

Rapport TP X01

TP1

Aurélien Valade

INTRUCTION ET STRUCTURE DU CODE

Le but de ce TP est de résoudre le problème suivant : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} u - \nabla(A(x, y)\nabla u) = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

La structure du code ainsi que l'arrangement des dossiers ont été un peu modifiés. Tous les `*.msh` se trouvent dans le dossier `geoms/` avec un exécutable `bash` pour en créer à volonté.

De plus, le corps de la routine principale se trouve maintenant dans `principal_neumann_aux.m`, cependant le fichier script est toujours bien `principal_neumann.m`.

Un code de calcul formel rédigé en python a été ajouté.

Dans la suite, les intégrales dont le domaine n'est pas précisé portent sur tout Ω .

Q1

Soit $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

$$\int_{\Omega} uv - \int_{\Omega} \nabla(A(x, y)\nabla u)v = \int_{\Omega} fv \quad \text{IPP} \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} uv - \int_{\partial\Omega} (A(x, y)\nabla u)v + \int_{\Omega} A(x, y)\nabla u\nabla v = \int_{\Omega} fv \quad \text{CL} \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} A(x, y)\nabla u\nabla v = \int_{\Omega} fv \quad (4)$$

$$a(u, v) = l(v) \quad (5)$$

On a bien $a(u, v)$ et $l(v)$ (bi)linéaires. Montrons que $a(u, v)$ continue

$$|a(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} A\nabla u\nabla v \right| + \left| \int_{\Omega} uv \right| \quad \text{ineg. triang} \quad (6)$$

$$\leq \beta \left| \int_{\Omega} \nabla u\nabla v \right| + \left| \int_{\Omega} uv \right| \quad \text{A bornée} \quad (7)$$

$$\leq \beta \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad \text{Cauchy Schwarz} \quad (8)$$

$$\leq \beta \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \quad \|\cdot\|_{L^2} < \|\cdot\|_{H_0^1} \quad (9)$$

$$\leq (\beta + 1) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \quad (10)$$

$$(11)$$

On a évidemment $l(v)$ continue comme $f, v \in H_0^1(\Omega)$.

Montrons que $a(u, v)$ est coercive

$$|a(u, u)| \geq \left| \int A(\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| \quad (12)$$

$$\geq \max(A) \left| \int (\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| \quad (13)$$

$$\geq \xi \left| \int (\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| \quad (14)$$

$$\geq \min(\xi, 1) \|u\|_{H_0^1} \quad (15)$$

Q2

On considère uniquement $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ de dimension finie, donc entièrement décrit par sa base $(\omega_I)_{1 \leq I \leq N}$. Le problème se ramène donc à

$$a(u, \omega_I) = l(\omega_I) \quad \forall 1 \leq I \leq N. \quad (16)$$

Si on projète u sur la base des (ω_I) :

$$u_h = \sum_1^N u_h^I \omega_I \quad (17)$$

on retrouve le problème variationnel entièrement discrétisé :

$$\sum_J u_h^J a(\omega_I, \omega_J) = l(\omega_I) \quad \forall 1 \leq I \leq N. \quad (18)$$

En posant les matrices et les vecteurs:

$$U \in \mathbb{R}^N, \quad U_I = u_h^I, \quad (19)$$

$$L \in \mathbb{R}^N, \quad L_I = \int f \omega_I, \quad (20)$$

$$\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbb{K}_{IJ} = \int A \nabla \omega_I \nabla \omega_J, \quad (21)$$

$$\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbb{M}_{IJ} = \int \omega_I \omega_J, \quad (22)$$

on peut écrire le système sous forme matricielle :

$$(\mathbb{M} + \mathbb{K})U = L. \quad (23)$$

Q3-Q4-Q5-Q6

On peut se ramener à un problème de taille $N^0 = \dim(V_h^0)$ en considérant la matrice

$$\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (24)$$

$$\mathbb{A}^0 \in \mathbb{R}^{N^0 \times N^0} \quad (25)$$

$$\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{N^0 \times N} \quad (26)$$

$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{P} \mathbb{A} \mathbb{P}^T, \quad L^0 = \mathbb{P} L, \quad U^0 = \mathbb{P} U \quad (27)$$

On construit la matrice \mathbb{P} de la manière suivante

$$\mathbb{P} = Id_N \text{ privée des lignes } i < N \text{ telles que } Refneu(i) \neq 0. \quad (28)$$

Une fois le système $\mathbb{A}^0 U^0 = L^0$ inversé, on peut retrouver U par la formule $U = \mathbb{P}^T U^0$.

