Бахышов Вахид, 409 группа

Отчёт по задаче "Наилучшее равномерное приближение".

1 Постановка задачи

Задача Пусть задана дискретная функция $y(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, ..., N$. Требуется построить алгебраичекий полиноном $P_n^*(x)$ степени n, являющийся решением следующей задачи

Такой полином называется полиномом наилучшего равномерного приближения исходной функции $y(x_i) = y_i$ по узлам $xi,\ i = 0, 1, 2, ..., N$. Решение данной задачи существенно зависит от соотношения между n и N. Так, если $N = n$, т.е. количество узлов совпадает с количеством коэффициентов исходного полинома, то однозначно строится полином, принимающий в узлах x_i значения y_i. Очевидно, что в этом случае $\rho = 0$ и этот полином является искомым $P_n^*(x)$.

Первым нетривиальным (и как оказывается основным) случаем является случай $N = n + 1$. Он приводит к так называемой чебышевской интерполяции. С помощью чебышевской интерполяциии можно построить полином наилучшего приближения и в общем случае $N > n + 1$.

2 Основные переменные

Nodes - массив узлов.

ValuesInNodes - массив значений функции в узлах.

A - матрица системы линейных уравнений для вычисления коэффициентов полинома.

B - вектор правой части.

Coef - массив коэффициентов полинома.

sigma - базис, используемый в алгоритме Валле-Пуссена.

ValuesInSigma - значения функции в узлах базиса.

ShreddedGrid - более частая сетка для визуализации полинома.

ValuesInShreddedGrid - значения функции на частой сетке.

3 Основной алгоритм

1. Генерация узлов (равноотстоящие, Чебышёвские, случайные).
2. Вычисление значений функции в узлах.
3. Если , применяется алгоритм Валле-Пуссена:

   a) Формируется начальный базис.

   b) Решается система линейных уравнений для нахождения коэффициентов.

   c) Проверяется максимальное отклонение и обновляется базис до выполнения условия оптимальности.
4. Генерация сетки для визуализации и запись результатов в файл.

Чебышевская интерполяция.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть

$$\rho = \inf_{P_n(x)} \max_{i \in [0,\ldots,n+1]} |y_i - P_n(x_i)|$$

Полином наилучшего равномерного приближения существует и единственен. Для того чтобъ полином $P_n^*(x)$ был полиномом наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы при нежотором h выполнялисъ соотношения

$$(-1)^i h + P_n^*(x_i) = y_i, \quad i \in [0, \ldots, n+1] \tag{1}$$

При этом имеет место равенство $\rho = |h|$.

Замечание. Из условия теоремы следует, что h и коэффициенты полинома $P^*(x)$ могут быть найдены из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений с $(n+2)$ неизвестными $h, a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$

$$\begin{cases} h + a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ -h + a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ h + a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2 \\ \ldots \\ (-1)^{n+1} h + a_0 + a_1 x_{n+1} \ldots + a_n x_{n+1}^n = y_{n+1} \end{cases}$$

Определителем этой системы отличен от нуля, если $x_i \neq x_j, i \neq j$. Однако, построение полинома $P_n^*(x)$ через явное вычисление его коэффициентов может приводить к катастрофической потере точности.

Поэтому обычно применяют следующих подход. Имеет место

Теорема. Величина h из (1) может быть вычислена по формуле

$$h = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \alpha_i y_i, \quad \text{где } \alpha_i = \frac{\frac{(-1)^i}{\prod_{k \neq i, k=0}^{n+1} (x_i - x_k)}}{\sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j}{\prod_{k \neq j, k=0}^{n+1} (x_j - x_k)}} \tag{2}$$

Отметим, что используя разделенные разности

$$f(x_i; x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, f(x_1; \ldots; x_{k+1}) = \frac{f(x_2; \ldots; x_{k+1}) - f(x_1; \ldots; x_k)}{x_{k+1} - x_1}$$

равенство (2) можно переписать в виде

$$h = \frac{y\left(x_0; x_1; \ldots; x_{n+1}\right)}{\phi\left(x_0; x_1; \ldots; x_{n+1}\right)}, \qquad \text{где } \phi_k = \phi\left(x_k\right) = (-1)^k, \tag{3}$$

