Бахышов Вахид, 409 группа

Отчёт по задаче "Численное интегрирование 1d".

1 Задача 1.

Задача 1. Реализуйте метод Симпсона и метод Гаусса в виде функции с прототипом

```
double RectangleMethod (double a, double b, double (*f)(double));
double SimpsonMethod (double a, double b, double (*f)(double));
double GaussMethod (double a, double b, double (*f)(double));
```

где f — указатель на подинтегральную функцию. Проверьте выполнение указанных оценок погрешности для $f(x) = x^n, n = 0, 1, 2, 3, 5, 9, a = 1, b = 1.1$.

Решение. Реализацию программы см в разделе 1d. Ниже приведены результаты вычислений, выполненных в среде Wolfram Mathematica, и результаты работы программы.

Выражение	Wolfram Mathematica	Формула Симсона	Формула Гаусса
$\int_1^{1.1} dx$	0.1	0.1	0.1
$\int_1^{1.1} xdx$	0.105	0.105	0.105
$\int_1^{1.1} x^2dx$	0.110333333333333	0.110333333333333	0.11025
$\int_1^{1.1} x^3dx$	0.116025	0.116025	0.1157625
$\int_1^{1.1} x^5dx$	0.1285935	0.1285939375	0.12762815625
$\int_1^{1.1} x^9dx$	0.159374246	0.159387675915235	0.155132821597852

2 Задача 2.

Задача 2. Реализуйте составную квадратуру Симпсона и квадратуру Гаусса в виде функции

```
double CompositeRectangleMethod(double a,double b,double(*f)(double),int N);
double CompositeSimpsonQuadrature(double a,double b,double(*f)(double),int N);
double CompositeGaussianQuadrature(double a,double b,double(*f)(double),int N);
```

где N — число разбиений отрезка интегрирования $[a, b]$ на равные подотрезки. Выпишите явную асимптотику для погрешности составных квадратур Симпсона и Гаусса в форме $R_{N,n}^{[a,b]}(f) \approx C/N^p$. Сравните теоретические оценки с численными расчетами для следующих функций:

$$\int_0^\pi \cos 100x dx = 0, \qquad \int_0^1 \exp -10x dx \approx 10^{-1}, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

3 Метод квадратурных формул:

$$I^{[a,b]}(f) = \int_a^b f(x) \sim S_n^{[a,b]}(f)| = \sum_{i=1}^N c_i f(x_i)$$

4 Формула прямоугольников

$$S_1(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

Оценка погрешности:

для $f \in C^1[a,b]:$ $\quad R_1(f) = |\int_a^b f(x) - (b-a)f(\frac{a+b}{2})| \le ||f'||_{C[a,b]} \frac{(b-a)^2}{4}$

для $f \in C^2[a,b]:$ $\quad \tilde{R}_1(f) = |\int_a^b f(x) - (b-a)f(\frac{a+b}{2})| \le ||f'||_{C[a,b]} \frac{(b-a)^3}{24}$

Для составных квадратур:

для $f \in C^1[a,b]:$ $\quad R_1^N(f) \le ||f'||_{C[a,b]} \frac{(b-a)^2}{4 \cdot N} = \frac{C_1}{N}$

для $f \in C^2[a,b]:$ $\quad \tilde{R_1}^N(f) \le ||f'||_{C[a,b]} \frac{(b-a)^3}{24 \cdot N^2} = \frac{\tilde{C_1}}{N^2}$

5 Формула Симпсона (парабол)

$$S_3(f) = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

Оценка погрешности:

для $f \in C^3[a,b]: \quad R_3(f) = ||f^{(3)}(x)|| \cdot \frac{(b-a)^4}{192}$

для $f \in C^4[a,b]: \quad \tilde{R}_3(f) = ||f^{(4)}(x)|| \cdot \frac{(b-a)^5}{2880}$

Для составных квадратур:

