

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ БЕЛГОРОДСКОЙ ОБЛАСТИ

Областное государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования

«Белгородский институт развития образования» (ОГАОУ ДПО «БелИРО»)

Кафедра естественно-математического и технологического образования

## Готовимся к экзаменам. Математика

Решение тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ за 4 шага

Учебно-методическое пособие

## Белгород

**2023**

ББК 74.262.6

Р 47

Печатается по решению редакционно-издательского совета ОГАОУ ДПО «Белгородский институт образования»

**Рецензенты:**

*Л.Н. Куртова*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования НИУ «БелГУ»;

*В.А. Есин*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественно- математического и технологического образования ОГАОУ ДПО «БелИРО».

**Автор-составитель:**

*Т.Д. Семенова*, учитель математики областного государственного бюджетного образовательного учреждения «Борисовская средняя общеобразовательная школа имени Героя Советского Союза А.М. Рудова».

Р 47 **Решение тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ за 4 шага :** учебно-методическое пособие / ОГАОУ «БелИРО» ; отв. ред. Э. Н. Щербакова. – Белгород : ОГАОУ ДПО «БелИРО», 2023. – 47 с. – URL: https://beliro.ru/uploads/ attachedfiles/7928/sbornik-trigonometricheskie-uravneniya-za-4-

shaga\_09-01-2024\_10-20-58.pdf

В учебно-методическом пособии рассматривается методика решения тригонометрических уравнений. Содержательную основу пособия составляют типовые задания ЕГЭ, охватывающие применение основных формул тригонометрии, значений тригонометрических функций некоторых углов; этапы решения тригонометрических уравнений, представленных в открытом банке ЕГЭ.

Пособие поможет учителям сделать уроки математики интересными, позволит объяснить тему, чтобы было понятно любому обучающемуся.

Обучающиеся найдут ответы на непростые вопросы и отлично освоят приемы решения тригонометрических уравнений, которые позволят сэкономить время для решения заданий ЕГЭ с развернутым ответом.

ББК 74.262.6

© ОГАОУ ДПО «БелИРО», 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |  |
| --- | --- |
| Предисловие | 5 |
| Понятие тригонометрического круга и принцип работы с ним | 6 |
| Примеры вычисления значений синуса и косинуса некоторых углов  с помощью единичной окружности | 9 |
| Подборка заданий на нахождение значений тригонометрических  функций (для самостоятельного выполнения) | 9 |
| Результаты экзамена участников в соответствии с их уровнем  предметной подготовки | 10 |
| Алгоритм решения тригонометрического уравнения | 11 |
| Отработка 1 шага алгоритма | 11 |
| Примеры нахождения значений переменной, при которых имеет смысл  выражение | 11 |
| Подборка заданий на нахождение значений переменной, при которой  имеет смысл выражение (для самостоятельного выполнения) | 12 |
| Примеры решения неравенств | 14 |
| Подборка заданий на нахождение значений переменной, при которой  имеет смысл выражение (для самостоятельного выполнения) | 14 |
| Примеры решения тригонометрических уравнений с ОДЗ из открытого  банка заданий (ограничения для переменной) | 16 |
| Подборка заданий на нахождение значений переменной, при которой  имеет смысл уравнение (для самостоятельного выполнения) | 17 |
| Отработка 2 шага алгоритма | 18 |
| Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул двойного угла из открытого банка заданий (преобразование  уравнений) | 19 |
| Подборка заданий на применение формул двойного угла (для  самостоятельного выполнения) | 20 |
| Примеры решения тригонометрических уравнений с применением  чётности и нечётности тригонометрических функций из открытого банка заданий | 21 |
| Подборка заданий на применение чётности и нечётности  тригонометрических функций (для самостоятельного выполнения) | 22 |
| Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул сложения из открытого банка заданий (преобразование  уравнений) | 23 |
| Подборка заданий на применение формул сложения (для  самостоятельного выполнения) | 23 |
| Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул приведения из открытого банка заданий (преобразование  уравнений) | 25 |
| Подборка заданий на применение формул приведения (для  самостоятельного выполнения) | 26 |

|  |  |
| --- | --- |
| Отработка 3 шага алгоритма | 27 |
| Примеры решения тригонометрических уравнений с разными  функциями из открытого банка ЕГЭ | 28 |
| Подборка заданий на решение тригонометрических уравнений (для  самостоятельного выполнения) | 33 |
| Отработка 4 шага алгоритма | 33 |
| Примеры решения простейших тригонометрических уравнений  с помощью единичной окружности | 34 |
| Подборка заданий на решение простейших тригонометрических  уравнений (для самостоятельного выполнения) | 36 |
| Примеры решения тригонометрических уравнений из открытого банка  ФИПИ | 37 |
| Подборка заданий на решение тригонометрических уравнений (для  самостоятельного выполнения) | 41 |
| Способы отбора корней тригонометрического уравнения | 42 |
| Примеры заданий на отбор корней тригонометрического уравнения  на заданном промежутке | 43 |
| Подборка заданий на отбор корней тригонометрических уравнений  на заданном промежутке (для самостоятельного выполнения) | 45 |
| Литература | 47 |
| Электронные ресурсы | 47 |

**Предисловие**

Единый государственный экзамен является одним из важных этапов в жизни выпускников одиннадцатого класса. Экзаменационные баллы играют ключевую роль при поступлении в высшие учебные заведения. В рамках данного экзамена одним из заданий является решение тригонометрических уравнений. Тригонометрия, как раздел математики, представляет собой достаточно сложный материал в школьном курсе «Алгебра и начала математического анализа». Для того, чтобы успешно справиться с заданиями, связанными с тригонометрическими уравнениями, необходимо запомнить множество формул, методов решения и подходов для отбора корней.

Готовность обучающегося к экзамену включает умение выполнять предложенные задания, умение выбирать подходящие задания, способность к самоконтролю, управление временем, психологическую устойчивость и способность концентрироваться. Тригонометрические уравнения всегда присутствовали среди заданий на экзамене, и процент успешного их выполнения составляет около 45%. Основные недостатки подготовки обучающихся при решении тригонометрических уравнений включают ошибки в формулах, не учитывается область определения, неправильное применение тригонометрических формул, незнание свойств тригонометрических функций, неумение отбирать корни, удовлетворяющие ограничениям и непонимание тригонометрической окружности.

Чтобы достичь безошибочного решения тригонометрических уравнений, необходимо решить большое количество задач, ознакомиться с различными методами и подходами. Задачей преподавателя является разработка системы работы и поиск дополнительных инструментов для облегчения обучения. Данное методическое пособие направлено на улучшение процесса обучения решению тригонометрических уравнений повышенной сложности для успешной сдачи единого государственного экзамена по математике. Цель пособия заключается в последовательной подготовке выпускников, которая основывается на разработке методов и приемов, основанных на выявлении особенностей решения тригонометрических уравнений.

В учебно-методическом пособии представлены различные методы решения тригонометрических уравнений, которые помогут учащимся не тратить время и получить дополнительные баллы на экзамене. В сборнике представлено множество приемов, которые сделают уроки интересными и помогут понять тему легче и быстрее. В пособии также представлены QR- коды и ссылки на портал «Российская электронная школа», где обучающиеся смогут повторить забытые факты, а учителя – провести уроки повторения.

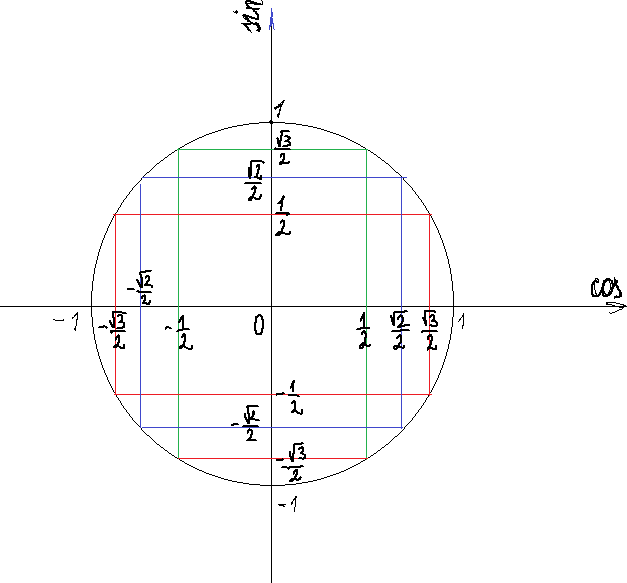
Также в пособии представлены шаблоны и классификация типичных тригонометрических уравнений с примерами решений. Пособие содержит задания повышенной сложности и предназначено для учителей математики общеобразовательных школ, а также для старшеклассников и студентов. Все

уравнения, представленные в пособии, взяты из открытого сегмента банка заданий по математике для единого государственного экзамена.

Учебно-методическое пособие соответствует требованиям федерального государственного образовательного стандарта.

## Понятие тригонометрического круга и принцип работы с ним

Для начала нужно знать, как располагаются оси. Значение косинуса – по горизонтали, синуса – по вертикали. Подробнее про синус, косинус и их значения.

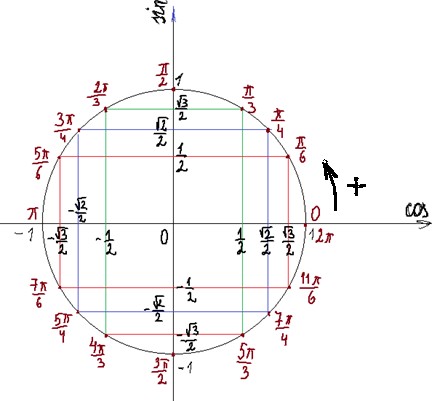


Окружность единичная. Значит, она пересекает оси синуса и косинуса в точках: -1; 1. В центре, как обычно, точка О (0; 0). Также на осях есть числа:

− 1 ; 1 ; − √2 ; √2 ; − √3 ; √3.

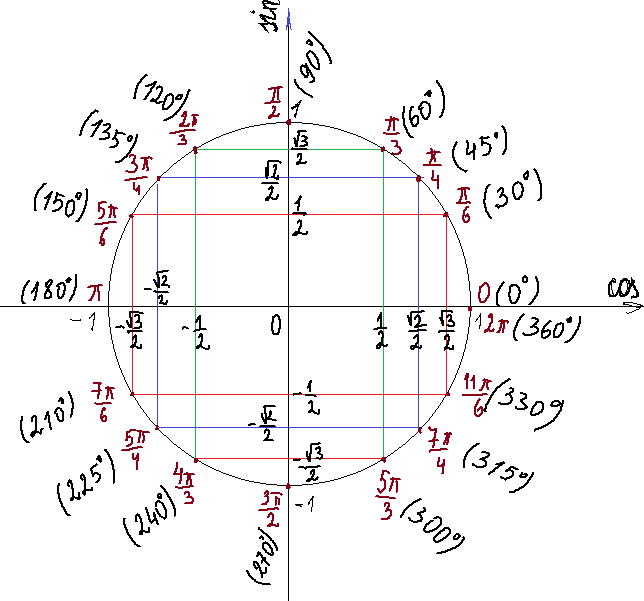
2 2 2 2 2 2

Запомнить их легко по порядку. В числител 1, 2, 3 под знаком корня, а в знаменателе всегда 2. Это значения синуса и косинуса некоторых углов.

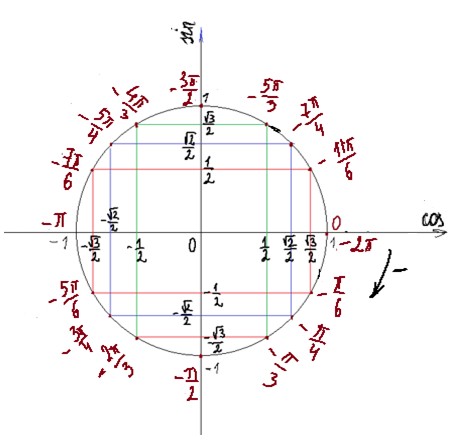
На окружности углы откладываются от самой правой точки. Это 0 радиан. Положительные углы откладываются в направлении против часовой стрелки.

Координата точки, соответствующей некоторому углу, по оси x – косинус угла, по оси y – синус угла.

Углы могут быть заданы и в градусах.



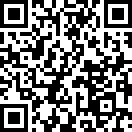
Отрицательные углы откладываются в направлении по часовой стрелке.



Значение тангенса некоторых углов легко запомнить так:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Тангенс не существует в крайних верхней и нижней точке. Равен нулю в крайних правой и левой точках. В вершинах синего квадрата значения тангенса равны 1 и  -1. | В вершинах зелёного вертикального прямоугольника значения тангенса равны    √3 и -√3 | В вершинах красного горизонтального прямоугольника значения    тангенса равны √3 и -√3  3 3 |
|  |  |  |

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/6019/start/199181> (Определение синуса, косинуса и тангенса угла)

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4735/start/199274/> (Синус, косинус и тангенс аргументов 𝛼 и – 𝛼)

## Примеры вычисления значений синуса и косинуса некоторых углов с помощью единичной окружности

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| - ? | cos 4𝜋 − ?  3 | 𝑡𝑔 5𝜋 − ?  6 |
|  |  |  |
| sin 5𝜋 = − √2 4 2 | cos 4𝜋 = − 1  3 2 | 𝑡𝑔 5𝜋 = − √3 6 3 |

**Подборка заданий на нахождение значений тригонометрических функций (для самостоятельного выполнения)**

Вычислите:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | sin 𝜋  3 | *Ответ:*√3  2 |
| 2 | 𝑡𝑔 𝜋  6 | *Ответ:* √3  3 |
| 3 | 𝑐𝑜𝑠 7𝜋  4 | *Ответ:* √2  2 |
| 4 | 𝑡𝑔 5𝜋  3 | *Ответ:* −√3 |
| 5 | sin (− 4𝜋)  3 | *Ответ:* √3  2 |
| 6 | cos 3𝜋  2 | *Ответ: 0* |
| 7 | sin 3𝜋  2 | *Ответ: -1* |
| 8 | 𝑡𝑔 (− 𝜋)  4 | *Ответ: -1* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 9 | cos (− 11π)  6 | *Ответ:* √3  2 |
| 10 | sin 7𝜋  6 | *Ответ:* − 1  2 |

## Результаты экзамена участников в соответствии с их уровнем предметной подготовки

Современная модель ЕГЭ по математике профильного уровня выделяет по результатам экзамена 5 групп участников в соответствии с их уровнем предметной подготовки (таблица 1). Такая группировка обусловлена качественными различиями между уровнями подготовки участников экзамена. Разумеется, группировка условна, а границы групп нечёткие.

Таблица 1. Группы по уровню подготовки (ЕГЭ профильного уровня)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Группа | 1  (минимальный) | 2  (базовый) | 3  (базовый) | 4  (повышенный) | 5  (высокий) |
| Границы первичных  баллов | 0–5 | 6–9 | 10–13 | 14–22 | 14–22 |
| Границы  тестовых баллов | 0–27 | 34–52 | 58–68 | 70–86 | 88–100 |

Задания части 2 предназначены для проверки математических знаний на уровне, необходимом для абитуриентов технических и математических специальностей. Традиционно в их число входит исследование функций, задачи по стереометрии, планиметрии, решение уравнений и неравенств, текстовая задача.

В вариантах ЕГЭ задача, где нужно решить тригонометрическое уравнение, состоит из двух пунктов. Первый пункт – решение самого уравнения. Второй – нахождение его корней на некотором отрезке.

Задание 13 из профильного ЕГЭ выполняют на 1 балл примерно половина участников.

## Критерии оценивания задания 12 ЕГЭ:

|  |  |
| --- | --- |
| Содержание критерия | Баллы |
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте 𝑎  ИЛИ  получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих  пунктов: пункта 𝑎 и пункта *б* | 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных  выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

Под верными ответами подразумевается не просто написать слово

«ответ» и числа, которые могут быть правильными, но и безошибочное, логически верное решение.

Основная идея решения тригонометрического уравнения – с помощью различных математических преобразований от данного уравнения перейти к простейшим тригонометрическим уравнениям, решения которых известны.

## Алгоритм решения тригонометрического уравнения

* Исследовать ОДЗ.
* Привести углы к одинаковому виду.
* Привести функции к одному виду (если это возможно) или определить вид уравнения и способы его решения с разными функциями.
* Решить простейшие тригонометрические уравнения.

## Отработка 1 шага алгоритма

1. **шаг решения:** определить, имеются ли в уравнении ограничения, накладываемые на переменную или функцию.

* если уравнение содержит дробь, то знаменатель не равен нулю.

## Примеры нахождения значений переменной, при которых имеет

**смысл выражение**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 𝑥 − 9  𝑥 − 2 | 5  𝑥2 − 16 | 3𝑥 − 4  𝑥2 + 4 | 𝑥2  𝑥2 − 8𝑥 + 15 |
| Знаменатель  𝑥 − 2 ≠ 0  𝑥 ≠ 2 | Знаменатель  𝑥2 − 16 ≠ 0  𝑥2 ≠ 16  𝑥 ≠ −4 и 𝑥 ≠ 4 | Знаменатель  𝑥2 + 4 ≠ 0  При любом значении *x* | Знаменатель  𝑥2 − 8𝑥 + 15 ≠ 0  𝑥1 ≠ 3; 𝑥2 ≠ 5 |
| Значения переменной (−∞; 2)𝑢(2; +∞) | Значения переменной  (−∞; −4), (−4; 4)  𝑢 (4; +∞) | Значения переменной (−∞; +∞) | Значения переменной  (−∞; 3), (3; 5) 𝑢 (5; +∞) |

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/7244/main/303230/>



(Числовое значение рационального выражения)

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/1261/>

(Алгебраическая дробь. Допустимые значения переменных)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| sin 𝑥 | cos 𝑥 | tg 𝑥 | ctg 𝑥 |
| 𝐬𝐢𝐧 𝒙 ≠ 𝟎 | 𝐜𝐨𝐬 𝒙 ≠ 𝟎 | 𝒕𝒈𝒙 ≠ 𝟎 | 𝐜𝐭𝐠 𝒙 ≠ 𝟎 |

## Подборка заданий на нахождение значений переменной, при которой имеет смысл выражение (для самостоятельного выполнения)

При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 3𝑥 − 2  5𝑥 + 3 | *Ответ:* (−∞; − 3) 𝑢 (− 3 ; +∞)  5 5 |
| 2 | 6  𝑥2 − 49 | *Ответ:* (−∞; −7), (−7; 7) 𝑢 (7; +∞) |
| 3 | 5 + 6𝑥 + 2𝑥 − 3  2𝑥 − 4 7 − 𝑥 | *Ответ:* (−∞; 2), (2; 7) 𝑢 (7; +∞) |
| 4 | 3𝑥 + 2  𝑥2 − 𝑥 + 1 | *Ответ:* (−∞; +∞) |
| 5 | 𝑥3 − 𝑥2  𝑥3 − 𝑥 | *Ответ:* (−∞; −1), (−1; 0), (0; 1) 𝑢 (1; +∞) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 6 | 1 − 1  5 − 𝑥 5 + 𝑥 | *Ответ:* (−∞; −5), (−5; 5) 𝑢 (5; +∞) |
| 7 | 6𝑥3  25 + 𝑥2 | *Ответ:* (−∞; +∞) |
| 8 | 9 + 5𝑥  𝑥2 + 6𝑥 − 7 | *Ответ:* (−∞; −7), (−7; 1) 𝑢 (1; +∞) |

* если уравнение содержит корень квадратный, то подкоренное выражение больше или равно нулю; если корень квадратный в знаменателе дроби, то подкоренное выражение строго больше нуля.

Подкоренное выражение может быть разным. Поставив ему условие, получаем неравенство: линейное, квадратное, дробно-рациональное, тригонометрическое и др.

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/2578/start/> (Решение неравенств с одной переменной)

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/3118/start/>

(Решение неравенств второй степени с одной переменной)

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/1996/start/> (Решение неравенств методом интервалов)

## Примеры решения неравенств

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Линейное | Квадратное | Дробно-рациональное |
| 6𝑥 + 3 ≥ 0  Решается переносом слагаемых с переменной влево, без переменной – вправо.  6𝑥 ≥ −3  𝑥 ≥ − 3  6  𝑥 ≥ −0,5 | 𝑥2 − 5𝑥 + 6 ≥ 0  Решить квадратное уравнение 𝑥2 − 5𝑥 + 6 = 0  𝑥1 = 2; 𝑥2 = 3  Схематично изобразить график квадратичной функции (параболу)    Определить вид точек и знаки в каждом промежутке    Выбрать нужные промежутки, соответствующие знаку неравенства | 5 − 𝑥 ≥ 0  𝑥2 − 4𝑥 + 3  Решить неравенство методом  интервалов.  Найти нули числителя и знаменателя: нуль числителя  𝑥 = 5 (закрашенная точка). Нули знаменателя: 𝑥 = 1;  𝑥 = 3 (выколотые точки независимо от знака неравенства). Отметить полученные точки на координатной прямой    Определить знак в каждом промежутке    Выбрать нужные промежутки, соответствующие знаку неравенства |
| Ответ: [−0,5; +∞) | Ответ: (−∞; 2] 𝖴 [3; +∞) | Ответ: (−∞; 1) 𝖴 (3; 5] |

**Подборка заданий на нахождение значений переменной, при которой имеет смысл выражение (для самостоятельного выполнения)**

