

# Fisica Nucleare e Subnucleare

Carlo Dionisi, Egidio Longo

Revisione 2017

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1	Particelle elementari . . . . .	7
1.2	Le unità di misura . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Gli albori</b>	<b>10</b>
2.1	Il tubo catodico . . . . .	10
2.2	La radioattività . . . . .	11
2.3	La scoperta dell'elettrone . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Esperimenti di diffusione</b>	<b>15</b>
3.1	Sezione d'urto . . . . .	15
3.2	Interpretazione geometrica della sezione d'urto . . . . .	17
3.3	Coefficiente di assorbimento, lunghezza di attenuazione e cammino libero medio . . . . .	19
3.4	Sezione d'urto totale, elastica, inclusiva ed esclusiva . . . . .	20
3.5	Luminosità e sezione d'urto per esperimenti con fasci incrociati	21
3.6	Sezioni d'urto differenziali . . . . .	23
3.7	I modelli atomici e l'esperimento di Rutherford . . . . .	24
3.8	La sezione d'urto di Rutherford . . . . .	25
3.9	Il protone e le trasmutazioni nucleari . . . . .	29
3.10	La scoperta del neutrone . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Il passaggio della radiazione nella materia</b>	<b>32</b>
4.1	La formula di Bohr . . . . .	33
4.2	La formula di Bethe e Block . . . . .	36
4.3	Il percorso residuo . . . . .	38
4.4	La diffusione coulombiana multipla . . . . .	39
4.5	Effetto Cherenkov . . . . .	40

4.6	Perdite di energia per elettroni . . . . .	41
4.7	Interazione dei fotoni con la materia . . . . .	45
4.7.1	Effetto fotoelettrico . . . . .	45
4.7.2	Effetto Compton . . . . .	47
4.7.3	Produzione di coppie . . . . .	49
4.8	Sciame elettromagnetici . . . . .	49
4.9	Sciame adronici . . . . .	51
4.10	Rivelatori di particelle . . . . .	51
4.10.1	Rivelatori di traccia . . . . .	53
4.10.2	Spettrometri magnetici . . . . .	54
4.10.3	Calorimetri . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Interazioni</b>	<b>57</b>
5.1	Particelle e forze . . . . .	57
5.2	L'interazione elettromagnetica . . . . .	59
5.3	Introduzione ai diagrammi di Feynman . . . . .	62
5.4	Range delle interazioni forti e ipotesi di Yukawa . . . . .	67
5.5	Evidenza sperimentale dello scambio di mesoni carichi . . . . .	70
5.6	Il propagatore per il potenziale di Yukawa . . . . .	72
5.7	Il propagatore delle interazioni deboli . . . . .	73
5.8	Leggi di decadimento di nuclei e particelle instabili . . . . .	74
5.9	La formula di Breit e Wigner . . . . .	76
5.10	Intensità relativa delle interazioni fondamentali . . . . .	77
5.A	La seconda regola d'oro di Fermi . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Particelle</b>	<b>81</b>
6.1	I raggi cosmici . . . . .	81
6.2	La scoperta del positrone . . . . .	81
6.3	Il mesotrone . . . . .	83
6.4	L'esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni. Pioni e muoni .	85
6.5	Le particelle "strane" . . . . .	87
6.6	Acceleratori di particelle . . . . .	90
6.6.1	Acceleratori lineari . . . . .	91
6.6.2	Ciclotrone . . . . .	92
6.6.3	Sincrociclotrone . . . . .	93
6.6.4	Sincrotrone . . . . .	94
6.7	L'antiproton . . . . .	95
6.8	Neutrini . . . . .	98

6.8.1	L'ipotesi del neutrino . . . . .	98
6.8.2	La teoria di Fermi . . . . .	99
6.8.3	La scoperta sperimentale del neutrino . . . . .	104
6.8.4	Il neutrino muonico . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Invarianza e Simmetrie</b>	<b>109</b>
7.1	Parità . . . . .	111
7.2	Parità intrinseca . . . . .	113
7.2.1	Parità dei fermioni . . . . .	113
7.2.2	Parità dei fotoni . . . . .	114
7.2.3	Parità dei pioni . . . . .	114
7.3	Simmetrie C e T . . . . .	115
7.4	Violazione della parità . . . . .	117
7.4.1	L'esperimento del $^{60}\text{Co}$ . . . . .	118
7.4.2	Violazione della parità nei decadimenti del pion e del muone . . . . .	121
7.5	Isospin . . . . .	122
7.6	Risonanze adroniche . . . . .	124
7.6.1	Risonanze barioniche . . . . .	126
7.6.2	Risonanze mesoniche . . . . .	127
7.7	La simmetria SU(3) e il modello a quark . . . . .	128
<b>8</b>	<b>Cenni di Fisica del Nucleo</b>	<b>135</b>
8.1	Proprietà generali dei nuclei . . . . .	135
8.2	La dimensione e la forma dei nuclei . . . . .	136
8.3	Masse dei nuclei . . . . .	137
8.4	Stabilità . . . . .	140

# Capitolo 1

## Introduzione

Nel corso del XIX secolo i progressi della chimica e gli sviluppi della teoria dell'elettricità e del magnetismo avevano consolidato l'idea che la materia fosse costituita da atomi, tenuti insieme da forze di natura elettrica. Avogadro per primo aveva interpretato le leggi della chimica (la legge dei volumi e la legge delle proporzioni definite) in termini di numero di molecole e di massa delle singole molecole, identificando il ruolo delle molecole elementari, ossia degli atomi. Faraday, stabilendo che la massa dissociata per elettrolisi di una mole di sostanza era proporzionale alla carica elettrica raccolta dall'elettrodo divisa per il numero di valenza degli ioni, aveva ipotizzato l'esistenza di una carica elettrica fondamentale (quella che oggi sappiamo essere la carica  $e$  dell'elettrone e del protone) tale che la carica di una mole era sempre multipla di  $N_A \cdot e$  dove  $N_A$  è il numero di Avogadro.

Tuttavia il concetto di atomo come lo conosciamo oggi, ossia un oggetto composto da un nucleo pesante carico positivamente, circondato da elettroni carichi negativamente, nasce a cavallo tra l'Ottocento e il Novecento, grazie alle scoperte fondamentali dell'elettrone (Thomson 1897) e del nucleo (Rutherford 1908). Negli stessi anni emerge il concetto di fotone: Röntgen scopre i raggi X (1885), Einstein (1905) interpreta l'effetto fotoelettrico come manifestazione della natura particellare della luce. Nasce quindi l'idea che la struttura della materia a livello subatomico sia costituita da particelle elementari. Nello stesso periodo, le scoperte della radioattività (Bequerel 1896, P. e M. Curie 1898) e dei suoi prodotti, i raggi  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  (che oggi sappiamo essere rispettivamente nuceli di elio, elettroni e fotoni) cominciano a far luce sulle proprietà dei nuclei atomici, che risultano essere composti anch'essi di entità più elementari, il protone (identificato da Rutherford negli stessi anni)

e il neutrone (scoperto da Chadwick nel 1932). Questo insieme di particelle elementari è completato dall'ipotesi dell'esistenza del neutrino, formulata da Pauli nel 1930 per giustificare alcune proprietà altrimenti incomprensibili dei decadimenti  $\beta$  (per la osservazione sperimentale dei neutrini bisognerà attendere gli esperimenti di Reines e Cowan negli anni '50) e ancora oggi possiamo considerare questi cinque componenti come i costituenti di tutta la materia ordinaria che possiamo osservare intorno a noi.

