TAIU10 Sammanfattning

1 Reella och Komplexa Tal

Intervall med oändlighet är alltid öppna, ex. $[x, \infty[$ eller $]-\infty, x[$

1.2 Algebraisk räkning med reella tal

Kvadratregeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Konjuratregeln: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Kubregeln: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1.3 Ekvationer, koordinatsystem och räta linjer

$ab = ac \Rightarrow a = 0 \vee b = c$ Lösningen $a = 0$ missas lätt om a divideras bort från båda sidor.

Koordinatsystem delas upp i kvadranter enligt $\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$

En rät linje med punkterna $P_1 = (x_1, y_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2), P_1 \neq P_2$ har en riktningskoefficient k med formeln $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. En generell ekvation för en linje med en känd punkt och känd riktningskoeffecient ges av $y = y_1 + k(x - x_1)$, också kallad **enpunksformeln.**

1.4 Mer om ekvationer

En lösning finns för $x = \sqrt{a}, x^2$
Två lösningar finns för $x^2 = a, x = \sqrt(a)$ och $x = -\sqrt(a)$

1.4.1 Generell kvadratkomplettering

$$x^2+ax+b = 0 \Leftrightarrow (x+\frac{a}{2})^2-(\frac{a}{2})^2+b = 0 \Leftrightarrow (x+\frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2-b \Leftrightarrow x+\frac{a}{2} = \pm\sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b} \Leftrightarrow x = -\frac{a}{2}\pm\sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}$$

1.4.2 Avstånd och cirklar

Avståndsformeln: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

1.4.3 n-te rötter

n-te roten av a skrivs $\sqrt[n]{a}$
För jämna tal n finns två reella lösningar till ekvationen $x^n = a, x = a$ samt $x = -a$.
För udda tal n finns en reell lösning till ekvationen $x^n = a, x = a$.

1.4.4 Division av ekvationer

Om en ekvation $f(x)$ har en rot c, kan ekvationen $f(x)$ jämnt delas sådant att $f(x) = (x - c)q(x)$.

1.5 Olikheter och absolutbelopp

Då man multiplicerar eller dividerar med en olikhet vänds olikheten: $a > b \Leftrightarrow -a < -b$

1.6 Summor och Produkter

Aritmetisk summa $a_m + a_{m+1} + ... + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$ sådan att differensen $a_{k+1} - a_k = x$ för alla tal $k = m, ..., n-1$, formel: $a_m + a_{m+1} + ... + a_n = (n - m + 1) \cdot \frac{a_m + a_n}{2}$

Geometrisk summa $a + aq + aq^2 + ... + aq^n = \sum_{k=0}^{n} aq^k$ har första termen a och samma kvot q mellan varje term och föregående term. Formel: $a + aq + aq^2 + ... + aq^n = \frac{a(q^{n+1} - 1))}{q - 1}$ där a är första termen och $n + 1$ är antal termer.

1.7 Binomialkoefficienter

Binomialformeln: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

1.8 Komplexa tal

1.8.1 Allmäna identiteter

$z = x + iy$

$i^2 = i \cdot i = -1$

$i = \sqrt{-1}$

$\mathbf{Re}(z) = x$

$\mathbf{Im}(z) = y$

$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\bar{z} = x - iy$

$z\bar{z} = |z|^2$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + z_2|$

För att underlätta division av komplexa tal, kan man förlänga med nämnarens konjugat:
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z_2}}{z_2 \bar{z_2}} = \frac{z_1 \bar{z_2}}{|z_2|^2}$
Detta gör att nämnaren blir reell.

1.8.2 Ekvationer

En komplex ekvation av udda grad med endast reella koefficienter, så som $z^3 - 4z^2 + 9z - 10 = 0$, måste ha minst en reell rot, då komplexa rötter kommer i par om z och $\bar{z}$.

På tentor är rötter vanligen heltal. Genom detta kan en rot oftast hittas genom att testa med faktorerna av konstanten. För ekvationen ovan är faktorerna {-1, 1, -2, 2, -5, 5, -10 och 10}, varav 2 är en rot till ekvationen.

1.9 Funktioner

1.9.1 Definitions-och värdemängd, invers

D_f är definitionsmängden för $f(x)$, d.v.s vilka värden x kan anta.
V_f är värdemängden för $f(x)$, d.v.s. de värden $f(x)$ kan anta.
En funktion är jämn om $f(x) = f(-x)$. En funktion är ojämn om $f(-x) = -f(x)$.
En funktion är omvändbar om det för varje $y \in D_f$ finns exakt ett $x \in D_f$ sådant att $f(x) = y$. Inversen betecknas då f^{-1}, $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

1.9.2 Växande, avtagande, begräsning

En funktion är växande om den för varje $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$. Omvänt är funktionen avtagande om det för varje $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.
En funktion är strängt avtagande om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, och omvänt för strängt avtagande.
En funktion är begränsad ifall alla $y \in V_f$ är mindre eller större än något reellt tal a. Exempelvis är x^2 begränsad nedåt, då $x^2 \geq 0$.

