

# Rapport TP X01

## TP1

Aurélien Valade

### INTRUCTION ET STRUCTURE DU CODE

Le but de ce TP est de résoudre le problème suivant : trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} u - \nabla(A(x, y)\nabla u) = f & \text{sur } \Omega \\ A(x, y)\nabla u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

La structure du code ainsi que l'arrangement des dossiers ont été un peu modifiés. Tous les `*.msh` se trouvent dans le dossier `geoms/` avec un executable `bash` pour en créer à volonté.

De plus, le corps de la routine principale se trouve maintenant dans `principal_neumann_aux.m`, cependant le fichier script est toujours bien `principal_neumann.m`.

L'intégralité du code se trouve dans le fichier joint `codeTP1.zip`.

### Q1

Soit  $\forall v \in H^1(\Omega)$ .

$$\int_{\Omega} uv - \int_{\Omega} \nabla(A(x, y)\nabla u)v = \int_{\Omega} fv \quad IPP \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} uv - \int_{\partial\Omega} (A(x, y)\nabla u)v + \int_{\Omega} A(x, y)\nabla u\nabla v = \int_{\Omega} fv \quad CL \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} A(x, y)\nabla u\nabla v = \int_{\Omega} fv \quad (4)$$

$$a(u, v) = l(v) \quad (5)$$

On a bien  $a(u, v)$  et  $l(v)$  (bi)linéaires. Montrons que  $a(u, v)$  continue

$$|a(u, v)| \leq \left| \int A\nabla u \nabla v \right| + \left| \int uv \right| \quad \text{ineg. triang} \quad (6)$$

$$\leq \beta \left| \int \nabla u \nabla v \right| + \left| \int uv \right| \quad \text{A bornée} \quad (7)$$

$$\leq \beta \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad \text{Cauchy Schwarz} \quad (8)$$

$$\leq \beta \|\nabla u\|_{H^1} \|\nabla v\|_{H^1} + \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \|\cdot\|_{L^2} < \|\cdot\|_{H^1} \quad (9)$$

$$\leq (\beta + 1) \|\nabla u\|_{H^1} \|\nabla v\|_{H^1} \quad (10)$$

$$(11)$$

On a évidemment  $l(v)$  continue comme  $f, v \in H^1(\Omega)$ .

Montrons que  $a(u, v)$  est coercive

$$|a(u, u)| \geq \left| \int A(\nabla u)^2 \right| + \left| \int (\nabla u)^2 \right| \quad (12)$$

$$\geq \max(A) \left| \int (\nabla u)^2 \right| + \left| \int (\nabla u)^2 \right| \quad (13)$$

$$\geq \xi \left| \int (\nabla u)^2 \right| + \left| \int (\nabla u)^2 \right| \quad (14)$$

$$\geq \min(\xi, 1) \|u\|_{H^1} \quad (15)$$

## Q2-Q3

On considère uniquement  $V_h \subset H^1(\Omega)$  de dimension finie, donc entièrement décrit par sa base  $(\omega_I)_{1 \leq I \leq N}$ . Le problème se ramène donc à

$$a(u, \omega_I) = l(\omega_I) \quad \forall 1 \leq I \leq N. \quad (16)$$

Si on projète  $u$  sur la base des  $(\omega_I)$  :

$$u_h = \sum_1^N u_h^I \omega_I \quad (17)$$

on retrouve le problème variationnel entièrement discréteisé :

$$\sum_J u_h^J a(\omega_I, \omega_J) = l(\omega_I) \quad \forall 1 \leq J \leq N. \quad (18)$$

En posant les matrices et les vecteurs:

$$U \in \mathbb{R}^N, \quad U_I = u_h^I, \quad (19)$$

$$L \in \mathbb{R}^N, \quad L_I = \int f \omega_I, \quad (20)$$

$$\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbb{K}_{IJ} = \int A \nabla \omega_I \nabla \omega_J, \quad (21)$$

$$\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbb{M}_{IJ} = \int \omega_I \omega_J, \quad (22)$$

on peut écrire le système sous forme matricielle :

$$(\mathbb{M} + \mathbb{K})U = L. \quad (23)$$

## Q5-Q6

Cf codes.