Di questi componenti, quattro (l'elettrone, il neutrino, il protone ed il neutrone) sono dei fermioni, ossia particelle a spin semintero che nel linguaggio odierno rappresentano i campi di materia ed uno solo, il fotone, è un bosone, ossia ha spin intero e costituisce un campo di forza, il quanto della forza elettromagnetica. Gli altri campi di forze che oggi conosciamo, i bosoni intermedi  $W$  e  $Z$ , mediatori delle interazioni deboli (responsabili dei decadimenti  $\beta$ ) e i gluoni, mediatori delle interazioni forti (responsabili dei legami nucleari), differiscono in maniera essenziale dal fotone per il fatto che le relative interazioni sono a corta distanza o *range*. Benché anche questi campi di forza siano ingredienti essenziali della nostra interpretazione del mondo microscopico (il cosiddetto Modello Standard delle particelle elementari), i loro effetti possono manifestarsi quindi solo osservando gli stati della materia con altissima risoluzione (come vedremo, per il principio di indeterminazione questo richiede interazioni ad alta energia tra le particelle), mentre riveliamo direttamente i fotoni con i nostri sensi attraverso l'osservazione di qualunque fenomeno luminoso. Così la teoria di Fermi, che interpreta elegantemente tutte le interazioni deboli di bassa energia (e quindi, per esempio, tutti i decadimenti  $\beta$  radioattivi), è basata sull'interazione puntiforme diretta di quattro fermioni, senza necessità di ulteriori particelle mediatiche.

Le interazioni nucleari forti devono però dar conto dell'attrazione (e della repulsione) tra i componenti del nucleo e non possono quindi essere puntiformi. Questo conduce all'ipotesi che le interazioni forti possano essere mediate da particelle pesanti (caratteristica che assicura un corto range alle interazioni), formulata da Yukawa (1935). La ricerca dei mediatori (i cosiddetti mesotroni) di Yukawa si intreccia con la scoperta del muone come componente della radiazione cosmica che raggiunge la superficie terrestre ("raggi cosmici"). Il muone, come ricorda il suo nome, viene inizialmente interpretato come la particella di Yukawa. L'esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni (1945) chiarisce l'errore (la particella di Yukawa, il pion, viene poi scoperto da Lattes, Muirhead, Occhialini e Powell nel 1947) e al tempo stesso apre la prima finestra sulle replicate delle particelle elementari: il muone ri-

sulta infatti a tutti gli effetti un elettrone pesante. Nel frattempo, la scoperta dell'elettrone positivo (il positrone, Anderson 1932) e dell'antiproton (Segré 1955) dimostrano il significato fisico delle soluzioni ad energia negativa della teoria di Dirac.

Intanto, la spettroscopia delle particelle ad interazione forte (gli adroni) si arricchiva di sempre nuove componenti, che si andavano ad aggiungere a protoni, neutroni e pioni. Negli anni sessanta, Gell-Mann e Zweig suggerirono che una classificazione di questi adroni, che si raccoglievano in gruppi con molteplici regolarità nelle loro proprietà, poteva essere facilmente ottenuta ipotizzando che gli adroni fossero costituiti mettendo insieme in vari modi dei semplici "mattoni" elementari, detti quark. Nello stesso periodo, esperimenti di diffusione di elettroni su protoni e neutroni (in perfetta analogia con le pionieristiche osservazioni di Rutherford) mettevano in luce come la distribuzione di materia degli adroni doveva essere effettivamente essere concentrata intorno a componenti praticamente puntiformi (i partoni) che venivano così ad essere considerati la prova sperimentale dell'esistenza dei quark. Le interazioni forti devono allora essere reinterpretate a questo nuovo livello di componenti. Questo è realizzato nella teoria della cromodinamica quantistica, che introduce i gluoni come mediatori fondamentali dell'interazione forte.

L'estrapolazione della teoria di Fermi delle interazioni deboli ad altissime energie porterebbe a divergenze incompatibili con i principi primi sulla somma delle probabilità degli stati finali accessibili. Questo problema è risolto negli anni sessanta introducendo anche per queste interazioni dei mediatori pesanti, i bosoni intermedi, scoperti poi negli anni ottanta da Rubbia.

Il panorama delle particelle "elementari" che abbiamo davanti oggi comprende dunque quattro campi di materia fermionici, replicati in più famiglie, la prima delle quali è costituita dall'elettrone, dal suo neutrino, dal quark "up" e dal quark "down", e tre gruppi di mediatori, il fotone per l'interazione elettromagnetica, i gluoni per l'interazione forte e i bosoni intermedi per l'interazione debole. La quarta interazione che conosciamo, l'interazione gravitazionale che domina il mondo macroscopico, è del tutto trascurabile a livello delle particelle elementari e non sarà quindi trattata in questo corso.

## 1.1 Particelle elementari

Ci si può domandare quale sia il criterio col quale si stabilisce che una particella osservata sia un oggetto elementare o meno: se un oggetto è privo di struttura interna, si deve comportare a tutti gli effetti come un punto materiale, nel senso che questo non può assorbire energia esterna trasformandola in energia interna. Tutta l'energia trasferita dall'esterno si deve ritrovare come energia cinetica del punto materiale. Se il sistema ha gradi di libertà interni, parte dell'energia trasferita può eccitare questi gradi di libertà, per cui l'energia cinetica associata al moto del baricentro del sistema non dà conto di tutta l'energia trasferita. E' quello che succede in meccanica classica quando una sferetta ferma riceve un impulso che la mette anche in rotazione: se si osserva solo il moto del baricentro, l'urto appare inelastico, non perché si sia dissipata energia, ma solo perché parte di questa è associata ad una rotazione interna che non viene osservata.

Nel mondo microscopico però valgono le leggi della meccanica quantistica, per cui l'energia dei gradi di libertà interni di una particella non è continua, ma può assumere solo una serie discreta di valori,  $E_0, E_1, E_2, \dots$ . Quindi per mettere in luce l'esistenza di gradi di libertà interni, ossia per determinare la natura composita della particella, si dovrà trasferire una energia almeno pari alla soglia  $E_s = E_1 - E_0$ . Finché la particella viene sondata con energie inferiori a  $E_s$ , si comporta a tutti gli effetti come elementare. Questo è il motivo per cui lo studio della struttura interna delle particelle richiede energie sempre più elevate, per cui spesso la fisica delle particelle è anche chiamata *fisica delle alte energie*. Una conseguenza inevitabile di tutto ciò è anche che il carattere “elementare” di una particella non può mai essere “dimostrato sperimentalmente” ossia non si può mai considerare definitivo: quello che si può affermare è che, fino ad una certa scala di energia, la particella in esame si comporta come una particella elementare. Notiamo anche che, in base a queste considerazioni, è possibile stabilire che una particella *non* è elementare anche senza essere in grado di osservare i suoi componenti, semplicemente sulla base della sua capacità di assorbire energia per eccitazione dei modi interni.