для $f \in C^3[a,b] \quad R_3^N(f) \leq |||f^{(3)}(x)|| \cdot \frac{(b-a)^4}{192 \cdot N^3} = \frac{C_3}{N^3}$

для $f \in C^4[a,b]: \quad \tilde{R_3}^N(f) \leq ||f^{(4)}(x)|| \cdot \frac{(b-a)^5}{2880 \cdot N^4} = \frac{\tilde{C_3}}{N^4}$

6 Формула Гаусса по 3 узлам

$$S_1(f) = \frac{(b-a)}{18}(5f(x_-) + 8f(x_0) + 5f(x_+))$$

где $x_0 = \frac{a+b}{2}, x_\pm = \frac{a+b}{2} \pm \frac{b-a}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$

Оценка погрешности:

$R(f) \leq ||f^{(6)}(x)|| \cdot \frac{(b-a)^7}{6! \cdot 2^{10}} = |f^{(6)}(x)|| \cdot \frac{(b-a)^7}{737280}$

$R^N(f) \leq ||f^{(6)}(x)|| \cdot \frac{(b-a)^7}{737280 \cdot N^6} = \frac{C}{N^6}$

7 Для интегралов с особенностью:

$$R = |I(f) - S(f)| = |\int_a^b f(x) - \int_a^\varepsilon f(x) \sim S^{[\varepsilon,b]}(f)| = |\int_\varepsilon^b f(x) - S^{[\varepsilon,b]}(f)|$$

к примеру$\varepsilon = 0,01,\ 0,0001$

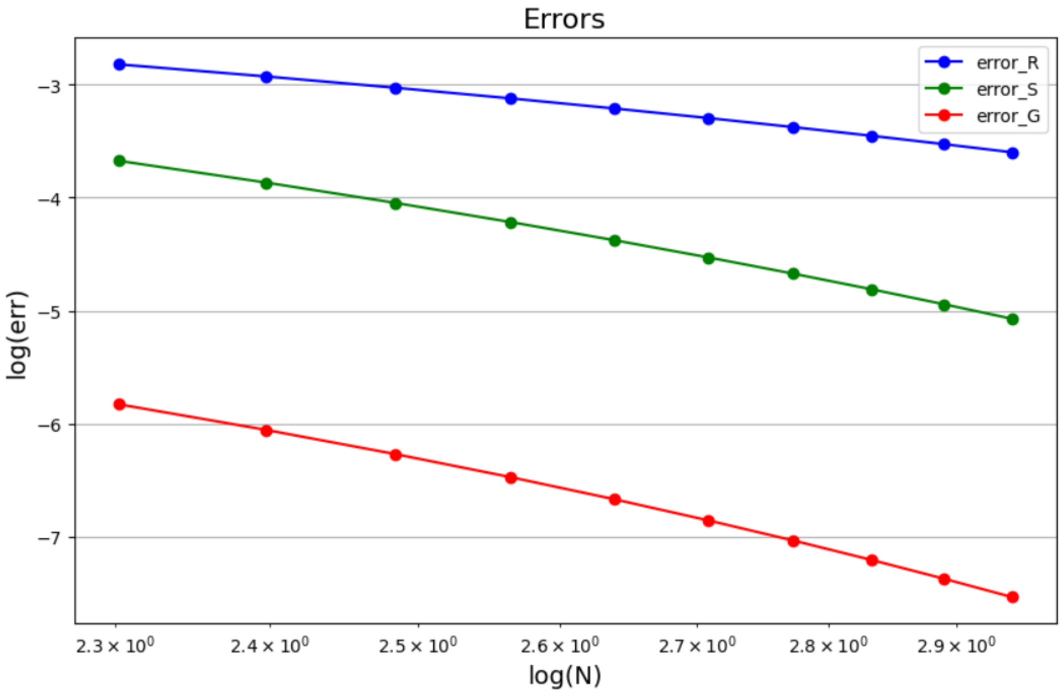

Рис. 1: ошибки f(x) = 1/sqrt(x) на [0.010 , 1.000]

