Бахышов Вахид, 409 группа

Отчёт по задаче "Итерационные методы решения систем линейных уравнений".

1 Задача 1.

Для решения системы линейных уравнений:

$$-\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+py_k=f_k, \qquad k=1,\ldots,N-1;$$
$$y(0)=y(1)=0;$$
$$h=\frac{1}{N-1};$$
$$p\geq 0.$$

реализуйте метод Фурье (т.е. метод разложения по собственным векторам) для базисных функций:

$$\psi_k^{(n)}=\sin(\frac{\pi n}{N-1}\cdot(k-\frac{1}{2})) \tag{1}$$

Решение. Сперва, найдём базисные функции:

$-y_{k+1}+2y_k-y_{k-1}+py_kh^2=f_kh^2$

$y_{k+1}-2(1+\frac{ph^2}{2})y_k+y_{k-1}=-f_kh^2$

Выпишем характеристическое уравнение и решим его однородный вариант:

$y_{k+1}-2(1+\frac{ph^2}{2})y_k+y_{k-1}=0, \quad q=1+\frac{ph^2}{2}$

$y_{k+1}-2qy_k+y_{k-1}=0$

$y(0)=0 \iff \frac{y_0+y_1}{2}=0 \iff y_0+y_1=0$

$y(1)=0 \iff \frac{y_{N-1}+y_N}{2}=0 \iff y_{N-1}+y_N=0$

Краевые условия $y_0 + y_1 = 0, y_{N-1} + y_N = 0$

$y_{k+1} - 2qy_k + y_{k-1} = 0$, где $p = (1 + \frac{ph^2}{2})$

$y_k = \mu^k \Rightarrow \mu^2 - 2p\mu + 1 = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - 1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k,\ \mu_1 \neq \mu_2 \iff p^2 \neq 1 \\ y_k = C_1\mu_1^k + C_2 k\mu_2^k,\ \mu_1 = \mu_2 = \mu \end{cases} \tag{2}$$

II случай $\mu_1 = \mu_2 = \mu \Rightarrow y_k = C_1\mu^k + C_2 k\mu^k$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1\mu + C_2\mu + C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1\mu^{N-1} + C_2(N-1)\mu^{N-1} + C_1\mu^N + C_2 N\mu^N = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1\mu + C_2\mu + C_1 = 0 \\ C_1\mu + C_2 N\mu + C_1 + C_2(N-1) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Вычитаем из 2-ого уравнение 1-ое и получаем, что

$C_2 N\mu + C_2(N-1) - C_2\mu = 0 \Rightarrow C_2\mu(N-1) + C_2(N-1) = 0$

В итоге получаем, что $C_2(\mu + 1) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} C_2 = 0 \Rightarrow C_1(1+\mu) = 0 \iff C_1 = 0 \ or\ \mu = -1 \\ \mu = -1 \Rightarrow -C_1 - C_2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$\Rightarrow y_k \equiv 0$ (ненулевые решения $\nexists$)

I случай $\mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1\mu_1 + C_2\mu_2 + C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\mu_1^{N-1} + C_2\mu_2^{N-1} + C_1\mu_1^N + C_2\mu_1^N = 0 \end{cases} \tag{6}$$

упростив 1-ое уравнение, получаем $C_1(1 + \mu_1) + C_2(1 + \mu_2) = 0 \iff$

$C_2(1+mu_2) = -C_1(1+mu_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2(1+\mu_2) = -C_1(1+\mu_1) \\ C_1\mu_1^{N-1}(1+\mu_1) + C_2\mu_2^{N-1}(1+\mu_2) = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