## 1.2 Le unità di misura

La fisica nucleare e delle particelle è probabilmente l'unico ramo della scienza e della tecnica che non utilizza il SI di unità di misura. Si dice spesso che in questo campo si utilizzi il sistema di *unità naturali*, ossia quello che pone uguali ad 1 le due costanti fondamentali  $c$  ed  $\hbar$ , anche se questo è vero solo in parte.

La vera peculiarità della fisica atomica e nucleare è quella di misurare l'energia in elettronVolt, o eV, che è l'energia cinetica acquistata da una particella di carica elementare  $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$  C (come quella del protone, o quella, cambiata di segno, dell'elettrone) che passa attraverso la differenza di potenziale di un Volt, per cui  $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Il motivo di questa scelta risiede nel fatto che, a partire dal tubo catodico fino alle più moderne macchine acceleratrici, la tecnica per aumentare l'energia di una particella carica è sempre quella di farla passare attraverso una differenza di potenziale, per cui la misura più diretta della variazione di energia di una particella è solitamente quella in elettronVolt. Un altro fattore importante è costituito dalla circostanza (piuttosto casuale) che l'elettronVolt risulta una scala appropriata per le transizioni atomiche, mentre quelle nucleari coinvolgono energie dell'ordine del MeV.

Ora, poiché in relatività ristretta l'energia di una particella è legata alla massa  $m$  ed all'impulso  $p$  dalla formula  $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ , misurando le masse in  $\text{eV}/c^2$  e gli impulsi in  $\text{eV}/c$  tutte le formule di cinematica relativistica si semplificano, nel senso che le tre quantità si possono sommare semplicemente senza introdurre i fattori  $c$ . Si noti che per ottenere questa semplificazione è sufficiente utilizzare queste unità, senza porre necessariamente  $c=1$ .

Il fattore di conversione si può ricavare nel modo seguente: consideriamo una massa di 1 kg. L'equivalente in energia è dato da

$$E(1 \text{ kg}) = 1 \text{ kg } c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ kg } (\text{m/s})^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ J} \quad (1.1)$$

essendo  $1 \text{ J} = 1/(1.6 \cdot 10^{-19}) \text{ eV}$  avremo:

$$1 \text{ kg } c^2 = \frac{9 \cdot 10^{16}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 5,6 \cdot 10^{35} \text{ eV} \quad (1.2)$$

da cui

$$1 \text{ kg} = 5,6 \cdot 10^{35} \text{ eV}/c^2 \quad (1.3)$$

Così le masse dell'elettrone e del protone, che valgono rispettivamente  $9.109 \cdot 10^{-31}$  e  $1.673 \cdot 10^{-27}$  kg possono essere espresse come  $0.511 \text{ MeV}/c^2$

e  $938.3 \text{ MeV}/c^2$ , mentre valgono direttamente  $0.511 \text{ MeV}$  e  $938.3 \text{ MeV}$  in unità naturali propriamente dette. In queste unità, infatti,  $c$  è una costante adimensionale posta uguale ad 1, per cui il tempo e la lunghezza hanno le stesse dimensioni. Porre  $\hbar=1$  implica invece considerare adimensionale una azione, che è il prodotto di un'energia per un tempo, il che vuol dire che il tempo, e quindi la lunghezza, hanno le dimensioni dell'inverso dell'energia. Dal valore di

$$\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 6.583 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$$

si ottiene quindi il valore del secondo in unità naturali:

$$1 \text{ s} = (6.583 \cdot 10^{-22} \text{ MeV})^{-1} = 1.519 \cdot 10^{21} \text{ MeV}^{-1}.$$

Il valore del metro in unità naturali si ottiene invece considerando che il prodotto  $\hbar c$  ha le dimensioni di una energia per una lunghezza e vale

$$\hbar c = 6.583 \cdot 10^{-22} \cdot 2.998 \cdot 10^8 \text{ MeV m} = 197.35 \cdot 10^{-15} \text{ MeV m} \simeq 200 \text{ MeV fm}$$

dove è stato introdotto il fermi ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ), distanza caratteristica delle interazioni nucleari. Ponendo  $\hbar c = 1$  si ottiene

$$1 \text{ m} = 5.068 \cdot 10^{12} \text{ MeV}^{-1} \text{ oppure } 1 \text{ fm} = 5.068 \text{ GeV}^{-1}.$$

Notiamo ancora che, essendo  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 1$  è ragionevole porre anche  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$  e di conseguenza considerare anche queste costanti adimensionali. Questo particolare insieme di unità naturali è detto di Heaviside-Lorentz. Poiché la costante di struttura fine

$$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137,$$

essendo adimensionale, ha un valore indipendente dal sistema di unità di misura, nel sistema di Heaviside-Lorentz possiamo scrivere

$$\alpha = e^2/(4\pi) = 1/137,$$

da cui risulta che in questo sistema anche la carica elettrica è una quantità adimensionale.

# Capitolo 2

## Gli albori

### 2.1 Il tubo catodico

Molte delle scoperte che, a cavallo del secolo, pongono le basi della moderna fisica atomica, sono legate allo sviluppo delle tecniche dei tubi a vuoto, ed in particolare al tubo catodico. A partire dal 1857, Geissler aveva cominciato ad utilizzare tubi di vetro, dotati di due eletrodi alle estremità, con i quali studiava la scarica elettroluminescente nei gas. Utilizzando una pompa a vuoto, poteva studiare la scarica in funzione della pressione del gas. Ma anche con pressioni bassissime, applicando un'alta tensione tra gli eletrodi, dal lato dell'anodo positivo compariva una luminescenza verdastra. Il fenomeno era indipendente dal gas residuo presente nel tubo o dal materiale con cui erano realizzati gli eletrodi. Nel 1878 Crookes, attraverso l'uso di uno schermo fluorescente in prossimità dell'anodo, dimostrò che la luminescenza doveva essere associata alla propagazione di una forma di raggio, che poteva essere assorbito da un ostacolo, generando un'ombra sullo schermo. Inoltre stabilì che questi *raggi catodici* venivano deviati da un campo magnetico.