При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | √𝑥 − 7 | *Ответ:* [7; +∞) |
| 2 | √𝑥2 + 4𝑥 − 21 | *Ответ:* (−∞; −7] 𝖴 [3; +∞) |
| 3 | √– 𝑥2 + 4𝑥 + 45 | *Ответ:* [−5; 9] |
| 4 | 10  √−𝑥 − 1 | *Ответ:* (−∞; −1) |
| 5 | 2  √12 + 4𝑥 − 𝑥2 | *Ответ:* (−2; 6) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 6 | 𝑥2 + 𝑥 − 30  𝑥 + 5 | *Ответ:* (−∞, −6] 𝖴 [5; +∞) |
| 7 | √𝑥 + √1 − 𝑥 | *Ответ:* [0; 1] |
| 8 | 𝑥2 − 9  √  𝑥 − 3 | *Ответ:* [−3; 3) 𝖴 (3; +∞) |
| 9 | 𝑥 − 4  √  𝑥2 − 4 | *Ответ:* (−2; 2)𝑢 [4; +∞) |

Если под квадратным корнем тригонометрическое выражение, то решения неравенства целесообразно показать на тригонометрическом круге, показав тем самым, при каких значениях переменной имеет смысл выражение.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ………√sin 𝑥 | …………√cos 𝑥 | ………..√tg 𝑥 | ………..√ctg 𝑥 |
| 𝐬𝐢𝐧 𝒙 ≥ 𝟎 | 𝐜𝐨𝐬 𝒙 ≥ 𝟎 | 𝐭𝐠 𝒙 ≥ 𝟎 | 𝐜𝐭𝐠 𝒙 ≥ 𝟎 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| √sin 𝑥 | √cos 𝑥 | √tg 𝑥 | √ctg 𝑥 |
| 𝐬𝐢𝐧 𝒙 > 𝟎 | 𝐜𝐨𝐬 𝒙 > 𝟎 | 𝐭𝐠 𝒙 > 𝟎 | 𝐜𝐭𝐠 𝒙 > 𝟎 |

* если уравнение содержит логарифм, то подлогарифмическое выражение больше нуля;
* если уравнение содержит tg *x*, то он не существует в точках

𝜋 +2πn и 3𝜋 + 2πn, n∈Z.

2 2

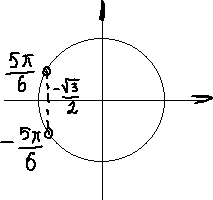
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ……..log𝑎 (sin 𝑥) | log𝑎 (sin 𝑥) | ………..log𝑎(cos 𝑥) | log𝑎(cos 𝑥) |
| 𝐬𝐢𝐧 𝒙 > 𝟎 | {𝐬𝐢𝐧 𝒙 > 𝟎  𝐬𝐢𝐧 𝒙 ≠ 𝟏 | 𝐜𝐨𝐬 𝒙 > 𝟎 | {𝐜𝐨𝐬 𝒙 > 𝟎  𝐜𝐨𝐬 𝒙 ≠ 𝟏 |

## Примеры решения тригонометрических уравнений с ОДЗ из открытого банка заданий (ограничения для переменной)

1) 𝟐 𝐬𝐢𝐧 𝒙−𝟏

𝟐 𝐜𝐨𝐬 𝒙+√𝟑

= 𝟎

Левая часть уравнения представлена в виде дроби, значит знаменатель не должен обратиться в нуль. Поставим ограничение 2 cos 𝑥 + √3 ≠ 0.

√

2 cos 𝑥 ≠ − 3; cos 𝑥 ≠ − √3.

2

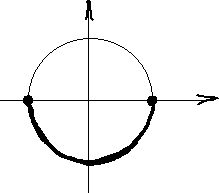
При дальнейшем решении уравнения исключим

семейства 𝑥 = 5𝜋 + 2𝜋𝑛; 𝑥 = − 5𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍 из

6 6

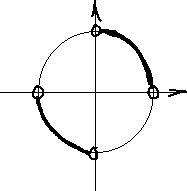
возможных ответов.

2) (𝟐 𝐜𝐨𝐬 𝒙 + √𝟑)√− 𝐬𝐢𝐧 𝒙 = 𝟎

Левая часть уравнения содержит корень квадратный, значит подкоренному выражению поставим условие: − sin 𝑥 ≥ 0; sin 𝑥 ≤ 0

При дальнейшем решении уравнения в ответ выпишем только те семейства корней, которые принадлежат выделенной части окружности.

3) (𝟐 𝐬𝐢𝐧 𝒙 − 𝟏) 𝐥𝐨𝐠𝟔(𝐭𝐠 𝒙) = 𝟎

Левая часть уравнения содержит логарифм, значит подлогарифмическому выражению поставим условие:

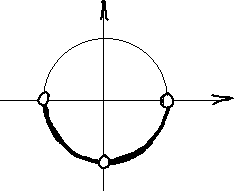
𝑡𝑔𝑥 > 0

При дальнейшем решении уравнения в ответ выпишем только те семейства корней, которые принадлежат выделенной части окружности.

4) 𝟐 𝐜𝐨𝐬 𝒙+𝟏

𝐥𝐨𝐠𝟐(− 𝐬𝐢𝐧 𝒙)

# = 𝟎

Левая часть уравнения представлена в виде дроби, значит знаменатель не должен обратиться в нуль. Поставим ограничение log2(− sin 𝑥) ≠ 0;

− sin 𝑥 ≠ 1; sin 𝑥 ≠ −1.

Левая часть уравнения содержит логарифм, значит подлогарифмическому выражению поставим условие: − sin 𝑥 > 0; sin 𝑥 < 0.

При дальнейшем решении уравнения в ответ выпишем только те семейства корней, которые принадлежат выделенной части окружности.

## Подборка заданий на нахождение значений переменной, при которой имеет смысл уравнение (для самостоятельного выполнения)

При каких значениях переменной имеет смысл уравнение.

Проиллюстрируйте на тригонометрической окружности.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 sin 𝑥 − 1 = 0 2 cos 𝑥 − √3 | *Условие:* |
| 2 | (2 sin 𝑥 + √3)√− tg 𝑥 = 0 | *Условие:* |
| 3 | ctg 𝑥 + 1  = 0  √− sin 𝑥 | *Условие:* |
| 4 | log7(sin 𝑥) = log7(cos 𝑥) | *Условие:* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 5 | 2 cos 𝑥 + 1  log2(− sin 𝑥) = 0 | *Условие:* |
| 6 | 2 sin2 𝑥 − √3 sin 𝑥  2 cos 𝑥 + 1 = 0 | *Условие:* |
| 7 | 2 sin2 𝑥 − sin 𝑥 log2(cos 𝑥) = 0 | *Условие:* |

## Отработка 2 шага алгоритма

1. **шаг решения:** привести углы к одинаковому виду. Необходимых формул по тригонометрии не так уж и много. Чаще других встречаются такие сочетания углов:

## Аргументы отличаются ровно в два раза.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | *x* | 2*x* |
| 𝑥  2 | *x* |
| *2x* | 4*x* |
| 𝑥 + 𝜋  6 | 2𝑥 + 𝜋  3 |
| Применяем формулы двойного угла:  sin 2𝛼 = 2 sin 𝛼 cos 𝛼 ; cos 2𝛼 = cos2 𝛼 − sin2 𝛼 | |

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/3489/start/292739/> (Формулы двойного аргумента)

## Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул двойного угла из открытого банка заданий (преобразование уравнений)

**1)** 𝟐 𝐜𝐨𝐬 𝟐𝒙 + 𝟒√𝟑 𝐜𝐨𝐬 𝒙 − 𝟕 = 𝟎

Применив формулу косинуса двойного аргумента

cos 2𝑥 = cos2 𝑥 − sin2 𝑥

и основное тригонометрическое тождество cos2 𝑥 + sin2 𝑥 = 1,

получаем уравнение 2(2 cos2 𝑥 − 1) + 4√3 cos 𝑥 − 7 = 0,

4 cos2 𝑥 − 2 + 4√3 cos 𝑥 − 7 = 0,

4 cos2 𝑥 + 4√3 cos 𝑥 − 9 = 0.

Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному.

**2)** 𝐜𝐨𝐬𝟐 𝒙 − 𝟏 𝐬𝐢𝐧 𝟐𝒙 + 𝐜𝐨𝐬 𝒙 = 𝐬𝐢𝐧 𝒙

𝟐

Применив формулу синуса двойного аргумента sin 2𝑥 = 2 sin 𝑥 cos 𝑥,

получаем уравнение cos2 𝑥 − 1 ⋅ 2 sin 𝑥 cos 𝑥 + cos 𝑥 − sin 𝑥 = 0,

2

cos2 𝑥 − sin 𝑥 cos 𝑥 + cos 𝑥 − sin 𝑥 = 0.

Это тригонометрическое уравнение решается способом разложения на множители левой части уравнения.

сos 𝑥 (cos 𝑥 − sin 𝑥) + (cos 𝑥 − sin 𝑥) = 0, (сos 𝑥 − sin 𝑥)(cos 𝑥 + 1) = 0.

Каждый множитель приравнивается к нулю и уравнение распадается на

два.

**3)** 𝐜𝐨𝐬 (𝟐𝒙 + 𝝅) + 𝟒 𝐬𝐢𝐧 (𝒙 + 𝝅) = 𝟓

𝟑 𝟔 𝟐

Легко заметить, что 2 (𝑥 + 𝜋) = 2𝑥 + 𝜋

, применив формулу косинуса

6 3

двойного аргумента cos 2𝑥 = cos2 𝑥 − sin2 𝑥 и основное тригонометрическое тождество cos2 𝑥 + sin2 𝑥 = 1, получим уравнение

1 − 2 sin2 (𝑥 + 𝜋) + 4 sin (𝑥 + 𝜋) − 5 = 0,

6 6 2

−2 sin2 (𝑥 + 𝜋) + 4 sin (𝑥 + 𝜋) − 3 = 0.

6 6 2

Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному.

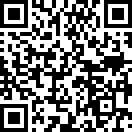
## Подборка заданий на применение формул двойного угла (для самостоятельного выполнения)

Упростите выражение:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1** | sin 2𝛼  sin 𝛼 | *Ответ:* 2 cos 𝛼 |
| **2** | cos 2𝛼 + sin2 𝛼 | *Ответ:* cos2 𝛼 |
| **3** | cos 2𝛼  cos 𝛼 − sin 𝛼 | *Ответ:* cos 𝛼 + sin 𝛼 |
| **4** | sin 2𝛼  cos2 𝛼 ⋅ tg 𝛼 | *Ответ: 2* |
| **5** | (sin 𝛼 − cos 𝛼)2 + sin 2𝛼 | *Ответ: 1* |
| **6** | (sin 𝛼 + cos 𝛼)2 − sin 2𝛼 cos 2𝛼 + 2 sin2 𝛼 | *Ответ: 1* |
| **7** | cos 2𝛼 − sin 2𝛼  cos 4𝛼 | *Ответ:* cos 2𝛼 + sin 2𝛼 |
| **8** | sin 2𝛼 − 2 sin 𝛼  cos 𝛼 − 1 | *Ответ:* 2 sin 𝛼 |
| **9** | sin 2𝛼 + sin 𝛼  1 + cos 2𝛼 + cos 𝛼 | *Ответ:* tg 𝛼 |

## Аргументы отличаются знаком.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | *x* | *-x* |
| Применяем чётность (нечётность) тригонометрических функций:  cos(−𝛼) = cos 𝛼;  sin(−𝛼) = − sin 𝛼 ; 𝑡𝑔(−𝛼) = − tg 𝛼 ; ctg(−𝛼) = − ctg 𝛼 | |

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/3923/start/200607/> (Чётность и нечётность тригонометрических функций)

## Примеры решения тригонометрических уравнений с применением чётности и нечётности тригонометрических функций из открытого банка заданий

**1)** 𝐜𝐨𝐬 𝟐𝒙 + 𝐬𝐢𝐧(−𝒙) − 𝟏 = 𝟎

Синус нечётная функция, поэтому sin(−𝑥) = − sin 𝑥. Получаем уравнение cos 2𝑥 − sin 𝑥 − 1 = 0.

