para el subespacio $|\Phi_b\rangle$

$$\phi_T = \tan^{-1}\left\{ \frac{K_1 + K_2\tan\left(\frac{w'_a}{2}t\right) + K_3\tan\left(\frac{w'_b}{2}t\right) + K_4\tan\left(\frac{w'_a}{2}t\right)\tan\left(\frac{w'_b}{2}t\right)}{K_5 + K_6\tan\left(\frac{w'_a}{2}t\right) + K_7\tan\left(\frac{w'_b}{2}t\right) + K_8\tan\left(\frac{w'_a}{2}t\right)\tan\left(\frac{w'_b}{2}t\right)} \right\}$$

$$\Phi_G = \Phi_T - \Phi_D$$

$$\Phi_D = \frac{w_a(w\cos\theta - w_a)}{2w'^2_a}\left[\left(1 - 2r^{c,t}_{11,33}\right)(w - w_a\cos\theta) + 2r^{c,t}_{31,42}\, w_a \operatorname{sen}\theta\right]t$$

$$i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle \qquad \ln\frac{|\psi\rangle}{|\psi(0)\rangle} = -i\hat{H}t \rightarrow |\psi\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle$$

$\psi(t)$

$$|\psi\rangle = C_1|\phi_a(t)\rangle \otimes |\phi_b(t)\rangle + C_2|\phi_a(t)\rangle \otimes |\psi_b(t)\rangle + C_3|\psi_a(t)\rangle \otimes |\phi_b(t)\rangle + C_4|\psi_a(t)\rangle \otimes |\psi_b(t)\rangle$$

y parametrizando el estado inicial como

$$|\psi(0)\rangle = r_1 e^{i\alpha_1}|\uparrow\rangle_a \otimes |\uparrow\rangle_b + r_2 e^{i\alpha_2}|\uparrow\rangle_a \otimes |\downarrow\rangle_b + r_3 e^{i\alpha_3}|\downarrow\rangle_a \otimes |\uparrow\rangle_b + r_4 e^{i\alpha_4}|\downarrow\rangle_a \otimes |\downarrow\rangle_b$$

donde

$$|\uparrow\rangle \rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ y } |\downarrow\rangle \rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ y } |\phi_\mu^{(t)}\rangle \rightarrow N_\mu \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\frac{w}{2}t} \\ K_\mu\, e^{i\frac{w}{2}t} \end{pmatrix} e^{-i\frac{w'_\mu}{2}t}$$

$$\text{y } |\psi_\mu(t)\rangle = N_\mu \begin{pmatrix} K_\mu e^{-i\frac{w}{2}t} \\ -\sin\theta\, e^{i\frac{w}{2}t} \end{pmatrix} e^{i\frac{w'_\mu}{2}t}$$

Entonces calculando ~~di~~ $\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle$:

- $\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle = \left(r_1 e^{-i\alpha_1} \langle \uparrow |_a \otimes \langle \uparrow |_b + r_2 e^{-i\alpha_2} \langle \uparrow |_a \otimes \langle \downarrow |_b + r_3 e^{-i\alpha_3} \langle \downarrow |_a \otimes \langle \uparrow |_b + r_4 e^{i\alpha_4} \langle \downarrow |_a \otimes \langle \downarrow |_b \right)$

$$\cdot \left(C_1 | \phi_a(t) \rangle \otimes | \phi_b(t) \rangle + C_2 | \phi_a \rangle \otimes | \psi_b \rangle + C_3 | \psi_a \rangle \otimes | \phi_b \rangle + C_4 | \psi_a \rangle \otimes | \psi_b \rangle \right)$$