Prima ancora che Thomson comprendesse la natura dei raggi catodici, Röntgen, l'8 novembre del 1895, scoprì che questi, colpendo strati di materiali diversi, producevano un altro tipo di radiazione penetrante ed invisibile ad occhio nudo, a cui diede il nome di *raggi X*. Questi, a differenza dei raggi catodici, potevano attraversare la materia, impressionando selettivamente schermi fluorescenti o lastre fotografiche. I raggi X divennero immediatamente noti al grande pubblico proprio per la capacità di rendere visibili le ossa all'interno del corpo umano, fenomeno che Röntgen sperimentò su se stesso



Figura 2.1: Un tubo catodico utilizzato da Crookes: la croce maltese di metallo all'interno serviva per dimostrare l'assorbimento dei raggi catodici, con formazione di un'ombra sullo schermo fluorescente (a sinistra).

in maniera quasi casuale. Oggi sappiamo che i raggi catodici sono costituiti da elettroni e che i raggi X sono fotoni, che possono essere irraggiati dagli elettroni incidenti, a causa delle forti deflessioni nel campo dei nuclei atomici dell'anodo (spettro continuo) oppure, nel caso gli elettroni incidenti strappino degli elettroni dagli strati più interni, possono essere emessi da transizioni di elettroni esterni verso le lacune così create, con energia corrispondente alla differenza tra i due stati elettronici (spettro a righe).

## 2.2 La radioattività

Un anno più tardi rispetto alla scoperta dei raggi X, nel 1896, un'altra impressione casuale di una lastra fotografica lasciava la prima traccia di un fenomeno apparentemente simile, ma che si rivelò di origine piuttosto diversa. Becquerel, preparando un'esperienza sulla fosforescenza dei sali di uranio, fenomeno che sospettava essere in qualche relazione con i raggi X di Röntgen, si accorse che il materiale era in grado di impressionare una lastra fotografica anche senza essere preventivamente esposto alla luce. La conclusione era che il materiale doveva emettere spontaneamente una radiazione con proprietà simili ai raggi X. Becquerel aveva scoperto la *radioattività* naturale, come

venne successivamente chiamata da Maria Skłodowska-Curie. In collaborazione col marito Pierre Curie, nel 1898 Maria dimostrò che una radioattività molto più intensa di quella dovuta all'uranio era associata a due elementi chimici fino ad allora sconosciuti, a cui diede il nome di polonio e radio. Fu però Rutherford nello stesso anno a dimostrare che la radioattività naturale allora osservata era dovuta a radiazioni diverse dai raggi X, denominate quindi raggi  $\alpha$  e  $\beta$ , che venivano deviate in direzioni opposte da un campo magnetico esterno. A questi si aggiungono nel 1900 i raggi  $\gamma$ , scoperti da Villard come componente non “deviabile” della radioattività. Nel 1909 Rutherford identifica i raggi  $\alpha$  come nuclei di elio ionizzati, di carica pari a  $2e$ .

## 2.3 La scoperta dell'elettrone

Nel frattempo, nel 1897, J.J. Thomson, studiando la deflessione dei raggi catodici sottoposti all'effetto combinato di campi elettrici e magnetici (come schematicamente illustrato nella figura 2.2), dimostrò che questi non solo erano associati a cariche elettriche negative, ma dovevano essere costituiti da corpuscoli con un rapporto ben definito tra carica e massa, gli elettroni (questo nome era stato proposto da G.J. Stoney nel 1891 per indicare l'unità elementare di carica elettrica).

Con riferimento alla figura 2.2 valutiamo prima di tutto la deflessione  $y_1$  prodotta su una carica  $e$  da un campo elettrico  $E$  ortogonale alla velocità  $v$  della carica, che agisce lungo un tratto  $x_1$  della traiettoria con una forza data da  $eE$  e quindi imprime una accelerazione  $eE/m$  che agisce per un tempo  $t_1 = x_1/v$ :

$$y_1 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \left( \frac{x_1}{v} \right)^2. \quad (2.1)$$

Proseguendo ora per un tratto  $x_2$  fino allo schermo con una componente  $y$  della velocità che è quella di uscita dalla zona di campo elettrico,  $v_y = eE/m \cdot t_1 = eE/m \cdot x_1/v$ , la coordinata  $y_2$  sullo schermo sarà data da:

$$y_2 = y_1 + v_y t_2 = \frac{eE}{m} \cdot \frac{x_1}{v^2} \left( \frac{x_1}{2} + x_2 \right). \quad (2.2)$$

Il valore del rapporto  $e/m$  può essere successivamente determinato applicando contemporaneamente un campo magnetico  $B$  ortogonale ad  $E$  e a  $v$ , fino a riportare il fascetto nella posizione indefessa  $y = 0$ . La condizione per

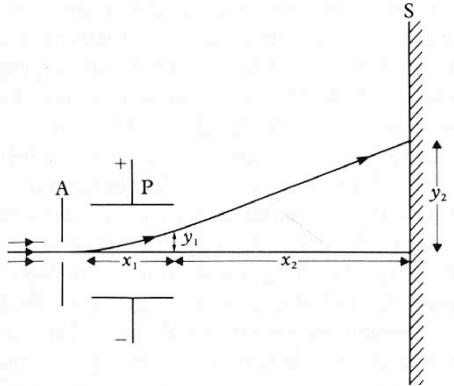


Figura 2.2: Schema della traiettoria degli elettroni nel dispositivo utilizzato da Thomson: gli elettroni emessi dal catodo (sulla sinistra) sono accelerati da un elettrodo A e collimati attraverso un foro in esso; le placche P generano un campo elettrico ortogonale alla direzione degli elettroni; all'uscita della zona di campo elettrico, gli elettroni procedono in linea retta fino allo schermo fluorescente S.

cui questo accade è che  $eE = evB$ , da cui si ricava il valore di  $v = E/B$  che, inserito nella (2.2), permette di calcolare  $e/m$ . Se un unico valore di  $B$  riporta tutti i raggi catodici a  $y = 0$ , si deve concludere che il rapporto  $e/m$  deve essere lo stesso per tutti i raggi, che sono quindi presumibilmente costituiti da un unico tipo di particella.

Il valore misurato da Thomson era  $e/m = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$ . Questo rapporto risultava molto maggiore di quelli precedentemente misurati per atomi ionizzati, per cui se i raggi catodici erano costituiti dagli elettroni, questi dovevano essere molto leggeri rispetto alle masse atomiche. Becquerel, tra il 1899 e il 1900, verificherà poi che il rapporto  $e/m$  dei raggi catodici e dei raggi  $\beta$  è lo stesso, per cui anche questi ultimi devono essere costituiti da elettroni.

