Rapport TP X01
TP3

Aurélien Valade

1 Intruction et structure du code

Le but de ce TP est de résoudre le problème suivant : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} u - \nabla\big(A(x,y)\nabla u\big) = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

La structure du code ainsi que l'arrangement des dossiers ont été un peu modifiés. Tous les `*.msh` se trouvent dans le dossier `geoms/` avec un executable `bash` pour en créer à volonté.

De plus, le corps de la routine principale se trouve maintenant dans `principal_dirichlet_aux.m`, cependant le fichier script est toujours bien `principal_dirichlet.m`.

Un code de calcul formel rédigé en python a été ajouté.

2 Solution exacte

3 Solution au problème homogénéisé

3.1 Les problèmes de cellule

Question 1. *Montrer que le problème suivant est bien posé:*

Trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \int_Y A\nabla u \nabla v = -\int_Y A e_i \nabla v \tag{2}$$

avec

$$V = \left\{ \psi \in H^1_{\#}(Y), \quad \int_Y \psi = 0 \right\} \tag{3}$$

On pose

$$a(u,v) = \int_Y A\nabla u \nabla v, \quad l(v) = -\int_Y A e_i \nabla v \tag{4}$$

On a bien $a(u,v)$ et $l(v)$ (bi)linéaires. Montrons que $a(u,v)$ continue

$$\begin{aligned}
\big|a(u,v)\big| &= \left|\int_Y A\nabla u \nabla v\right| && (5)\\
&\leq ||A\nabla u||_{L^2} \, ||\nabla v||_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} \quad (6)\\
&\leq \beta \, ||\nabla u||_{L^2} \, ||\nabla v||_{L^2} && \text{A bornée} \quad (7)\\
&\leq \beta \, ||u||_{H^1_{\#}} \, ||v||_{H^1_{\#}} && ||\cdot||_{L^2} < ||\cdot||_{H^1_{\#}} \quad (8)\\
& && (9)
\end{aligned}$$

Montrons que $l(v)$ est continue

$$\begin{aligned}
\left|l(v)\right| &= \left|\int_Y Ae_i \nabla v\right| && \text{définition} && (10)\\
&\leq \left|\left|Ae_i\right|\right|_{L^2} \left|\left|\nabla v\right|\right|_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} && (11)\\
&\leq \beta_i \left|\left|\nabla v\right|\right|_{L^2} && A \text{ bornée, donc } Ae_i \text{ aussi} && (12)\\
&\leq \eta_i \left|\left|v\right|\right|_{H^1_\#} && \left|\left|\cdot\right|\right|_{L^2} < \left|\left|\cdot\right|\right|_{H^1_\#} && (13)
\end{aligned}$$

Montrons que $a(u,v)$ est coercive

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_Y A\nabla u \nabla u && && (14)\\
&\geq \xi \int_Y \nabla u^2 && A \text{ minorée par } \xi && (15)\\
&\geq \xi \left|\left|\nabla u\right|\right|^2_{L^2} && && (16)\\
&\geq \zeta \left|\left|u\right|\right|^2_{H^1_\#} && \text{Pointcaré dans } V && (17)
\end{aligned}$$

avec $\zeta = \frac{\xi}{(C^2+1)}$, C étant la constante de poincaré associée à V.

Question 2. *De même pour le problème modifié*

Soit $\eta > 0$. Trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \int_Y A\nabla u \nabla v + \eta \int_Y uv = -\int_Y Ae_i \nabla v \tag{18}$$

On pose

$$a(u,v) = \int_Y A\nabla u \nabla v + \eta \int_Y uv \quad l(v) = -\int_Y Ae_i \nabla v \tag{19}$$

On remarque que $l(v)$ reste la même que dans la question 1, il n'est donc pas nécéssaire de refaire les calculs.

Montrons que a est toujours continue sous cette forme :

$$\begin{aligned}
\left|a(u,v)\right| &\leq \left|\int_Y A\nabla u \nabla v\right| + \eta \left|\int_Y uv\right| && \text{ineg. triang} && (20)\\
&\leq \left|\left|A\nabla u\right|\right|_{L^2} \left|\left|\nabla v\right|\right|_{L^2} + \eta \left|\left|u\right|\right|_{L^2} \left|\left|v\right|\right|_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} && (21)\\
&\leq \beta \left|\left|\nabla u\right|\right|_{L^2} \left|\left|\nabla v\right|\right|_{L^2} + \eta \left|\left|u\right|\right|_{L^2} \left|\left|v\right|\right|_{L^2} && \text{A bornée} && (22)\\
&\leq \beta \left|\left|u\right|\right|_{H^1_\#} \left|\left|v\right|\right|_{H^1_\#} + \eta \left|\left|u\right|\right|_{H^1_\#} \left|\left|v\right|\right|_{H^1_\#} && \left|\left|\cdot\right|\right|_{L^2} < \left|\left|\cdot\right|\right|_{H^1_\#} && (23)\\
&\leq (\beta + \eta) \left|\left|u\right|\right|_{H^1_\#} \left|\left|v\right|\right|_{H^1_\#} && && (24)
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que a est toujours coercive

