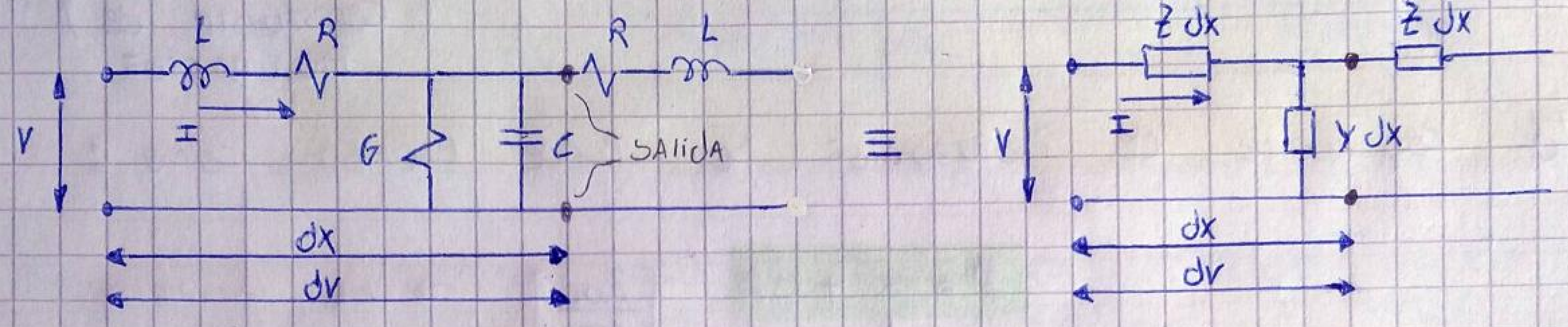
Líneas de Transmisión

Las líneas de Transmisión son las interconexiones que transmiten la energía electromagnética de un punto a otro.

Ecuación de onda de una línea uniforme e infinita

Consideremos una línea de transmisión uniforme e infinita caracterizada por valores de Z e Y por unidad de longitud.



La línea es uniforme y por lo tanto todos sus parámetros son iguales a lo largo de toda la línea.
Las unidades de Z es [Ω/m] y la de Y [1/Ωm].

Para una línea sin pérdidas (R=G=0), la energía electromagnética se propaga con una velocidad $v = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$.

Consideremos la variación de tensión y corriente (dV e dI) en un elemento infinitesimal de longitud dx:

$$dV = I \cdot Z \cdot dx \qquad dI = V \cdot Y \cdot dx$$

$$\boxed{\frac{dV}{dx} = I \cdot Z} \qquad \boxed{\frac{dI}{dx} = V \cdot Y}$$

Derivo todo en respecto a x

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{dI}{dx} \cdot Z + \underbrace{I \cdot \frac{dZ}{dx}}_{=0} \qquad \frac{d^2I}{dx^2} = \frac{dV}{dx} \cdot Y + \underbrace{V \cdot \frac{dY}{dx}}_{=0}$$

Por ser una línea uniforme

$$\frac{d^2V}{dx^2} = V \cdot Y \cdot Z \qquad \frac{d^2I}{dx^2} = I \cdot Z \cdot Y$$

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} - V \cdot Y \cdot Z = 0} \qquad \boxed{\frac{d^2I}{dx^2} - Z \cdot Y \cdot I = 0}$$

Ecuaciones de telegrafista

Estas ecuaciones muestran la relación natural entre la tensión y la corriente en una línea de transmisión, pero no nos dice nada acerca de la distribución o variación de V o I a lo largo de la línea.

Las soluciones de las ecuaciones anteriores tienen la forma $V = e^{\gamma x}$ (Para la ecuación de tensión).
Aplicando la solución encontramos el valor de γ:

$$\frac{d^2V}{dx^2} - Z.Y.V = 0$$

$$\gamma^2 e^{\gamma x} - Z.Y.e^{\gamma x} = 0 \longrightarrow \boxed{\gamma = \pm\sqrt{Z \cdot Y}} \left[\frac{Rad}{m}\right]$$

Constante de propagación

La constante de propagación se puede escribir como:

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta} \left[\frac{Rad}{m}\right] \rightarrow \text{Valor complejo}$$

$\alpha = \ln\left(\frac{V_i}{V_r}\right)$ [nepper]

→ Constante de fase $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{Rad}{m}\right]$
(depende de frecuencia)
↳ Longitud de onda ↳ $\lambda = \frac{v}{f}$

→ Constante de atenuación $\alpha \left[\frac{Nepper}{m}\right]$
(no depende de frecuencia)

Por lo tanto, la solución de la ecuación de tensión será:

$$\boxed{V = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}}$$

Para encontrar la solución de la corriente hacemos lo siguiente:

$$\frac{dV}{dx} = A\gamma e^{\gamma x} - B\gamma e^{-\gamma x} \quad ; \quad \text{con} \quad \frac{dV}{dx} = Z.I$$

$$I = \frac{\gamma}{Z} A e^{\gamma x} - \frac{\gamma}{Z} B e^{-\gamma x} \quad ; \quad \text{Recordar} \rightarrow \frac{\gamma}{Z} = \frac{\sqrt{Z.Y}}{Z}$$

