

# Теория отображений для школьников

Черногорцев Михаил

11 февраля 2026 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Теория множеств</b>	<b>3</b>
1.1	Принадлежность . . . . .	3
1.2	Включение . . . . .	5
1.3	Операции с множествами . . . . .	7
1.4	Доказательства . . . . .	10
1.5	Задачи к Главе 1 . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Отображения</b>	<b>14</b>
2.1	Терминология . . . . .	14

# Глава 1

## Теория множеств

*Первой темой является вводный курс по теории множеств, в котором затронуты базовые термины и понятия. Очень важно освоить этот раздел, поскольку на протяжении всего курса мы будем работать именно с множествами.*

### 1.1 Принадлежность

Само множество является неопределяемым понятием, но мы все еще можем дать интуитивное представление, поэтому

**Определение 1.1.1.** Множество – это набор произвольных элементов. Элементы в множестве не упорядочены и каждый элемент учитывается только один раз (*даже если случились повторения*).

Точнее говоря, множество определяется через набор своих свойств и действий, которые вообще можно делать с ними (например объединять). По научному мы выбираем набор аксиом, то есть утверждений, которые принимаются за истину и *чаще всего* интуитивно понятны, а все остальное выводится с помощью логики. Классически используется аксиоматика Цермелло-Френкеля, мы не будем ее разбирать поскольку это выходит за рамки курса, но важно понимать, что множество – объект на поверхности очень простой, но коварный, и халатное обращение с множествами приводит к парадоксам.

Теперь подумайте, а как вообще можно задать множество? Самый простой ответ – список, т.е. явно перечислить элементы

$$M = \{a, b, c\} \quad B = \{4, M, \{\delta\}\} \quad Y = \{0, 1, \{x, 1\}\}$$

Классически само множество обозначается заглавной буквой латинского алфавита, а элементы перечисляются внутри фигурных скобок через запятую. Определение 1.1.1 не запрещает одному множеству быть элементом другого, образуя как бы пакет с пакетами. Более того множество может лежать само в себе. Отдельно отметим, что во всех приведенных выше множествах ровно три элемента ( $\{x, 1\}$  считается как один элемент).

Любой элемент должен либо лежать в множестве, либо нет, третьего не дано, и самое важное что мы хотим уметь делать – это проверять лежит ли конкретный элемент в данном множестве.

**Определение 1.1.2.** Утверждение 'Элемент  $b$  принадлежит множеству  $M$ ' на математическом языке записывается как  $b \in M$ . Отрицание этого утверждения как  $b \notin M$ , то есть  $b$  не принадлежит  $M$ .

И, к сожалению, уже это бывает сложной задачей, поэтому рассмотрим

**Примеры.** В следующем множестве 5 элементов и каждый выделен отдельным цветом

$$A = \{\{a, b\}, -8, \{0, \{0\}\}, \{0\}, \Gamma\}$$

и только про эти 5 наборов символов можно сказать, что они принадлежат множеству  $A$ . Записи  $\{a\} \in A$  или  $0 \in A$  будут неверны, в отличие от  $\{a, b\} \in A$ ,  $-8 \in A$ ,  $\{0, \{0\}\} \in A$ ,  $\{0\} \in A$  и  $\Gamma \in A$ . Утверждение  $\{2\} \in \{1, \{1, 2\}\}$  так же неверно.

Еще одним важным понятием в математике является пустое множество, оно обозначается как  $\emptyset$  (или просто  $\{\}$ ), и оно так же определяется через свои свойства, а именно

**Определение 1.1.3.** Существует множество  $\emptyset$  такое, что для всякого элемента  $a$  справедливо, что  $a \notin \emptyset$ .

Фраза 'для всякого элемента  $a \dots$ ' часто требует пояснений. Она **не** означает что мы берем конкретно букву  $a$  латинского алфавита. Все ровно наоборот, так обозначается произвольный элемент, который мы вообще можем себе представить. Конкретные элементы будут обозначаться буквой с индексом:  $x_0, a_3, b_1 \dots$ . Словосочетание 'для всякого' принято заменять символом ' $\forall$ ', такие символы называются кванторами и нужны для более короткой записи математических утверждений. Определение 1.1.3 записывается в кванторах как

$$\exists \emptyset : \forall a (a \notin \emptyset)$$

Другие частые обозначения:

' $\exists$ ' – существует/найдется    ' $\forall$ ' – такой, что    ' $:=$ ' – равенство по определению.