La misura della carica, e quindi della massa, dell'elettrone è invece dovuta a Millikan (1907), attraverso lo studio del moto in aria di goccioline d'olio finemente nebulizzate. Le goccoline si caricano per frizione sul becco del nebulizzatore. Come è noto dalla meccanica, il moto di un corpo sferico in un fluido raggiunge una velocità di regime che è proporzionale alla forza applicata e inversamente proporzionale al raggio del corpuscolo, secondo la

formula  $f = 6\pi\eta rv$ , dove  $\eta$  è la viscosità del mezzo. In assenza di campo elettrico, la forza è dovuta alla gravità, corretta per la spinta di Archimede, e dipende quindi dalle dimensioni della goccia e dalle densità dell'aria e dell'olio. Essendo il raggio molto piccolo a causa della nebulizzazione, la velocità di regime è piuttosto piccola e può agevolmente essere stimata osservando la caduta di ogni singola goccia attraverso un microscopio. La misura di questa velocità permette allora di determinare le dimensioni della goccia. Se si applica ora un campo elettrico opposto alla gravità, la forza  $qE$  rallenta la caduta. Dalla misura della nuova velocità di regime, essendo ormai noto il raggio della goccia, si ricava la carica elettrica di ciascuna goccia. Misurando molte di queste cariche, si può assumere che la carica elementare sia il minimo comun denominatore delle varie misure. In questo modo Millikan stabilì per la carica elementare il valore  $e = 1.59 \cdot 10^{-19}$  C, solo leggermente inferiore al valore oggi noto,  $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$  C. Dal rapporto  $e/m$  così determinato si ricava il valore della massa dell'elettrone:  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg, pari a  $0.511 \text{ MeV}/c^2$ .

# Capitolo 3

## Esperimenti di diffusione

La maggior parte delle nostre conoscenze sulle particelle elementari è stata ottenuta attraverso esperimenti di diffusione, nei quali un fascio di particelle (i “proiettili”) viene inviato su un blocco di materia (il “bersaglio”). Tra proiettili e bersaglio avverranno un certo numero di reazioni, che daranno luogo a nuove particelle (lo stato finale) che possono differire da quelle iniziali per natura o proprietà cinematiche. Studiando le distribuzioni di questi stati finali, si possono ricavare informazioni sulla natura delle interazioni che possono avvenire tra proiettile e bersaglio. Il primo esperimento di questo tipo è considerato quello col quale Rutherford dimostrò che la materia nucleare è addensata in piccole regioni dello spazio (i nuclei atomici) e sarà descritto alla fine di questo capitolo. Prima però, è necessario introdurre alcuni concetti fondamentali a cominciare dalla *sezione d’urto*, di validità del tutto generale per qualunque esperimento di diffusione.

### 3.1 Sezione d’urto

La sezione d’urto è una misura della probabilità che una certa reazione abbia luogo. Nel caso di un esperimento di diffusione, possiamo considerare che nell’unità di tempo un certo numero di particelle del fascio raggiunge la superficie del bersaglio e può interagire con le particelle del bersaglio per tutto lo spessore  $d$  di questo. Supponiamo di poter misurare sperimentalmente il numero di reazioni che avvengono nell’unità di tempo,  $dN_r/dt$ . Se assumiamo che una particella del fascio possa interagire con una sola particella del bersaglio (non ci siano interazioni multiple della stessa particella) e che non

ci siano effetti di coerenza tra le particelle del fascio o del bersaglio (ossia che la probabilità di interazione tra proiettile e bersaglio non sia influenzata dalla vicinanza di altre particelle del fascio o del bersaglio), questo numero deve essere proporzionale al numero di particelle del fascio che arrivano nell'unità di tempo,  $dN_f/dt$ , alla densità di volume  $n_b$  delle particelle bersaglio e alla lunghezza  $d$  del bersaglio. Notiamo che il prodotto  $n_b \cdot d$  rappresenta il numero di bersagli per unità di superficie. Potremo esprimere questa proporzionalità scrivendo

$$\frac{dN_r}{dt} = \sigma_r \cdot \frac{dN_f}{dt} \cdot n_b \cdot d \quad (3.1)$$

dove abbiamo indicato con  $\sigma_r$  una quantità che deve avere le dimensioni di una superficie e che prende il nome di *sezione d'urto* della reazione. Questa quantità dipende dalla natura e dalle proprietà delle particelle che costituiscono il fascio e il bersaglio e dalla intensità della loro interazione. Tipicamente lo scopo di un esperimento di diffusione è proprio quello di determinare il valore di  $\sigma_r$ , eventualmente in funzione delle caratteristiche cinematiche (p. es. l'energia) delle particelle del fascio, attraverso la relazione

$$\sigma_r = \frac{N_r}{N_f} \frac{1}{n_b \cdot d} \quad (3.2)$$

che si ottiene dalla precedente integrando per il tempo  $T$  di durata dell'esperimento. Se il tempo  $T$  è finito, la determinazione di  $\sigma_r$  sarà affetta da errori sperimentali dovuti alle fluttuazioni statistiche di  $N_r$  e  $N_f$ . La sezione d'urto può essere quindi definita come il limite della (3.2) per  $T$  (e quindi  $N_r$  e  $N_f$ ) che tende all'infinito. In questo modo si chiarisce come nella definizione della sezione d'urto compaia una probabilità (come limite della frequenza  $N_r/N_f$ ), moltiplicata per un fattore che ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato, che serve a normalizzare la frequenza delle reazioni (che dipende dal numero di bersagli) al singolo bersaglio, in modo da caratterizzare la singola reazione tra una particella del fascio ed una del bersaglio.

L'unità di misura comunemente usata per la sezione d'urto è il barn, definito come

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = 10^{-28} \text{m}^2 \quad (3.3)$$

e i suoi sottomultipli, il mb, il  $\mu$ b, il nb, ecc.

Se ora facciamo l'ipotesi che le particelle del fascio siano uniformemente distribuite su una sezione  $S$ , possiamo definire il flusso di particelle incidenti

per unità di tempo e unità di superficie come  $\phi = \frac{dN_f}{dt}/S$  e la relazione (3.1) può essere riscritta come:

$$\frac{dN_r}{dt} = \sigma_r \cdot \frac{dN_f}{dt \cdot S} \cdot S \cdot n_b \cdot d = \sigma_r \cdot \frac{dN_f}{dt \cdot S} \cdot N_b = \sigma_r \cdot \phi \cdot N_b \quad (3.4)$$

dove  $N_b = n_b \cdot S \cdot d$  rappresenta il numero totale di bersagli illuminato dalla sezione del fascio incidente.

