FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Laboratorní cvičení z TŘ – R1

Měření a simulace statických, přechodových a impulsních charakteristik

2016/2017

Vít Teřl
Pavel Čurda

Zadání:

1. Řízená soustava je popsána přenosovou funkcí

$$F(p) = \frac{b_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0} \tag{1}$$

Zvolte konkrétní parametry a_i tak, aby odezva soustavy byla:

(a) aperiodická,

(b) kmitavá.

a určete diferenciální rovnice odpovídající jednotlivým systémům.

1. Diferenciální rovnice řešte metodou "snižování řádu derivace" a z elementárních prvků Toolbox Simulink (Integrátor, Gain, Sum) vytvořte blokové schéma počítačového modelu pro jeho realizaci. V Simulinku vytvořte počítačový model soustavy a simulační schéma vytiskněte na tiskárně.

2. Počítačový model doplňte prvky pro měření statické charakteristiky (Constant, Display) a tuto charakteristiku změřte. Naměřené hodnoty tabelujte a vyneste do grafu. Z grafu statické charakteristiky stanovte statické zesílení systému.

3. Počítačový model doplňte prvky (Step, Derivative, Scope) a změřte/simulujte přechodovou a impulsní charakteristiku. Grafy charakteristik vytiskněte.

4. Průběh přechodové charakteristiky počítačového modelu kontrolujte výpočtem přechodové funkce. Vypočtené hodnoty vyneste do grafů získaných v ad 4).

5. Z průběhů grafů přechodových charakteristik získaných v ad 4) proveďte identifikaci parametrů modelovaných soustav (statické zesílení, časové konstanty). Identifikované parametry porovnejte se skutečnými hodnotami v zadaných přenosech.

6. Pomocí funkcí Toolbox Control ('tf', 'step' a 'impulse') zadejte v příkazovém řádku Matlabu jednotlivé systémy a vygenerujte jejich přechodovou a impulsní charakteristiku. Grafy charakteristik vytiskněte a porovnejte je s průběhy v ad 4, 5).

7. Proveďte zhodnocení získaných výsledků. Návod: Přenos soustavy zadejte příkazem: sys=tf(num,den), kde num je čitatel a den jmenovatel přenosu soustavy. Časové odezvy získáte příkazy step(sys) a impulse(sys).

Máme přenosovou funkci 1. Úpravou rovnice a následnou zpětnou Laplaceovou transformací $\mathscr{L}^{-1}$ získáme požadovanou diferenciální rovnici.

$$\begin{aligned}(a_2p^2 + a_1p + a_0)Y(p) &= b_0U(p),\\ \mathscr{L}^{-1} : a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) &= b_0u(t).\end{aligned} \tag{2}$$

1. Pro aperiodickou soustavu jsme zvolili:

$$y''(t) + 5y'(t) + y(t) = 5u(t). \tag{3}$$

2. Pro kmitavou soustavu jsme zvolili:

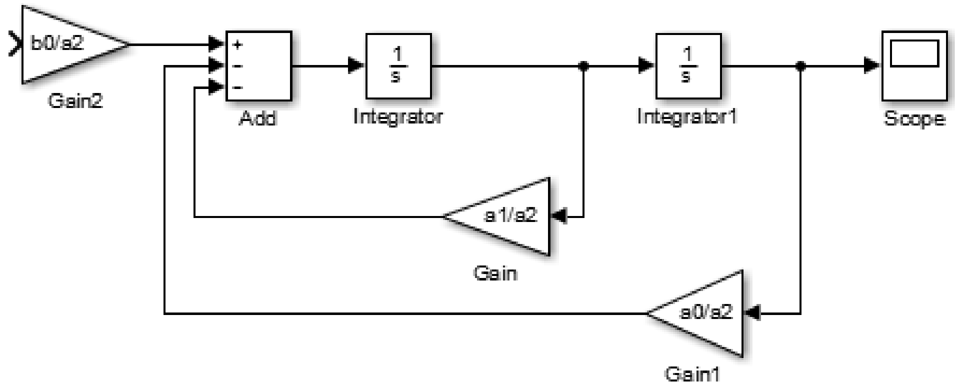
$$y''(t) + 0.2y'(t) + y(t) = 5u(t). \tag{4}$$