## Q7

CALCUL DE  $(\mathbb{M}_{IJ})$

Le produit des fonctions  $\omega_I \omega_J$  est dans  $\mathbb{P}^2$ , on utilisera donc la formule

$$\int_{T_l} F d\Omega = \frac{\mathcal{A}_l}{3} \left( F \left( \frac{S_1 + S_2}{2} \right) + F \left( \frac{S_1 + S_3}{2} \right) + F \left( \frac{S_2 + S_3}{2} \right) \right) \quad (24)$$

Pour les  $\mathbb{M}_{II}$ , en prenant le sommet  $I$  comme étant le sommet 1 sur la base locale, on a

$$\int_{\mathcal{T}_l} (\omega_I)^2 = \frac{1}{D^2} \int_x \int_y (y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3))^2 dxdy \quad (25)$$

$$= \frac{-D}{3} = \frac{\mathcal{A}_l}{6}. \quad (26)$$

Pour les  $\mathbb{M}_{IJ}$ , en prenant les sommets  $I, J$  comme étant respectivement les sommets 1, 2 dans la base locale, on a

$$\int_{\mathcal{T}_l} \omega_I \omega_J = \frac{1}{D^2} \int_x \int_y (y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3))(y_{31}(x - x_1) - x_{31}(y - y_1)) dxdy \quad (27)$$

$$= \frac{-D}{6} = \frac{\mathcal{A}}{12}. \quad (28)$$

En résumé

$$\mathbb{M}_{IJ} = \begin{cases} \frac{\mathcal{A}_l}{6} & \text{si } I = J \\ \frac{\mathcal{A}_l}{12} & \text{si } \exists l < L \text{ tq } S(I), S(J) \in \mathcal{T}_l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (29)$$

### CALCUL DE $(\mathbb{K}_{IJ})$

Le produit des fonctions  $\nabla \omega_I \nabla \omega_J$  est dans  $P^0$ , on utilise donc la formule

$$\int_{\mathcal{T}_l} F d\Omega = \frac{\mathcal{A}_l}{3} F \left( \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} \right) \quad (30)$$

Pour  $I = J$ , en prenant le sommet  $I$  comme étant le sommet 1 sur la base locale, on a

$$\int_{\mathcal{T}_l} (\nabla \omega_I)^2 = \frac{y_{23}^2 - x_{23}^2}{4\mathcal{A}_l} \quad (31)$$

et pour  $I \neq J$ , en prenant les sommets  $I, J$  comme étant respectivement les sommets 1, 2 dans la base locale, on a

$$\int_{\mathcal{T}_l} \nabla \omega_I \nabla \omega_J = \frac{y_{23}y_{31} - x_{23}x_{31}}{4\mathcal{A}_l} \quad (32)$$

En résumé

$$\mathbb{K}_{IJ} = \begin{cases} n_{i,1}n_{j,1} + n_{i,2}n_{j,2} & \text{si } \exists l < L \text{ tq } S(I), S(J) \in \mathcal{T}_l \text{ avec } i = loc(I), j = loc(J) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (33)$$

avec  $loc$  le changement de base global vers local, et  $n \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

$$n = \begin{pmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{pmatrix} \quad (34)$$

Q8

Cf codes

## Q9

Q9(A)

On a que

$$f = \sum_I \omega_I \quad (35)$$

donc

$$L_I = \sum_J \int_{\Omega} \omega_J \omega_I = \sum_J \mathbb{M}_{IJ} \quad \forall 1 \leq I \leq N. \quad (36)$$

Q9(B)

Dans le cas général,

$$\forall 1 \leq I \leq N, \quad L_I = \sum_J \pi_h f(S(J)) \int_{\Omega} \omega_I \omega_J \quad (37)$$

$$= \sum_J \pi_h f(S(J)) \mathbb{M}_{IJ} \quad (38)$$

$$\Leftrightarrow L = \mathbb{M}F. \quad (39)$$

ou  $F \in \mathbb{R}^N$  tel que  $F_i = \pi_h f(S(I))$ .

