Бахышов Вахид, 409 группа

Отчёт по задаче "Приближение с помощью построения ряда Фурье".

1 Постановка задачи.

1) Для функции $u(x) \in C^{\infty}[0,1]$, удовлетворяющей краевым условиям:

$$u(0) = u(1) = 0,$$

необходимо выписать тригонометрический ряд Фурье и сформулировать теорему сходимости.

2) Затем, на сетке:

$$x_0 = \frac{-h}{2},$$
$$x_N = 1 + \frac{h}{2},$$
$$h = \frac{1}{N-1},$$

выписать дискретный тригонометрический ряд Фурье. Найти дискретное скалярное произведение, сохраняющее ортогональность базисных функций. Нормировать базисные функции.

3) И, наконец, для некоторой тестовой функции из указанного класса численно найти порядок сходимости её дискретного ряда Фурье.

2 Тригонометрический ряд Фурье.

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2} = -\lambda u_k \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$u(0) = 0 \iff \frac{u_0+u_1}{2} = 0 \iff u_0 + u_1 = 0$

$u(1) = 0 \iff \frac{u_{N-1}+u_N}{2} = 0 \iff u_{N-1} + u_N = 0$

Краевые условия $u_0 + u_1 = 0, u_{N-1} + u_N = 0$

$u_{k+1} - 2pu_k + u_{k-1} = 0$, где $p = (1 - \frac{\lambda h^2}{2})$

$u_k = \mu^k \Rightarrow \mu^2 - 2p\mu + 1 = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - 1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k,\ \mu_1 \neq \mu_2 \iff p^2 \neq 1 \\ y_k = C_1\mu_1^k + C_2k\mu_2^k,\ \mu_1 = \mu_2 = \mu \end{cases} \tag{2}$$

II случай $\mu_1 = \mu_2 = \mu \Rightarrow y_k = C_1\mu^k + C_2k\mu^k$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1\mu + C_2\mu + C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1\mu^{N-1} + C_2(N-1)\mu^{N-1} + C_1\mu^N + C_2N\mu^N = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1\mu + C_2\mu + C_1 = 0 \\ C_1\mu + C_2N\mu + C_1 + C_2(N-1) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Вычитаем из 2-ого уравнение 1-ое и получаем, что

$C_2N\mu + C_2(N-1) - C_2\mu = 0 \Rightarrow C_2\mu(N-1) + C_2(N-1) = 0$

В итоге получаем, что $C_2(\mu + 1) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} C_2 = 0 \Rightarrow C_1(1+\mu) = 0 \iff C_1 = 0\ or\ \mu = -1 \\ \mu = -1 \Rightarrow -C_1 - C_2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$\Rightarrow y_k \equiv 0$ (ненулевые решения $\nexists$)

I случай $\mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1\mu_1 + C_2\mu_2 + C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\mu_1^{N-1} + C_2\mu_2^{N-1} + C_1\mu_1^N + C_2\mu_1^N = 0 \end{cases} \quad (6)$$

упростив 1-ое уравнение, получаем $C_1(1+\mu_1) + C_2(1+\mu_2) = 0 \iff C_2(1+mu_2) = -C_1(1+mu_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2(1+\mu_2) = -C_1(1+\mu_1) \\ C_1\mu_1^{N-1}(1+\mu_1) + C_2\mu_2^{N-1}(1+\mu_2) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