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{Y}{Z}} A e^{\gamma x} - \sqrt{\frac{Y}{Z}} B e^{-\gamma x}} \qquad \frac{\gamma}{Z} = \sqrt{\frac{Y}{Z}}$$

Donde el factor A y B son constantes con respecto a x pero variables con respecto a t y valen:

$$A = V_1 . e^{jwt} \quad \text{y} \quad B = V_2 . e^{jwt}$$

Así, finalmente podemos escribir la ecuación de una onda en una línea uniforme la cual sí nos proporciona información sobre la variación de V e I a lo largo de la línea. Estas ecuaciones son:

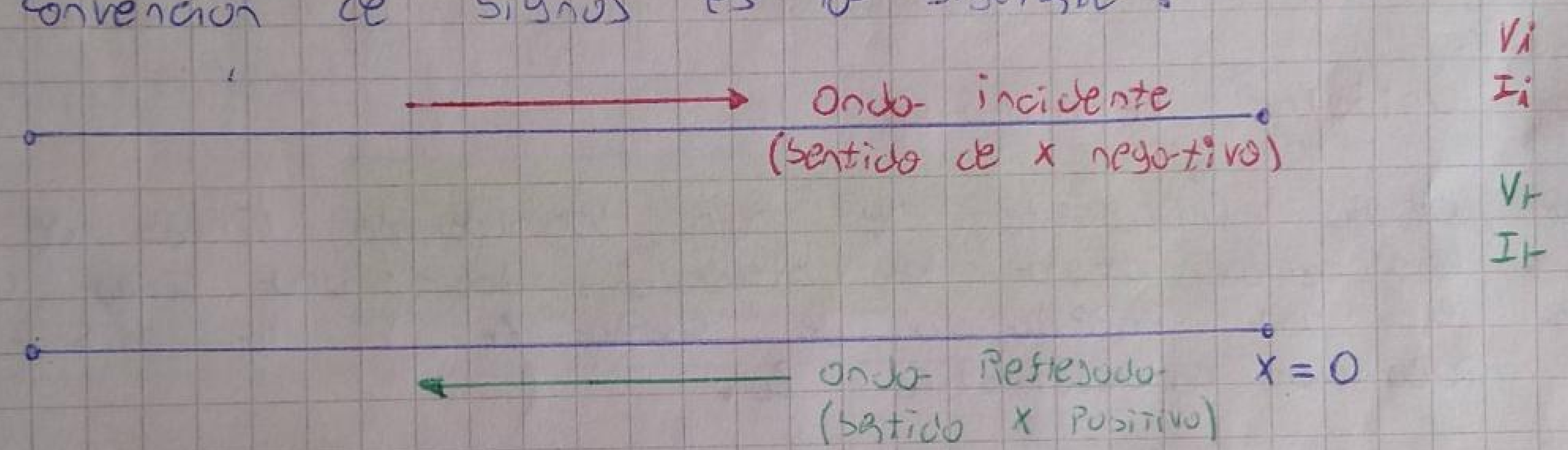
Ecuación de onda de una línea uniforme e infinita →

$$\boxed{V = V_1 e^{j(\omega t + \beta x)} e^{\alpha x} + V_2 e^{j(\omega t - \beta x)} e^{-\alpha x}}$$

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{Y}{Z}}\, V_1 e^{j(\omega t + \beta x)} e^{\alpha x} - \sqrt{\frac{Y}{Z}}\, V_2 e^{j(\omega t - \beta x)} e^{-\alpha x}}$$

Los primeros términos de las ecuaciones anteriores representan la propagación de la onda en la dirección de x negativo (los términos marcados con rojo) y los segundos términos la propagación de la onda en la dirección de x positivo (los términos marcado con verde).

La convención de signos es la siguiente:



Por lo tanto concluimos que hay ondas propagándose en diferente sentido (opuesto) y que en todo lugar, la corriente o tensión total será la suma de las dos ondas viajeras (onda incidente y onda reflejada).

Impedancia Característica

Si observamos el término $\sqrt{\frac{Y}{Z}}$ de la ecuación de corriente I, obtenemos que:

Impedancia característica
Impedancia de línea →

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}}$$

→ Impedancia característica del medio y es función de los parámetros de la línea. Relacionada con el medio, no me determina las pérdidas.

$$\boxed{Z_0 = \frac{V_i}{I_i} = \frac{-V_r}{I_r}}$$

Para una línea sin pérdidas, donde $R = G = 0$ → $\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}}$

$$\hookrightarrow v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\underbrace{Im\sqrt{ZY}}_{Im\left\{\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}\right\} \to R=G=0}} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} \to \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

→ Se verifica con lo dicho al inicio

Velocidad de propagación

o también $\rightarrow v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = f.\lambda \longrightarrow \boxed{v = f.\lambda}$