Nel caso che il bersaglio sia costituito da nuclei di peso atomico  $A$ , il valore di  $N_b$  o equivalentemente di  $n_b$  può essere calcolato nel modo seguente: chiamando  $m_b = A/N_A$  la massa del singolo nucleo-bersaglio e  $V = S \cdot d$  il volume del bersaglio illuminato dal fascio, la densità è data da  $\rho = m_b \cdot N_b/V$  per cui

$$n_b = \frac{N_b}{V} = \rho \frac{N_A}{A}. \quad (3.5)$$

Talvolta può essere utile esprimere il flusso attraverso la densità e la velocità dei proiettili, tenendo conto che il volume del fascio che passa nell'unità di tempo attraverso la superficie  $S$  è dato da  $S \cdot v dt$  ed il numero di proiettili può essere scritto come  $dN_f = n_f S \cdot v dt$ , dove  $n_f$  è la densità di volume delle particelle del fascio. Sostituendo in  $\phi$  si ha

$$\phi = n_f \cdot v. \quad (3.6)$$

## 3.2 Interpretazione geometrica della sezione d'urto

La (3.4) può essere riscritta come

$$\frac{dN_r}{dN_f} = \frac{\sigma_r \cdot N_b}{S}. \quad (3.7)$$

Il primo membro rappresenta il rapporto tra il numero di particelle diffuse ed il numero di particelle incidenti e quindi esprime la probabilità che una particella del fascio ha di interagire: ora se associamo ad ogni particella del bersaglio una superficie efficace pari a  $\sigma_r$ , il secondo membro rappresenta il rapporto tra la superficie efficace totale di tutte le particelle-bersaglio e la superficie del fascio e può essere interpretato come la probabilità che una singola particella puntiforme, incidente a caso su una superficie  $S$  del bersaglio,

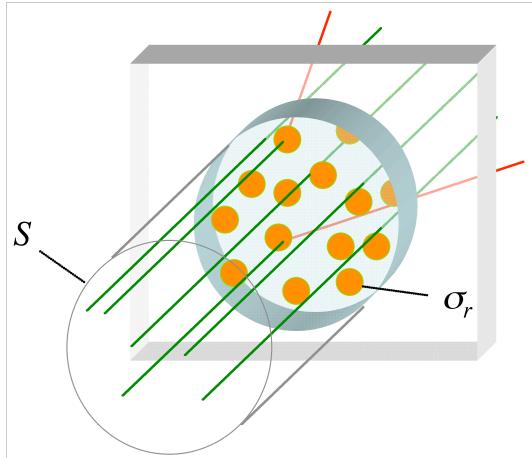


Figura 3.1: Interpretazione geometrica della sezione d’urto:  $S$  è l’area della sezione del fascio di particelle incidenti,  $\sigma_r$  è la superficie geometrica efficace di ciascun bersaglio.

avrebbe di colpire la superficie efficace totale del bersaglio data da  $\sigma_r \cdot N_b$  (figura 3.1). Questa rappresentazione geometrica, molto suggestiva nella sua semplicità, può essere tuttavia fuorviante per molti motivi: in primo luogo può far pensare che la sezione d’urto sia legata alle dimensioni fisiche delle particelle coinvolte, mentre si hanno sezioni d’urto finite anche per particelle puntiformi, come ad esempio nella diffusione di neutrino su elettrone. In secondo luogo, può suggerire che la sezione d’urto sia legata in qualche modo al range dell’interazione mentre in realtà è una misura dell’*intensità* di questa. Infine, può far ritenere che la sezione d’urto sia una proprietà del bersaglio, mentre, come abbiamo detto, è una proprietà dell’interazione tra proiettile e bersaglio e per lo stesso bersaglio può cambiare non solo utilizzando proiettili diversi, ma anche al variare delle proprietà cinematiche (energia ecc.) di uno stesso tipo di proiettile.

D’altra parte, in alcuni casi, la sezione d’urto può dare un ordine di grandezza ragionevole delle dimensioni delle particelle coinvolte. E’ il caso ad esempio dell’urto protone-protone (processo dominato dall’interazione forte) ad energie di qualche GeV, che è dell’ordine di  $10 \text{ mb} = 10^{-30} \text{ m}^2$ , mentre le dimensioni dei protoni sono dell’ordine di  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ . Per dare un’idea della variabilità della sezione d’urto su protone, la sezione d’urto di neutrino

su protone (dovuta all'interazione debole) ad energie analoghe è dell'ordine di  $10 \text{ fb} = 10^{-42} \text{ m}^2$ .

### 3.3 Coefficiente di assorbimento, lunghezza di attenuazione e cammino libero medio

Se vogliamo calcolare la probabilità che una particella del fascio interagisca mentre attraversa un tratto  $dx$  del bersaglio, possiamo applicare la (3.7) ad un volume di bersaglio  $Sdx$ , ricavando:

$$P_{int} = \frac{\sigma_r \cdot n_b \cdot S \cdot dx}{S} = \sigma_r \cdot n_b \cdot dx = \mu dx \quad (3.8)$$

dove  $\mu = \sigma_r \cdot n_b$  è detto *coefficiente di assorbimento* ed ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. La variazione del flusso di particelle del fascio dopo un tratto  $dx$  sarà quindi data da:

$$d\phi = -\phi \cdot P_{int} = -\phi \mu dx \rightarrow \frac{d\phi}{dx} = -\mu\phi \quad (3.9)$$

da cui ricaviamo l'andamento del flusso di particelle in funzione della profondità:

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-\mu x} = \phi_0 e^{-x/\lambda} \quad (3.10)$$

dove  $\lambda = 1/\mu$  è detta *lunghezza di attenuazione* e rappresenta la lunghezza dopo la quale il fascio risulta attenuato di un fattore  $1/e$ . Dalla (3.10) si può calcolare la probabilità che una particella del fascio incidente interagisca tra  $x$  ed  $x + dx$ , come rapporto tra il numero di particelle per unità di tempo e di superficie che interagiscono tra  $x$  ed  $x + dx$ ,  $-d\phi/dx$ , ed il numero di particelle incidenti per unità di tempo e di superficie,  $\phi_0$ :

$$\frac{1}{\phi_0} \left( -\frac{d\phi}{dx} \right) = \mu e^{-\mu x} \quad (3.11)$$

e quindi il *cammino libero medio*, definito pesando ogni cammino  $x$  per la probabilità che la particella interagisca tra  $x$  ed  $x + dx$ :

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x \cdot \mu e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \mu x e^{-\mu x} d(\mu x) = \frac{1}{\mu} = \lambda \quad (3.12)$$

da cui si vede che il cammino libero medio coincide con la lunghezza di attenuazione.

### 3.4 Sezione d’urto totale, elastica, inclusiva ed esclusiva

Finora abbiamo implicitamente assunto che sia possibile un solo tipo di reazione tra proiettile e bersaglio, e che sia sempre possibile contare in maniera univoca il numero di reazioni avvenute. In presenza di più reazioni, ciascuna delle quali può dar luogo a una o più combinazioni di particelle nello stato finale, possiamo sempre definire una *sezione d’urto totale*  $\sigma_t$  utilizzando nella (3.1) e nelle altre al posto di  $N_r$  un  $N_t$  definito come differenza tra il numero di particelle del fascio incidenti sul bersaglio e il numero di particelle del fascio che emergono dal bersaglio senza aver interagito, ossia nello stesso stato iniziale. Se poi in linea di principio siamo in grado di identificare evento per evento le differenti reazioni, determinandone quindi le varie sezioni d’urto, dovrà risultare  $\sigma_t = \sum_r \sigma_r$ .