подставляем результат 1-ого уравнения во 2-ое уравнение, получаем
$C_1\mu_1^{N-1}(1+\mu_1) - \mu_2^{N-1}C_1(1+\mu_1) = 0 \mid : C_1 \iff$
$\mu_1 = -1$ or $(\frac{\mu_1}{\mu_2})^{N-1} = 1$
Тогда $\mu_1 = -1$ or $\frac{\mu_1}{\mu_2} = e^{\frac{2\pi i}{N-1}n}$, $n = 0, 1, ..., N-2$
Т.к $\mu^2 - 2p\mu + 1 = 0 \Rightarrow$ по т.Виета $\mu_1\mu_2 = 1 \Rightarrow \mu_2 = \frac{1}{\mu_1} \Rightarrow \mu_1^2 = e^{\frac{2\pi i}{N-1}n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu_1 = e^{\frac{\pi i}{N-1}n}$ и $\mu_1 = e^{-\frac{\pi i}{N-1}n}$, т.е $\mu_1 = \frac{1}{\mu_2} = e^{\frac{\pi i}{N-1}n}$, $n = 0, 1, ..., N-2$ всего (N - 1) различных корней из единицы
$C_2(1+\mu_2) = -C_1(1+\mu_1) \Rightarrow C_2 = -C_1\frac{1+\mu_1}{1+\mu_2} = \{\mu_2 = \frac{1}{mu_1}\} = -C_1\frac{1+\mu_1}{1+1/\mu_1} =$
$= -C_1\mu_1$, тогда $y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k = C_1(\mu_1^k - \mu_1\mu_2^k) = C_1(e^{\frac{\pi in}{N-1}k} - e^{\frac{\pi in}{N-1}} \cdot e^{-\frac{\pi in}{N-1}k}) = C_1(e^{\frac{\pi in}{N-1}k} - e^{\frac{\pi in}{N-1}(1-k)}) = C_1[cos(\frac{\pi n}{N-1}k) + i \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1}k) -$
$-cos(\frac{\pi n}{N-1}(1-k)) - i \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1}(1-k))] = c_1[2i \cdot sin(\frac{\frac{\pi n}{N-1}k - \frac{\pi n}{N-1}(1-k)}{2}) \cdot$
$\cdot cos(\frac{\frac{\pi n}{N-1}k + \frac{\pi n}{N-1}(1-k)}{2}) - 2sin(\frac{\frac{\pi n}{N-1}k + \frac{\pi n}{N-1}(1-k)}{2}) \cdot sin(\frac{\frac{\pi n}{N-1}k - \frac{\pi n}{N-1}(1-k)}{2})] =$
$= C_1[2i \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1} \cdot \frac{2k-1}{2}) \cdot cos(\frac{\pi n}{2(N-1)}) - 2sin(\frac{\pi n}{2(N-1)}) \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1} \cdot \frac{2k-1}{2})] =$
$= sin(\frac{\pi n}{N-1} \cdot \frac{2k-1}{2}) \cdot C_1[2i \cdot cos(\frac{\pi n}{2(N-1)}) - 2sin(\frac{\pi n}{2(N-1)})] = C \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1} \cdot \frac{2k-1}{2})$
Таким образом, $y_k = C \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1} \cdot \frac{2k-1}{2})$, где $k = 0, ..., N$ и $n = 1, ..., N-2$

Из краевых условий видно, что функцию $u(x) \in C^{\infty}[0,1]$ можно разложить в ряд Фурье, взяв синусы в качестве базисных функций:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \pi m x.$$

Перейдём к рассмотрению конечного числа узлов. Выпишем условия на сетку:

$$\begin{aligned}
&u_k := u(x_k),\ h = \frac{1}{N-1},\ x_k := \frac{-h}{2} + kh \\
&u(x_k) = \sum_{m=1}^{N-1} c_m^N \sin \pi m x_k, \\
&\phi_k^m := \sin \pi m(\frac{-h}{2} + kh) \\
&\phi^m := (\phi_1^m ... \phi_{N-1}^m).
\end{aligned}$$

Убедимся, что указанная система функций ортогональна относительно скалярного произведения $(\phi^k, \phi^j) = \sum_{m=1}^{N-1} \phi_m^k \phi_m^j h$:

Заметим, что при $\alpha \neq 0$ справедливо:

$$\sum_{m=1}^{N-1} \cos(\alpha m - \frac{\alpha}{2}) = Re \sum_{m=1}^{N-1} e^{i(\alpha m - \frac{\alpha}{2})} = Re \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}(e^{i\alpha(N-1)}-1)}}{e^{i\alpha - 1}} = \frac{Im[-1 + e^{i(N-1)\alpha}]}{2\sin(\alpha/2)}$$
$$= \frac{\sin{(N-1)\alpha}}{2\sin(\alpha/2)}.$$

Отсюда при $k \neq j$:

$$
\begin{aligned}
&(\phi^k,\phi^j) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N-1}[\cos{(\pi h(m-\frac{1}{2})(k-j))} - \cos{(\pi h(m-\frac{1}{2})(k+j))}]h \\
&= h\left[\frac{\sin{(N-1)\pi h(k-j)}}{4\sin(\pi h(k-j)/2)} - \frac{\sin{(N-1)\pi h(k+j)}}{4\sin(\pi h(k+j)/2)}\right] \\
&= h\left[\frac{\sin(\pi(k-j)-\pi h(k-j))}{4\sin(\pi h(k-j)/2)} - \frac{\sin(\pi(k+j)-\pi h(k+j))}{4\sin(\pi h(k+j)/2)}\right] \\
&= h\left[\frac{(-1)^{k-j}\sin(\pi h(k-j))}{4\sin(\pi h(k-j)/2)} - \frac{(-1)^{k+j}\sin(\pi h(k+j))}{4\sin(\pi h(k+j)/2)}\right] \\
&= \frac{h}{2}[(-1)^{k-j}\sin(\pi h(k-j)/2) - (-1)^{k+j}\sin(\pi h(k+j)/2)] = 0.
\end{aligned}
$$