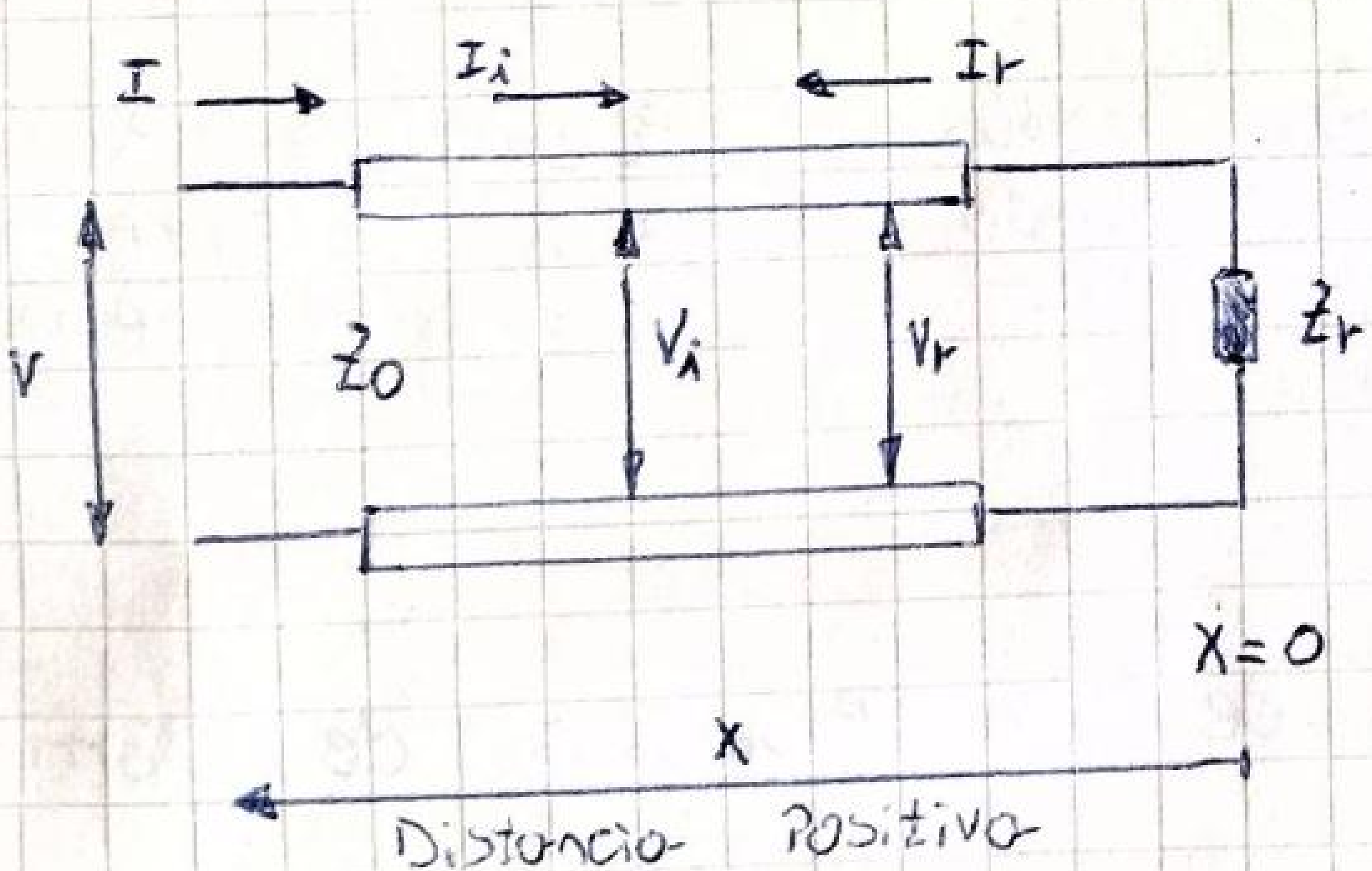
Si se cumple que $\frac{G}{C} = \frac{R}{L} \rightarrow Z_0$ se vuelve real
(Condición de Heaviside)
↳ Se pronuncia Hevísai

Pregunta de examen: ¿Por qué se popularizaron los valores de 50 y 75 Ω en líneas coaxiales?

↳ La impedancia teórica para la atenuación mínima de una línea coaxial es 77 Ω, mientras que la mejor impedancia para una máxima capacidad de manejo de potencia es 30 Ω. El promedio es 53,5 Ω que se redondea a 50 Ω.
También se usa un cable coaxial con impedancia de 75 Ω ya que su valor se acerca al de la impedancia para una mínima atenuación (77 Ω).
La línea bifilar se ve más afectada por el ruido que la línea coaxial porque no está blindada.

Línea uniforme terminada

Hasta ahora únicamente se han considerado líneas de longitud infinita. Analicemos ahora la situación donde una línea uniforme termina en una impedancia de carga Z_r y la misma tiene una impedancia característica Z_0.



