Tarea 3

Dehesa Corona Valeria Carolina. Ochoa Chávez Ana Karen.

28 de junio de 2021

1. Batalla de Trafalgar

1.1. Contexto

La batalla de Trafalgar fue una batalla naval entre la alianza franco-española (al mando de Pierre Villeneuve) y Gran Bretaña (Horatio Nelson) acontecida en las costas del cabo de Trafalgar en el año 1805. Actualmente hay una plaza llamada Trafalgar Square para conmemorar la victoria británica.

La Marina Imperial francesa se encontraba dotada de barcos potentes y modernos pero con comandantes inexpertos por sustituciones causadas por la revolución. Al haber sido afectada por la fiebre amarilla, la tripulación española se encontraba en un estado lamentable, donde la mayoría no contaba con una instrucción adecuada. Mientras tanto, la tripulación británica, además de bien equipada se destacaba por su experiencia en batallas como la batalla del Cabo de San Vicente, la batalla del Nilo o la de cabo Finisterre.

1.2. Sistema de Ecuaciones en diferencia

Definimos,
B_n = Número de naves de la flota Británica en el estado n
F_n = Número de naves de la flota Franco- Española en el estado n

$B_{n+1} = B_n - 0{,}15F_n$
$F_{n+1} = F_n - 0{,}1B_n$

El problema nos indica los valores $B_0 = 27$, $F_0 = 33$

1.3. Análisis de Resultados de solución numérica

Mediante dos funciones y su gráfica, observamos que la batalla bajo los supuestos resultó bastante reñida. Pedimos a las funciones que impriman los arreglos correspondientes a los estados de ambos bandos para reconocer el momento en el que alguno pierde.

Bn	Fn
27	33
23.7	28.95
20.805	25.395
18.2655	22.27425
16.03807	19.53442
14.08463	17.12871
12.37176	15.01601
10.87015	13.16025
9.554133	11.52973
8.401160	10.09661
7.391499	8.836436
6.507855	7.727716
5.735084	6.751533
5.059934	5.891270
4.470804	5.132280
3.957576	4.46166
3.511410	4.46166
3.124607	3.86803
2.790476	3.34103
2.503214	2.87262
2.257809	2.45404
2.049952	2.07856
1.875963	1.73989
1.732722	1.43240
1.617622	1.15100
1.528512	0.89110
1.463666	0.64845
1.421748	0.41917
1.401785	0.19962
1.403148	0.01363

Cuadro 1: Tabla de estados del sistema.

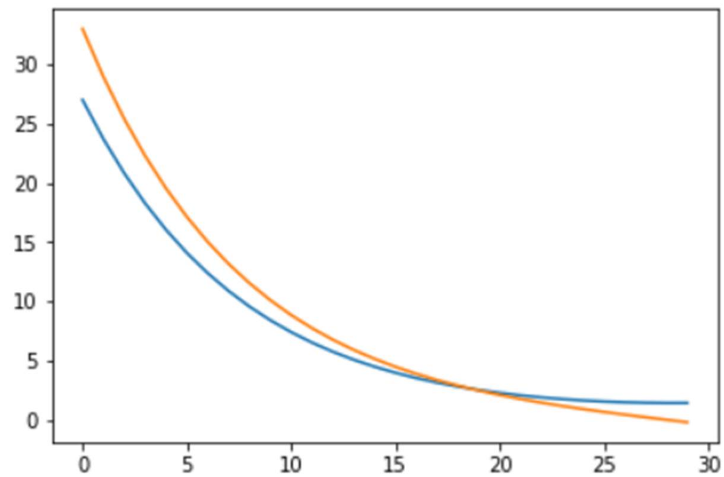

Figura 1: La gráfica representante de los estados de la batalla.

A pesar de que la alianza franco-española tenía la ventaja en cantidad de barcos, éstos estaban menos equipados. En la Figura 1 es posible observar que en cierto momento, la batalla se encontraba en un empate (n = 22) pero debido a la ventaja tecnológica de los británicos, éstos ganan.