Из определения 1.1.3 сразу можно понять, что если вы видите запись  $x_0 \in \emptyset$  (вставьте любой набор символов вместо  $x_0$ ), то это либо противоречие, либо парадокс, поскольку она явно противоречит определению.

**Упражнения 1.1.** Проверьте следующие утверждения

1.  $B = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$

$1 \in B$

$2 \in B$

$\{1\} \in B$

$\{2\} \in B$

$\{1, \{1\}\} \in B$

$\{1, 2\} \in B$

3.  $F = \{0, 5, \{0\}, \{2\}, \{\}\}$

$\{0\} \in F$

$\{0, 5\} \in F$

$\{0, 2\} \in F$

$\{0, \{0\}\} \in F$

$\emptyset \in F$

$\{\{\}, \emptyset\} \in F$

5.  $G = \{1, a, \{1, a\}, \{\{1\}\}\}$

$1 \in G$

$a \in G$

$\{a\} \in G$

$\{1\} \in G$

$\{1, a\} \in G$

$\{\{1, a\}\} \in G$

2.  $D = \{\{0, \{1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}\}$

$0 \in D$

$\{0\} \in D$

$\{0, \{1\}\} \in D$

$\{\{0\}, 1\} \in D$

$\{\{0\}, \{1\}\} \in D$

$\{1\} \in D$

4.  $C = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$1 \in C$

$2 \in C$

$\{1, 1\} \in C$

$\{2\} \in C$

$\{1, 2\} \in C$

$\{\{1\}, \{2\}\} \in C$

6. Переведите на русский

$\forall n \in \mathbb{N} \exists m: m = 2n$

$\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{R}: y = \frac{1}{x}$

$\forall n \in \mathbb{Z} \exists k \in \mathbb{N}: k > n$

$\exists a: \forall n \in \mathbb{N} \frac{1}{n} < a$

$\exists M: \forall n \in \mathbb{N} n < M$

$\exists c \in \mathbb{Z}: \forall n \in \mathbb{Z} n \leq c$

$\emptyset$  в теории множеств задаются натуральные числа, например число 4 будет определено следующим образом

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

или для большей аутентичности

$$\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$$

## 1.2 Включение

Помимо принадлежности элемента к множеству, возникает необходимость рассматривать множество не целиком, а только его часть. Отсюда естественным образом возникает

**Определение 1.2.1.** Множество  $A$  включено в множество  $B$ , если:

для всякого  $x \in A$  верно что  $x \in B$ . Обозначается как  $A \subset B$ . Множество  $A$  называют подмножеством множества  $B$ . В кванторах  $A \subset B \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ .

Неформальная формулировка звучит так: Все элементы первого множества должны быть элементами второго множества.

Полезно заранее выписать отрицание утверждения  $A \subset B$ , а именно найдется такой элемент  $x_0 \in A$ , что  $x_0 \notin B$ . Записывается оно как  $A \not\subset B$ .

**Примеры.** Пусть  $A = \{1, 2, \{0\}\}$ , проверим утверждение  $\{1, 2\} \subset A$ . В множестве  $\{1, 2\}$  всего два элемента и достаточно явно проверить определение.

$$\begin{aligned} 1 \in \{1, 2\} \text{ и } 1 \in A &- \text{верно} \\ 2 \in \{1, 2\} \text{ и } 2 \in A &- \text{верно} \end{aligned}$$

Значит утверждение  $\{1, 2\} \subset A$  – верно. Теперь проверим  $\{0, 2\} \subset A$  аналогичным образом

$$\begin{aligned} 2 \in \{2, 0\} \text{ и } 2 \in A &- \text{верно} \\ 0 \in \{2, 0\} \text{ и } 0 \in A &- \text{неверно} \end{aligned}$$

Поскольку  $0 \notin A$  вся логическая цепочка рушится и получается что  $\{0, 2\} \not\subset A$ .

**Утверждение 1.2.2.** Для всякого множества  $A$  справедливо что  $\emptyset \subset A$ .

*Доказательство.* На этом утверждении удобно продемонстрировать структуру математического доказательства, а также пару частых приемов. Прежде всего доказательство будет от противного, его структура выглядит так:

Предполагаем что утверждение 1.2.2 неверно  $\rightarrow$  с помощью рассуждений получаем противоречие  $\rightarrow$  мы предположили что 1.2.2 неверно и получили ошибку, значит 1.2.2 верно.