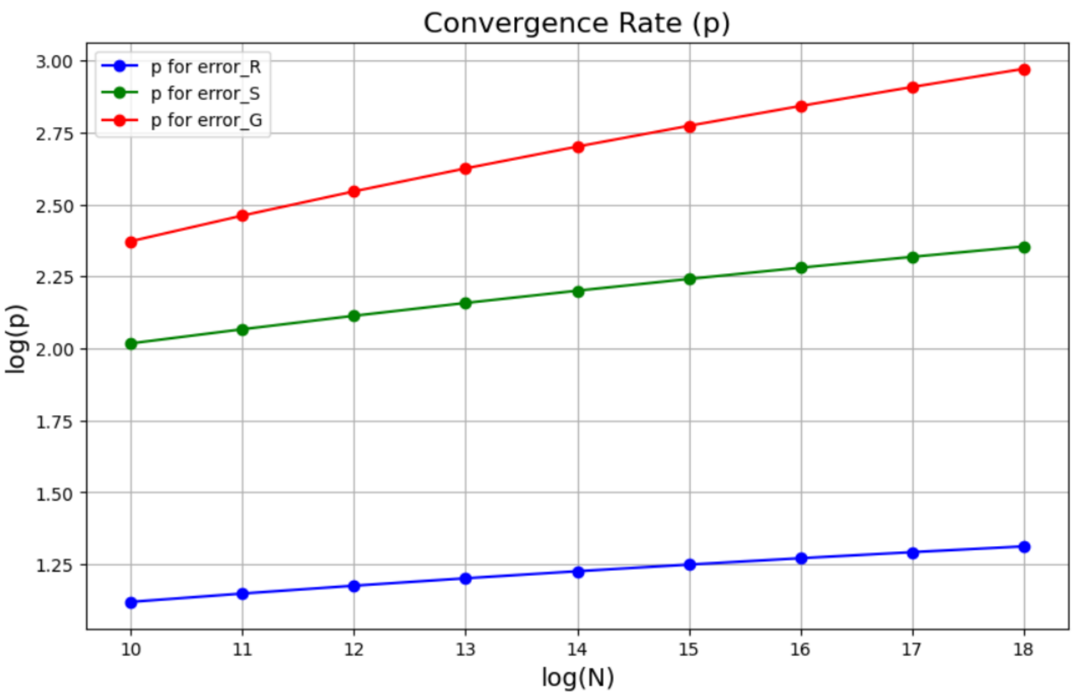

Рис. 2: показатель сходимости f(x) = 1/sqrt(x) на [0.010 , 1.000]