Q7

En utilisant le code de calcul formel, on trouve que

$$f(x, y) = (1 + 5\pi^2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y) \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (29)$$

Q8

Pour toute fonction

$$u = \sum_I u(S(I)) \omega_I \quad (30)$$

$$U = (u(S(I)))_I \in \mathbb{R}^N \quad (31)$$

on a que

$$\|u\|_{L^2}^2 = \langle u, u \rangle \quad (32)$$

$$= \sum_I \sum_J U_I U_J \langle \omega_I, \omega_J \rangle \quad (33)$$

$$= \sum_I \sum_J U_I U_J \mathbb{M}_{IJ} \quad (34)$$

$$= U^T \mathbb{M} U \geq 0 \quad \text{car } \mathbb{M} \text{ définie positive} \quad (35)$$

et de même,

$$\|u\|_{\text{semi } H_0^1}^2 = \langle \nabla u, \nabla u \rangle \quad (36)$$

$$= \sum_I \sum_J U_I U_J \langle \nabla \omega_I, \nabla \omega_J \rangle \quad (37)$$

$$\approx \sum_I \sum_J U_I U_J |\mathbb{K}_{IJ}| \quad \text{Équivalence car } \mathbb{K}_{IJ} = \langle A \nabla \omega_I, \nabla \omega_J \rangle \quad (38)$$

$$= |U^T \mathbb{K} U| \geq 0 \quad \text{en valeur absolue car } \mathbb{K} \text{ n'est pas définie positive} \quad (39)$$

On peut donc lancer le programme et calculer les erreurs normalisées

$$err_{L^2} = \frac{\|u_h - \pi_h u\|_{L^2}}{\|\pi_h u\|_{L^2}} \quad (40)$$

$$err_{\text{semi } H_0^1} = \frac{\|u_h - \pi_h u\|_{\text{semi } H_0^1}}{\|\pi_h u\|_{\text{semi } H_0^1}} \quad (41)$$

tracées en **Figure 1**

Pour ce qui du calcul de la fonction $f(x, y)$, grace au code python de calcul formel, on peut trouver que pour

$$A(x, y) = \sin(\alpha\pi x) \sin(\alpha\pi y) + 2 \quad (42)$$

et si on veut garder comme solution

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y) \quad (43)$$

il faut poser

$$\begin{aligned} f(x, y) = & -2\pi^2 \alpha \sin(\pi x) \sin(\pi \alpha x) \cos(2\pi y) \cos(\pi \alpha y) - \\ & \pi^2 \alpha \sin(2\pi y) \sin(\pi \alpha y) \cos(\pi x) \cos(\pi \alpha x) + \\ & 5\pi^2 (\sin(\pi \alpha x) \sin(\pi \alpha y) + 2) \sin(\pi x) \sin(2\pi y) + \\ & \sin(\pi x) \sin(2\pi y). \end{aligned} \quad (44)$$

