# Rapport TP X01
# TP1

Aurélien Valade

## Intruction et structure du code

Le but de ce TP est de résoudre le problème suivant : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} u - \nabla\big(A(x,y)\nabla u\big) = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

La structure du code ainsi que l'arrangement des dossiers ont été un peu modifiés. Tous les `*.msh` se trouvent dans le dossier `geoms/` avec un executable `bash` pour en créer à volonté.

De plus, le corps de la routine principale se trouve maintenant dans `principal_neumann_aux.m`, cependant le fichier script est toujours bien `principal_neumann.m`.

Un code de calcul formel rédigé en python a été ajouté.

Dans la suite, les intégrale dont le domaine n'est pas précisé portent sur tout $\Omega$.

## Q1

Soit $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

$$\int_\Omega uv - \int_\Omega \nabla\big(A(x,y)\nabla u\big)v = \int_\Omega fv \qquad IPP \tag{2}$$

$$\int_\Omega uv - \int_{\partial\Omega} \big(A(x,y)\nabla u\big)v + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \qquad CL \tag{3}$$

$$\int_\Omega uv + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \tag{4}$$

$$a(u,v) = l(v) \tag{5}$$

On a bien $a(u,v)$ et $l(v)$ (bi)linéaires. Montrons que $a(u,v)$ continue

$$|a(u,v)| \leq \left|\int A\nabla u \nabla v\right| + \left|\int uv\right| \qquad \text{ineg. triang} \tag{6}$$

$$\leq \beta \left|\int \nabla u \nabla v\right| + \left|\int uv\right| \qquad \text{A bornée} \tag{7}$$

$$\leq \beta \left|\left|\nabla u\right|\right|_{L^2} \left|\left|\nabla v\right|\right|_{L^2} + \left|\left|u\right|\right|_{L^2} \left|\left|v\right|\right|_{L^2} \qquad \text{Cauchy Schwarz} \tag{8}$$

$$\leq \beta \left|\left|\nabla u\right|\right|_{H_0^1} \left|\left|\nabla v\right|\right|_{H_0^1} + \left|\left|u\right|\right|_{H_0^1} \left|\left|v\right|\right|_{H_0^1} \qquad \left|\left|\cdot\right|\right|_{L^2} < \left|\left|\cdot\right|\right|_{H_0^1} \tag{9}$$

$$\leq (\beta + 1) \left|\left|\nabla u\right|\right|_{H_0^1} \left|\left|\nabla v\right|\right|_{H_0^1} \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

On a évidement $l(v)$ continue comme $f, v \in H_0^1(\Omega)$.

Montrons que $a(u,v)$ est coercive

$$|a(u,u)| \geq \left|\int A(\nabla u)^2\right| + \left|\int u^2\right| \tag{12}$$
$$\geq \max(A)\left|\int (\nabla u)^2\right| + \left|\int u^2\right| \tag{13}$$
$$\geq \xi\left|\int (\nabla u)^2\right| + \left|\int u^2\right| \tag{14}$$
$$\geq \min(\xi,1)\,||u||_{H_0^1} \tag{15}$$

# Q2

On onsidère uniquement $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ de dimension finie, donc entièrement décrit par sa base $(\omega_I)_{1\leq I\leq N}$. Le problème se ramène donc à

$$a(u,\omega_I) = l(\omega_I) \quad \forall 1 \leq I \leq N. \tag{16}$$

Si on projète $u$ sur la base des $(\omega_I)$ :

$$u_h = \sum_1^N u_h^I \omega_I \tag{17}$$

on retrouve le problème variationel entièrement discrétisé :

$$\sum_J u_h^J a(\omega_I,\omega_J) = l(\omega_I) \quad \forall 1 \leq J \leq N. \tag{18}$$