1. Úkol

Řešíme diferenciální rovnice "snižováním řádu derivace" vyjádříme člen s nejvyšší derivací:

$$y''(t) = \frac{b_0}{a_2}u(t) - \frac{a_1}{a_2}y'(t) - \frac{a_0}{a_2}y(t). \tag{1.1}$$

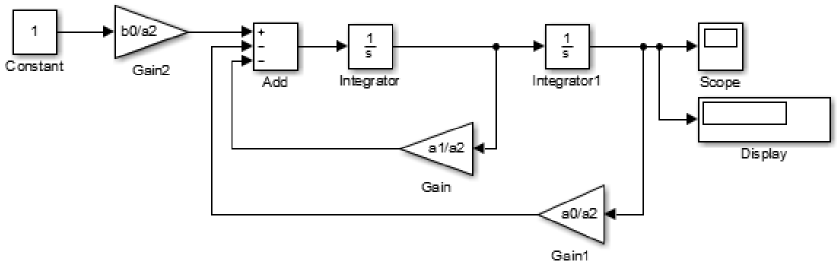
Vzhledem, že mezi a) a b) se mění pouze parametry a_i, tak můžeme ukázat pouze na jediném schématu.



Obrázek 1.1: Schéma modelu

2. Úkol

Přidáme jednotkový vstup a blok pro zobrazení dat ukázáno na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Schéma modelu

Statická charakteristika vyjadřuje závislost výstupní veličiny $y(t)$ na vstupní veličině $u(t)$. Hodnoty byly odečítány v čase $t = 10$.

Aperiodická soustava

u(10)	1	2	4	8	16
y(10)	4,352	8,703	17,41	34,81	69,62

Kmitavá soustava

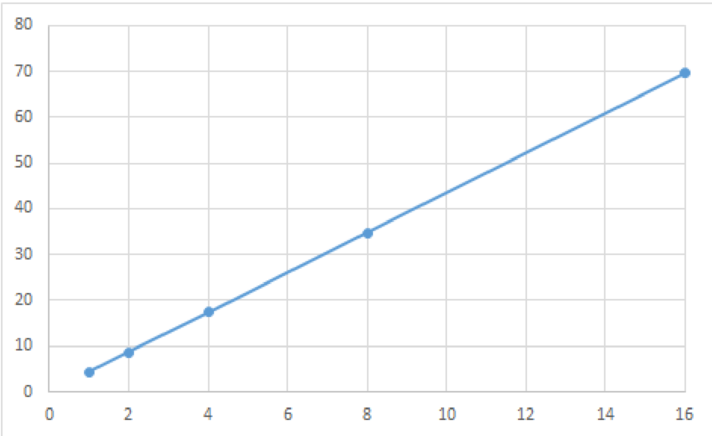
u(10)	1	2	4	8	16
y(10)	6,679	13,36	26,72	53,43	106,9

Statické zesílení dostaneme ze vztahu $k = \frac{b_0}{a_0}$.

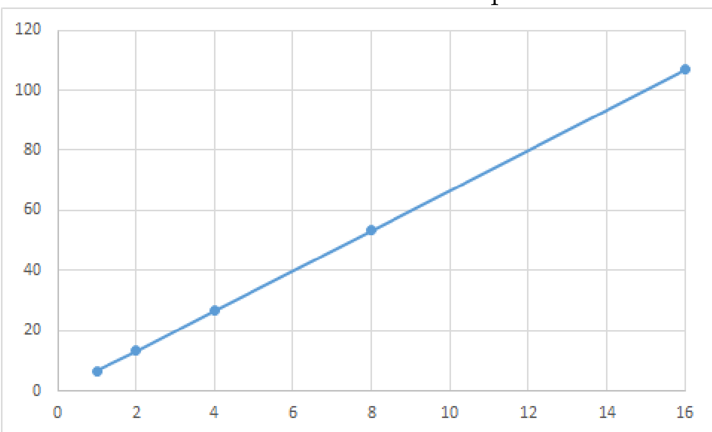
1. Pro Aperiodickou soustavu: $k = \frac{5}{1}$.

