

Rapport TP X01

TP3

Aurélien Valade

1 Introduction et structure du code

Le but de ce TP est de résoudre le problème suivant :

Problème 1 (ε -problème). Soit $\varepsilon > 0$, soient A^ε , f^ε bien définies, trouver $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla(A^\varepsilon(x, x/\varepsilon)\nabla u^\varepsilon) = f^\varepsilon(x, x/\varepsilon) & \text{sur } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Remarque 1. On a $x = (x_1, x_1) \in \mathbb{R}^2$ et $x/\varepsilon \equiv y = (y_1, y_2) \in [0, 1]^2$ car les fonctions sont périodiques par rapport à leur seconde variable. Dans la suite on note $Y = [0, 1]^2$ la cellule élémentaire sur laquelle les coefficients de A^ε sont périodiques. Dans les cas où on ne travaille que sur une cellule on prend $\varepsilon = 1$ et on note $A := A^1$.

Problème 2. Trouver $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ solution du ε -problème 1 à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{cases} \nabla(A^{hom}(x)\nabla u^{hom}) = f^{hom}(x) & \text{sur } \Omega \\ u^{hom} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour cela nous allons d'abord calculer numériquement les solutions du problème 1 pour plusieurs valeurs de $\varepsilon > 0$. Dans un second temps nous introduirons les problèmes de cellules que nous résoudrons numériquement, puis nous pourrons enfin calculer la solution au problème 2.

La structure du code ainsi que l'arrangement des dossiers ont été un peu modifiés. Tous les *.msh pour les problèmes de Neumann ou Dirichlet se trouvent dans le dossier `geoms/` avec un exécutable `bash` pour en créer à volonté. Les *.msh pour les problèmes périodiques se trouvent eux dans le dossier `geoms_per/` de même qu'un script pour les générer. On trouve la première partie du TP dans le dossier `SolutionExacte/` et la seconde partie dans le dossier `SolutionPbHomogeneise/`.

De plus, le corps de la routine principale se trouve maintenant dans `principal_dirichlet_aux.m`, cependant le fichier script est toujours bien `principal_dirichlet.m`. La Table 1 répertorie l'ensemble des fonctions utilisées et explique rapidement leur détail.

2 Solution exacte

2.1 Discrétisation

Le but de cette partie est d'étudier la convergence effective des solutions numériques vers des solutions analytiques connues. Les résultats présentés ici sont calculés à partir des routines implémentées pour les TP précédents.

Nous allons donc résoudre le problème 1 en faisant varier A^ε et f^ε de paire de sorte à ce que la solution u soit connue et ne dépende pas de ε . L'ensemble des matrices de diffusion et leur seconds membres associés se trouvent en Table 2. Dans tous ces cas on calcule f^ε de sorte à ce que la solution soit

$$u^\varepsilon(x, y) = u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Fonction	Utilité
<code>principal_dirichlet</code>	Script principal
<code>principal_dirichlet_aux</code>	Construction des matrices \mathbb{K} , \mathbb{M} adaptées au problèmes, formation de la matrice de changement de base et résolution du macro-problème
<code>calc_A_homo</code>	Résolution des problèmes de cellule et constuction de A^{hom}
<code>A</code>	Retourne la matrice A^ε pour (y_1, y_2) donné
<code>f</code>	Retourne le second membre en un point (ou ensemble de points) (y_1, y_2) donné(s)
<code>matK_elem(_pbcell)</code>	Calcule la contribution d'une cellule à la matrice de rigidité (pour le problème de cellule)
<code>matM_elem</code>	Calcule la contribution d'une cellule à la matrice de masse

Table 1: Descriptif des fonctions employées

type	A^ε	f^ε
(i)	Id	$2\pi^2 \sin(\pi y_1) \sin(\pi y_2)$
(ii)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$3\pi^2 \sin(\pi y_1) \sin(\pi y_2)$
(iii)	$\begin{pmatrix} 2 + \sin(2\pi y_1) & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$2\pi^2(-2 \cos(\pi y_1) \cos(2\pi y_1) + \sin(\pi y_1) \sin(2\pi y_1) + 3 \sin(\pi y_1)) \sin(\pi y_2)$
(iv)	$\begin{pmatrix} 2 + \sin(2\pi y_1) & 0 \\ 0 & 4 + \sin(2\pi y_1) \end{pmatrix}$	$\pi^2(-4 \cos(\pi y_1) \cos(2\pi y_1) + 3 \sin(\pi y_1) \sin(2\pi y_1) + 6 \sin(\pi y_1)) \sin(\pi y_2)$
(v)	$(2 + \sin(2\pi y_1))(4 + \sin(2\pi y_2))$ Id	$4\pi^2(-(\sin(2\pi y_1) + 1) \sin(\pi y_1) \cos(\pi y_2) \cos(2\pi y_2) - (\sin(2\pi y_2) + 4) \sin(\pi y_2) \cos(\pi y_1) \cos(2\pi y_1) + (\sin(2\pi y_1) + 1)(\sin(2\pi y_2) + 4) \sin(\pi y_1) \sin(\pi y_2))$

Table 2: Matrices de diffusion et seconds membres associés.