1.4. Estrategia de Napoléon

Estando del lado de Napoleón: proponga una estrategia para atacar a la armada británica tecnológicamente superior (aunque menos numerosa) y ganar la batalla. Construya la solución numérica

Para ganarle a los británicos dividimos nuestra flota en tres: 7, 12 y 14. Cada tercio combate con 9 barcos de Nelson. Dimos por perdida la de 7 pero ganamos los dos combates siguientes:

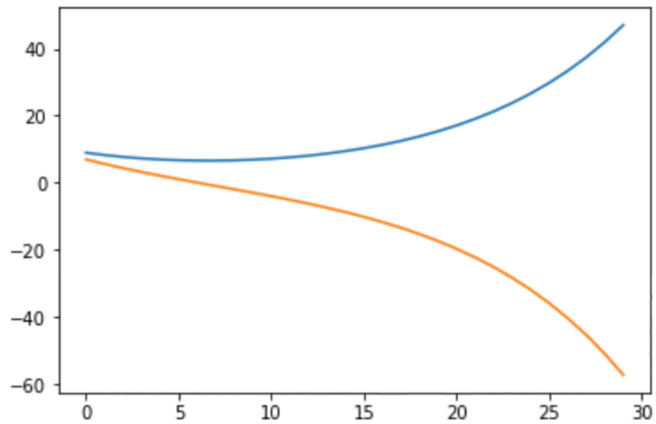

Figura 2: La gráfica del caso en que perdimos

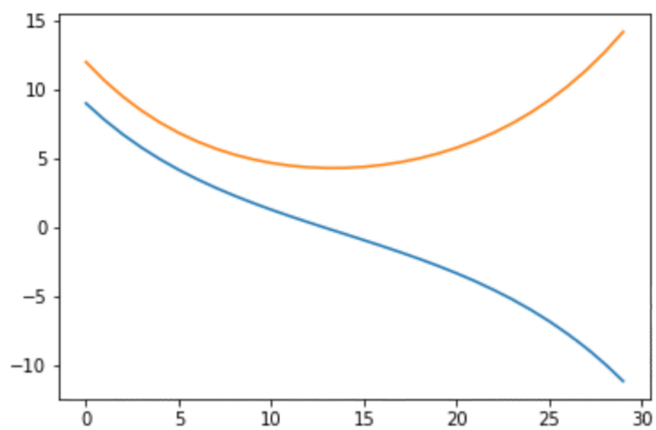

Figura 3: La gráfica de un caso ganado

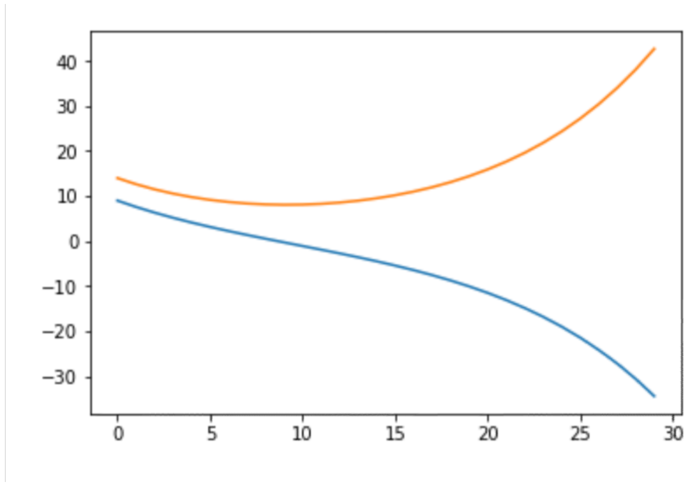

Figura 4: gráfica del segundo ganado

2. Modelo predador-presa

Suponga que la principal fuente de alimentación de los búhos moteados mexicanos es una sola presa: ratones. Un ecologista desea predecir los niveles de población de los búhos moteados y ratones en una reserva natural. Si R_n representa la población de ratones luego de n años, y B_n la población del búho predador, se tiene el siguiente modelo:

$$R_{n+1} = 1{,}2R_n - 0{,}001B_nR_n$$

$$B_{n+1} = 0{,}7B_n + 0{,}002B_nR_n$$

El ecologista quiere saber si ambas especies pueden coexistir en ese hábitat y si el comportamiento a largo plazo del sistema es sensible a las poblaciones iniciales. Encuentre los valores de equilibrio del sistema dinámico para este modelo predador presa.

1. Compare los signos de los coeficientes de este modelo con los signos de los coeficientes del modelo de búhos-halcones discutido en clase. Explique el signo de cada uno de los cuatro coeficientes en términos de la relación predador-presa que estamos modelando.

   Para el problema actual, tenemos dos ecuaciones:

$R_{n+1} = 1{,}2R_n - 0{,}001B_nR_n$
$B_{n+1} = 0{,}7B_n + 0{,}002B_nR_n$

Para el problema visto en clase llegamos a las dos ecuaciones siguientes:

$B_{n+1} = (1 + k_1)B_n - k_3B_nH_n$

$H_{n+1} = (1 + k_2)H_n - k_4B_nH_n$

Con k_1 y $k_2 > 0$

Vemos que en las cuatro ecuaciones, los coeficientes en el primer término son positivos. Esto representa el crecimiento de la especie, es decir, su reproducción. En la ecuación (1), el segundo término es negativo. Es un número fijo (0.001) multiplicado por B_n R_n (que representa la interacción entre búhos y ratones). El signo negativo se debe a las muertes de ratones en el proceso de interacción de ambas especies; es por eso que la densidad de ratones (R_{n+1}) es igual a su tasa de reproducción ($1{,}2R_n$) menos los decensos al momento de interactuar con los búhos ($0{,}001B_nR_n$). Para la ecuación (2) tenemos que el segundo término es positivo. Esto se debe a que la densidad de búhos aumentará con una tasa de crecimiento proporcional a R_nB_n, es decir, proporcional al número de encuentros entre búhos y ratones. Ahora, pasando al problema visto en clase, los términos que se encuentran en la segunda parte de la ecuación son negativos. Esto sucede gracias a que el modelo visto en clase era predador-predador, es decir, tanto los búhos como los halcones eran atacantes. Por lo tanto, podemos tener decensos en ambas poblaciones.

2. Estudie el comportamiento a largo plazo del sistema para cada una de las siguientes poblaciones iniciales

-	Lechuzas	Ratones
Caso A	150	200
Caso B	150	300
Caso C	100	200
Caso D	10	20

Obtuvimos primero que los puntos de equilibrio son (0,0) y (200,150). Como era de esperarse, las gráficas de esto salieron de la siguiente manera:

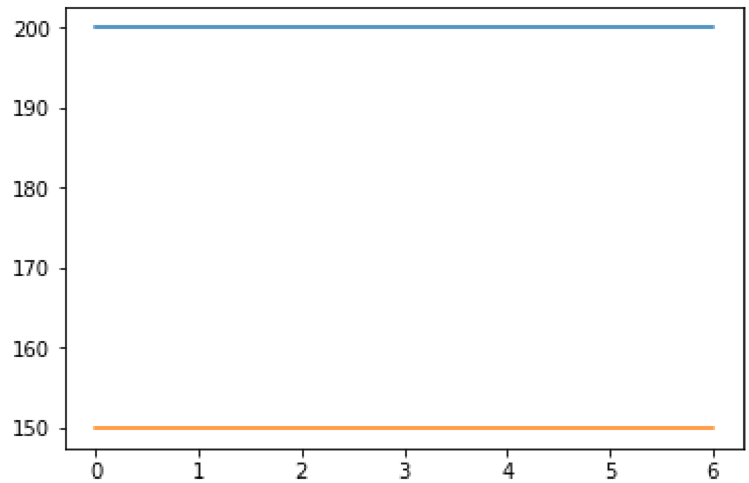

Figura 5: Punto de equilibrio(200,150)