Podemos hablar de dos ondas, una incidente (hacia la carga) y otra reflejada (desde la carga).
El voltaje o corriente total en un determinado punto es la suma de las dos ondas en dicho punto.

→ Para la tensión: $V = V_i + V_r$

$V_i = \underbrace{V_1 . e^{j\omega t}}_{|V_i|} e^{\gamma x}$

$V_r = \underbrace{V_2 . e^{j\omega t}}_{|V_r|} e^{-\gamma x + j\varepsilon}$

γ = factor propagación.

ε = corrimiento de fase en la carga.

Si analizamos lo que pasa en la carga $(X=0)$ estamos analizando la condición de borde. Ahí se tiene que $V_i = |V_i|$ y $V_r = |V_r| . e^{j\varepsilon} = |V_r| \angle \varepsilon$, de forma tal que en la carga la razón de voltaje reflejado e incidente está dado por:

$$\boxed{\frac{V_r}{V_i} = \frac{|V_r|}{|V_i|} \angle \varepsilon = \rho_V}$$

→ Coeficiente de reflexión para el voltaje.
(No tiene dimensiones)

↳ En la carga $(X=0)$

NO Estudiar

Podemos expresar la ecuación de tensión de la forma:

$$\boxed{V = |V_i| \left(e^{\gamma x} + \rho_V \, e^{-\gamma x} \right)} \quad [V]$$

→ Para la corriente: $I = I_i + I_r$

$I_i = I_1 . e^{j\omega t} \, e^{\gamma x - j\delta}$ ($I_1 \to |I_i|$)

$I_r = I_2 . e^{j\omega t} \, e^{-\gamma x + j(\varepsilon - \delta)}$ ($I_2 \to |I_r|$)

δ = diferencia de fase entre la corriente y el voltaje debido a Z_0.

En la carga $(x = 0)$ tenemos que $I_i = |I_i| \, e^{-j\delta}$ y $I_r = |I_r| \, e^{j(\varepsilon - \delta)}$
Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{I_r}{I_i} = \frac{|I_r|}{|I_i|} \underline{\varepsilon} = \rho_i}$$

→ Coeficiente de reflexión para la corriente (sin dimensiones).

↳ En la carga $(x=0)$

Podemos expresar la ecuación de corriente de la forma:

$$\boxed{I = |I_i| \, e^{-j\delta} \left(e^{\gamma x} + \rho_i \, e^{-\gamma x} \right)} \quad [A]$$

Ahora podemos expresar ρ_V y ρ_i en términos de la impedancia de carga Z_r o de la impedancia característica Z_0.

En cualquier parte de la línea →

$$\boxed{Z_0 = \frac{V_i}{I_i} = \frac{|V_i|}{|I_i|} \underline{\delta}}$$

$$\boxed{Z_0 = \frac{-V_r}{I_r} = -\frac{|V_r|}{|I_r|} \underline{\delta}}$$

$$\boxed{Z_r = \frac{V}{I} \quad (\text{en } x = 0)}$$

↳ En la carga

→ Otras formas de expresar los coeficientes ρ_V y ρ_i en la carga

$$I = I_i + I_r$$

En la carga:

$$\frac{V}{Z_r} = \frac{V_i}{Z_0} + \frac{-V_r}{Z_0}$$

$$\frac{V_i + V_r}{Z_r} = \frac{V_i - V_r}{Z_0}$$

En la carga →

$$\boxed{\frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0} = \rho_V}$$

$Z_r = 0$, $\rho_V = -1$
$Z_r = \infty$, $\rho_V = 1$

$$V = V_i + V_r$$

En la carga:

$$I . Z_r = I_i \, Z_0 + (- I_r . Z_0)$$

$$(I_i + I_r) . Z_r = I_i . Z_0 - I_r . Z_0$$

$$\boxed{\frac{I_r}{I_i} = -\left(\frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0} \right) = \rho_i = -\rho_V}$$

↳ En la carga

exper...

NOTA

→ Forma general de ρ_v

$$\rho_v = \frac{V_r}{V_i} = \frac{V_2\, e^{j\omega t}\, e^{-\gamma x}}{V_1\, e^{j\omega t}\, e^{\gamma x}} \longrightarrow \rho_v = \frac{V_2}{V_1}\, e^{-2\gamma x}$$

NO estudiar

$$\rho_v = \underbrace{\frac{V_2\, e^{-2\alpha x}}{V_1}}_{|\rho_v|}\, e^{-2j\beta x} \longrightarrow \boxed{\rho_v = |\rho_v| \cdot e^{-2j\beta x}}$$

$$\boxed{\rho_v = -\rho_i}$$

El coeficiente de reflexión ρ_v sí depende de la posición de la línea que estoy analizando (x).
El coeficiente de reflexión es complejo.