Предположим противное. Теперь необходимо сформулировать отрицание утверждения 1.2.2, оно звучит так

Нашлось такое множество  $A$ , что  $\emptyset \not\subset A$  – это то, что мы предполагаем

По предположению  $\emptyset \not\subset A$ , распишем это утверждение – найдется  $x_1 \in \emptyset$ , такой что  $x_1 \notin A$  (см. 1.2.1). Тот кто внимательно читал предыдущий раздел уже увидели, что фраза "найдется  $x_1 \in \emptyset$ " не может быть правдой, поскольку противоречит определению 1.1.3. Мы пришли к противоречию (получили ложное утверждение), таким образом 1.2.2 верно.  $\square$

До сих пор упоминался только один способ задать множество – явно перечислить его элементы. Этот способ удобен при работе с *маленькими* множествами и абсолютно не подходит для всего остального. На практике сначала берется уже готовое множество, и из него выбирается подмножество, отвечающее конкретному условию. Классический шаблон, котором мы будем пользоваться:

$$M = \{\text{натуральные числа со свойством меньше 6}\}$$

Или же на математическом

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$$

Разберем подробнее. **Фигурные скобки** обозначают границы множества, внутри описаны элементы, вещи снаружи нам не интересны. Далее мы видим вертикальный **разделитель** и текст по обе стороны.

Текст **слева** указывает что будет являться элементами множества (*числа, формулы, функции, другие множества...*). Здесь можно указать из какого множества будут браться элементы **или** какое преобразование нужно сделать с элементом. Но очень важно чтобы до или после '|' было указано откуда берутся элементы. В нашем примере элементы из  $\mathbb{N}$ . Обозначение элемента  $x$  выбрано произвольно, тоже множество можно задать и так

$$M = \{\xi \in \mathbb{N} \mid \xi < 6\} = \{t \in \mathbb{N} \mid t < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

В математике важны не столько сами символы, сколько их связь между собой и взаимное расположение.

Текст **справа** задает свойства, которым должны отвечать элементы, в нашем примере элементы должны быть меньше 6. Сам **разделитель** заменяет слова 'со свойством' или 'такой, что'. Таким образом утверждение выше должно читаться так:

$M$  – множество элементов  $\xi$  из натуральных чисел, со свойством  $\xi$  меньше 6.

### Примеры.

$B = \{\frac{h}{3} \mid h \in \mathbb{N}, h < 4\} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$  – тут  $h$  делится на 3 перед попаданием в  $B$

$F = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$  – здесь берутся натуральные числа и возводятся в квадрат

$I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$  – множество иррациональных чисел

Озвучим как читается последнее утверждение

$I$  – множество элементов  $x$  из  $\mathbb{R}$  таких, что  $x$  не является рациональным.

Или множество элементов из  $\mathbb{R}$ , которые не рациональны.

Не лишним будет привести примеры некорректного задания множеств и частые ошибки  
 $M = \{\mathbb{Z} \mid x < 6\}$  – потерял элемент, не понятно что будет лежать в множестве  
 $K = \{x \in \mathbb{N} \mid y < 7\}$  – нет связи между названием элемента и условием. В множестве лежат иксы, а условие наложено на  $y$ .

$B = \{x \mid x > 9\}$  – не хватает информации о том, чем является икс. Целым? Рациональным? Это вообще число?

$D = \{a \subset \mathbb{N} \mid a < 4\}$  – перепутаны знаки  $\in$  и  $\subset$ , из за чего смысл полностью потерян.

$Z = \{z \in \mathbb{N} \mid 2x\}$  – справа нет условия.

### Упражнения 1.2.

1.  $C = \{1, 2, \{1, 2\}, 0, \{r\}\}$

Найдите ложные утверждения

$$\{2\} \in C, \quad \{2\} \subset C$$

$$0 \in C, \quad 0 \subset C$$

$$\emptyset \in C, \quad \emptyset \subset C$$

$$\{1, 2\} \in C, \quad \{1, 2\} \subset C$$

$$\{1, 0\} \in C, \quad \{1, 0\} \subset C$$

$$\{r\} \in C, \quad \{r\} \subset C$$

$$\{r, r\} \in C, \quad \{r, r\} \subset C$$

$$\{1, 2, 0\} \in C, \quad \{1, 2, 0\} \subset C$$

$$\{\{r\}\} \in C, \quad \{\{r\}\} \subset C$$

2. Пусть  $B = \{1, 2\}$

Перечислите все подмножества  $B$ .