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_Y A\nabla u \nabla u + \eta \int_Y u^2 && && (25)\\
&\geq \xi \int_Y \nabla u^2 + \eta \left|\left|u\right|\right|^2_{L^2} && A \text{ minorée par } \xi. && (26)\\
&\geq \xi \left|\left|\nabla u\right|\right|^2_{L^2} + \eta \left|\left|u\right|\right|^2_{L^2} && && (27)\\
&\geq \zeta \left|\left|u\right|\right|^2_{H^1_\#} + \eta \left|\left|u\right|\right|^2_{L^2} && \text{Poincaré dans } V && (28)\\
&\left(\geq \zeta \left|\left|u\right|\right|^2_{H^1_\#}\right) && && (29)
\end{aligned}$$

avec $\zeta = \frac{\xi}{(C^2+1)}$. Quand η tend vers zéro on retrouve le resultat de la question 1. En considérant $V = \mathrm{Vect}\big(\{\omega_I\}_{1,N}\big)$, la matrice élements finis $\mathbb{A}^\eta$ qu'on écrit donc

$$\mathbb{A}^\eta = \mathbb{K} + \eta\mathbb{M} \tag{30}$$

avec

$$\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \mathbb{K}_{IJ} = \int A\nabla\omega_I\nabla\omega_J, \tag{31}$$

$$\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \mathbb{M}_{IJ} = \int \omega_I\omega_J, \tag{32}$$

tend vers la matrice $\mathbb{K}$ quand η tend vers 0 avec une vitesse *a priori* proportionelle à η.

Question 3. *Montrer que* $\forall i \in \{1,2\}, \exists C > 0$ *tq* $||\omega_i - \omega_i^\eta||_{H^1} < C\eta$.
En sommant Equation 2 et Equation 18, on a

$$\int_Y A\nabla\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\nabla\phi = \eta\int_Y \omega_i^\eta\phi \tag{33}$$

or $\omega_i - \omega_i^\eta \in H^1_\#$, donc on peut choisir $\phi = \omega_i - \omega_i^\eta$:

$$\int_Y A\big(\nabla\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\big)^2 = \eta\int_Y \omega_i^\eta\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big) \tag{34}$$

$$\left|\int_Y A\nabla\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\nabla\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\right| = \left|\eta\int_Y \omega_i^\eta\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\right| \qquad \text{valeur absolue} \tag{35}$$

$$\xi\,\big|\big|\nabla\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\big|\big|_{L^2}^2 \leq \eta\,||\omega_i^\eta||_{L^2}\,\big|\big|\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\big|\big|_{L^2} \qquad \text{Cauchy-Schwarz et } ||Au|| \geq \xi\,||u|| \tag{36}$$

$$\xi(D^2+1)\,\big|\big|\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\big|\big|_{H^1}^2 \leq ||\omega_i^\eta||_{H^1}\,\eta\,\big|\big|\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\big|\big|_{H^1} \qquad \text{Poincaré et } ||\cdot||_{L^2} < ||\cdot||_{H^1_\#} \tag{37}$$

$$\big|\big|\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\big|\big|_{H^1} \leq \eta\frac{||\omega_i^\eta||_{H^1}}{\xi(D^2+1)} \tag{38}$$

Si on borne η par le haut, c'est à dire qu'on travaille sur un interval fini $I_\eta \subset \mathbb{R}$, comme le problème est bien posé pour tous ces η, on pose

$$\gamma = \sup_{\eta\in I_\eta} ||\omega_i^\eta||_{H^1} \tag{39}$$

et on récupère

$$\big|\big|\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\big|\big|_{H^1} \leq C\eta \tag{40}$$

avec $C = \frac{\gamma}{\xi(D^2+1)}$.

3.2 Discrétisation des problèmes de cellule

Question 4. *Assembler la matrice EF*

3.3 Première validation

Question 7. *Trouver une soluation exacte à Equation 2 avec* $A = Id$.
On a directement que

$$\int_Y \big(\nabla\omega_i - e_i\big)\nabla\phi = 0 \quad \forall\phi \in V, \forall i \in \{1,2\} \tag{41}$$

or ces fonctions étant suffisamment continues, cela implique que

$$\nabla\omega_i + e_i = 0 \quad \forall i \in \{1,2\}. \tag{42}$$

Pour $i = 1$,

$$\begin{cases} \partial_{y_1}\omega_1 = -1 \\ \partial_{y_2}\omega_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \omega_1 = -y_1 + C(y_2) \\ \partial_{y_2}\omega_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \omega_1 = -y_1 + C(y_2) \\ \partial_{y_2}C(y_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \omega_1 = -y_1 + C \\ C \text{ constante} \end{cases} \tag{43}$$

de plus on impose que l'intégrale soit nulle sur $[0,1]$, d'ou $C = 1/2$. De même pour $i = 2$. On a donc

$$\omega_i = -y_i + \tfrac{1}{2} \quad \forall i \in \{1,2\}. \tag{44}$$

Question 8. *De même pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vu la forme de A, on a immédiatement que ω_1 reste inchangé. En revanche, on retrouve aisément $\omega_2 = -2y_2 + 1$.