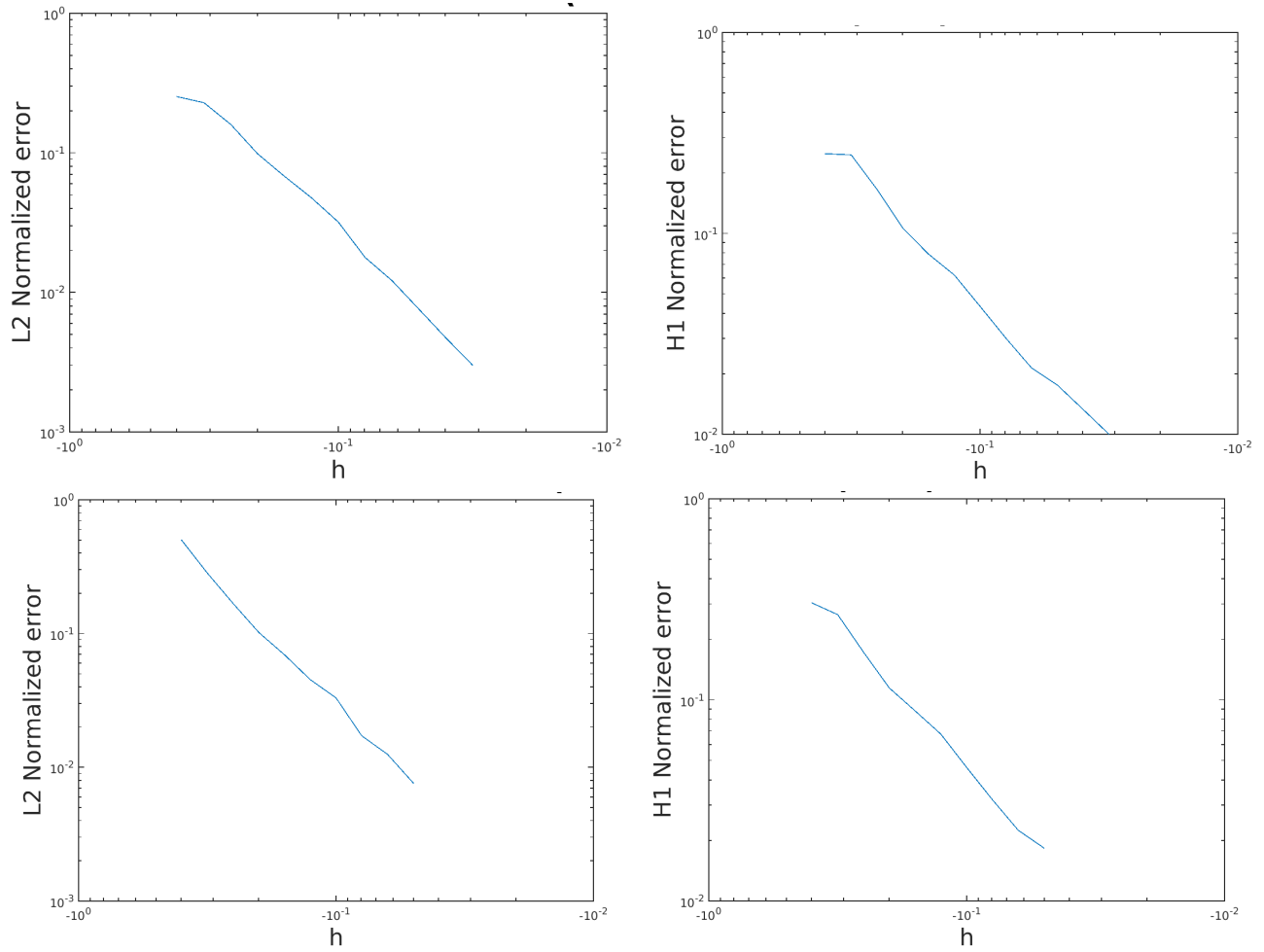


Figure 1: Erreur normalisée pour la norme L2 et erreur normalisée pour la norme H1 pour un problème de dirichlet avec A constante (haut), A variable (bas).

Q8

Montrons que le problème $a(u, v) = l(u) \quad \forall v \in V_{\#}^h$ est bien posé dans

$$H_{\#}^1(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega), \text{ tq } f \text{ est } L \text{ périodique} \right\} \quad (45)$$

On a bien $a(u, v)$ et $l(v)$ (bi)linéaires. Montrons que $a(u, v)$ continue

$$|a(u, v)| \leq \left| \int A \nabla u \nabla v \right| + \left| \int uv \right| \quad \text{ineg. triang} \quad (46)$$

$$\leq \beta \left| \int \nabla u \nabla v \right| + \left| \int uv \right| \quad A \text{ bornée} \quad (47)$$

$$\leq \beta \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad \text{Cauchy Schwarz} \quad (48)$$

$$\leq \beta \|u\|_{H_{\#}^1} \|v\|_{H_{\#}^1} + \|u\|_{H_{\#}^1} \|v\|_{H_{\#}^1} \quad \|\cdot\|_{L^2} < \|\cdot\|_{H_{\#}^1} \quad (49)$$

$$\leq (\beta + 1) \|u\|_{H_{\#}^1} \|v\|_{H_{\#}^1} \quad (50)$$

$$(51)$$

On a évidemment $l(v)$ continue comme $f, v \in H_{\#}^1(\Omega)$.

Montrons que $a(u, v)$ est coercive

$$|a(u, u)| \geq \left| \int A(\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| \quad (52)$$

$$\geq \max(A) \left| \int (\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| \quad (53)$$

$$\geq \xi \left| \int (\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| \quad (54)$$

$$\geq \min(\xi, 1) \|u\|_{H_{\#}^1} \quad (55)$$

Q9

On peut se ramener à un problème dans $V_h^{\#}$ en considérant la matrice

$$\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (56)$$

$$\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ inversible} \quad (57)$$

$$\mathbb{A}^{\#} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}, \quad L^{\#} = \mathbb{P}^{-1} L, \quad U^{\#} = \mathbb{P}^{-1} U \quad (58)$$

On construit la matrice \mathbb{P} de la manière suivante

$$\forall I, J \in [1, N]^2 \quad \mathbb{P}_{IJ} = \begin{cases} 4\delta_{IJ} & \text{si } S(I) \text{ est sur un angle} \\ 2\delta_{IJ} & \text{si } S(I) \text{ est sur un bord} \\ \delta_{IJ} & \text{sinon} \end{cases} \quad (59)$$

Une fois le système $\mathbb{A}^0 U^0 = L^0$ inversé, on peut retrouver U par la formule $U = \mathbb{P}^{-1} U^{\#}$.