В ином случае,

$$
\begin{aligned}
&\left(\phi^k,\phi^k\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N-1}\left[\cos\left(\pi h\left(m-\frac{1}{2}\right)(k-k)\right) - \cos\left(\pi h\left(m-\frac{1}{2}\right)(k+k)\right)\right]h \\
&= h\left[\frac{N-1}{2} - \frac{\sin 2(N-1)\pi hk}{4\sin(\pi hk)}\right] = h\left[\frac{N-1}{2} - \frac{\sin\left(2-\frac{2}{2N-1}\right)\pi k}{4\sin(\pi hk)}\right] \\
&= h\left[\frac{N-1}{2} - \frac{\sin(\pi hk)}{4\sin(\pi hk)}\right] = h\left(\frac{N-1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{2N-1}\frac{2N-1}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Теперь, пользуясь ортогональностью, можно выписать формулу m-го коэффициента:

$$
\begin{aligned}
&u(x) := (u(x_1)...u(x_{N-1})),\ x := (x_1,...,x_{N-1}) \\
&u(x) = \sum_{m=1}^{N-1} c_m^N \sin\pi m x \\
&(u(x),\phi^k) = \sum_{m=1}^{N-1} c_m^N(\phi^m,\phi^k) \\
&(u(x),\phi^k) = c_k^N(\phi^k,\phi^k).
\end{aligned}
$$

Откуда, наконец, следует искомая формула:

$$
c_k^N = \frac{(u(x),\phi^n)}{(\phi^k,\phi^k)} = 2\left(u(x),\phi^k\right). \tag{2}
$$

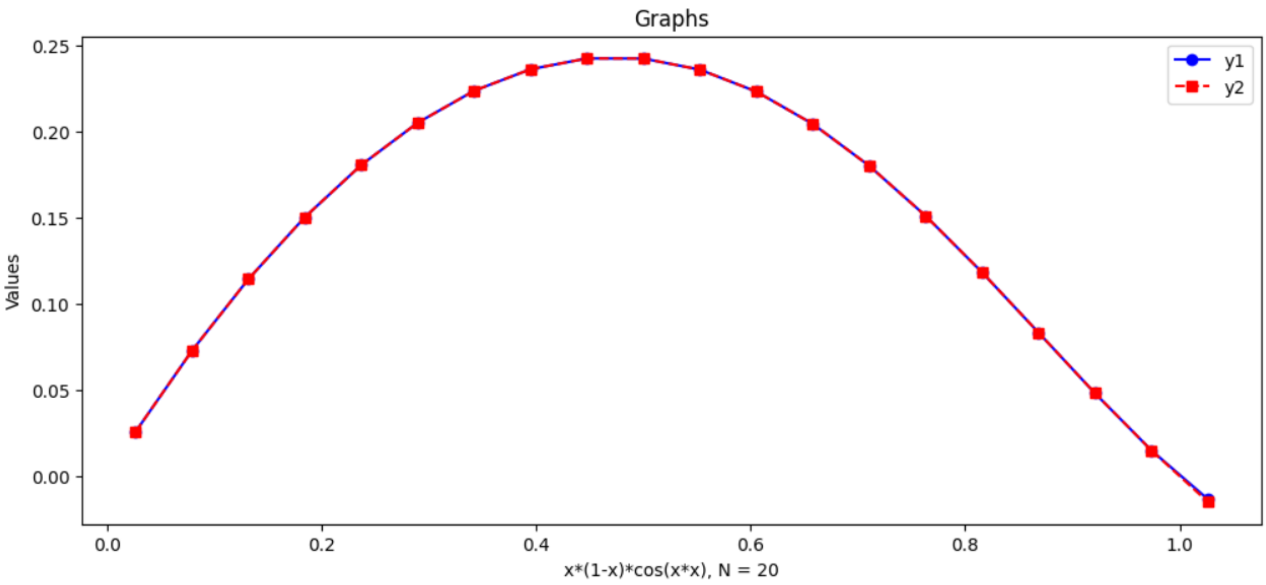

Рис. 1: Результаты теста "Работоспособность".

