Universidad del Rosario

Lógica, Teoría de Números y Conjuntos

Tarea 2

Profesor: César Augusto Rodríguez Duque

Valentina Mesa Fajardo - 1021397618 - valentina.mesa@urosario.edu.co

18 de septiembre de 2024

1. (Ejercicio 17) Demuestre por contradicción que si $n \in \mathbb{Z}$ y $11|n^2$, entonces $11|n$.

Desarrollo:

Demostrar por contradicción
Supongamos lo contrario, si $11|n^2$ entonces $11 \nmid n$. Si $11 \nmid n$, n no es múltiplo de 11.
Como $11 \nmid n$ su residuo debe ser distinto de 0, tal que: $n = 11K + r$ para algún $K y r \in \mathbb{Z}$.
Donde K es el cociente y r el residuo.

Ya que nos interesa n^2, elevamos a ambos lados de la ecuación al cuadrado.

$$\begin{aligned} n^2 &= (11k + r)^2 && \text{Expandimos:} \\ &= (11k + r)(11k + r) && \text{binomio al cuadrado} \\ &= 121k^2 + 11kr + 11kr + r^2 && \text{resolvemos términos comunes.} \\ &= 121k^2 + 22kr + r^2 \end{aligned}$$

Ahora observemos que sucede al dividir estos factores $(121k^2 + 22kr + r^2)$ por 11, es decir, hallar los residuos de n^2 mod 11:

$$\begin{aligned} 121^2 \; mod \; 11 = & \quad \text{(es divisible por 11) su residuo es 0} \\ 22kr \; mod \; 11 = & \quad \text{(es divisible por 11) su residuo es 0} \end{aligned}$$

Lo que nos deja con una expresión simplificada.

$$n^2 = r^2 \; mod \; 11$$

Es decir, el residuo de n^2 es el mismo que el de r^2 (al dividirlos por 11). Evaluemos los valores arbitrarios de r:

$$r = 1 = r^2 = (1)^2 \ = 1 \ mod \ 11 = 0,09$$
$$r = 5 = r^2 = (5)^2 = 25 \ mod \ 11 = 2,27$$
$$r = 9 = r^2 = (9)^2 = 81 \ mod \ 11 = 2,27$$

Ningún residuo es 0, si $r \neq 0$ ($\rightarrow\leftarrow$). Ningún valor de $r^2 \ mod \ 11 = 0$, nos lleva a una contradicción, habíamos supuesto que $11 \nmid n$. Por lo tanto si $11|n^2$, entonces $11|n$

2. (Ejercicio 20) Demuestre por contradicción que la suma de un número irracional y un número racional es un número irracional.

Desarrollo:

Demostrar por contradicción
Supongamos lo contrario, la suma de un número racional con un número irracional, es un número racional.
Tenemos un racional a y un irracional b, $a + b = p$ (un número racional) para algún $p \in \mathbb{Z}$. Entonces $b = a - p$ como a y p son racionales, b tiene que ser racional ($\rightarrow\leftarrow$).

3. (Ejercicio 25) Usando como referencia los números enteros; determinar aquellos números que satisfacen la desigualdad $n^2 < 49$, expresar este conjunto tanto por extensión como por comprensión.

Desarrollo:

Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados:

$$\sqrt{n^2} < \sqrt{49}$$

Como $\sqrt{x^2} = |x|$:

$$|n| < 7$$

n puede ser $7o - 7$:

$$-7 < n < 7$$

Esto divide a la inecuación en el siguiente intervalo:

$$-7 < n < 7$$

Al expresarlo en conjuntos, tenemos:

Por extensión

$$S = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por comprensión

$$S = \{n \in \mathbb{Z} : -7 < n < 7\}$$

4. (Ejercicio 27) Si A, B y C son conjuntos, demuestre o refute las siguientes igualdades entre conjuntos:

