Rapport TP X01
TP3

Aurélien Valade

1 Intruction et structure du code

Le but de ce TP est de résoudre le problème suivant : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} u - \nabla\big(A(x,y)\nabla u\big) = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

La structure du code ainsi que l'arrangement des dossiers ont été un peu modifiés. Tous les `*.msh` se trouvent dans le dossier `geoms/` avec un executable `bash` pour en créer à volonté.

De plus, le corps de la routine principale se trouve maintenant dans `principal_dirichlet_aux.m`, cependant le fichier script est toujours bien `principal_dirichlet.m`.

Un code de calcul formel rédigé en python a été ajouté.

2 Solution exacte

3 Solution au problème homogénéisé

3.1 Les problèmes de cellule

Question 1. *Montrer que le problème suivant est bien posé:*

Trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \int_Y A\nabla u \nabla v = -\int_Y Ae_i\nabla v \tag{2}$$

avec

$$V = \left\{ \psi \in H^1_\#(Y), \quad \int_Y \psi = 0 \right\} \tag{3}$$

On pose

$$a(u,v) = \int_Y A\nabla u\nabla v, \quad l(v) = \int_Y Ae_i\nabla v \tag{4}$$

On a bien $a(u,v)$ et $l(v)$ (bi)linéaires. Montrons que $a(u,v)$ continue

$$\begin{aligned}
\big|a(u,v)\big| &= \left|\int_Y A\nabla u\nabla v\right| && (5)\\
&\le ||A\nabla u||_{L^2}\,||\nabla v||_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} \quad (6)\\
&\le \beta\,||\nabla u||_{L^2}\,||\nabla v||_{L^2} && \text{A bornée} \quad (7)\\
&\le \beta\,||u||_{H^1_\#}\,||v||_{H^1_\#} && ||\cdot||_{L^2} < ||\cdot||_{H^1_\#} \quad (8)\\
& && (9)
\end{aligned}$$

Montrons que $l(v)$ est continue

$$\begin{aligned}
\left|l(v)\right| &= \left|\int_Y Ae_i \nabla v\right| && \text{définition} && (10)\\
&\leq ||Ae_i||_{L^2}\,||\nabla v||_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} && (11)\\
&\leq \beta_i\,||\nabla v||_{L^2} && A \text{ bornée, donc } Ae_i \text{ aussi} && (12)\\
&\leq \eta_i\,||v||_{H^1_\#} && ||\cdot||_{L^2} < ||\cdot||_{H^1_\#} && (13)
\end{aligned}$$

Montrons que $a(u,v)$ est coercive

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_Y A\nabla u \nabla u && && (14)\\
&\geq \xi \int_Y \nabla u^2 && A \text{ minorée par } \xi && (15)\\
&\geq \xi\,||\nabla u||^2_{L^2} && && (16)\\
&\geq \zeta\,||u||^2_{H^1_\#} && \text{Pointcaré dans } V && (17)
\end{aligned}$$

avec $\zeta = (C^2+1)\xi$, C étant la constante de poincaré associée à V.

Question 2. *De même pour le problème modifié*

Soit $\eta > 0$. Trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \int_Y A\nabla u \nabla v + \eta \int_Y uv = -\int_Y Ae_i \nabla v \tag{18}$$

On pose

$$a(u,v) = \int_Y A\nabla u\nabla v + \eta\int_Y uv \quad l(v) = \int_Y Ae_i\nabla v \tag{19}$$

On remarque que $l(v)$ reste la même que dans la question 1, il n'est donc pas nécéssaire de refaire les calculs.

Montrons que a est toujours continue sous cette forme :

$$\begin{aligned}
\left|a(u,v)\right| &\leq \left|\int_Y A\nabla u\nabla v\right| + \eta\left|\int_Y uv\right| && \text{ineg. triang} && (20)\\
&\leq ||A\nabla u||_{L^2}\,||\nabla v||_{L^2} + \eta\,||u||_{L^2}\,||v||_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} && (21)\\
&\leq \beta\,||\nabla u||_{L^2}\,||\nabla v||_{L^2} + \eta\,||u||_{L^2}\,||v||_{L^2} && \text{A bornée} && (22)\\
&\leq \beta\,||u||_{H^1_\#}\,||v||_{H^1_\#} + \eta\,||u||_{H^1_\#}\,||v||_{H^1_\#} && ||\cdot||_{L^2} < ||\cdot||_{H^1_\#} && (23)\\
&\leq (\beta+\eta)\,||u||_{H^1_\#}\,||v||_{H^1_\#} && && (24)
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que a est toujours coercive

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_Y A\nabla u\nabla u + \eta\int_Y u^2 && && (25)\\
&\geq \xi\int_Y \nabla u^2 + \eta\,||u||^2_{L^2} && A \text{ minorée par } \xi. && (26)\\
&\geq \xi\,||\nabla u||^2_{L^2} + \eta\,||u||^2_{L^2} && && (27)\\
&\geq \min(\xi,\eta)\,||u||^2_{H^1_\#} && && (28)
\end{aligned}$$

Quand η est assez petit, il gouverne la coercivité de a. Cette propriété tend à disparaitre quand η tend vers 0.

