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$.

$$\{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\}$$

$$\{1, 2\} \setminus \{1, 3\} = \{2\}$$

$$\{1, 3\} \setminus \{1, 2\} = \{3\}$$

$$\{1, 2\} \times \{1, 3\} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$$

$$\{1, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

Здесь видно что вычитание и декартово произведение не симметричны, если поменять множества местами – результат изменится, как, например, при разности чисел.

Упражнения 1.3.

1. Сформулируйте отрицание

$$x_1 \in A \cup B, x_2 \in A \cap B, x_3 \in A \setminus B.$$

2. Пусть A и B – произвольные множества.

Докажите $A \setminus B = \emptyset \iff A \subset B$.

3. Задайте явно и визуализируйте

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} \times \{1, 2, 3\}, \{0, 1\}^2,$$

$$\{1, 2, 3\} \times \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{0, 1\}^3.$$

4. Задайте через свойства

U – множество четных чисел

S – множество нечетных чисел.

5. Докажите что нет одновременно

четных и нечетных чисел

т.е. что $U \cap S$ пусто.

6. Докажите что $0 \notin S$ и $U \cup S = \mathbb{Z}$.

7. Пусть $X = \{0, 3, b, c\}, Y = \{0, c\}, Z = \{3, b, d\}$. Задайте явно:

$$\begin{array}{lll} X \cup Y & X \setminus Z & Z \cup X \cup Y \\ Y \cup Z & Y \setminus Z & X \cap Y \cap Z \\ Y \cap Z & (X \setminus Z) \setminus Y & (Y \cup Z) \setminus X \\ Z \cap X & X \setminus (Z \setminus Y) & Y \cup (Z \setminus X) \end{array} \quad \begin{array}{lll} (Y \cap X) \times Y \\ Y \cap (X \times Y) \\ (Y \cup Z) \setminus X \\ (Y \cup X) \times Y \\ Y \cup (X \times Y). \end{array}$$

8. Пусть A и B – произвольные множества.

Докажите

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$$

Верно ли обратное? Приведите примеры.

9. Схематично визуализируйте следующие множества: $\mathbb{N} \times \{0, 1\}, \{0, 1\} \times \mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

1.4 Доказательства

Напоминание кванторов

\forall	– для всякого
\exists	– существует/найдется
:	– такой, что
$:=$	– равенство по определению
\Rightarrow	– следовательно (импликация)
\iff	– равносильно/тогда и только тогда.
$\stackrel{\text{def}}{\iff}$	– равносильно по определению.

Важнейшим умением в математических доказательств является формулирование отрицаний, т.е. утверждений, опровергающий изначальное. Это умение нарабатывается с опытом, поэтому приведем только общие соображения. Следующие закономерности не являются универсальными и каждое отрицание должно появляться из логических соображений.

Если утверждение верно для всех объектов, то опровержением будет не выполнение даже для одного объекта. Напротив, если утверждение верно для какого-то объекта, то отрицанием будет не выполнение для всех объектов.

Отдельно необходимо сказать про импликацию двух утверждений $P \Rightarrow Q$. Ее отрицанием будет выполнение P и **не** выполнение Q , и никак иначе. Любая другая ситуация не будет опровергать $P \Rightarrow Q$.

Теперь займемся практикой доказательств и работы с определениями. Ниже приведены несколько относительно простых утверждений и их доказательства. Доказательства намеренно сделаны претенциозно и со всей строгостью, чтобы у читателя появлялось представление того, как должно оформляться математическое доказательство. Но сначала дадим несколько определений.

Определение 1.4.1. Отрезком между числами a и b , где $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \leq b$, называется множество

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Определение 1.4.2. Множество $X \subset \mathbb{R}$ – ограничено сверху, если

$$\exists m_0 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad a \leq m_0$$

ограничено снизу, если

$$\exists m_1 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad m_1 \leq a$$

и просто ограничено, если

$$\exists m_2 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad |a| \leq m_2$$

Утверждение 1.4.3. отрезок – ограниченное множество.

Доказательство. По определению отрезка 1.4.1

$$[a, b] := \{y \in \mathbb{R} \mid a \leq y \leq b\}$$

А доказать необходимо ограниченность, то есть

$$\exists s_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \quad |x| \leq s_0$$

Для этого достаточно явно предоставить $s_0 \in \mathbb{R}$ и показать почему оно подходит.
Пусть

$$s_0 = |a| + |b| \quad (\text{или } s_0 = \max\{|a|, |b|\})$$

Теперь почему для этого s_0 выполнено условие ограниченности. Пусть $x_1 \in [a, b]$, тогда

$$x_1 \in [a, b] \Rightarrow a \leq x_1 \leq b$$

Из свойств модуля получаем что

$$\begin{aligned} b &\leq |b| \leq |a| + |b| = s_0 \Rightarrow b \leq s_0 \\ a &\geq -|a| \geq -(|a| + |b|) = -s_0 \Rightarrow a \geq -s_0 \end{aligned}$$

Собираем все вместе

$$-s_0 \leq x_1 \leq s_0 \Rightarrow |x_1| \leq s_0$$

Эти рассуждения справедливы для произвольного x_1 , а значит все элементы отрезка ограничены числом s_0 . \square

Утверждение 1.4.4. Множество $[0, 1] \cap [2, 3]$ – пусто.