- $A \cup \varnothing = \varnothing$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $(A \cup B) \setminus B = A$
- $(A \setminus B) \cup B = A$
- $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = A \cap B$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Desarrollo:

- $A \cup \varnothing = \varnothing$
  Se tiene,
  $$A \cup \varnothing = \{x : x \in A \vee x \in \varnothing\} = \{x : x \in A\}$$
  Es decir,
  $$A \cup \varnothing = A$$
  Por lo tanto $A \cup \varnothing = \varnothing$ es verdad si y solo si $A = \varnothing$, de lo contrario es **falso**.
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
  Se tiene,
  $$A \cap \varnothing = \{x : x \in A \vee x \in \varnothing\}$$
  Como no hay elementos en $\varnothing$, no hay un x que pueda satisfacer esta condición "$x \in A \vee x \in \varnothing$". Por lo tanto es **verdadero**.
- $(A \cup B) \setminus B = A$
  Se tiene,
  $$(A \cup B) \setminus B = \{x : x \in (A \cup B) \wedge x \notin b\}$$
  debido a la unión de conjuntos:
  $$(A \cup B) \setminus B = \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B\}$$
  Si $x \in A$, entonces se cumple que $x \in (A \cup B)$ y $x \in B$, ya que $x \notin B$. Si $x \in B$, no se cumple que $x \in (A \cup B)$ ya que $x \notin B$. Por lo tanto, $(A \cup B) \setminus B = \{x : x \in A\}$ (el conjunto A) entonces la igualdad es **verdadera**.
- $(A \setminus B) \cup B = A$
  Se tiene,
  $$(A \setminus B) \cup B = \{x : x \in (A \setminus B) \vee x \in B\}$$
  Por lo tanto,
  $$(A \setminus B) \cup B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B\}$$
  Para cualquier elemento x del conjunto $(A \setminus B) \cup B$ tenemos dos casos.

  Caso 1.

  Si $x \in A \wedge x \notin B$, claramente $x \in A$ únicamente.

  Caso 2.

  Si $x \in B$, no importa si $x \in A$ o no, la unión $(A \setminus B) \cup B$ incluye todos los elementos de B. Sin embargo como $x \in B \subseteq (A \cup B)$, asegurando que x también esta en A si está en A, la unión incluye todos los elementos de A y B.Por lo tanto es **Verdadero**, cada elemento en $(A \setminus B) \cup B$ está en A.

- $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = A \cap B$
  Contraejemplo Consideramos ejemplos específicos y verificamos si la igualdad se cumple.
  $$A \setminus C = \{x : x \in A \vee x \notin C\} = \{1, 3, 4\}$$
  $$B \setminus C = \{x : x \in B \vee x \notin C\} = \{3, 4, 6\}$$
  Calculamos la unión.
  $$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{1, 3, 4, 6\}$$
  Calculamos la intersección.
  $$A \cap B = \{3, 4\}$$
  Como se observa, $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{1, 3, 4, 6\}$ no es igual a $A \cap B = \{3, 4\}$, por lo tanto es **falso**.
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
  Lado izquierdo.
  $$A \setminus (B \cup C) = \{x : (x \in A \wedge x \notin (B \cup C)\}$$
  Lado derecho.
  $$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee \ (x \in A \wedge x \notin B)\}$$
  Consideremos ejemplos específicos para ver diferencias en ambos lados de la igualdad.
  $$A = \{1, 2, 3\}\ B = \{2\}\ C = \{3\}$$
  Lado izquierdo.
  $$A \setminus (B \cup C)$$
  $$(B \cup C) = \{2, 3\} \Longrightarrow A \setminus (B \cup C) = \{1\}$$
  Lado derecho.
  $$(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$
  $$(A \setminus C) = \{1, 2\}$$
  $$(A \setminus B) = \{1, 3\}$$
  $$(A \setminus B) \cup (A \setminus C = \{1, 2, 3\})$$
  Por lo tanto, es **falso**, ya que, $A \setminus (B \cup C) \neq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.