4 Q2

On onsidère uniquement $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ de dimension finie, donc entièrement décrit par sa base $(\omega_I)_{1 \le I \le N}$. Le problème se ramène donc à

$$a(u, \omega_I) = l(\omega_I) \quad \forall 1 \le I \le N. \tag{29}$$

Si on projète u sur la base des (ω_I) :

$$u_h = \sum_1^N u_h^I \omega_I \tag{30}$$

on retrouve le problème variationel entièrement discrétisé :

$$\sum_J u_h^J a(\omega_I, \omega_J) = l(\omega_I) \quad \forall 1 \le J \le N. \tag{31}$$

En posant les matrices et les vecteurs:

$$U \in \mathbb{R}^N, \quad U_I = u_h^I, \tag{32}$$

$$L \in \mathbb{R}^N, \quad L_I = \int f \omega_I, \tag{33}$$

$$\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbb{K}_{IJ} = \int A \nabla \omega_I \nabla \omega_J, \tag{34}$$

$$\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbb{M}_{IJ} = \int \omega_I \omega_J, \tag{35}$$

on peut écrire le système sous forme matricielle :

$$(\mathbb{M} + \mathbb{K})U = L. \tag{36}$$

5 Q3-Q4-Q5-Q6

On peut se ramener à un problème de taille $N^0 = \dim(V_h^0)$ en considérant la matrice

$$\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N} \tag{37}$$

$$\mathbb{A}^0 \in \mathbb{R}^{N^0 \times N^0} \tag{38}$$

$$\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{N^0 \times N} \tag{39}$$

$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^T, \ L^0 = \mathbb{P}L, \ U^0 = \mathbb{P}U \tag{40}$$

On construit la matrice $\mathbb{P}$ de la manière suivante

$$\mathbb{P} = Id_N \text{ privée des lignes } i < N \text{ telles que } Refneu(i) \neq 0. \tag{41}$$

Une fois le système $\mathbb{A}^0 U^0 = L^0$ inversé, on peut retrouver U par la formule $U = \mathbb{P}^T U^0$.

6 Q7

En utilisant le code de calcul formel, on trouve que

$$f(x, y) = (1 + 5\pi^2)\cos(\pi x)\cos(2\pi y) \quad \forall x, y \in \Omega. \tag{42}$$

7 Q8

Pour toute fonction

$$u = \sum_I u\big(S(I)\big)\omega_I \tag{43}$$

$$U = \big(u(S(I))\big)_I \in \mathbb{R}^N \tag{44}$$

on a que

$$\begin{aligned}
||u||_{L^2}^2 &= \big\langle u, u \big\rangle && (45)\\
&= \sum_I \sum_J U_I U_J \big\langle \omega_I, \omega_J \big\rangle && (46)\\
&= \sum_I \sum_J U_I U_J \mathbb{M}_{IJ} && (47)\\
&= U^T \mathbb{M} U \geq 0 \quad \text{car } \mathbb{M} \text{ définie positive} && (48)
\end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned}
||u||_{\text{semi } H_0^1}^2 &= \big\langle \nabla u, \nabla u \big\rangle && (49)\\
&= \sum_I \sum_J U_I U_J \big\langle \nabla\omega_I, \nabla\omega_J \big\rangle && (50)\\
&\approx \sum_I \sum_J U_I U_J \big|\mathbb{K}_{IJ}\big| \qquad \text{Équivalence car } \mathbb{K}_{IJ} = \big\langle A\nabla\omega_I, \nabla\omega_J \big\rangle && (51)\\
&= \big|U^T \mathbb{K} U\big| \geq 0 \quad \text{en valeur absolue car } \mathbb{K} \text{ n'est pas définie positive} && (52)
\end{aligned}$$

On peut donc lancer le programme et calculer les erreurs normalisées

$$err_{L^2} = \frac{||u_h - \pi_h u||_{L^2}}{||\pi_h u||_{L^2}} \tag{53}$$

$$err_{\text{semi } H_0^1} = \frac{||u_h - \pi_h u||_{\text{semi } H_0^1}}{||\pi_h u||_{\text{semi } H_0^1}} \tag{54}$$

tracées en Figure 1

Pour ce qui du calcul de la fonction $f(x, y)$, grace au code python de calcul formel, on peut trouver que pour

$$A(x, y) = \sin(\alpha\pi x)\sin(\alpha\pi y) + 2 \tag{55}$$

et si on veut garder comme solution

$$u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y) \tag{56}$$

il faut poser

$$\begin{aligned}
f(x, y) = \quad & -2\pi^2\alpha\sin(\pi x)\sin(\pi\alpha x)\cos(2\pi y)\cos(\pi\alpha y)- \\
& \pi^2\alpha\sin(2\pi y)\sin(\pi\alpha y)\cos(\pi x)\cos(\pi\alpha x)+ \\
& 5\pi^2(\sin(\pi\alpha x)\sin(\pi\alpha y) + 2)\sin(\pi x)\sin(2\pi y)+ \\
& \sin(\pi x)\sin(2\pi y).
\end{aligned} \tag{57}$$