и записать полином наилучшего равномерного приближения в форме Ньютона:

$$P^*(x) = y_0 - h + \sum_{k=1}^{n} \left(y\left(x_0; \ldots; x_k\right) - h\phi\left(x_0; \ldots; x_k\right)\right)\left(x - x_0\right)\ldots\left(x - x_{k-1}\right) \tag{4}$$

При практическом применении формулы (4) следует построить таблицы разделенных разностей функций y и ϕ, найти значение h и результат подставить в (4).

Для контроля правильности полученного полинома стоит убедиться в выполнении условия (1) Теоремы.

Общая дискретная задача. Алгоритм Валле-Пуссена.

Рассмотрим общий случай $N > n + 1$. Положим

$$\rho = \inf_{P(x)} \max_{i \in [0, \ldots, N]} \left|y_i - P\left(x_i\right)\right|$$

Из всех полиномов $P(x)$ степени n требуется определить полином наилучшего приближения $P^*(x)$. Здесь и далее индекс n у полиномов мы опускаем.

Можно показать, что общая дискретная задача имеет точное решение. Оно может быть получено с помощью конечного числа чебышевских итераций.

Введем следующее определение.

def. Базисом σ называется любая $(n+2)$-точечная подсистема узлов

$$\sigma = \left\{x_{i_0} < x_{i_1} < \ldots < x_{i_{n+1}}\right\}$$

Очевидно, что на каждом базисе σ можно осуществить чебышевскую интерполяцию, т.е. построить алгебраический полином $P^*(\sigma, x)$, удовлетворяющий соотношениям

$$(-1)^k h + P^*\left(\sigma, x_{i_k}\right) = y_k, \quad k \in [0, \ldots, n+1].$$

Напомним, что в этом случае

$$\inf_{P(x)} \max_{k \in [0, \ldots, n+1]} \left|y_{i_k} - P\left(x_{i_k}\right)\right| = |h|.$$

Положим

$$h(\sigma) = \max_{k \in [0, \ldots, n+1]} \left|y_{i_k} - P^*\left(\sigma, x_{i_k}\right)\right|, \tag{5}$$

$$\varphi(\sigma) = \max_{i \in [0:N]} \left|y_i - P^*\left(\sigma, x_i\right)\right|$$

т.е. $h(\sigma)$ есть максимальное уклонение на узлах базиса $\sigma, \varphi(\sigma)$ есть максимальное уклонение на всей системе узлов. Очевидно, что для любого базиса σ выполняется следующее неравенство

$$\varphi(\sigma) \geq h(\sigma)$$

Имеет место

Лемма. Если для некоторого базиса σ^* оказалось, что

$$\varphi\left(\sigma^*\right) = h\left(\sigma^*\right)$$

то полином $P(\sigma^*, x)$ является полиномом $P^*(x)$ наилучшего приближения по всем узлам $x_0, \ldots, x_N$.

Таким образом, за конечное число шагов (возможно, осуществив полный перебор базисов σ_i, построенных по узлам $x_0, \ldots, x_N$) мы отыщем интересующий нас базис. Однако полный перебор можно значительно сократить.

Опишем некоторое преобразование S базиса σ в

$$\sigma_1 = \left\{ x_{i_0}^{(1)} < x_{i_1}^{(1)} < \ldots < x_{i_{n+1}}^{(1)} \right\}$$

удовлетворяющее условию

$$h(\sigma) > h(\sigma_1)$$

Лемма. Если для базиса σ верно $\varphi(\sigma) > h(\sigma)$, то существует новый базис $\sigma_1 = S\sigma$, такой что $h(\sigma_1) > h(\sigma)$.

Положим $h^* = \max_\sigma h(\sigma)$.

def. Базис σ^* для которого $h(\sigma^*) = h^*$ называется экстремальным базисom.

Поскольку число различных базисов σ конечно, то очевидно экстремальный базис существует, хотя в общем случае он может быть и не единственным.