## Q10

En utilisant le code `calcul_f.py` de calcul formel présent dans le dossier TP1, on trouve que

$$f(x, y) = (1 + 5\pi^2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y) \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (40)$$

## Q11-12

Pour toute fonction

$$u = \sum_I u(S(I)) \omega_I \quad (41)$$

$$U = (u(S(I)))_I \in \mathbb{R}^N \quad (42)$$

on a que

$$\|u\|_{L^2}^2 = \langle u, u \rangle \quad (43)$$

$$= \sum_I \sum_J U_I U_J \langle \omega_I, \omega_J \rangle \quad (44)$$

$$= \sum_I \sum_J U_I U_J \mathbb{M}_{IJ} \quad (45)$$

$$= U^T \mathbb{M} U \geq 0 \quad \text{car } \mathbb{M} \text{ définie positive}, \quad (46)$$

et de même

$$\|u\|_{\text{semi } H^1}^2 = |U^T \mathbb{K} U|. \quad (47)$$

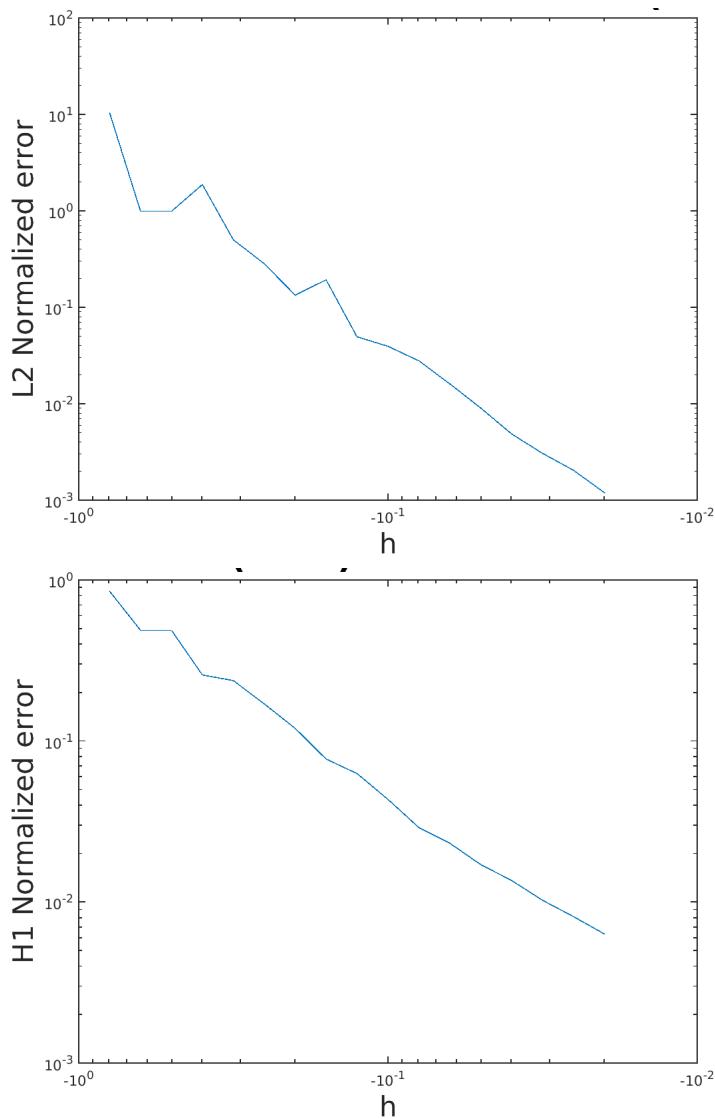


Figure 1: Erreur normalisée pour la norme L2 et erreur normalisée pour la norme H1 dans le cas A constant.