$$= C_1 r_1 e^{-i\alpha_1} \langle \uparrow_a | \phi_a \rangle \langle \uparrow_b | \phi_b \rangle + r_1 C_2 e^{-i\alpha_1} \langle \uparrow_a | \phi_a \rangle \langle \uparrow_b | \psi_b \rangle + C_3 r_1 e^{-i\alpha_1} \langle \uparrow_a | \psi_a \rangle \langle \uparrow_b | \phi_b \rangle + C_4 r_1 e^{-i\alpha_1} \langle \uparrow_a | \psi_a \rangle \langle \uparrow_b | \psi_b \rangle$$
$$+ C_1 r_2 e^{-i\alpha_2} \langle \uparrow_a | \phi_a \rangle \langle \downarrow_b | \phi_b \rangle + C_2 r_2 e^{-i\alpha_2} \langle \uparrow_a | \phi_a \rangle \langle \downarrow_b | \psi_b \rangle + C_3 r_2 e^{-i\alpha_2} \langle \uparrow_a | \psi_a \rangle \langle \downarrow_b | \phi_b \rangle + C_4 r_2 e^{-i\alpha_2} \langle \uparrow_a | \psi_a \rangle \langle \downarrow_b | \psi_b \rangle$$
$$+ C_1 r_3 e^{-i\alpha_3} \langle \downarrow_a | \phi_a \rangle \langle \uparrow_b | \phi_b \rangle + C_2 r_3 e^{-i\alpha_3} \langle \downarrow_a | \phi_a \rangle \langle \uparrow_b | \psi_b \rangle + C_3 r_3 e^{-i\alpha_3} \langle \downarrow_a | \psi_a \rangle \langle \uparrow_b | \phi_b \rangle + C_4 r_3 e^{-i\alpha_3} \langle \downarrow_a | \psi_a \rangle \langle \downarrow_b | \psi_b \rangle$$
$$+ C_1 r_4 e^{-i\alpha_4} \langle \downarrow_a | \phi_a \rangle \langle \downarrow_b | \phi_b \rangle + C_2 r_4 e^{-i\alpha_4} \langle \downarrow_a | \phi_a \rangle \langle \downarrow_b | \psi_b \rangle + C_3 r_4 e^{-i\alpha_4} \langle \downarrow_a | \psi_a \rangle \langle \downarrow_b | \phi_b \rangle + C_4 r_4 e^{-i\alpha_4} \langle \downarrow_a | \psi_a \rangle \langle \downarrow_b | \psi_b \rangle$$

- $\langle \uparrow_a | \phi_a \rangle \rightarrow (1 \ 0)_a N_a \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta \, e^{-i\frac{\omega}{2}t} \\ K_a e^{i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix} \cancel{K_a e} \, e^{-i\frac{\omega_a'}{2}t} = N_a \operatorname{sen}\theta \, e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega_a'}{2}t}$

$\langle \uparrow_b | \phi_b \rangle \rightarrow$ similar $a \leftrightarrow b$

- $\langle \downarrow_a | \phi_a \rangle \rightarrow (0 \ 1)_a \begin{pmatrix} \cdots \\ \end{pmatrix} = N_a K_a e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega_a'}{2}t}$

- $\langle \uparrow_a | \psi_a \rangle \rightarrow (1 \ 0) N_a \begin{pmatrix} K_a e^{-i\frac{\omega}{2}t} \\ -\sin\theta \, e^{i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix} e^{i\frac{\omega_a'}{2}t} = N_a K_a e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega_a'}{2}t}$