Применив формулу косинуса двойного аргумента

cos 2𝑥 = cos2 𝑥 − sin2 𝑥

и основное тригонометрическое тождество cos2 𝑥 + sin2 𝑥 = 1, получаем уравнение 1 − 2 sin2 𝑥 − sin 𝑥 − 1 = 0,

−2 sin2 𝑥 − sin 𝑥 = 0, 2 sin2 𝑥 + sin 𝑥 = 0.

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение sin 𝑥 (2 sin 𝑥 + 1) = 0, которое распадётся на два простейших уравнения.

**2)** 𝟐 𝐬𝐢𝐧 𝟐𝒙 + 𝟐 𝐬𝐢𝐧(−𝒙) − 𝟐 𝐜𝐨𝐬(−𝒙) + 𝟏 = 𝟎

Синус нечётная функция, поэтому sin(−𝑥) = − sin 𝑥. Косинус чётная функция, поэтому cos(−𝑥) = cos 𝑥. Получаем уравнение

2 sin 2𝑥 − 2 sin 𝑥 − 2 cos 𝑥 + 1 = 0.

Применив формулу синуса двойного аргумента sin 2𝑥 = 2 sin 𝑥 cos 𝑥, получаем уравнение 2 ⋅ 2 sin 𝑥 cos 𝑥 − 2 sin 𝑥 − 2 cos 𝑥 + 1 = 0,

4 sin 𝑥 cos 𝑥 − 2 sin 𝑥 − 2 cos 𝑥 + 1 = 0.

Это тригонометрическое уравнение решается способом разложения на множители левой части уравнения.

2 sin 𝑥 (2 cos 𝑥 − 1) − (2 cos 𝑥 − 1) = 0,

(2 cos 𝑥 − 1)(2 sin 𝑥 − 1) = 0.

Каждый множитель приравнивается к нулю и уравнение распадается на

два.

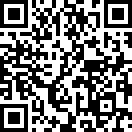
## Подборка заданий на применение чётности и нечётности тригонометрических функций (для самостоятельного выполнения)

Упростите выражение:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 − cos2 𝑡  1 − sin2(−𝑡) + tg(−𝑡) ⋅ ctg(−𝑡) | *Ответ:* 1 cos2 𝑡 |
| 2 | sin2 𝑡 + cos2(−𝑡) cos2 𝑡  tg2(−𝑡) cos2 𝑡 − 1 − cos2(−𝑡) | *Ответ: 1* |
| 3 | cos2 𝑡 2( ) 2  1 + sin(−𝑡) − sin −𝑡 − cos 𝑡 | *Ответ:* sin 𝑡 |
| 4 | sin2(−𝑡) ( )  1 + cos(−𝑡) − sin −𝑡 ⋅ ctg 𝑡 | *Ответ: 1* |

## Аргументы представлены в виде суммы или разности, одно из слагаемых угол, не лежащий на осях.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 | 𝑥 | 𝜋 + 𝑥 3 |
| *x* | 𝑥 − 𝜋  6 |
| *x* | 𝑥 + (𝑥 + 𝜋)  4 |
| Применяем формулы суммы или разности углов: sin(𝛼 ± 𝛽) = sin 𝛼 cos 𝛽 ± sin 𝛽 cos 𝛼; cos(𝛼 ± 𝛽) = cos 𝛼 cos 𝛽 ∓ sin 𝛼 sin 𝛽 | |

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4734/train/199315/> (Формулы сложения)

## Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул сложения из открытого банка заданий (преобразование уравнений)

√

1. 𝟐 𝐬𝐢𝐧𝟐 𝒙 + 𝟐 𝐬𝐢𝐧 (𝒙 + 𝝅) = 𝐜𝐨𝐬 𝒙

𝟒

Применив формулу синуса суммы двух аргументов

sin(𝛼 + 𝛽) = sin 𝛼 cos 𝛽 + sin 𝛽 cos 𝛼

получим

sin (𝑥 + 𝜋) = sin 𝑥 cos 𝜋 + sin 𝜋 cos 𝑥 = √2 sin 𝑥 + √2 cos 𝑥.

4 4 4 2 2

Получим уравнение 2 sin2 𝑥 + √2 (√2 sin 𝑥 + √2 cos 𝑥) − cos 𝑥 = 0,

2 2

2 sin2 𝑥 + sin 𝑥 + cos 𝑥 − cos 𝑥 = 0, 2 sin2 𝑥 + sin 𝑥 = 0.

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение sin 𝑥 (2 sin 𝑥 + 1) = 0, которое распадётся на два простейших уравнения.

2. 𝐬𝐢𝐧 (𝟐𝒙 + 𝝅) = 𝐜𝐨𝐬 𝒙 + 𝐜𝐨𝐬 (𝒙 + 𝝅) 𝐬𝐢𝐧 𝒙

𝟔 𝟔

Заметим, что 2𝑥 + 𝜋 = 𝑥 + (𝑥 + 𝜋). Перепишем уравнение в виде

6 6

sin (𝑥 + (𝑥 + 𝜋)) − cos 𝑥 − cos (𝑥 + 𝜋) sin 𝑥 = 0

6 6

Применив формулу синуса суммы двух аргументов

sin(𝛼 + 𝛽) = sin 𝛼 cos 𝛽 + sin 𝛽 cos 𝛼

получим

sin 𝑥 cos (𝑥 + 𝜋) + cos 𝑥 sin (𝑥 + 𝜋) − cos 𝑥 − cos (𝑥 + 𝜋) sin 𝑥 = 0,

6 6 6

cos 𝑥 sin (𝑥 + 𝜋) − cos 𝑥 = 0.

6

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение

cos 𝑥 (sin (𝑥 + 𝜋) − 1) = 0

6

которое распадётся на два простейших уравнения:

сos 𝑥 = 0 или sin (𝑥 + 𝜋) − 1 = 0.

6

## Подборка заданий на применение формул сложения (для самостоятельного выполнения)

Упростите выражение:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | sin(300 + 𝛼) − cos(600 + 𝛼) | *Ответ:* √3 sin 𝛼 |
| 2 | √2 sin(𝛼 − 450) − sin 𝛼 + cos 𝛼 | *Ответ: 0* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 | 𝑐𝑜𝑠 3𝜋 𝑠𝑖𝑛 𝜋 − 𝑠𝑖𝑛 3𝜋 𝑠𝑖𝑛 𝜋 8 8 8 8 | *Ответ: 0* |
| 4 | cos(𝛼 + 𝛽) − cos(𝛼 − 𝛽) | *Ответ:* −2 sin 𝛼 sin 𝛽 |
| 5 | 𝜋  2 cos (3 − 𝛼) − √3 sin 𝛼 − cos 𝛼 | *Ответ: 0* |
| 6 | 𝜋 √3  cos (6 + 𝛼) − 2 cos 𝛼 | *Ответ: 1* |
| 7 | 𝜋 1  sin (4 + 𝛼) − √2 cos 𝛼 | *Ответ: -1* |
| 8 | cos 360 cos 240 − sin 360 sin 240 | *Ответ:* 1  2 |

## Аргументы представлены в виде суммы или разности, одним из слагаемых которой является угол, лежащий на координатной оси:

𝝅 ; 𝝅; 𝟑𝝅 ; 𝟐𝝅**.**

𝟐 𝟐

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/3490/start/199398/> (Формулы приведения)

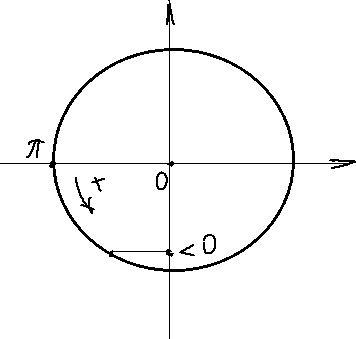
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 4 | *x* | 𝜋 + 𝑥 2 |
| *x* | 𝜋 − 𝑥 |
| *x* | 3𝜋 − 𝑥  2 |
| *x* | 2𝜋 − 𝑥 |
| Применяем формулы приведения:   * если откладываем угол от вертикальной оси, то приводимая функция меняет название, если от горизонтальной – нет; * если в скобках знак «+», то откладываем угол против часовой стрелки, если знак «-», то откладываем угол по часовой стрелке;   + знак новой функции совпадает со знаком приводимой функции. | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | сos 𝜋 + 𝑥)  (2    𝜋 на вертикальной оси,  2  значит cos поменяется на  sin, в скобках знак «+», значит откладываем угол против часовой стрелки, попали во вторую четверть. Во второй четверти cos 𝑥 < 0,  следовательно, cos 𝜋 + 𝑥) = − sin 𝑥  (2 | sin(𝜋 − 𝑥)    π на горизонтальной оси, следовательно, sin не поменяет название. В скобках знак «-», значит откладываем угол по часовой стрелке, попадём во вторую четверть. Во второй четверти sin 𝑥 > 0, значит, sin(𝜋 − 𝑥) = sin 𝑥 | 𝑡𝑔 3𝜋 + 𝑥)  ( 2    3𝜋 на вертикальной  2  оси, следовательно, tg  поменяется на ctg. В скобках знак «+», значит откладываем угол против часовой стрелки, попадём в четвёртую четверть. В четвёртой четверти  tg 𝑥 < 0, значит,  𝑡𝑔 (3𝜋 + 𝑥) = − ctg 𝑥  2 |

## Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул приведения из открытого банка заданий (преобразование уравнений)

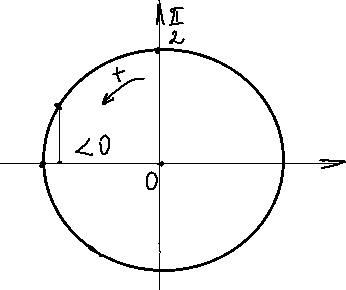
**1)** 𝟐 𝐬𝐢𝐧(𝝅 + 𝒙) 𝐜𝐨𝐬 (𝝅 + 𝒙) = 𝐬𝐢𝐧 𝒙

𝟐

Преобразуем sin(𝜋 + 𝑥). В скобке дано 𝜋 +

𝑥, значит синус не изменится. Теперь нужно определиться со знаком ответа. Нарисуем схематично тригонометрическую окружность. Находим π, нужно прибавить *x*, значит движемся против часовой стрелки, попадаем в 3 четверть, смотрим знак оси синусов, в данном случае синус отрицательный.