Теорема. В общей дискретной задаче полином наилучшего приближеения существует и единственен. Для того чтобы полином $P^*(x)$ был полиномом наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы он осуществляя чебышевскую интерполяиию на некотором экстремальном базисе σ^*.

Следствие. Для того чтобы базис б был экстремальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi(\sigma) = h(\sigma)$$

Таким образом, алгоритм Валле-Пуссена заключается в переборе базисов по алгоритму $\sigma_i = S\sigma_{i-1}$ до тех пор пока не выполнится равенство $\varphi\left(\sigma_i\right) = h\left(\sigma_i\right)$.

Алгоритм Валле-Пуссена (S-алгоритм).

Пусть $\Delta_\sigma\left(x_i\right) = y_i - P^*\left(\sigma, x_i\right)$.
Выберем произвольный базис $\sigma = \left\{x_{i_0} < x_{i_1} < \ldots < x_{i_{n+1}}\right\}$. Вычислим согласно формулам (5) величины $h(\sigma)$ и $\varphi(\sigma)$. Если $h(\sigma) = \varphi(\sigma)$, то согласно Следствию из Теоремы базис σ является экстремальным и построенный по нему чебышевский полином являетя искомым.

Если $h(\sigma) < \varphi(\sigma)$, то возьмем точку x_{k_0} для которой

$$\varphi(\sigma) = \left|\Delta_\sigma\left(x_{k_0}\right)\right|.$$

Если таких точек несколько, то выберем произвольную. Возможны три случая:

1. $x_{i_0} < x_{k_0} < x_{i_{n+1}}$.

2. $x_{k_0} < x_{i_0}$.

3. $x_{i_{n+1}} < x_{k_0}$.

В каждом из этих трех случаев преобразование S определяется посвоему. Первый случай. Выберем ν такое, что $x_{i_\nu} < x_{k_0} < x_{i_{\nu+1}}$. Тогда

$$x_{i_j}^{(1)} = x_{i_j}, \quad j \neq \nu, j \neq \nu + 1;$$

Если $\operatorname{sign} \Delta_\sigma \left(x_{k_0}\right) = \operatorname{sign} \Delta_\sigma \left(x_{i_\nu}\right)$, то

$$x_{i_\nu}^{(1)} = x_{k_0}, \quad x_{i_{\nu+1}}^{(1)} = x_{i_{\nu+1}}.$$

Иначе, т.е. если $\operatorname{sign} \Delta_\sigma \left(x_{k_0}\right) = \operatorname{sign} \Delta_\sigma \left(x_{i_{\nu+1}}\right)$

$$x_{i_\nu}^{(1)} = x_{i_\nu}, \quad x_{i_{\nu+1}}^{(1)} = x_{k_0}.$$

Второй случай. Если $\operatorname{sign} \Delta_\sigma \left(x_{k_0}\right) = \operatorname{sign} \Delta_\sigma \left(x_{i_0}\right)$, то

$$x_{i_0}^{(1)} = x_{k_0}, \quad x_{i_j}^{(1)} = x_{i_j}, j \neq 0.$$

Иначе

$$x_{i_0}^{(1)} = x_{k_0}, \quad x_{i_j}^{(1)} = x_{i_{j-1}}, j = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

т.е. из базиса выбрасывается узел $x_{i_{n+1}}$.

Третий случай. Если $\operatorname{sign} \Delta_\sigma \left(x_{k_0}\right) = \operatorname{sign} \Delta_\sigma \left(x_{i_{n+1}}\right)$, то

$$x_{i_{n+1}}^{(1)} = x_{k_0}, \quad x_{i_j}^{(1)} = x_{i_j}, j \neq n + 1.$$

Иначе

$$x_{i_{n+1}}^{(1)} = x_{k_0}, \quad x_{i_j}^{(1)} = x_{i_{j+1}}, j = 0, 1, \ldots, n.$$

т.е. из базиса выбрасывается узел x_{i_0}.

