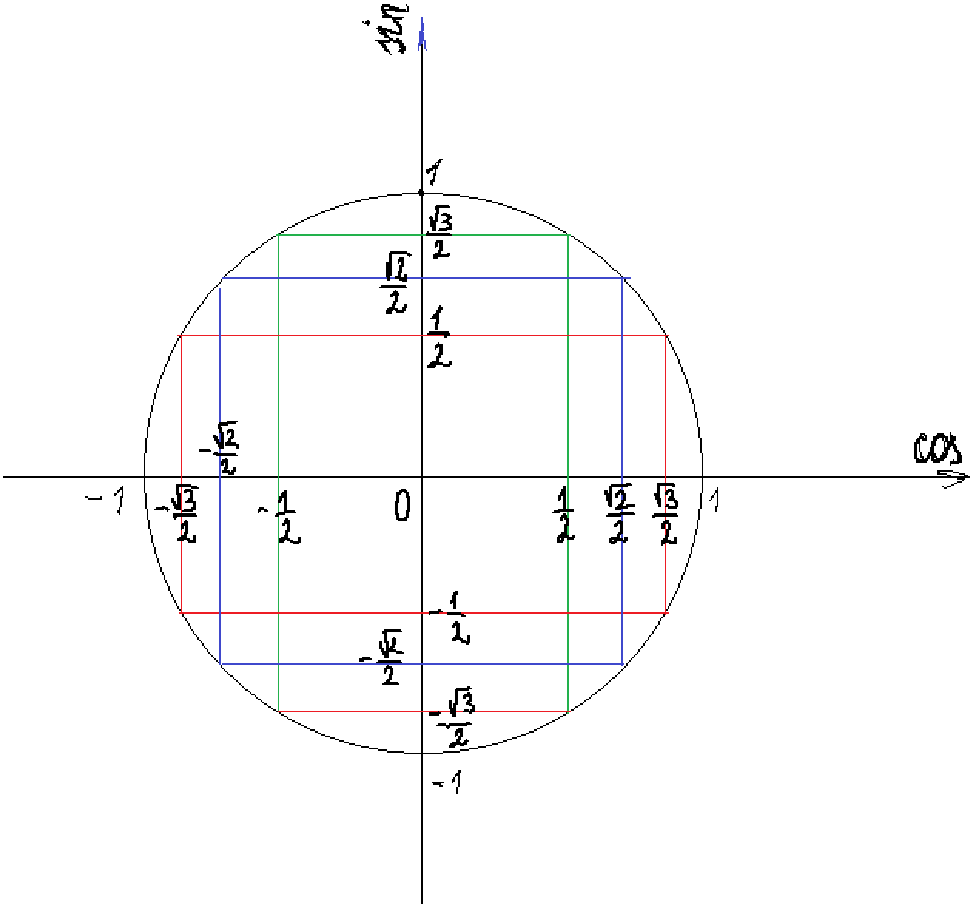
Оглавление

Пошаговый алгоритм решения тригонометрического уравнения

Понятие тригонометрического круга и принцип работы с ним

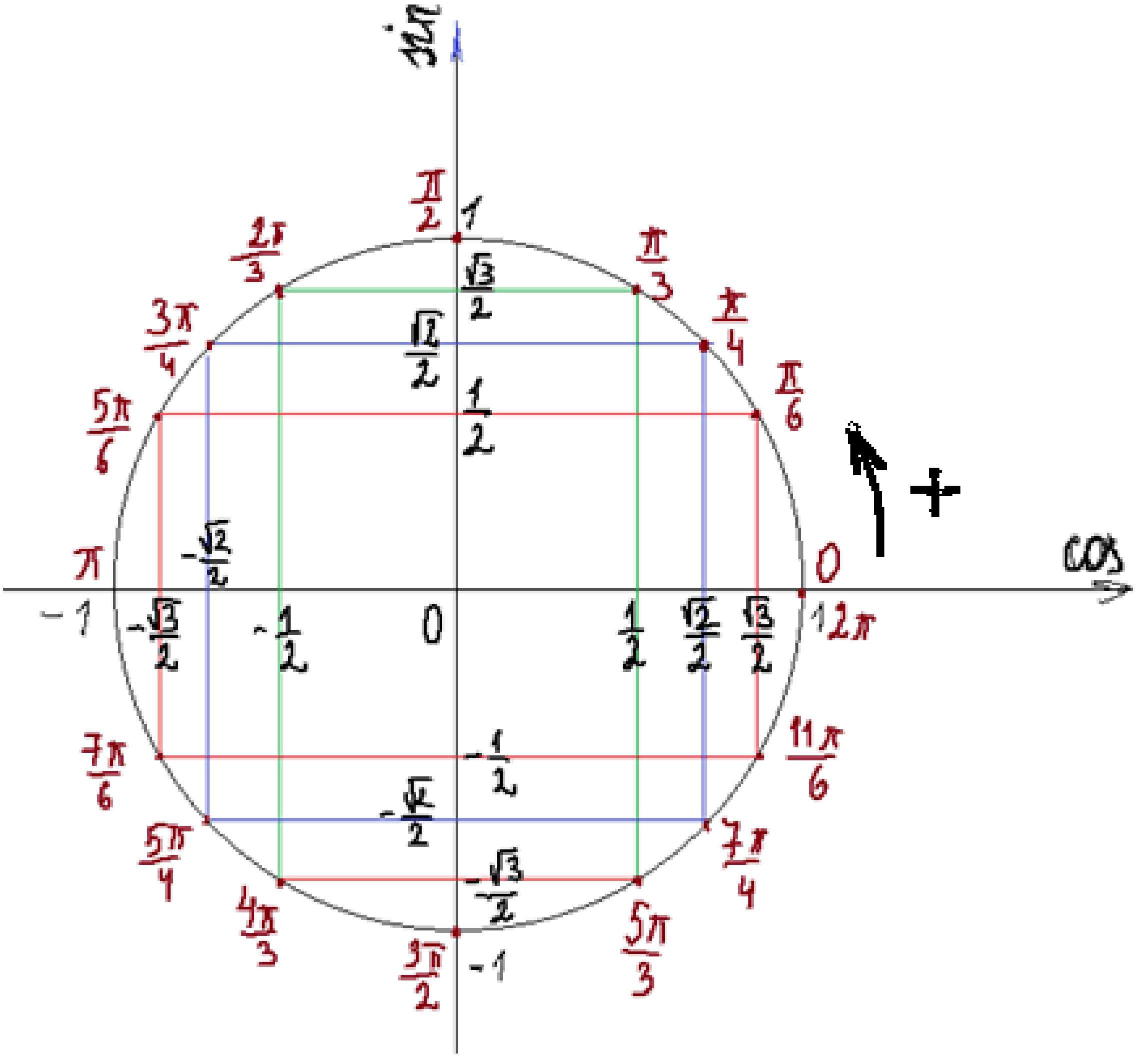
Тригонометрический круг и координаты

Для начала нужно знать, как располагаются оси. Значение косинуса – по горизонтали, синуса – по вертикали. Подробнее про синус, косинус и их значения.



Окружность единичная. Значит, она пересекает оси синуса и косинуса в точках: -1; 1. В центре, как обычно, точка О (0; 0). Также на осях есть числа: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Запомнить их легко по порядку. В числите 1, 2, 3 под знаком корня, а в знаменателе всегда 2. Это значения синуса и косинуса некоторых углов.

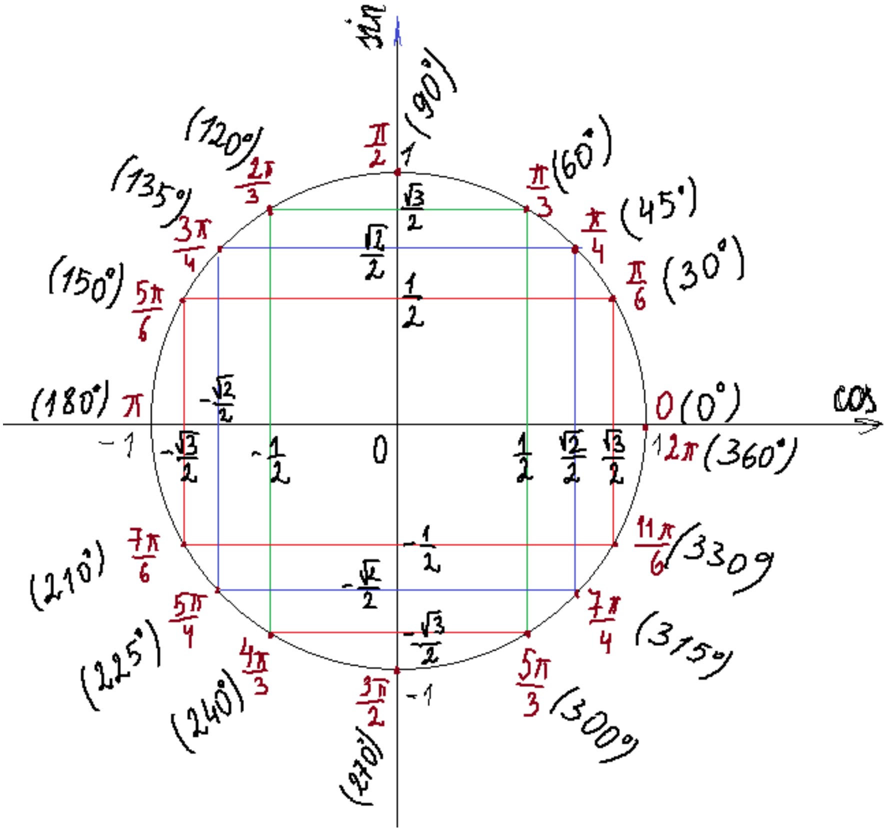
Тригонометрический круг и радианы



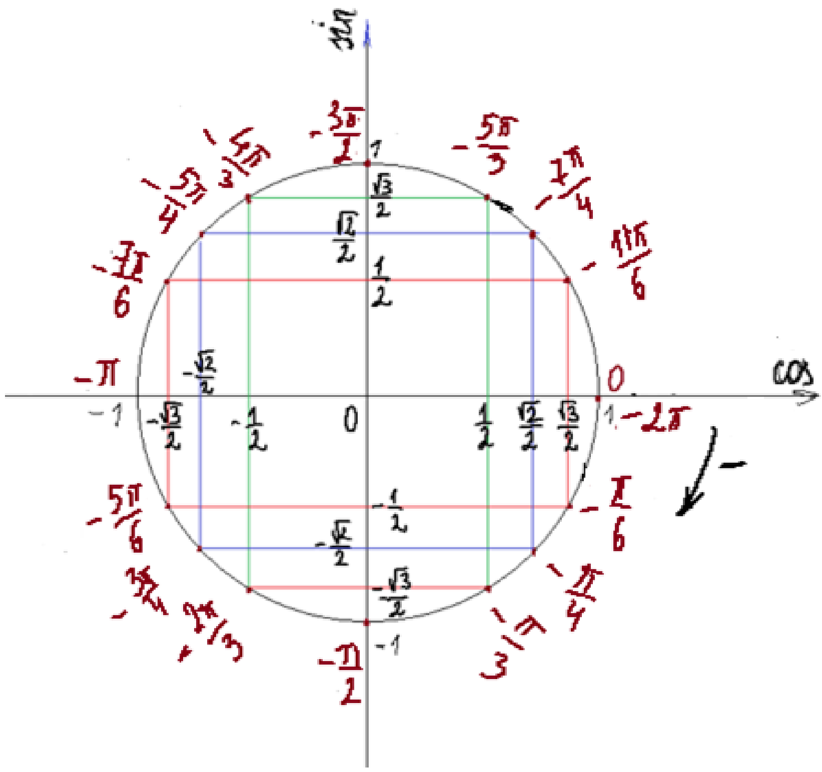
На окружности углы откладываются от самой правой точки. Это 0 радиан. Положительные углы откладываются в направлении против часовой стрелки.

Координата точки, соответствующей некоторому углу, по оси x – косинус угла, по оси y – синус угла.

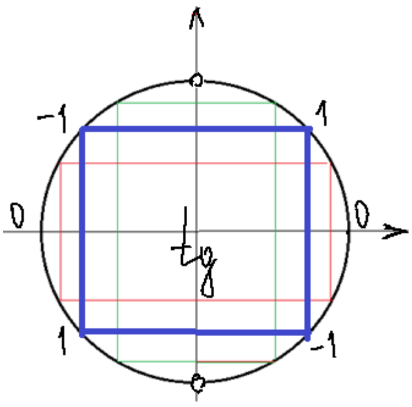
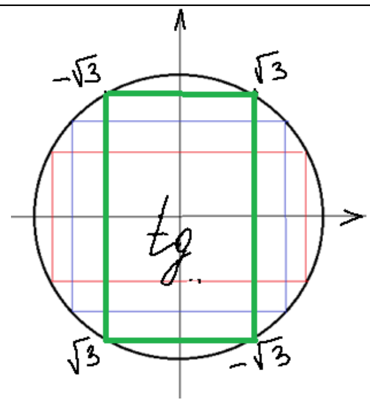
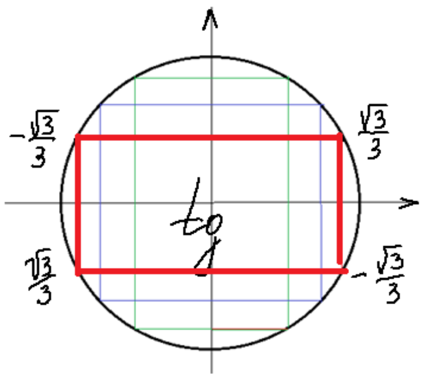
Тригонометрический круг и градусы



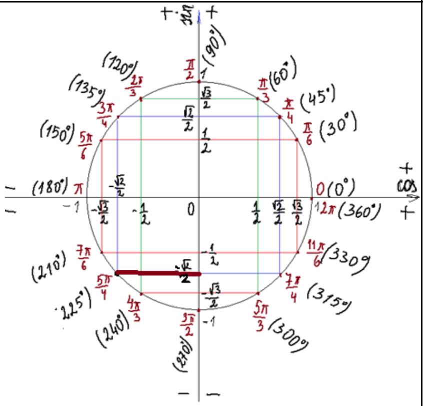
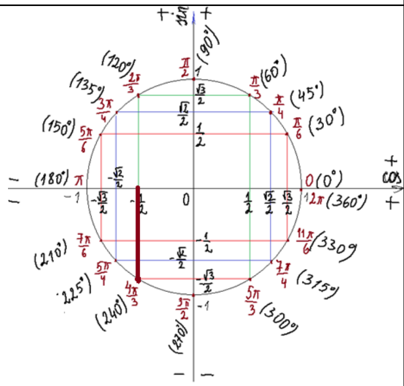
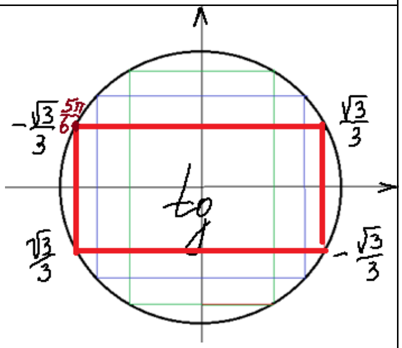
Отрицательные углы откладываются в направлении по часовой стрелке.



Как легко запомнить значение тангенса некоторых углов

<table>
<tr>
<td>Тангенс не существует в крайних верхней и нижней точке. Равен нулю в крайних правой и левой точках. В вершинах синего квадрата значения тангенса равны 1 и -1.</td>
<td>В вершинах зелёного вертикального прямоугольника значения тангенса равны $\sqrt{3}$ и -$\sqrt{3}$</td>
<td>В вершинах красного горизонтального прямоугольника значения тангенса равны $\frac{\sqrt{3}}{3}$ и -$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Примеры вычисления значений синуса и косинуса некоторых углов с помощью единичной окружности

$sin\frac{5\pi}{4} - ?$	$\cos\frac{4\pi}{3} - ?$	$tg\frac{5\pi}{6} - ?$
		
$\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	$tg\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Подборка заданий на нахождение значений тригонометрических функций (для самостоятельного выполнения)

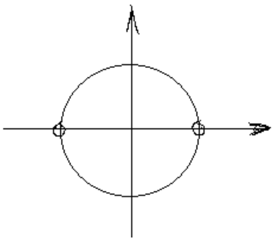
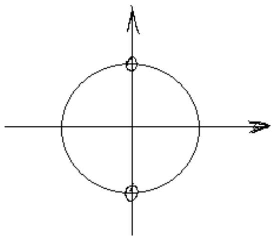
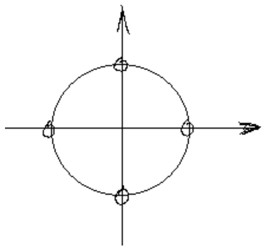
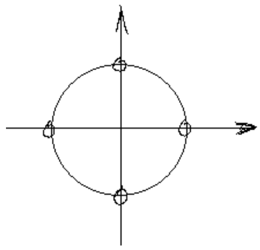
Вычислите:

1	$\sin\frac{\pi}{3}$	*Ответ:* $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$tg\frac{\pi}{6}$	*Ответ:* $\frac{\sqrt{3}}{3}$
3	$cos\frac{7\pi}{4}$	*Ответ:* $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4	$tg\frac{5\pi}{3}$	*Ответ:* $-\sqrt{3}$
5	$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$	*Ответ:* $\frac{\sqrt{3}}{2}$
6	$\cos\frac{3\pi}{2}$	*Ответ: 0*
7	$\sin\frac{3\pi}{2}$	*Ответ: -1*
8	$tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	*Ответ: -1*
9	$\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$	*Ответ:* $\frac{\sqrt{3}}{2}$
10	$\sin\frac{7\pi}{6}$	*Ответ:* $-\frac{1}{2}$

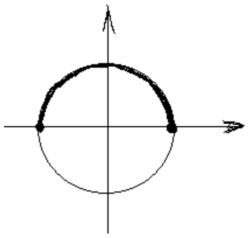
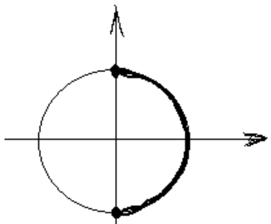
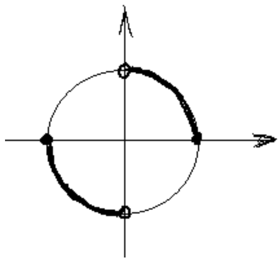
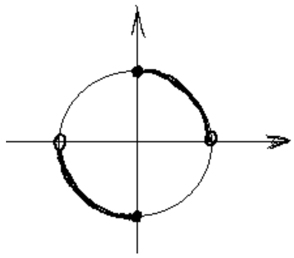
1 шаг решения тригонометрического уравнения: исследование ОДЗ.

