Наилучшее равномерное приближение.

Постановка задачи. Пусть задана дискретная функция $y(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots N$. Требуется построить алгебраичекий полиноном $P_n^*(x)$ степени n, являющийся решением следующей задачи

$$\rho = \inf_{P_n(x)} \max_{i \in [0,\ldots,N]} |y_i - P_n(x_i)|$$

Такой полином называется полиномом наилучшего равномерного приближения исходной функции $y(x_i) = y_i$ по узлам $x_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots N$.

Решение данной задачи существенно зависит от соотношения между n и N. Так, если $N = n$, т.е. количество узлов совпадает с количеством коэффициентов исходного полинома, то однозначно строится полином, принимающий в узлах x_i значения y_i. Очевидно, что в этом случае $\rho = 0$ и этот полином является искомым $P_n^*(x)$.

Первым нетривиальным (и как оказывается основным) случаем является случай $N = n+1$. Он приводит к так называемой чебышевской интерполяции. С помощью чебышевской интерполяциии можно построить полином наилучшего приближения и в общем случае $N > n+1$.

Чебышевская интерполяция.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть

$$\rho = \inf_{P_n(x)} \max_{i \in [0,\ldots,n+1]} |y_i - P_n(x_i)|.$$

Полином наилучшего равномерного приближения существует и единственен. Для того чтобы полином $P_n^*(x)$ был полиномом наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы при некотором h выполнялись соотношения

$$(-1)^i h + P_n^*(x_i) = y_i, \quad i \in [0, ..., n+1] \tag{1}$$

При этом имеет место равенство $\rho = |h|$.

Замечание. Из условия теоремы следует, что h и коэффициенты полинома $P^*(x)$ могут быть найдены из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений с $(n+2)$ неизвестными $h, a_0, a_1, ..., a_{n+1}$

$$\left\{ \begin{array}{c} h + a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ -h + a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ h + a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2 \\ \ldots \\ (-1)^{n+1} h + a_0 + a_1 x_{n+1} \ldots + a_n x_{n+1}^n = y_{n+1} \end{array} \right.$$

Определителем этой системы отличен от нуля, если $x_i \neq x_j,\ i \neq j$. Однако, построение полинома $P_n^*(x)$ через явное вычисление его коэффициентов может приводить к катастрофической потере точности.

Поэтому обычно применяют следующих подход. Имеет место
Теорема. *Величина h из (1) может быть вычислена по формуле*

$$h = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \alpha_i y_i, \quad \text{где } \alpha_i = \frac{\dfrac{(-1)^i}{\prod\limits_{k \neq i, k=0}^{n+1} (x_i - x_k)}}{\sum\limits_{j=0}^{n+1} \dfrac{(-1)^j}{\prod\limits_{k \neq j, k=0}^{n+1} (x_j - x_k)}} \tag{2}$$

Отметим, что используя разделенные разности

$$f(x_i; x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \; f(x_1; \ldots; x_{k+1}) = \frac{f(x_2; \ldots; x_{k+1}) - f(x_1; \ldots; x_k)}{x_{k+1} - x_1}$$

равенство (2) можно переписать в виде

$$h = \frac{y(x_0; x_1; ...; x_{n+1})}{\phi(x_0; x_1; ...; x_{n+1})}, \quad \text{где } \phi_k = \phi(x_k) = (-1)^k, \tag{3}$$

и записать полином наилучшего равномерного приближения в форме Ньютона:

$$P^*(x) = y_0 - h + \sum_{k=1}^{n} \left(y(x_0; \ldots; x_k) - h\phi(x_0; \ldots; x_k) \right) (x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}) \tag{4}$$

При практическом применении формулы (4) следует построить таблицы разделенных разностей функций y и ϕ, найти значение h и результат подставить в (4).

Для контроля правильности полученного полинома стоит убедиться в выполнении условия (1) Теоремы.

Общая дискретная задача. Алгоритм Валле-Пуссена.