On peut donc lancer le programme et calculer les erreurs normalisées

$$err_{L^2} = \frac{\|u_h - \pi_h u\|_{L^2}}{\|\pi_h u\|_{L^2}} \quad (48)$$

$$err_{\text{semi } H^1} = \frac{\|u_h - \pi_h u\|_{\text{semi } H^1}}{\|\pi_h u\|_{\text{semi } H^1}} \quad (49)$$

tracées en [Figure 1](#)

## Q13-16

Cf codes commenté dans `matK_elem.m` et [Figure 2](#). Pour ce qui du calcul de la fonction  $f(x, y)$ , grace au code python de calcul formel, on peut trouver que pour

$$A(x, y) = (\sin(\alpha\pi x) \sin(\alpha\pi y) + 2) \quad (50)$$

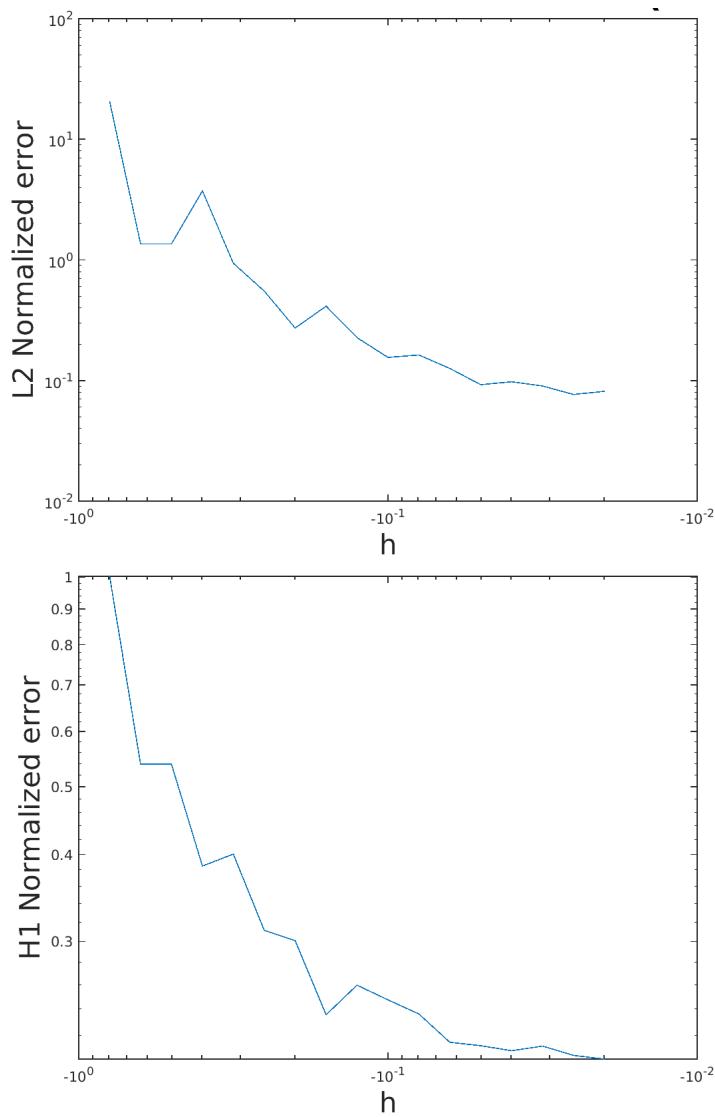


Figure 2: Erreur normalisée pour la norme L2 et erreur normalisée pour la norme H1 dans le cas A variable.

et si on veut garder comme solution

$$u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(2\pi y) \quad (51)$$

il faut poser

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \pi^2 \alpha \sin(\pi x) \sin(\pi \alpha y) \cos(2\pi y) \cos(\pi \alpha x) \\ & - 2\pi^2 \alpha \sin(2\pi y) \sin(\pi \alpha x) \cos(\pi x) \cos(\pi \alpha y) \\ & + 5\pi^2 (\sin(\pi \alpha x) \sin(\pi \alpha y) + 2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y) \\ & + \cos(\pi x) \cos(2\pi y) \end{aligned} \quad (52)$$

Q17

On remarque que plus \$\alpha\$ est grand, plus les solutions sont sensibles au pas \$h\$, ce qui est cohérent avec les conditions d'échantillonement des fonctions périodiques.