

## Magični kvadrati

A 3x3 magic square grid with numbers and arrows indicating row, column, and diagonal sums.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Arrows and labels '15' indicate the sums for each row, column, and diagonal.

Prirejeno iz virov:

- <http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html>
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Magic\\_square](http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square)

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Zgodovina</b>	<b>3</b>
2.1	Kvadrat »Lo Shu« . . . . .	3
2.2	Kulturna pomembnost . . . . .	4
2.3	Zgodnji kvadrati reda 4 . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Osnovne lastnosti</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Primeri</b>	<b>6</b>

# 1 Uvod

**Definicija 1.** *Magični kvadrat* reda  $n$  je nabor  $n^2$  različnih števil, ki so razvrščena v kvadratno tabelo tako, da vedno dobimo enako vsoto, če seštejemo vsa števila poljubne vrstice, vsa števila poljubnega stolpca ali vsa števila v katerikoli od glavnih diagonal.

Primer magičnega kvadrata reda 3 je prikazan v tabeli 1.

Tabela 1: Primer magičnega kvadrata reda 3 je prikazan v tabeli 1.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

**Definicija 2.** Magični kvadrat reda  $n$  je *normalen*, če v njem nastopajo števila

$$1, 2, 3, \dots, n^2 - 1, n^2. \quad (1)$$

Magični kvadrat v tabeli 1 je normalen. To je tudi najmanjši netrivialen normalen magični kvadrat. Poleg normalnih magičnih kvadratov so zanimivi tudi magični kvadrati praštevil.

## 2 Zgodovina

### 2.1 Kvadrat »Lo Shu«

Kitajska literatura iz časa vsaj 2800 let pred našim štetjem govori o legendi *Lo Shu* – »zvitke reke Lo«. V antični Kitajski je prišlo do silne poplave. Ljudje so skušali rečnemu bogu narasle reke Lo ponuditi daritev, da bi pomirili njegovo jezo. Iz vode se je prikazala želva z zanimivim vzorcem na oklepu: v tabeli velikosti tri krat tri so bila predstavljena števila, tako da je bila vsota števil v katerikoli vrstici, kateremkoli stolpcu in na obeh glavnih diagonalah enaka: 15. To število je tudi enako številu dni v 24 ciklih kitajskega sončnega leta. Ta vzorec so na določen način uporabljali upravljalci reke.

Tabela:loshu

## 2.2 Kulturna pomembnost

Magični kvadrati so fascinirali človeštvo skozi vso zgodovino. Najdemo jih v številnih kulturah, npr. v Egiptu in Indiji, vklesane v kamen ali kovino, uporabljane kot talismane za dolgo življensko dobo in v izogib boleznim.

Tabela 2: Kvadrat Lo Shu

*Kubera-Kolam* je talna poslikava, ki se uporablja v Indiji, in je v obliki magičnega kvadrata reda 3. Ta je v bistvu enak kot kvadrat Lo Shu, vendar je vsako število povečano za 19.

Tabela 3: Kvadrat Kubera-Kolam

Z magičnimi kvadrati so se ukvarjali tudi najbolj znani matematiki kot na primer Euler, glej [3].

## 2.3 Zgodnji kvadrati reda 4

Najzgodnejši znani magični kvadrat reda 4 je bil odkrit na napisu v Khajurahu v Indiji in v Enciklopediji Bratovščine Čistosti iz enajstega ali dvanajstega stoletja. Vrh vsega gre celo za »panmagični kvadrat«. V Evropi sta morda najbolj znana naslednja magična kvadrata reda 4.

**Magični kvadrat v litografiji Melancholia I** (glej sliko 1 za izsek s kvadratom) Albrechta Dürerja naj bi bil najzgodnejši magični kvadrat v evropski umetnosti. Zelo podoben je kvadratu Yang Huija, ki je nastal na Kitajskem približno 250 let pred Dürerjevim časom.