→ Impedancia en cualquier punto de la línea

La razón de V/I en cualquier punto de la línea da la impedancia de Z_x en el punto viendo hacia la dirección de la carga:

$$Z_x = \frac{V}{I} = \frac{V_1\, e^{j\omega t}\, e^{\gamma x} + V_2\, e^{j\omega t}\, e^{-\gamma x}}{\frac{V_1}{Z_0}\, e^{j\omega t}\, e^{\gamma x} - \frac{V_2}{Z_0}\, e^{j\omega t}\, e^{-\gamma x}}$$

$$Z_x = Z_0 \cdot \frac{V_1\, e^{\gamma x} + V_2\, e^{-\gamma x}}{V_1\, e^{\gamma x} - V_2\, e^{-\gamma x}} \longrightarrow \text{Divido todo por } V_1\, e^{\gamma x}$$

$$Z_x = Z_0 \cdot \frac{1 + \overbrace{\frac{V_2\, e^{-\gamma x}}{V_1\, e^{\gamma x}}}^{\rho_v}}{1 - \underbrace{\frac{V_2\, e^{-\gamma x}}{V_1\, e^{\gamma x}}}_{\rho_v}} \longrightarrow \boxed{Z_x = Z_0 \cdot \frac{1+\rho_v}{1-\rho_v}}$$

$$\boxed{\rho_v = \frac{Z_x - Z_0}{Z_x + Z_0}}$$

↳ Se verifica que ρ_v depende de x. Z_x también.

⊕ Para $0 < Z_x < \infty \longrightarrow -1 < \rho_v < 1$.

⊕ Si $Z_x = Z_0 \longrightarrow \rho_v = 0$ (No hay reflexiones) y se dice que la línea está adaptada. Siempre se desea que $\rho_v = 0$, sería lo ideal. Lo mismo sucede con ρ_i.

Podemos expresar a Z_x de la siguiente forma:

$$\boxed{Z_x = Z_0 \cdot \frac{Z_r + Z_0\, \mathrm{Tgh}(\gamma x)}{Z_0 + Z_r\, \mathrm{Tgh}(\gamma x)}} \xrightarrow[\alpha = 0]{\text{sin pérdidas}} \boxed{Z_x = Z_0 \cdot \frac{Z_r + jZ_0\, \mathrm{Tg}(\beta x)}{Z_0 + jZ_r\, \mathrm{Tg}(\beta x)}}$$

Si analizo la línea en circuito abierto $\xrightarrow{Z_r=\infty}$ $Z_x = Z_0 \operatorname{cotgh}(\gamma x)$.
Si analizo la línea en corto circuito $\xrightarrow{Z_r=0}$ $Z_x = Z_0 \operatorname{Tgh}(\gamma x)$.
Si analizo lo que pasa en la carga $(x=0)$ $\longrightarrow$ $Z_x = Z_r$.

Recordar que $Z_0 = \sqrt{Z_{ca} \cdot Z_{cc}}$ (para líneas con o sin pérdidas).

→ Coeficiente de reflexión en la carga $(x=0)$

① $V = \underbrace{V_1 e^{j\omega t}}_{|V_i|} e^{\gamma x} + \underbrace{V_2 e^{j\omega t}}_{|V_r|} e^{-\gamma x}$ $\xrightarrow[x=0]{\text{En CARGA}}$ $V_c = V_1 e^{j\omega t} + V_2 e^{j\omega t}$

② $I = \frac{V_1}{Z_0} e^{j\omega t} e^{\gamma x} - \frac{V_2}{Z_0} e^{j\omega t} e^{-\gamma x}$ $\xrightarrow[x=0]{\text{En CARGA}}$ $I_c = \frac{V_1}{Z_0} e^{j\omega t} - \frac{V_2}{Z_0} e^{j\omega t}$

Recordando que la corriente en la carga $I_c = \frac{V_c}{Z_r}$ y despejando Z_0 de la ecuación ②:

$$V_c \frac{Z_0}{Z_r} = V_1 e^{j\omega t} - V_2 e^{j\omega t}$$

De ① $V_2 e^{j\omega t} = V_c - V_1 e^{j\omega t}$

$$V_c \frac{Z_0}{Z_r} = 2 \underbrace{V_1 e^{j\omega t}}_{|V_i|} - V_c$$

$$\boxed{|V_i| = \frac{V_c}{2}\left(1 + \frac{Z_0}{Z_r}\right)} \quad ; \quad |V_r| = \frac{V_c}{2}\left(1 - \frac{Z_0}{Z_r}\right)$$

Es útil definir el coeficiente de reflexión en la carga:

$$\rho_V = \frac{V_r}{V_i} = \frac{V_2 e^{j\omega t} e^{-\gamma x}}{V_1 e^{j\omega t} e^{\gamma x}} = \frac{|V_r| e^{-\gamma x}}{|V_i| e^{\gamma x}} = \frac{\frac{V_c}{2}\left(1 - \frac{Z_0}{Z_r}\right)}{\frac{V_c}{2}\left(1 + \frac{Z_0}{Z_r}\right)} \cdot e^{-2\gamma x}$$

Expresión general

$$\boxed{\rho_V = \left(\frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0}\right) e^{-2\gamma x}} \quad ; \quad \underset{(Z_r=0)}{-1} < \rho_V < \underset{(Z_r=\infty)}{1}$$

El coeficiente de reflexión en cualquier punto de la línea tiene como valor el coeficiente de la carga afectado por un factor de fase que depende de X.