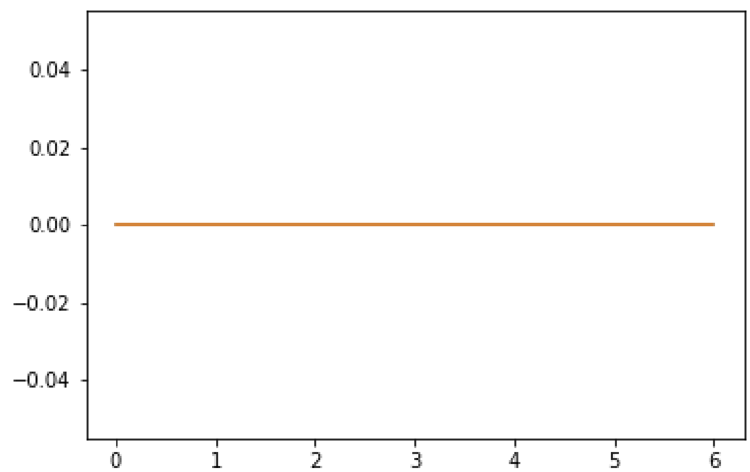

Figura 6: Punto de equilibrio(0,0)

El sistema no se mueve pues son puntos de equilibrio; la cantidad de búhos y ratones se va a mantener como está a lo largo del tiempo.

Ahora, para el caso A, al hacer la gráfica de búhos contra ratones, vimos que mientras que la población de búhos crece, la de ratones decrece, pero no sin antes haber crecido un poco. Esto es lógico pues mientras más depredadores haya, si la tasa de reproducción de las presas no es muy alta, estas se irán extinguiendo (aunqu también, si las presas se extinguen, los depredadores no tendrán nada que comer y morirán). La gráfica del caso A es la siguiente:

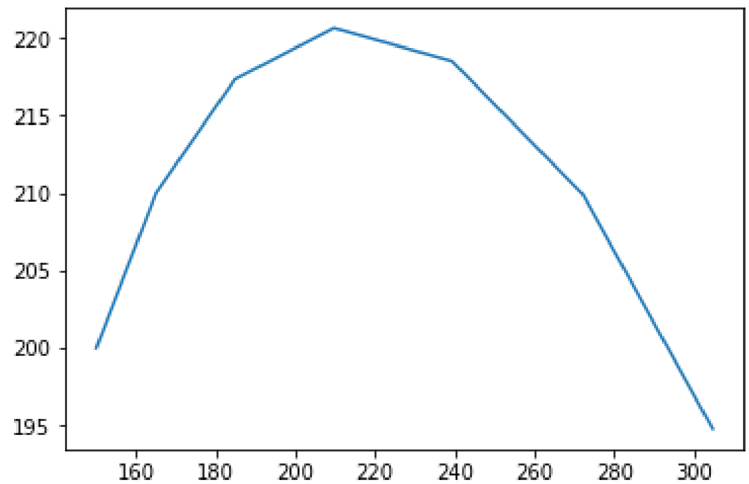

Figura 7: Caso A

En el caso B, donde contamos con el doble de ratones que de búhos o lechuzas, vemos que el decrecimiento de ratones es mucho más lento que en el caso anterior, aunque no crecen casi nada, comparado con el inicio como lo hicieron en el caso A.

