
CPE Lyon - 3IRC Année 2022/2023
Structures de données et algorithmes avancés
Séance 2 - Complexité des algorithmes



Exercice 1. Déénombrer le nombre d'instructions d'un programme

Pour chacun des extraits de code suivants, exprimez à l'aide d'un $\mathcal{O}(f(n))$ le nombre d'opérations élémentaires effectuées (on négligera le temps passé par l'instruction `for` elle-même) :

1. Programme 1 :

```
1 test = 0
2 for i in range(n):
3     test = test + 1
4
5 for j in range(n):
6     test = test - 1
```

💡 En Python, `range(n)` renvoie l'intervalle des nombres entiers $[0; n - 1]$.

2. Programme 2 :

```
1 test = 0
2 for i in range(n):
3     for j in range(n):
4         test = test + i * j
```

3. Programme 3 :

```
1 a=5
2 b=6
3 c=10
4 for i in range(n):
5     for j in range(n):
6         x = i * i
7         y = j * j
8         z = i * j
9 for k in range(n):
10    w = a*k + 45
11    v = b*b
12 d = 33
```

4. Programme 4 :

```
1 i = n
2 while i > 0:
3     k = 2 + 2
4     i = i // 2
```

5. Programme 5 :

```
1 sum = 0
2 for i from 1 to n*n:
3     for j from 1 to i:
4         for k from 1 to 6:
5             sum = sum + 1;
```

Exercice 2. Croissance de fonctions

Classez les fonctions suivantes par ordre de croissance :

2^n	$\lg \lg n$	$n^3 + \lg n$
$\lg n$	$n - n^2 + 5n^3$	2^{n-1}
n^2	n^3	$n \lg n$
$(\lg n)^2$	\sqrt{n}	6
$n!$	n	$(3/2)^n$

💡 Pour des exemples d'algorithmes ayant ces complexités : https://en.wikipedia.org/wiki/Time_complexity

Exercice 3. Comparaison de temps d'exécution

Pour résoudre un problème, on dispose de huit algorithmes dont le temps d'exécution pour traiter une instance de taille n est $f(n)$ microsecondes (indiquées au début de chaque ligne). Si on limite le temps d'exécution de ces algorithmes aux durées indiquées en tête de chaque colonne, quelle est la plus grande taille n de l'instance qu'on peut traiter dans chaque cas ?

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
$\lg n$							
\sqrt{n}							
n							
$n \lg n$							
n^2							
n^3							
2^n							
$n!$							

Exercice 4. Notation \mathcal{O}

Vrai ou faux ?

1. $11x^3 = O(87x^2)$
2. $x^{13} = O(3^x)$
3. $-2x = O(58 \log_{35} x)$
4. $4x^3 + 12x^2 + 36 = O(x^3)$
5. $0,01x^5 = O(48x^4)$
6. $4^x = O(x^7)$
7. $3x \log_2 x = O(25x)$
8. $23 \ln x = O(3x)$
9. $7x^5 = O(x^5)$
10. $x^5 = O(7x^5)$

Exercice 5. Notations \mathcal{O} , Ω , Θ

En utilisant les *définitions*, montrez que $3n^2 - 100n + 6 = \Theta(n^2)$.

Exercice 6. Ensembles dénombrables

Démontrer que les ensembles \mathbb{Z} et \mathbb{Q} sont *dénombrables*, en montrant qu'ils peuvent être mis en bijection avec \mathbb{N} .