Rapport TP X01
TP3

Aurélien Valade

1 Intruction et structure du code

Le but de ce TP est de résoudre le problème suivant : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla\big(A(x,y)\nabla u\big) = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

La structure du code ainsi que l'arrangement des dossiers ont été un peu modifiés. Tous les `*.msh` se trouvent dans le dossier `geoms/` avec un executable `bash` pour en créer à volonté.

De plus, le corps de la routine principale se trouve maintenant dans `principal_dirichlet_aux.m`, cependant le fichier script est toujours bien `principal_dirichlet.m`.

Un code de calcul formel rédigé en python a été ajouté.

2 Solution exacte

3 Solution au problème homogénéisé

3.1 Les problèmes de cellule

Question 1. *Montrer que le problème suivant est bien posé:*
Trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \int_Y A\nabla u \nabla v = -\int_Y A e_i \nabla v \tag{2}$$

avec

$$V = \left\{ \psi \in H^1_\#(Y), \qquad \int_Y \psi = 0 \right\}$$

On pose

$$(u,v) = \int_Y A\nabla u \nabla v, \quad l(v) = -\int_Y A e_i \nabla v$$

On a bien $a(u,v)$ et $l(v)$ (bi)linéaires. Montrons que $a(u,v)$ continue

$$\begin{aligned}
\big|a(u,v)\big| &= \left| \int_Y A\nabla u \nabla v \right| \\
&\leq ||A\nabla u||_{L^2} \, ||\nabla v||_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} \\
&\leq \beta \, ||\nabla u||_{L^2} \, ||\nabla v||_{L^2} && \text{A bornée} \\
&\leq \beta \, ||u||_{H^1_\#} \, ||v||_{H^1_\#} && ||\cdot||_{L^2} < ||\cdot||_{H^1_\#}
\end{aligned}$$

Montrons que $l(v)$ est continue

$$\begin{aligned}
\left|l(v)\right| &= \left|\int_Y Ae_i \nabla v\right| && \text{définition} \\
&\leq \left|\left|Ae_i\right|\right|_{L^2}\left|\left|\nabla v\right|\right|_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} \\
&\leq \beta_i \left|\left|\nabla v\right|\right|_{L^2} && A \text{ bornée, donc } Ae_i \text{ aussi} \\
&\leq \eta_i \left|\left|v\right|\right|_{H^1_\#} && \left|\left|\cdot\right|\right|_{L^2} < \left|\left|\cdot\right|\right|_{H^1_\#}
\end{aligned}$$

Montrons que $a(u,v)$ est coercive

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_Y A\nabla u \nabla u \\
&\geq \xi \int_Y \nabla u^2 && A \text{ minorée par } \xi \\
&\geq \xi \left|\left|\nabla u\right|\right|^2_{L^2} \\
&\geq \zeta \left|\left|u\right|\right|^2_{H^1_\#} && \text{Pointcaré dans } V
\end{aligned}$$

avec $\zeta = \frac{\xi}{(C^2+1)}$, C étant la constante de poincaré associée à V.

Question 2. *De même pour le problème modifié*
Soit $\eta > 0$. Trouver $u \in H^1_\#$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \int_Y A\nabla u \nabla v + \eta \int_Y uv = -\int_Y Ae_i \nabla v \tag{3}$$

On pose

$$a(u,v) = \int_Y A\nabla u \nabla v + \eta \int_Y uv, \qquad l(v) = -\int_Y Ae_i \nabla v$$

On note qu'en prenant $\phi = 1$, on montre que u est d'intrale nulle. Donc si $u \in H^1_\#$ résout Equation 3 alors $u \in V$, et respecte donc Poincaré.
On remarque aussi que $l(v)$ reste la même que dans la question 1, il n'est donc pas nécéssaire de refaire les calculs.

Montrons que a est toujours continue sous cette forme :

$$\begin{aligned}
\left|a(u,v)\right| &\leq \left|\int_Y A\nabla u \nabla v\right| + \eta \left|\int_Y uv\right| && \text{ineg. triang} \\
&\leq \left|\left|A\nabla u\right|\right|_{L^2}\left|\left|\nabla v\right|\right|_{L^2} + \eta \left|\left|u\right|\right|_{L^2}\left|\left|v\right|\right|_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} \\
&\leq \beta \left|\left|\nabla u\right|\right|_{L^2}\left|\left|\nabla v\right|\right|_{L^2} + \eta \left|\left|u\right|\right|_{L^2}\left|\left|v\right|\right|_{L^2} && \text{A bornée} \\
&\leq \beta \left|\left|u\right|\right|_{H^1_\#}\left|\left|v\right|\right|_{H^1_\#} + \eta \left|\left|u\right|\right|_{H^1_\#}\left|\left|v\right|\right|_{H^1_\#} && \left|\left|\cdot\right|\right|_{L^2} < \left|\left|\cdot\right|\right|_{H^1_\#} \\
&\leq (\beta + \eta) \left|\left|u\right|\right|_{H^1_\#}\left|\left|v\right|\right|_{H^1_\#}
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que a est toujours coercive

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_Y A\nabla u \nabla u + \eta \int_Y u^2 \\
&\geq \xi \left|\left|\nabla u\right|\right|^2_{L^2} + \eta \left|\left|u\right|\right|^2_{L^2} \\
&\geq \zeta \left|\left|u\right|\right|^2_{H^1_\#} + \eta \left|\left|u\right|\right|^2_{L^2} && \text{Poincaré dans } V \\
&\left(\geq \zeta \left|\left|u\right|\right|^2_{H^1_\#}\right)
\end{aligned}$$

avec $\zeta = \frac{\xi}{(C^2+1)}$. Quand η tend vers zéro on retrouve le resultat de la question 1. En considérant $V = \text{Vect}\big(\{\omega_I\}_{1,N}\big)$, la matrice élements finis $\mathbb{A}^\eta$ qu'on écrit donc

$$\mathbb{A}^\eta = \mathbb{K} + \eta\mathbb{M}$$

avec

$$\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \mathbb{K}_{IJ} = \int A\nabla\omega_I\nabla\omega_J, \mathbb{M} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \mathbb{M}_{IJ} = \int \omega_I\omega_J$$

tend vers la matrice $\mathbb{K}$ quand η tend vers 0 avec une vitesse *a priori* proportionelle à η.

Question 3. *Montrer que* $\forall i \in \{1,2\}, \exists C > 0$ *tq* $||\omega_i - \omega_i^\eta||_{H^1} < C\eta$.
En sommant Equation 2 et Equation 3, on a

$$\int_Y A\nabla\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\nabla\phi = \eta\int_Y \omega_i^\eta\phi$$

or $\omega_i - \omega_i^\eta \in V$, donc on peut choisir $\phi = \omega_i - \omega_i^\eta$:

$$\begin{aligned}
\int_Y A\big(\nabla\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\big)^2 &= \eta\int_Y \omega_i^\eta\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big) \\
\left|\int_Y A\nabla\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\nabla\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\right| &= \left|\eta\int_Y \omega_i^\eta\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\right| && \text{valeur absolue} \\
\xi\,\big|\big|\nabla\big(\omega_i - \omega_i^\eta\big)\big|\big|_{L^2}^2 &\leq \eta\,||\omega_i^\eta||_{L^2}\,||\omega_i - \omega_i^\eta||_{L^2} && \text{Cauchy-Schwarz et } A\ \xi\text{-coercitive} \\
\xi(D^2+1)\,||\omega_i - \omega_i^\eta||_{H^1}^2 &\leq \eta\,||\omega_i^\eta||_{H^1}\,||\omega_i - \omega_i^\eta||_{H^1} && \text{Poincaré et } ||\cdot||_{L^2} < ||\cdot||_{H^1_\#} \\
||\omega_i - \omega_i^\eta||_{H^1} &\leq \eta\frac{||\omega_i^\eta||_{H^1}}{\xi(D^2+1)}
\end{aligned}$$