2. Pro Kmitavou soustavu: $k = \frac{5}{1}$.

Získané hodnoty jsou vykresleny na grafu 2.3.



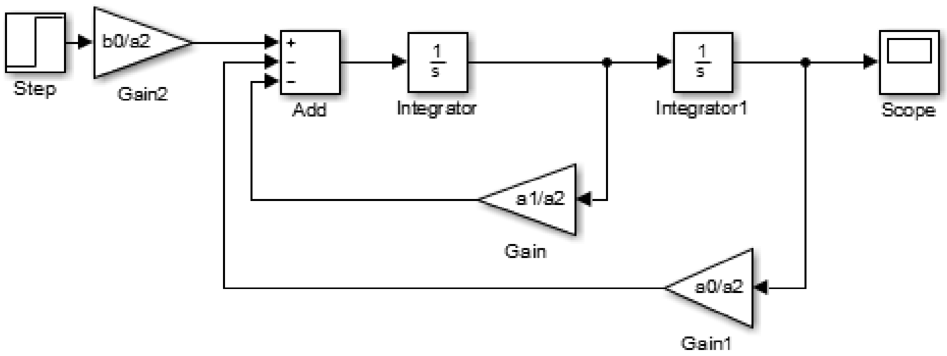
Obrázek 2.2: Statická charakteristika aperiodické soustavy



Obrázek 2.3: Statická charakteristika kmitavé soustavy

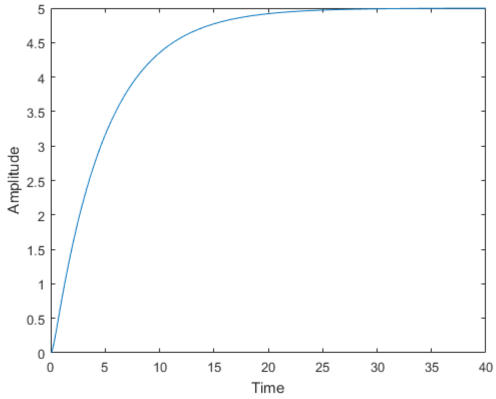
3. Úkol

Přechodová charakteristika je odezva systému na jednotkový skok. Jeho blokové schéma a průběh je následovné.

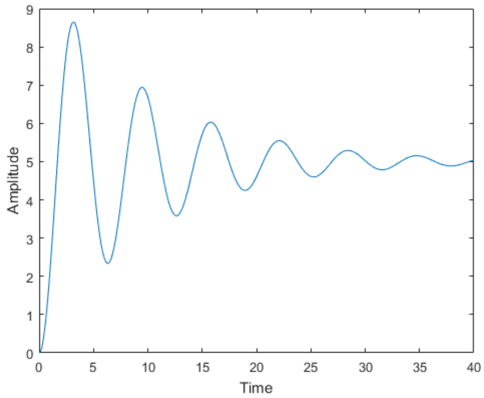


Obrázek 3.1: Schéma modelu pro sledování přechodové charakteristiky

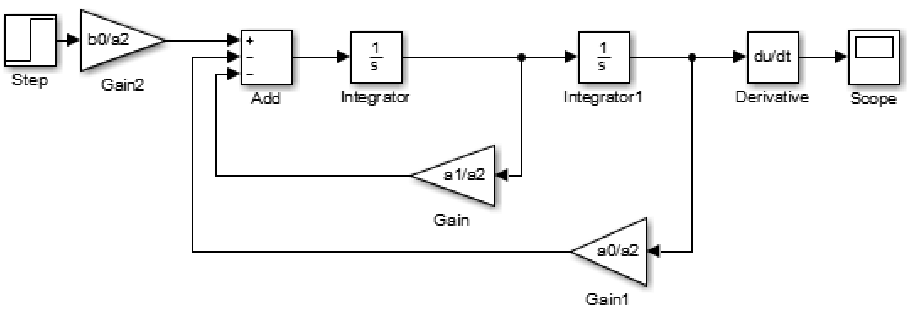
Impulsní charakteristika je odezva systému na jednotkový Diracův impuls. Její průběh dostaneme zderivováním přechodové charakteristiky. Jeho blokové schéma a průběh je následovné.



