Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра теории вероятностей

Высокочастотная торговля в книге лимитных ордеров

(High-frequency trading in a limit order book)

Курсовая работа
студентки 3 курса 309 группы
Балакаевой Марии Ильиничны

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Веретенников Александр Юрьевич

г. Москва 2024

Содержание

1 Введение

Роль дилера на рынке ценных бумаг заключается в обеспечении ликвидности на бирже путем установления цен спроса и предложения, по которым он готов покупать и продавать определенное количество активов. Традиционно эту роль выполняли маркет-мейкеры или специализированные фирмы. В последние годы, с развитием электронных бирж, таких как Nasdaq Inet, любой, желающий подавать лимитные ордера в системе, может эффективно играть роль дилера. Действительно, наличие часто встречающихся данных в книге лимитных ордеров обеспечивает честную игру, где различные агенты могут размещать лимитные ордера по выбранным ими ценам. В данной курсовой изучаются оптимальные стратегии подачи заявок на покупку и продажу в такой книге лимитных ордеров.

2 Обзор

Мы предполагаем, что денежный рынок не выплачивает процентов. Среднерыночная цена или средняя цена акций меняется следующим образом:

$$dS_u = \sigma dW_u \quad (S_T^{t,s} = s + \sigma(W_T - W_t)), \tag{1}$$

с начальным значением $S_t = s$.
W_t — стандартное броуновское движение,
σ — константа.

Цель агента состоит в том, чтобы максимизировать ожидаемую экспоненциальную полезность его прибыли и убытков в конечный момент времени T. Этот выбор выпуклой меры риска удобен, поскольку он позволит нам определить цены резервирования (или цены безразличия), которые не зависят от благосостояния агента. Сначала мы моделируем неактивного трейдера, который не имеет лимитных ордеров на рынке и просто держит запасы из q акций до конечного момента T.
Функция полезности агента:

$$v(x, s, q, t) = \mathsf{E}_t[-\exp(-\gamma(x + qS_T))],$$

где x — начальный капитал в долларах.
Данную функцию можно переписать иначе:

$$v(x, s, q, t) = -\exp(-\gamma x)\exp(-\gamma q s)\exp(\frac{\gamma^2 q^2 \sigma^2 (T-t)}{2}) \tag{2}$$

$\bigtriangledown$

$$\begin{aligned}
v(x,s,q,t) &= \mathsf{E}_t[-\exp(-\gamma(x + qs + q\sigma(W_T - W_t)))] = \\
&= -\exp(-\gamma x)\exp(-\gamma q s)\mathsf{E}_t[\exp(-\gamma q\sigma(W_T - W_t))] \\
&= -\exp(-\gamma x)\exp(-\gamma q s)\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2|T-t|}}\exp(-\gamma q\sigma x)\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2|T-t|})dx = \\
&= -\underbrace{\frac{\exp(-\gamma(x+qs))}{\sqrt{2\pi\sigma^2|T-t|}}}_{c_0}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-\underbrace{\frac{1}{2\sigma^2|T-t|}}_{c_1}(x^2 + 2\sigma^2|T-t|\gamma q\sigma x))dx = \\
&= c_0\int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-c_1(x + \sigma^2|T-t|\gamma q\sigma)^2)\underbrace{\exp(c_1\sigma^4(T-t)^2\gamma^2 q^2\sigma^2)}_{c_2}dx = \\
&= \left[\begin{array}{ccl} t & = & \sqrt{c_1}(x + \sigma^2|T-t|\gamma q\sigma) \\ dt & = & \sqrt{c_1}dx \end{array}\right] = \frac{c_0\cdot c_2}{\sqrt{c_1}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-t^2)dt = \\
&= \frac{c_0\cdot c_2}{\sqrt{c_1}}\sqrt{\pi} = -\exp(-\gamma x)\exp(-\gamma q s)\exp(\frac{\gamma^2 q^2\sigma^2(T-t)}{2})
\end{aligned}$$

$\bigtriangleup$

Определим резервную цену предложения — цену, которая сделает агента безразличным между его текущим портфелем и его текущим портфелем с одной дополнительной акцией. Запрашиваемая цена резервирования определяется аналогичным образом ниже.

