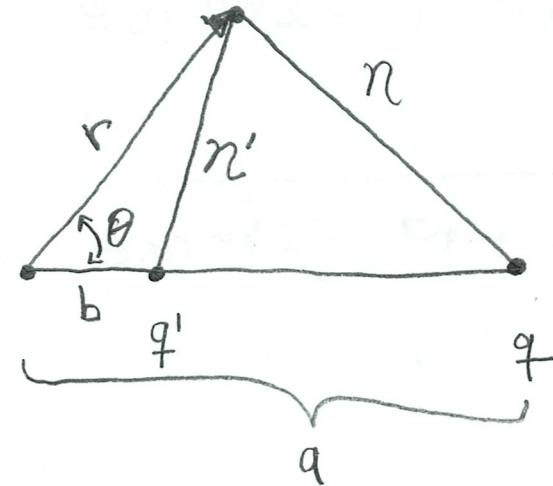
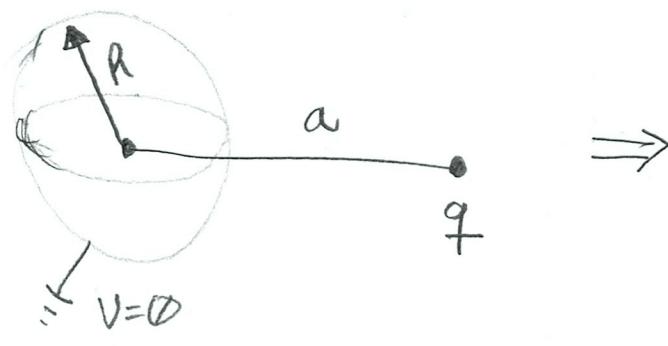


20

Carga y esfera conductora:



el potencial generado por las obs cargas es

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{n} + \frac{q'}{n'} \right)$$

debe cumplir las condiciones de frontera:

$$1. V(R) = 0$$

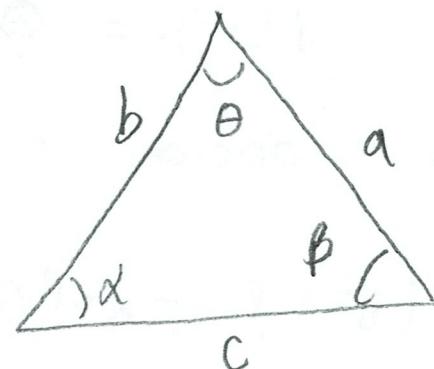
$$2. \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$$

Nota: recordar la ley de cosenos:

$$\bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$\bullet b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$\bullet c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



$$n = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}$$

$$n' = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}$$

entonces

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR \cos \theta}} \right) = 0$$

$$\therefore q = -q'$$

$$\text{y } \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta} = \sqrt{b^2 + R^2 - 2bR \cos \theta}$$

$$\rightarrow a^2 - 2Ra \cos \theta = b^2 - 2bR \cos \theta$$

$(a^2 = b^2)$ $\neq a = b$ pero esto nos proporcionaría

$$\text{que } V(r) = 0.$$

→ otra opción es

$$q^2(b^2 + R^2 - 2bR \cos \theta) = q'^2(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)$$

Factorizando:

$$\cancel{R^2 q^2 \left(1 - \left(\frac{q'}{q} \right)^2 \right) + b^2 q^2 \left(1 - \left(\frac{q' a}{q b} \right)^2 \right)}$$

$$= 2 R b \cos \theta q^2 \left(1 - \left(\frac{q'}{q} \right)^2 \frac{q}{b} \right) = \emptyset$$

debe ser válido para todo θ :

$$\therefore 1 - \left(\frac{q'}{q} \right)^2 \frac{q}{b} = \emptyset$$

↳ $q'^2 = \frac{b}{a} q^2$, esto hace cero el último término,

sustituyendo entonces en la ecuación anterior

$$R^2 \left(1 - \left(\frac{q'}{q} \right)^2 \right) + b^2 \left(1 - \left(\frac{q' a}{q b} \right)^2 \right) = a^2 \left(1 - \frac{b}{a} \right) + b^2 \left(1 - \frac{a}{b} \right) = \emptyset$$