Исследовать ОДЗ: определить, имеются ли в уравнении ограничения, накладываемые на переменную или функцию.

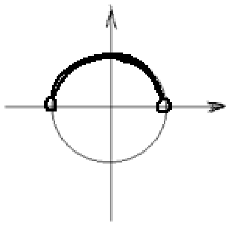
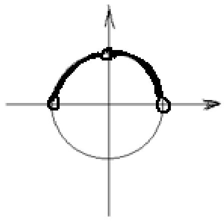
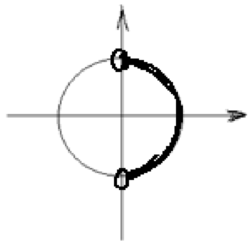
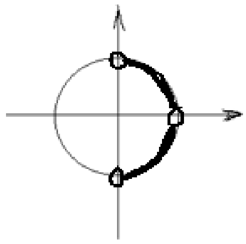
а) если уравнение содержит дробь, то знаменатель не равен нулю.

$\frac{\dots\,.\,\dots\,.}{\sin x}$	$\frac{\dots\,\dots\,.}{\cos x}$	$\frac{\dots\,\dots}{\operatorname{tg} x}$	$\frac{\dots\,\dots}{\operatorname{ctg} x}$
 $\mathbf{\sin x \neq 0}$	 $\mathbf{\cos x \neq 0}$	 $\boldsymbol{tgx \neq 0}$	 $\mathbf{ctg\, x \neq 0}$

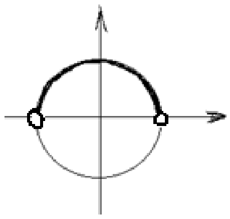
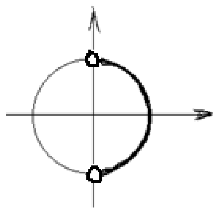
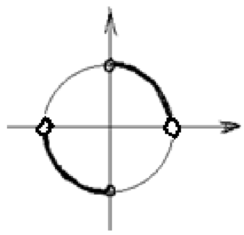
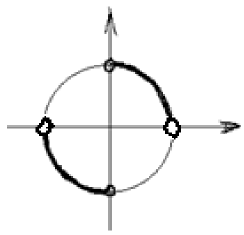
б) Если под квадратным корнем тригонометрическое выражение, то решения неравенства целесообразно показать на тригонометрическом круге, показав тем самым, при каких значениях переменной имеет смысл выражение.

………$\sqrt{\sin x}$	…………$\sqrt{\cos x}$	………..$\sqrt{\operatorname{tg} x}$	………..$\sqrt{\operatorname{ctg} x}$
 $\mathbf{\sin \boldsymbol{x} \geq 0}$	 $\mathbf{\cos \boldsymbol{x} \geq 0}$	 $\mathbf{tg\, \boldsymbol{x} \geq 0}$	 $\mathbf{ctg\, \boldsymbol{x} \geq 0}$

в) если уравнение содержит логарифм, то подлогарифмическое выражение больше нуля;

........$\log_a(\sin x)$	$\dfrac{\dots\dots}{\log_a(\sin x)}$	..........$\log_a(\cos x)$	$\dfrac{\dots\dots}{\log_a(\cos x)}$
 $\mathbf{\sin x > 0}$	 $\begin{cases}\sin x > 0\\ \sin x \neq 1\end{cases}$	 $\mathbf{\cos x > 0}$	 $\begin{cases}\cos x > 0\\ \cos x \neq 1\end{cases}$

г) если уравнение содержит tg x, то он не существует в точках $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ *и* $\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

$\frac{\dots\ \dots}{\sqrt{\sin x}}$	$\frac{\dots\ \dots}{\sqrt{\cos x}}$	$\frac{\dots\ \dots}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$	$\frac{\dots\ \dots}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$
 $\mathbf{\sin x > 0}$	 $\mathbf{\cos x > 0}$	 $\mathbf{\operatorname{tg} x > 0}$	 $\mathbf{\operatorname{ctg} x > 0}$

Примеры решения тригонометрических уравнений с ОДЗ из открытого банка заданий (ограничения для переменной)

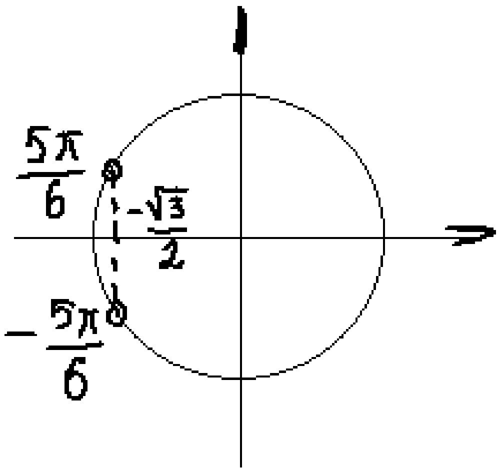
$$\frac{2\sin x - 1}{2\cos x + \sqrt{3}} = 0$$

Левая часть уравнения представлена в виде дроби, значит знаменатель не должен обратиться в нуль. Поставим ограничение $2\cos x + \sqrt{3} \neq 0$.

$2\cos x \neq -\sqrt{3}$; $\cos x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При дальнейшем решении уравнения исключим семейства $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$;

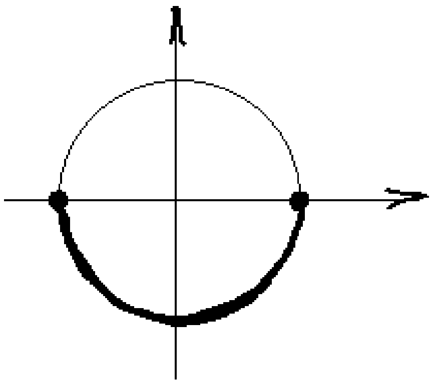
$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \epsilon Z$ из возможных ответов.



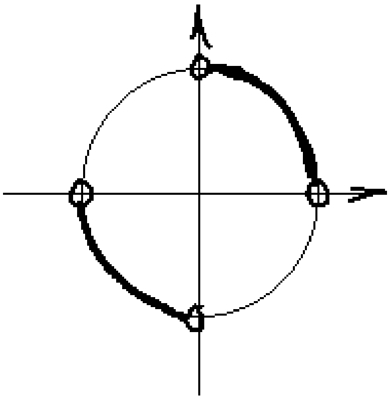
$$\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)\sqrt{-\sin x}=0$$

Левая часть уравнения содержит корень квадратный, значит подкоренному выражению поставим условие: $-\sin x \geq 0; \quad \sin x \leq 0$

При дальнейшем решении уравнения в ответ выпишем только те семейства корней, которые принадлежат выделенной части окружности.



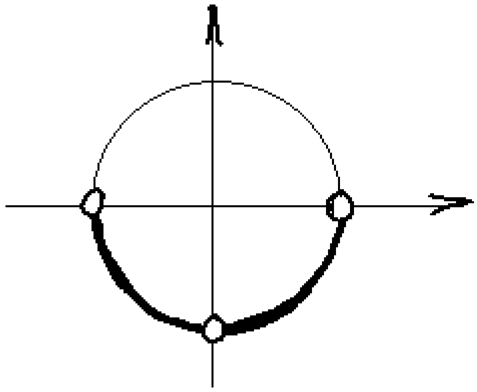
$$(2\sin x - 1)\log_6(tg\,x) = 0$$



Левая часть уравнения содержит логарифм, значит подлогарифмическому выражению поставим условие: $tgx > 0$

При дальнейшем решении уравнения в ответ выпишем только те семейства корней, которые принадлежат выделенной части окружности.

$$\frac{2\cos x + 1}{\log_2(-\sin x)} = 0$$



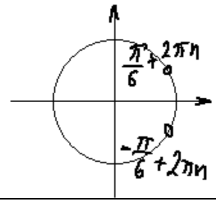
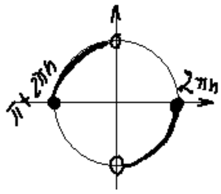
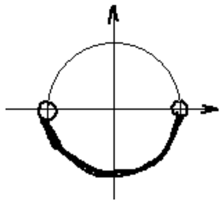
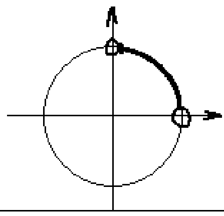
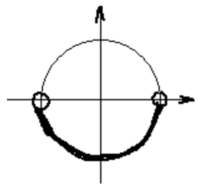
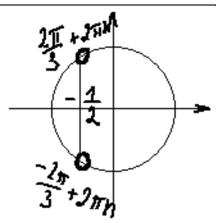
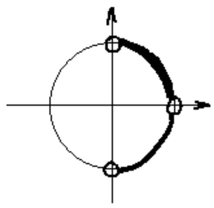
Левая часть уравнения представлена в виде дроби, значит знаменатель не должен обратиться в нуль. Поставим ограничение $\log_2(-\sin x) \neq 0$; $-\sin x \neq 1$; $\sin x \neq -1$.