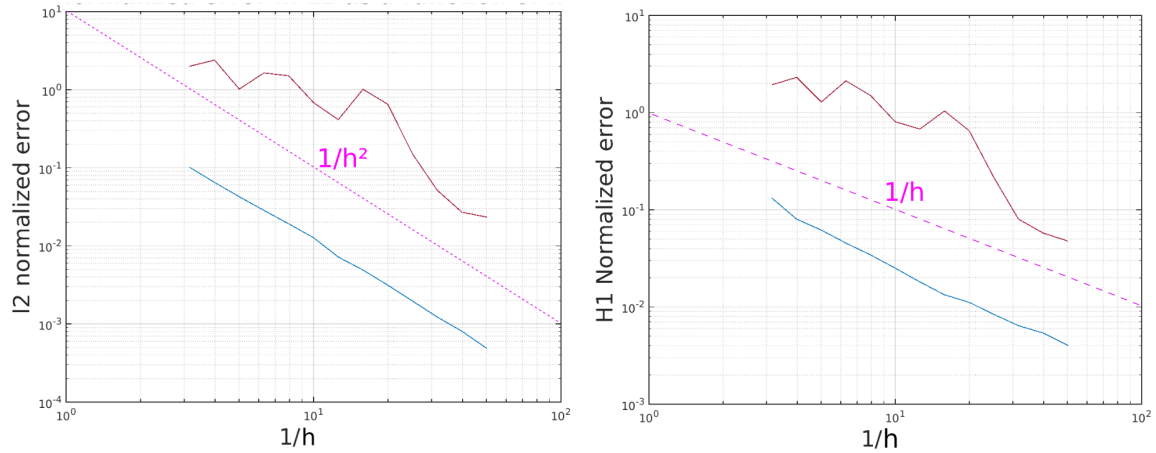


Figure 1: Erreurs L^2 et H^1 en fonction du pas du maillage pour $\varepsilon = 1$ en bleu et $\varepsilon = 1/20$ en rouge. On est ici dans le cas (iii), mais des courbes similaires sont obtenues dans les cas (iv) et (v).

2.2 Résultats

On observe tout d'abord que le code est quasi-exacte dès que la maillage est raisonnablement précis pour les cas (i) et (ii) où les matrices sont constantes, l'erreur L^2 et H^1 étant d'environ 10^{-30} . Dans les cas où A^ε est périodique et ε est assez grand pour que l'erreur soit bien résolue (cf. paragraphe suivant) l'erreur est bien plus grande mais décroît avec le maillage comme attendu c'est à dire

- en $1/h^2$ pour l'erreur L^2
- en $1/h$ pour l'erreur H^1

comme on peut le voir en **Figure 1**. En bleu on voit une courbe pour un ε où l'erreur est résolue alors qu'en rouge, pour un ε très faible, les courbes sont moins monotones.

On peut aussi observer un phénomène intéressant de résolution de l'erreur en fonction du maillage et de ε . Quand ε tend vers zéro, la période des oscillations passe sous la taille caractéristique des cellules h , et les oscillations attendues disparaissent comme le montre la **Figure 2**. Cela amène à des différences qualitatives entre solution numérique et solution exacte *i.e.* le profil de la solution numérique ne peut plus suivre le profil exact. Il est cependant difficile de repérer ce “décrochage” sur les courbes des erreurs L^2 et H^1 augmentent très rapidement en fonction de $1/\varepsilon$, puis que plus que linéairement dans un graphe log-log comme on peut le voir en **Figure 3**.

3 Solution au problème homogénéisé

3.1 Les problèmes de cellule

La difficulté mathématique à laquelle répond la méthode de l'homogénéisation est le passage du problème 1 au problème dit homogénéisé 2. Il faut notamment calculer les coefficients limites de A^{hom} et f^{hom} . Pour ce qui concerne f^{hom} , comme nous travaillons avec A^ε parfaitement périodique, on sait que l'on va avoir A^{hom} constant, et donc pour garder la solution