Из построения базиса и неравенства $\varphi(\sigma) > h(\sigma)$ вытекают следующие свойства базиса σ_1 если $h(\sigma) > 0$:

I. $\operatorname{sign} \Delta_\sigma\left(x_{i_k}^{(1)}\right)=-\operatorname{sign} \Delta_\sigma\left(x_{i_{k+1}}^{(1)}\right), \quad k \in[0: n]$.
II. Если обозначить через $x_{i_s}^{(1)}$ узел базиса σ_1, соответствующий x_{k_0}, то

$$\left|\Delta_\sigma\left(x_{i_k}^{(1)}\right)\right|=\rho(\sigma), \quad k \neq s.$$

$$\left|\Delta_\sigma\left(x_{i_s}^{(1)}\right)\right|>\rho(\sigma).$$

Данные свойства позволяют доказать основное неравенство

$$\rho\left(\sigma_1\right)>\rho(\sigma)$$

Реализовать аглоритм Валле-Пуссена. Численно продемонстрировать его корректность на задаче с известным ответом, а также работоспособность для $f(x)=|x|, x \in[-1,1], N=20, n=7,8$.

4 Метод Гаусса

Шаги метода Гаусса (реализация такая же как и в полиномиальной интерполяции):

(a) Прямой ход (обнуление нижнего треугольника матрицы) цикл по шагам step от 1 до n:

1. Выбор главного элемента: находит максимальный по модулю элемент в текущем столбце (от строки step до n) и если максимальный элемент меньше порога eps, система считается вырожденной.

2. Перестановка строк: если главный элемент не на текущей строке step, строки меняются местами в M и memory.

3. Обнуление элементов ниже главного:

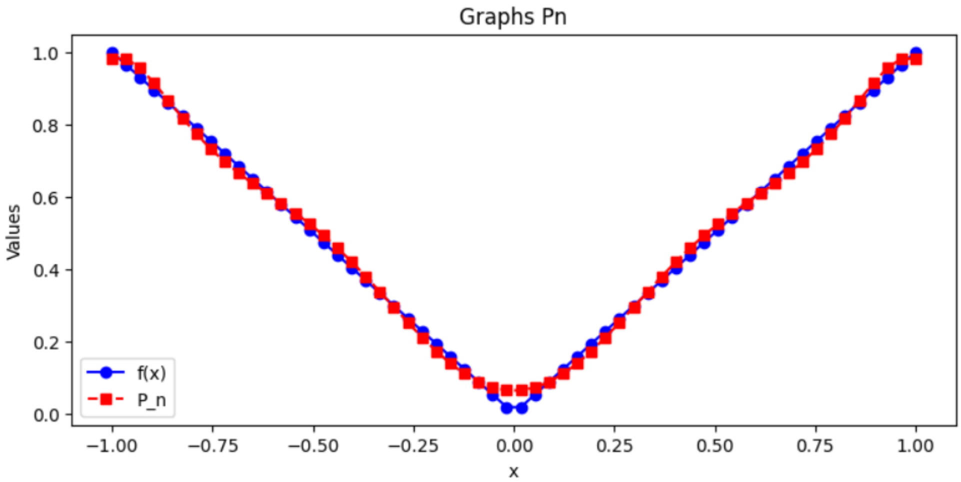

Рис. 1: Ф-ция $f(x) = |x|$ на [-1, 1] равноостоящие узлы ./a.out 10 8 -1 1 0, Number of iterations = 10, h = 0.0192940283400814

Для каждой строки $i > step$: вычисляется коэффициент $v = \frac{M[i,step]}{max}$, элементы строки обновляются: $M[i, j]- = v \cdot M[step, j]$,вВектор обновляется: $b[i]- = v \cdot b[step]$.

(b) Обратный ход (приведение к диагональному виду):

Цикл по шагам step от n до 1:

1. Для каждой строки i < step: обновляет b[i] и Обнуляет элемент $M[i, step]$.

2. Нормирует диагональный элемент: делит $b[step]$ на $M[step, step]$. Диагональный элемент становится единичным.