Доказательство. Пусть

$$M = [0, 1] \cap [2, 3] := \{x \mid x \in [0, 1], x \in [2, 3]\}$$

Предположим противное, то есть $M \neq \emptyset$. Это значит что

$$\exists x_0 \in M$$

Распишем подробнее

$$x_0 \in M \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_0 \in [2, 3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x_0 \leq 1 \\ 2 \leq x_0 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x_0 \leq 1$$

Это противоречие, значит M – пусто. \square

Утверждение 1.4.5. $A \cup B = \emptyset \iff \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases}$

При доказательстве тождества двух утверждений $P \iff Q$, необходимо доказывать сразу две импликации: $P \Rightarrow Q$ и $P \Leftarrow Q$. Тут можно привести аналогию – чтобы доказать равенство двух чисел $a = b$, мало доказать что $a \leq b$, необходимо доказывать и $a \geq b$.

Доказательство. Сначала докажем импликацию вправо (\Rightarrow), то есть докажем что

$$A \cup B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases}$$

По определению $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$. Докажем от противного, что, если $A \cup B = \emptyset$, то $A = \emptyset$ ($A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$). Действительно, если $A \neq \emptyset$, то

$$\exists x_0 \in A \Rightarrow \exists x_0 \in A \cup B \Rightarrow A \cup B \neq \emptyset$$

Это противоречие, значит A – пусто. Аналогичные утверждения справедливы и для B , таким образом и A , и B – пусты. Импликация вправо доказана.

Теперь импликация влево (\Leftarrow), а именно

$$A \cup B = \emptyset \Leftarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases}$$

По условию $A = \emptyset$ и $B = \emptyset$. Предположим что $A \cup B \neq \emptyset$, тогда

$$\exists x_0: x_0 \in A \cup B \Rightarrow x_0 \in A \text{ или } x_0 \in B$$

Но и A , и B – пусты, а это противоречие. Таким образом утверждение доказано. \square

Поговорим про равенства множеств, множества равны, если равны их определения, формализуется это так:

Определение 1.4.6. Множества A и B одинаковы (или равны), если

$$\forall x (x \in A \iff x \in B) \stackrel{\text{def}}{\iff} A = B$$

Неформально можно сказать так, в A и B лежат одни и те же элементы.

На практике часто встречается ситуация, что с определением неудобно работать. Для таких случаев доказываются утверждения, именуемые критериями, они эквивалентны нашему определению, но часто имеют более удобные формулировки.

Утверждение 1.4.7. (Критерий равенства множеств)

$$A = B \iff (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$$

Доказательство. (\Rightarrow)

Положим $A = B$, тогда $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$, а по утверждению 1.4.5. мы знаем что $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. Таким образом $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$.

(\Leftarrow)

Положим $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$, тогда по утверждению 1.4.5. получаем что

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \setminus B = \emptyset \\ B \setminus A = \emptyset \end{cases}$$

Если $(A \setminus B) = \emptyset$, то $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$, поскольку иначе вычитание будет не пусто. Аналогичные выводы делаются и из $B \setminus A = \emptyset$, а именно $\forall x (x \in B \Rightarrow x \in A)$. Совмещая эти два утверждения получаем тождество

$$\begin{cases} \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ \forall x (x \in B \Rightarrow x \in A) \end{cases} \iff \forall x (x \in B \iff x \in A) \stackrel{\text{def}}{\iff} A = B$$

□

Упражнения 1.4.

1. Сформулируйте отрицание ограниченности.
2. Докажите утверждение 1.4.3. от противного.
3. Докажите что $[0, 1] \subset [0, 2]$.
4. Запишите отрицание

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \frac{1}{N} < \varepsilon \\ \forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{R}: y = \frac{1}{x} \\ \exists a: \forall n \in \mathbb{N} \frac{1}{n} < a \\ \exists M: \forall n \in \mathbb{N} n < M. \end{aligned}$$

5. Докажите или опровергните утверждения из предыдущего задания.
6. Докажите из определения, что $\{0, 1\} \neq \{0, 2\}$. Затем проверьте это неравенство по критерию.
7. Докажите $A = B \iff (A \subset B \text{ и } B \subset A)$. Проведите аналогию с $a = b \iff (a \leq b \text{ и } a \geq b)$.
8. Пусть A и B – множества. Докажите $A \times B = \emptyset \iff \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases}$
9. Докажите что $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ – ограниченное множество.

1.5 Задачи к Главе 1

1.

2. Пусть A, B, C – множества. Докажите
 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

3. Пусть A и B – множества.

Докажите что

- $A \setminus B \subset A$
- $A \cap B \subset A \cup B$

5. Пусть A и B – множества.

Докажите что $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

6. Пусть $A, B \subset X$. Докажите, что
 $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset X \setminus B$.