$$u^{hom}(x, y) = u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

il nous suffira de prendre

$$f^{hom} = \pi^2 \text{Tr}(A^{hom}) u(x, y).$$

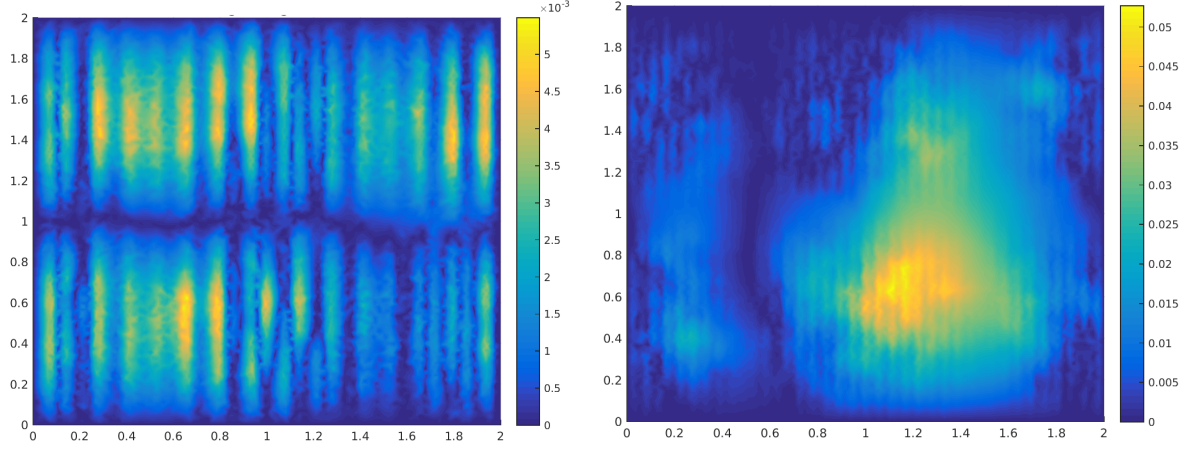


Figure 2: Différence entre solution numérique et exacte pour $\varepsilon = 1/7$ et $\varepsilon = 1/18$. Dans le premier cas on voit que les oscillations sont approximativement résolues, alors que dans le second cas on ne voit finalement que la moyenne de l'erreur sur plusieurs périodes. On a pour ces figures $h = 2.5 \cdot 10^{-2}$ et on est dans le cas (iii).

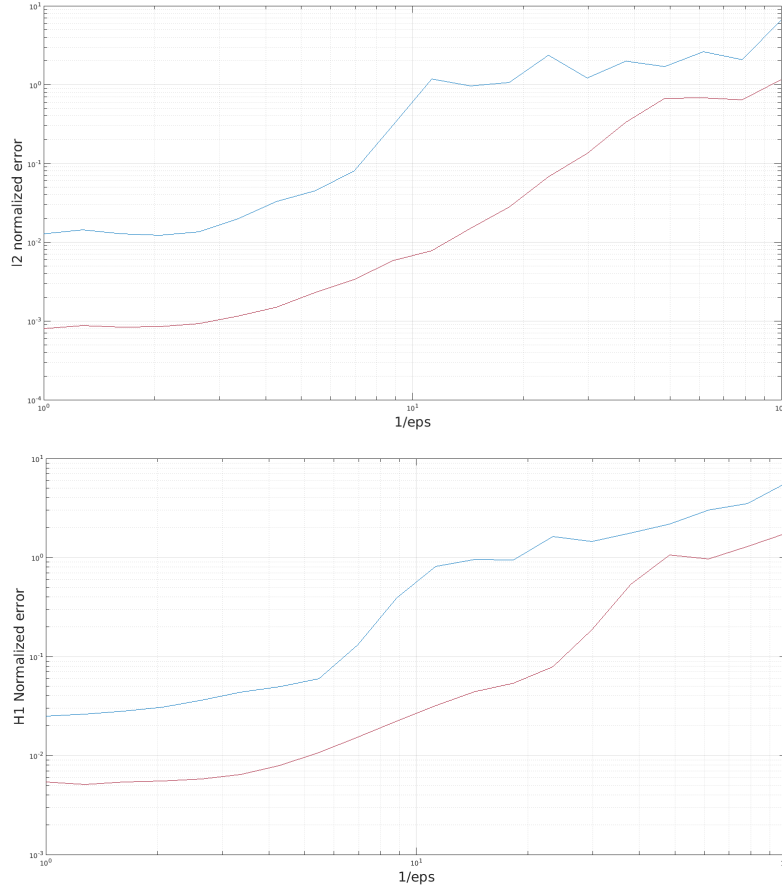


Figure 3: Erreurs L^2 (en haut) et H^1 (en bas) en fonction de la taille d'une cellule ε . On trace en bleu pour un maillage avec $h = 0.1$ et en rouge pour un second maillage avec $h = 0.02$. On est ici dans le cas (iii). Il est intéressant de noter que l'erreur relative diverge, et atteint sur ce graphe un facteur 10.

La difficulté est donc de calculer A^{hom} à partir de A . La théorie de l'homogénéisation nous dit que

$$A_{ij}^{hom} = \int_Y (A(e_j + \nabla w_j), e_i + \nabla w_i) \quad (1)$$

ou les $\{w_i\}_{1,2}$ sont les solutions aux problèmes de cellules référés dans le problème 3 sous leurs formes variationnelles.