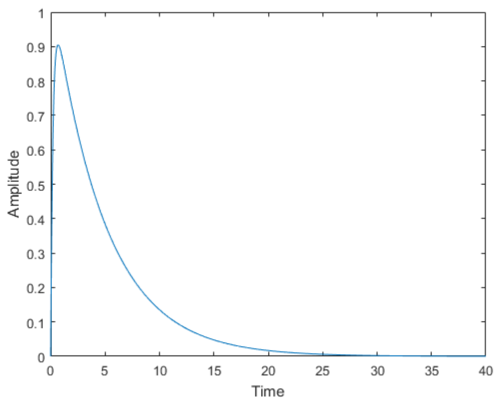
Obrázek 3.2: Přechodová charakteristika aperiodické soustavy



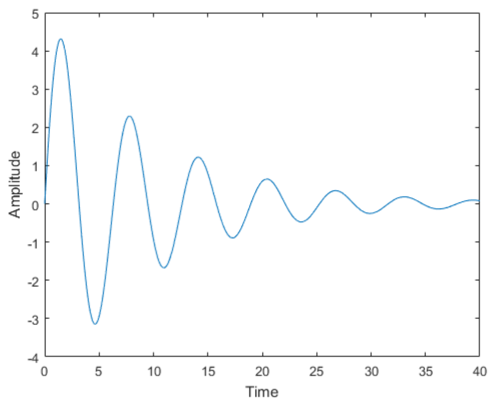
Obrázek 3.3: Přechodová charakteristika kmitavé soustavy



Obrázek 3.4: Schéma modelu pro sledování přechodové charakteristiky



Obrázek 3.5: Impulsní charakteristika aperiodické soustavy



Obrázek 3.6: Impulsní charakteristika kmitavé soustavy

4. Úkol

Zde vypočteme přechodovou funkci $h(t)$. Tu vypočteme zpětnou $\mathscr{L}^{-1}$ transormací obrazu přechodové funkce $H(p)$,

$$H(p) = Y(p) = F(p) * U(p), \tag{4.1}$$

$$U(p) = \mathscr{L}\{1[t]\} = 1/p, \tag{4.2}$$

kde $F(p)$ je přenos a $U(p)$ je vstup. Z tohoto vztahu dostanem:

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{F(p)}{p}\} \tag{4.3}$$

Vypočteme kořeny charakteristického polynomu z rovnice 1, které jsou $p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2-4a_0}}{2}$.
Dále pro:

1. $a_1^2 > 4a_0$ v našem případě u aperiodické soustavy platí:

   $$H(p) = \frac{b_0}{p(p^2+a_1p+a_0)} = \frac{b_0}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p-p_1} + \frac{c_2}{p-p_2}. \tag{4.4}$$

   Koeficienty určíme c určíme:

   $$c_0 = \frac{b_0}{p_1p_2}, c_1 = \frac{b_0}{p_1(p_1-p_2}, c_2 = \frac{b_0}{p_2(p_1-p_2)}, \tag{4.5}$$

   kde už získáme přechodovou funkci jako:

   $$h(t) = \frac{b_0}{p_1p_2} + \frac{b_0}{p_1(p_1-p_2)}e^{p_1t} - \frac{b_0}{p_2(p_1-p_2)}e^{p_2t} \tag{4.6}$$

2. $a_1^2 < 4a_0$ v našem případě u kmitavé soustavy platí: Máme dvojci komplexně sdružených kořenů.

   $$H(p) = \frac{b_0}{p(p^2+a_1p+a_0)} = \frac{b_0}{p(p+\alpha)^2+\beta^2} = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1\beta}{p(p+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{c_2p+\alpha}{p(p+\alpha)^2+\beta^2}. \tag{4.7}$$