7. Пусть A, B, C – множества. Докажите
 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
 $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

9. Пусть A, B, C, D – множества.
Докажите или опровергните

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$
$$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D).$$

10. Пусть A и B – множества. Докажите
 $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
 $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

11. Пусть A и B – множества. Докажите
 $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

12. Пусть A, B, C – множества.
Верны ли следующие утверждения?
Если $A \subset B$, то $A \times C \subset B \times C$.
Если $A \times C = B \times C$ и $C \neq \emptyset$, то $A = B$.

13. Пусть B – фиксированное множество.
Найдите все множества A , для которых
 $A \cup B = A \cap B$.

14. Найдите все множества A и B , такие что
 $A \times B = B \times A$.

15. Пусть B – фиксированное множество.
Найдите все множества A , для которых
 $A \setminus B = A$.

Глава 2

Отображения

2.1 Терминология

Определение 2.1.1. Отображением множества A в множество B называется сопоставление каждому элементу A , ровно одного элемента B .

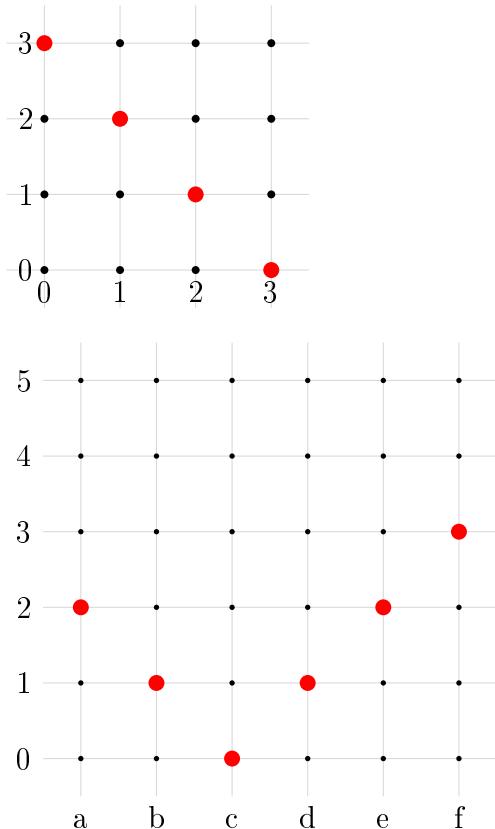
Почти всегда одновременно речь будет идти про несколько разных отображений, поэтому принято давать им обозначения в виде букв, например f, g, φ, Γ и тд.

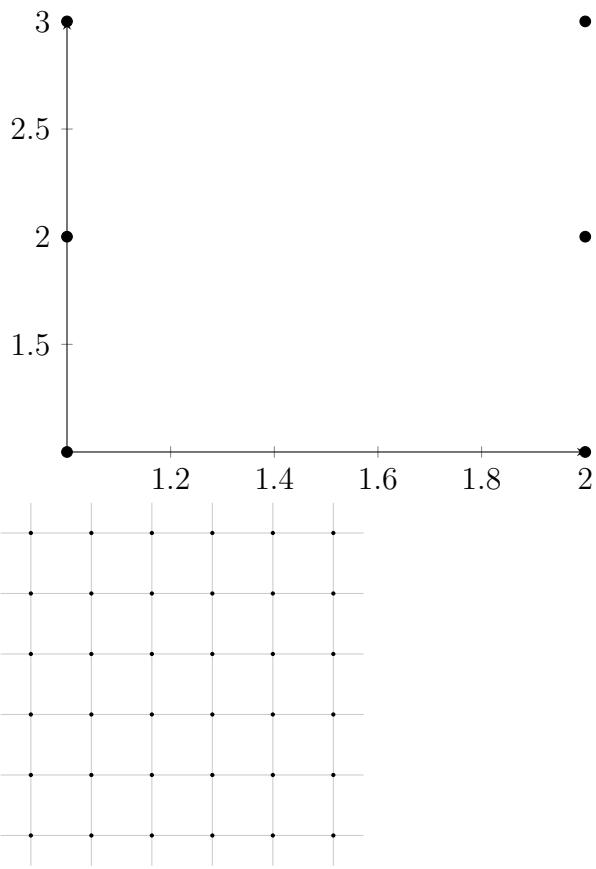
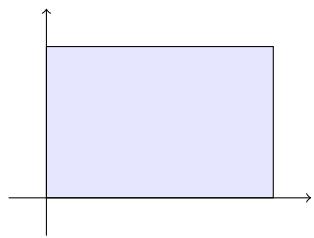
Фраза 'Отображение f множества A в множество B ' на математическом языке записывается как $f : A \rightarrow B$.

Если отображение f сопоставляет элементу d элемент v , то это можно обозначить двумя способами:

$$d \mapsto v \text{ или } v = f(d)$$

первый способ прост для понимания и удобен когда мы хотим сказать что d переходит в v . Второй способ использует название отображения и удобен когда в рассуждениях фигурируют несколько отображений.





определение, примеры, график,