3. Пусть  $R = \{e, b\}$ . Докажите от противного, что  $R \subset R$ .

4. Задайте явно множества

$$G = \{s + f \mid s, f \in \mathbb{Z}, s^2 + f^2 < 9\}$$

$$P = \{3n + 2 \mid n \in \{0, 1, 2\}\}$$

$$X = \{\sqrt{c} \mid c \in \mathbb{N} \text{ и } c < 5\}$$

5. Задайте через свойства множества  $\{4, 9, 16, 25\}$ ,  $\{-1, 0, 1, 2\}$ ,  $\{3, 5, 7, 9\}$ .

6. Пусть  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$

Задайте явно множества

$$L = \{e \mid e \in A \text{ и } e \notin B\}$$

$$V = \{K \mid K \subset A\}$$

$$J = \{y \in B \mid y < 0\}$$

## 1.3 Операции с множествами

В прошлом разделе мы рассмотрели как задать множества через свойства, такой способ удобен, но может легко приводить к ошибкам, если не хуже. Рассмотрим пример наивного отношения к множествам, а именно парадокс Рассела. Я приведу две формулировки, школьную версию и строго математическую.

Школьная версия носит название парадокс списков. Положим мы хотим составить список всех книг, которые не содержат в своем тексте своего названия. Нужно ли в этот список вписать его название? Если да, то он будет нарушать свое же условие, если нет, то его придется вписать.

Теперь приведем математическую формулировку. Рассмотрим множество

$$M = \{A \mid \emptyset \subset A\} \text{ – множество множеств, включающих в себя пустое.}$$

Под условие подходит любое множество (см. 1.2.2), то есть для всякого множества  $D$ ,  $D \in M$ . В результате получается так называемое множество всех множеств, теперь покажем к каким последствиям это приведет. Пусть

$$K = \{F \in M \mid F \notin F\} \text{ – множество множеств, не содержащих себя.}$$

*Если кому-то психологически тяжело воспринимать утверждения  $B \in B$  и  $B \notin B$ , то воспринимайте это как книгу, цитирующую саму себя.*

Верно ли что  $K \in K$ ? Докажем от противного, предположим  $K \notin K$ , это попадает под условие множества  $K \Rightarrow K \in K$ . Противоречие, значит  $K \in K$ .

Но подождите, давайте теперь докажем что  $K \notin K$ , так же от противного. Положим противное, то есть  $K \in K$ , тогда условие  $K$  не выполнено, ведь в  $K$  лежат множества, **не** содержащие себя  $\Rightarrow K \notin K$ . Получается противоречивая ситуация,  $K \in K$  и  $K \notin K$ , а такое невозможно.

В чем же проблема? Множество  $M$  задано не корректно, в нем даже косвенно не указано откуда нужно брать элементы. Проще говоря наша аксиоматика не допускает существования множества всех множеств.

Обсудим операции с множествами. Для двух множеств  $A$  и  $B$  мы хотим иметь возможность объединить вместе все их элементы и собрать из них новое множество:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\} \text{ – объединение}$$

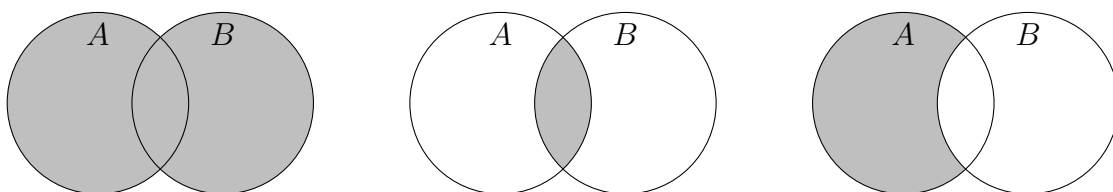
Далее мы хотим уметь отобрать общие элементы для этих двух множеств, т.е. те, где они пересекаются:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\} \text{ – пересечение}$$

А так же элементы, которые есть в первом, но не втором множестве:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ – вычитание}$$

Обратите внимание, что первые две операции симметричны, а третья – нет. Эти операции удобно визуализировать диаграммами Венна, они интуитивно понятны и не требуют пояснений.



Для последней операции нам понадобится новый объект под названием упорядоченная пара, она обозначается как  $(p, q)$ , где  $p$  – первый элемент, а  $q$  – второй. Мы не будем строго задавать этот объект и ограничимся интуитивным представлением.

