# Tarea 9

Dehesa Corona Valeria Carolina. Ochoa Chávez Ana Karen

18 de octubre de 2018

## 1. Cadena de Ehrenfest

En este ejercicio analizamos por medio de la simulación al modelo de la urna de Ehrenfest. Considere a N como el número de bolas totales.

- Escriba todos los estados de la Cadena de Markov.
  El problema de la Urna de Ehrenfest consiste en que tenemos 2 urnas (A y B) dento de las cuales tenemos N bolas distribuidas entre las 2 urnas: Inicialmente hay i bolas en la urna A y N-i bolas en la urna B. Las bolas se encuentran numeradas del 1 al N. Se escoge al azar uno de los números y la bola que tenga ese número es cambiada de urna. Definimos $x_n$ como el número de bolas en la urna A después de haber hecho n selecciones, entonces $x_n : n = 0, 1, ...$ es una cadena de Markov con espacio de estados $S = 0, 1, ..., N$.

- Escriba la matriz de transición (y explique claramente de dónde viene la expresión).
  Las probabilidades de transición están dadas como: $P_{01}$=1, pues si hay 0 bolas en la urna A, entonces al siguiente instante deberá haber 1 bola en esta urna. $P_{N,N-1}$=1, pues si en algún momento todas las bolas se encuentran en la urna A, entonces la bola que se selecciona pertenece a esa urna y al siguiente instante el número de bolas en esa urna disminuye en 1. Tenemos entonces estados reflejantes. Por último, para i=1,2,...,N-1,

$$P_{ij} = \begin{cases} (N-i)/N & \text{si } j = i+1; \\ i/N & \text{si } sij = j-1; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La primera es la probabilidad de escoger una bola en la urna B, por lo que el número de bolas en la urna A se incrementa en 1. La segunda corresponde a seleccionar una bola de la urna A, por lo que el número de bolas en la urna A se decrementa en 1. De manera general, la matriz de transiciones quedaría como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & i/N & 0 & (N-1)/N & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde las columnas corresponden a 0 1 ... i-1 i i+1 ... N-1 N Y los renglones son 0 ... i ... N, por lo que la pirmera entrada corresponde al estado 00, la segunda al 01y la última al NN. La matriz de trancisión se ve así pues a partir del estado 0 se puede pasar al 1 con probabilidad de 1, a partir de cualquier estado i entre 1 y N-1 se puede pasar a los estados i-1 o i+1 con probabilidad de i/N o (N-i)/N, respectivamente. Por último se puede ir del estado N al estado N-1 con probabilidad 1.

- Haga un programa que simule la trayectoria del proceso: Empieza inicialmente con una distribución inicial $\pi_0$, y simula la trayectoria X0, X1, ...Xn hasta un tiempo n dado por el usuario.
  El programa está en Python.

- Haga otro programa que simule la trayectoria del proceso: Empieza inicialmente con una distribución inicial $\pi_0$, y simula la trayectoria X0, X1, ...XT hasta un tiempo aleatorio T, definido como la primera vez que el proceso toma el estado fijo i0 (el estado i0 está dado por el usuario).
  El programa está en Python.

- Usando sus programas, dado que el proceso empezo en 0, ¿cuánto tarda en promedio en llegar al estado [N/2]