Problème 3. Trouver $w_i \in V$ tels que $\forall i \in \{1, 2\}$

$$\forall \phi \in V, \quad \int_Y A \nabla w_i \nabla \phi = - \int_Y A e_i \nabla \phi \quad (2)$$

avec

$$V = \left\{ \psi \in H_{\#}^1(Y), \quad \int_Y \psi = 0 \right\}.$$

Montrons tout d'abord que ces problèmes sont bien posés. On prend l'une des deux équations, et l'on pose $w := w_i$, de même on pose

$$a(w, \phi) = \int_Y A \nabla w \nabla \phi, \quad l(\phi) = - \int_Y A e_i \nabla \phi$$

On a bien $a(w, \phi)$ et $l(\phi)$ (bi)linéaires. Montrons que $a(w, \phi)$ continue

$$\begin{aligned} |a(w, \phi)| &= \left| \int_Y A \nabla w \nabla \phi \right| \\ &\leq \|A \nabla w\|_{L^2} \|\nabla \phi\|_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} \\ &\leq \beta \|\nabla w\|_{L^2} \|\nabla \phi\|_{L^2} && A \text{ bornée} \\ &\leq \beta \|w\|_{H^1} \|\phi\|_{H^1} && \|\cdot\|_{L^2} < \|\cdot\|_{H^1} \end{aligned}$$

Montrons que $l(\phi)$ est continue

$$\begin{aligned} |l(\phi)| &= \left| \int_Y A e_i \nabla \phi \right| && \text{définition} \\ &\leq \|A e_i\|_{L^2} \|\nabla \phi\|_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} \\ &\leq \beta_i \|\nabla \phi\|_{L^2} && A \text{ bornée, donc } A e_i \text{ aussi} \\ &\leq \eta_i \|\phi\|_{H^1} && \|\cdot\|_{L^2} < \|\cdot\|_{H^1} \end{aligned}$$

Montrons que $a(w, \phi)$ est coercive

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \int_Y A \nabla w \nabla w \\ &\geq \xi \int_Y \nabla w^2 && A \text{ minorée par } \xi \\ &\geq \xi \|\nabla w\|_{L^2}^2 \\ &\geq \zeta \|w\|_{H^1}^2 && \text{Poincaré dans } V \end{aligned}$$

avec $\zeta = \frac{\xi}{(C^2+1)}$, C étant la constante de Poincaré associée à V .

3.2 Problèmes dégradés

Cependant, les problèmes étant mal conditionnés sous ces formes, on va plutôt résoudre des problèmes dit dégradés, présentés dans le problème 4.

Problème 4 (Problèmes dégradés). Soit $\eta > 0$. Trouver $w_i \in H_{\#}^1$ tels que $\forall i \in \{1, 2\}$

$$\forall \phi \in V, \quad \int_Y A \nabla w_i \nabla \phi + \eta \int_Y w_i \phi = - \int_Y A e_i \nabla \phi. \quad (3)$$

À nouveau, on choisie un i et on pose $w := w_i$,

$$a(w, \phi) = \int_Y A \nabla w \nabla \phi + \eta \int_Y w \phi, \quad l(\phi) = - \int_Y A e_i \nabla \phi$$

On note qu'en prenant $\phi = 1$, on montre que w est d'intégrale nulle. Donc si $w \in H_{\#}^1$ résout le problème 4 alors $w \in V$, et respecte donc Poincaré.

On remarque aussi que $l(\phi)$ reste la même que précédemment, il n'est donc pas nécessaire de refaire les calculs.

Montrons que a est toujours continue sous cette forme :

$$\begin{aligned} |a(w, \phi)| &\leq \left| \int_Y A \nabla w \nabla \phi \right| + \eta \left| \int_Y w \phi \right| && \text{ineg. triang} \\ &\leq \|A \nabla w\|_{L^2} \|\nabla \phi\|_{L^2} + \eta \|w\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} \\ &\leq \beta \|\nabla w\|_{L^2} \|\nabla \phi\|_{L^2} + \eta \|w\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} && A \text{ bornée} \\ &\leq \beta \|w\|_{H^1} \|\phi\|_{H^1} + \eta \|w\|_{H^1} \|\phi\|_{H^1} && \|\cdot\|_{L^2} < \|\cdot\|_{H^1} \\ &\leq (\beta + \eta) \|w\|_{H^1} \|\phi\|_{H^1} \end{aligned}$$

Montrons maintenant que a est toujours coercive

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \int_Y A \nabla w \nabla w + \eta \int_Y w^2 \\ &\geq \xi \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \eta \|w\|_{L^2}^2 \\ &\geq \zeta \|w\|_{H^1}^2 + \eta \|w\|_{L^2}^2 && \text{Poincaré dans } V \\ &(\geq \zeta \|w\|_{H^1}^2) \end{aligned}$$

avec $\zeta = \frac{\xi}{(C^2+1)}$. Quand η tend vers zéro on retrouve le résultat de la question 1. En considérant $V = \text{Vect}(\{\omega_I\}_{1,N})$, la matrice éléments finis \mathbb{A}^η qu'on écrit donc

$$\mathbb{A}^\eta = \mathbb{K} + \eta \mathbb{M}$$

avec

$$\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbb{K}_{IJ} = \int A \nabla \omega_I \nabla \omega_J, \quad \mathbb{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbb{M}_{IJ} = \int \omega_I \omega_J$$

tend vers la matrice \mathbb{K} quand η tend vers 0 avec une vitesse *a priori* proportionnelle à η .