- $\langle \downarrow_a | \psi_a \rangle \rightarrow = -N_a \sin\theta \, e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega_a'}{2}t}$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle = {} & C_1 r_1 e^{-i\alpha_1} N_a \sin\theta \, e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_a}{2}t} N_b \sin\theta \, e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_b}{2}t} + C_2 r_1 e^{-i\alpha_1} N_a \sin\theta \, e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_a}{2}t} N_b K_b e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_b}{2}t} \\
& + C_3 r_1 e^{-i\alpha_1} N_a K_a e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_a}{2}t} N_b \sin\theta \, e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_b}{2}t} + C_3 r_1 e^{-i\alpha_1} N_a K_a e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_a}{2}t} N_b K_b e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_b}{2}t} \\
& + C_1 r_2 e^{-i\alpha_2} N_a \sin\theta \, e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_a}{2}t} N_b K_b e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_b}{2}t} + C_2 r_2 e^{-i\alpha_2} N_a \sin\theta \, e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_a}{2}t} (-N_b) \sin\theta \, e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_b}{2}t} \\
& + C_3 r_2 e^{-i\alpha_2} N_a K_a e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_a}{2}t} N_b K_b e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_b}{2}t} + C_4 r_2 e^{-i\alpha_2} N_a K_a e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_a}{2}t} (-N_b) \sin\theta \, e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_b}{2}t} \\
& + C_1 r_3 e^{-i\alpha_3} N_a K_a e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_a}{2}t} N_b \sin\theta \, e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_b}{2}t} + C_2 r_3 e^{-i\alpha_3} N_a K_a e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_a}{2}t} N_b K_b e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_b}{2}t} \\
& + C_3 r_3 e^{-i\alpha_3} (-N_a) \sin\theta \, e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_a}{2}t} N_b \sin\theta \, e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_b}{2}t} + C_4 r_3 e^{-i\alpha_3} (-N_a) \sin\theta \, e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_a}{2}t} (-N_b) e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_b}{2}t} \\
& + C_1 r_4 e^{-i\alpha_4} N_a K_a e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_a}{2}t} N_b K_b e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_b}{2}t} + C_2 r_4 e^{-i\alpha_4} N_a K_a e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_a}{2}t} (-N_b) \sin\theta \, e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_b}{2}t} \\
& + C_3 r_4 e^{-i\alpha_4} (-N_a) \sin\theta \, e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_a}{2}t} N_b K_b e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{-i\frac{\omega'_b}{2}t} + C_4 r_4 e^{-i\alpha_4} (-N_a) \sin\theta \, e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_a}{2}t} (-N_b) \sin\theta \, e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\frac{\omega'_b}{2}t}
\end{aligned}
$$

El Hamiltoniano de cada subespacio de donde se deriva $|\psi(t)\rangle$

$$\hat{H}_\mu(t) = \omega_\mu \left(\sin\theta \cos\omega t \, \hat{S}_{\mu x} + \sin\theta \sin\omega t \, \hat{S}_{\mu y} + \cos\theta \, \hat{S}_{\mu z} \right)$$

¿qué pasa en el caso en que $\sin\theta = 0$?

Desaparece la parte rotatoria; y $\cos\theta = 1$:

$$\hat{H}_\mu(t) = \omega_\mu \hat{S}_{\mu z}$$

en el paper de Sjöqvist hacen el caso para

$$\hat{H} = \omega_1 \hat{S}_{1z} + \omega_2 \hat{S}_{2z}$$ con ~~estado inicial~~

y encuentra la fase geométrica como

$$\cancel{\Phi_G(\Gamma) = \pm \arctan\left(\cos\theta_1 \tan(\omega_1 \tau/2 \right.}$$

$$\Phi_G(\Gamma) = -\arctan\left(\frac{\cos\alpha\left[\cos\theta_1 \tan(\omega_1\tau/2) + \cos\theta_2 \tan(\omega_2 \tau/2)\right]}{1 - (\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\alpha\cos\beta\sin\theta_1\sin\theta_2)\tan\left(\frac{\omega_1\tau}{2}\right)\tan\left(\frac{\omega_2\tau}{2}\right)} \right)$$

si del caso general entonces para $\hat{H}$ hacemos $\cos\theta = 1$ y $\operatorname{sen}\theta = 0$ tenemos

$$\hat{H} = W_a \hat{S}_{az} \otimes \mathbb{I}_b + \mathbb{I}_a \otimes W_b \hat{S}_{bz}$$