Записываем ответ sin(𝜋 + 𝑥) = − sin 𝑥.

Преобразуем cos (𝜋 + 𝑥). В скобках дано

𝜋 + 𝑥

2

2

, значит косинус поменяется на синус. Теперь

нужно определиться со знаком ответа. Нарисуем схематично тригонометрическую окружность.

Находим 𝜋 , нужно прибавить *x,* значит движемся

2

против часовой стрелки, попадаем во вторую

четверть. Смотрим знак оси косинусов, в данном

случае косинус отрицательный. Записываем ответ cos (𝜋 + 𝑥) = − sin 𝑥.

2

Уравнение преобразуется −2 sin 𝑥 ⋅ (− sin 𝑥) = sin 𝑥,

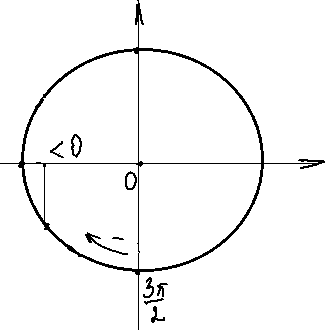
2 sin2 𝑥 − sin 𝑥 = 0.

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение sin 𝑥 (2 sin 𝑥 − 1) = 0, которое распадётся на два простейших уравнения.

√

**2)** 𝟐 𝐜𝐨𝐬𝟐 𝒙 + 𝟏 = 𝟐 𝟐 𝐜𝐨𝐬 (𝟑𝝅 − 𝒙)

𝟐

Преобразуем cos (3𝛱 − 𝑥). В скобках дано

2

3𝜋 − 𝑥, значит косинус поменяется на синус. Теперь

2

нужно определиться со знаком ответа. Нарисуем

схематично тригонометрическую окружность.

Находим 3𝜋 , нужно вычесть *x,* значит движемся по

2

часовой стрелке, попадаем в третью четверть.

Смотрим знак оси косинусов, в данном случае косинус отрицательный. Записываем ответ

cos (3𝜋 − 𝑥) = − sin 𝑥.

2

Исходное уравнение запишется в виде 2 cos2 𝑥 + 1 = −2√2 sin 𝑥, 2 cos2 𝑥 + 2√2 sin 𝑥 + 1 = 0.

Применив основное тригонометрическое тождество cos2 𝑥 + sin2 𝑥 = 1,

получаем уравнение 2(1 − sin2 𝑥) + 2√2 sin 𝑥 + 1 = 0,

2 − 2 sin2 𝑥 + 2√2 sin 𝑥 + 1 = 0,

−2 sin2 𝑥 + 2√2 sin 𝑥 + 3 = 0.

Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному.

## Подборка заданий на применение формул приведения (для самостоятельного выполнения)

Упростите выражение:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | sin(𝜋 − 𝛼)  2 cos (𝜋 + 𝛼)  2 | *Ответ:* − 1  2 |
| 2 | 2 cos (3𝜋 + 𝛼)  2  sin(𝜋 + 𝛼) | *Ответ:* −*2* |
| 3 | 𝑡𝑔 (3𝜋 + 𝛼) 𝑠𝑖𝑛(2𝜋 − 𝛼) 2 | *Ответ:* cos 𝛼 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 4 | 𝜋  ctg(𝜋 + 𝛼) cos (2 + 𝛼) | *Ответ:* − cos 𝛼 |
| 5 | sin(𝜋 + 𝛼) cos(𝜋 − 𝛼)  ctg (3𝜋 − 𝛼)  2 | *Ответ:* cos2 𝛼 |
| 6 | sin (3𝜋 − 𝛼) cos (𝜋 + 𝛼)  2 2  tg(𝜋 − 𝛼) | *Ответ:* − cos2 𝛼 |
| 7 | sin(3𝜋 + 𝛼) sin (5𝜋 − 𝛼)  2  sin(𝜋 − 2𝛼) | *Ответ:* − 1  2 |
| 8 | sin(𝜋 − 𝛼) ctg (𝜋 − 𝛼) cos(2𝜋 − 𝛼)  ⋅ 2 ,  tg(𝜋 + 𝛼) tg (𝜋 + 𝛼) sin(−𝛼)  𝛼 | *Ответ:* sin 𝛼 |

## Отработка 3 шага алгоритма

1. **шаг решения:** привести функции к одному виду (если это возможно) или определить вид уравнения и способы его решения с разными функциями.

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/6314/start/199928/> (Тригонометрические уравнения)

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/6320/start/200020/> (Методы решения тригонометрических уравнений)

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/6321/start/199989/> (Однородные тригонометрические уравнения)

Некоторые из методов (например, замена переменной или разложение на множители) являются универсальными, то есть применяются и в других разделах математики. Другие являются специфическими именно для тригонометрии.

**Примеры решения тригонометрических уравнений с разными функциями из открытого банка ЕГЭ**

Чаще всего встречающиеся комбинации:

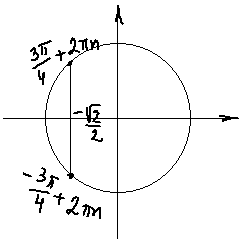
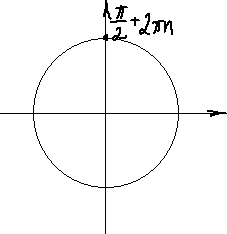
|  |  |
| --- | --- |
| 1 | В записи уравнения есть sin2 𝑥 ± sin 𝑥 ± число |
| Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному. Целесообразно введение новой переменной.  **Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.**  tg2 𝑥 + 5 tg 𝑥 − 6 = 0  Пусть tg 𝑥 = 𝑡, тогда исходное уравнение перепишется в виде 𝑡2 + 5𝑡 − 6 = 0. Решаем любым способом квадратное уравнение. Получим корни 𝑡1 = −6; 𝑡2 = 1. Обратная замена: tg 𝑥 = −6 tg 𝑥 = 1    Ответ: − arctg 6 + 𝜋𝑛; 𝜋 + 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍.  4 |
| 2 | В записи уравнения есть sin2 𝑥 ± cos 𝑥 ± число |
| По основному тригонометрическому тождеству sin2 𝛼 + cos2 𝛼 = 1 заменить функцию в квадрате sin2 𝛼 = (1 − cos2 𝛼). Новое уравнение с одноимённой функцией приведётся к квадратному.  **Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.**  8 sin2 𝑥 + 2√3 cos 𝑥 + 1 = 0 8(1 − cos2 𝑥) + 2√3 cos 𝑥 + 1 = 0  8 − 8 cos2 𝑥 + 2√3 cos 𝑥 + 1 = 0  −8 cos2 𝑥 + 2√3 cos 𝑥 + 9 = 0 |

|  |  |
| --- | --- |
|  | 8 cos2 𝑥 − 2√3 cos 𝑥 − 9 = 0  Пусть cos 𝑥 = 𝑡, − 1 ≤ 𝑡 ≤ 1. Тогда исходное уравнение перепишется в виде  8𝑡2 − 2√3𝑡 − 9 = 0  2  𝐷 = (−2√3) − 4 ⋅ 8 ⋅ (−9) = 12 + 288 = 300; √𝐷 = 10√3    𝑡 = 2√3 − 10√3 = −8√3 = − √3  1 2 ⋅ 8 2 ⋅ 8 2  𝑡 = 2√3 + 10√3 = 12√3 = 6√3 = 3√3 ∉ [−1; 1]  2 2 ⋅ 8 2 ⋅ 8 8 4  Обратная замена: cos 𝑥 = − √3  2    Ответ: ± 5𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖 𝑍  6 |
| 3 | В записи уравнения есть 𝑎 sin 𝑥 ± 𝑏 cos 𝑥 = 0 . Разные функции, обе в первой  степени. |
| Это однородное уравнение первой степени. Решается путём деления на cos 𝑥 ≠ 0. Преобразуется в простейшее уравнения первой степени с функцией tg 𝑥  **Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.**  sin 𝑥 + √3 cos 𝑥 = 0 /∶ cos 𝑥 ≠ 0  𝑡𝑔𝑥 + √3 = 0 tg 𝑥 = −√3    Ответ: − 𝜋 + 𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍  3 |
| 4 | В записи уравнения есть sin2 𝑥 ± sin 𝑥 cos 𝑥 ± cos2 𝑥 + число |

|  |  |
| --- | --- |
|  | Это однородное уравнение второй степени. Решается путём деление на cos2 𝑥 ≠ 0. Предварительно заменить число с помощью основного тригонометрического тождества на сумму sin2 𝛼 + cos2 𝛼 = 1. Преобразуется в уравнение, приводимое к квадратному относительно tg 𝑥  **Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.**  5 sin2 𝑥 − 14 sin 𝑥 cos 𝑥 − 3 cos2 𝑥 = 2  5 sin2 𝑥 − 14 sin 𝑥 cos 𝑥 − 3 cos2 𝑥 = 2(sin2 𝑥 + cos2 𝑥)  5 sin2 𝑥 − 14 sin 𝑥 cos 𝑥 − 3 cos2 𝑥 − 2 sin2 𝑥 − 2 cos2 𝑥 = 0 3 sin2 𝑥 − 14 sin 𝑥 cos 𝑥 − 5 cos2 𝑥 = 0 | ∶ cos2 𝑥 ≠ 0  3 tg2 𝑥 − 14 tg 𝑥 − 5 = 0  Пусть tg 𝑥 = 𝑡, тогда уравнение перепишется так 3𝑡2 − 14𝑡 − 5 = 0  𝐷 = (−14)2 − 4 ⋅ 3 ⋅ (−5) = 196 + 60 = 256, √256 = 16  𝑡 = 14 − 16 = −2 = − 1  1 2 ⋅ 3 2 ⋅ 3 3  𝑡 = 14 + 16 = 30 = 5  2 2 ⋅ 3 2 ⋅ 3  Обратная замена 𝑡𝑔𝑥 = − 1 tg 𝑥 = 5  3    Ответ: arctg 5 + 𝜋𝑛; − arctg 1 + 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  3 |
| ***Во многих случаях уравнение удаётся представить в таком виде, что в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части — ноль. Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю. Сложное уравнение, таким образом, распадается в совокупность более простых.*** | |
| 5 | Уравнение содержит sin 𝑥 ± sin 𝑥 cos 𝑥 = 0 |