En posant les matrices et les vecteurs:

$$U \in \mathbb{R}^N, \quad U_I = u_h^I, \tag{19}$$
$$L \in \mathbb{R}^N, \quad L_I = \int f\omega_I, \tag{20}$$
$$\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \mathbb{K}_{IJ} = \int A\nabla\omega_I\nabla\omega_J, \tag{21}$$
$$\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \mathbb{M}_{IJ} = \int \omega_I\omega_J, \tag{22}$$

on peut écrire le système sous forme matricielle :

$$(\mathbb{M}+\mathbb{K})U = L. \tag{23}$$

# Q3-Q4-Q5-Q6

On peut se ramener à un problème de taille $N^0 = \dim(V_h^0)$ en considérant la matrice

$$\mathbb{A} = \mathbb{M}+\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N\times N} \tag{24}$$
$$\mathbb{A}^0 \in \mathbb{R}^{N^0\times N^0} \tag{25}$$
$$\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{N^0\times N} \tag{26}$$
$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^T,\ L^0 = \mathbb{P}L,\ U^0 = \mathbb{P}U \tag{27}$$

On construit la matrice $\mathbb{P}$ de la manière suivante

$$\mathbb{P} = Id_N \text{ privée des lignes } i < N \text{ telles que } Refneu(i) \neq 0. \tag{28}$$

Une fois le système $\mathbb{A}^0U^0 = L^0$ inversé, on peut retrouver $U$ par la formule $U = \mathbb{P}^TU^0$.

## Q7

En utilisant le code de calcul formel, on trouve que

$$f(x,y) = (1+5\pi^2)\cos(\pi x)\cos(2\pi y) \quad \forall x,y \in \Omega. \tag{29}$$

## Q8

Pour toute fonction

$$u = \sum_I u\big(S(I)\big)\omega_I \tag{30}$$

$$U = \big(u(S(I))\big)_I \in \mathbb{R}^N \tag{31}$$

on a que

$$\begin{aligned} ||u||^2_{L^2} &= \langle u, u\rangle && (32)\\ &= \sum_I \sum_J U_I U_J \langle \omega_I, \omega_J\rangle && (33)\\ &= \sum_I \sum_J U_I U_J \mathbb{M}_{IJ} && (34)\\ &= U^T \mathbb{M} U \geq 0 \quad \text{car } \mathbb{M} \text{ définie positive,} && (35) \end{aligned}$$

et de même

$$||u||^2_{\text{semi } H^1_0} = \big|U^T \mathbb{K} U\big|. \tag{36}$$

On peut donc lancer le programme et calculer les erreurs normalisées

$$err_{L^2} = \frac{||u_h - \pi_h u||_{L^2}}{||\pi_h u||_{L^2}} \tag{37}$$

$$err_{\text{semi } H^1_0} = \frac{||u_h - \pi_h u||_{\text{semi } H^1_0}}{||\pi_h u||_{\text{semi } H^1_0}} \tag{38}$$

tracées en Figure 1

Pour ce qui du calcul de la fonction $f(x,y)$, grace au code python de calcul formel, on peut trouver que pour

$$A(x,y) = \sin(\alpha\pi x)\sin(\alpha\pi y) + 2 \tag{39}$$

et si on veut garder comme solution

$$u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y) \tag{40}$$

il faut poser

$$\begin{aligned} f(x,y) = \quad & -2\pi^2\alpha\sin(\pi x)\sin(\pi\alpha x)\cos(2\pi y)\cos(\pi\alpha y) - \\ & \pi^2\alpha\sin(2\pi y)\sin(\pi\alpha y)\cos(\pi x)\cos(\pi\alpha x) + \\ & 5\pi^2(\sin(\pi\alpha x)\sin(\pi\alpha y) + 2)\sin(\pi x)\sin(2\pi y) + \\ & \sin(\pi x)\sin(2\pi y). \end{aligned} \tag{41}$$