y de la fase ~~geométrica~~ total y dinámica general como

$$K_1 = r^{c,-}_{11,44} \operatorname{sen}(\omega t) = \left(r_1 r_1 \cos(\cancel{\alpha_{11}}) \pm r_4^2 \cos(0)\right)^{\operatorname{sen}(\omega t)} = (r_1^2 - r_4^2)\operatorname{sen}(\omega t)$$

$$K_4 = \frac{1}{w'_a w'_b}\left\{\left[(r_4^2 - r_1^2)(w - w_a)(w - w_b)\right] \operatorname{sen}(\omega t)\right\}$$

$$K_6 = \frac{1}{w'_a}\left\{-(r_1^2 - r_4^2)(w - w_a) \sin \omega t\right\}$$

$$K_7 = \frac{1}{w'_a}\left\{-(r_1^2 - r_4^2)(w - w_b)\sin(\omega t)\right\}$$

si $r_1 = r_4 \rightarrow K_1 = K_4 = K_6 = K_7 = \emptyset$

$$K_2 = \frac{1}{w'_a}\left\{\left[(r_1^2 - r_4^2)(w - w_a)\cos(\omega t) + (r_2^2 - r_3^2)(w - w_a)\right.\right.$$

pero $w'_a = \sqrt{w^2 + w_a^2 - 2 w w_a} = (w - w_a)$ $\therefore$ $K_2 = r_2^2 - r_3^2$

pero

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = 1$$

por lo tanto

$$r_3^2 = 1 - r_1^2 - r_2^2 - r_4^2$$

entonces

$$K_2 = r_2^2 - (1 - r_1^2 - r_2^2 - r_4^2)$$

$$= -1 + r_1^2 + 2r_2^2 + r_4^2 \qquad \text{pero} \quad r_1 = r_4$$

$$= -(1 - 2r_1^2 - 2r_2^2)$$

para K_3 tenemos:

$$K_3 = \frac{1}{\omega'_b}\left\{\left[(r_3^2 - r_2^2)(\omega - \omega_b)\right]\right\} = r_3^2 - r_2^2 = -(1 - 2r_1^2 - 2r_3^2)$$

$$(\omega - \omega_b)$$

y $K_5 = 1$, $K_6 = 1 - 2r_1^2 - 2r_4^2$

por lo que la fase total la podemos escribir como

$$\Phi_T = \arctan\left\{\frac{-(1 - 2r_1^2 - 2r_2^2)\tan\left(\frac{\omega - \omega_a}{2}t\right) - (1 - 2r_1^2 - 2r_3^2)\tan\left(\frac{\omega - \omega_b}{2}(t)\right)}{1 + (1 - 2r_1^2 - 2r_2^2)\tan\left(\frac{\omega - \omega_a}{2}t\right)\tan\frac{\omega - \omega_b}{2}t}\right\}$$

tengo los términos $\left(\tan \frac{\omega}{2} t\right)$ de más, pero avanzo con la fase dinámica ah pero sin campo $\vec{B}$ rotante

$\omega = \emptyset$ entonces sí obtengo lo mismo!

entonces $\omega_a' \equiv \omega_a$ y $\omega_b' \equiv b$ $(\omega - \omega_a) \equiv +\omega_a$

$$\bar{\Phi}_D = \frac{\omega_a(\cancel{\omega_a} - \omega_a)}{2\omega_a^2}\left[\left(1 - 2\left(r_1^2 + r_2^2\right)\right)(-\omega_a)t\right]$$

cero

$$+ \frac{\omega_b(-\omega_b)}{2\omega_b'^2}\left[\left(1 - 2\left(r_1^2 + r_3^2\right)\right)(-\omega_b)t\right]$$

$$= \cancel{-} \frac{1}{2}\left[1 \cancel{+} 2\cancel{\omega_a t}\left(r_1^2 + r_2^2\right)\right]\omega_a t$$