Slika 1: Dürerjev magični kvadrat

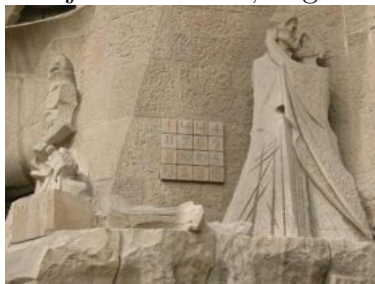


Vsoto 34 je mogoče najti pri seštevanju števil v vsaki vrstici, vsakem stolpcu, na vsaki diagonali, v vsakem od štirih kvadrantov, v sredinskih štirih poljih, v štirih kotih, v štirih sosedih kotov v smeri urinega kazalca ( $3 + 8 + 14 + 9$ ), v štirih sosedih kotov v nasprotni smeri urinega kazalca ( $2 + 5 + 15 + 12$ ), v dveh naborih simetričnih parov ( $2 + 8 + 9 + 15$  in  $3 + 5 + 12 + 14$ ), in še na nekaj drugih načinov. Števili na sredini spodnje vrstici tvorita letnico litografije: 1514.

Tabela 4: Dürerjev magični kvadrat  $4 \times 4$

**Pasijonska fasada na katedrali Sagrada família v Barceloni** (glej sliko 2 za fotografijo) vsebuje magični kvadrat reda 4.

Slika 2: Pasijonska fasada, Sagrada Família



Vsota števil v vrsticah, stolpcih oziroma na diagonalah je 33 – Jezusova starost v času pasijona. Strukturno je kvadrat podoben Dürerjevemu, vendar so števila v štirih poljih zmanjšana za 1. Posledica je, da sta števili 10 in 14 podvojeni in zato kvadrat ni normalen.

### 3 Osnovne lastnosti

**Definicija 3.** Vsoto ene vrstice, enega stolpca ali ene od glavnih diagonal v magičnem kvadratu imenujemo *magična konstanta*.

Tabela 5: Magični kvadrat na Sagradi Família

**Izrek 1.** *Magična konstanta normalnega magičnega kvadrata reda  $n$  je enaka*

$$M_2(n) = \frac{1}{2}n(n^2 + 1) \quad (2)$$

*Dokaz izreka.* V normalnem magičnem kvadratu reda  $n$  je vsota vseh nastopajočih števil (glej 1 na strani 2) enaka  $1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^{n^2} k =$

$\frac{1}{2}n^2(n^2 + 1)$ . Ker imamo v kvadratu  $n$  vrstic z enako vsoto, je vsota števil v eni vrstici enaka številu  $M_2(n)$ .

Preprost račun pokaže, da je konstanti (2) analogna konstanta  $M_2(n; A, D)$  za magični kvadrat, v katerem so nameščena števila  $A, A + D, A + 2D, \dots, A + (n^2 - 1)D$ , enaka !! Kvadratu v tabeli ??? ustrežata konstanti  $A = 20$  in  $D = 1$ .

Če vsako od števil v normalnem magičnem kvadratu reda  $n$  odštejemo od števila  $n^2 + 1$ , dobimo nov magični kvadrat, ki je prvotnemu *komplementaren*. Na primer, magičnemu kvadratu Lo Shu (glej tabelo ???) priredimo komplementarni kvadrat, prikazan v tabeli ???

Vidimo, da je dobljeni kvadrat moč dobiti iz kvadrata Lo Shu tudi z zasukom za 180 stopinj okrog središča, kvadrat iz tabele ?? pa je mogoče dobiti iz kvadrata Lo Shu z zrcaljenjem preko sredinske vodoravne črte.

Število različnih normalnih magičnih kvadratov

Pravimo, da sta dva magična kvadrata *različna*, če enega ni mogoče dobiti iz drugega s pomočjo zasukov oziroma zrcaljenj.

Števila različnih normalnih magičnih kvadratov se nahajajo v tabeli ??.

točna vrednost približek red 1 2 3 4 5 6 število kvadratov 1 0 1 880 275305224 !!

Vse normalne magične kvadrate reda 4 je oštevilčil Frénicle de Bessy leta 1693, glej ???, in jih je moč najti v knjigi ??? iz leta 1982. Število normalnih kvadratov reda 5 je izračunal R. Schroepel leta 1973 (glej Gardner ???). Natančno število vseh različnih normalnih magičnih kvadratov reda 6 ni znano. Avtorja navedenega približka sta Pinn in Wiczerkowski (glej ???), ki sta za oceno uporabila simulacijo Monte Carlo in metode statistične mehanike.

## 4 Primeri

V tabelah ??, ?? in ?? so prikazani magični kvadrati redov 5, 6 in 9.