   Metodou neurčitých koeficientů vypočítáme:

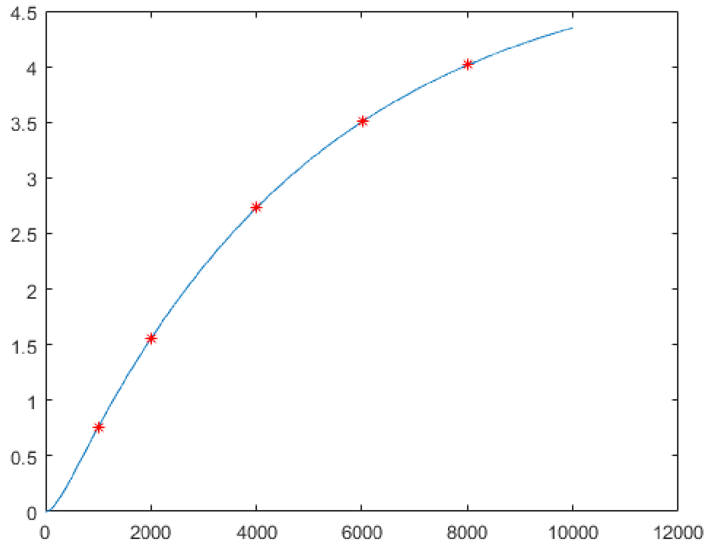
   $$c_0 = \frac{b_0}{\alpha^2+\beta^2}, c_1 = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{b_0}{\alpha^2+\beta^2}, c_2 = -\frac{b_0}{\alpha^2+\beta^2}, \tag{4.8}$$

   a za předpokladu $\alpha^2 + \beta^2 = a_0$

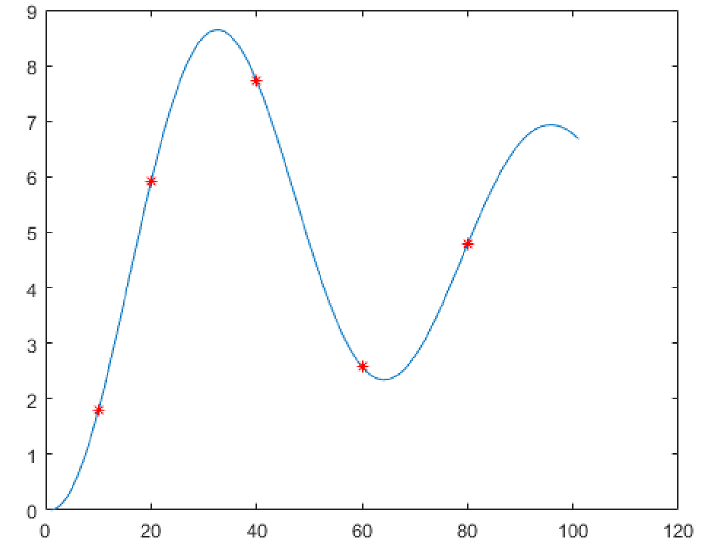
   $$h(t) = \frac{b_0}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{b_0}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha t}\sin(\beta t) - \frac{b_0}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\alpha t}\cos(\beta t) \tag{4.9}$$

Na závěr vykreslíme závislost $h(t)$ na t. Datové body získáme výpočtem.

aperi(1) = 0.7580 kmit(1) = 1.7849
aperi(2) = 1.5556 kmit(2) = 5.9049
aperi(4) = 2.7310 kmit(4) = 7.7317
aperi(6) = 3.5053 kmit(6) = 2.5729
aperi(8) = 4.0154 kmit(8) = 4.7865



Obrázek 4.1: Vypočtené hodnoty vynesené do grafu pro aperiodickou soustavu



Obrázek 4.2: Vypočtené hodnoty vynesené do grafu pro kmitavou soustavu

5. Úkol

Zde porovnáváme skutečné parametry modelovaných soustav, a to statické zesílení a časové konstanty, s parametry z průběhu grafů.