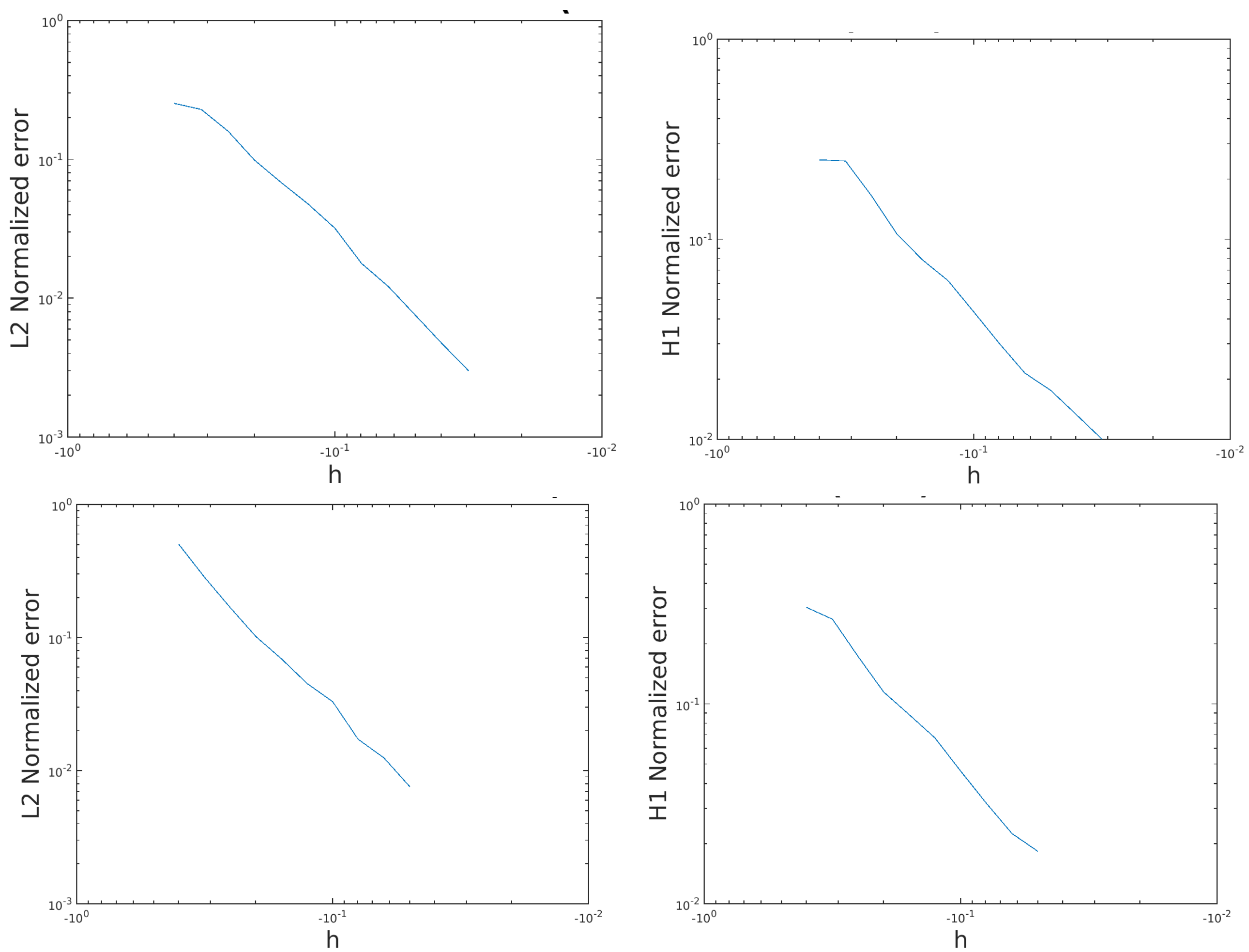


Figure 1: Erreur normalisée pour la norme L2 et erreur normalisée pour la norme H1 pour un problème de dirichlet avec A constante (haut), A variable (bas).