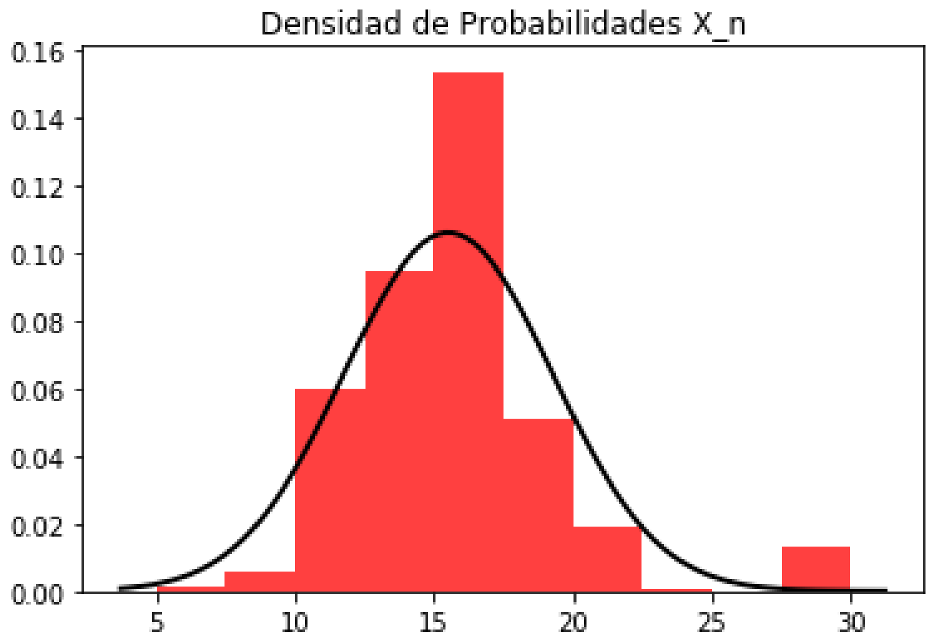
  El tiempo promedio que tarda en llegar al estado piso[N/2], dado que empezó en cero es 53.78, para n=30. Recordemos que estamos utilizando variables aleatorias, por lo que el output de esta función cambia cada vez que la corremos, pero los valores para este inciso nos dieron un valor entre 47 y 56.

- Usando sus programas, dado que el proceso empezo en 0, ¿cuánto tarda en promedio en llegar al estado N?
  En la última corrida que hicimos, obtuvimos un valor de 48.83. Tuvimos que bajar la n a 5, pues mientras más grande, la computadora tardaba mucho más tiempo en correr el programa. Nuevamente recordemos que estamos trabajando con variables aleatorias, por lo que este tiempo varía conforme corremos el programa.

- Usando sus programas, dado que el proceso empezo en N, ¿cuánto tarda en promedio en llegar al estado [N/2]?
  Este inciso no pudimos calcularlo en python por un error de memoria, pero al calcularlos en R, para una n=30, obtuvimos que el tiempo promedio es de 34.24.

- Usando sus programas, dado que el proceso empezo en N, ¿cuánto tarda en promedio en llegar al estado 0?
  No pudimos calcular esto con python, debido a un error de memoria. Lo calculamos con R, para un n=5, obteniendo como resultado que el tiempo promedio es de 43.4.

- Dado n muy grande, calcule la densidad de probabilidades de la variable aleatoria Xn (aproxime por un histograma y después conjeture una densidad conocida con sus parámetros).
  El histograma nos quedó de la siguiente manera:




Lo comparamos con una normal con los parámetros de $x_n$. Vemos que la aproximación de la distribución conocida sigue de cierta manera la forma del gráfico, sin embargo, nuestro histograma tiene bastantes datos que se desfasan de la distribución.

## 2. Modelo de la presa

Comenzamos el modelo de nuestra presa recordando lo propuesto en la tarea anterior:
El nivel del agua en cierto tiempo $t$ responde a $E_t = E_{t-1} - V(t) + Y(t)$.
Donde:
$E_t$ = Embalse en el tiempo t

- $Y(t)$ Función de volumen de lluvia (en unidades mm, equivalente a $\frac{l}{m^2}$), durante el transcurso de estado. Pero agregamos también $R(t)$, que será la función que indique el caudal que ingresa del Río Mayo a la presa.
- $V(t)$ Función que determina el agua necesaria para ser desalojada entre estados de tiempo.

- $Cn(t)$ Función que indica el consumo del tiempo $t$
- Agua que permanece acumulada en la presa de tiempos anteriores. $(E_{t-1})$

  Por lo que la nueva ecuación será: $E_t = E_{t-1} - V(t) - Cn(t) + Y(t) + R(t)$

Comenzamos con $R(t)$, la función del volumen que ingresa del caudal. Utilizamos los datos de CONAGUA para saber el volumen mínimo y máximo de ingreso en metros cúbicos y ocupamos una función que otorge un número aleatorio en el rango entre ambos datos.

