IGTE

Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik
Technische Universität Graz

TU Graz

Grundlagen elektrischer Netzwerke UE

4. Übungsblatt

Transiente Vorgänge

Felix Rettenbacher Matteo Valentini Nicolas Lampl

23. April 2023

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

0 Angabe

Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik
Technische Universität Graz

Grundlagen elektrischer Netzwerke UE

4. Übungsblatt

Transiente Vorgänge

1. Finde den Ausdruck für den Strom durch die Spule, $i_L(t)$, für $t \geq 0$. (2 Punkte)
   - Wende die allgemeine Lösungsformel $x(t) = x_\mathrm{f} + [x_0 - x_\mathrm{f}] \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$ für Transiente Vorgänge mit einem Energiespeicher an, um den Strom $i_L(t)$ für $0 \leq t \leq 2\tau_1$ zu ermitteln. τ_1 ist dabei die Zeitkonstante der Schaltung in diesem ersten Teil.
   - Zum Zeitpunkt $t = 2\tau_1$ schalten beide Schalter S_1 und S_2 gleichzeitig um. Wende die Kirchhoff'schen Regeln an, um die benötigten Maschengleichungen und Knotengleichungen aufzustellen.
   - Leite aus diesen Gleichungen und den Bauteilgesetzen der Elemente R, L und C die Differentialgleichung zweiter Ordnung her, die $i_L(t)$ beschreibt.
     Tipp: $i_L'' + 2\delta i_L' + \omega_0^2 i_L = 0$
   - Bestimme die Werte der Parameter δ, ω_0 und Ω_d. Handelt es sich um einen Kriechfall, aperiodischen Grenzfall oder Schwingfall?
   - Löse die Differentialgleichung für den entsprechenden Fall mit dem jeweiligen Ansatz (siehe Übung) und löse das Anfangswertproblem.
2. Plotte den Strom $i_L(t)$ über die Spule in Matlab für $0\text{ s} \leq t < 10\text{ ms}$. (0,5 Punkte)
3. Simuliere die Schaltung in LTspice für $0\text{ s} \leq t < 10\text{ ms}$ und vergleiche die Ergebnisse. Plotte hier den Strom $i_L(t)$ und die Spannung $u_L(t)$ über die Spule. (0,5 Punkte)

Gegeben:

$R_1 = 50\ \Omega$ $R_2 = 200\ \Omega$ $R_3 = 50\ \Omega$ $C = 10\ \mu\mathrm{F}$ $L = 100\ \mathrm{mH}$ $U_0 = 10\ \mathrm{V}$
$i_L(t=0) = I_{L_0} = 50\ \mathrm{mA}$ $u_C(t=0) = U_{C,0} = 15\ \mathrm{V}$