Il nous faut maintenant prouver que le problème dégradé est équivalent au problème de cellule initiale quand η tend vers zéro. On va précisément démontrer que

$$\forall i \in \{1, 2\}, \exists C > 0 \text{ tq } \|w_i - w_i^\eta\|_{H^1} < C\eta.$$

En sommant les équations des problèmes 3 et 4, on a

$$\int_Y A \nabla (w_i - w_i^\eta) \nabla \phi = \eta \int_Y w_i^\eta \phi$$

or $w_i - w_i^\eta \in V$, donc on peut choisir $\phi = w_i - w_i^\eta$:

$$\begin{aligned}
\int_Y A(\nabla(w_i - w_i^\eta))^2 &= \eta \int_Y w_i^\eta (w_i - w_i^\eta) \\
\left| \int_Y A \nabla(w_i - w_i^\eta) \nabla(w_i - w_i^\eta) \right| &= \left| \eta \int_Y w_i^\eta (w_i - w_i^\eta) \right| && \text{valeur absolue} \\
\xi \|\nabla(w_i - w_i^\eta)\|_{L^2}^2 &\leq \eta \|w_i^\eta\|_{L^2} \|w_i - w_i^\eta\|_{L^2} && \text{Cauchy-Schwarz et } A \text{ } \xi\text{-coercitive} \\
\xi(D^2 + 1) \|w_i - w_i^\eta\|_{H^1}^2 &\leq \eta \|w_i^\eta\|_{H^1} \|w_i - w_i^\eta\|_{H^1} && \text{Poincaré et } \|\cdot\|_{L^2} < \|\cdot\|_{H^1_\#} \\
\|w_i - w_i^\eta\|_{H^1} &\leq \eta \frac{\|w_i^\eta\|_{H^1}}{\xi(D^2 + 1)}
\end{aligned}$$

On peut montrer que $\|w_i^\eta\|_{H^1}$ est majorée en prenant l'équation du problème 4 avec $\phi = w_i^\eta$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_Y A \nabla w_i^\eta \nabla w_i^\eta + \eta \int_Y (w_i^\eta)^2 \right| &= \left| \int_Y A e_i \nabla w_i^\eta \right| \\
\left| \int_Y A \nabla w_i^\eta \nabla w_i^\eta \right| &\leq \left| \int_Y A e_i \nabla w_i^\eta \right| && \text{Car } \eta \int_Y (w_i^\eta)^2 \geq 0 \\
\xi \|\nabla w_i^\eta\|_{L^2}^2 &\leq \|A e_i\|_{L^2} \|w_i^\eta\|_{L^2} && \text{Cauchy-Schwarz et } A \text{ } \xi\text{-coercitive} \\
(D^2 + 1) \xi \|w_i^\eta\|_{H^1}^2 &\leq \|A e_i\|_{L^2} \|w_i^\eta\|_{H^1} && \text{Poincaré et } \|\cdot\|_{L^2} < \|\cdot\|_{H^1_\#} \\
\|w_i^\eta\|_{H^1} &\leq \frac{1}{(D^2 + 1) \xi} \|A e_i\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Au final on a que

$$\|w_i - w_i^\eta\|_{H^1} \leq C \eta \quad (4)$$

avec $C = \|A e_i\|_{L^2}$.

3.3 Discrétisation des problèmes de cellule & Première validation

Nous allons maintenant nous intéresser à la discrétisation de ces problèmes de cellule : comment éviter de refaire des calculs déjà faits et comment vérifier les solutions pour les cas simples ?

En effet, on va montrer que les matrices calculées précédemment peuvent être réutilisées peuvent servir pour les calculs des intégrales suivantes. Tout d'abord, on pour le calcul du membre de droite on remarque que

$$\begin{aligned}
l(\phi) &= - \int_Y (A(y) e_i, \nabla \phi) = \int_Y (A(y) \nabla y_i, \nabla \phi) \\
&= -a(y_i, \phi)
\end{aligned}$$

et que l'on pourra donc assembler les vecteurs $\{L_i\}_{1,2}$ aisément à partir de la matrice de rigidité \mathbb{K}

$$\begin{aligned}
L_i &= -(y_i^T \mathbb{K})^T \\
&= -\mathbb{K} y_i && \mathbb{K} \text{ symétrique}
\end{aligned}$$