## Q8

Montrons que le problème $a(u,v) = l(u) \quad \forall v \in V^h_{\#}$ est bien posé dans

$$H^1_{\#}(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega), \text{tq } f \text{ est } L \text{ périodique} \right\} \tag{42}$$

Montrons d'abord que $a$ est continue

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \left| \int A\nabla u \nabla v \right| + \left| \int uv \right| && \text{ineg. triang} && (43)\\
&\leq \beta \left| \int \nabla u \nabla v \right| + \left| \int uv \right| && \text{A bornée} && (44)\\
&\leq \beta \left|\left|\nabla u\right|\right|_{L^2} \left|\left|\nabla v\right|\right|_{L^2} + \left|\left|u\right|\right|_{L^2} \left|\left|v\right|\right|_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} && (45)\\
&\leq \beta \left|\left|\nabla u\right|\right|_{H^1_{\#}} \left|\left|\nabla v\right|\right|_{H^1_{\#}} + \left|\left|u\right|\right|_{H^1_{\#}} \left|\left|v\right|\right|_{H^1_{\#}} && \left|\left|\cdot\right|\right|_{L^2} < \left|\left|\cdot\right|\right|_{H^1_{\#}} && (46)\\
&\leq (\beta + 1) \left|\left|\nabla u\right|\right|_{H^1_{\#}} \left|\left|\nabla v\right|\right|_{H^1_{\#}} && && (47)\\
& && && (48)
\end{aligned}$$

On a évidement $l(v)$ continue comme $f, v \in H^1_{\#}(\Omega)$.
Montrons que $a(u,v)$ est coercive

$$\begin{aligned}
|a(u,u)| &\geq \left| \int A(\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| && (49)\\
&\geq \max(A) \left| \int (\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| && (50)\\
&\geq \xi \left| \int (\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| && (51)\\
&\geq \min(\xi, 1) \left|\left|u\right|\right|_{H^1_{\#}} && (52)
\end{aligned}$$

## Q9

On peut se ramener à un problème dans $V_h^{\#}$ en considérant la matrice

$$\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N} \tag{53}$$

$$\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ inversible} \tag{54}$$

$$\mathbb{A}^{\#} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}^{\#}\mathbb{P}, \ L^{\#} = \mathbb{P}^{-1}L, \ U^{\#} = \mathbb{P}^{-1}U \tag{55}$$

On construit la matrice $\mathbb{P}$ de la manière suivante

$$\forall I, J \in [1, N]^2 \quad \mathbb{P}_{IJ} = \begin{cases} 4\delta_{IJ} & \text{si } S(I) \text{ est sur un angle} \\ 2\delta_{IJ} & \text{si } S(I) \text{ est sur un bord} \\ \delta_{IJ} & \text{sinon} \end{cases} \tag{56}$$

Une fois le système $\mathbb{A}^0 U^0 = L^0$ inversé, on peut retrouver $U$ par la formule $U = \mathbb{P}^{-1}U^{\#}$.

