Rapport TP X01
TP1

Aurélien Valade

Problème à résoudre : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} u - \nabla\big(A(x,y)\nabla u\big) = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ A(x,y)\nabla u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Q1

Soit $\forall v \in H^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega uv - \int_\Omega \nabla\big(A(x,y)\nabla u\big)v = \int_\Omega fv && IPP && (2)\\
&\int_\Omega uv - \int_{\partial\Omega} \big(A(x,y)\nabla u\big)v + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v = \int_\Omega fv && CL && (3)\\
&\int_\Omega uv + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v = \int_\Omega fv && && (4)\\
&a(u,v) = l(v) && && (5)
\end{aligned}$$

On a bien $a(u,v)$ et $l(v)$ (bi)linéaires. Montrons que $a(u,v)$ continue

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \left|\int A\nabla u \nabla v\right| + \left|\int uv\right| && \text{ineg. triang} && (6)\\
&\leq \beta \left|\int \nabla u \nabla v\right| + \left|\int uv\right| && \text{A bornée} && (7)\\
&\leq \beta \,||\nabla u||_{L^2}\,||\nabla v||_{L^2} + ||u||_{L^2}\,||v||_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} && (8)\\
&\leq \beta \,||\nabla u||_{H^1}\,||\nabla v||_{H^1} + ||u||_{H^1}\,||v||_{H^1} && ||\cdot||_{L^2} < ||\cdot||_{H^1} && (9)\\
&\leq (\beta+1)\,||\nabla u||_{H^1}\,||\nabla v||_{H^1} && && (10)\\
& && && (11)
\end{aligned}$$

On a évidement $l(v)$ continue comme $f, v \in H^1(\Omega)$.
Montrons que $a(u,v)$ est coercive

$$\begin{aligned}
|a(u,u)| &\geq \left|\int A(\nabla u)^2\right| + \left|\int (\nabla u)^2\right| && (12)\\
&\geq \max(A)\left|\int (\nabla u)^2\right| + \left|\int (\nabla u)^2\right| && (13)\\
&\geq \xi \left|\int (\nabla u)^2\right| + \left|\int (\nabla u)^2\right| && (14)\\
&\geq \min(\xi,1)\,||u||_{H^1} && (15)
\end{aligned}$$

Q2-Q3

On onsidère uniquement $V_h \subset H^1(\Omega)$ de dimension finie, donc entièrement décrit par sa base $(\omega_I)_{1\leq I\leq N}$. Le problème se ramène donc à

$$a(u,\omega_I) = l(\omega_I) \quad \forall 1 \leq I \leq N. \tag{16}$$

Si on projète u sur la base des (ω_I) :

$$u_h = \sum_1^N u_h^I \omega_I \tag{17}$$

on retrouve le problème variationel entièrement discrétisé :

$$\sum_J u_h^J a(\omega_I, \omega_J) = l(\omega_I) \quad \forall 1 \leq J \leq N. \tag{18}$$

En posant les matrices et les vecteurs:

$$U \in \mathbb{R}^N, \quad U_I = u_h^I, \tag{19}$$

$$L \in \mathbb{R}^N, \quad L_I = \int f\omega_I, \tag{20}$$

$$\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \mathbb{K}_{IJ} = \int A\nabla\omega_I \nabla\omega_J, \tag{21}$$

$$\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \mathbb{M}_{IJ} = \int \omega_I\omega_J, \tag{22}$$

on peut écrire le système sous forme matricielle :

$$(\mathbb{M} + \mathbb{K})U = L. \tag{23}$$

Q5-Q6

Cf codes.

Q7

Calcul de $(\mathbb{M}_{IJ})$

Le produit des fonctions $\omega_I\omega_J$ est dans $\mathbb{P}^2$, on utilisera donc la formule

$$\int_{\mathcal{T}_l} F d\Omega = \frac{\mathcal{A}_l}{3}\left(F\left(\frac{S_1+S_2}{2}\right) + F\left(\frac{S_1+S_3}{2}\right) + F\left(\frac{S_2+S_3}{2}\right)\right) \tag{24}$$

Pour les $\mathbb{M}_{II}$, en prenant le sommet I comme étant le sommet 1 sur la base locale, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{T}_l} (\omega_I)^2 &= \frac{1}{D^2}\int_x\int_y \left(y_{23}(x-x_3) - x_{23}(y-y_3)\right)^2 dxdy \qquad (25)\\ &= \frac{-D}{3} = \frac{\mathcal{A}_l}{6}. \qquad (26)\end{aligned}$$