por lo tanto

$$(R^2 - \frac{R^2 b}{a} + b^2 - ab) = \emptyset$$

↳ $b^2 - b \left(\frac{R^2}{a} + a \right) + R^2 = \emptyset$

$$x = + \sqrt{\left(\frac{R^2}{a} + a\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{R^2}{a} + a\right)^2 - 4R^2}$$



Dirección General

Formato Transitorio para la Evaluación de la Competencia

2

Formato Transitorio para la Evaluación de la Competencia

FORMATO DE EVALUACIÓN AL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

Motivo del desarrollo	$\left(\frac{R^2}{a} + a\right) \pm$
Nº de control	16840168
Actividad complementaria	Planteo de Tarea
Método de evaluación	Ejercicio SOSO - Aporte SOSO

$$a \left[R^2 - \frac{R^2 b}{a} + b^2 - ab \right] = 0$$

$$aR^2 - R^2 b + ab^2 - ab = 0$$

$$ab^2 - (R^2 + a^2)b + aR^2 = 0$$

$$b = + \frac{(R^2 + a^2)}{2a} \pm \frac{\sqrt{(R^2 + a^2)^2 - 4a^2R^2}}{2a}$$

$$= \frac{R^2 + a^2}{2a} \pm \frac{R^2 - a^2}{2a} = \frac{R^2}{a} / a$$

W.C. Quadriárticas y ópticas González Torres

Nivel de desarrollo alcanzado en las actividades complementarias: 100



entonces la carga es

$$q'^2 = \frac{b}{a} q^2 = \frac{R^2}{a^2} q^2 \quad \text{por lo que}$$

$$q' = \frac{R}{a} q \quad y \quad q' = -\frac{R}{a} q$$

por lo que

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2r\cos\theta}} - \left(\frac{R}{a}\right) \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2r\cos\theta}} \right]$$

con

$$b = \frac{R^2}{a}$$

reescrivimos

$$-\left(\frac{R}{a}\right) \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2r\cos\theta}} = -\frac{q}{\frac{(q/R)\sqrt{r^2 + R^4/a^2 - 2rR^2/a\cos\theta}}{\sqrt{R^2 + (ra/R)^2 - r\cos\theta}}} = -\frac{q}{\sqrt{R^2 + (ra/R)^2 - r\cos\theta}}$$

finalmente

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2r\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (ra/R)^2 - 2r\cos\theta}} \right\}$$

- Calculando la densidad de carga superficial inducida:

$$\phi = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r} = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

$$\phi = \pm \frac{q}{4\pi R} (R^2 - a^2) (R^2 + a^2 - 2Ra \cos\theta)^{-3/2}$$

- La carga total inducida

$$q_{\text{ind}} = \int \phi da = \frac{q}{4\pi R} (R^2 - a^2) \int (R^2 + a^2 - 2Ra \cos\theta)^{-3/2} R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{q}{2a} (a^2 - R^2) \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2Ra}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra}} \right]$$

$$= \frac{q}{2a} (a^2 - R^2) \left[\frac{1}{(a + R)} - \frac{1}{a - R} \right]$$

con $a > R$

$$= \frac{q}{2a} (a^2 - R^2) \left[\frac{a - R - a - R}{(a^2 - R^2)} \right] = -\frac{R}{a} q = q'$$

• Trabajo de la configuración

la fuerza que siente q debido a q' es

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(a-b)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{a} q^2 \frac{1}{(a-\frac{R^2}{a})^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 Ra}{(a^2-R^2)^2}$$

$$W = \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^a \frac{da'}{(a'^2 - R^2)^2} \quad da' = \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(a'^2 - R^2)} \right]_{\infty}^a$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{2(a^2 - R^2)}$$

//