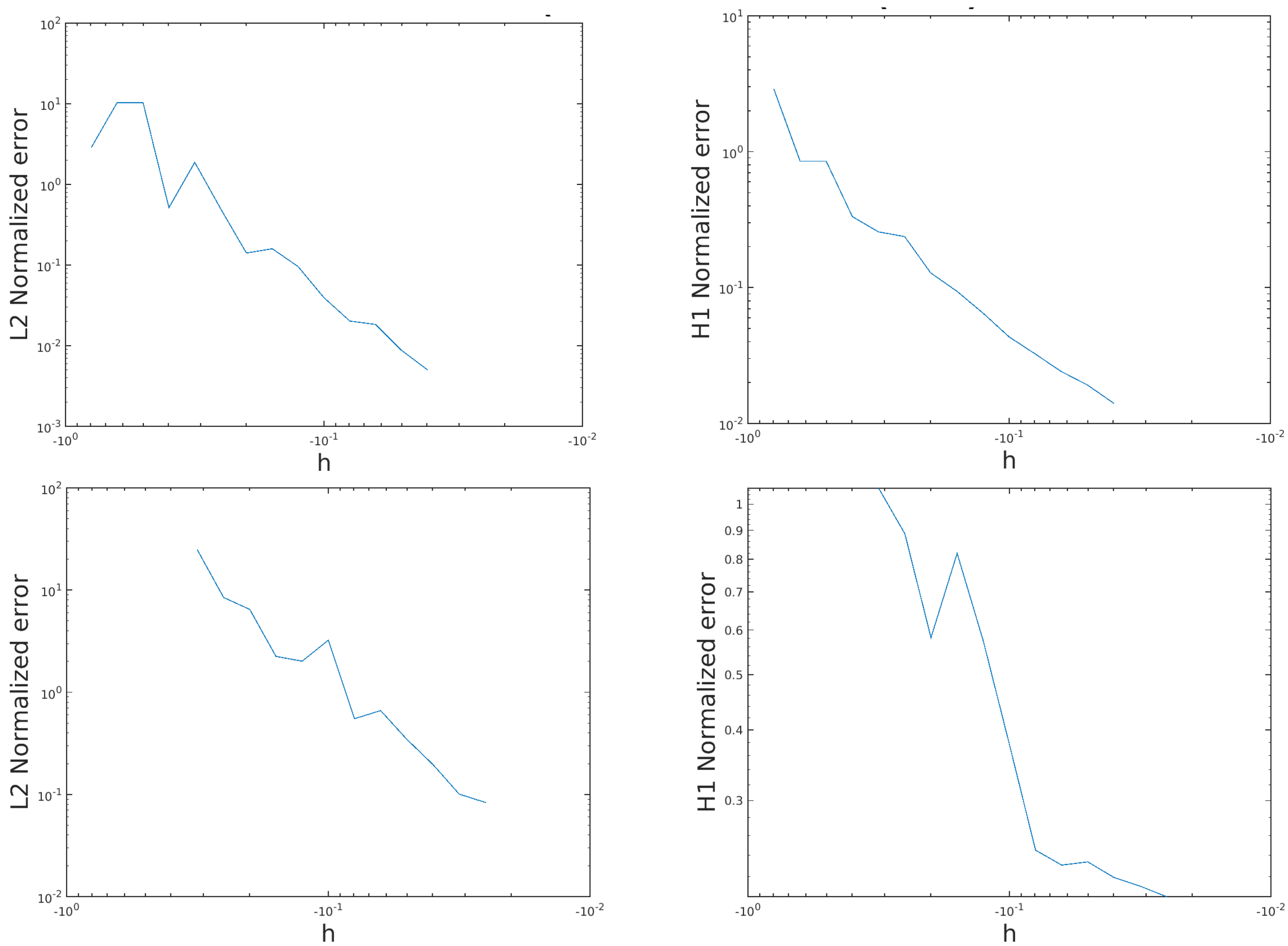


Figure 2: Erreur normalisée pour la norme L2 et erreur normalisée pour la norme H1 pour un problème périodique avec A constante (haut), A variable (bas)

# Q10

Pour ce qui du calcul de la fonction $f(x, y)$, grace au code python de calcul formel, on peut trouver que pour

$$A(x, y) = \sin(\alpha\pi x)\sin(\alpha\pi y) + 2 \tag{57}$$

et si on veut garder comme solution

$$u(x, y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y) \tag{58}$$

il faut poser

$$\begin{aligned} f(x, y) = \; & \pi^2\alpha\sin(\pi x)\sin(\pi\alpha y)\cos(2\pi y)\cos(\pi\alpha x) - \\ & 2\pi^2\alpha\sin(2\pi y)\sin(\pi\alpha x)\cos(\pi x)\cos(\pi\alpha y) + \\ & 5\pi^2(\sin(\pi\alpha x)\sin(\pi\alpha y) + 2)\cos(\pi x)\cos(2\pi y) + \\ & \cos(\pi x)\cos(2\pi y). \end{aligned} \tag{59}$$