Pour les $\mathbb{M}_{IJ}$, en prenant les sommets I, J comme étant respectivement les sommets 1, 2 dans la base locale, on a

$$\int_{\mathcal{T}_l} \omega_I \omega_J = = \frac{1}{D^2} \int_x \int_y \big(y_{23}(x-x_3) - x_{23}(y-y_3)\big)\big(y_{31}(x-x_1) - x_{31}(y-y_1)\big) dxdy \tag{27}$$
$$= \frac{-D}{6} = \frac{\mathcal{A}}{12}. \tag{28}$$

En résumé

$$\mathbb{M}_{IJ} = \begin{cases} \frac{\mathcal{A}_l}{6} & \text{si } I = J \\ \frac{\mathcal{A}_l}{12} & \text{si} \quad \exists l < L \quad \text{tq} \quad S(I), S(J) \in \mathcal{T}_l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{29}$$

Calcul de $(\mathbb{K}_{IJ})$

Le produit des fonctions $\nabla\omega_I \nabla\omega_J$ est dans P^0, on utilise donc la formule

$$\int_{\mathcal{T}_l} F d\Omega = \frac{\mathcal{A}_l}{3} F\left(\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}\right) \tag{30}$$

Pour $I = J$, en prenant le sommet I comme étant le sommet 1 sur la base locale, on a

$$\int_{\mathcal{T}_l} (\nabla\omega_I)^2 = \frac{y_{23}^2 - x_{23}^2}{4\mathcal{A}_l} \tag{31}$$

et pour $I \neq J$, en prenant les sommets I, J comme étant respectivement les sommets 1, 2 dans la base locale, on a

$$\int_{\mathcal{T}_l} \nabla\omega_I \nabla\omega_J = \frac{y_{23}y_{31} - x_{23}x_{31}}{4\mathcal{A}_l} \tag{32}$$

En résumé

$$\mathbb{K}_{IJ} = \begin{cases} n_{i,1}n_{j,1} + n_{i,2}n_{j,2} & \text{si} \quad \exists l < L \quad \text{tq} \quad S(I), S(J) \in \mathcal{T}_l \quad \text{avec} \quad i = loc(I), j = loc(J) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{33}$$

avec loc le changement de base global vers local, et $n \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$$n = \begin{pmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{pmatrix} \tag{34}$$

Q8

Cf codes

Q9

Q9(a)

On a que

$$f = \sum_I \omega_I \tag{35}$$

donc

$$L_I = \sum_J \int_\Omega \omega_J \omega_I = \sum_J \mathbb{M}_{IJ} \quad \forall 1 \leq I \leq N. \tag{36}$$

Q9(B)

Dans le cas général,

$$\begin{aligned}
\forall 1 \leq I \leq N, \quad L_I &= \sum_J \pi_h f\big(S(J)\big) \int_\Omega \omega_I \omega_J && (37)\\
&= \sum_J \pi_h f\big(S(J)\big) \mathbb{M}_{IJ} && (38)\\
\Leftrightarrow L &= \mathbb{M} F. && (39)
\end{aligned}$$

ou $F \in \mathbb{R}^N$ tel que $F_i = \pi_h f\big(S(I)\big)$.

Q10

En utilisant le code `calcul_f.py` de calcul formel présent dans le dossier TP1, on trouve que

$$f(x,y) = (1 + 5\pi^2)\cos(\pi x)\cos(2\pi y) \quad \forall x, y \in \Omega. \tag{40}$$

Q11-12

Pour toute fonction

$$u = \sum_I u\big(S(I)\big)\omega_I \tag{41}$$

$$U = \big(u(S(I))\big)_I \in \mathbb{R}^N \tag{42}$$

on a que

$$\begin{aligned}
||u||_{L^2}^2 &= \big\langle u, u \big\rangle && (43)\\
&= \sum_I \sum_J U_I U_J \big\langle \omega_I, \omega_J \big\rangle && (44)\\
&= \sum_I \sum_J U_I U_J \mathbb{M}_{IJ} && (45)\\
&= U^T \mathbb{M} U \geq 0 \quad \text{car } \mathbb{M} \text{ définie positive,} && (46)
\end{aligned}$$

et de même

$$||u||_{\text{semi } H^1}^2 = \big|U^T \mathbb{K} U\big|. \tag{47}$$