Рассмотрим общий случай $N > n + 1$. Положим

$$\rho = \inf_{P(x)} \max_{i \in [0, \ldots, N]} |y_i - P(x_i)|.$$

Из всех полиномов $P(x)$ степени n требуется определить полином наилучшего приближения $P^*(x)$. Здесь и далее индекс n у полиномов мы опускаем.

Можно показать, что общая дискретная задача имеет точное решение. Оно может быть получено с помощью конечного числа чебышевских итераций.

Введем следующее определение.
def. Базисом σ называется любая $(n + 2)$-точечная подсистема узлов

$$\sigma = \left\{ x_{i_0} < x_{i_1} < ... < x_{i_{n+1}} \right\}.$$

Очевидно, что на каждом базисе σ можно осуществить чебышевскую интерполяцию, т.е. построить алгебраический полином $P^*(\sigma, x)$, удовлетворяющий соотношениям

$$(-1)^k h + P^*(\sigma, x_{i_k}) = y_k, \quad k \in [0, ..., n+1].$$

Напомним, что в этом случае

$$\inf_{P(x)} \max_{k \in [0,\ldots,n+1]} |y_{i_k} - P(x_{i_k})| = |h|.$$

Положим

$$\begin{aligned} h(\sigma) &= \max_{k \in [0,\ldots,n+1]} |y_{i_k} - P^*(\sigma, x_{i_k})|, \\ \varphi(\sigma) &= \max_{i \in [0:N]} |y_i - P^*(\sigma, x_i)|, \end{aligned} \tag{5}$$

т.е. $h(\sigma)$ есть максимальное уклонение на узлах базиса σ, $\varphi(\sigma)$ есть максимальное уклонение на всей системе узлов. Очевидно, что для любого базиса σ выполняется следующее неравенство

$$\varphi(\sigma) \geq h(\sigma)$$

Имеет место

Лемма. *Если для некоторого базиса σ^* оказалось, что*

$$\varphi(\sigma^*) = h(\sigma^*)$$

то полином $P(\sigma^*, x)$ является полиномом $P^*(x)$ наилучшего приближения по всем узлам $x_0, ..., x_N$.

Таким образом, за конечное число шагов (возможно, осуществив полный перебор базисов σ_i, построенных по узлам $x_0, ..., x_N$) мы отыщем интересующий нас базис. Однако полный перебор можно значительно сократить.

Опишем некоторое преобразование S базиса σ в

$$\sigma_1 = \left\{ x_{i_0}^{(1)} < x_{i_1}^{(1)} < ... < x_{i_{n+1}}^{(1)} \right\}$$

удовлетворяющее условию

$$h(\sigma) > h(\sigma_1)$$

Лемма. *Если для базиса σ верно $\varphi(\sigma) > h(\sigma)$, то существует новый базис $\sigma_1 = S\sigma$, такой что $h(\sigma_1) > h(\sigma)$.*

Положим $h^* = \max\limits_{\sigma} h(\sigma)$.

def. Базис σ^* для которого $h(\sigma^*) = h^*$ называется экстремальным базисом.

Поскольку число различных базисов σ конечно, то очевидно экстремальный базис существует, хотя в общем случае он может быть и не единственным.

Теорема. *В общей дискретной задаче полином наилучшего приближения существует и единственен. Для того чтобы полином $P^*(x)$ был полиномом наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы он* *осуществлял чебышевскую интерполяцию на некотором экстремальном базисе σ^*.*

Следствие. *Для того чтобы базис σ был экстремальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\varphi(\sigma) = h(\sigma)$$

Таким образом, алгоритм Валле-Пуссена заключается в переборе базисов по алгоритму $\sigma_i = S\sigma_{i-1}$ до тех пор пока не выполнится равенство $\varphi(\sigma_i) = h(\sigma_i)$.

Алгоритм Валле-Пуссена (S-алгоритм).

Пусть $\Delta_\sigma(x_i) = y_i - P^*(\sigma, x_i)$.