On peut montrer que $||\omega_i^\eta||_{H^1}$ est majorée en prenant l'Equation 3 avec $\phi = \omega_i^\eta$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_Y A\nabla\omega_i^\eta\nabla\omega_i^\eta + \eta\int_Y \big(\omega_i^\eta\big)^2\right| &= \left|\int_Y Ae_i\nabla\omega_i^\eta\right| \\
\left|\int_Y A\nabla\omega_i^\eta\nabla\omega_i^\eta\right| &\leq \left|\int_Y Ae_i\nabla\omega_i^\eta\right| && \text{Car } \eta\int_Y \big(\omega_i^\eta\big)^2 \geq 0 \\
\xi\,||\nabla\omega_i^\eta||_{L^2}^2 &\leq ||Ae_i||_{L^2}\,||\omega_i^\eta||_{L^2} && \text{Cauchy-Schwarz et } A\ \xi\text{-coercitive} \\
(D^2+1)\xi\,||\omega_i^\eta||_{H^1}^2 &\leq ||Ae_i||_{L^2}\,||\omega_i^\eta||_{H^1} && \text{Poincaré et } ||\cdot||_{L^2} < ||\cdot||_{H^1_\#} \\
||\omega_i^\eta||_{H^1} &\leq \frac{1}{(D^2+1)\xi}\,||Ae_i||_{L^2}
\end{aligned}$$

3.2 Discrétisation des problèmes de cellule

Question 4. *Assembler la matrice EF*

Question 5. *Calculer le second membre en se rappelant que* $\nabla y_i = e_i$.
On peut réécrire le second membre avec cette nouvelle propriété

$$\int_Y \big(A(y)e_i, \nabla\phi\big) = \int_Y \big(A(y)\nabla y_i, \nabla\phi\big) = a(y_i, \phi)$$

avec le a défini comme pour l'Equation 2. On pourra donc reprendre la matrice $\mathbb{K}$ pour calculer les vecteurs second membre L_i des équations discrétisées pour les différents problèmes de cellule :

$$L_i = (y_i^T\mathbb{K})^T \quad \forall i \in \{1,2\}.$$

3.3 Première validation

Question 7. *Trouver une solution exacte à Equation 2 avec $A = Id$.*
On a directement que

$$\begin{aligned}
& \int_Y (\nabla\omega_i + e_i)\nabla\phi = 0 \\
\iff & \int_{\partial Y} (\nabla\omega_i + e_i)\phi - \int_Y \nabla(\nabla\omega_i + e_i)\phi = 0 && \text{IPP} \\
\iff & \int_Y \Delta\omega_i\phi = 0 && \int_{\partial Y} ... = 0 \text{ car tout est périodique}^1 \\
\iff & \Delta\omega_i = 0 && \forall i \in \{1,2\}
\end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation on remarque la fonction nulle est solution. Or le problème Equation 2 étant bien posé, la solution est unique, donc on a bien

$$\omega_i = 0, \quad \forall i \in \{1,2\}.$$

Question 8. *De même pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.*
En applicant le même processus que précedemment,

$$\begin{aligned}
& \int_Y \big(A(\nabla\omega_i + e_i)\big)\nabla\phi = 0 \\
\iff & \int_Y \nabla\big(A(\nabla\omega_i + e_i)\big)\phi = 0 \\
\iff & \int_Y \nabla\big(A(\nabla\omega_i)\big)\phi = 0 \qquad \forall\phi \in V \\
\iff & \nabla\big(A(\nabla\omega_i)\big) = 0 \qquad \forall i \in \{1,2\}.
\end{aligned}$$

Avec la bonne forme de A on a

$$\partial^2_{y_1}\omega_i + 2\partial^2_{y_2}\omega_i = 0$$

dont la fonction nulle est encore solution, et donc on a $\omega_i = 0 \;\; \forall i \in \{1,2\}$.
Remarque : il en va de même de pour tout A ne dépendant pas de y, car il faut que $\nabla\omega_i = 0 \;\; \forall i \in \{1,2\}$ pour que l'Equation 4 donne $A^{hom} = A$.

$$A^{hom}_{jk} = \int_Y \big(A(y)(e_k + \nabla\omega_k(y)), e_j + \nabla\omega_j(y)\big)dy \qquad \forall 1 < i,j < 2 \tag{4}$$

Question 5. *A l'aide de matrices déjà assemblées, calculer la matrice A^{hom}.*
On peut en effet réutiliser la matrice de rigiditée précedemment constuite en remarquant que :

$$\begin{aligned}
A^{hom}_{jk} &= a(y_k + \omega_k, y_j + \omega_j) \\
A^{hom}_{jk} &= (Y_k + W_k)^T \mathbb{K}(Y_j + W_j) \qquad \forall 1 < i,j < 2
\end{aligned}$$

avec pour tout sommet $S(j), \quad 1 < j < N$

$$(Y_i)_j = S(j)_{y_i}$$

$$(W_i)_j = \omega_i(S(j))$$