Después para $Y(t)$ la función del volumen aproximado de lluvia, encontramos una tabla en unidades mm, sobre la lluvia que cae en un año en el Municipio de Álamos, Sonora. Hicimos un arreglo para usarlo en una función que no fuese determinista, ya que el volumen de la lluvia no puede ser determinado con exactitud. Agregamos la variación en la cuenca de la presa. Es decir, propusimos que el terreno donde cae el agua tuviese una variación razonable. Esto no tiene mucho sentido porque la presa no se achica o se agranda. Sin embargo, para hacer una aproximación al volumen de agua resulta práctico y no contradictorio.

Siguiendo para $Cn(t)$ aquel volumen utilizado para consumo humano, encontramos el valor de la cantidad de agua usada para generación eléctrica y para riego. Se nos ocurrió que, por las notas sobre los generadores que tiene la presa, dicho valor no era tan variable como el de riego. Entonces propusimos otra función que variaba en cierto rango el volumen ocupado para riego y dejamos constante aquel destinado a generación eléctrica. Como los valores eran sobre segundo, utilizamos conversiones porque se nos acomodó utilizar metros cúbicos sobre mes.

Definir $E_{t-1}$ sería algo recursivo, por lo tanto sólo diremos que usamos un valor inicial parecido a la capacidad NANO.

Finalmente, hacer una función $V(t)$ nos resultó más complicado porque ya tenía que ver el otro punto de la tarea sobre armar una estrategia de apertura de compuertas. Nos dimos cuenta, corriendo el programa muchas veces, que el desborde era inminente debido a los grandes cambios de volumen de luvias entre los meses de julio y agosto. Por lo tanto, decidimos utilizar un arreglo que ocupa únicamente los valores de aproximación de cuerpos de lluva de dichos meses y los posteriores, les asigna un nuevo valor multiplicándolos por $8,000,000$ (Valor que no permitía un desborde en todo el año) y designa que dicho volumen debe irse al final de mes.

Sin embargo, al acercarse cada vez más a la línea de NANO, el desborde ocurriría en el año siguiente. Por lo que decidimos cambiar $8,000,000$ por

$10,000,000$, de tal forma que la gráfica(después de correr varias veces) no parece hacerse decreciente ni creciente.

Por lo tanto, la compuerta se abre 7 veces en el año, dejando un costo definido y menor a aquel de un desbordamiento o una sequía. Y curiosamente, por la construcción de nuestras funciones de valores aleatorios, no parece haber probabilidad ni de desborde ni de sequía.

En la Figura de abajo, tenemos los siguientes valores graficados:

- La línea morada : $NAME = 1822550000$ (Nivel de Aguas Máximas Extraordinarias)
- La línea roja : $NAMINO = 114500000$ (Nivel de Aguas Mínimas de Operación)
- La línea verde : Sequía de la Presa
- La línea azul : Trayectoria aleatoria del volumen de la presa en un año

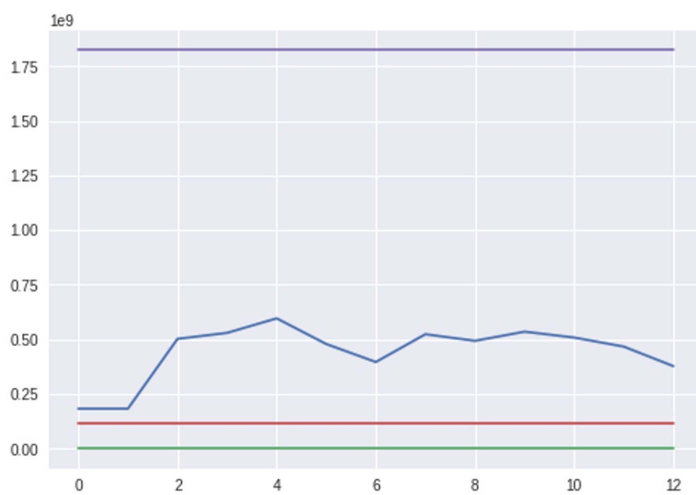



Figura 1: Gráfica de los embalses mensuales en un año.