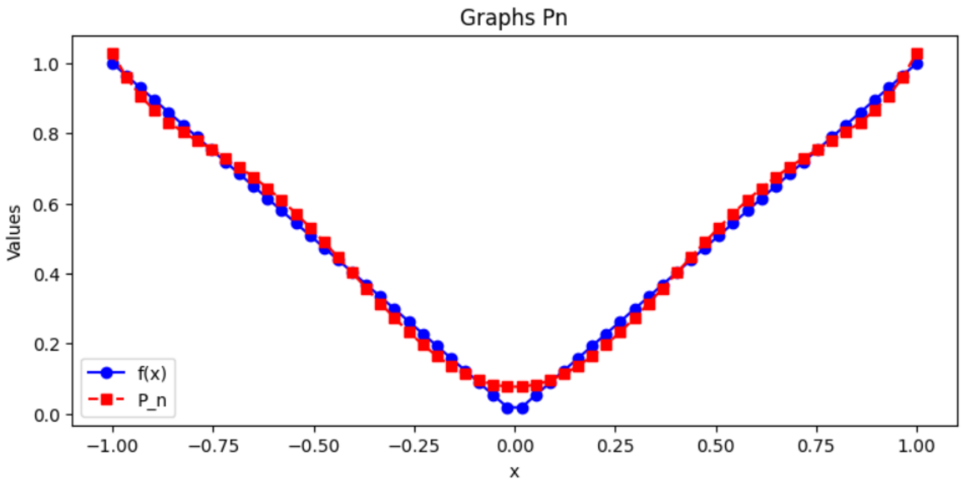

Рис. 2: Ф-ция $f(x) = |x|$ на [-1, 1] равноостоящие узлы ./a.out 10 7 -1 1 0, Number of iterations = 8, h = 0.0300478468899519

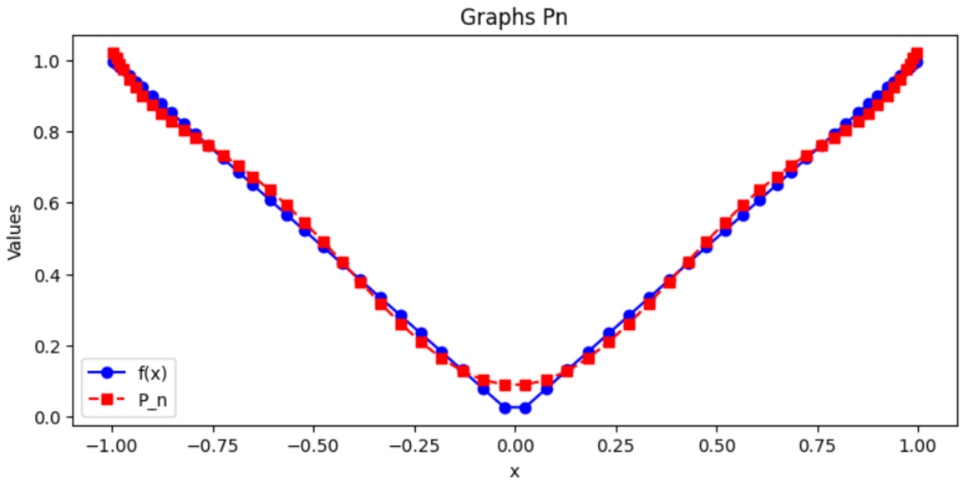

Рис. 3: Ф-ция $f(x) = |x|$ на [-1, 1] равноостоящие узлы ./a.out 10 7 -1 1 1, Number of iterations = 5, h = 0.00848724

