

TAIU10 Sammanfattning

1 Reella och Komplexa Tal

Intervall med oändlighet är alltid öppna, ex. $[x, \infty[$ eller $]-\infty, x[$

1.2 Algebraisk räkning med reella tal

Kvadratregeln: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Konjuratregeln: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Kubregeln: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1.3 Ekvationer, koordinatsystem och räta linjer

$ab = ac \Rightarrow a = 0 \vee b = c$ Lösningen $a = 0$ missas lätt om a divideras bort från båda sidor.

Koordinatsystem delas upp i kvadranter enligt $\frac{2}{3} \mid \frac{1}{4}$

En rät linje med punkterna $P_1 = (x_1, y_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_1 \neq P_2$ har en riktningskoefficient k med formeln $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. En generell ekvation för en linje med en känd punkt och känd riktningskoefficient ges av $y = y_1 + k(x - x_1)$, också kallad **enpunktsformeln**.

1.4 Mer om ekvationer

En lösning finns för $x = \sqrt{a}$, x^2

Två lösningar finns för $x^2 = a$, $x = \sqrt{a}$ och $x = -\sqrt{a}$

1.4.1 Generell kvadratkomplettering

$$x^2 + ax + b = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2 + b = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2 - b \Leftrightarrow x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b} \Leftrightarrow x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}$$

1.4.2 Avstånd och cirkclar

Avståndsformeln: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

1.4.3 n-te rötter

n-te roten av a skrivs $\sqrt[n]{a}$

För jämna tal n finns två reella lösningar till ekvationen $x^n = a$, $x = a$ samt $x = -a$.

För udda tal n finns en reell lösning till ekvationen $x^n = a$, $x = a$.

1.4.4 Division av ekvationer

Om en ekvation $f(x)$ har en rot c , kan ekvationen $f(x)$ jämnt delas sådant att $f(x) = (x - c)q(x)$.

1.5 Olikheter och absolutbelopp

Då man multiplicerar eller dividerar med en olikhet vänds olikheten: $a > b \Leftrightarrow -a < -b$

1.6 Summor och Produkter

Aritmetisk summa $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = \sum_{k=m}^n a_k$ sådan att differensen $a_{k+1} - a_k = x$ för alla tal $k = m, \dots, n-1$,

formel: $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = (n - m + 1) \cdot \frac{a_m + a_n}{2}$

Geometrisk summa $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \sum_{k=0}^n aq^k$ har första termen a och samma kvot q mellan varje term och

föregående term. Formel: $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \frac{a(q^{n+1} - 1)}{q - 1}$ där a är första termen och $n + 1$ är antal termer.

1.7 Binomialkoefficienter

Binomialformeln: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

1.8 Komplexa tal

1.8.1 Allmänna identiteter

$$z = x + iy$$

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\operatorname{Re}(z) = x$$

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

För att underlätta division av komplexa tal, kan man förlänga med nämnarens konjugat:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Detta gör att nämnaren blir reell.

1.9 Funktioner

1.9.1 Definitions-och värdemängd, invers

D_f är definitionsmängden för $f(x)$, d.v.s vilka värden x kan anta.

V_f är värdemängden för $f(x)$, d.v.s. de värden $f(x)$ kan anta.

En funktion är jämn om $f(x) = f(-x)$. En funktion är ojämn om $f(-x) = -f(x)$.

En funktion är omvändbar om det för varje $y \in V_f$ finns exakt ett $x \in D_f$ sådant att $f(x) = y$. Inversen betecknas då f^{-1} , $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

1.9.2 Växande, avtagande, begränsning

En funktion är växande om den för varje $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$. Omvänt är funktionen avtagande om det för varje $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.

En funktion är strängt avtagande om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, och omvänt för strängt avtagande.

En funktion är begränsad ifall alla $y \in V_f$ är mindre eller större än något reellt tal a . Exempelvis är x^2 begränsad nedåt, då $x^2 \geq 0$.

2 Naturliga logaritmen, exponential- och potensfunktioner

\ln har definitionsmängden $D_{\ln} =]0, \infty[$ och $V_{\ln} = \mathbb{R}$

2.0.3 Räkneregler

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln x$$

\ln är strängt växande, d.v.s. $x_1 > x_2 \Rightarrow \ln(x_1) > \ln(x_2)$

$$\ln x = \begin{cases} A_x & \text{för } x \geq 1 \\ -A_x & \text{för } 0 < x < 1 \end{cases}$$

2.1 Exponentialekvationer och talet e

\ln^{-1} kallas den naturliga exponentialekvationen.

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

$$D_{\exp} = V_{\ln} = \mathbb{R}$$

$$e = \exp(1)$$

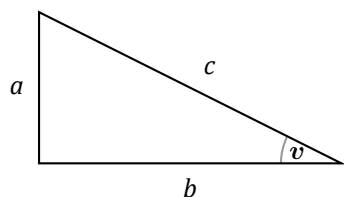
$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

2.2 Allmänna logaritmfunktionen

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$$

$$y = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \text{ för alla } x > 0$$

3 Trigonometri



$$\begin{aligned}\cos v &= \frac{b}{c} \\ \sin v &= \frac{a}{c} \\ \tan v &= \frac{a}{b} \\ \cot v &= \frac{b}{a}\end{aligned}$$

3.0.1 Värden för vanliga vinklar

v	cos v	sin v	tan v	cot v
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

3.0.2 Räkneregler

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

$$\cos -v = \cos v$$

$$\sin -v = -\sin v$$

$$\tan -v = -\tan v$$

$$\cot -v = -\cot v$$

$$\cos(\pi - v) = -\cos v$$

$$\sin(\pi - v) = \sin v$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v$$

$$\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = 2 \cos^2 v - 1 = 1 - 2 \sin^2 v$$

$$\sin 2v = 2 \sin v \cos v$$

$$\tan 2v = \frac{2 \tan v}{1 - \tan^2 v}$$

$$\cos(v + 2\pi) = \cos v$$

$$\sin(v + 2\pi) = \sin v$$

$$\cos(v + \pi) = -\cos v$$

$$\sin(v + \pi) = -\sin v$$

$$\tan(v + \pi) = \tan v$$

$$\cot(v + \pi) = \cot v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\frac{1}{\cos^2 v} = 1 + \tan^2 v$$

$$|\sin v| \leq |v| \text{ för } v \in \mathbb{R}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

3.1 Den komplexa exponentialfunktionen

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ för } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$|e^{ix}| = 1$$

3.1.1 Komplexa tal i polär form

$$x = r \cos v$$

$$y = r \sin v$$

$$z = r(\cos v + i \sin v) = re^{iv}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{de Moivres formel: } z^p = r^p e^{ipv} = r^p (\cos pv + i \sin pv)$$