Выберем произвольный базис $\sigma = \left\{x_{i_0} < x_{i_1} < ... < x_{i_{n+1}}\right\}$. Вычислим согласно формулам (5) величины $h(\sigma)$ и $\varphi(\sigma)$. Если $h(\sigma) = \varphi(\sigma)$, то согласно Следствию из Теоремы базис σ является экстремальным и построенный по нему чебышевский полином являетя искомым.

Если $h(\sigma) < \varphi(\sigma)$, то возьмем точку x_{k_0} для которой

$$\varphi(\sigma) = |\Delta_\sigma(x_{k_0})|.$$

Если таких точек несколько, то выберем произвольную. Возможны три случая:

1. $x_{i_0} < x_{k_0} < x_{i_{n+1}}$.
2. $x_{k_0} < x_{i_0}$.
3. $x_{i_{n+1}} < x_{k_0}$.

В каждом из этих трех случаев преобразование S определяется по-своему.

Первый случай. Выберем ν такое, что $x_{i_\nu} < x_{k_0} < x_{i_{\nu+1}}$. Тогда

$$x^{(1)}_{i_j} = x_{i_j}, \quad j \neq \nu, j \neq \nu + 1;$$

Если $sign\Delta_\sigma(x_{k_0}) = sign\Delta_\sigma(x_{i_\nu})$, то

$$x^{(1)}_{i_\nu} = x_{k_0}, \quad x^{(1)}_{i_{\nu+1}} = x_{i_{\nu+1}}.$$

Иначе, т.е. если $sign\Delta_\sigma(x_{k_0}) = sign\Delta_\sigma(x_{i_{\nu+1}})$

$$x^{(1)}_{i_\nu} = x_{i_\nu}, \quad x^{(1)}_{i_{\nu+1}} = x_{k_0}.$$

Второй случай. Если $sign\Delta_\sigma(x_{k_0}) = sign\Delta_\sigma(x_{i_0})$, то

$$x^{(1)}_{i_0} = x_{k_0}, \quad x^{(1)}_{i_j} = x_{i_j},\ j \neq 0.$$

Иначе

$$x^{(1)}_{i_0} = x_{k_0}, \quad x^{(1)}_{i_j} = x_{i_{j-1}},\ j = 1, 2, ..., n + 1.$$

т.е. из базиса выбрасывается узел $x_{i_{n+1}}$.

Третий случай. Если $sign\Delta_\sigma(x_{k_0}) = sign\Delta_\sigma(x_{i_{n+1}})$, то

$$x^{(1)}_{i_{n+1}} = x_{k_0}, \quad x^{(1)}_{i_j} = x_{i_j},\ j \neq n+1.$$

Иначе

$$x^{(1)}_{i_{n+1}} = x_{k_0}, \quad x^{(1)}_{i_j} = x_{i_{j+1}},\ j = 0, 1, ..., n.$$

т.е. из базиса выбрасывается узел x_{i_0}.

Из построения базиса и неравенства $\varphi(\sigma) > h(\sigma)$ вытекают следующие свойства базиса σ_1 если $h(\sigma) > 0$:

I. $sign\Delta_\sigma(x^{(1)}_{i_k}) = -sign\Delta_\sigma(x^{(1)}_{i_{k+1}}), \quad k \in [0 : n].$

II. Если обозначить через $x^{(1)}_{i_s}$ узел базиса σ_1, соответствующий x_{k_0}, то

$$\left|\Delta_\sigma(x^{(1)}_{i_k})\right| = \rho(\sigma), \quad k \neq s.$$

$$\left|\Delta_\sigma(x^{(1)}_{i_s})\right| > \rho(\sigma).$$

Данные свойства позволяют доказать основное неравенство

$$\rho(\sigma_1) > \rho(\sigma).$$

Реализовать аглорит Валле–Пуссена. Численно продемонстрировать его корректность на задаче с известным ответом, а также работоспособность для $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$, $N = 1000$, $n = 8$.