Левая часть уравнения содержит логарифм, значит подлогарифмическому выражению поставим условие: $-\sin x > 0$; $\sin x < 0$.

При дальнейшем решении уравнения в ответ выпишем только те семейства корней, которые принадлежат выделенной части окружности.

Подборка заданий на нахождение значений переменной, при которой имеет смысл уравнение (для самостоятельного выполнения)

При каких значениях переменной имеет смысл уравнение. Проиллюстрируйте на тригонометрической окружности.

1	$\dfrac{2\sin x - 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$	*Условие:* 
2	$(2\sin x + \sqrt{3})\sqrt{-\operatorname{tg} x} = 0$	*Условие:* 
3	$\dfrac{\operatorname{ctg} x + 1}{\sqrt{-\sin x}} = 0$	*Условие:* 
4	$\log_7(\sin x) = \log_7(\cos x)$	*Условие:* 
5	$\dfrac{2\cos x + 1}{\log_2(-\sin x)} = 0$	*Условие:* 
6	$\dfrac{2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x}{2\cos x + 1} = 0$	*Условие:* 
7	$\dfrac{2\sin^2 x - \sin x}{\log_2(\cos x)} = 0$	*Условие:* 

2 шаг решения тригонометрического уравнения: привести углы к одинаковому виду.

Чаще других встречаются такие сочетания углов:

1) Аргументы отличаются ровно в два раза.

Примеры аргументов

<table>
<tr><td rowspan="5">1</td><td>x</td><td>$2x$</td></tr>
<tr><td>$\frac{x}{2}$</td><td>x</td></tr>
<tr><td>$2x$</td><td>$4x$</td></tr>
<tr><td>$x+\frac{\pi}{6}$</td><td>$2x+\frac{\pi}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Применяем формулы двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$</td></tr>
</table>

Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул двойного угла из открытого банка заданий (преобразование уравнений)

$$\mathbf{2\cos 2x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0}$$

Применив формулу косинуса двойного аргумента

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

и основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, получаем уравнение $2(2\cos^2 x - 1) + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$,

$$4\cos^2 x - 2 + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0,$$

$$4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 9 = 0.$$

Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному.

$$\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x = \sin x$$

Применив формулу синуса двойного аргумента $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, получаем уравнение $\cos^2 x - \frac{1}{2} \cdot 2\sin x \cos x + \cos x - \sin x = 0$,

$$\cos^2 x - \sin x \cos x + \cos x - \sin x = 0.$$

Это тригонометрическое уравнение решается способом разложения на множители левой части уравнения.

$$\cos x\,(\cos x - \sin x) + (\cos x - \sin x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + 1) = 0.$$

Каждый множитель приравнивается к нулю и уравнение распадается на два.

$$\mathbf{\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{2}}$$

Легко заметить, что $2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2x+\frac{\pi}{3}$, применив формулу косинуса двойного аргумента $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ и основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, получим уравнение

$$1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{5}{2}=0,$$

$$-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{3}{2}=0.$$

Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному.

Подборка заданий на применение формул двойного угла (для самостоятельного выполнения)

Упростите выражение:

1	$\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$	*Ответ:* $2\cos\alpha$
2	$\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$	*Ответ:* $\cos^2\alpha$
3	$\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$	*Ответ:* $\cos\alpha + \sin\alpha$
4	$\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}$	*Ответ: 2*
5	$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin 2\alpha$	*Ответ: 1*
6	$\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha}$	*Ответ: 1*
7	$\dfrac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}$	*Ответ:* $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$
8	$\dfrac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$	*Ответ:* $2\sin\alpha$
9	$\dfrac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha}$	*Ответ:* $\operatorname{tg}\alpha$

2) Аргументы отличаются знаком.

Примеры аргументов

<table>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>x</td><td>-x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Применяем чётность (нечётность) тригонометрических функций:
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,;\quad tg(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha\,;$
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$</td></tr>
</table>

Примеры решения тригонометрических уравнений с применением чётности и нечётности тригонометрических функций из открытого банка заданий

$$\mathbf{\cos 2x + \sin(-x) - 1 = 0}$$

Синус нечётная функция, поэтому $\sin(-x) = -\sin x$. Получаем уравнение $\cos 2x - \sin x - 1 = 0$.

Применив формулу косинуса двойного аргумента

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

и основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, получаем уравнение $1 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$,

$$-2\sin^2 x - \sin x = 0,$$

$$2\sin^2 x + \sin x = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение $\sin x\,(2\sin x + 1) = 0$, которое распадётся на два простейших уравнения.

$\mathbf{2\sin 2x + 2\sin(-x) - 2\cos(-x) + 1 = 0}$

Синус нечётная функция, поэтому $\sin(-x) = -\sin x$. Косинус чётная функция, поэтому $\cos(-x) = \cos x$. Получаем уравнение

$$2\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 1 = 0.$$

Применив формулу синуса двойного аргумента $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, получаем уравнение $2 \cdot 2\sin x \cos x - 2\sin x - 2\cos x + 1 = 0$,

$$4\sin x \cos x - 2\sin x - 2\cos x + 1 = 0.$$

Это тригонометрическое уравнение решается способом разложения на множители левой части уравнения.

$$2\sin x\,(2\cos x - 1) - (2\cos x - 1) = 0,$$

$$(2\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0.$$

Каждый множитель приравнивается к нулю и уравнение распадается на два.

Подборка заданий на применение чётности и нечётности тригонометрических функций (для самостоятельного выполнения)

Упростите выражение:

1	$\dfrac{1-\cos^2 t}{1-\sin^2(-t)}+\operatorname{tg}(-t)\cdot\operatorname{ctg}(-t)$	*Ответ:* $\frac{1}{\cos^2 t}$
2	$\dfrac{\sin^2 t+\cos^2(-t)}{\operatorname{tg}^2(-t)\cos^2 t}-\dfrac{\cos^2 t}{1-\cos^2(-t)}$	*Ответ: 1*
3	$\dfrac{\cos^2 t}{1+\sin(-t)}-\sin^2(-t)-\cos^2 t$	*Ответ:* $\sin t$
4	$\dfrac{\sin^2(-t)}{1+\cos(-t)}-\sin(-t)\cdot\operatorname{ctg} t$	*Ответ: 1*

Аргументы представлены в виде суммы или разности, одно из слагаемых угол, не лежащий на осях.

Примеры аргументов

<table>
<tr><td rowspan="4">3</td><td>x</td><td>$\frac{\pi}{3} + x$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$x - \frac{\pi}{6}$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$x + \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Применяем формулы суммы или разности углов:
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$;
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$</td></tr>
</table>

Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул сложения из открытого банка заданий (преобразование уравнений)

$$\mathbf{2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x}$$

Применив формулу синуса суммы двух аргументов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

получим

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x.$$

Получим уравнение $2\sin^2 x + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) - \cos x = 0,$

$$2\sin^2 x + \sin x + \cos x - \cos x = 0,$$

$$2\sin^2 x + \sin x = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение $\sin x\,(2\sin x + 1) = 0$, которое распадётся на два простейших уравнения.

$$\mathbf{\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x}$$

Заметим, что $2x+\frac{\pi}{6}=x+\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. Перепишем уравнение в виде

$$\sin\left(x+\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)-\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x=0$$

Применив формулу синуса суммы двух аргументов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

получим

$$\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x=0,$$

$$\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos x=0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение

$$\cos x\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\right)=0$$

которое распадётся на два простейших уравнения:

$$\cos x=0 \qquad \text{или} \qquad \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=0.$$

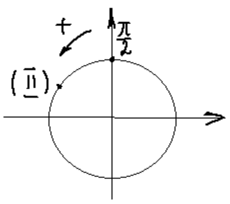
Подборка заданий на применение формул сложения (для самостоятельного выполнения)

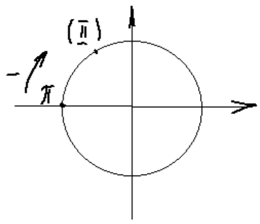
Упростите выражение:

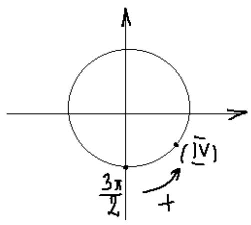
1	$\sin(30^0+\alpha)-\cos(60^0+\alpha)$	*Ответ:* $\sqrt{3}\sin\alpha$
2	$\sqrt{2}\sin(\alpha-45^0)-\sin\alpha+\cos\alpha$	*Ответ: 0*
3	$cos\frac{3\pi}{8}sin\frac{\pi}{8}-sin\frac{3\pi}{8}sin\frac{\pi}{8}$	*Ответ: 0*
4	$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$	*Ответ:* $-2\sin\alpha\sin\beta$
5	$2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$	*Ответ: 0*
6	$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$	*Ответ: 1*
7	$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha$	*Ответ: -1*
8	$\cos 36^0\cos 24^0-\sin 36^0\sin 24^0$	*Ответ:* $\frac{1}{2}$

Аргументы представлены в виде суммы или разности, одним из слагаемых которой является угол, лежащий на координатной оси: $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π.