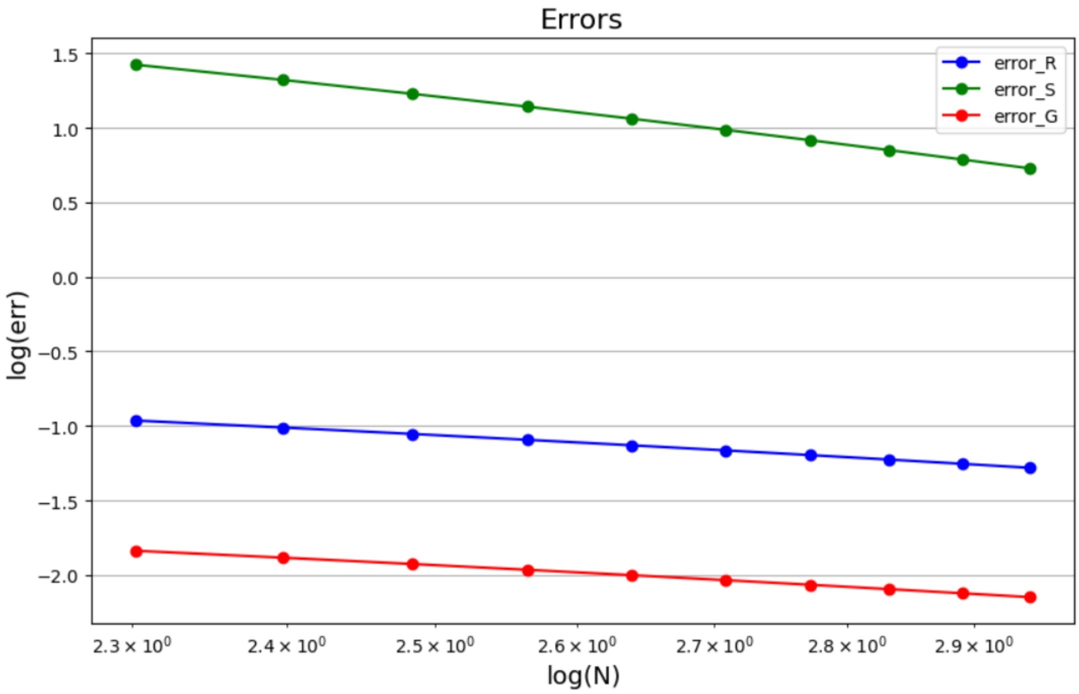

Рис. 3: ошибки $f(x) = 1/sqrt(1 - x^2)$ на [-1.000, 1.000]

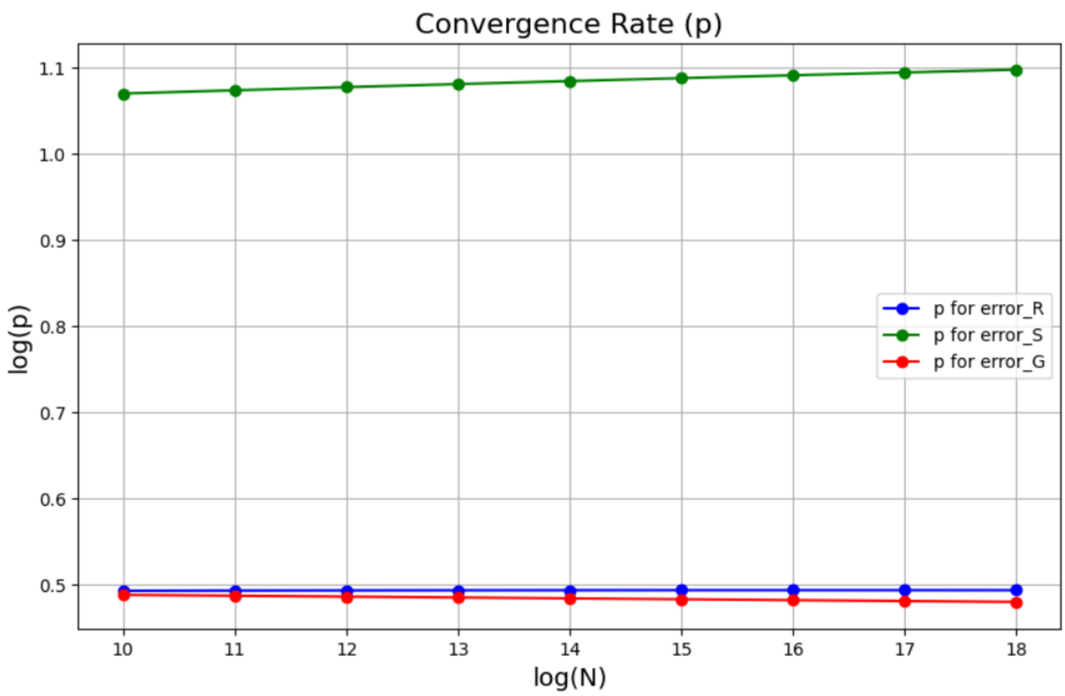

Рис. 4: показатель сходимости $f(x) = 1/sqrt(1 - x^2)$ на [-1.000, 1.000]