|  |  |
| --- | --- |
|  | Это уравнение решается путём разложения левой части уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки.  **Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.**  sin 2𝑥 − 2 cos 𝑥 = 0  2 sin 𝑥 cos 𝑥 − 2 cos 𝑥 = 0 2 cos 𝑥 (sin 𝑥 − 1) = 0  2 cos 𝑥 = 0 или или sin 𝑥 − 1 = 0  cos 𝑥 = 𝑂 sin 𝑥 = 1    Ответ: 𝜋 + 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  2 |
| 6 | Уравнение содержит cos2 𝑥 ± sin 𝑥 cos 𝑥 = 0 |
| Это уравнение решается путём разложения на множители левой части уравнения с помощью вынесения общего множителя за скобки.  **Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.**  sin2 𝑥 = 3 sin 𝑥 cos 𝑥  sin2 𝑥 − 3 sin 𝑥 cos 𝑥 = 0 sin 𝑥 (sin 𝑥 − 3 cos 𝑥) = 0  sin 𝑥 = 0 или sin 𝑥 − 3 cos 𝑥 = 0/ : cos 𝑥 ≠ 0  𝑡𝑔𝑥 − 3 = 0 tg 𝑥 = 3    Ответ: 𝜋𝑛; arctg 3 + 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 |
| 7 | Уравнение содержит четыре слагаемых cos3 𝑥 ± cos2 𝑥 ± cos 𝑥± число = 0 или  sin2 𝑥 ± sin 𝑥 cos 𝑥 ± sin 𝑥 ± cos 𝑥 = 0 |

|  |  |
| --- | --- |
|  | Это уравнение решается путём разложения на множители с помощью способа группировки.  **Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.**    **1)** 𝐬𝐢𝐧 𝟐𝒙 + √𝟐 𝐬𝐢𝐧 𝒙 = 𝟐 𝐜𝐨𝐬 𝒙 + √𝟐  2 𝑠𝑖𝑛 𝑥 𝑐𝑜𝑠 𝑥 + √2 𝑠𝑖𝑛 𝑥 − 2 𝑐𝑜𝑠 𝑥 − √2 = 0 2 cos 𝑥 (sin 𝑥 − 1) + √2(sin 𝑥 − 1) = 0  (sin 𝑥 − 1)(2 cos 𝑥 + √2) = 0  sin 𝑥 − 1 = 0 или 2 cos 𝑥 + √2 = 0  sin 𝑥 = 1 cos 𝑥 = − √2  2  Ответ: ± 3𝜋 + 2𝜋𝑛; 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍  4 2  2) 𝒄𝒐𝒔𝟐 𝒙 − 𝟏 𝒔𝒊𝒏 𝟐𝒙 + 𝒄𝒐𝒔 𝒙 = 𝒔𝒊𝒏 𝒙  𝟐  cos2 𝑥 − sin 𝑥 cos 𝑥 + cos 𝑥 − sin 𝑥 = 0 cos 𝑥 (cos 𝑥 − sin 𝑥) + (cos 𝑥 − sin 𝑥) = 0 (cos 𝑥 − sin 𝑥)(cos 𝑥 + 1) = 0  cos 𝑥 − sin 𝑥 = 0 или cos 𝑥 + 1 = 0 1 − 𝑡𝑔𝑥 = 𝑂 cos 𝑥 = −1  𝑡𝑔𝑥 = 1    Ответ: 𝜋 + 𝜋𝑛; 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  4 |



## Подборка заданий на решение тригонометрических уравнений (для самостоятельного выполнения)

Определите, к какому виду относится тригонометрическое уравнение из предложенного алгоритма:

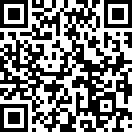
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | sin 2𝑥 + 2 cos2 𝑥 + cos 2𝑥 = 0 | *Ответ: 4* |
| 2 | 6 sin2 𝑥 + 5 sin (𝜋 − 𝑥) − 2 = 0  2 | *Ответ: 2* |
| 3 | 2 sin2 (𝜋 − 𝑥) + sin 2𝑥 = 0  2 | *Ответ: 6* |
| 4 | 6 cos 𝑥 −7 cos 𝑥 − 5 = 0 | *Ответ: 1* |
| 5 | sin 𝑥 − √3 cos 𝑥 = 0 | *Ответ: 3* |
| 6 | 2 cos3 𝑥 + √3 cos2 𝑥 + 2 cos 𝑥 + √3 = 0 | *Ответ: 7* |
| 7 | sin 2𝑥 + √3 sin 𝑥 = 0 | *Ответ: 5* |

## Отработка 4 шага алгоритма

1. **шаг решения:** получить одно, два или три простейших тригонометрических уравнений sin 𝑥 = 𝑎, cos 𝑥 = 𝑎, tg 𝑥 = 𝑎.

Каждое из этих уравнений легко решается с помощью единичной окружности, на которой изображаются соответствующие точки, после чего с учетом периодичности тригонометрических функций записывается ответ. С определенной степенью условности любое стандартное тригонометрическое уравнение («стандартное» не обязательно означает «простое») можно отнести к одному из двух основных типов: уравнения, сводимые к простейшим с помощью тех или иных тригонометрических преобразований и уравнения, вначале сводимые к алгебраическим с помощью той или иной замены переменной, а затем с помощью обратной замены приводимые к одному или нескольким простейшим.

## Примеры решения простейших тригонометрических уравнений с помощью единичной окружности

𝐬𝐢𝐧 𝒙 = 𝒂; −𝟏 ≤ 𝒂 ≤ 𝟏

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4736/start/199743/> (Уравнение sin 𝑥 = 𝑎)

|  |  |
| --- | --- |
| sin 𝑥 = −√3 | Т.к. −1 ≤ sin 𝑥 ≤ 1 следовательно, корней нет |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| sin 𝑥 = −1 | sin 𝑥 = 1 | sin 𝑥 = 0 |
|  |  |  |
| Ответ: − 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  2 | Ответ: 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  2 | Ответ: 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ Z |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| sin 𝑥 = − √2  2 | sin 𝑥 = √3  2 | sin 𝑥 = 0,4 | sin 𝑥 = − 2  3 |
|  |  |  |  |
| Ответ: − 3𝜋 + 2𝜋𝑛;  𝜋 4  − 4 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍 | Ответ: 𝜋 + 𝜋𝑛;  3  2𝜋  3 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 | Ответ: 𝑎𝑟𝑐 sin 0.4 + 2𝜋𝑛; 𝜋 − arcsin 0.4 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 | Ответ: arcsin 2 +  3  2𝜋𝑛; 𝜋 + arcsin 2  3  + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 |

𝐜𝐨𝐬 𝒙 = 𝒂, − 𝟏 ≤ 𝒂 ≤ 𝟏

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/6317/start/199681/> (Уравнение cos 𝑥 = 𝑎)

|  |  |
| --- | --- |
| cos 𝑥 = 1,3 | Т.к. −1 ≤ cos 𝑥 ≤ 1 следовательно, корней нет |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| cos 𝑥 = −1 | cos 𝑥 = 0 | cos 𝑥 = 1 |
|  |  |  |
| Ответ: 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 | Ответ:𝜋 + 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  2 | Ответ: 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| cos 𝑥 = 1  2 | cos 𝑥 = − √2  2 | cos 𝑥 = −0,7 | cos 𝑥 = 1  4 |
|  |  |  |  |
| Ответ: ± 𝜋 + 2𝜋𝑛,  3  𝑛𝜖𝑍 | Ответ: ± 3𝛱 + 2𝜋𝑛,  4  *n*∈ 𝑍 | Ответ:  𝜋 ± arccos 0 , 7  + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 | Ответ:  ± arccos 1 + 2𝜋𝑛, 4  𝑛𝜖𝑍 |

𝐭𝐠 𝒙 = 𝒂

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4737/start/199804/> (Уравнение tg 𝑥 = 𝑎)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| tg 𝑥 = √3 | tg 𝑥 = −1 | 𝑡𝑔𝑥 = 7 |
|  |  |  |
| Ответ: 𝜋 + 2𝜋𝑛; 4𝜋 + 2𝜋𝑛,  3 3  𝑛 ∈ 𝑍  или 𝜋 + 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  3 | Ответ: − 𝜋 + 2𝜋𝑛; 3𝜋 + 2𝜋𝑛,  4 4  𝑛𝜖𝑍  или − 𝜋 + 𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍  4 | Ответ: 𝑎𝑟 ctg 7 + 2𝜋𝑛;  𝜋 + 𝑎𝑟 ctg 7 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  или arctg 7 + 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 |

## Подборка заданий на решение простейших тригонометрических уравнений (для самостоятельного выполнения)

Решите уравнения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | cos 𝑥 = 1  2 | *Ответ:* ± 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍  3 |
| 2 | sin 𝑥 = − √2  2 | *Ответ:* 5𝜋 + 2𝜋𝑛; 7𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  4 4 |
| 3 | 𝑡𝑔𝑥 = −1 | *Ответ:* 3𝜋 + 2𝜋𝑛; 7𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  4 4 |
| 4 | tg 𝑥 = 1  √3 | *Ответ:* 𝜋 + 2𝜋𝑛; 7𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑧  6 6 |
| 5 | sin 𝑥 = − 1  3 | *Ответ:* −𝑎𝑟𝑐 sin 1 + 2𝜋𝑛; 𝜋 + arcsin 1 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍  3 3 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 6 | cos 𝑥 = √7  2 | *Ответ: корней нет* |
| 7 | cos 𝑥 = √2  3 | *Ответ:* ± arccos √2 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍  3 |
| 8 | sin 𝑥 = √3  2 | *Ответ:* 𝜋 + 2𝜋𝑛; 2𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  3 3 |

## Примеры решения тригонометрических уравнений из открытого

**банка ФИПИ**

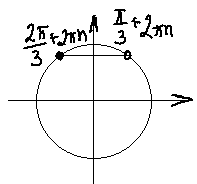
Курсивом выделены устные рассуждения, необязательные для записи решения.