Определение 1
Пусть v — функция полезности агента. Его резервная цена предложения (bid price) r^b определяется соотношением

$$v(x - r^b(s,q,t), s, q+1, t) = v(x,s,q,t)$$

Определение 2
Пусть v — функция полезности агента. Его резервная цена спроса (ask price) r^a определяется соотношением

$$v(x + r^a(s,q,t), s, q-1, t) = v(x,s,q,t)$$

Утверждение 1
Используя опр-я (1) и (2), а также соотношение (2) можно выразить r^a и r^b:

$$\begin{aligned} r^a(s,q,t) &= s + (1-2q)\frac{\gamma\sigma^2(T-t)}{2}, \\ r^b(s,q,t) &= s + (-1-2q)\frac{\gamma\sigma^2(T-t)}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

$\triangledown$

$$\begin{aligned} -\exp(-\gamma(x + r^a(s,q,t)))\exp(-\gamma(q-1)s)\exp(\frac{\gamma^2(q-1)^2\sigma^2(T-t)}{2}) &= \\ = -\exp(-\gamma x)\exp(-\gamma q s)\exp(\frac{\gamma^2 q^2\sigma^2(T-t)}{2}) \\ \exp(-\gamma r^a(s,q,t))\exp(\gamma s)\exp(\frac{\gamma^2(-2q+1)\sigma^2(T-t)}{2}) &= 1 \\ -\gamma r^a(s,q,t) + \gamma s + (\frac{\gamma^2(-2q+1)\sigma^2(T-t)}{2}) &= 0 \\ \Rightarrow r^a(s,q,t) = s + (1-2q)\frac{\gamma\sigma^2(T-t)}{2} \\ \text{И аналогично: } r^b(s,q,t) = s + (-1-2q)\frac{\gamma\sigma^2(T-t)}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

$\triangle$

2.1 Оптимизирующий агент с бесконечным горизонтом времени

Чтобы получить стационарную версию резервной цены, мы можем рассмотреть функцию полезности с бесконечным горизонтом:

Определение 3
функция полезности с бесконечным горизонтом записывается следующим образом:

$$\bar{v} = \mathsf{E}\Big[\int_0^\infty - \exp(-wt)\exp(-\gamma(x+qS_t))dt\Big]$$

(введение $\exp(-wt)$ подразумевает дисконтирование).

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \mathsf{E}\Big[\int_0^\infty - \exp(-wt)\exp(-\gamma(x+qS_t))dt\Big] = \\
&= -\int_0^\infty \mathsf{E}\exp(-wt)\exp(-\gamma x)\exp(-\gamma qs)\exp(-\gamma q\sigma W_t)dt = \\
&= \underbrace{\exp(-\gamma x)\exp(-\gamma qs)}_{c_1}\int_0^\infty \exp(-wt)\mathsf{E}\exp(-\gamma q\sigma W_t)dt = \\
&= c_1\int_0^\infty \exp(-wt)\int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-\gamma q\sigma z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{z^2}{2t})dzdt = \\
&= c_1\int_0^\infty \exp(-wt)\exp(\frac{\gamma^2q^2\sigma^2 t}{2})dt = \\
&= c_1\int_0^\infty \exp(t(\frac{\gamma^2q^2\sigma^2}{2} - w))dt = \\
&= c_1\frac{2}{\gamma^2q^2\sigma^2 - 2w}\exp(t(\frac{\gamma^2q^2\sigma^2}{2} - w))\Big|_0^\infty = \\
&= \frac{2\exp(-\gamma x)\exp(-\gamma qs)}{\gamma^2q^2\sigma^2 - 2w}
\end{aligned}$$

Определение 4
Стационарные цены резервирования (определяемые так же, как в определениях 1 и 2) определяются выражением:

$$\bar{v}(x+\bar{r}^a(s,q,t),s,q-1,t) = \bar{v}(x,s,q,t),$$

$$\bar{v}(x-\bar{r}^b(s,q,t),s,q+1,t) = \bar{v}(x,s,q,t)$$

Утверждение 2
Введённые таким образом цены $\bar{r}^a(s,q)$ и $\bar{r}^b(s,q)$ можно посчитать явно:

$$\bar{r}^a(s,q) = s + \frac{1}{\gamma}\ln\left(1 + \frac{(1-2q)\gamma^2\sigma^2}{2w - \gamma^2 q^2\sigma^2}\right),$$

$$\bar{r}^b(s,q) = s + \frac{1}{\gamma}\ln\left(1 + \frac{(-1-2q)\gamma^2\sigma^2}{2w - \gamma^2 q^2\sigma^2}\right),$$

где $w > \frac{1}{2}\gamma^2\sigma^2 q^2$

$\bigtriangledown$

Рассмотрим для $\bar{r}^b(s,q)$ ($\bar{r}^a(s,q)$ выводится аналогично):