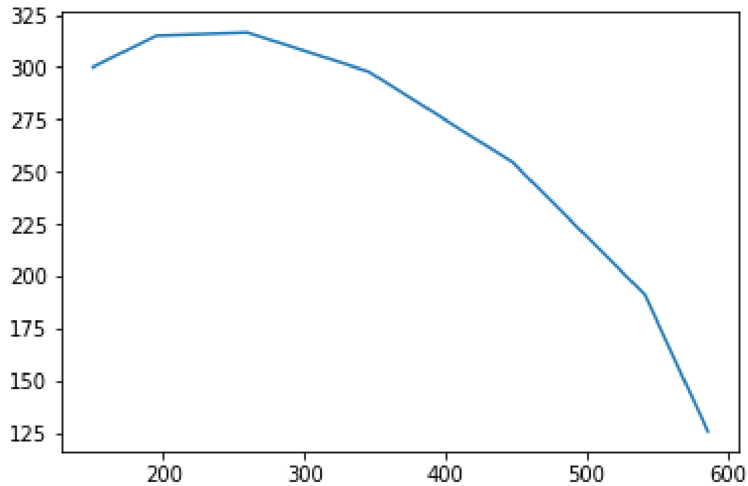

Figura 8: Caso B

En el caso siguiente, donde se vuelve a duplicar la cantidad inicial de ratones comparada con la de lechuzas, notamos un cecimiento acelerado de la población de roedores seguida claro, del decrecimiento de la misma debido a la intracción entre ambas especies.

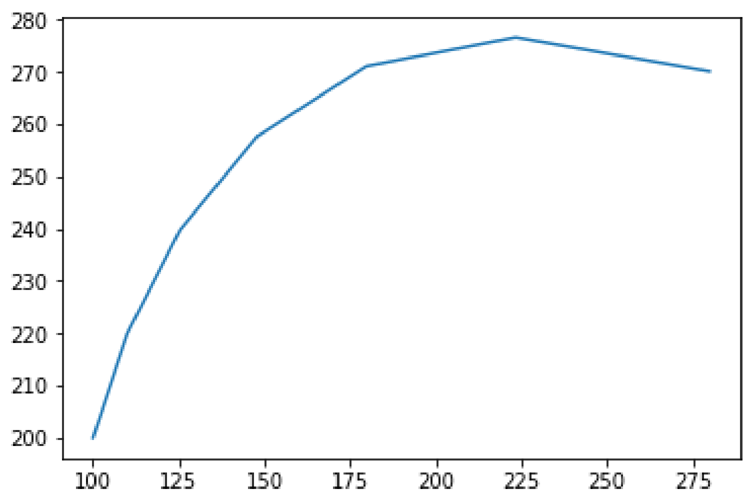

Figura 9: Caso C

En el último de los casos se ve que no hay crecimiento de ratones en ningún momento. La densidad de roedores decrece de manera exponencial conforme la de las aves aumenta.

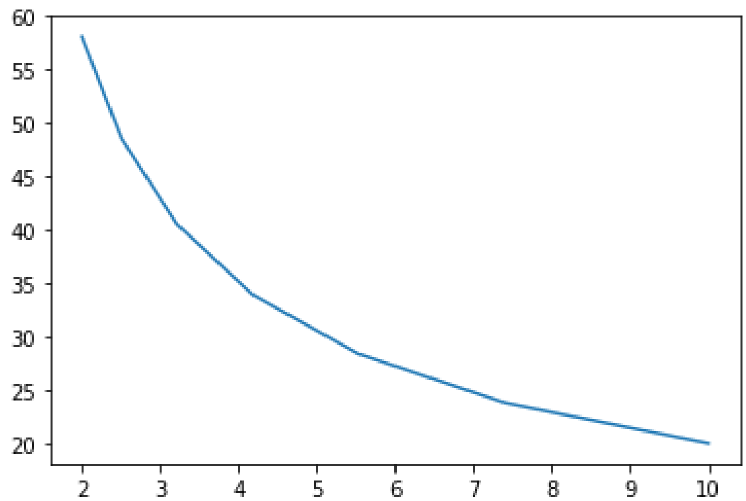

Figura 10: Caso D

3. Experimente con distintos valores para los coeficientes usando las poblaciones iniciales dadas. Luego pruebe con distintos valores iniciales. ¿Cómo es el comportamiento a largo plazo?¿Los resultados experimentales indican que el modelo es sensible al valor de los coeficientes?¿y a los valores iniciales?