подставляем результат 1-ого уравнения во 2-ое уравнение, получаем
$C_1\mu_1^{N-1}(1+\mu_1) - \mu_2^{N-1}C_1(1+\mu_1) = 0 \mid : C_1 \iff$
$\mu_1 = -1$ or $(\frac{\mu_1}{\mu_2})^{N-1} = 1$
Тогда $\mu_1 = -1$ or $\frac{\mu_1}{\mu_2} = e^{\frac{2\pi i}{N-1}n}$, $n = 0, 1, ..., N-2$
Т.к $\mu^2 - 2p\mu + 1 = 0 \Rightarrow$ по т.Виета $\mu_1\mu_2 = 1 \Rightarrow \mu_2 = \frac{1}{\mu_1} \Rightarrow \mu_1^2 = e^{\frac{2\pi i}{N-1}n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu_1 = e^{\frac{\pi i}{N-1}n}$ и $\mu_1 = e^{-\frac{\pi i}{N-1}n}$, т.е $\mu_1 = \frac{1}{\mu_2} = e^{\frac{\pi i}{N-1}n}$, $n = 0, 1, ..., N-2$ всего (N - 1) различных корней из единицы
$C_2(1+\mu_2) = -C_1(1+\mu_1) \Rightarrow C_2 = -C_1\frac{1+\mu_1}{1+\mu_2} = \{\mu_2 = \frac{1}{mu_1}\} = -C_1\frac{1+\mu_1}{1+1/\mu_1} =$
$= -C_1\mu_1$, тогда $y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k = C_1(\mu_1^k - \mu_1\mu_2^k) = C_1(e^{\frac{\pi i n}{N-1}k} - e^{\frac{\pi i n}{N-1}} \cdot$
$e^{-\frac{\pi i n}{N-1}k}) = C_1(e^{\frac{\pi i n}{N-1}k} - e^{\frac{\pi i n}{N-1}(1-k)}) = C_1[cos(\frac{\pi n}{N-1}k) + i \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1}k) -$
$-cos(\frac{\pi n}{N-1}(1-k)) - i \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1}(1-k))] = c_1[2i \cdot sin(\frac{\frac{\pi n}{N-1}k - \frac{\pi n}{N-1}(1-k)}{2}) \cdot$
$\cdot cos(\frac{\frac{\pi n}{N-1}k + \frac{\pi n}{N-1}(1-k)}{2}) - 2sin(\frac{\frac{\pi n}{N-1}k + \frac{\pi n}{N-1}(1-k)}{2}) \cdot sin(\frac{\frac{\pi n}{N-1}k - \frac{\pi n}{N-1}(1-k)}{2})] =$
$= C_1[2i \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1} \cdot \frac{2k-1}{2}) \cdot cos(\frac{\pi n}{2(N-1)}) - 2sin(\frac{\pi n}{2(N-1)}) \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1} \cdot \frac{2k-1}{2})] =$
$= sin(\frac{\pi n}{N-1} \cdot \frac{2k-1}{2}) \cdot C_1[2i \cdot cos(\frac{\pi n}{2(N-1)}) - 2sin(\frac{\pi n}{2(N-1)})] = C \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1} \cdot \frac{2k-1}{2})$
$= C \cdot sin(\frac{\pi n}{N-1} \cdot (k - \frac{1}{2}))$
Таким образом, $y_k = C \cdot sin[\frac{\pi n}{N-1} \cdot (k - \frac{1}{2})]$, где $k = 0, ..., N$ и $n = 1, ..., N-2$

Пусть $t = \frac{\pi n}{N-1}$, $y_k = \psi_k^{(n)} = sin[t \cdot (k - \frac{1}{2})]$

Вычислим λ_n и заодно проверим, является ли найденная функция собственной:
$A\psi_k^{(n)} = -\frac{\psi_{k+1}^{(n)} - 2\psi_k^{(n)} + \psi_{k-1}^{(n)}}{h^2} + p\psi_k^{(n)} = -\frac{\sin[t\cdot(k+\frac{1}{2})] - 2\sin[t\cdot(k-\frac{1}{2})] + \sin[t\cdot(k-\frac{3}{2})]}{h^2} +$
$+ p\sin[\frac{\pi n}{N-1} \cdot (k - \frac{1}{2})] = -\frac{2\sin[t\cdot(k-\frac{1}{2})]\cdot\cos(t) - 2\sin[t\cdot(k-\frac{1}{2})]}{h^2} + p\sin[t \cdot (k - \frac{1}{2})] =$

$= \sin[t \cdot (k - \frac{1}{2})] \cdot (-\frac{2\cos(t) - 2}{h^2} + p) = \sin[t \cdot (k - \frac{1}{2})] \cdot [p - \frac{2}{h^2}(cos(t) - 1)] =$
$= \sin[\frac{\pi n}{N-1} \cdot (k - \frac{1}{2})] \cdot [p - \frac{2}{h^2}(cos(\frac{\pi n}{N-1}) - 1)].$, где $h = \frac{1}{N-1}$
Отсюда:

$$\lambda_n = p - 2 \cdot (N-1)^2 \cdot (\cos(\frac{\pi n}{N-1}) - 1).$$

Указание. Перепишем задачу в матричном виде относительно вектора $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_{N-1}]^T$, т.е. $A\mathbf{y} = \mathbf{f}$, где $\mathbf{y}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^{N-1}$. Для собственных чисел λ_n и собственных векторов $\psi^{(n)}$ данной матрицы известны аналитические формулы, а собственные векторы ортогональны относительно стандартного скалярного произведения, т.е. образуют базис в пространстве $\mathbf{R}^{N-1}$. Следовательно, формально существует разложение $\mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n \psi^{(n)}$. Подставив соотношение в исходную систему, получим

$$A\left(\sum_{n=1}^{N-1} c_n \psi^{(n)}\right) = \mathbf{f} \Rightarrow \sum_{n=1}^{N-1} c_n \lambda_n \psi^{(n)} = \mathbf{f}$$

Умножим равенство скалярно на $\psi^{(m)}, m = 1, \ldots, N-1$. С учетом ортогональности базиса найдем:

$$\left(\sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n c_n \psi^{(n)}, \psi^{(m)}\right)_h = \left(\mathbf{f}, \psi^{(m)}\right)_h \quad \Rightarrow \quad c_m = \frac{\left(\mathbf{f}, \psi^{(m)}\right)_h}{\lambda_m \left(\psi^{(m)}, \psi^{(m)}\right)_h}$$

Таким образом $c_m = d_m / \lambda_m$, где величины $d_m = \frac{\left(\mathbf{f}, \psi^{(m)}\right)_h}{\left(\psi^{(m)}, \psi^{(m)}\right)_h}$ являются коэффициентами в разложении вектора $\mathbf{f} = \sum_{m=1}^{N-1} d_m \psi^{(m)}$. Определив набор коэффициентов $\{c_m\}$, далее вычисляем координаты искомого вектора $\mathbf{y}_k = \sum_{m=1}^{N-1} c_m \psi_k^{(m)}, k = 0, \ldots, N$.