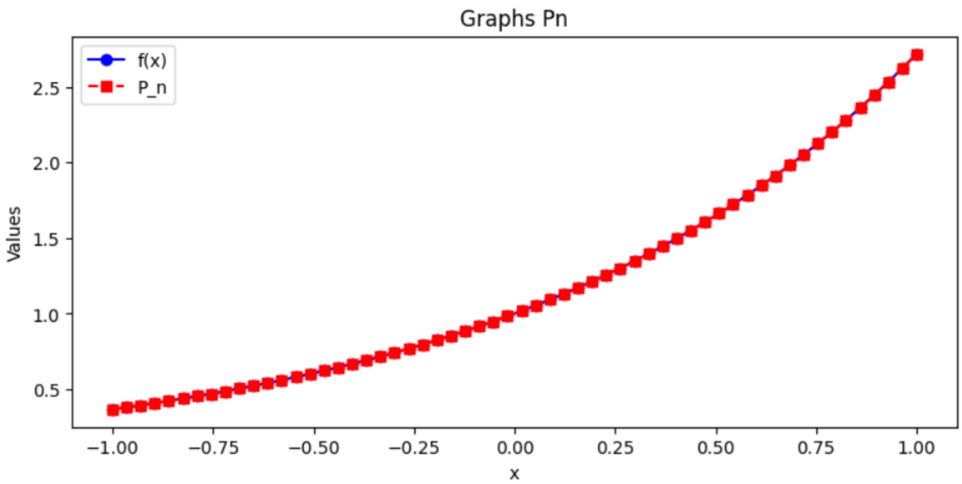

Рис. 4: Ф-ция exp(x) на [-1 , 1] равноостоящие узлы ./a.out 20 7 -1 1 0, Number of iterations = 8, h = 1.88903860998124e-07

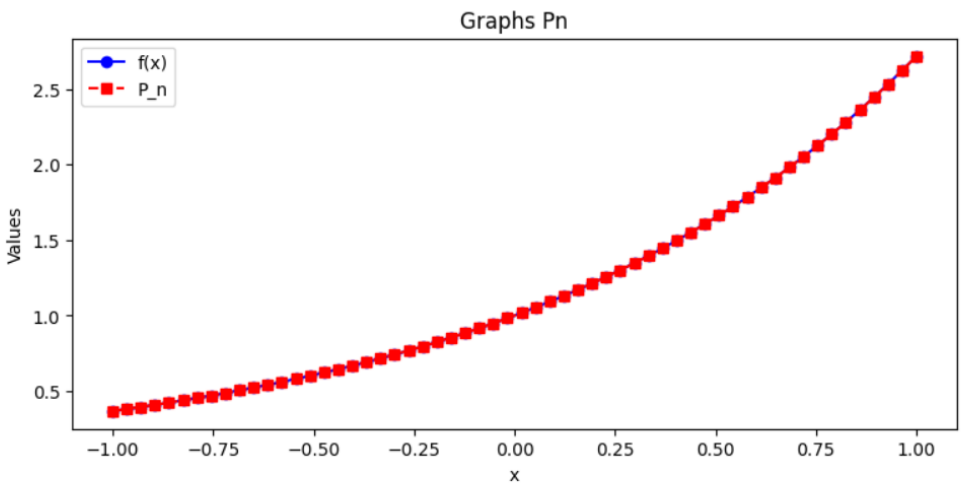

Рис. 5: Ф-ция exp(x) на [-1 , 1] равноостоящие узлы ./a.out 20 7 -1 1 1, Number of iterations = 9, h = 1.84002384218118e-07

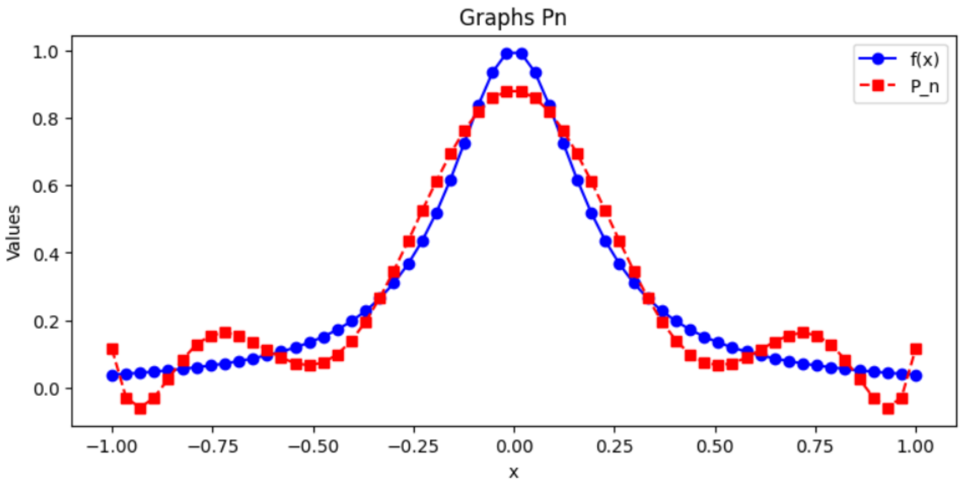

Рис. 6: Ф-ция Рунге на [-1 , 1] равноостоящие узлы ./a.out 20 8 -1 1 0, Number of iterations = 9, h = 0.0766569256372254