Предположим у нас есть два множества  $A = \{0, 1, 7\}$  и  $B = \{g, h\}$ , и мы хотим составить таблицу

Каждая точка отвечает упорядоченной паре. Например, зеленая точка – это пара  $(1, g)$ , фиолетовая –  $(7, h)$ . Или можно явно записать таблицу со всеми парами вместо точек:

h	●	●	●
g	●	●	●
	0	1	7

h	(0, h)	(1, h)	(7, h)
g	(0, g)	(1, g)	(7, g)
	0	1	7

Явно множество всех таких пар будет задаваться следующим образом:

$$\{(0, g), (1, g), (7, g), (0, h), (1, h), (7, h)\}$$

Зададим его через свойства, но для этого нужно их сформулировать. Принцип такой, на первых позициях стоят только элементы  $A$ , а на вторых только элементы  $B$ .

**Определение 1.3.1.** Декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$  называется множество упорядоченных пар  $(p, q)$ , со свойством  $p \in A$  и  $q \in B$ .

$$A \times B := \{(p, q) \mid p \in A, q \in B\} \text{ – декартово произведение}$$

Если  $A$  и  $B$  – дискретные множества, то декартово произведение визуализируется через сетку или таблицу.

**Примеры.** Рассмотрим результаты разных операций на примере  $\{1, 2\}$  и  $\{1, 3\}$ .

$$\begin{aligned} \{1, 2\} \cup \{1, 3\} &= \{1, 2, 3\} \\ \{1, 2\} \cap \{1, 3\} &= \{1\} \\ \{1, 2\} \setminus \{1, 3\} &= \{2\} \\ \{1, 3\} \setminus \{1, 2\} &= \{3\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \{1, 2\} \times \{1, 3\} &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\} \\ \{1, 3\} \times \{1, 2\} &= \{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2)\} \end{aligned}$$

Здесь видно что вычитание и декартово произведение не симметричны, если поменять множества местами – результат изменится, как, например, при разности чисел.

### Упражнения 1.3.

1. Сформулируйте отрицание  
 $x_1 \in A \cup B$ ,  $x_2 \in A \cap B$ ,  $x_3 \in A \setminus B$ .

2. Пусть  $A$  и  $B$  – множества. Докажите, что  $A \setminus A = \emptyset$ ,  $(A \setminus B) \cup B = A$ ,

3. Задайте явно и визуализируйте  
 $\{\alpha, \beta, \gamma\} \times \{1, 2, 3\}$ ,  $\{0, 1\}^2$ ,  
 $\{1, 2, 3\} \times \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ,  $\{0, 1\}^3$ .

4. Задайте через свойства  
 $U$  – множество четных чисел  
 $S$  – множество нечетных чисел.

5. Докажите что нет одновременно четных и нечетных чисел  
т.е. что  $U \cap S$  пусто.

6. Докажите что  $0 \notin S$  и  $U \cup S = \mathbb{Z}$ .

7. Пусть  $X = \{0, 3, b, c\}$ ,  $Y = \{0, c\}$ ,  
 $Z = \{3, b, d\}$ . Задайте явно:

$$\begin{array}{llll} X \cup Y & X \setminus Z & Z \cup X \cup Y & (Y \cap X) \times Y \\ Y \cup Z & Y \setminus Z & X \cap Y \cap Z & Y \cap (X \times Y) \\ Y \cap Z & (X \setminus Z) \setminus Y & (Y \cup Z) \setminus X & (Y \cup X) \times Y \\ Z \cap X & X \setminus (Z \setminus Y) & Y \cup (Z \setminus X) & Y \cup (X \times Y). \end{array}$$

8. Пусть  $A$  и  $B$  – произвольные множества.  
Докажите

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$$

Верно ли обратное? Приведите примеры.

9. Схематично визуализируйте следующие множества:  $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ ,  $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}^2$ ,  $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ .



## 1.4 Доказательства

Напоминание кванторов

$\forall$	– для всякого
$\exists$	– существует/найдется
$:$	– такой, что
$:=$	– равенство по определению
$\Rightarrow$	– следовательно (импликация)
$\Longleftrightarrow$	– равносильно/тогда и только тогда.
$\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$	– равносильно по определению.

Важнейшим умением в математических доказательствах является формулирование отрицаний, т.е. утверждений, опровергающих изначальное. Это умение нарабатывается с опытом, поэтому приведем только общие соображения. Следующие закономерности не являются универсальными и каждое отрицание должно появляться из логических соображений.