   Para este ejercicio, lo primero que hicimos fue igualar los coeficientes de tasa de crecimiento de ambas poblaciones (les dimos el valor de 0.5). Notamos que la cantidad de ratones aumenta bastante mientras que la de las lechuzas sigue aumentando. La gráfica a continuación es para el caso A.

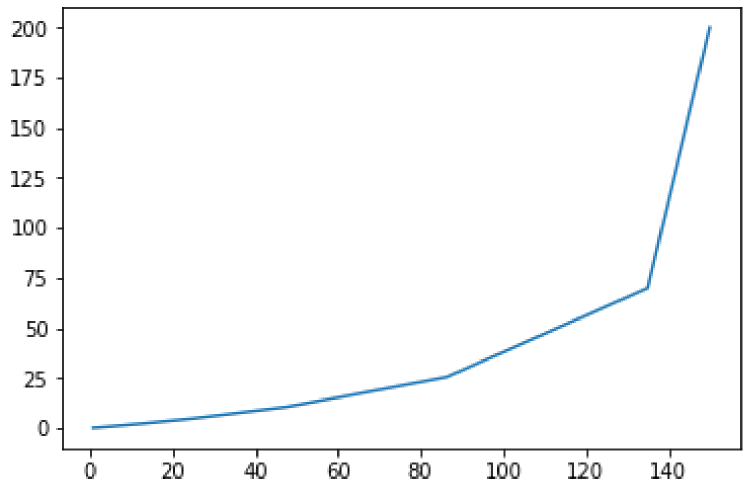

Figura 11:

También para el caso A, intercambiamos los coeficientes del crecimiento de las especies y obtuvimos la figura siguiente:

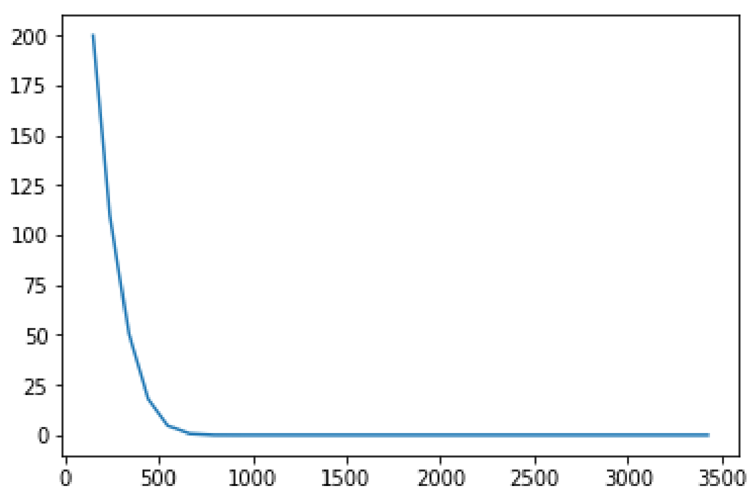

Figura 12:

Con esto vimos que si la tasa de crecimiento de los búhos fuera más grande que la de los ratones, los pequeños roedores se extinguirían.

Por último, hicimos que el coeficiente de crecimiento de los búhos decreciera y aumentamos un poco el de los ratones. Parece ser que es la única forma en que los roedores pudieran ganarle a los búhos, sobrevivir y seguir creciendo.

Concluimos así que el modelo es muy sensible a las condiciones iniciales al igual que a los coeficientes.

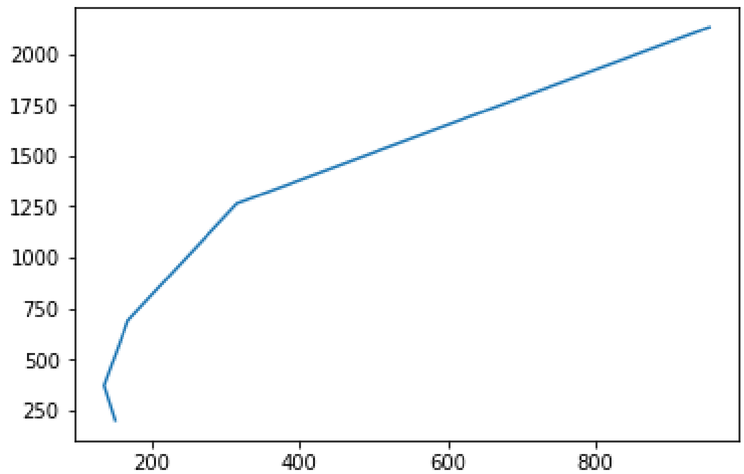

Figura 13:

3. Pescados y Mercurio

3.1. Sistema de Ecuaciones en diferencia

Sistema de concentración de metilmercurio en una persona de 70 Kg. Calculamos la concentración de metilmercurio en un pesado multiplicando la constante de concentración por gramos y el peso promedio del pescado.

$$A_{n+1} = 0{,}5A_n + (\frac{7026{,}2\mu g}{70kg})$$

3.2. Análisis de Resultados

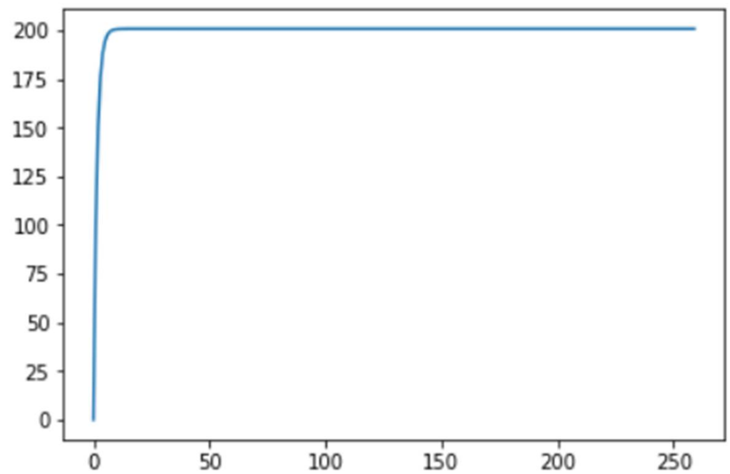

Figura 14: La concentración de metilmercurio en el transcurso de 50 años, en periodos de 70 días. Podemos notar que se estabiliza después de aproximadamanete 700 días.

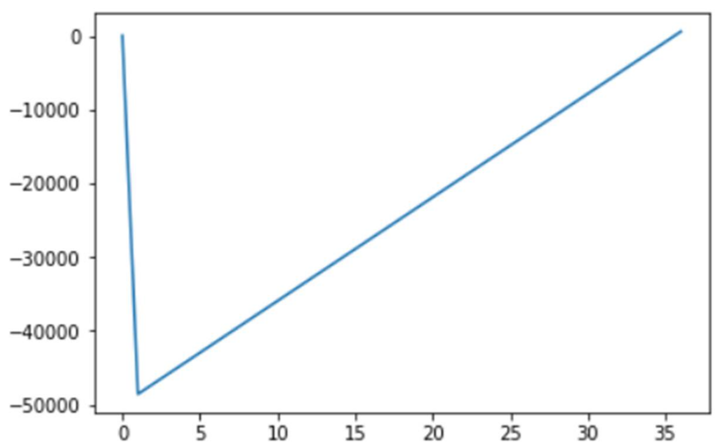

Figura 15: La gráfica presenta la diferencia entre el máximo de concentración de metilmercurio y la concentración provodada por comer n pescados a la semana.

Referencias

[1] Navarrete Morano, Genny Alexandria *Introducción a las ecauciones de diferencias*, Fundación Universitaria KONRAD-LORENZ, Bogotá, 2003

[2] Batalla de Trafalgar. (2018, 29 de agosto). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 02:10, agosto 30, 2018 `https://es.wikipedia.org/wiki/Batalla_de_Trafalgar#Estado_de_la_flota_britC3A1nica`