1. Решите уравнение cos 2𝑥+√3 sin 𝑥−1 = 0

tg 𝑥−√3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| cos 2𝑥 + √3 sin 𝑥 − 1 = 0 tg 𝑥 − √3  ***Выполняем 1 шаг алгоритма.***  *Левая часть уравнения представлена в виде дроби, следовательно знаменатель дроби не может обратиться в 0. В записи уравнения есть* 𝑡𝑔*, а* 𝑡𝑔 *не существует в точках*  𝜋 + 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑧*, выкалываем верхнюю и нижнюю точки*  2  *окружности*  *Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель нет.*  cos 2𝑥 + √3 sin 𝑥 − 1 = 0  ***Выполняем 2 шаг алгоритма.***  *Приводим углы к одинаковому виду x.*  𝑐𝑜𝑠 2𝑥 = 𝑐𝑜𝑠2 𝑥 − 𝑠𝑖𝑛2 𝑥*;*  cos2 𝑥 − sin2 𝑥 + √3 sin 𝑥 − 1 = 0  ***Выполняем 3 шаг алгоритма.***  *Заменим по основному тригонометрическому тождеству*  𝑐𝑜𝑠2 𝑥 = 1 − 𝑠𝑖𝑛2 𝑥  1 − sin2 𝑥 − sin2 𝑥 + √3 sin 𝑥 − 1 = 0  −2 sin2 𝑥 + √3 sin 𝑥 = 0 2 sin2 𝑥 − √3 sin 𝑥 = 0  *Вынесем* 𝑠𝑖𝑛 𝑥 *за скобки как общий множитель*  sin 𝑥 (2 sin 𝑥 − √3) = 0  *Каждый множитель приравняем к нулю*  ***Выполняем 4 шаг алгоритма.*** | | Условие:  𝑡𝑔𝑥 − √3 ≠ 0 tg 𝑥 ≠ √3 |
| sin 𝑥 = 0 | 2 sin 𝑥 − √3 = 0 | |

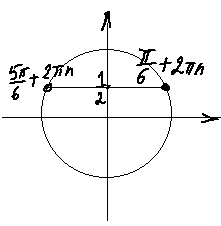
|  |  |
| --- | --- |
| 𝑥 = 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 | sin 𝑥 = √3  2  С учётом условия 𝑥 = 2𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  3 |
| Ответ: 𝜋𝑛; 2𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  3 | |

1. а) Решите уравнение

log2(sin 𝑥)+log2(sin 𝑥) = 0

2 cos 𝑥+√3

2

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [0; 3𝜋]

2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| l og2(sin 𝑥) + log2(sin 𝑥)  2 = 0  2 cos 𝑥 + √3  *Левая часть уравнения представлена в виде дроби, следовательно знаменатель дроби не может обратиться в*  *0.* 𝑠𝑖𝑛 𝑥 > 0 *(как подлогарифмическое выражение).*  *Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель нет.*  log2(sin 𝑥) + log2 (sin 𝑥) = 0  2  log2(sin x) вынесем за скобки как общий множитель (log2(sin 𝑥))(log2(sin 𝑥) + 1) = 0  *Каждый множитель приравняем к нулю* | | Условие:  2 cos 𝑥 + √3 ≠ 0  cos 𝑥 ≠ − √3  2  и sin 𝑥 > 0 |
| log2(sin 𝑥) = 0 log2(sin 𝑥) = log2 1 sin 𝑥 = 1    *Семейство корней подходит по условию*  *x* = 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  2 | log2(sin 𝑥) + 1 = 0 log2(sin 𝑥) = −1  log2(sin 𝑥) = log2 2−1 log (sin 𝑥) = log 1  2 2 2  sin 𝑥 = 1  2  С учётом условия 𝑥 = 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  6 | |
| Ответ: 𝑎) 𝜋 + 2𝜋𝑛; 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  6 2 | | |

1. а) Решите уравнение cos 2𝑥 − 2 cos (3𝜋 + 𝑥) − 1 = 0

2

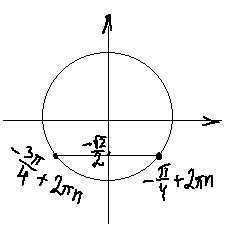
√

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [3𝜋 ; 3𝜋]

2

*Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно.*

|  |  |
| --- | --- |
| cos 2𝑥 − √2 cos (3𝜋 + 𝑥) − 1 = 0  2  *Приводим углы к одинаковому виду x.*  𝑐𝑜𝑠 2𝑥 = 𝑐𝑜𝑠2 𝑥 − 𝑠𝑖𝑛2 𝑥*;* 𝑐𝑜𝑠 (3𝜋 + 𝑥) = 𝑠𝑖𝑛 𝑥  2  cos2 𝑥 − sin2 𝑥 − √2 sin 𝑥 − 1 = 0  *Приведём функции к одинаковому виду.*  *Заменим по основному тригонометрическому тождеству* 𝑐𝑜𝑠2 𝑥 = 1 − 𝑠𝑖𝑛2 𝑥  1 − sin2 𝑥 − sin2 𝑥 − √2 sin 𝑥 − 1 = 0  −2 sin2 𝑥 − √2 sin 𝑥 = 0 / (-1)  2 sin2 𝑥 + √2 sin 𝑥 = 0  *Вынесем общий множитель за скобки*  sin 𝑥 (2 sin 𝑥 + √2) = 0 | |
| sin 𝑥 = 0    *x =* 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ Z | 2 sin 𝑥 + √2 = 0 2 sin 𝑥 = −√2  sin 𝑥 = − √2  2  𝑥 = − 𝜋 + 2𝜋𝑛; 𝑥 = − 3𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍  4 4 |
| Ответ: 𝑎) − 3𝜋 + 2𝜋𝑛; − 𝜋 + 2𝜋𝑛; 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  4 4 | |

1. а) Решите уравнение 2 sin2 𝑥 + √2 sin (𝑥 + 𝜋) = cos 𝑥

4

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[−2𝜋; − 𝜋]

2

*Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно.*

2 sin2 𝑥 + √2 sin (𝑥 + 𝜋) = cos 𝑥

*Приводим углы к одинаковому виду x.*

4

𝑠𝑖𝑛 (𝑥 + 𝜋) = 𝑠𝑖𝑛 𝑥 𝑐𝑜𝑠 𝜋 + 𝑐𝑜𝑠 𝑥 𝑠𝑖𝑛 𝜋 = √2 𝑠𝑖𝑛 𝑥 + √2 𝑐𝑜𝑠 𝑥

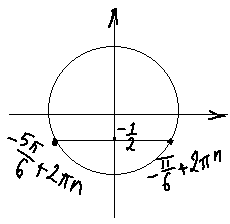
4

4

4 2

2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 sin2 𝑥 + √2 √2 sin 𝑥 + √2 cos 𝑥) − cos 𝑥 = 0 ( 2 2  2 sin2 𝑥 + sin 𝑥 + cos 𝑥 − cos 𝑥 = 0  2 sin2 𝑥 + sin 𝑥 = 0 sin 𝑥 (2 sin 𝑥 + 1) = 0 | | | | | |
| sin 𝑥 = 0    *x =* 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ Z | | | | 2 sin 𝑥 + 1 = 0  2 sin 𝑥 = −1 sin 𝑥 = − 1  2  𝑥 = − 5𝜋 + 2𝜋𝑛; 𝑥 = − 𝜋 + 2𝜋𝑛,  6 6 | 𝑛𝜖𝑍 |
| Ответ: 𝑎) | − 5𝜋 + 2𝜋𝑛;  6 | − 𝜋 + 2𝜋𝑛;  6 | 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 | |  |

1. а) Решите уравнение 2 cos3 𝑥 + √3 cos2 𝑥 + 2 cos 𝑥 + √3 = 0

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[−2𝜋; − 𝜋]

2

*Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно. Второй шаг решения выполнять не нужно, т.к. углы одинаковые.*

|  |  |
| --- | --- |
| *Слагаемых четыре, разложим левую часть уравнения на множители с помощью метода группировки.*  cos2 𝑥 (2 cos 𝑥 + √3) + (2 cos 𝑥 + √3) = 0 (2 cos 𝑥 + √3)(cos2 𝑥 + 1) = 0 | |
| 2 cos 𝑥 + √3 = 0 2 cos 𝑥 = −√3  cos 𝑥 = − √3  2 | cos2 𝑥 + 1 = 0 cos2 𝑥 = −1 Корней нет |

|  |  |
| --- | --- |
| 𝑥 = − 5𝜋 + 2𝜋𝑛; 𝑥 = 5𝜋 + 2π𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 6 6 |  |
| Ответ: 𝑎) − 5𝛱 + 2𝜋𝑛; 5𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  6 6 | |

1. а) Решите уравнение 2 sin2 (3𝜋 + 𝑥) + cos(𝜋 − 𝑥) = 0

2

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[−2𝜋; − 𝜋]

2

*Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно.*

|  |  |
| --- | --- |
| 2 sin2 (3𝜋 + 𝑥) + cos(𝜋 − 𝑥) = 0  2  *Приводим углы к одинаковому виду x с помощью формул приведения.*  𝑠𝑖𝑛 (3𝜋 + 𝑥) = − 𝑐𝑜𝑠 𝑥 ; 𝑠𝑖𝑛2 (3𝜋 + 𝑥) = 𝑐𝑜𝑠2 𝑥 ; 𝑐𝑜𝑠(𝜋 − 𝑥) = − 𝑐𝑜𝑠 𝑥  2 2  2 cos2 𝑥 − cos 𝑥 = 0 cos 𝑥 (2 cos 𝑥 − 1) = 0 | |
| cos 𝑥 = 0    𝑥 = 𝜋 + 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 2 | 2 cos 𝑥 − 1 = 0  2 cos 𝑥 = 1 cos 𝑥 = 1  2  𝑥 = ± 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖 𝑍  3 |
| Ответ: 𝑎) 𝜋 + 𝜋𝑛; ± 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖 𝑍  2 3 | |

## Подборка заданий на решение тригонометрических уравнений (для самостоятельного выполнения)

Решите уравнения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | cos 2𝑥 = sin (𝑥 + 𝜋)  2 | *Ответ:* 2𝜋𝑛; ± 2𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍  3 |
| 2 | cos 2𝑥 − 3 cos 𝑥 + 2 = 0 | *Ответ:* 2𝜋𝑛; ± 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍  3 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 | 2 cos2 𝑥 + 2 sin 2𝑥 = 3 | *Ответ:* 𝜋 + 2𝜋𝑛; 5𝜋 + 2𝜋𝑛;  4 4  arctg 1 + 2𝜋𝑛; 𝜋 + arctg 1 +  3 3  +2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍 |
| 4 | sin 2𝑥 = 2 sin 𝑥 + sin (𝑥 + 3𝜋) + 1  2 | *Ответ:* 2𝜋𝑛;  − 5𝜋 + 2𝜋𝑛; − 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  6 6 |
| 5 | (tg2 𝑥 − 1)√13 cos 𝑥 = 0 | *Ответ:* ± 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍  4 |
| 6 | (2 sin 𝑥 + 1)√− sin 𝑥 − 1 = 0 | *Ответ:* − 2𝜋 + 2𝜋𝑛;  𝜋 3  − 2 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍 |
| 7 | 2 cos 𝑥 − √3 = 0  √7 sin 𝑥 | *Ответ:* 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍  6 |
| 8 | (𝑡𝑔𝑥 + √3) 𝑙𝑜𝑔13(2 𝑠𝑖𝑛2 𝑥)  = 0  𝑙𝑜𝑔47(√2 𝑐𝑜𝑠 𝑥) | *Ответ:* − 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍  3 |

## Способы отбора корней тригонометрического уравнения

Основные трудности у участников экзамена, приступивших к решению тригонометрического уравнения, возникают на этапе отбора корней: при верно решенном уравнении, либо неверно проводится отбор корней, либо не проводится вовсе.

К сожалению, пятая часть участников экзамена, верно решивших уравнение, ошибается в отборе корней. Способ отбора может быть любым: математически корректным и обоснованным как с помощью окружности, так и прямой или неравенств. Но в каждом из этих способов должны быть указаны ключевые элементы решения.

Рассмотрим различные способы отбора корней. Главное требование – решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. При отборе корней в процессе решения тригонометрических уравнений обычно используют один из следующих способов.