1.1 Schaltplan

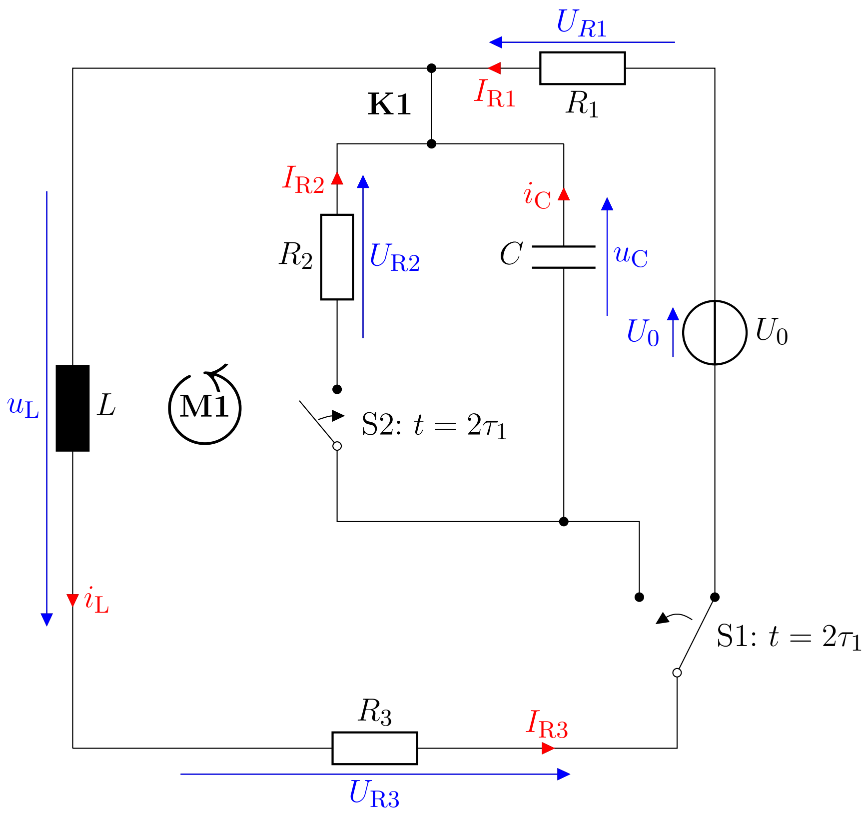

Abbildung 1: Schaltplan

1.2 Ermittlung von $i_{L1}(t)$ vor dem Schaltvorgang

Ansatz: $i_{L1}(t) = i_{L,f} + [i_{L1}(t = 0\text{ s}) - i_{L,f}] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
$i_{L1}(t = 0\text{ s}) = 50\text{ mA} = 0.05\text{ A}$ (siehe Angabe)

Berechnung von $i_{L1,f}$:

$$i_{L1,f} = \frac{U_0}{R_1 + R_3} = \frac{10\text{ V}}{50\ \Omega + 50\ \Omega} = 0.1\text{ A}$$

Berechnung von τ_1:

$$\tau_1 = \frac{L}{R_1 + R_3} = \frac{0.1\text{ H}}{50\ \Omega + 50\ \Omega} = 0.001\text{ s}$$

Berechnung von $i_{L1}(t)$:

$$i_{L1}(t) = i_{L1,f} + [i_{L1}(t = 0\text{ s}) - i_{L1,f}] \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 0.1\text{ A} + [0.05\text{ A} - 0.1\text{ A}] \cdot e^{-\frac{t}{0.001\text{ s}}} = 0.1\text{ A} - 0.05\text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{0.001\text{ s}}}$$

1.3 Knoten- und Maschengleichungen nach dem Schaltvorgang

K1: $i_L(t) - i_{R2} - i_c(t) = 0 = i_L(t) - \frac{1}{R_2} \cdot U_{R2} - C \cdot u_c'(t) \Longrightarrow i_L(t) - \frac{1}{R_2} \cdot u_c(t) - C \cdot u_c'(t) = 0$

M1: $u_c(t) + u_L(t) + U_{R3} = 0 \Longrightarrow u_c(t) = -L \cdot i_L'(t) - R_3 \cdot i_L(t)$

1.4 Differentialgleichung 2. Ordnung

$$i_\mathrm{L}(t) - \frac{1}{R_2} \cdot (-L \cdot i'_\mathrm{L}(t) - R_3 \cdot i_\mathrm{L}(t)) - C \cdot (-L \cdot i''_\mathrm{L}(t) - R_3 \cdot i'_\mathrm{L}(t)) = 0$$

$$\Longrightarrow CL \cdot i''_\mathrm{L}(t) + \left(R_3 C + \frac{L}{R_2}\right) \cdot i'_\mathrm{L}(t) + \left(\frac{R_3}{R_2} + 1\right) \cdot i_\mathrm{L}(t) = 0$$

$$\Longrightarrow i''_\mathrm{L}(t) + \left(\frac{R_3}{L} + \frac{1}{R_2 C}\right) \cdot i'_\mathrm{L}(t) + \left(\frac{R_3}{R_2 CL} + \frac{1}{CL}\right) \cdot i_\mathrm{L}(t) = 0$$

1.5 Bestimmung der Parameter $\delta,\ \omega_0,\ \Omega_d$

Ansatz: $i''_\mathrm{L} + 2\delta i'_\mathrm{L} + w_0^2 i_\mathrm{L} = 0$

Berechnung von δ:

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{R_3}{L} + \frac{1}{R_2 C}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{50\ \Omega}{0.1\ \mathrm{H}} + \frac{1}{200\ \Omega \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F}}\right) = 500.0\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Berechnung von ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_3}{R_2 CL} + \frac{1}{CL}} = \sqrt{\frac{50\ \Omega}{200\ \Omega \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F} \cdot 0.1\ \mathrm{H}} + \frac{1}{10^{-5}\ \mathrm{F} \cdot 0.1\ \mathrm{H}}} = 1118.0340\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Berechnung von Ω_d:

$$\Omega_d = \sqrt{|\delta^2 - \omega_0^2|} = 1000.0\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Da bei diesem Netzwerk $\delta^2 < \omega_0^2$ gilt, ist die Antwort unterkritisch gedämpft, somit handelt es sich um einen Schwingfall.

1.6 Lösung der Differentialgleichung

$\tilde{t} = t - 2\tau_1 = t - 0.002\ \mathrm{s}$

Ansatz: $i_\mathrm{L}(\tilde{t}) = e^{-\delta\tilde{t}} \cdot [K_1 \cdot cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \cdot sin(\Omega_d \tilde{t})]$

Zur Bestimmung des Anfangswertes von $i_\mathrm{L}(\tilde{t})$ wird die Stetigkeit des Stromes an der Induktivität L verwendet. Der Strom $i_\mathrm{L}(\tilde{t} = 0)$ wird mithilfe der Differentialgleichung vor dem Schaltvorgang berechnet:

$$i_\mathrm{L}(t = 2\tau_1) = 0.1\ \mathrm{A} - 0.05\ \mathrm{A} \cdot e^{-\frac{0.002\ \mathrm{s}}{0.001\ \mathrm{s}}} = 0.093233\ \mathrm{A}$$

Bestimmung von K_1 anhand von $\tilde{t} = 0$:

$$i_\mathrm{L}(\tilde{t} = 0) = e^0 \cdot [K_1 \cdot cos(0) + K_2 \cdot sin(0)] = K_1 = 0.093233\ \mathrm{A}$$

Bestimmung von K_2:

$$i'_\mathrm{L}(\tilde{t}) = -\delta \cdot e^{-\delta\tilde{t}} \cdot [K_1 \cdot cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \cdot sin(\Omega_d \tilde{t})] + e^{-\delta\tilde{t}} \cdot [-K_1 \Omega_d \cdot sin(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \Omega_d \cdot cos(\Omega_d \tilde{t})]$$

$$i'_\mathrm{L}(\tilde{t} = 0) = -\delta \cdot K_1 + \Omega_d K_2 = i'_\mathrm{L1}(t = 2\tau_1) \Longrightarrow K_2 = \frac{i'_\mathrm{L1}(t = 2\tau_1) + \delta K_1}{\Omega_d}$$

$$= \frac{(0.05\ \mathrm{A} \cdot \frac{1}{0.001\ \mathrm{s}} \cdot e^{-\frac{0.002\ \mathrm{s}}{0.001\ \mathrm{s}}}) + 500\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0.093233\ \mathrm{A}}{1000.0\ \frac{1}{\mathrm{s}}} = 0.053383\ \mathrm{A}$$

Finale Form der Differentialgleichung:

$$i_\mathrm{L}(t) = e^{-500.0\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot (t - 0.002\ \mathrm{s})} \cdot \left[0.093233\ \mathrm{A} \cdot cos\left(1000.0\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot (t - 0.002\ \mathrm{s})\right) + 0.053383\ \mathrm{A} \cdot sin\left(1000.0\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot (t - 0.002\ \mathrm{s})\right)\right]$$