De même pour la construction de A^{hom} une fois les problèmes de cellules résolus, on peut réutiliser la matrice de rigidité précédemment construite en remarquant que :

$$\begin{aligned}
A_{jk}^{hom} &= a(y_k + w_k, y_j + w_j) \\
A_{jk}^{hom} &= (Y_k + W_k)^T \mathbb{K} (Y_j + W_j) \quad \forall 1 < i, j < 2
\end{aligned}$$

avec pour tout sommet $S(j)$, $1 < j < N$

$$\begin{aligned}(Y_i)_j &= S(j)_{y_i} \\ (W_i)_j &= w_i(S(j))\end{aligned}$$

On voudrait maintenant pouvoir vérifier notre code dans des cas analytiques simples. Pour cela, il est bon de remarquer que dans les cas où A^ε est constante et symétrique, on a $A^{hom} = A^\varepsilon$, ce qui est équivalent à

$$A_{ij}^{hom} = \int_Y (Ae_j, e_i)$$

que l'on identifie à l'Equation 1. On a comme solution évidente des problèmes de cellule

$$\begin{aligned}\nabla w_i &= 0 \\ \iff w_i &= cste \\ \iff w_i &= 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} & w_i \in V \text{ d'intégrale nulle}\end{aligned}$$

or ces problèmes étant bien posés, il s'agit des seules solutions. On a donc montré que

$$A^\varepsilon \text{ cste symétrique} \iff w_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

3.4 Résultats

Si on trace les solutions des problèmes de cellule pour les cas (i) et (ii) où A^ε est constante et symétrique on retrouve bien des solutions quasi-nulles, comme on peut le voir en Figure 4. On pourrait suggérer que les bosses sur les bords seraient dues au fait que l'on résolve le problèmes dégradé et non le problèmes original. On remarque qualitativement que le constat fait précédemment peut s'étendre, si A^ε est indépendant d'une des deux variables y_i alors la solution au problème de cellule associée w_i est nulle.

On retrouve bien les coefficients recherchés pour les cas (iii), (iv) et (v) comme prévu. Le reste du solveur étant le même que précédemment nous ne referons pas les courbes de convergence en fonction du maillage pour cette partie là du code, on ne montrera pas non plus les résultats ainsi obtenus puisqu'il s'agit d'un basique sinus.

On pourra voir les différences entre solution homogène et solutions ε -dépendantes en Figure 5, ainsi qu'une figure où cette différence est projetée sur l'axe y_1 pour pouvoir observer plus aisément les oscillations. En effet on peut assez rapidement voir sur cette figure que sur certaines zones, les oscillations sont trop rapides et ne sont plus résolues sur le maillage.

On peut observer les erreurs L^2 et H^1 associées en Figure 6. On remarque que l'erreur L^2 décroît bien pour une gamme de ε mais commence à augmenter à partir d'un certain ε seuil. On pourrait attribuer cette erreur à la non résolution de l'erreur, de plus que celle ci commence à apparaître qualitativement sur les graphes en même temps, même si on a vu en première partie que celle ci ne semblait pas visible sur les courbes d'erreur. Pour vérifier cette conjecture on fait les calculs sur deux maillages différents, et on observe en effet que le "décrochage" se fait plus vite sur le maillage le plus grossier. Cependant, bien que la zone où la décroissance est de la forme attendu *i.e.* en $1/\varepsilon^p$ soit relativement courte, il semble que la décroissance soit plus en $1/\varepsilon^2$ qu'en $1/\varepsilon$ qui serait le résultat attendu. Il m'est cependant impossible d'agrandir cette zone avec la puissance limitée de mon ordinateur.

On observe aussi aisément que l'erreur $H^{1/2}$ ne converge pas, comme cela était annoncé par la théorie, et reste en $\mathcal{O}(1)$, si c'est n'est plus. L'erreur $H^{1/2}$ est calculée avec la matrice de rigidité dans le cas homogène, faute de mieux.

Une dernière étude sur la convergence du problème dégradé 4 vers le problème de cellule normale montre que si η est assez petit, il semble ne pas y avoir de différences notable dans la norme de A^{hom} comme on peut le voir dans la Figure 7 qui montre une courbe quasi constante. On s'attendrait à avoir une courbe polynômiale en $C_0\eta^2 + C_1$ d'après ce qu'on a démontré sur la convergence du problème dégradé, et la courbe représentée pourrait suivre une telle loi, mais il difficile d'en dire plus sur ces données. Malheureusement, étant déjà beaucoup en retard sur ce TP, je n'ai pas mené d'autres études.