Для осуществления отбора корней на заданном отрезке можно использовать разные способы. Наиболее распространённые: с помощью

тригонометрической окружности, неравенства или используя графики тригонометрических функций.

## Примеры заданий на отбор корней тригонометрического уравнения на заданном промежутке

1. **Отбор корней с помощью графика тригонометрической функции**.

log2(sin 𝑥)+log2(sin 𝑥)

а) Решите уравнение

смотри на странице 38)

2

2 cos 𝑥+√3

= 0 (решение пункта а)

## б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[𝟎; 𝟑𝝅]

𝟐

Ответ: 𝑎)

𝜋 + 2𝜋𝑛;

6

𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍

2

Построим график функции 𝑦 = sin 𝑥. По оси *у* найдём 1 и 1 , проведём

2

прямые *у* = 1 и *у* = 1. Выделим отрезок [0; 3π] по оси *х***.** Найдём точки

2

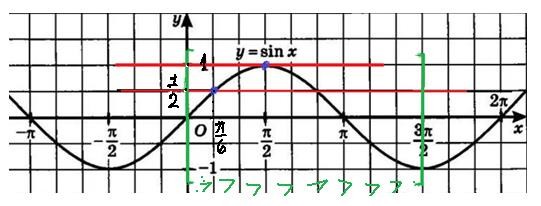
пересечения прямых *у* = 1 и *у* = 1

2

2

с графиком функции 𝑦 = sin 𝑥, лежащие на

заданном отрезке. Выпишем их абсциссы.



Ответ: б) 𝜋 ; 𝜋

6 2

Способ обора корней тригонометрического уравнения на заданном отрезке с использованием графиков тригонометрических функций имеет ряд

«минусов»:

* заданный для отбора корней отрезок может быть сильно сдвинут влево или вправо;
* исходное тригонометрическое уравнение может разбиться на несколько простейших тригонометрических уравнений относительно разных функций, а это потребует построения сразу нескольких графиков;
* решения простейших тригонометрических уравнений могут быть записаны через arcsin, arccos, arctg.

## Отбор корней с помощью неравенства.

√

а) Решите уравнение cos 2𝑥 − 2 cos (3𝜋 + 𝑥) − 1 = 0 (решение

2

пункта а) смотри на странице 39)

## б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[𝟑𝝅 ; 𝟑𝝅]

𝟐

Ответ: 𝑎) − 3𝜋 + 2𝜋𝑛; − 𝜋 + 2𝜋𝑛; 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍.

4 4

*С каждым семейством корней составим двойное неравенство.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3𝜋  2 | ≤ | − 3𝜋 + 2𝜋𝑛 ≤ 4 | 3𝜋 | 3𝜋 𝜋  2 ≤ − 4 + 2𝜋𝑛 ≤ 3𝜋 | 3𝜋 ≤ 𝜋𝑛 ≤ 3𝜋  2 | |
| *Разделим каждое неравенство на π* | | | | | | |
| 3 3  2 ≤ − 4 + 2𝑛 ≤ 3 | | | | 3 1  2 ≤ − 4 + 2𝑛 ≤ 3 | 3  2 ≤ 𝑛 ≤ 3 | |
| *Слагаемое с n оставим внутри двойного неравенства, числовое слагаемое перенесём в обе части каждого неравенства, поменяв знак.* | | | | | *На отрезке от* 3 *до 3*  2  *лежит два целых числа*  𝑛 = 2; 𝑛 = 3 | |
| 3 3 3  2 + 4 ≤ 2𝑛 ≤ 3 + 4  9 ≤ 2𝑛 ≤ 15  4 4 | | | | 3 1 1  2 + 4 ≤ 2𝑛 ≤ 3 + 4  7 ≤ 2𝑛 ≤ 13  4 4 | При *n* = 2 При 𝑛 = 3 | 𝑥 = 2𝜋  𝑥 = 3𝜋 |
| *Чтобы получить границы значений для n*  *разделим каждое неравенство на 2* | | | | |  | |
| 9 ≤ 𝑛 ≤ 15  8 8  *На отрезке*  *от* 9 до 15 *нет*  8 8  *целых значений n*  𝑛 = ∅ | | | | 7 ≤ 𝑛 ≤ 13  8 8  *На отрезке*  *от* 7 до 13 *лежит*  8 8  *целое число 1*  𝑛 = 1  При 𝑛 = 1 𝑥 = − 𝜋 +  4  2𝜋 = 7𝜋  4 |
| Ответ: б) 7𝜋 ;  4 | | | 2𝜋; | 3𝜋 |  |  |

Способ отбора корней с помощью неравенства очень удобен и алгоритмизирован. Но его не применить, если решения простейших тригонометрических уравнений могут быть записаны через arcsin, arccos, arctg.

## Отбор корней тригонометрического уравнения с помощью окружности.

Самый универсальный способ. Ключевые моменты при его использовании:

* чётко указанные начало и конец дуги окружности, соответствующей заданному отрезку;
* выделенная любым способом дуга, на которой производится отбор корней;
* чётко подписанные и желательно высчитанные корни, принадлежащие заданному в условии отрезку

а) Решите уравнение 2 sin2 𝑥 + √2 sin (𝑥 + 𝜋) = cos 𝑥 (решение пункта а)

4

смотри на странице 39)

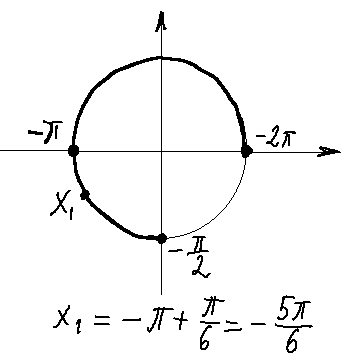
## б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[−𝟐𝝅; − 𝝅]

𝟐

Ответ: 𝑎) − 5𝜋 + 2𝜋𝑛; − 𝜋 + 2𝜋𝑛; 𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍.

6 6



Отберём корни с помощью единичной окружности. Ответ: б) −2𝜋; −𝜋; − 5𝜋

6

## Подборка заданий на отбор корней тригонометрических уравнений на заданном промежутке (для самостоятельного выполнения)

В решённых в предыдущем пункте уравнениях, выполните отбор корней, принадлежащих заданному промежутку:

𝟏) 𝐜𝐨𝐬 𝟐𝒙 = 𝐬𝐢𝐧 (𝒙 + 𝝅) *Ответ: а)* 2𝜋𝑛; ± 2𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍

𝟐 3

## *б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[−𝟐𝝅; −𝝅] *Ответ: б)* −2𝜋; − 4𝜋

3

𝟐) 𝐜𝐨𝐬 𝟐𝒙 − 𝟑 𝐜𝐨𝐬 𝒙 + 𝟐 = 𝟎 *Ответ: а)* 2𝜋𝑛; ± 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍

3

## *б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[−𝟒𝝅; − 𝟓𝝅] *Ответ: б)* −4𝜋; − 11𝜋

𝟐 3

𝟑) 𝟐 𝐜𝐨𝐬𝟐 𝒙 + 𝟐 𝐬𝐢𝐧 𝟐𝒙 = 𝟑 *Ответ: а)* 𝜋 + 2𝜋𝑛; 5𝜋 + 2𝜋𝑛;

4 4

arctg 1 + 2𝜋𝑛; 𝜋 + arctg 1 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍

3 3

## *б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[− 𝟑𝛑 ; − 𝛑] *Ответ:* − 3𝜋 ; −𝜋 + arctg 1

𝟐 𝟐 4 3

𝟒) 𝐬𝐢𝐧 𝟐𝒙 = 𝟐 𝐬𝐢𝐧 𝒙 + 𝐬𝐢𝐧 (𝒙 + 𝟑𝝅) + 𝟏

𝟐

*Ответ: а)* 2𝜋𝑛; − 5𝜋 + 2𝜋𝑛; − 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍

6 6

## *б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[−𝟒𝝅; − 𝟓𝝅] *Ответ: б)* −4𝜋; − 17𝜋

𝟐 6

𝟓) (𝐭𝐠𝟐 𝒙 − 𝟏) 𝟏𝟑 𝐜𝐨𝐬 𝒙 = 𝟎 *Ответ: а)* ± 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍

4

√

## *б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[−𝟑𝝅; − 𝟑𝜫] *Ответ: б)* − 9𝛱 ; − 7𝜋

𝟐 4 4

𝟔) (𝟐 𝐬𝐢𝐧 𝒙 + 𝟏)√− 𝐬𝐢𝐧 𝒙 − 𝟏 = 𝟎 *Ответ: а)* − 2𝜋 + 2𝜋𝑛; − 𝜋 +

3 2

2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍

## *б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[𝟎; 𝟑𝜫] *Ответ: б)* 4𝜋 ; 3𝜋

𝟐 3 2

𝟕) 𝟐 𝐜𝐨𝐬 𝒙−√𝟑 = 𝟎 *Ответ: а)* 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛 ∈ 𝑍

√𝟕 𝐬𝐢𝐧 𝒙 6

## *б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

[𝝅; 𝟓𝝅] *Ответ: б)* 13𝜋

𝟐 6

𝟖) (𝒕𝒈𝒙+√𝟑) 𝒍𝒐𝒈𝟏𝟑(𝟐 𝒔𝒊𝒏𝟐 𝒙) = 𝟎 *Ответ: а)* − 𝜋 + 2𝜋𝑛, 𝑛𝜖𝑍

𝒍𝒐𝒈𝟒𝟕(√𝟐 𝒄𝒐𝒔 𝒙) 3

## *б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу

(− 𝝅 ; 𝝅) *Ответ: б)* − 𝜋

𝟐 𝟐 3

Полноценно подготовиться к экзамену можно, лишь изучая

математику во всём разнообразии её методов; необходимо уделять должное внимание развитию логики. В этом могут помочь открытый банк ФИПИ, сборники задач и вариантов, если их использовать как источник идей и для проверки собственных достижений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра: 10 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир и др. – Москва : Вентана-Граф, 2022.
2. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс (углубленный уровень) / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир и др. – Москва : Вентана- Граф, 2020.
3. И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, Е. А. Коновалов: ЕГЭ-2024. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты. 36 вариантов. – Национальное образование, 2024.
4. Малкова, А. Г. Математика : авторский курс подготовки к ЕГЭ / А. Г. Малкова. – 4-е изд. – Ростов на Дону : Феникс, 2019. – 540, [1] с. : ил. – (Авторский курс).

## ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРЫ

1. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ». – URL: <https://math-ege.sdamgia.ru/>.
2. Образовательный сайт для подготовки к экзаменам. – URL: [www.alexlarin.net](http://www.alexlarin.net/).
3. Федеральный институт педагогических измерений. – URL: [www.fipi.ru.](http://www.fipi.ru/)
4. Решу ЕГЭ. – URL: [www.ege.sdamgia.ru.](http://www.ege.sdamgia.ru/)
5. Проверка знаний в он-лайн тестировании. – URL: [www.academyege.ru.](http://www.academyege.ru/)