3 Тесты.

3.1 Работоспособность.

Рассматривались функции:

```
    double u(double x)
{
    return x * (1 - x) * cos(x * x);
    return x * (1 - x);
    return (exp(x)-e) * sin(x);
}
```

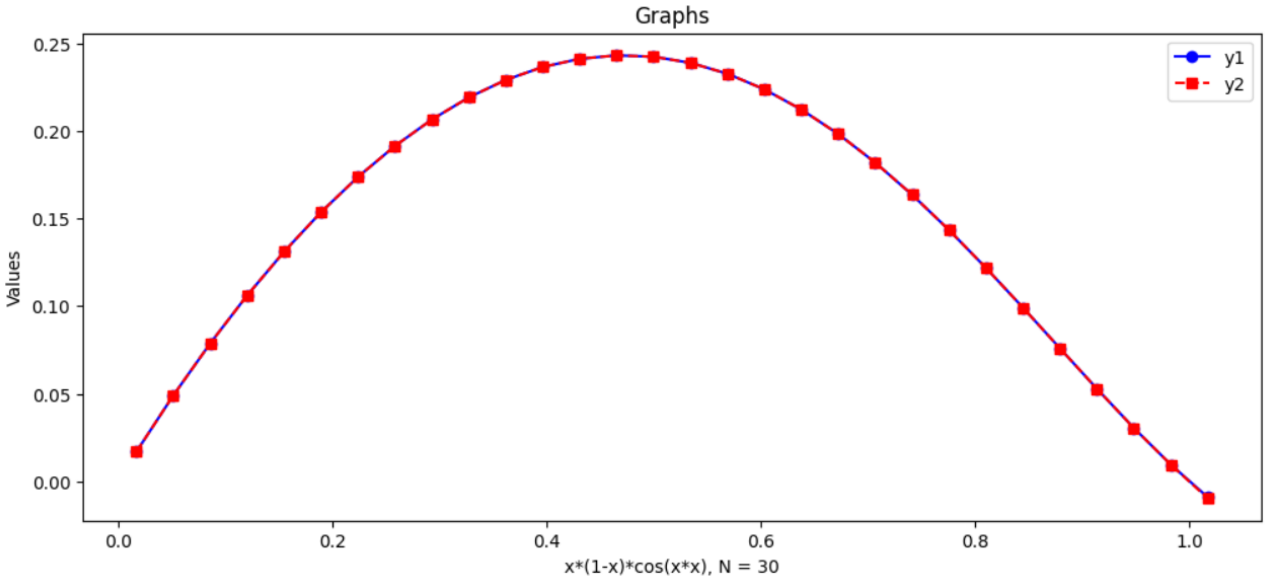

Рис. 2: Результаты теста "Работоспособность".