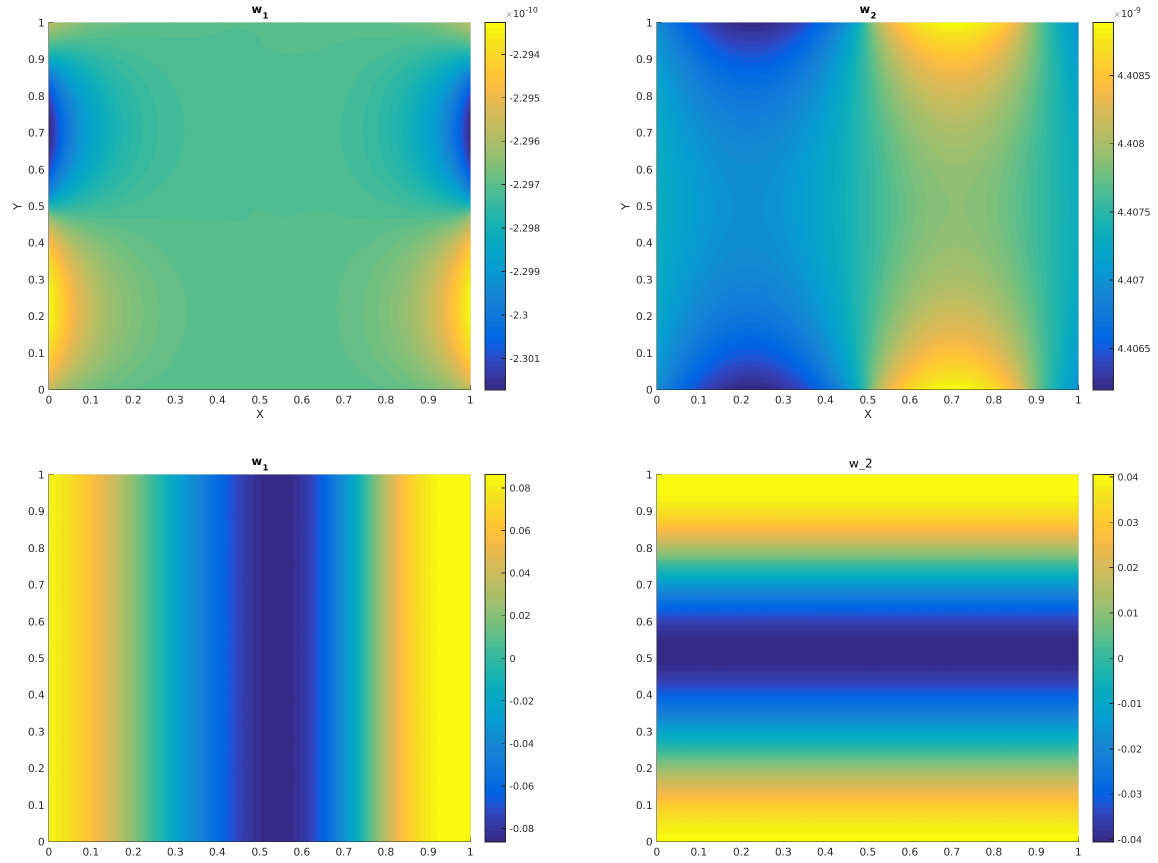


Figure 4: Haut : solutions des problèmes de cellule pour le cas (ii), avec un maillage de $h = 0.025$. Bas : solutions des problèmes de cellule pour le cas (v), toujours avec un maillage de $h = 0.025$.