En $x=0$ $\longrightarrow$ $\boxed{\rho_V = \frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0}}$

En la carga

Para una linea sin perdida ($\alpha = 0$) y por ello $\gamma = j\beta$

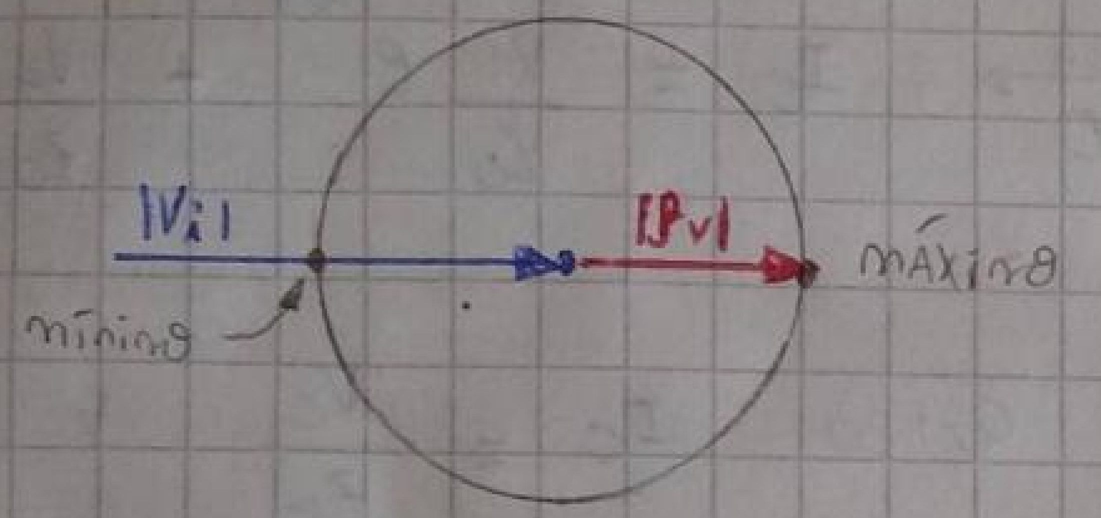
$$\rho_v = \left(\frac{Z_r - Z_o}{Z_r + Z_o} \right) e^{-2j\beta x}$$

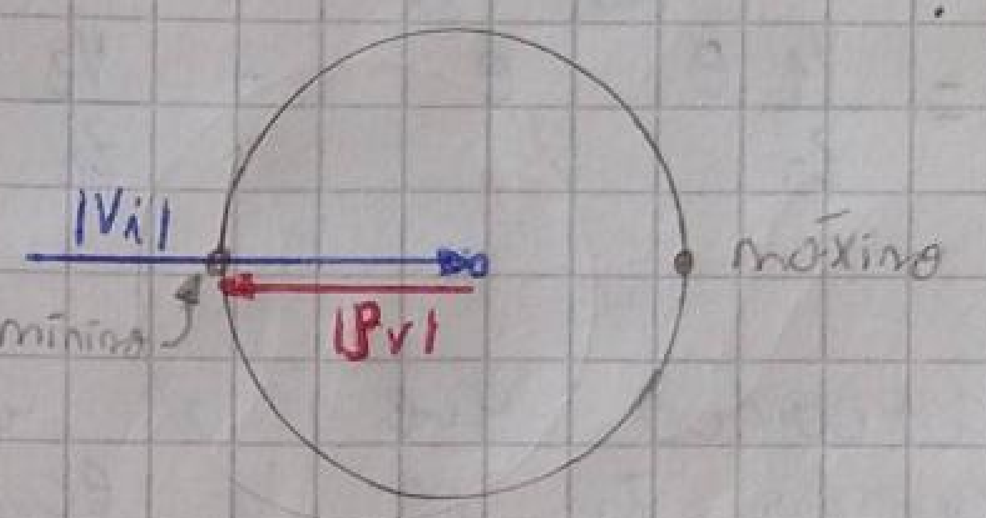
No aporta nada en el módulo, solo en fase.

Por lo que concluimos que en una linea sin pérdida el módulo de ρ_v se mantiene constante en toda la linea. Entonces, el módulo de la onda reflejada será constante en toda la linea.

→ Relación de onda estacionaria (ROE)

Podemos considerar a ρ_v como un fasor que esta modulando a la tensión o corriente incidente.





Cuando ρ está en fase con V_i tenemos un máximo.

Cuando ρ está en contrafase con V_i tenemos un mínimo.

Esto produce un fenómeno de ondas estacionarias a lo largo de la linea, con máximos y mínimos.