2 Naturliga logaritmen, exponential- och potensfunktioner

ln har definitionsmängden $D_{ln} =]0, \infty[och V_{ln} = \mathbb{R}$

2.0.3 Räkneregler

$\ln(xy) = \ln x + \ln y$

$\ln(1) = 0$

$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(\frac{1}{x} = -\ln(x)$

$\ln(x^p) = p \cdot lnx$

ln är strängt växande, d.v.s. $x_1 > x_2 \Rightarrow \ln(x_1) > \ln(x_2)$

$$\ln x = \begin{cases} A_x \text{ för } x \geq 1 \\ \\ -A_x \text{ för } 0 < x < 1 \end{cases}$$

2.1 Exponentialekvationer och talet e

$\ln^{-1}$ kallas den naturliga exponentialekvationen.

$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y)$

$D_{\exp} = V_{ln} = \mathbb{R}$

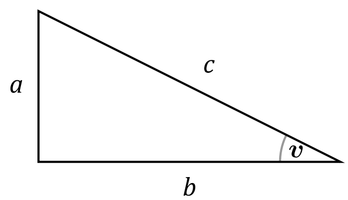
$e = \exp(1)$

$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

2.2 Allmäna logaritmfunktionen

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$$
$$y = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \text{ för alla } x > 0$$

3 Trigonometri



$\cos v = \frac{b}{c}$ $\sin v = \frac{a}{c}$ $\tan v = \frac{a}{b}$ $\cot v = \frac{b}{a}$

3.0.1 Värden för vanliga vinklar

v	$\cos v$	$\sin v$	$\tan v$	$\cot v$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

3.0.2 Räkneregler

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$$
$$\cos -v = \cos v$$
$$\sin -v = -\sin v$$
$$\tan -v = -\tan v$$
$$\cot -v = -\tan v$$

$$\cos(\pi - v) = -\cos v$$
$$\sin(\pi - v) = \sin v$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - v) = \sin v$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - v) = \cos v$$

$$\cos(v + 2\pi) = \cos v$$
$$\sin(v + 2\pi) = \sin v$$

$$\cos(v + \pi) = -\cos v$$
$$\sin(v + \pi) = -\sin v$$
$$\tan(v + \pi) = \tan v$$
$$\cot(v + \pi) = \cot v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \sin v - \cos v \sin u$$
$$\cos(u - v) = \cos u \sin v + \cos v \sin u$$
$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$
$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u$$
$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = 2\cos^2 v - 1 = 1 - 2\sin^2 v$$

$\sin 2v = 2\sin v \cos v$
$\tan 2v = \dfrac{2\tan v}{1-\tan^2 v}$

$\dfrac{1}{\cos^2 v} = 1 + \tan^2 v$
$|\sin v| \leq |v|$ för $v \in \mathbb{R}$
$\cos u + \cos v = 2\cos\dfrac{u+v}{2}\cos\dfrac{u-v}{2}$
$\cos u - \cos v = -2\sin\dfrac{u+v}{2}\sin\dfrac{u-v}{2}$
$\sin u + \sin v = 2\sin\dfrac{u+v}{2}\cos\dfrac{u-v}{2}$
$\sin u - \sin v = 2\cos\dfrac{u+v}{2}\sin\dfrac{u-v}{2}$

3.1 Arcus-funktioner

$D_{\text{arcsin}} = D_{arccos} = [-1, 1]$
$V_{\text{arcsin}} = [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$
$V_{\text{arccos}} = [0, \pi]$

$D_{arctan} = D_{arccot} = \mathbb{R}$
$V_{arctan} =]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$
$V_{arccot} =]0, \pi[$

Exempelanvänding: $\sin v = x \Leftrightarrow \arcsin x = v$. Samma samband gäller för samtliga arcus-funktioner.
Kan användas som svar då v inte är någon standardvinkel, exempelvis $\sin v = \dfrac{\sqrt{7}}{5} \Leftrightarrow \arcsin(\dfrac{\sqrt{7}}{5}) + 2\pi n \vee \pi - \arcsin(\dfrac{\sqrt{7}}{5}) + 2\pi n$

3.2 Den komplexa exponentialfunktionen

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ för $x \in \mathbb{R}$
$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$|e^{ix}| = 1$

3.2.1 Komplexa tal i polär form

$x = r\cos x$

$y = r\sin v$

$z = r(\cos v + i\sin v) = re^{iv}$

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

de Moivres formel: $z^p = r^p e^{ipv} = r^p(\cos pv + i\sin pv)$

4 Gränsvärden

4.1 Räkneregler

$$f(x) \to A \land g(x) \to B$$
$$\Rightarrow f(x) + g(x) \to A + B$$
$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{A}{B} \text{ om } B \neq 0$$

4.2 Vanliga lösningsmetoder

4.2.1 Uttryck med rötter

Ett yttryck med subtraktion eller addition mellan rötter löses lättast genom förläning av konjugatet, så att:

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \lim_{x \to a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \lim_{x \to a} \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

4.2.2 Uttrycket upphöjt till e^{ln}

För uttryck som inte enkelt kan förenklas, kan uttryck upphöjas till e^{ln}, exempelvis $\frac{x^\alpha}{a^x} = e^{\ln(\frac{x^\alpha}{a^x})}$. Detta gör att logaritm-lagarna kan appliceras, vilket kan underlätta i vissa situationer.

4.3 Standardgränsvärden

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ då } \alpha > 0$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \text{ då } a > 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$