

# Theory of Measure and Integration - TØ

WEEK 4

VALDEMAR EMIL OTTE PETERSEN

AARHUS UNIVERSITET

SEPTEMBER 17, 2024

## 1 Opgaver

### Question 1.18

**Opgavebeskrivelse:**

text

**Løsning:**

text

### Question 1.21

**Opgavebeskrivelse:**

text

**Løsning:**

text

### Question 1.22

**Opgavebeskrivelse:**

text

**Løsning:**

text

### Question 4.1

**Opgavebeskrivelse:**

text

**Løsning:**

- (a)
- (b)

## Question 4.3

**Opgavebeskrivelse:**

text

**Løsning:**

text

## Question 4.4

**Opgavebeskrivelse:**

Lad  $(X, \mathcal{E})$  være et måleligt rum, lad  $f$  og  $g$  være funktioner fra  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ , og lad  $A$  være en mængde fra  $\mathcal{E}$ . Vis da, at funktionen  $h : X \rightarrow R$  givet ved

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in A^c \end{cases} \quad (1)$$

igen er et element i  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$

**Løsning:**

Vi vil gerne bruge Sætning 4.4.3 (Tuborg resultatet).

For at bruge Tuborg resultatet, så skal der gælde for alle  $j$ , at  $f_j$  er  $\mathcal{E}j - \mathcal{F}$ -målelige.

Først bemærker vi, at  $A \cup A^C = X$ .

Vi bemærker også, at følge bemærkning 4.4.2 (3), at vi kan betragte restriktionen  $f|_A : A \rightarrow R$  givet ved  $f|_A(x) = f(x), (x \in A)$ . Idet  $f|_A \cdot i_A$ , så følger det fra Sætning 4.1.6(v), at  $f|_A$  er  $\mathcal{E}_A - \mathcal{F}$ -målelig. Tilsvarende kan gøres for  $g|_{A^c}$ .

Dermed vil vi nu kunne bruge Tuborg resultatet, og sige at afbildningen er  $\mathcal{E} - \mathcal{F}$ -målelig og dermed igen et element i  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$

## Question 4.6

**Opgavebeskrivelse:**

text

**Løsning:**

text

## Question 4.7

**Opgavebeskrivelse:**

text

**Løsning:**

text