

Теория отображений для школьников

Черногорцев Михаил

11 февраля 2026 г.

Оглавление

1	Теория множеств	3
1.1	Принадлежность	3
1.2	Включение	5
1.3	Операции с множествами	7
1.4	Доказательства	9
1.5	Задачи к Главе 1	11
2	Отображения	12
2.1	Терминология	12

1.4 Доказательства

Напоминание кванторов

- \forall – для всякого
- \exists – существует/найдется
- $:$ – такой, что
- $:=$ – равенство по определению
- \Rightarrow – следовательно (импликация)
- \Leftrightarrow – равносильно/тогда и только тогда.

Теперь займемся практикой доказательств и работы с определениями. Ниже приведены два относительно простых утверждений и их доказательства. Доказательства намеренно сделаны претенциозно и со всей строгостью, чтобы у читателя появлялось представление того как должно оформляться математическое доказательство на примере не сложных понятий. Но сначала дадим несколько определений.

Определение 1.4.1. Отрезком между числами a и b , где $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \leq b$ называется множество

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Определение 1.4.2. Множество $X \subset \mathbb{R}$ – ограничено сверху, если

$$\exists m_0 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad a \leq m_0$$

ограничено снизу, если

$$\exists m_1 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad m_1 \leq a$$

и просто ограничено, если

$$\exists m_2 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad |a| \leq m_2$$

Утверждение 1.4.3. отрезок – ограниченное множество.

Доказательство. По определению отрезка 1.4.1

$$[a, b] := \{y \in \mathbb{R} \mid a \leq y \leq b\}$$

А доказать необходимо ограниченность, то есть

$$\exists s_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \quad |x| \leq s_0$$

Для этого достаточно явно предоставить $s_0 \in \mathbb{R}$ и показать почему оно подходит.

Пусть

$$s_0 = |a| + |b| \quad (\text{или } s_0 = \max\{|a|, |b|\})$$

Теперь почему для этого s_0 выполнено условие ограниченности. Пусть $x_1 \in [a, b]$, тогда

$$x_1 \in [a, b] \Rightarrow a \leq x_1 \leq b$$

Из свойств модуля получаем что

$$b \leq |b| \leq |a| + |b| = s_0 \Rightarrow b \leq s_0$$

$$a \geq -|a| \geq -(|a| + |b|) = -s_0 \Rightarrow a \geq -s_0$$

Собираем все вместе

$$-s_0 \leq x_1 \leq s_0 \Rightarrow |x_1| \leq s_0$$

Эти рассуждения справедливы для произвольного x_1 , а значит все элементы отрезка ограничены числом s_0 . \square

Утверждение 1.4.4. Множество $[0, 1] \cap [2, 3]$ – пусто.

Доказательство. Пусть

$$M = [0, 1] \cap [2, 3] := \{x \mid x \in [0, 1], x \in [2, 3]\}$$

Предположим противное, то есть $M \neq \emptyset$. Это значит что

$$\exists x_0 \in M$$

Распишем подробнее

$$x_0 \in M \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_0 \in [2, 3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x_0 \leq 1 \\ 2 \leq x_0 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x_0 \leq 1$$

Это противоречие, значит M – пусто. □

Утверждение 1.4.5. $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases}$

Доказательство. При доказательстве □

Упражнения 1.4.

$$\exists M: \forall n \in \mathbb{N} \ n < M$$

6. Сформулируйте отрицание ограниченности.

6. Докажите утверждение 1.4.3. от противного.

6. Запишите отрицание

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \ \exists m: m = 2n \\ \forall x \in \mathbb{Z} \ \exists y \in \mathbb{R}: y = \frac{1}{x} \\ \exists a: \forall n \in \mathbb{N} \ \frac{1}{n} < a \end{aligned}$$

7. Докажите или опровергните утверждения из предыдущего задания.

8. Докажите $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ и } B \subset A)$

1. Пусть A и B – множества. Докажите

$$\begin{aligned} A \times B = \emptyset &\Leftrightarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases} \\ A \cap B = \emptyset &\Leftrightarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$