Примеры аргументов

<table>
<tr><td rowspan="6">4</td><td colspan="2">x</td><td>$\frac{\pi}{2}+x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">x</td><td>$\pi-x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">x</td><td>$\frac{3\pi}{2}-x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">x</td><td>$2\pi-x$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Применяем формулы приведения:
• если откладываем угол от вертикальной оси, то приводимая функция меняет название, если от горизонтальной – нет;
• если в скобках знак «+», то откладываем угол против часовой стрелки, если знак «-», то откладываем угол по часовой стрелке;
• знак новой функции совпадает со знаком приводимой функции.</td></tr>
<tr><td>$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$


$\frac{\pi}{2}$ на вертикальной оси, значит cos поменяется на sin, в скобках знак «+», значит откладываем угол против часовой стрелки, попали во вторую четверть. Во второй четверти $\cos x < 0$, следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$</td><td>$\sin(\pi-x)$


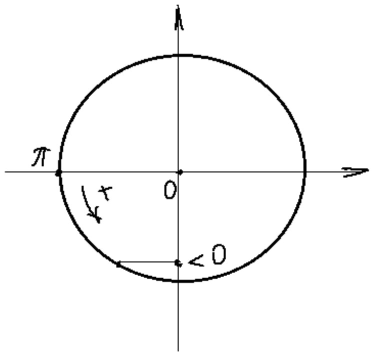
π на горизонтальной оси, следовательно, sin не поменяет название. В скобках знак «-», значит откладываем угол по часовой стрелке, попадём во вторую четверть. Во второй четверти $\sin x > 0$, значит, $\sin(\pi-x) = \sin x$</td><td>$tg\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$


$\frac{3\pi}{2}$ на вертикальной оси, следовательно, tg поменяется на ctg. В скобках знак «+», значит откладываем угол против часовой стрелки, попадём в четвёртую четверть. В четвёртой четверти $\mathrm{tg}\, x < 0$, значит, $tg\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\mathrm{ctg}\, x$</td></tr>
</table>

Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул приведения из открытого банка заданий (преобразование уравнений)

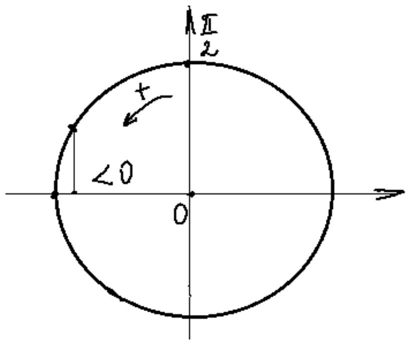
$$2\sin(\pi + x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

Преобразуем $\sin(\pi + x)$. В скобке дано $\pi + x$, значит синус не изменится. Теперь нужно определиться со знаком ответа. Нарисуем схематично тригонометрическую окружность. Находим π, нужно прибавить x, значит движемся против часовой стрелки, попадаем в 3 четверть, смотрим знак оси синусов, в данном случае синус отрицательный.



Записываем ответ $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

Преобразуем $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. В скобках дано $\frac{\pi}{2} + x$, значит косинус поменяется на синус. Теперь нужно определиться со знаком ответа. Нарисуем схематично тригонометрическую окружность. Находим $\frac{\pi}{2}$, нужно прибавить x, значит движемся против часовой стрелки, попадаем во вторую четверть. Смотрим знак оси косинусов, в данном случае косинус отрицательный. Записываем ответ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

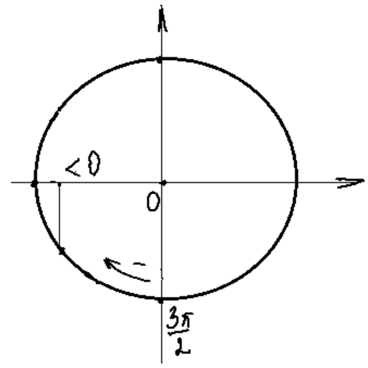


Уравнение преобразуется $-2\sin x \cdot (-\sin x) = \sin x$,

$$2\sin^2 x - \sin x = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение $\sin x\,(2\sin x - 1) = 0$, которое распадётся на два простейших уравнения.

$2\cos^2 x + 1 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$



Преобразуем $\cos\left(\frac{3\Pi}{2} - x\right)$. В скобках дано $\frac{3\pi}{2} - x$, значит косинус поменяется на синус. Теперь нужно определиться со знаком ответа. Нарисуем схематично тригонометрическую окружность. Находим $\frac{3\pi}{2}$, нужно вычесть *x*, значит движемся по часовой стрелке, попадаем в третью четверть.

Смотрим знак оси косинусов, в данном случае косинус отрицательный. Записываем ответ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$.

Исходное уравнение запишется в виде $2\cos^2 x + 1 = -2\sqrt{2}\sin x$,

$$2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0.$$

Применив основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, получаем уравнение $2(1 - \sin^2 x) + 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$,

$$2 - 2\sin^2 x + 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0,$$

$$-2\sin^2 x + 2\sqrt{2}\sin x + 3 = 0.$$

Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному.

Подборка заданий на применение формул приведения (для самостоятельного выполнения)

Упростите выражение:

1	$\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$	*Ответ:* $-\frac{1}{2}$
2	$\dfrac{2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$	*Ответ:* -2
3	$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)sin(2\pi-\alpha)$	*Ответ:* $\cos\alpha$
4	$\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$	*Ответ:* $-\cos\alpha$
5	$\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$	*Ответ:* $\cos^2\alpha$
6	$\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}$	*Ответ:* $-\cos^2\alpha$
7	$\dfrac{\sin(3\pi+\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-2\alpha)}$	*Ответ:* $-\frac{1}{2}$
8	$\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\alpha}+\alpha\right)},\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}$	*Ответ:* $\sin\alpha$

3 шаг решения тригонометрического уравнения: привести функции к одному виду (если это возможно) или определить вид уравнения и способы его решения с разными функциями.

Примеры решения тригонометрических уравнений с разными функциями из открытого банка ЕГЭ

Чаще всего встречающиеся комбинации:

В записи уравнения есть $\boldsymbol{sin^2\,x \pm sin\,x} \pm$ *число*

Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному. Целесообразно введение новой переменной.

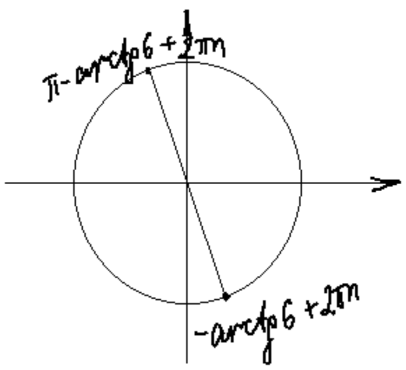
Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

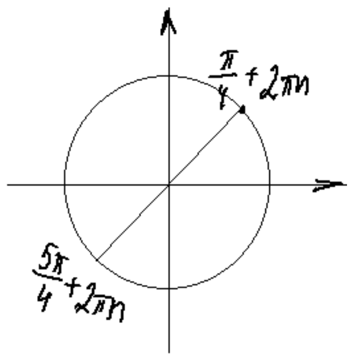
$$\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x - 6 = 0$$

Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда исходное уравнение перепишется в виде $t^2 + 5t - 6 = 0$.

Решаем любым способом квадратное уравнение. Получим корни $t_1 = -6$; $t_2 = 1$.

Обратная замена: $\operatorname{tg} x = -6$ $\qquad$ $\operatorname{tg} x = 1$





Ответ: $-\operatorname{arctg} 6 + \pi n$; $\quad \frac{\pi}{4} + \pi n$, $\quad n \in Z$.

В записи уравнения есть $\sin^2 x \pm \cos x \pm$ *число*

По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ заменить функцию в квадрате $\sin^2\alpha = (1 - \cos^2\alpha)$. Новое уравнение с одноимённой функцией приведётся к квадратному.

Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

$$8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$

$$8(1 - \cos^2 x) + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$

$$8 - 8\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$

$$-8\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 9 = 0$$

$$8\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x - 9 = 0$$

Пусть $\cos x = t, \quad -1 \le t \le 1$. Тогда исходное уравнение перепишется в виде

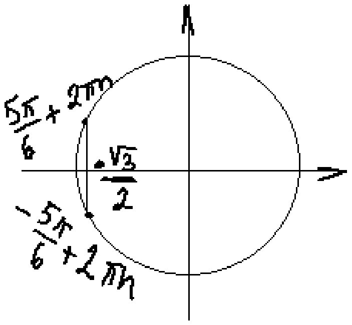
$$8t^2 - 2\sqrt{3}t - 9 = 0$$

$$D = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-9) = 12 + 288 = 300; \qquad \sqrt{D} = 10\sqrt{3}$$

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3} - 10\sqrt{3}}{2 \cdot 8} = \frac{-8\sqrt{3}}{2 \cdot 8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t_2 = \frac{2\sqrt{3} + 10\sqrt{3}}{2 \cdot 8} = \frac{12\sqrt{3}}{2 \cdot 8} = \frac{6\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \notin [-1; 1]$$

Обратная замена: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Ответ: $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \;\; n \epsilon Z$

В записи уравнения есть $a \sin x \pm b \cos x = 0$ *. Разные функции, обе в первой степени.*