→ Definimos el ROE como el cociente entre el $V_{máx}$ y el V_{min} en la linea.

$$\boxed{ROE = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{|V_i| + |V_r|}{|V_i| - |V_r|} = \frac{1 + |\rho_v|}{1 - |\rho_v|}}$$

$1 < ROE < \infty$
$0 < |\rho_v| < 1$

El valor de ROE deseable es 1 ya que el valor deseable de $\rho_v = 0$.

El ROE es particularmente perjudicial en las lineas de potencia de RF donde las sobretensiones pueden dañar las etapas de salida a transistores.

Además un ROE alto indica que la potencia se esta consumiendo en la linea y no esta siendo radiada. Mientras más grande el ROE, más grande es el ρ_v y por lo tanto mayor es la onda reflejada y menor es la onda aprovechada por la carga.

Los máximos y mínimos se pueden medir con una linea ranurada y a partir de estas mediciones determinar la R de carga.

Un máximo de tensión le corresponde un mínimo de corriente. Un mínimo de tensión le corresponde un máximo de corriente.

Relaciones de impedancia

→ Linea de media longitud de onda ($\lambda/2$)

$$Z_x = Z_0 \cdot \frac{Z_r + j Z_0 . Tg(\beta x)}{Z_0 + j Z_r . Tg(\beta x)} \xrightarrow[x = \frac{\lambda}{2}]{} \boxed{Z_{\frac{\lambda}{2}} = Z_r}$$

Recordar que $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

La linea de $\lambda/2$ refleja en su extremo la impedancia de carga.

→ Linea de un cuarto de longitud de onda ($\lambda/4$)

$$Z_x = Z_0 \cdot \frac{Z_r + j Z_0 . Tg(\beta x)}{Z_0 + j Z_r . Tg(\beta x)} \xrightarrow[x = \frac{\lambda}{4}]{} \boxed{Z_{\frac{\lambda}{4}} = \frac{Z_0^2}{Z_r}}$$

La linea de $\lambda/4$ permite hacer transformaciones de impedancia. Se usa para adaptacion de los sistemas.

Lineas STUB

Son lineas terminadas en un cortocircuito o un circuito abierto.

$$Z_x = Z_0 \cdot \frac{Z_r + j Z_0 . Tg(\beta x)}{Z_0 + j Z_r . Tg(\beta x)}$$

$Z_r = \infty$ → $\boxed{Z_x = -j Z_0 \ Cotg(\beta x)}$

$Z_r = 0$ → $\boxed{Z_x = j Z_0 \ tg(\beta x)}$

Se usan para hacer filtros o adaptaciones.
Me permite conocer la impedancia caracteristica de la linea.

→ $Z_0^2 = Zcc \cdot Zca$

Carta de Smith

Muestra como varia la impedancia compleja de una linea de transmision a lo largo de su longitud.
Se usa frecuentemente para simplificar la adaptacion de la impedancia de una linea de transmision con su carga.
Representa el diagrama del coeficiente de reflexion. Por correspondencia entre planos podemos mostrar simultaneamente impedancias o admitancias.

Impedancia normalizada → $z_n = \frac{Z_x}{Z_0} = \frac{1+\rho_v}{1-\rho_v}$

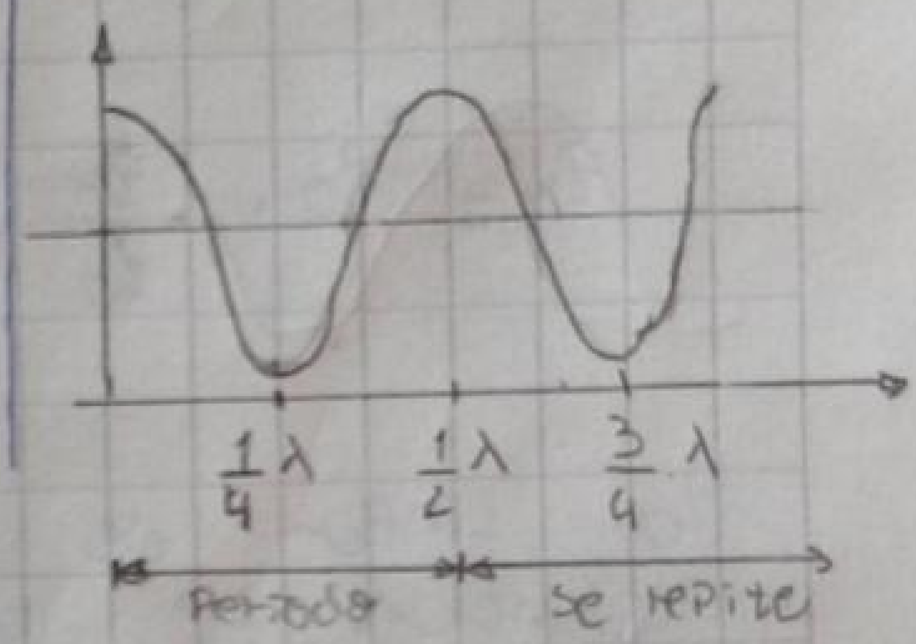
→ $z_n = r_n + jx_n \quad \wedge \quad \rho_v = u + jv$

El ROE es un circulo de radio constante (Exepto en adaptacion de parametros concentrados).
Entro a la carta de Smith con z_n. Si quiero encontrar y_n debo girar 180° sobre el circulo de ROE constante.