Una distinzione che può essere fatta in maniera semplice è quella tra *diffusione elastica*, nella quale le particelle proiettile e bersaglio non cambiano la loro natura nel corso della reazione, e *diffusione anelastica*, nella quale il bersaglio (o il proiettile, o entrambi) in seguito alla reazione si porta in uno stato eccitato, da cui decade in due o più prodotti di decadimento. Nella diffusione elastica si deve conservare l’energia cinetica totale, mentre nella diffusione anelastica la massa invariante del bersaglio deve aumentare a spese dell’energia cinetica iniziale. Nella diffusione elastica, l’energia (o impulso) e l’angolo del proiettile diffuso sono quindi univocamente correlati, e questa caratteristica rende facile l’identificazione degli eventi puramente elastici. Naturalmente tra le sezioni d’urto totale, elastica e anelastica deve valere la relazione  $\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_{anel}$ .

Nelle diffusioni anelastiche, un’altra distinzione utile è quella tra *sezioni d’urto inclusive*, quelle misurate in esperimenti nei quali si rivela solo il proiettile diffuso, e *sezioni d’urto esclusive*, in esperimenti nei quali si identificano anche i prodotti di decadimento del bersaglio e si possono quindi classificare le diverse reazioni in base a questi.

### 3.5 Luminosità e sezione d'urto per esperimenti con fasci incrociati

Le formule (3.1) o (3.4) possono essere riscritte semplicemente come

$$\frac{dN_r}{dt} = \sigma_r \cdot \mathcal{L} \quad (3.13)$$

introducendo la luminosità  $\mathcal{L}$  come

$$\mathcal{L} = \frac{dN_f}{dt} \cdot n_b \cdot d = \phi \cdot N_b \cdot A \quad (3.14)$$

dove la seconda uguaglianza vale sotto le ipotesi nelle quali abbiamo derivato la (3.4). La luminosità ha le dimensioni dell'inverso del prodotto del tempo per una superficie e si misura quindi in  $\text{m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

L'espressione (3.13), che non aggiunge nulla agli esperimenti di diffusione su bersaglio fisso, permette di determinare in maniera semplice la sezione d'urto in esperimenti a fasci incrociati, dove le interazioni avvengono tra due fasci di particelle lanciati l'uno contro l'altro. Questi esperimenti, benché richiedano macchine acceleratrici più complesse e producano luminosità molto inferiori a quelle ottenibili con esperimenti a bersaglio fisso, sono estremamente vantaggiosi dal punto di vista dell'energia disponibile nel centro di massa delle particelle interagenti. Il calcolo della luminosità negli esperimenti

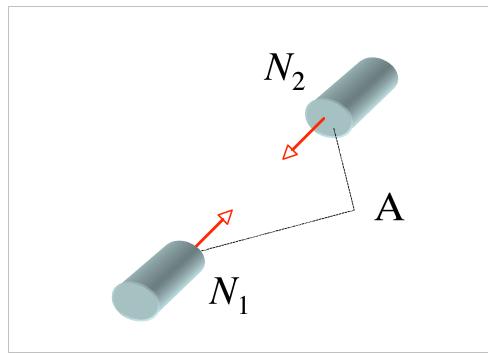


Figura 3.2: Luminosità in una macchina a fasci incrociati:  $N_1$  e  $N_2$  sono i numeri di particelle nei due pacchetti,  $A$  è la sezione trasversale media dei fasci.

ti a fasci incrociati richiede delle modifiche rispetto alla (3.14), che possono essere derivate assumendo la (3.13) come definizione di luminosità. Supponiamo che i fasci incrociati siano entrambi composti da due pacchetti di particelle contenenti rispettivamente  $N_1$  e  $N_2$  particelle e che questi pacchetti si incrocino nella zona di interazione con una frequenza  $f_i$  (che in una macchina ad anello sarà pari alla frequenza di rotazione  $f_r$  di ciascun pacchetto nell'anello)<sup>1</sup>. Con considerazioni analoghe a quelle fatte per derivare la (3.1), possiamo assumere che, fissata la sezione d'urto  $\sigma_r$ , il numero di reazioni osservate nell'unità di tempo, e quindi  $\mathcal{L}$ , sia proporzionale al prodotto di  $N_1$ ,  $N_2$  e  $f$ . Allora potremo scrivere che

$$\mathcal{L} = \frac{N_1 \cdot N_2}{A} \cdot f_i \quad (3.15)$$

dove  $A$  è una grandezza che ha le dimensioni di una superficie e che risulta tanto più piccola (dando quindi luogo ad una luminosità tanto più alta) quanto più strette saranno le sezioni trasversali medie dei fasci. In particolare, se facciamo l'ipotesi che i pacchetti siano cilindretti di sezione  $A$  all'interno dei quali le particelle sono distribuite uniformemente, allora, considerando il secondo pacchetto come il bersaglio, il flusso delle particelle del primo pacchetto è dato da  $\phi = f_i \cdot N_1/A$  e la (3.15) si riduce a  $\mathcal{L} = \phi \cdot N_2$  come nella (3.14). Da quest'ultima espressione si capisce anche la enorme differenza tra le luminosità che si ottengono negli esperimenti a bersaglio fisso e quelle degli esperimenti a fasci incrociati: per i primi nella espressione di  $N_b$  (si veda la 3.5) compare infatti il numero di Avogadro! Nei secondi, per avere luminosità sufficienti, i fasci, oltre ad avere alta intensità, devono essere quindi focalizzati nella zona di interazione in modo da ridurre la sezione equivalente  $A$ .

Se riscriviamo la (3.13) come definizione di  $\sigma_r$ , in analogia con la (3.2), otteniamo:

$$\sigma_r = \frac{dN_r/dt}{\mathcal{L}} = \frac{dN_r/dt}{N_1 \cdot N_2 \cdot f} \cdot A. \quad (3.16)$$

Il primo termine dell'ultimo prodotto rappresenta di nuovo la probabilità della reazione, come rapporto tra il numero di reazioni per unità di tempo ed il numero di incroci per unità di tempo tra coppie di particelle dei due fasci, dato dal prodotto  $N_1 \cdot N_2$  (ogni particella del primo pacchetto può in-

---

<sup>1</sup>In pratica, le macchine ad anelli incrociati utilizzano per ogni fascio un gran numero di pacchetti  $n_p$ , sincronizzati in modo da incrociarsi sempre a due a due nella zona di interazione, il che equivale a porre  $f_i = n_p \cdot f_r$ .

linea di principio interagire con ciascuna particella del secondo pacchetto) moltiplicato per la frequenza di incrocio dei fasci.

Il numero di eventi misurato nel corso di un esperimento è dato dal prodotto della sezione d'urto per la luminosità, integrata per tutta la durata dell'esperimento:

$$N_r = \sigma_r \int_T \mathcal{L} dt. \quad (3.17)$$

Si presta attenzione all'uso di unità inverse per la luminosità integrata: una luminosità integrata di  $1000 \text{ mb}^{-1}$  corrisponde ad una lumionosità integrata di  $1 \mu\text{b}^{-1}$ . Con questa luminosità integrata si osserveranno infatti in media 1000 eventi di una reazione che abbia la sezione d'urto di 1 mb e 1 evento di una reazione che abbia la sezione d'urto di 1  $\mu\text{b}$ .