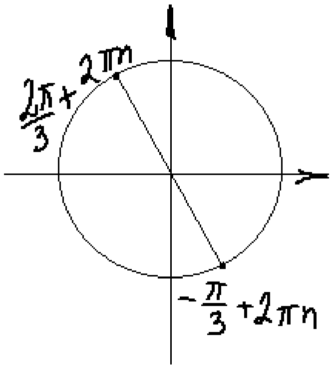
Это однородное уравнение первой степени. Решается путём деления на $\cos x \neq 0$. Преобразуется в простейшее уравнения первой степени с функцией $\operatorname{tg} x$

Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \ /{:}\ \cos x \neq 0$$

$$tgx + \sqrt{3} = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$



Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \epsilon z$

В записи уравнения есть $\sin^2 x \pm \sin x \cos x \pm \cos^2 x +$ число

Это однородное уравнение второй степени. Решается путём деление на $\cos^2 x \neq 0$. Предварительно заменить число с помощью основного тригонометрического тождества на сумму $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Преобразуется в уравнение, приводимое к квадратному относительно $\operatorname{tg} x$

Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

$$5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$$

$$5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$$

$$3\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0 \mid : \cos^2 x \neq 0$$

$$3\operatorname{tg}^2 x - 14\operatorname{tg} x - 5 = 0$$

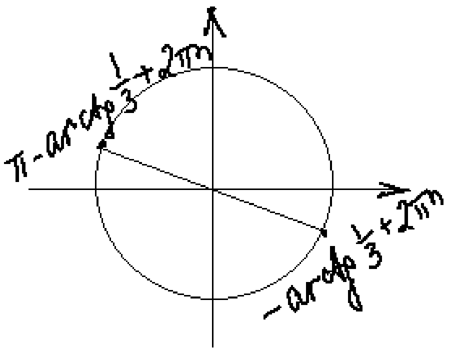
Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда уравнение перепишется так $3t^2 - 14t - 5 = 0$

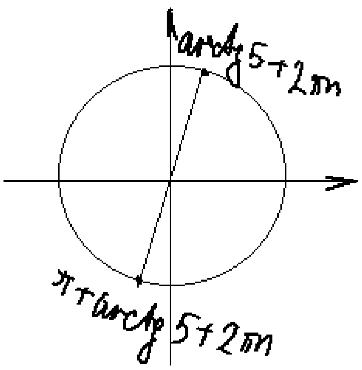
$$D = (-14)^2 - 4\cdot 3\cdot(-5) = 196 + 60 = 256, \quad \sqrt{256} = 16$$

$$t_1 = \frac{14-16}{2\cdot 3} = \frac{-2}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3}$$

$$t_2 = \frac{14+16}{2\cdot 3} = \frac{30}{2\cdot 3} = 5$$

Обратная замена $\quad tgx = -\frac{1}{3} \qquad\qquad \operatorname{tg} x = 5$





Ответ: $\operatorname{arctg} 5 + \pi n$; $\quad -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in z$

Во многих случаях уравнение удаётся представить в таком виде, что в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части — ноль. Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю. Сложное уравнение, таким образом, распадается в совокупность более простых.

Уравнение содержит $\sin x \pm \sin x \cos x = 0$

Это уравнение решается путём разложения левой части уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки.

Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

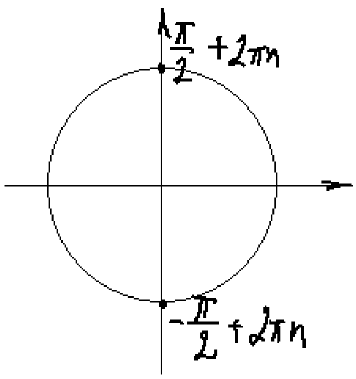
$$\sin 2x - 2\cos x = 0$$

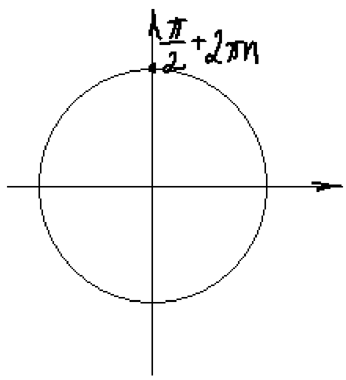
$$2\sin x\cos x - 2\cos x = 0$$

$$2\cos x\,(\sin x - 1) = 0$$

$2\cos x = 0$ или или $\sin x - 1 = 0$

$\cos x = 0$ $\sin x = 1$





Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in z$

Уравнение содержит $\cos^2 x \pm \sin x \cos x = 0$

Это уравнение решается путём разложения на множители левой части уравнения с помощью вынесения общего множителя за скобки.

Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

$$\sin^2 x = 3 \sin x \cos x$$

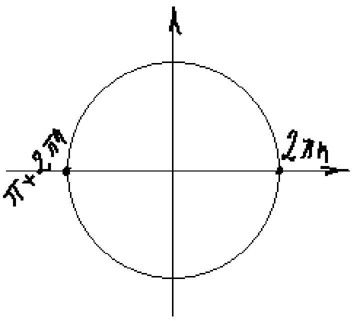
$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x = 0$$

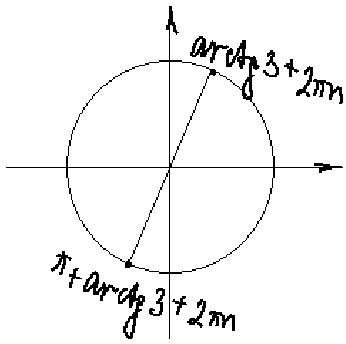
$$\sin x (\sin x - 3 \cos x) = 0$$

$\sin x = 0$ или $\sin x - 3 \cos x = 0 / : \cos x \neq 0$

$$tgx - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 3$$





Ответ: πn; $\operatorname{arctg} 3 + \pi n,$ $n \in z$

Уравнение содержит четыре слагаемых $cos^3 x \pm cos^2 x \pm cos\, x \pm$ *число = 0*

Это уравнение решается путём разложения на множители с помощью способа группировки.

Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

$$\mathbf{\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}}$$

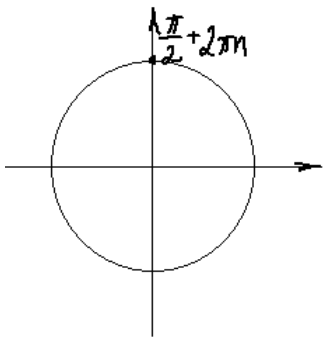
$2\, sin\, x\, cos\, x + \sqrt{2}\, sin\, x - 2\, cos\, x - \sqrt{2} = 0$

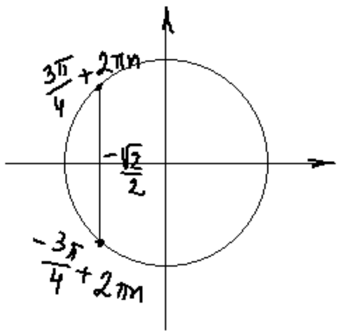
$2\cos x\,(\sin x - 1) + \sqrt{2}(\sin x - 1) = 0$

$(\sin x - 1)\big(2\cos x + \sqrt{2}\big) = 0$

$\sin x - 1 = 0$ или $2\cos x + \sqrt{2} = 0$

$\sin x = 1$ $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$





Ответ: $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \epsilon Z$

Уравнение содержит четыре слагаемых $sin^2 \text{x} \pm sin\, \text{x}\, cos\, \text{x} \pm sin\, \text{x} \pm cos\, \text{x} = 0$

Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий

$$\boldsymbol{cos^2 x - \frac{1}{2} sin\, 2x + cos\, x = sin\, x}$$

$\cos^2 x - \sin x \cos x + \cos x - \sin x = 0$

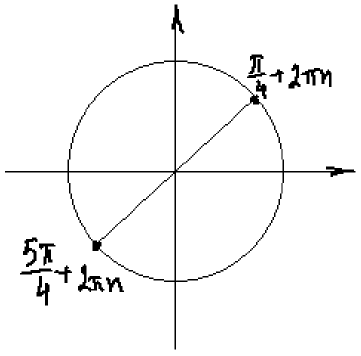
$\cos x\,(\cos x - \sin x) + (\cos x - \sin x) = 0$

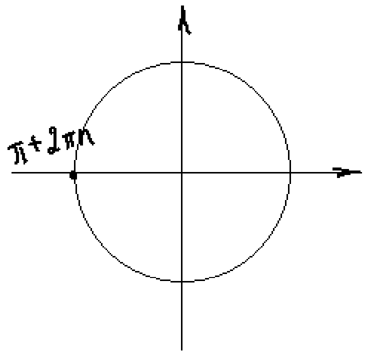
$(\cos x - \sin x)(\cos x + 1) = 0$

$\cos x - \sin x = 0$ или $\cos x + 1 = 0$

$1 - tgx = 0$ $\cos x = -1$

$tgx = 1$





Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n;\quad \pi + 2\pi n,\quad n \in z$

Подборка заданий на решение тригонометрических уравнений (для самостоятельного выполнения)

Определите, к какому виду относится тригонометрическое уравнение из предложенного алгоритма:

1	$\sin 2x + 2\cos^2 x + \cos 2x = 0$	*Ответ: 4*
2	$6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$	*Ответ: 2*
3	$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$	*Ответ: 6*
4	$6\cos x - 7\cos x - 5 = 0$	*Ответ: 1*
5	$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$	*Ответ: 3*
6	$2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0$	*Ответ: 7*
7	$\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$	*Ответ: 5*

4 шаг решения тригонометрического уравнения: решить простейшие тригонометрические уравнения.