Если утверждение верно для всех объектов, то опровержением будет не выполнение даже для одного объекта. Напротив, если утверждение верно для какого-то объекта, то отрицанием будет не выполнение для всех объектов.

Отдельно необходимо сказать про импликацию двух утверждений  $P \Rightarrow Q$ . Ее отрицанием будет выполнение  $P$  и **не** выполнение  $Q$ , и никак иначе. Любая другая ситуация не будет опровергать  $P \Rightarrow Q$ .

Теперь займемся практикой доказательств и работы с определениями. Ниже приведены несколько относительно простых утверждений и их доказательства. Доказательства намеренно сделаны претенциозно и со всей строгостью, чтобы у читателя появлялось представление того, как должно оформляться математическое доказательство. Но сначала дадим несколько определений.

**Определение 1.4.1.** Отрезком между числами  $a$  и  $b$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $a \leq b$ , называется множество

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

**Определение 1.4.2.** Множество  $X \subset \mathbb{R}$  – ограничено сверху, если

$$\exists m_0 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad a \leq m_0$$

ограничено снизу, если

$$\exists m_1 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad m_1 \leq a$$

и просто ограничено, если

$$\exists m_2 \in \mathbb{R} : \forall a \in X \quad |a| \leq m_2$$

**Утверждение 1.4.3.** отрезок – ограниченное множество.

*Доказательство.* По определению отрезка 1.4.1

$$[a, b] := \{y \in \mathbb{R} \mid a \leq y \leq b\}$$

А доказать необходимо ограниченность, то есть

$$\exists s_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \quad |x| \leq s_0$$

Для этого достаточно явно предоставить  $s_0 \in \mathbb{R}$  и показать почему оно подходит. Пусть

$$s_0 = |a| + |b| \quad (\text{или } s_0 = \max\{|a|, |b|\})$$

Теперь почему для этого  $s_0$  выполнено условие ограниченности. Пусть  $x_1 \in [a, b]$ , тогда

$$x_1 \in [a, b] \Rightarrow a \leq x_1 \leq b$$

Из свойств модуля получаем что

$$\begin{aligned} b &\leq |b| \leq |a| + |b| = s_0 \Rightarrow b \leq s_0 \\ a &\geq -|a| \geq -(|a| + |b|) = -s_0 \Rightarrow a \geq -s_0 \end{aligned}$$

Собираем все вместе

$$-s_0 \leq x_1 \leq s_0 \Rightarrow |x_1| \leq s_0$$

Эти рассуждения справедливы для произвольного  $x_1$ , а значит все элементы отрезка ограничены числом  $s_0$ .  $\square$

**Утверждение 1.4.4.** Множество  $[0, 1] \cap [2, 3]$  – пусто.

*Доказательство.* Пусть

$$M = [0, 1] \cap [2, 3] := \{x \mid x \in [0, 1], x \in [2, 3]\}$$

Предположим противное, то есть  $M \neq \emptyset$ . Это значит что

$$\exists x_0 \in M$$

Распишем подробнее

$$x_0 \in M \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_0 \in [2, 3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x_0 \leq 1 \\ 2 \leq x_0 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x_0 \leq 1$$

Это противоречие, значит  $M$  – пусто.  $\square$

**Утверждение 1.4.5.**  $A \cup B = \emptyset \iff \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases}$

При доказательстве тождества двух утверждений  $P \iff Q$ , необходимо доказывать сразу две импликации:  $P \Rightarrow Q$  и  $P \Leftarrow Q$ . Тут можно привести аналогию – чтобы доказать равенство двух чисел  $a = b$ , мало доказать что  $a \leq b$ , необходимо доказывать и  $a \geq b$ .

*Доказательство.* Сначала докажем импликацию вправо ( $\Rightarrow$ ), то есть докажем что

$$A \cup B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases}$$

По определению  $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ . Докажем от противного, что, если  $A \cup B = \emptyset$ , то  $A = \emptyset$  ( $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ ). Действительно, если  $A \neq \emptyset$ , то

$$\exists x_0 \in A \Rightarrow \exists x_0 \in A \cup B \Rightarrow A \cup B \neq \emptyset$$

Это противоречие, значит  $A$  – пусто. Аналогичные утверждения справедливы и для  $B$ , таким образом и  $A$ , и  $B$  – пусты. Импликация вправо доказана.