Отметим, что в данном случае $\left(\psi^{(m)}, \psi^{(m)}\right)_h = \frac{1}{2}$ при всех $m = 1, \ldots, N-1$, а нахождение коэффициентов d_m и восстановление решения y_k можно существенно ускорить за счет арифметических свойств собственных функций при помощи так называемого быстрого преобразования Фурье.

Кроме того, из указания к задаче:

$$c_n = \frac{\left(f, \psi^{(n)}\right)}{\lambda_n\left(\psi^{(n)}, \psi^{(n)}\right)} = \frac{2\left(f, \psi^{(n)}\right)}{\lambda_n}.$$

Решение же можно найти в виде:

$$y_k = \sum_{n=1}^{N-1} c_n \psi_k^{(n)}.$$

2 Задача 3.

Для решения системы линейных уравнений:

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k, \qquad k = 1, \dots, N-1;$$
$$y_0 = -y_1;$$
$$y_N = -y_{N-1};$$
$$h = \frac{\pi}{N};$$
$$p_k = 1 + \sin^2(\pi k h).$$

реализуйте метод с предобуславливателем в виде функции с прототипом "' double BSolver(double *x, const double *A, const double *B, const double *b, double tau, int n, double eps, int mIter); "'
возвращающей найденное приближенное решение x и норму $\|\mathbf{r}\|_h$ вектора невязки $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$. В качестве B возьмите матрицу из Задачи 1 и примените для ее обращения метод Фурье. Сравните теоретическую и практическую скорости сходимости в указанной норме.

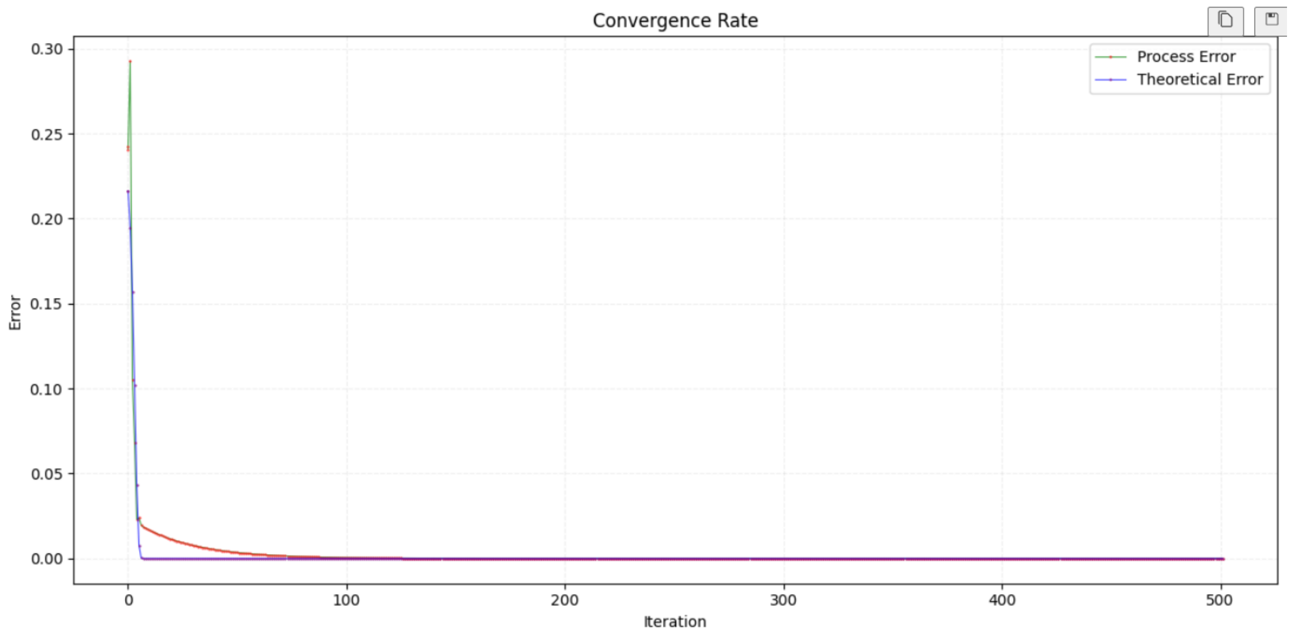

Рис. 1: Ошибка метода решения СЛУ, определяемого матрицей типа Фурье (задача 3), с предобуславливателем.