Solución a la ecuación de Poisson:

Notas importantes:

- Si no hay cargas debemos resolver la ecuación de Laplace:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

- En el caso en que tenemos cargas, o distribuciones de cargas la ecuación que debemos resolver es la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \rho .$$

Resolviendo obtenemos el potencial eléctrico ϕ y por lo tanto podemos conocer el campo $\vec{E}$:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \phi}$$

→ De nuestras clases de ecuaciones diferenciales recordamos que la solución general a la ecuación esta dada por la suma de su solución Homogénea (Laplace) y su solución no-homogenea (Poisson), por lo que en caso de tener cargas en el sistema a resolver, debemos resolver ambas ecuaciones para conocer la solución general.

El método de las funciones de Green nos permite encontrar solución a la ecuación de Poisson.

Partimos de la ecuación

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -4\pi\, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

que tiene la forma de la ecuación de Poisson con una carga puntual en $\vec{r} = \vec{r}\,'$, la solución G es conocida como función de Green. Una vez encontramos G, podemos encontrar el potencial de

$$\phi_p(\vec{r}) = \int d^3r'\, G(\vec{r}, \vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')$$

veamos si cumple la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi_p(\vec{r}) = \nabla^2 \int d^3r'\, G(\vec{r}, \vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')$$

$$= \int d^3r' \left[\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}\,')\right] \rho(\vec{r}\,')$$

$$= -4\pi \int d^3r'\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')$$

$$= \boxed{-4\pi\, \rho(\vec{r}) = \nabla^2 \phi(\vec{r})}$$

Para una distribución de carga, el potencial es

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

por lo que podemos identificar

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

por lo que tenemos que se cumple

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -4\pi\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Para encontrar G debemos escoger una apropiada condición de frontera, por ejemplo, para esta G, tenemos

$$\lim_{|\vec{r}|\to\infty} G(\vec{r},\vec{r}\,') \Rightarrow 0$$

La solución completa a la ecuación de Poisson es

$$\Phi = \phi_H + \phi_\rho = \phi_H(\vec{r}) + \int_V d^3r' \, G(\vec{r},\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')$$

pero en este caso

$$\nabla^2 \phi_H = 0$$

y las condiciones de frontera al caso sin cargas es

$$\Phi_H = 0$$

por lo que la solución general a la ecuación de Poisson es:

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V \frac{d^3\vec{r}' \, \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

En general cuando tenemos superficis conductoras y distribuciones de carga tenemos que

$$G(\vec{r},\vec{r}') \longrightarrow G(\vec{r},\vec{r}') + H(\vec{r},\vec{r}) \quad \text{donde}$$

$$\nabla^2 H(\vec{r},\vec{r}) = 0$$

¿Cómo encontramos $\Phi(\vec{r})$ general?

Partiendo del teorema de la divergencia

$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}\, d^3r = \oint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\, da$$

$\vec{A}$ es un campo vectorial bien definido en todo el volumen 'V', y 'S' es la superficie que encierra a 'V'.

Si $\vec{A} \equiv \cancel{G(\vec{r},\vec{r}\,')\nabla\Phi}\ \Phi(\vec{r})\nabla G(\vec{r},\vec{r}\,')$

Por lo que

$$\nabla\cdot\left[\Phi(\vec{r})\nabla G(\vec{r},\vec{r}\,')\right] = \Phi\,\nabla^2 G + \nabla\Phi\cdot\nabla G$$

y además

$$\vec{A}\cdot\hat{n} = \left(\Phi\,\nabla G\right)\cdot\hat{n} = \Phi\,\frac{\partial G}{\partial n}$$ ← Derivada direccional

por lo que tenemos

$$\int_V \left[\Phi\,\nabla^2 G + \nabla\Phi\cdot\nabla G\right] d^3r = \oint_S \Phi\,\frac{\partial G}{\partial n}\, da \qquad (1)$$

si ahora

$$\vec{A} \equiv G(\vec{r},\vec{r}\,')\,\nabla\Phi(\vec{r})$$

$\circ\ \nabla\cdot[G\nabla\Phi] = G\nabla^2\Phi + \nabla G\cdot\nabla\Phi$

y

$\circ\ \vec{A}\cdot\hat{n} = (G\nabla\Phi)\cdot\hat{n} = G\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}$

por lo que el teorema de divergencia queda

$$\int_V [G\nabla^2\Phi + \nabla G\cdot\nabla\Phi]\,d^3r = \oint_S G\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,da \qquad (2)$$

restando (1) y (2):

$$\int_V [G\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2 G]\,d^3r = \oint_S \left[G\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial G}{\partial n}\right] da$$

como $\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$$\int_V [G\nabla^2\Phi + 4\pi\Phi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')]\,d^3r = \oint_S \left[G\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial G}{\partial n}\right] da$$

o bien

$$4\pi\Phi(\vec{r}) + \int_V [G\nabla^2\Phi]\,d^3r = \oint_S \left[G\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial G}{\partial n}\right] da$$

y como

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho(\vec{r})$$

tenemos:

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V [G \nabla^2 \Phi] d^3r + \frac{1}{4\pi}\oint_S [G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n}] da$$

$$= \int_V G\rho(\vec{r})\, d^3r + \frac{1}{4\pi}\oint_S [G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n}] da$$

para determinar el potencial completo entonces es la ecuación anterior. Necesitamos conocer a $G(\vec{r},\vec{r}')$ y su comportamiento en la frontera.

Pero es una ecuación elíptica y sólo requerimos conocer su valor en la frontera, Φ o su derivada para encontra la solución única, no ambas.

Tenemos la condición de Dirichlet:

$$G_D(\vec{r},\vec{r}') = 0 \qquad \text{para } \vec{r}' \text{ en } S$$

entonces tendremos

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') G_D(\vec{r},\vec{r}')\, d^3r' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da'$$

y la condición de Neumann:

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{para } \vec{r}\,' \text{ en } S.$$

$$\phi(\vec{r}) = \langle \phi \rangle_S + \int_V \rho(\vec{r}\,') G_N(\vec{r},\vec{r}\,') \, d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial \phi}{\partial n'} G_N \, da'$$

Jackson P.P. 36–39: