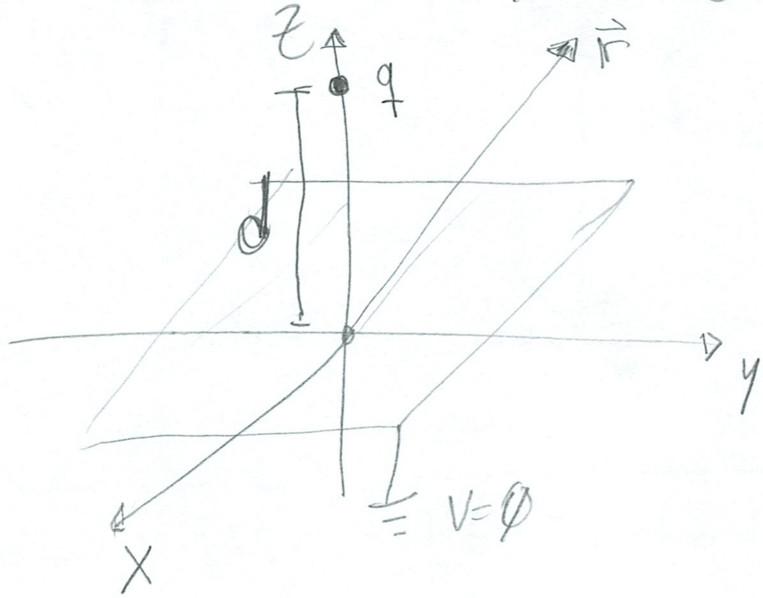
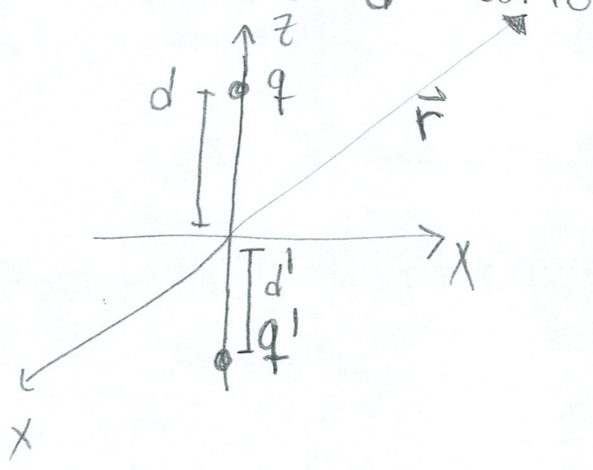
Método de Imágenes:

Sistema: Carga q situada a una distancia 'd' sobre un plano conductor infinito conectado a tierra (Potencial cero). ¿Cuál es el campo observado en la ~~parte~~ región superior al plano? ¿Cuál es el potencial?



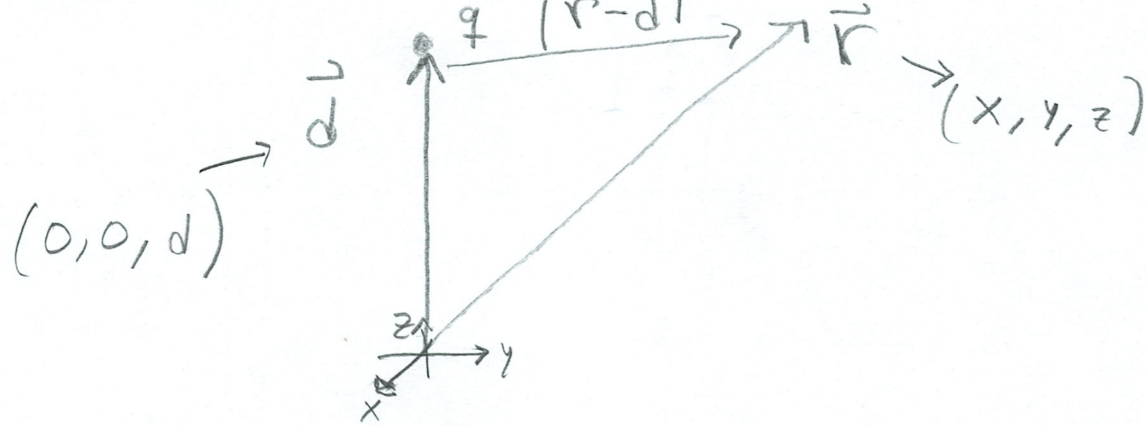
- Si reemplazamos el plano por una carga q' situada a una distancia d' como



por el principio de superposición de los campos, podemos tener el potencial total

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d')^2}}\right]$$

¿Por qué $\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}$?



$$|\vec{r}-\vec{d}| = \sqrt{(\vec{r}-\vec{d})\cdot(\vec{r}-\vec{d})} = \sqrt{(x, y, z-d)\cdot(x, y, z-d)}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}$$

- Las condiciones de frontera son

1.- $V = \emptyset$ para todo $z = \emptyset$,

2.- $V \to \emptyset$ en un punto de observación muy lejano a la carga.

Aplicando la primera condición de frontera

$$\phi(x,y,\emptyset) = \emptyset = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+d'^2}}\right]$$

o bien

$$\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} = -\frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+d'^2}}$$

se cumple la igualdad cuando

$$q' = -q \quad y \quad d = d'$$

por lo que

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$$

- Aplicando la segunda condición de frontera

para $|\vec{r}| >> |\vec{d}|$ ó $x^2+y^2+z^2 >> d^2$

tenemos $V \to 0$

$$\lim_{\substack{|\vec{r}|>>|\vec{d}| \\ d\to\emptyset}} \phi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right] = \emptyset$$

por lo que cumple las 2 condiciones de frontera.

¿Por qué este sistema completamente diferente al del plano nos da el potencial del plano?

- Por el teorema de unicidad: Un potencial que cumple la ecuación de Poisson en una región R y las condiciones de frontera, ese potencial es único.

- Para calcular el campo $\vec{E}$ simplemente calculamos

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

- La carga superficial inducida en este caso es

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \quad n = z \text{ en este caso}$$

$$\therefore \quad \sigma = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=\emptyset}$$

calculando

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{-q(z-d)}{\left[x^2+y^2+(z-d)\right]^{3/2}} + \frac{q(z+d)}{\left[x^2+y^2(z+d)^2\right]^{3/2}} \right\}$$

evaluado en $z = \emptyset$

Tenemos entonces

$$\sigma = \frac{-qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

si cambiamos a coordenadas polares

$$\sigma = \frac{-qd}{2\pi(r^2+d)^{3/2}}$$

la carga total inducida es

$$Q = \int \sigma \, da = \int \sigma \, r dr d\phi$$

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{-qd}{2\pi(r^2+d^2)^{3/2}} r dr d\phi = \frac{qd}{\sqrt{r^2+d^2}}\Bigg|_0^{\infty} = -q$$

- Calculando la fuerza entre la carga q y q':

$$\vec{F} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2d)^2}\hat{z}$$

$$W = -\int_{\infty}^{d\hat{z}} d\vec{l} \cdot \vec{F} =$$

Pero la fuerza en función de la separación entre ed plano y la carga sera

$$\vec{F}(z) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2z)^2} \hat{z}$$

por lo que

$$W = -\int_{\infty}^{d} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{d} \frac{q^2}{4z^2} dz = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{4d}$$