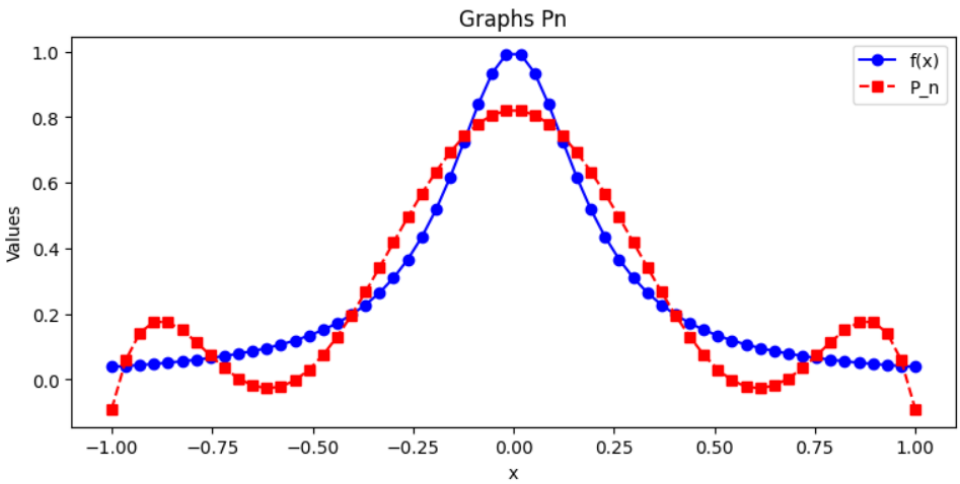

Рис. 7: Ф-ция Рунге на [-1 , 1] равноостоящие узлы ./a.out 20 7 -1 1 0, Number of iterations = 8, h = 0.128489660790942

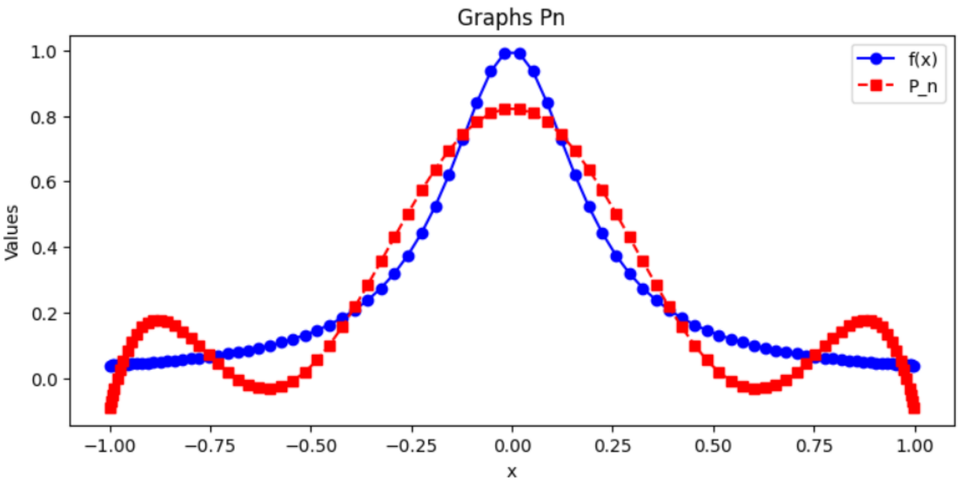

Рис. 8: Ф-ция Рунге на [-1 , 1] равноостоящие узлы ./a.out 30 7 -1 1 1, Number of iterations = 7, h = 0.12792732507389