2 Matlab-Diagramm

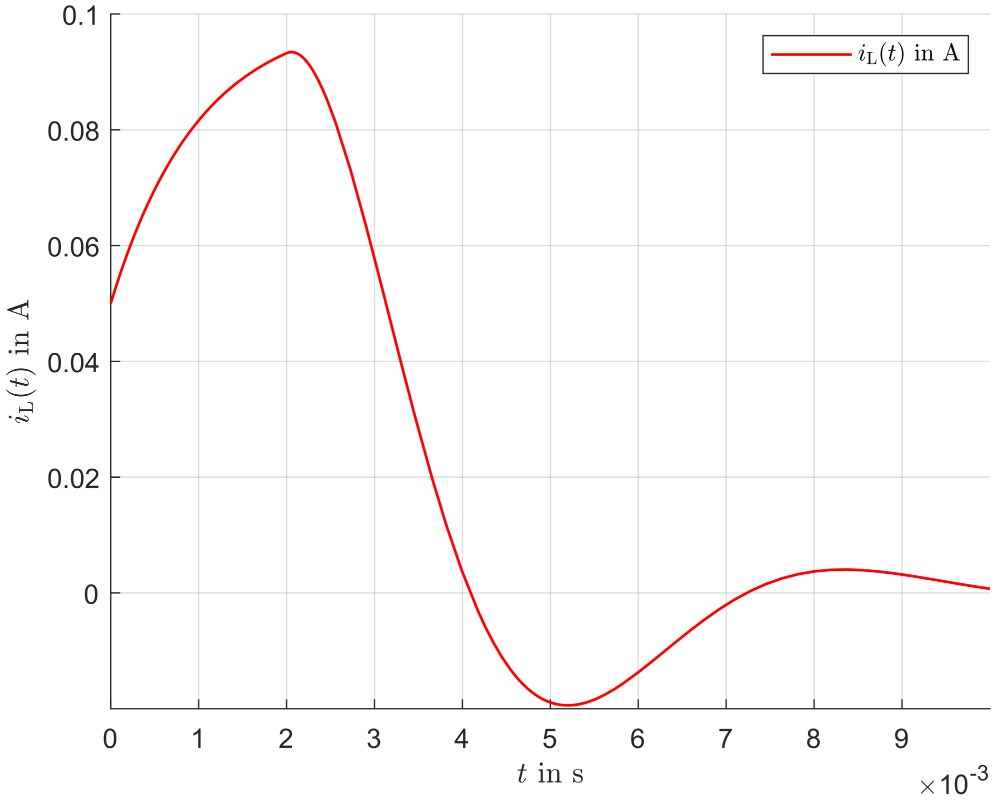

Abbildung 2: Matlab-Plot des Stromes i_{L}

Im Diagramm (Abbildung 1) ist die Stetigkeit des Stromes i_{L} gut erkennbar, es existiert kein Sprung bei $t = 2$ ms, wo der Schaltvorgang stattfindet. Die Schwingung des Stromes nach dem Schaltvorgang pendelt sich auf 0 A ein, da kein weiterer Strom dem Netzwerk zugefügt wird und es gedämpft ist.

3 Simulation der Schaltung

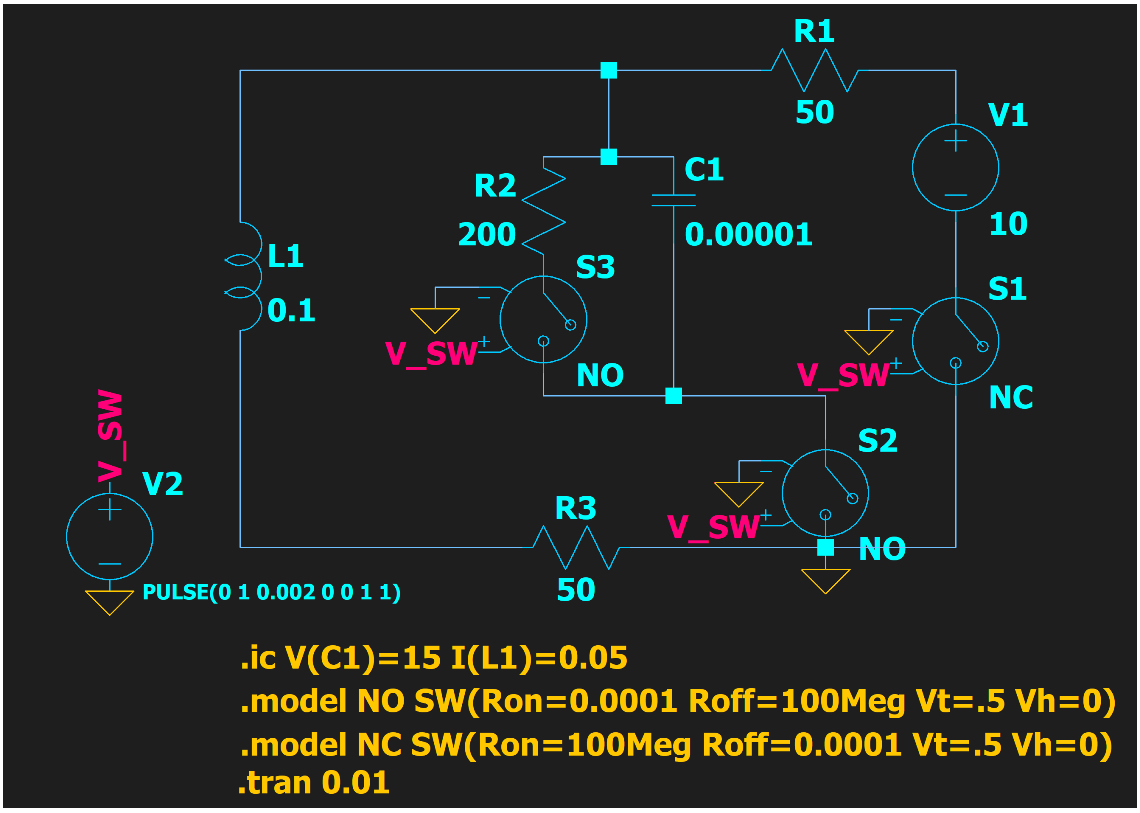

Abbildung 3: Simulation des Netzwerks in LTSpice

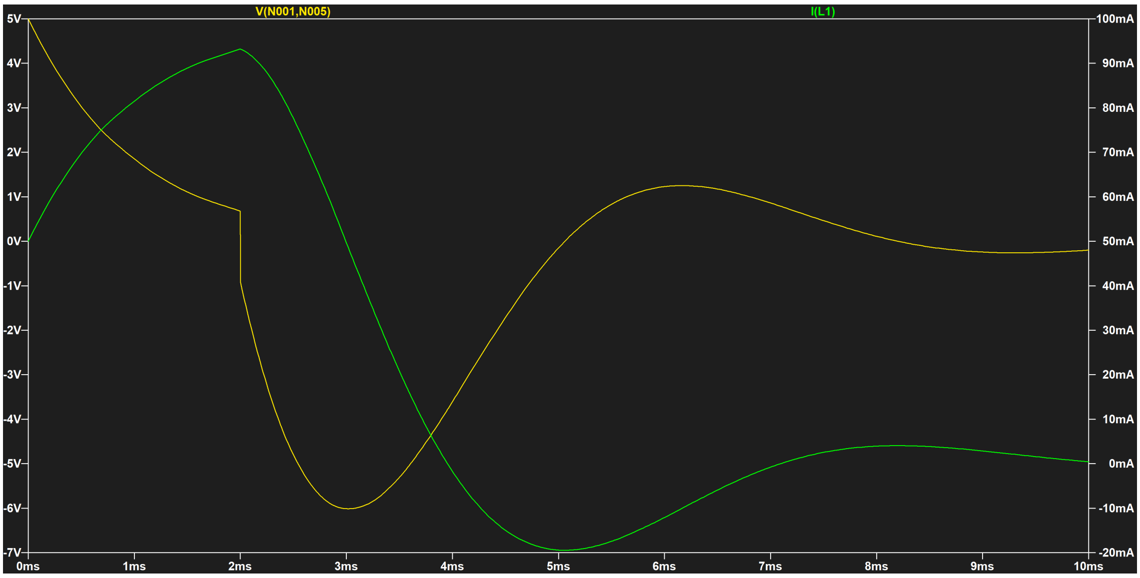

Abbildung 4: Ergebnisse der Simulation, Spannung u_{L} in gelb, Strom i_{L} in grün

Die Simulationsergebnisse decken sich mit der aufgestellten Differentialgleichung sowie dem daraus Plot. Um den Anfangszustand zu setzen, wurde der *.ic* Spice directive verwendet, die Schalter wurden mit Hilfe von Normally-Open und Normally-Closed Models, gesteuert von einer Pulse-Quelle, simuliert. Im Simulationsergebnis ist gut erkenntlich, dass der Strom an der Induktivität stetig ist, die Spannung jedoch nicht.