1. Aperiodická soustava: Statické zesílení můžeme vidět na 3.3. Mluvíme o velikosti amplitudy v ustáleném tvaru. Pro náš případ $k = 5$.

   Zde statické zesílení vypočítáme z přenosu:

   $$F(p) = \frac{b_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0}p^2 + \frac{a_1}{a_0}p + 1} = \frac{k}{ap^2 + bp + 1}. \quad (5.1)$$

   Dosazením dostáváme $k = 5$.
   Dále časové konstanty dostaneme ze vztahu:

   $$F(p) = \frac{k}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}, \quad (5.2)$$

   kde $T_1 = -\frac{1}{p_1}$ a $T_2 = -\frac{1}{p_2}$ pro $p_{1,2}$ kořeny charakteristického polynomu. Dosazením získáme: $T_1 = 0.2087$ a $T_2 = 4.7913$.

2. Kmitavá soustava: Statické zesílení určíme obdobně, tedy $k = 5$.

   Pro výpočet statického zesílení použijeme stejné vztahy jako u Aperiodické soustavy, tedy dosazením dostáváme: $k = 5$. Ale časové konstanty nemůžeme vyjádřit normálním způsobem neboť kořeny nejsou reálné.

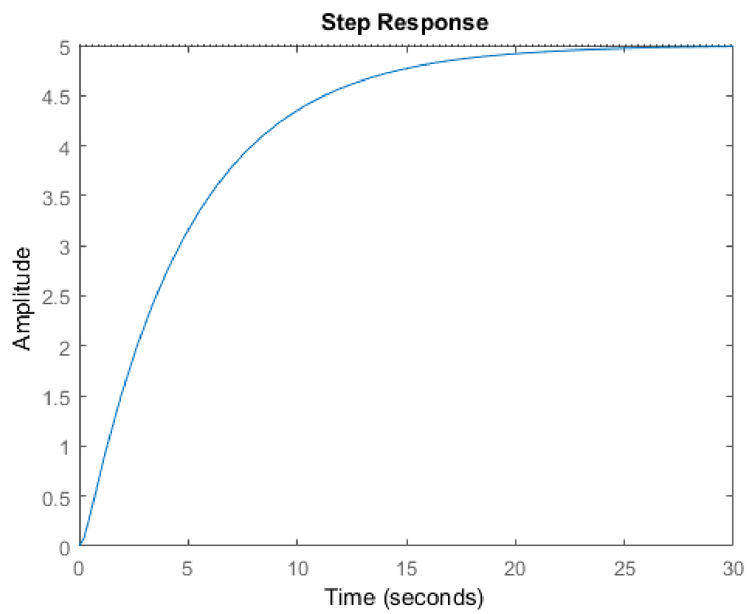
Oboje zesílení přesně odpovídají výpočtum.

6. Úkol

V Matlabu za pomocí funkcí Toolbox Control vykreslíme dané charakteristiky.

1. Stabilní aperiodická soustava

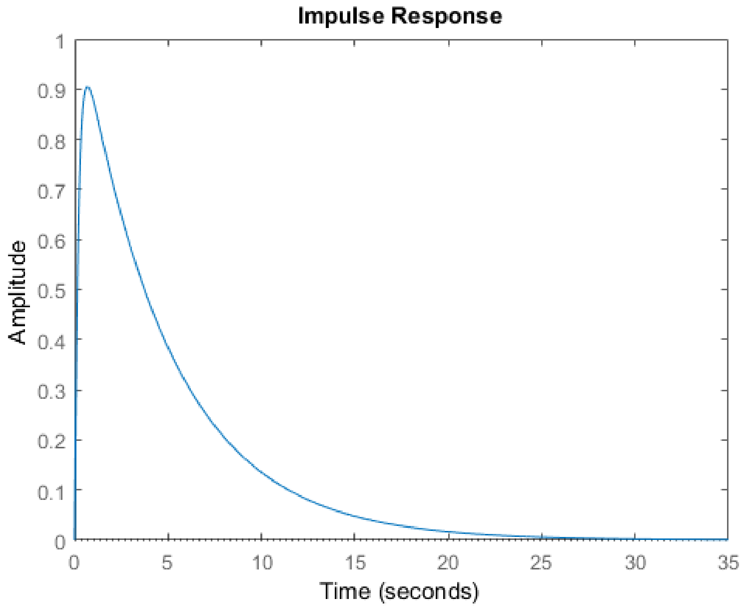
```
>> sys=tf([5],[1 5 1])
sys =
        5
  -------------
  s^2 + 5 s + 1
Continuous-time transfer function.
>> step(sys)
```