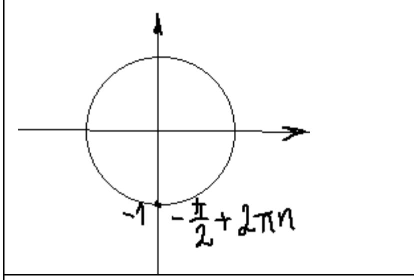
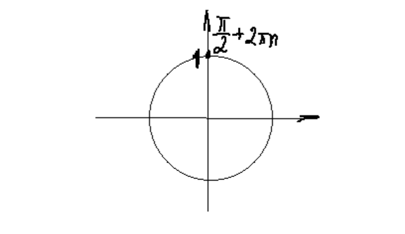
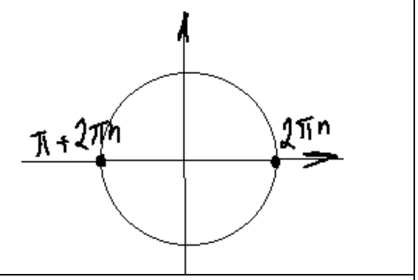
Получить одно, два или три простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

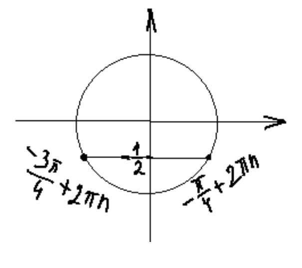
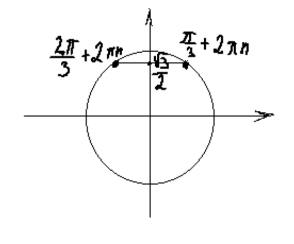
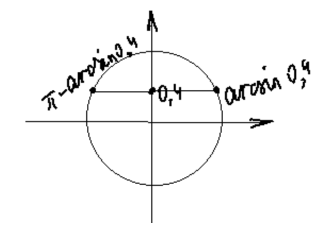
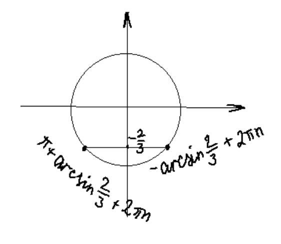
Каждое из этих уравнений легко решается с помощью единичной окружности, на которой изображаются соответствующие точки, после чего с учетом периодичности тригонометрических функций записывается ответ

Примеры решения простейших тригонометрических уравнений с помощью единичной окружности

$$\boldsymbol{\sin x = a;\qquad -1 \le a \le 1}$$

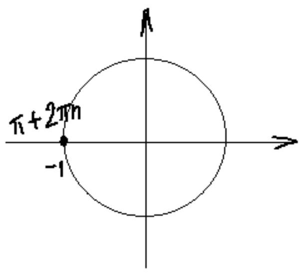
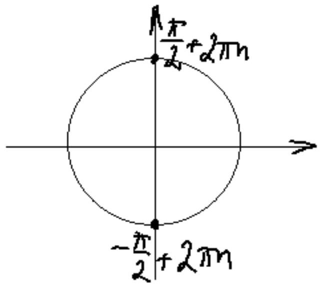
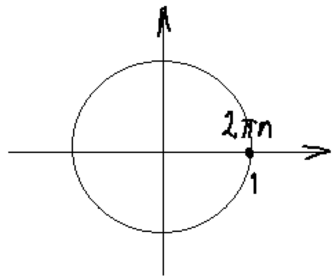
$\sin x = -\sqrt{3}$	Т.к. $-1 \le \sin x \le 1$ следовательно, корней нет

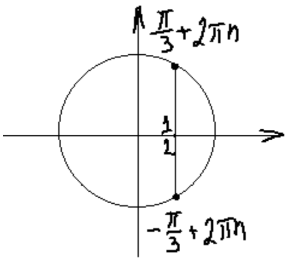
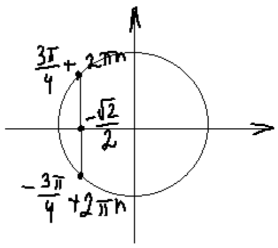
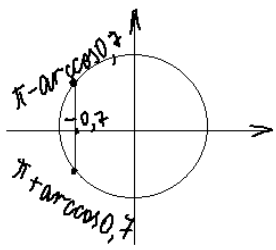
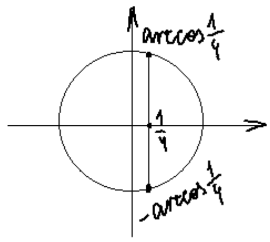
$\sin x = -1$	$\sin x = 1$	$\sin x = 0$
		
Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n \in Z$	Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$	Ответ: $\pi n,\ \ n \in Z$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin x = 0{,}4$	$\sin x = -\frac{2}{3}$
			
Ответ: $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;$ $-\frac{\pi}{4}+2\pi n, \qquad n \epsilon Z$	Ответ: $\frac{\pi}{3}+\pi n;$ $\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in z$	Ответ: $arc \sin 0.4 + 2\pi n;\ \ \pi - \arcsin 0.4 + 2\pi n,\ \ n \in z$	Ответ: $\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n;\ \ \pi + \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n, \qquad n \in Z$

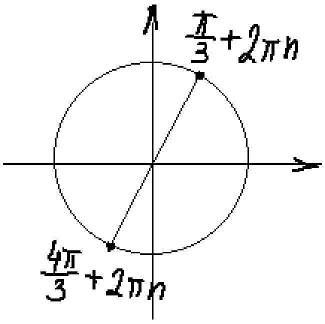
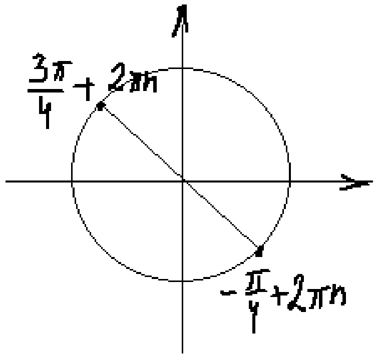
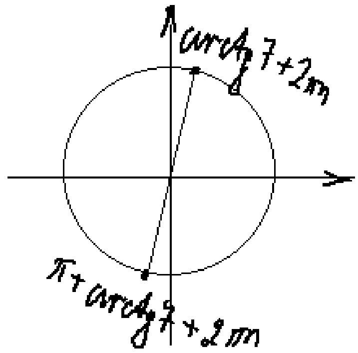
$\cos x = a, \qquad -1 \le a \le 1$

$\cos x = 1{,}3$	Т.к. $-1 \le \cos x \le 1$ следовательно, корней нет

$\cos x = -1$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$
		
Ответ: $\pi + 2\pi n, \quad n \in z$	Ответ:$\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in z$	Ответ: $2\pi n, \quad n \in z$

$\cos x = \frac{1}{2}$	$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x = -0{,}7$	$\cos x = \frac{1}{4}$
			
Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$ $n \epsilon Z$	Ответ: $\pm\frac{3\Pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	Ответ: $\pi \pm \arccos 0,7 + 2\pi n, n \in z$	Ответ: $\pm \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n,$ $n \epsilon Z$

$tg\,x = a$

$\text{tg}\,x = \sqrt{3}$	$\text{tg}\,x = -1$	$tgx = 7$
		
Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in z$ или $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in z$	Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n\epsilon Z$ или $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n\epsilon Z$	Ответ: $ar\,\text{ctg}\,7 + 2\pi n$; $\pi + ar\,\text{ctg}\,7 + 2\pi n, n \in z$ или $\text{arctg}\,7 + \pi n$, $n \in z$

Подборка заданий на решение простейших тригонометрических уравнений (для самостоятельного выполнения)

Решите уравнения:

1	$\cos x = \frac{1}{2}$	*Ответ:* $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n\epsilon Z$
2	$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	*Ответ:* $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n;\ \ \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in z$
3	$tgx = -1$	*Ответ:* $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \ \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in z$
4	$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	*Ответ:* $\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in z$
5	$\sin x = -\frac{1}{3}$	*Ответ:* $-arc \sin\frac{1}{3} + 2\pi n;\ \pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n, n\epsilon z$
6	$\cos x = \frac{\sqrt{7}}{2}$	*Ответ: корней нет*
7	$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$	*Ответ:* $\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{3} + 2\pi n,\ \ n\epsilon z$
8	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	*Ответ:* $\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in z$

Примеры решения тригонометрических уравнений из открытого банка ФИПИ

Курсивом выделены устные рассуждения, необязательные для записи решения.

1) Решите уравнение $\frac{\cos 2x+\sqrt{3}\sin x-1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}=0$

$$\frac{\cos 2x+\sqrt{3}\sin x-1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}=0$$

Выполняем 1 шаг алгоритма.

Левая часть уравнения представлена в виде дроби, следовательно знаменатель дроби не может обратиться в 0.

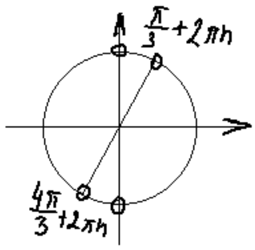
В записи уравнения есть tg, *а* tg *не существует в точках* $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in z$, *выкалываем верхнюю и нижнюю точки окружности*

Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель нет.