$$- \cancel{+} \frac{\cancel{1}\omega_b}{2}\left[1 - 2\left(r_1^2 + r_3^2\right)\right]$$

me falta un $(-)$

como $\Phi_G = \Phi_T - \Phi_D$

$$\omega_a' = \sqrt{\cancel{\omega^2} + \omega_a^2 - 2\cancel{\omega\omega_a}\cos\theta}$$

$$= (\omega - \omega_a)$$

ó $= \omega_a$

$$\bar{\Phi}_G = -\left[\arctan\frac{\left(1 - 2r_1^2 - 2r_2^2\right)\tan\frac{\omega_a t}{2} + \left(1 - 2r_1^2 - 2r_3^2\right)\tan\frac{\omega_b t}{2}}{}\right.$$

$$\left. + \left[\left(1 - 2r_1^2 - 2r_2^2\right)\frac{\omega_a t}{2} + \left(1 - 2r_1^2 - 2r_3^2\right)\frac{\omega_b t}{2}\right]\right]$$

pero no se parecen realmente

$$|n(t)\rangle = e^{-i\phi(t)/2} \cos\frac{\theta}{2}|+z\rangle + e^{i\phi/2} \sin\frac{\theta}{2}|-z\rangle$$

$$\uparrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$|\uparrow\rangle \qquad\qquad |\downarrow\rangle$$

en el paper de Sjöqvist

entonces para $|n(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle$

y el estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = e^{-i\beta/2} \cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle_a + \sin\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle_a\right)\left(\cos\frac{\theta_b}{2}|\uparrow\rangle_b + \sin\frac{\theta_b}{2}|\downarrow\rangle_b\right)$$

$$+ e^{i\beta/2} \sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle_a - \sin\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle_a\right)\left(\cos\frac{\theta_b}{2}|\downarrow\rangle_b - \sin\frac{\theta_b}{2}|\uparrow\rangle_b\right)$$

se debe cumplir que

$$\langle -n|n\rangle = 0$$

y si solo $|-n\rangle = -|n\rangle$ no se cumple

pero si

$$|-n\rangle = e^{-i\phi/2} \cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle - e^{i\phi/2} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle$$

entonces en $n(0)$ sí son ortogonales ¡

$$\langle -n|n\rangle = \cos\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} -$$

$$|\psi(0)\rangle = e^{-i\beta/2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Big[\cos\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle_a \cos\frac{\theta_b}{2}|\uparrow\rangle_b + \cos\frac{\theta_a}{2}\sin\frac{\theta_b}{2}|\uparrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b$$

$$\sin\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle_a\cos\frac{\theta_b}{2}|\uparrow\rangle_b + \sin\frac{\theta_a}{2}\sin\frac{\theta_b}{2}|\downarrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b\Big]$$

$$+e^{i\beta/2}\sin\frac{\alpha}{2}\Big[\cos\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle_a\cos\frac{\theta_b}{2}|\downarrow\rangle_b - \cos\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle_a\sin\frac{\theta_b}{2}|\uparrow\rangle_b$$

$$-\sin\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle_a\cos\frac{\theta_b}{2}|\downarrow\rangle_b + \sin\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle_a\sin\frac{\theta_b}{2}|\uparrow\rangle_b\Big]$$

$$=\left[e^{-i\beta/2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2} + e^{i\beta/2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\theta_a}{2}\sin\frac{\theta_b}{2}\right]|\uparrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b$$

$$+\left[e^{-i\beta/2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}\sin\frac{\theta_b}{2} - e^{i\beta/2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2}\right]|\uparrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b$$

$$+\left[e^{-i\beta/2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2} - e^{i\beta/2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}\sin\frac{\theta_b}{2}\right]|\downarrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b$$

$$+\left[e^{-i\beta/2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\theta_a}{2}\sin\frac{\theta_b}{2} + e^{i\beta/2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2}\right]|\downarrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b$$

$r_1 = r_4$?