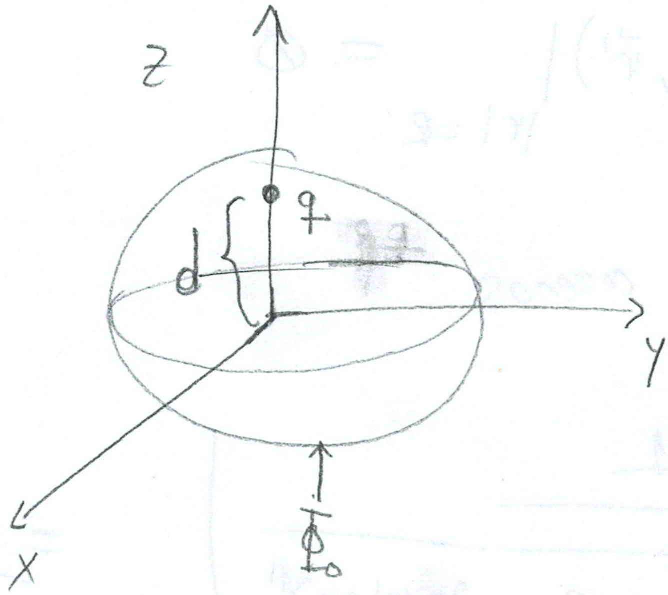
Ejemplo 2: Carga puntual dentro de una esfera conductora



Nos interesa $\Phi(\vec{r})$ dentro de la esfera, tenemos que dentro sí hay distribución de carga, por lo que debemos resolver

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho(\vec{r}) = -4\pi q \delta(x)\delta(y)\delta(z-d)$$

tenemos que $0 \leq x, y, z \leq R$ y $d < R$

y la condición de frontera es $\Phi(R, \theta, \phi) = \Phi_0$

como conocemos Φ en la frontera, nuevamente utilizamos Dirichlet

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + H(\vec{r}, \vec{r}')$$

en la frontera, cuando $|r| = R$

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}')\Big|_{|r|=R} = 0$$

de la ley de cosenos

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\Bigg|_{r=R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2Rr'\cos\gamma'}}\Bigg|_{r=R} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos\gamma'}}$$

por lo que

$$G_D\Big|_{r=R} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos\gamma'}} + H(\vec{r}, \vec{r}') = 0$$

por lo que en la frontera se cumple que

$$H_{r=R} = -\frac{1}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos\gamma'}}$$

pero en todo el espacio se debe cumplir que

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = G_D(\vec{r}', \vec{r})$$

por lo que

$$H(\vec{r},\vec{r}') \neq H(\vec{r},\vec{r}')\Big|_{r=R}$$

si escribimos $H(\vec{r},\vec{r}') = \dfrac{-\alpha}{|\vec{r}-\vec{r}''|}$ con $\vec{r}'' = \vec{r}''(\vec{r}')$

es decir, una funcion proporcional a $G^{(0)}$ y proporcional en $\vec{r}''$ también tal que sólo en $r=R$ se anulen pero que al igual que $G^{(0)}$ cumpla que si $(\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}')$ sean equivalentes

entonces de ley de cosenos

$$H(\vec{r},\vec{r}')\Big|_{r=R} = \frac{-\alpha}{\sqrt{r^2 + r''^2 - 2rr''\cos\gamma'}}\Bigg|_{r=R} =$$

$$= \frac{-\alpha}{\sqrt{R^2 + r''^2 - 2Rr''\cos\gamma'}}$$

por lo que

$$G_D(\vec{r},\vec{r})\Big|_{r=R} = \frac{1}{\sqrt{R^2+r'^2-2Rr'\cos\gamma'}} - \frac{\alpha}{\sqrt{R^2+r''^2-2Rr''\cos\gamma''}}$$

$$= 0$$

o bien $\alpha^2\left(R^2+r'^2-2Rr'\cos\gamma\right) = \left(R^2+r''^2-2Rr''\cos\gamma''\right)$

Revisar Problema 2 de método de imágenes en github #2

y podemos ver claramente que

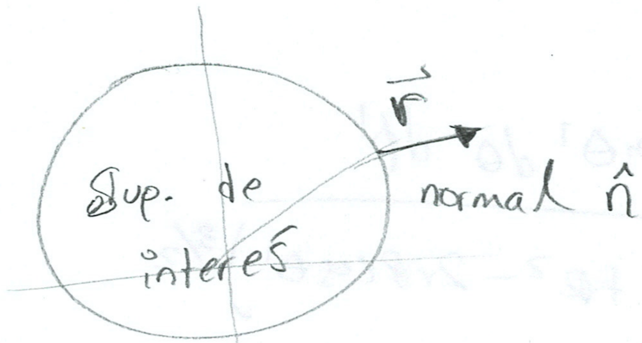
$$\boxed{\alpha = \frac{R}{r'} \rightarrow r'' = \alpha^2 r' = \frac{R^2}{r'} \qquad \gamma'' = \gamma'}$$

por lo que

$$G_D(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma'}} - \frac{R}{\sqrt{r^2r'^2+R^4-2R^2rr'\cos\gamma'}}$$

$$= G_D(\vec{r}',\vec{r})$$

en este caso



por lo que $\dfrac{\partial}{\partial n'} = \dfrac{\partial}{\partial r'}$

y el potencial es

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi}\int_S ds'\,\Phi(\vec{r}\,')\,\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial r'}$$

$$+ \int_V d^3r'\,G_0(\vec{r},\vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')$$

$$= \frac{\Phi_0 (R^2 - r^2)}{4\pi R}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta')^{3/2}}$$

$$+ \int_V d^3r'\,G_0(\vec{r},\vec{r}\,')\,q\,\delta(x')\delta(y')\delta(z'-d)$$

pero $r' = |\vec{r}\,'| = \sqrt{x'^2 + y' + z'^2} = \sqrt{d^2} = d$

por lo que

$$\Phi = \frac{\Phi_0 (R^2 - r^2)}{4\pi a} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' \, d\phi'}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta')^{3/2}}$$

$$+ q \left(\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{1/2}} - \frac{R}{(d^2 r^2 + R^4 - 2R^2 dr \cos\theta)^{1/2}} \right]$$

podemos resolver nuevamente la integral (libro P.P. 115)

ó notar que

$$\int_S ds' \, \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial r'} = \Phi_0 \int_S d\vec{S} \cdot \nabla' G_D$$

$$= \Phi_0 \int_V d^3 r' \, \nabla'^2 G_D$$

$$= \Phi_0 \int_V d^3 r' \, (-4\pi) \, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$= \Phi_0 (-4\pi)$$

por lo que finalmente

$$\Phi(\vec{r}) = \underbrace{\frac{-1}{\cancel{4\pi}}\left(-\Phi_0 \cancel{4\pi}\right)}_{\Phi_0} + q\left[\frac{R}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}} - \frac{R}{(d^2r^2+R^4-2R^2dr\cos\theta)^{1/2}}\right]$$

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0 + q\left[\frac{1}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}} - \frac{R}{(d^2r^2+R^4-2R^2dr\cos\theta)^{1/2}}\right]$$