Теперь импликация влево ( $\Leftarrow$ ), а именно

$$A \cup B = \emptyset \Leftarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases}$$

По условию  $A = \emptyset$  и  $B = \emptyset$ . Предположим что  $A \cup B \neq \emptyset$ , тогда

$$\exists x_0: x_0 \in A \cup B \Rightarrow x_0 \in A \text{ или } x_0 \in B$$

Но и  $A$ , и  $B$  – пусты, а это противоречие. Таким образом утверждение доказано.  $\square$

Поговорим про равенства множеств, множества равны, если равны их определения, формализуется это так:

**Определение 1.4.6.** Множества  $A$  и  $B$  одинаковы (или равны), если

$$\forall x (x \in A \iff x \in B) \stackrel{\text{def}}{\iff} A = B$$

Неформально можно сказать так, в  $A$  и  $B$  лежат одни и те же элементы.

На практике часто встречается ситуация, что с определением неудобно работать. Для таких случаев доказываются утверждения, именуемые критериями, они эквивалентны нашему определению, но часто имеют более удобные формулировки.

**Утверждение 1.4.7.** (Критерий равенства множеств)

$$A = B \iff (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$$

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ )

Положим  $A = B$ , тогда  $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$ , а по утверждению 1.4.5. мы знаем что  $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ . Таким образом  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$ .

( $\Leftarrow$ )

Положим  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$ , тогда по утверждению 1.4.5. получаем что

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \setminus B = \emptyset \\ B \setminus A = \emptyset \end{cases}$$

Если  $(A \setminus B) = \emptyset$ , то  $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ , поскольку иначе вычитание будет не пусто. Аналогичные выводы делаются и из  $B \setminus A = \emptyset$ , а именно  $\forall x (x \in B \Rightarrow x \in A)$ . Совмещая эти два утверждения получаем тождество

$$\begin{cases} \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ \forall x (x \in B \Rightarrow x \in A) \end{cases} \iff \forall x (x \in B \iff x \in A) \stackrel{\text{def}}{\iff} A = B$$

□

#### Упражнения 1.4.

1. Сформулируйте отрицание ограниченности.

2. Докажите утверждение 1.4.3. от противного.

3. Докажите что  $[0, 1] \subset [0, 2]$ .

4. Запишите отрицание

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \frac{1}{N} < \varepsilon$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{R}: y = \frac{1}{x}$$

$$\exists a: \forall n \in \mathbb{N} \frac{1}{n} < a$$

$$\exists M: \forall n \in \mathbb{N} n < M.$$

5. Докажите или опровергните утверждения из предыдущего задания.

6. Докажите из определения, что  $\{0, 1\} \neq \{0, 2\}$ . Затем проверьте это неравенство по критерию.

7. Пусть  $A$  и  $B$  – произвольные множества. Докажите  $A \setminus B = \emptyset \iff A \subset B$ .

8. Пусть  $A$  и  $B$  – множества. Докажите  $A \times B = \emptyset \iff \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases}$

9. Докажите что  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  – ограниченное множество.

## 1.5 Задачи к Главе 1

1. Докажите  $A = B \iff (A \subset B \text{ и } B \subset A)$ .

Проведите аналогию с

$$a = b \iff (a \leq b \text{ и } a \geq b).$$

2. Пусть  $A, B, C$  – множества. Докажите

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

3. Пусть  $A$  и  $B$  – множества.

Докажите что

- $A \setminus B \subset A$
- $A \cap B \subset A \cup B$

5. Пусть  $A$  и  $B$  – множества.

Докажите что  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ .

6. Пусть  $A, B \subset X$ . Докажите, что

$$A \cap B = \emptyset \iff A \subset X \setminus B.$$

7. Пусть  $A, B, C$  – множества. Докажите

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

9. Пусть  $A, B, C, D$  – множества.

Докажите или опровергните

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D).$$

10. Пусть  $A$  и  $B$  – множества. Докажите

$$A \subset B \iff A \cup B = B$$

$$A \subset B \iff A \cap B = A.$$

11. Пусть  $A$  и  $B$  – множества. Докажите

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

12. Пусть  $A, B, C$  – множества.

Верны ли следующие утверждения?

Если  $A \subset B$ , то  $A \times C \subset B \times C$ .

Если  $A \times C = B \times C$  и  $C \neq \emptyset$ , то  $A = B$ .

13. Пусть  $B$  – фиксированное множество.

Найдите все множества  $A$ , для которых

$$A \cup B = A \cap B.$$

14. Найдите все множества  $A$  и  $B$ , такие что

$$A \times B = B \times A.$$

15. Пусть  $B$  – фиксированное множество.

Найдите все множества  $A$ , для которых

$$A \setminus B = A.$$

# Глава 2

## Отображения

### 2.1 Терминология

**Определение 2.1.1.** Отображением множества  $A$  в множество  $B$  называется сопоставление каждому элементу  $A$ , ровно одного элемента  $B$ .

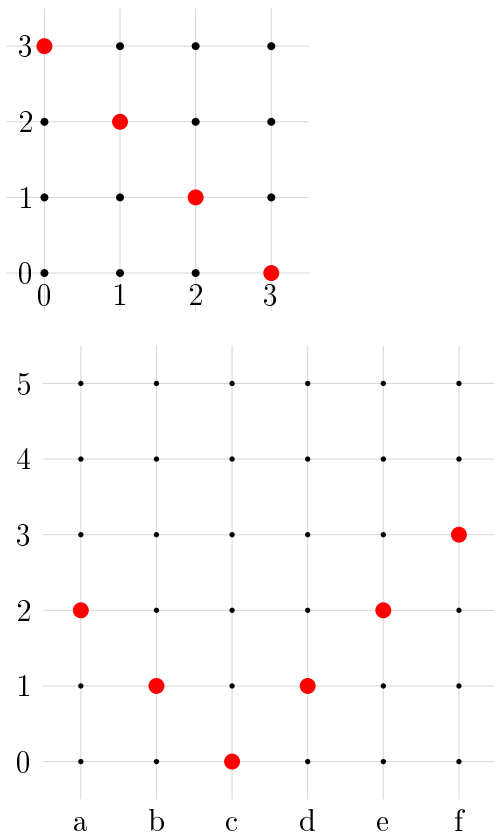
Почти всегда одновременно речь будет идти про несколько разных отображений, поэтому принято давать им обозначения в виде букв, например  $f$ ,  $g$ ,  $\varphi$ ,  $\Gamma$  и тд.

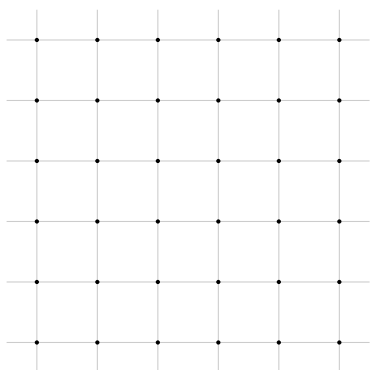
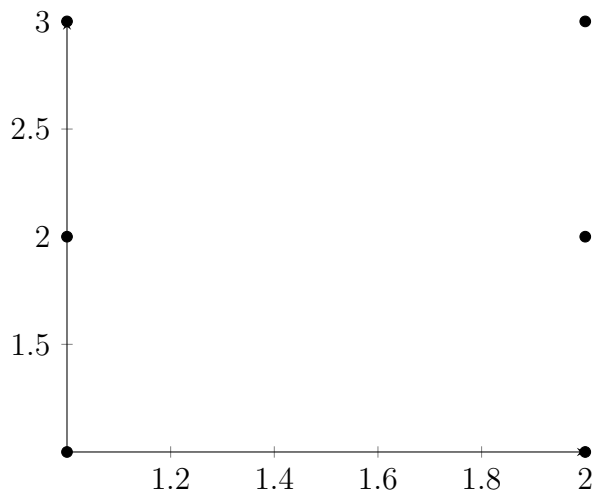
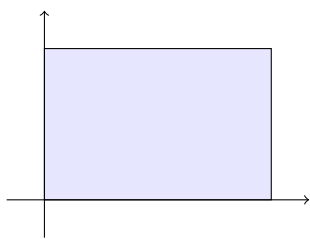
Фраза 'Отображение  $f$  множества  $A$  в множество  $B$ ' на математическом языке записывается как  $f : A \rightarrow B$ .

Если отображение  $f$  сопоставляет элементу  $d$  элемент  $v$ , то это можно обозначить двумя способами:

$$d \mapsto v \text{ или } v = f(d)$$

первый способ прост для понимания и удобен когда мы хотим сказать что  $d$  переходит в  $v$ . Второй способ использует название отображения и удобен когда в рассуждениях фигурируют несколько отображений.





определение, примеры, график,