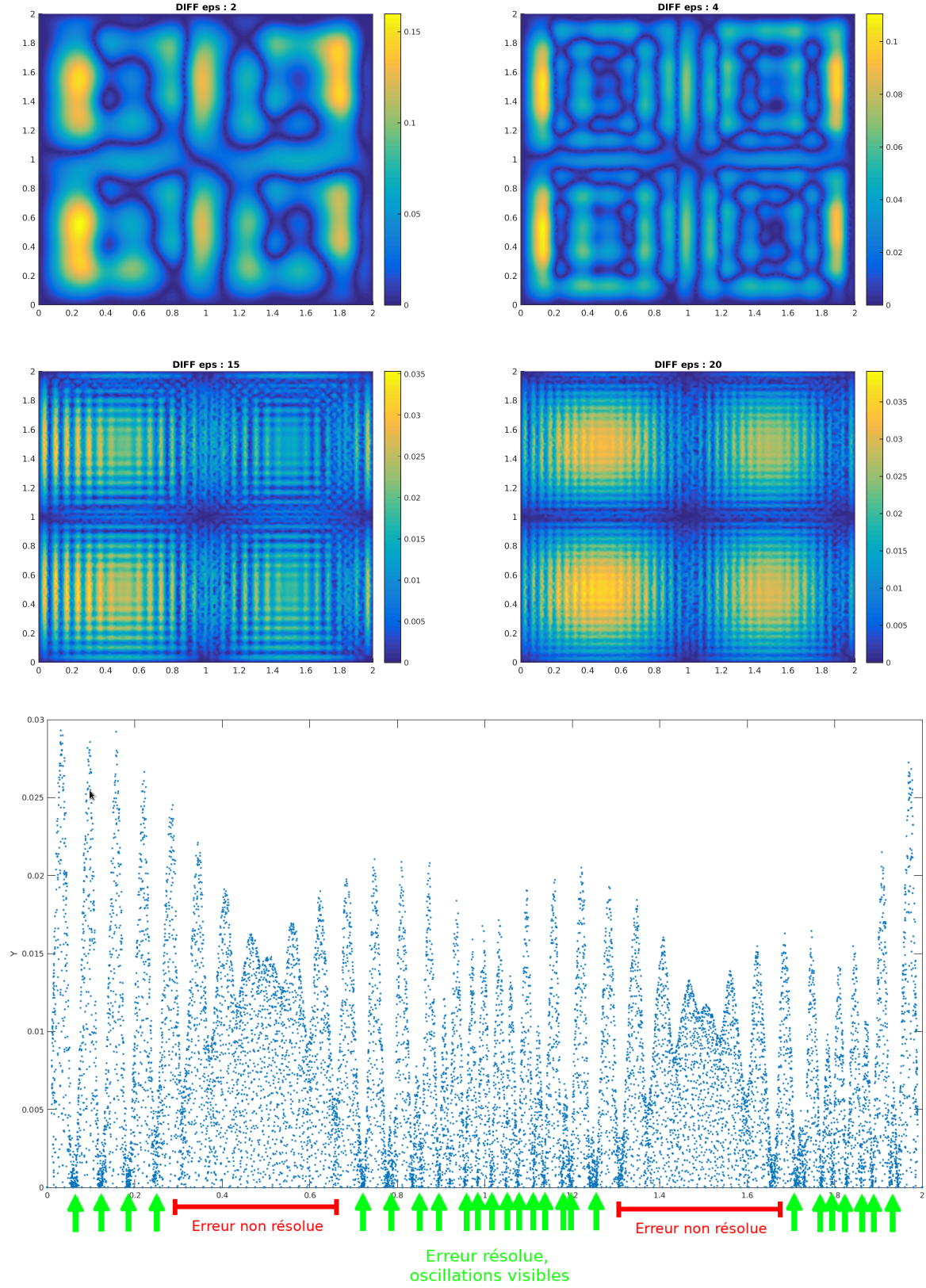


Figure 5: Profils des erreurs en deux dimensions pour le cas (v) (panneaux supérieurs) et en fonction de l'abscisse pour le cas (iii) (panneau inférieur). On a ici des maillage avec $h = 0.025$.

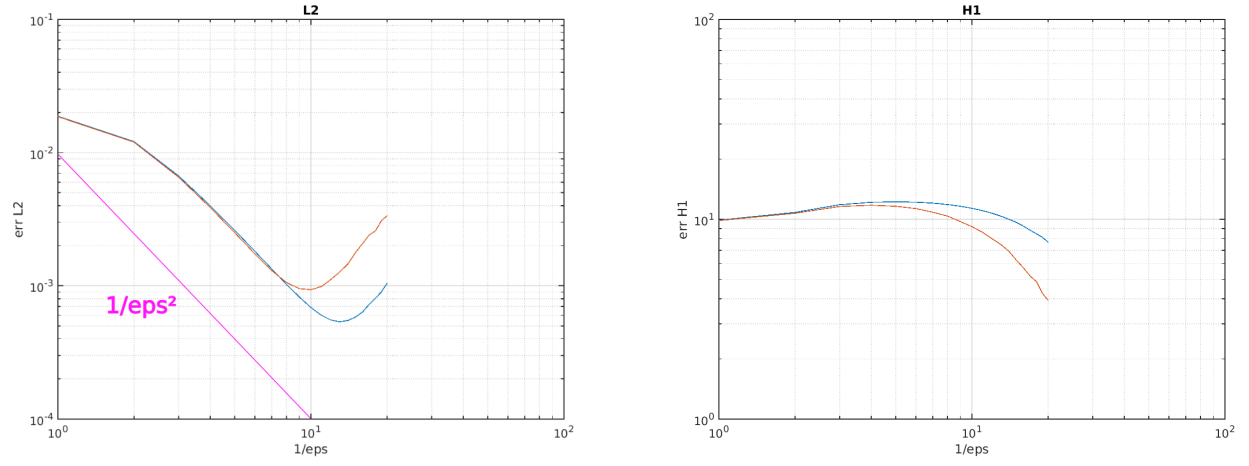


Figure 6: Erreurs L^2 et H^1 pour deux pas de maillage différents (en bleu $h = 0.2$ et en rouge $h = 0.3$) pour le cas (v).

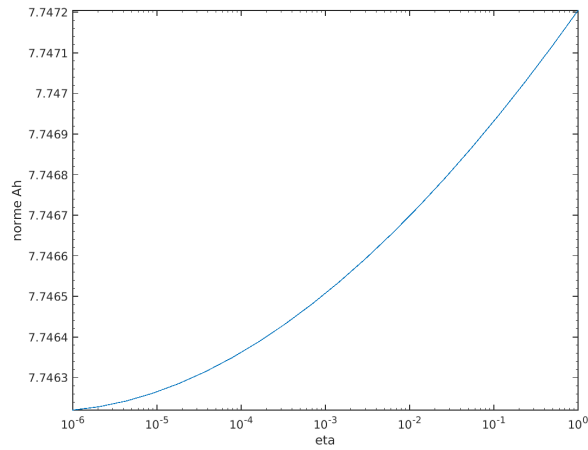


Figure 7: Norme de A^{hom} dans le cas (v) en fonction de η du problème dégradé.