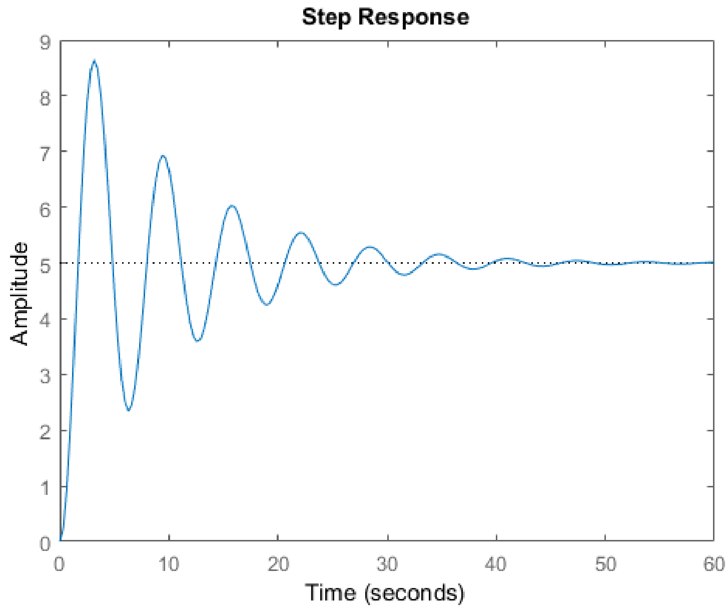

```
>> impulse(sys)
```

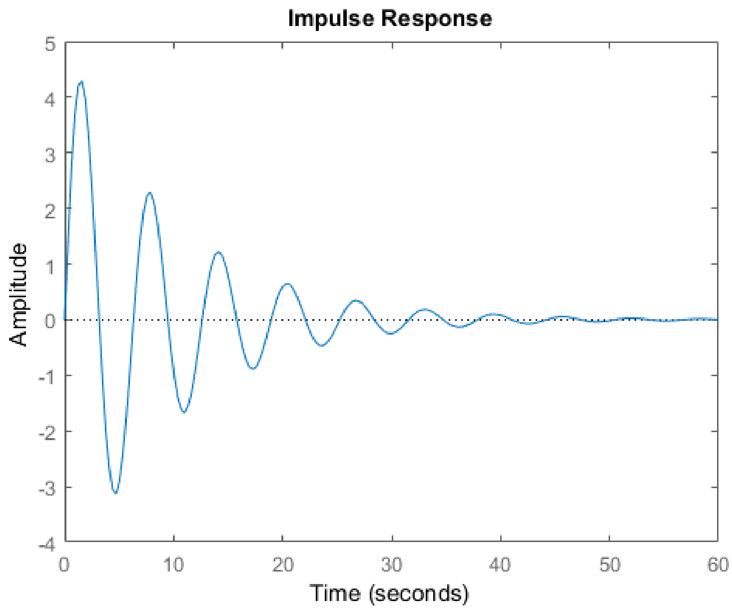
2. Stabilní kmitavá soustava

```
>> sys=tf([5],[1 0.2 1])

sys =
         5
  ---------------
  s^2 + 0.2 s + 1

Continuous-time transfer function.
>> step(sys)
```


Impulse Response
Amplitude
Time (seconds)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
20
25
30
35

```
>> impulse(sys)
```


Step Response
Amplitude
Time (seconds)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
60


Impulse Response
Amplitude
Time (seconds)
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
10
20
30
40
50
60

Závěr

Grafy přechodových a impulsních charakteristik získané ze simulinku ve 3. části se shodují s grafy z matlabu v 6. části.