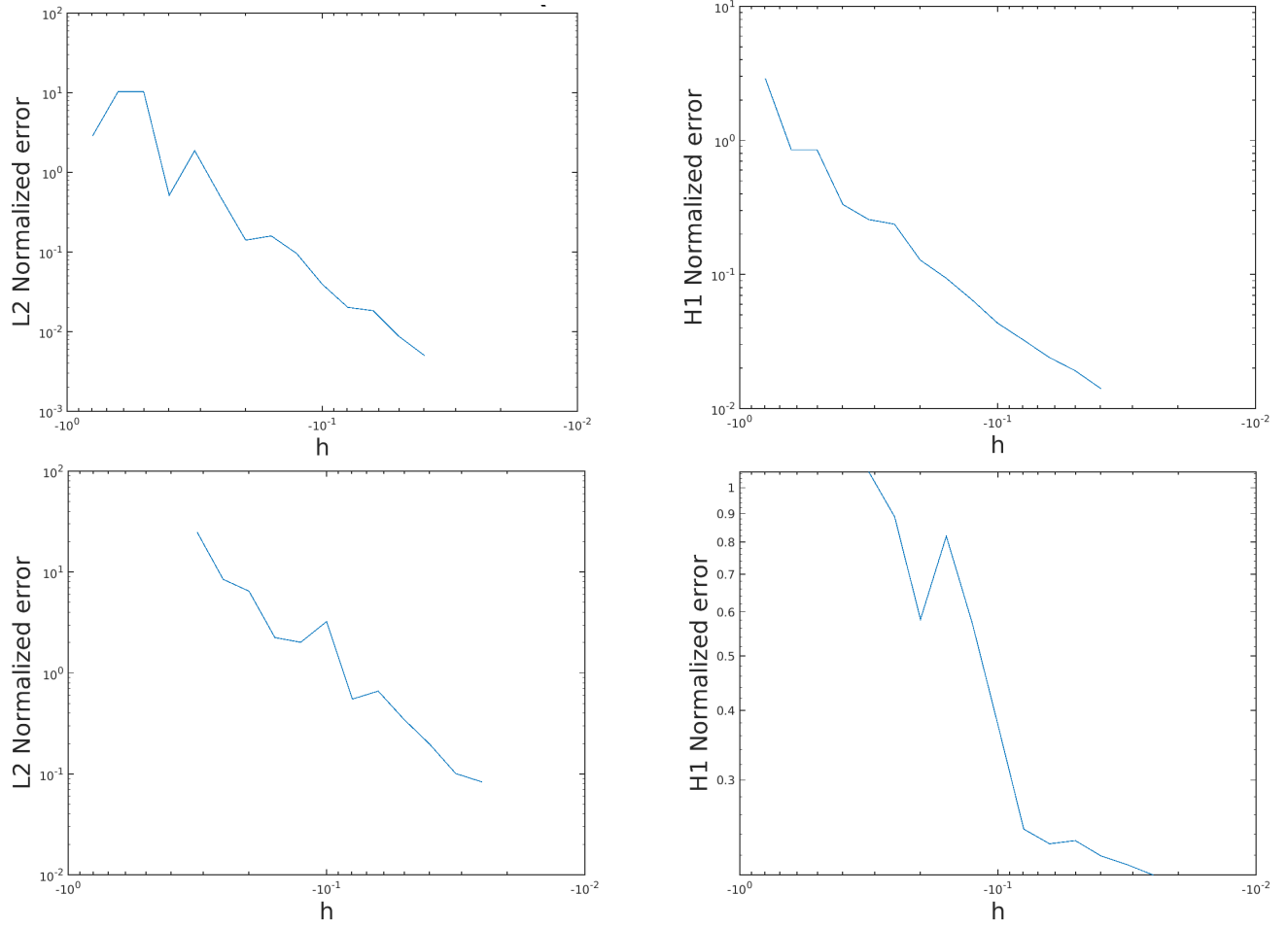


Figure 2: Erreur normalisée pour la norme L2 et erreur normalisée pour la norme H1 pour un problème périodique avec A constante (haut), A variable (bas)

Q10

Pour ce qui du calcul de la fonction $f(x, y)$, grace au code python de calcul formel, on peut trouver que pour

$$A(x, y) = \sin(\alpha\pi x) \sin(\alpha\pi y) + 2 \quad (60)$$

et si on veut garder comme solution

$$u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(2\pi y) \quad (61)$$

il faut poser

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \pi^2 \alpha \sin(\pi x) \sin(\pi \alpha y) \cos(2\pi y) \cos(\pi \alpha x) - \\ & 2\pi^2 \alpha \sin(2\pi y) \sin(\pi \alpha x) \cos(\pi x) \cos(\pi \alpha y) + \\ & 5\pi^2 (\sin(\pi \alpha x) \sin(\pi \alpha y) + 2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y) + \\ & \cos(\pi x) \cos(2\pi y). \end{aligned} \quad (62)$$