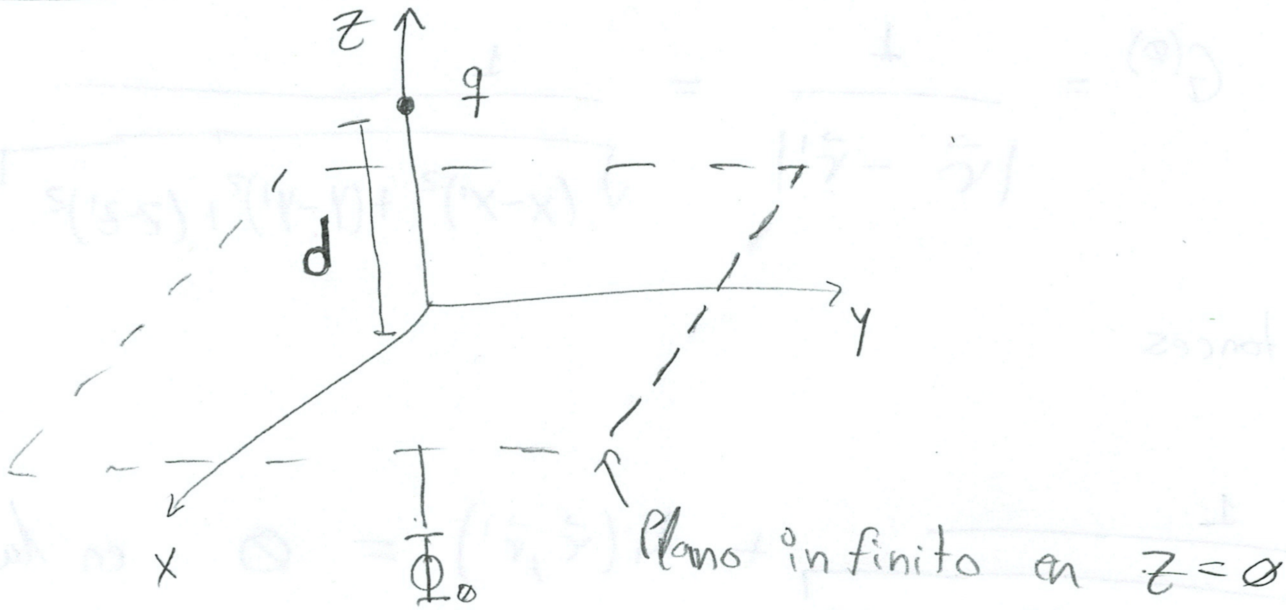
Ejemplo 1.



Queremos $\Phi(\vec{r})$ en $z > 0$.

Como conocemos el valor de Φ en la frontera utilizamos la condición de Dirichlet.

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0 \quad \text{en} \quad \vec{r} \in S$$

el potencial general resulta entonces

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int_S ds' \, \phi(\vec{r}\,') \frac{\partial G_D}{\partial n'} + \int_V d^3r' \, G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') \rho(\vec{r}\,')$$

Tenemos entonces

$$G_D = G^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}\,') + H(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0 \quad \leftarrow \text{en la frontera}$$

pero como sabemos:

$$G^{(\emptyset)} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

entonces

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + H(\vec{r}, \vec{r}') = \emptyset \quad \text{en la frontera } z = \emptyset$$

por lo que

$$H(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-1}{\sqrt{(x-x')^2 + (\cancel{y}-y')^2 + z'^2}} \quad \text{en } z = \emptyset$$

para todo z entonces Debe cumplir que

$$H = \frac{-1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z \pm z')^2}} \qquad G_D(\vec{r}, \vec{r}') = G_D(\vec{r}', \vec{r})$$

pero si tomamos el signo '$-$' en todo el espacio tendremos $G_D = \emptyset$ y no sólo en $z = \emptyset$.

por lo que tomamos el '+', ∴

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}$$

de la ecuación

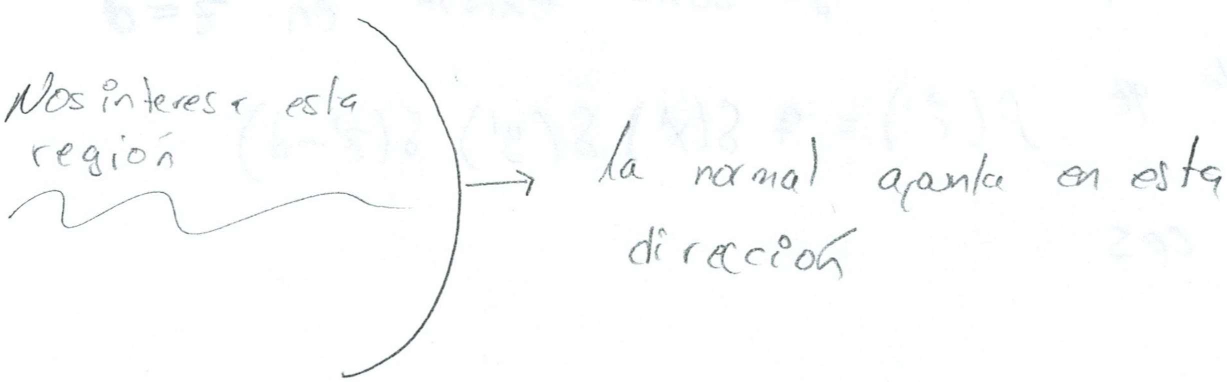
$$\nabla^2 G = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = -4\pi\,\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

podemos ver que

$$\nabla^2 H = -\nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')+(z+z')^2}}\right) = 4\pi\,\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z+z')$$

estamos interesados en la region en que $z' \geq 0$ y ademas $z \geq z'$, es decir $z, z' > 0$

entonces en toda esa región se cumple $\nabla^2 H = 0$ y satisface la parte Homogénea.



por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial n'} \rightarrow \frac{\partial}{\partial(-z)} = \frac{-\partial}{\partial z}$$

entonces

$$\left.\frac{\partial G_D}{\partial z}\right|_{z'=0} = \frac{-2z}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{3/2}}$$

por lo que

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{+1}{4\pi}\int_S ds' \frac{\Phi(\vec{r}\,')\, 2z\, dx'dy'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{3/2}} + \int d^3r'\, G_D(r,r')\,\rho(\vec{r}\,')$$

pero $\rho(\vec{r}) = q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-d)$

es decir, la carga sólo existe en $z=d$

por lo que $\rho(\vec{r}\,') = q\,\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z'-d)$

entonces

$$\int d^3r' \, G_D(\vec{r}, \vec{r}') \, q\delta(x')\delta(y')\delta(z'-d)$$

$$= G_D(\vec{r}, (0,0,d))$$

$$= q\left[\frac{1}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{1/2}}\right]$$

y la otra integral es

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{dS' \, \Phi(\vec{r}') \, 2z \, dx'dy'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}} \quad \text{pero} \quad \Phi(\vec{r}') = \Phi_0$$

$$= \frac{\Phi_0}{4\pi}\int_S \frac{2z \, dx'dy'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\Phi_0}{4\pi} z \left(\frac{4\pi}{z}\right) = \Phi_0$$

finalmente

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0 + q\left[\frac{1}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{1/2}} - \cancel{\frac{1}{(x^2+y^2+(z+d)^2)}} - \frac{1}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{1/2}}\right]$$

Para la región de abago no hay carga en ese volumen por lo q

$$\rho(\vec{r}\,') = \emptyset$$ y entonces

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0$$

no hay campo electrico, como era de esperarse de la ley de gauss.