$$\begin{aligned}
\bar{v}(x - \bar{r}^b(s,q,t), s, q+1, t) &= \bar{v}(x,s,q,t) \\
\frac{2\exp(-\gamma(x - \bar{r}^b(s,q))\exp(-s\gamma(q+1)))}{\gamma^2(q+1)^2\sigma^2 - 2w} &= \frac{2\exp(-\gamma x)\exp(-\gamma q s)}{\gamma^2 q^2\sigma^2 - 2w} \\
\exp(-\gamma x)\exp(\gamma\bar{r}^b(s,q)) &= \frac{(\gamma^2(q+1)^2\sigma^2 - 2w)(\exp(-\gamma x)\exp(-\gamma q s))}{(\gamma^2 q^2\sigma^2 - 2w)\exp(-s\gamma(q+1))} \\
\exp(\gamma\bar{r}^b(s,q)) &= \frac{(\gamma^2(q+1)^2\sigma^2 - 2w)\exp(s\gamma)}{(\gamma^2 q^2\sigma^2 - 2w)} \\
\gamma\bar{r}^b(s,q) &= \ln\left(1 + \frac{\gamma^2(2q+1)\sigma^2}{\gamma^2 q^2\sigma^2 - 2w}\right) + s\gamma \\
\bar{r}^b(s,q) &= \frac{1}{\gamma}\ln\left(1 + \frac{\gamma^2(2q+1)\sigma^2}{\gamma^2 q^2\sigma^2 - 2w}\right) + s
\end{aligned}$$

$\bigtriangleup$

Таким образом, параметр w можно интерпретировать как верхнюю границу позиции запасов, которую нашему агенту разрешено занять.

2.2 Лимитные ордера

Теперь мы обратимся к агенту, который может торговать акциями посредством лимитных ордеров, которые он устанавливает вокруг средней цены, заданной (1). Агент устанавливает цену спроса p^b и цену предложения p^a и обязуется соответственно купить и продать одну акцию по этим ценам, если соответствующий ордер будет исполнен.

Определим 2 вспомогательные величины, которыми в дальнейшем будем пользоваться:

Определение 5
Пусть s-средняя цена акции. Тогда:

$$\delta^b = s - p^b,$$

$$\delta^a = p^a - s$$

Мы предполагаем, что рыночные ордера на покупку будут «поднимать» лимитные ордера на продажунашего агента по распределению Пуассона с интенсивностью $\lambda^a(\delta^a)$, убывающей функции от δ^a. Аналогично, рыночные ордера на продажу акций «поразят» лимитный приказ агента на покупку с интенсивностью Пуассона $\lambda^a(\delta^b)$, которая является убывающей функцией δ^b.
Интуитивно понятно, что чем дальше от средней цены агент размещает свои котировки, тем реже он будет получать ордера на покупку и продажу.
Капитал и запасы теперь стохастические и зависят от поступления рыночных ордеров на продажу и покупку. Действительно, капитал (денежный или же запасы акций) возрастает каждый раз, когда появляется ордер на покупку или продажу.
Это можно записать в следующем виде:

$$dX_t = p^a dN_t^a - p^b dN_t^b$$

где N_t^b — количество акций, купленных агентом, а N_t^a — количество проданных акций. N_t^b и N_t^a — пуассоновские процессы с интенсивностями λ^b и λ^a. Количество акций, находящихся в собственности в момент t, равно

$$q_t = N_t^b - N_t^a$$

Целью агента, который может устанавливать лимитные ордера, является следующая функция полезности:

$$u(s, x, q, t) = \max_{\delta^a, \delta^b} \mathsf{E}_t \left[-\exp(-\gamma(X_T + q_T S_t)) \right]$$

Обратим внимание, что в отличие от предыдущего подраздела, агент контролирует цены спроса и предложения и, следовательно, косвенно влияет на поток получаемых им ордеров.

Одним из основных направлений деятельности сообщества эконофизиков было описание законов, регулирующих микроструктуру финансовых рынков. Воспользуемся результатами, которые касаются интенсивности Пуассона, с которой будет исполняться лимитный ордер, в зависимости от его расстояния до средней цены. Получение данной функции описаны в [1, 2].

$$\lambda(\delta) = A \exp(-\kappa\delta), \text{ где } A = \frac{\Lambda}{\alpha} \text{ и } \kappa = \alpha K$$

3 Решение

Напомним, что целью агента, который может устанавливать лимитные ордера, является следующая функция полезности:

$$u(s, x, q, t) = \max_{\delta^a, \delta^b} \mathsf{E}_t \left[-\exp(-\gamma(X_T + q_T S_t)) \right],$$

где управление ведётся по δ^a и δ^b. Этот тип задачи оптимального дилера был впервые изучен Ho и Stoll [3]. Одним из ключевых шагов в их анализе является использование принципа динамического программирования, показывающее, что функция u решает следующее уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}\sigma^2 u_{ss} + \max\limits_{\delta^b} \lambda^b(\delta^b) \left[u(s, x - s + \delta^b, q + 1, t) - u(s, x, q, t) \right] \\ \qquad\qquad + \max\limits_{\delta^a} \lambda^a(\delta^a) \left[u(s, x + s + \delta^a, q - 1, t) - u(s, x, q, t) \right] = 0, \\ u(s, x, q, T) = -\exp(-\gamma(x + qs)) \end{cases}$$

Утверждение 3
Данное уравнение можно переписать иначе, с новой неизвестной $\theta(s, q, t)$:

$$\begin{cases} \theta_t + \dfrac{1}{2}\sigma^2 \gamma \theta_{ss}^2 + \max\limits_{\delta^b} \left[\dfrac{\lambda^b(\delta^b)}{\gamma} \left[1 - e^{\gamma(s - \delta^b - r^b)} \right] \right] \\ \qquad\qquad + \max\limits_{\delta^a} \left[\dfrac{\lambda^a(\delta^a)}{\gamma} \left[1 - e^{-\gamma(s + \delta^a - r^a)} \right] \right] = 0, \\ \theta(s, q, T) = qs \end{cases}$$

$\triangledown$

Решение этого нелинейного уравнения непрерывно по переменным s, x и t и зависит от дискретных значений запасов q. Благодаря нашему выбору экспоненциальной полезности мы можем упростить задачу следующей подстановкой (теперь новая неизвестная это $\theta(s, q, t)$):

$$u(s, x, q, T) = -\exp(-\gamma x) \exp(-\gamma \theta(s, q, t))$$

Проделаем эту замену:

$$u_t = -\exp(-\gamma x)(-\gamma) \exp(-\gamma \theta(s, q, t)) \theta_t(s, q, t);$$
$$u_s = -\exp(-\gamma x)(-\gamma) \exp(-\gamma \theta(s, q, t)) \theta_s(s, q, t);$$

$$\begin{aligned} u_{ss} = &-\exp(-\gamma x)\gamma^2 \exp(-\gamma \theta(s, q, t)) \theta_s^2(s, q, t) + \\ &+ (-\exp(-\gamma x)(-\gamma) \exp(-\gamma \theta(s, q, t)) \theta_{ss}(s, q, t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(s, x - s + \delta^b, q + 1, t) - u(s, x, q, t) = &-\exp(-\gamma(x - s + \delta^b)) \exp(-\gamma \theta(s, q + 1, t)) \\ &+ \exp(-\gamma x) \exp(-\gamma \theta(s, q, t)) \end{aligned}$$

$$= -\exp(\gamma x)\left[\exp(\gamma s - \gamma\delta^b)\exp(-\gamma\theta(s,q+1,t)) - \exp(-\gamma\theta(s,q,t))\right]$$

$$u(s, x+s+\delta^a, q-1, t) - u(s,x,q,t) =$$

$$= -\exp(-\gamma x)\left[\exp(-\gamma(s+\delta^a))\exp(-\gamma\theta(s,q-1,t)) - \exp(-\gamma\theta(s,q,t))\right]$$

По определению цен резервирования спроса и предложения ((2)),((2)) и по заданию функции полезности (полученной выше) находим, что

$$r^b(s,q,t) = \theta(s,q+1,t) - \theta(s,q,t),$$

$$r^a(s,q,t) = \theta(s,q,t) - \theta(s,q-1,t)$$

$\triangle$

Используя следующие соотношения:

$$s - r^b(s,q,t) = \delta^b - \frac{1}{\gamma}\ln\left(1 - \gamma\frac{\lambda^b(\delta^b)}{\frac{\partial\lambda^b}{\partial\delta}(\delta)}\right),$$

$$r^a(s,q,t) - s = \delta^a - \frac{1}{\gamma}\ln\left(1 - \gamma\frac{\lambda^a(\delta^a)}{\frac{\partial\lambda^a}{\partial\delta}(\delta^a)}\right),$$

и вспоминая введённое ранее

$$\lambda(\delta) = A\exp(-\kappa\delta),$$

перепишем наши выражения:

$$e^{\gamma(s-\delta^b-r^b)} = e^{-\ln\left(1-\gamma\frac{\lambda^b(\delta^b)}{\frac{\partial\lambda^b}{\partial\delta}(\delta^b)}\right)} = \frac{\frac{\partial\lambda^b}{\partial\delta}(\delta^b)}{\frac{\partial\lambda^b}{\partial\delta}(\delta^b) - \gamma\lambda^b(\delta^b)} = \frac{-\kappa Ae^{-k\delta^b}}{-\kappa Ae^{-k\delta^b} - \gamma Ae^{-k\delta^b}} = \frac{k}{k+\gamma}$$

$\Rightarrow$

4 Список литературы

Список литературы

[1] E. Smith, J.D. Farmer, L. Gillemot and S. Krishnamurthy, Statistical Theory of the Continuous Double Auction, Quantitative Finance, 3 (2003) 481 — 514.

[2] P. Weber and B. Rosenow, Order Book Approach to Price Impact, Quantitative Finance, 5 (2005) 357 — 364.

[3] T. Ho and H. Stoll, Optimal Dealer Pricing under Transactions and Return Uncertainty, Journal of Financial Economics, 9 (1981) 47 — 73.