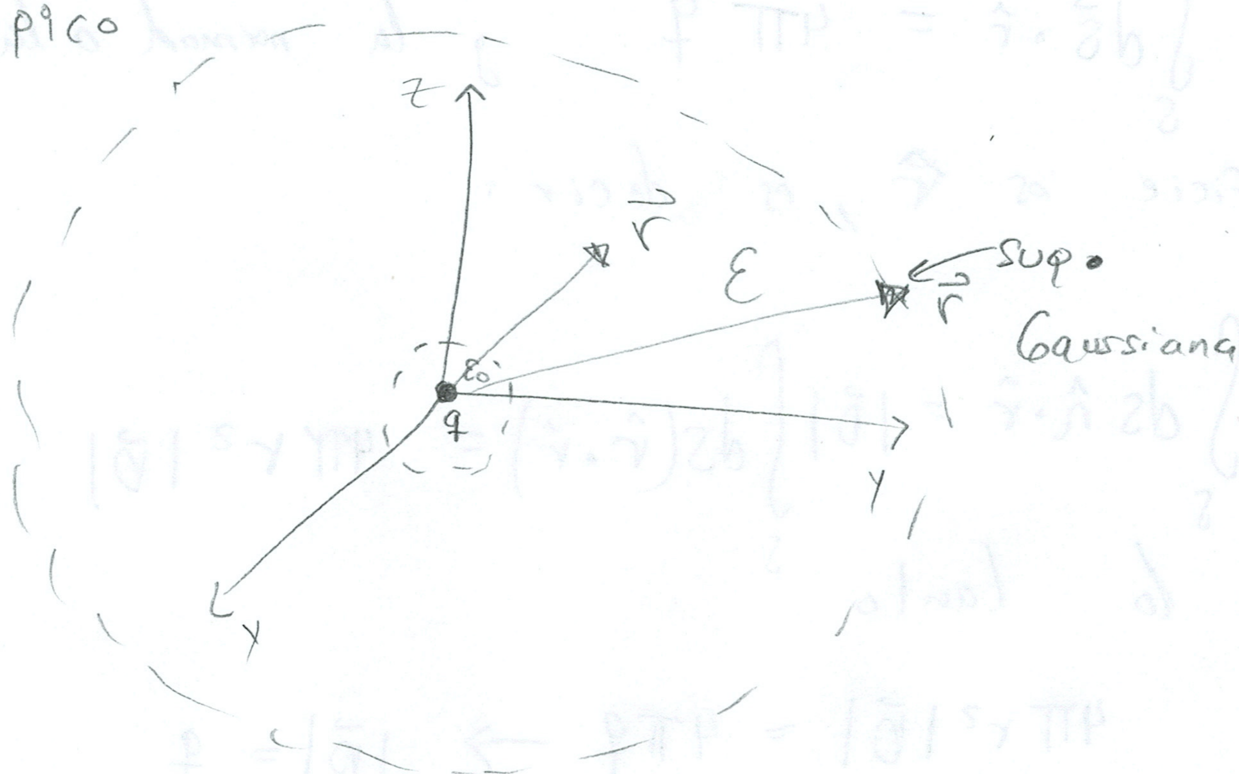
Ejemplo 1° // Carga puntual dentro de un dieléctrico isotrópico



es isotrópico $\longrightarrow$ $\vec{P} = \chi \vec{E}$ ← misma dirección radial

y de

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{D} = 4\pi Q$$

$\vec{D}$ tiene la misma dirección radial $\hat{r}$ que $\vec{E}$

y la carga total encerrada el la supo Gaussiana es:

$$Q = q$$

y $\vec{D} = |\vec{D}|\,\hat{r}$ por lo que

$$|\vec{D}| \int_S d\vec{S} \cdot \hat{r} = 4\pi q$$

y la normal a la superficie es $\hat{r}$, es decir:

$$|\vec{D}| \int_S ds\, \hat{n} \cdot \hat{r} = |\vec{D}| \int_S ds (\hat{r} \cdot \hat{r}) = 4\pi r^2 |\vec{D}|$$

por lo tanto

$$4\pi r^2 |\vec{D}| = 4\pi q \rightarrow |\vec{D}| = \frac{q}{r^2}$$

y además

$$\vec{D} = \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

si queremos conocer el campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{D} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

y por lo tanto el potencial es:

$$\boxed{\phi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q}{r}}$$

Si queremos conocer la polarización inducida en el medio por q;

$$\vec{P} = \chi \vec{E} = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi}\vec{E} = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

y cual es la carga inducida? (Se induce carga en el dieléctrico por el medio.

Como

$$\rho_b = -\nabla\cdot\vec{P} = -\nabla\cdot\left(\frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}q\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}q\,\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}q\left[\vec{r}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{r}\right]$$

$$= -\frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}q\left[-3\vec{r}\cdot\frac{1}{r^4}\hat{r} + \frac{3}{r^3}\right]$$

$$= \emptyset$$

por lo que la carga total del dieléctrico inducida por q, sólo será por el término

$$Q_b = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{P} = -\frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon} q \int_S \frac{dS}{r^2} = -\frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon} q \int_S d\Omega$$

$$= -\frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon} q \, (4\pi) = -\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon} q$$

como $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$ y $\chi \geq 0$ $\therefore$ $\varepsilon \geq 1$.

Por lo que la carga inducida en el dieléctrico debido a la presencia de q es:

$$Q_b = -\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon} q \leftarrow \text{Negativa}$$

y la carga efectiva es

$$q_{eff} = Q + Q_b = q\left(1 - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right) = \frac{q}{\varepsilon}$$

el dielectrico nos reduce un facto $1/\varepsilon$ el campo observado!