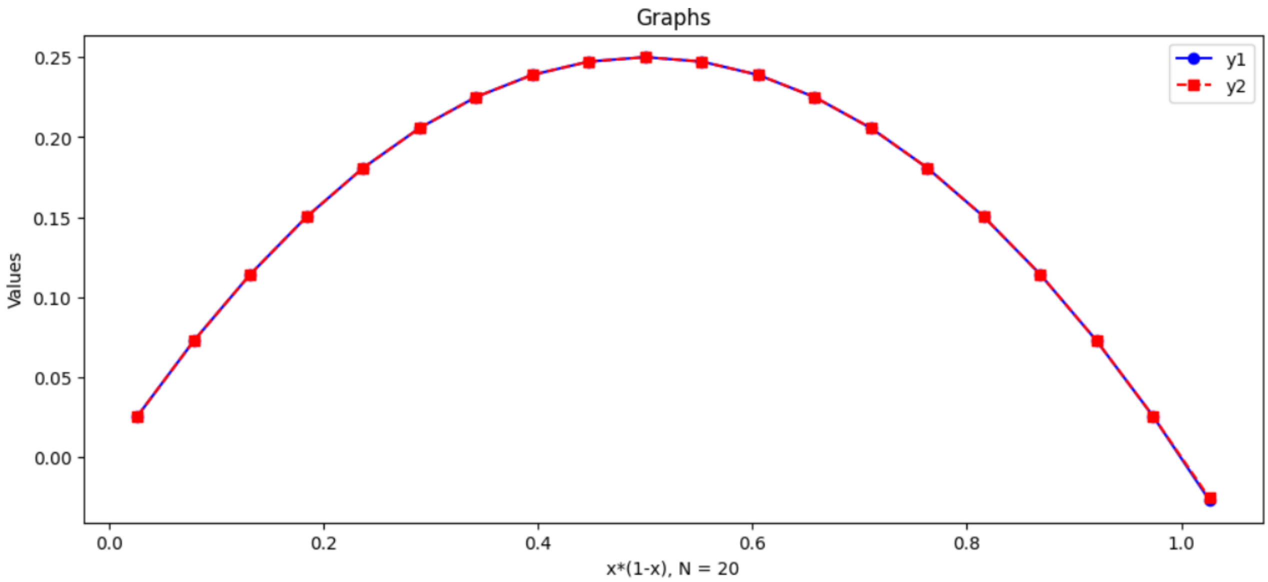

Рис. 3: Результаты теста "Работоспособность".

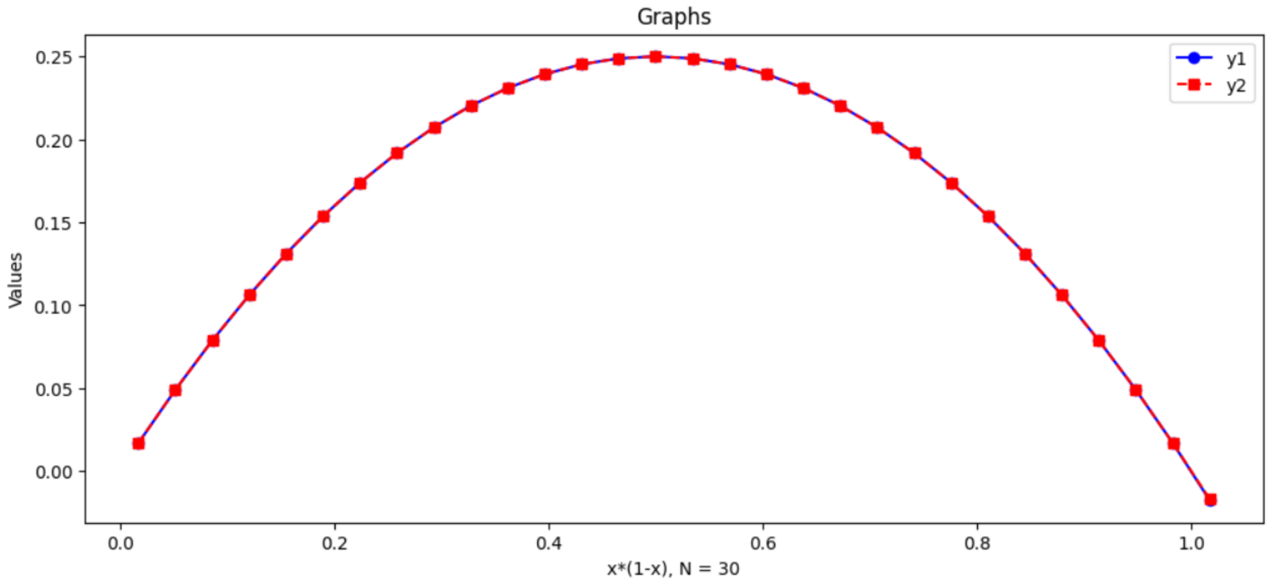

Рис. 4: Результаты теста "Работоспособность".

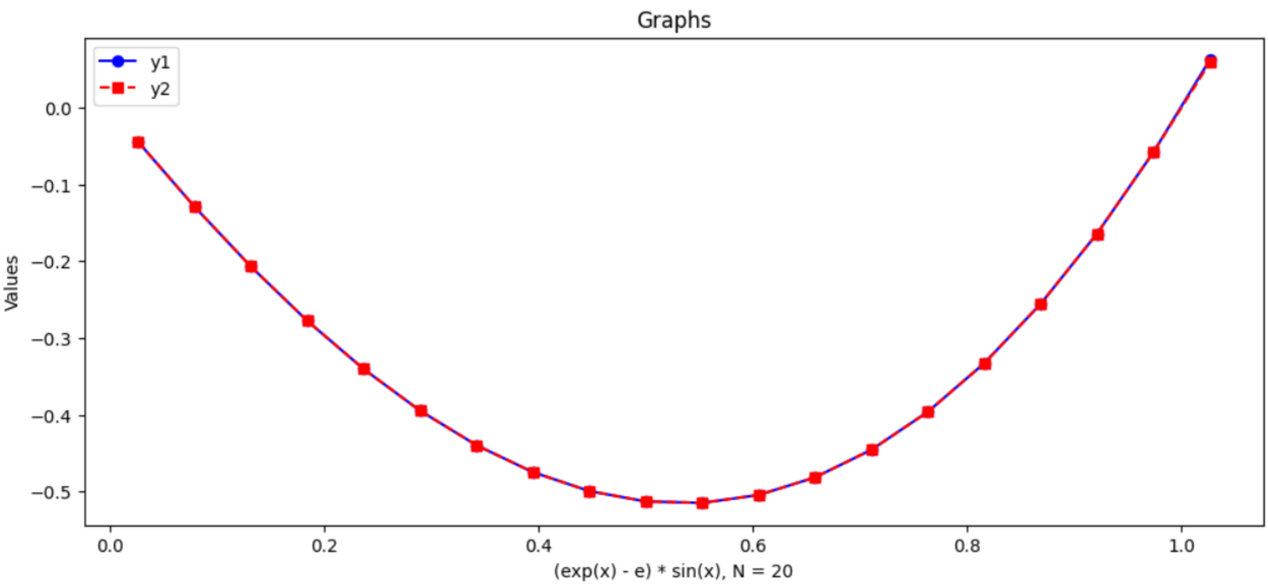

Рис. 5: Результаты теста "Работоспособность".

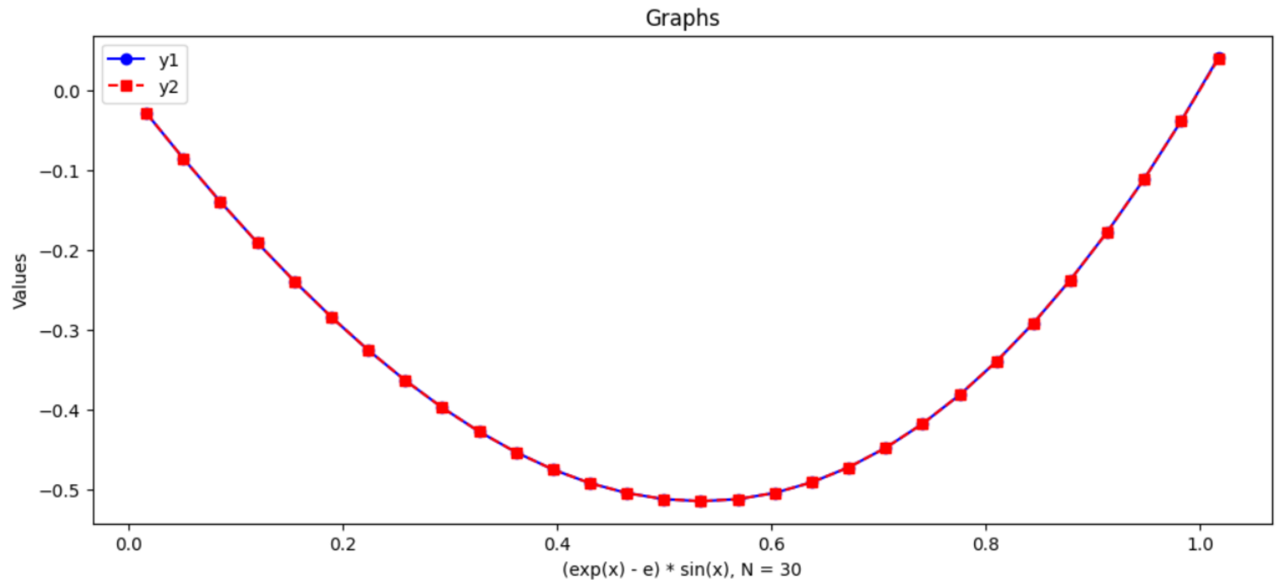

Рис. 6: Результаты теста "Работоспособность".

3: Порядок сходимости

N = 20 :

f(x)	p
$x(1-x)\cdot\cos(x\cdot x)$	2.00293
$x(1-x)$	1.9836
$(e^x-e)\sin(x)$	1.99163