Figure 1: Erreur normalisée pour la norme L2 et erreur normalisée pour la norme H1 pour un problème de dirichlet avec A constante (haut), A variable (bas).

8 Q8

Montrons que le problème $a(u,v) = l(u) \quad \forall v \in V_{\#}^{h}$ est bien posé dans

$$H_{\#}^{1}(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega), \text{tq } f \text{ est } L \text{ périodique} \right\} \tag{58}$$

On a bien $a(u,v)$ et $l(v)$ (bi)linéaires. Montrons que $a(u,v)$ continue

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \left| \int A \nabla u \nabla v \right| + \left| \int uv \right| && \text{ineg. triang} && (59)\\
&\leq \beta \left| \int \nabla u \nabla v \right| + \left| \int uv \right| && \text{A bornée} && (60)\\
&\leq \beta \, ||\nabla u||_{L^2} \, ||\nabla v||_{L^2} + ||u||_{L^2} \, ||v||_{L^2} && \text{Cauchy Schwarz} && (61)\\
&\leq \beta \, ||u||_{H_{\#}^1} \, ||v||_{H_{\#}^1} + ||u||_{H_{\#}^1} \, ||v||_{H_{\#}^1} && ||\cdot||_{L^2} < ||\cdot||_{H_{\#}^1} && (62)\\
&\leq (\beta + 1) \, ||u||_{H_{\#}^1} \, ||v||_{H_{\#}^1} && && (63)\\
& && && (64)
\end{aligned}$$

On a évidement $l(v)$ continue comme $f, v \in H_{\#}^{1}(\Omega)$.
Montrons que $a(u,v)$ est coercive

$$\begin{aligned}
|a(u,u)| &\geq \left| \int A (\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| && (65)\\
&\geq \max(A) \left| \int (\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| && (66)\\
&\geq \xi \left| \int (\nabla u)^2 \right| + \left| \int u^2 \right| && (67)\\
&\geq \min(\xi, 1) \, ||u||_{H_{\#}^1} && (68)
\end{aligned}$$

9 Q9

On peut se ramener à un problème dans $V_h^{\#}$ en considérant la matrice

$$\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N} \tag{69}$$

$$\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ inversible} \tag{70}$$

$$\mathbb{A}^{\#} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A}^{\#} \mathbb{P}, \; L^{\#} = \mathbb{P}^{-1} L, \; U^{\#} = \mathbb{P}^{-1} U \tag{71}$$

On construit la matrice $\mathbb{P}$ de la manière suivante

$$\forall I, J \in [1, N]^2 \quad \mathbb{P}_{IJ} = \begin{cases} 4\delta_{IJ} & \text{si } S(I) \text{ est sur un angle} \\ 2\delta_{IJ} & \text{si } S(I) \text{ est sur un bord} \\ \delta_{IJ} & \text{sinon} \end{cases} \tag{72}$$

Une fois le système $\mathbb{A}^0 U^0 = L^0$ inversé, on peut retrouver U par la formule $U = \mathbb{P}^{-1} U^{\#}$.

Figure 2: Erreur normalisée pour la norme L2 et erreur normalisée pour la norme H1 pour un problème périodique avec A constante (haut), A variable (bas)

10 Q10

Pour ce qui du calcul de la fonction $f(x,y)$, grace au code python de calcul formel, on peut trouver que pour

$$A(x,y) = \sin(\alpha\pi x)\sin(\alpha\pi y) + 2 \tag{73}$$

et si on veut garder comme solution

$$u(x,y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y) \tag{74}$$

il faut poser

$$\begin{aligned} f(x,y) = \; & \pi^2\alpha\sin(\pi x)\sin(\pi\alpha y)\cos(2\pi y)\cos(\pi\alpha x) - \\ & 2\pi^2\alpha\sin(2\pi y)\sin(\pi\alpha x)\cos(\pi x)\cos(\pi\alpha y) + \\ & 5\pi^2(\sin(\pi\alpha x)\sin(\pi\alpha y) + 2)\cos(\pi x)\cos(2\pi y) + \\ & \cos(\pi x)\cos(2\pi y). \end{aligned} \tag{75}$$