Longitud de onda λ al generador

Longitud de onda λ a la carga

¿Porque la circunferencia de la carta solo vale 0,5 λ?



La escala de longitud de onda es X/λ. Recordar que

$$\lambda = \frac{V}{f} \quad \text{donde} \quad V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$$

→ Adaptacion de impedancia (Ver desde el generador una $Z=1$ o $Y=1$)

Adaptacion de impedancias → Adaptamos para tener una maxima transferencia de potencia. No se usan adaptaciones resistivas porque producen perdidas.

(+) Adaptacion Stub

- Siempre se trabaja con admitancias Y.
- Me muevo primero por el circulo de ROE cte y luego por el de G cte.

(+) Adaptacion de Parametros concentrados

- El circulo de ROE ya no es constante.
- Se parte de una impedancia Z o de una admitancia Y
- Cuatro soluciones posibles → dos comenzando con Z. → dos comenzando con Y.
- Me muevo solo por el circulo de $G = cte$.
- Se complica un poco cuando tengo una Zgenerador.

* Adaptación con dos stubs

- Permite adaptar un conjunto de impedancias.
- Los puntos de inserción de los stub siempre serán en la misma posición. Lo que se cambiará serán las longitudes de cada stub.
- Se utiliza cuando tengo que transmitir en varias frecuencias.

En un mínimo $Z_{min} = \frac{Z_0}{ROE}$; En un máximo $Z_{máx} = Z_0 . ROE$

Línea de microcinta

Es la línea más usada. Su uso es más conveniente que el cable coaxil, no está protegido y tiene un campo de dispersión.

El modo de propagación de la onda no es TEM, pero se lo considera Quasi TEM.

$\boxed{\text{Demostración}}$

Saco factor común I_i — Saco factor común I_r

$$Z_{x\,máx} = \frac{V_i + V_r}{I_i + I_r} = \frac{V_i}{I_i + I_r} + \frac{V_r}{I_i + I_r}$$

$$Z_{x\,máx} = \frac{V_i}{I_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{I_r}{I_i}} + \frac{V_r}{I_r} \cdot \frac{1}{\frac{I_i}{I_r} + 1}$$

$$Z_{x\,máx} = Z_0 \cdot \frac{1}{1 - \rho_v} - Z_0 \cdot \frac{1}{1 - 1/\rho_v}$$

Saco factor común $-1/\rho_v$ este término con el signo menos

$$Z_{x\,máx} = Z_0 \cdot \frac{1}{1 - \rho_v} - Z_0 \cdot \frac{1}{-\rho_v + 1} \cdot \frac{1}{(-1/\rho_v)}$$

$$Z_{x\,máx} = Z_0 \cdot \left[\frac{1}{1 - \rho_v} + \frac{\rho_v}{1 - \rho_v} \right] = Z_0 \cdot \underbrace{\frac{1 + \rho_v}{1 - \rho_v}}_{ROE}$$

$$\boxed{Z_{x\,máx} = Z_0 \cdot ROE}$$

$$Zx_{min} = \frac{V_i - V_r}{I_i - I_r} = \frac{V_i}{I_i - I_r} - \frac{V_r}{I_i - I_r}$$

$$Zx_{min} = \frac{V_i}{I_i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{I_r}{I_i}} - \underbrace{\frac{V_r}{I_r}}_{\to -Zo} \cdot \frac{1}{\frac{I_i}{I_r} - 1}$$

$$Zx_{min} = Zo \frac{1}{1 + \rho_v} + Zo \cdot \frac{1}{-\frac{1}{\rho_v} - 1}$$

$$Zx_{min} = Zo \cdot \frac{1}{1 + \rho_v} + Zo \cdot \frac{1}{1 + \rho_v} \cdot \frac{1}{(-1/\rho_v)}$$

$$Zx_{min} = Zo \cdot \left[\frac{1}{1 + \rho_v} - \frac{\rho_v}{1 + \rho_v} \right] = Zo \cdot \underbrace{\frac{1 - \rho_v}{1 + \rho_v}}_{\to 1/ROE}$$

$$\boxed{Zx_{min} = \frac{Zo}{ROE}}$$

¿Dondé se dan los máximos y mínimos de tensión?

→ $\boxed{\text{Si} \quad Zr < Zo}$

- → $V_{máximo}$ en $x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- → $V_{mínimo}$ en $x = n \frac{\lambda}{2}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

→ $\boxed{\text{Si} \quad Zr > Zo}$

- → $V_{máximo}$ en $x = n \frac{\lambda}{2}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
- → $V_{mínimo}$ en $x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

Los máximos superan el valor de la fuente. No se si siempre
El máximo de tensión antecede al mínimo. El mínimo de tensión antecede al máximo.