Условие:

$$tgx-\sqrt{3}\neq 0$$

$$\operatorname{tg} x\neq\sqrt{3}$$



$$\cos 2x+\sqrt{3}\sin x-1=0$$

Выполняем 2 шаг алгоритма.

Приводим углы к одинаковому виду x.

$cos\,2x=cos^2 x-sin^2 x;$

$$\cos^2 x-\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-1=0$$

Выполняем 3 шаг алгоритма.

Заменим по основному тригонометрическому тождеству $cos^2 x=1-sin^2 x$

$$1-\sin^2 x-\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-1=0$$

$$-2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x=0$$

$$2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x=0$$

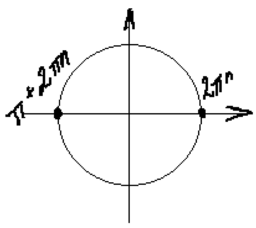
Вынесем $\sin x$ *за скобки как общий множитель*

$$\sin x\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$$

Каждый множитель приравняем к нулю

Выполняем 4 шаг алгоритма.

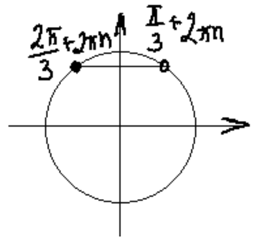
$$\sin x=0$$



$$x=\pi n,\quad n\in z$$

$$2\sin x-\sqrt{3}=0$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



С учётом условия $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in z$

Ответ: $\pi n;\quad \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in z$

2) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$

<table>
<tr>
<td>

$$\frac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$$

Левая часть уравнения представлена в виде дроби, следовательно знаменатель дроби не может обратиться в 0. $\sin x>0$ *(как подлогарифмическое выражение).*
Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель нет.

$$\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)=0$$

$\log_2(\sin x)$ вынесем за скобки как общий множитель

$$(\log_2(\sin x))(\log_2(\sin x)+1)=0$$

Каждый множитель приравняем к нулю

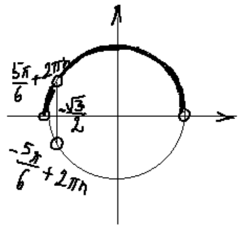
</td>
<td>

Условие:

$$2\cos x+\sqrt{3}\neq 0$$

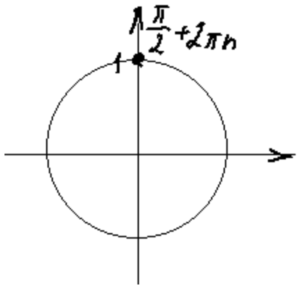
$$\cos x\neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

и $\sin x>0$



</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$\log_2(\sin x)=0$$
$$\log_2(\sin x)=\log_2 1$$
$$\sin x=1$$

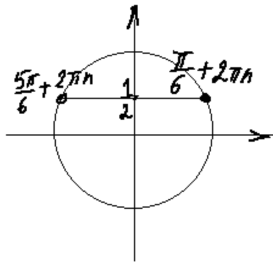


Семейство корней подходит по условию

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in z$

</td>
<td>

$$\log_2(\sin x)+1=0$$
$$\log_2(\sin x)=-1$$
$$\log_2(\sin x)=\log_2 2^{-1}$$
$$\log_2(\sin x)=\log_2\frac{1}{2}$$
$$\sin x=\frac{1}{2}$$



С учётом условия $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in z$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Ответ: $a)\quad \frac{\pi}{6}+2\pi n;\quad \frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in z$

</td>
</tr>
</table>

3) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$

Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно.

$$\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$$

Приводим углы к одинаковому виду x.

$cos\, 2x = cos^2 x - sin^2 x;$ $\quad cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = sin\, x$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$$

Приведём функции к одинаковому виду.

Заменим по основному тригонометрическому тождеству $cos^2 x = 1 - sin^2 x$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$$

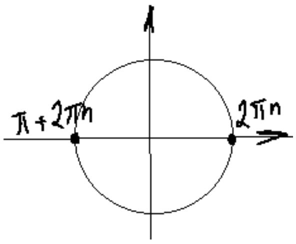
$$-2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0 \ / \ (-1)$$

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = 0$$

Вынесем общий множитель за скобки

$$\sin x\left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0$$

$$\sin x = 0$$

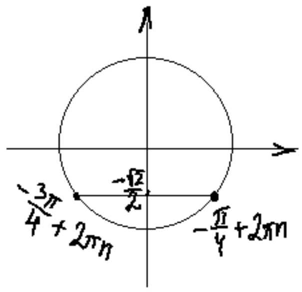


$x = \pi n, \ n \in Z$

$$2\sin x + \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin x = -\sqrt{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z$

Ответ: $a)$ $\quad -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \quad -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad \pi n, \quad n \in z$

4) Решите уравнение $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$

Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно.

<table>
<tr><td colspan="2">

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$$

Приводим углы к одинаковому виду x.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) - \cos x = 0$$

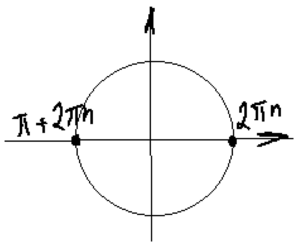
$$2\sin^2 x + \sin x + \cos x - \cos x = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\sin x\,(2\sin x + 1) = 0$$

</td></tr>
<tr><td>

$$\sin x = 0$$



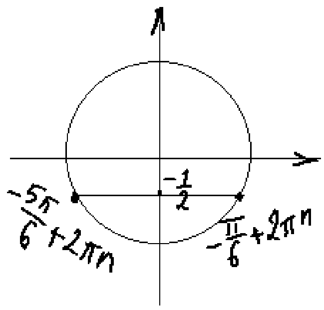
$x = \pi n,\ n \in Z$

</td><td>

$$2\sin x + 1 = 0$$

$$2\sin x = -1$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$



$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \qquad n\epsilon Z$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

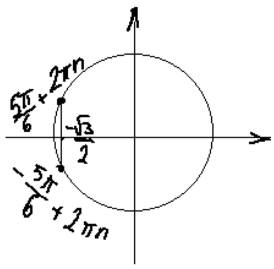
Ответ: $a)\quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \quad \pi n, \quad n \in z$

</td></tr>
</table>

5) Решите уравнение $2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0$

Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно.

Второй шаг решения выполнять не нужно, т.к. углы одинаковые.

<table>
<tr><td colspan="2">Слагаемых четыре, разложим левую часть уравнения на множители с помощью метода группировки.
$$\cos^2 x\left(2\cos x + \sqrt{3}\right) + \left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$$
$$\left(2\cos x + \sqrt{3}\right)(\cos^2 x + 1) = 0$$</td></tr>
<tr><td>$$2\cos x + \sqrt{3} = 0$$
$$2\cos x = -\sqrt{3}$$
$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$


$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in z$$</td><td>$$\cos^2 x + 1 = 0$$
$$\cos^2 x = -1$$
Корней нет</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ответ: $a)$ $\quad -\frac{5\Pi}{6} + 2\pi n; \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in z$</td></tr>
</table>

6) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)=0$

Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно.

<table>
<tr><td colspan="2">

$$2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)=0$$

Приводим углы к одинаковому виду x с помощью формул приведения.

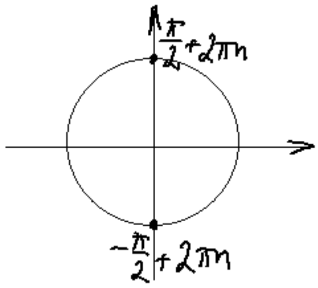
$sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-cos\,x$; $sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=cos^2 x$; $cos(\pi-x)=-cos\,x$

$$2\cos^2 x-\cos x=0$$

$$\cos x\,(2\cos x-1)=0$$

</td></tr>
<tr><td>

$$\cos x=0$$



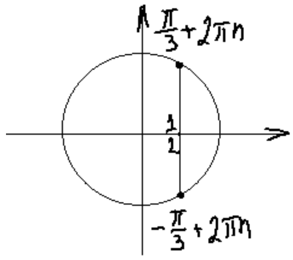
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in z$$

</td><td>

$$2\cos x-1=0$$

$$2\cos x=1$$

$$\cos x=\frac{1}{2}$$



$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\epsilon Z$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Ответ: $a)\quad \frac{\pi}{2}+\pi n;\quad \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\epsilon Z$

</td></tr>
</table>

Подборка заданий на решение тригонометрических уравнений (для самостоятельного выполнения)

Решите уравнения:

1	$\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	*Ответ:* $2\pi n;\quad \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$
2	$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$	*Ответ:* $2\pi n;\quad \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$
3	$2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$	*Ответ:* $\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n;$ $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n;\quad \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} +$ $+2\pi n,\ n \in Z$
4	$\sin 2x = 2\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1$	*Ответ:* $2\pi n;$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in z$
5	$(\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13\cos x} = 0$	*Ответ:* $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\quad n\epsilon Z$
6	$(2\sin x + 1)\sqrt{-\sin x - 1} = 0$	*Ответ:* $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;$ $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$
7	$\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\sqrt{7\sin x}} = 0$	*Ответ:* $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\quad n \in z$
8	$\frac{\left(tgx + \sqrt{3}\right) log_{13}(2\,sin^2 x)}{log_{47}\left(\sqrt{2}\,cos\,x\right)} = 0$	*Ответ:* $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\quad n\epsilon Z$