### 3.6 Sezioni d'urto differenziali

In un esperimento di diffusione, il numero di reazioni può essere determinato in funzione di alcune variabili cinematiche che caratterizzano lo stato finale (angoli, energie ecc. delle diverse particelle). In questo modo è possibile determinare la sezione d'urto in funzione delle stesse variabili, raccogliendo così informazioni più dettagliate sulle proprietà dell'interazione. Per far questo, si deve considerare che sperimentalmente sarà sempre necessario contare il numero di eventi che cadono in un intervallo finito delle variabili in questione. Così, se consideriamo per esempio una reazione inclusiva in cui si misura l'angolo  $\theta$  del proiettile diffuso rispetto alla direzione del proiettile incidente, dovremo riscrivere la (3.13) introducendo conteggi e sezioni d'urto differenziali in queste variabili e integrando negli intervalli  $\Delta E'$  e  $\Delta\theta$ :

$$\frac{d^2 N_r(\theta)}{dt d\theta} = \mathcal{L} \cdot \frac{d\sigma_r(\theta)}{d\theta} \quad (3.18)$$

$$\frac{dN_r(\Delta\theta)}{dt} = \mathcal{L} \cdot \int_{\Delta\theta} \frac{d\sigma_r(\theta)}{d\theta} d\theta. \quad (3.19)$$

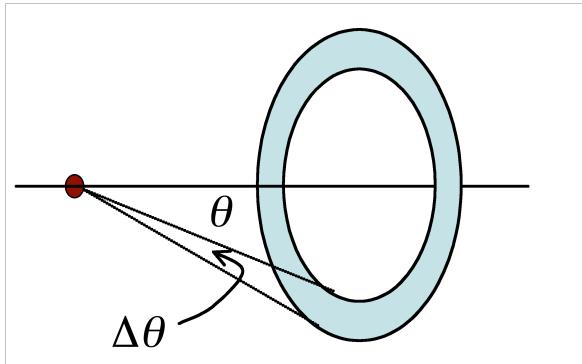


Figura 3.3: Sulla corona circolare cadranno tutte le particelle deflesse dal bersaglio ad un angolo compreso tra  $\theta$  e  $\theta + \Delta\theta$ .

### 3.7 I modelli atomici e l'esperimento di Rutherford

Le prime osservazioni di Rutherford sulla deflessione dei raggi  $\alpha$  in campi elettromagnetici mostravano che la deviazione prodotta da campi elettrici anche elevati era molto minore di quella che poteva essere prodotta dalla presenza accidentale di aria nei tubi a vuoto, il che suggeriva che all'interno degli atomi dovessero essere presenti intensi campi elettrici.

All'epoca, come abbiamo visto nel par. 2.3, J. J. Thomson aveva misurato il rapporto  $e/m$  dell'elettrone, mentre Millikan (1909) ne aveva determinata la carica, per cui era noto che la massa degli elettroni era molto più piccola di quella totale degli atomi. Era dunque ragionevole assumere che tutta la massa dell'atomo fosse associata alla carica positiva. Il modello atomico di Thomson ipotizzava dunque un atomo neutro di forma sferica delle dimensioni di  $10^{-10}$  m, in cui è distribuita con continuità la carica positiva  $Ze$ . In questa sfera sono immersi  $Z$  elettroni.

In un simile atomo, la diffusione di una particella carica incidente era quindi il risultato di una serie di molte interazioni con le diverse cariche positive e negative distribuite uniformemente all'interno dell'atomo. Questo schema rendeva la diffusione sostanzialmente indipendente dalla penetrazione della particella all'interno dell'atomo (la carica vista dalla particella era in media sempre nulla, come mostrato nella figura 3.4) e non poteva produrre

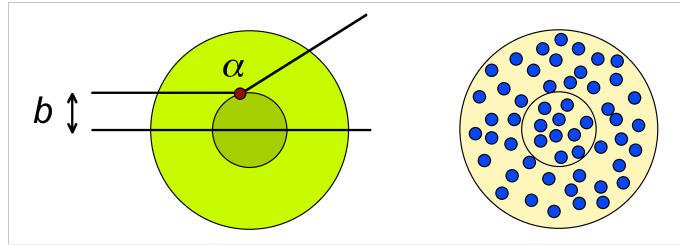


Figura 3.4: Particelle  $\alpha$  diffuse dal nucleo atomico: a destra, per il teorma di Gauss, il campo visto dalla particella  $\alpha$  è dato dalla carica contenuta in una sfera di raggio  $b$ ; a sinistra, nel modello di Thomson la carica positiva è distribuita in maniera uniforme all'interno del nucleo, così come gli elettroni. La carica di una sfera di raggio  $b$  è quindi in media nulla e non dipende da  $b$ .

deflessioni a grande angolo.

Nel 1910-11 Rutherford e i suoi collaboratori Geiger e Marsden decisero quindi di ricercare sistematicamente diffusioni a grande angolo delle particelle  $\alpha$  da fogli sottili di materiale, trovando sistematicamente eventi di questo tipo, anche con spessori minimi di materiale.

Questi eventi potevano essere giustificati assumendo che la distribuzione delle cariche positive fosse concentrata in una regione di spazio molto più piccola all'interno dell'atomo, per cui man mano che la particella  $\alpha$  si avvicinava a questo nucleo positivo, lo schermo dovuto alle cariche degli elettroni si riduceva sempre più, fino a rendere possibili interazioni coulombiane col campo elettrico dovuto ad una carica totale positiva  $Ze$ , concentrata nel nucleo.

### 3.8 La sezione d'urto di Rutherford

La interazione di una particella di massa  $m$  e carica  $ze$  con un nucleo di massa  $M$  e carica  $Ze$  può essere descritta facilmente in meccanica classica sotto le seguenti ipotesi:

- la velocità  $v$  del proiettile è piccola rispetto alla velocità della luce;
- la diffusione è elastica, per cui si deve conservare anche l'energia cinetica;

- la massa del nucleo è grande rispetto a quella del proiettile, per cui nell'urto il nucleo assorbe impulso ma non energia e quindi l'impulso del proiettile cambia in direzione ma non in modulo;
- l'interazione è dovuta alla forza di Coulomb  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2}$ ;
- l'energia totale del sistema è positiva, per cui il proiettile descriverà un'orbita iperbolica.

Dalla conservazione del modulo dell'impulso del proiettile,  $p = mv$ , segue che l'impulso trasferito dal bersaglio è dato da:

$$\Delta p = 2p \sin(\vartheta/2) \quad (3.20)$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo di diffusione. Dal teorema dell'impulso,  $\Delta p$  può essere messo in relazione con la forza coulombiana che si esercita tra proiettile e bersaglio:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} f dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\beta}{r^2} dt \quad (3.21)$$

dove  $\beta$  è l'angolo formato dal vettore  $\vec{r}$  che va dal bersaglio al proiettile con la bisettrice dell'angolo  $\pi - \vartheta$ , come mostrato in figura 3.5.

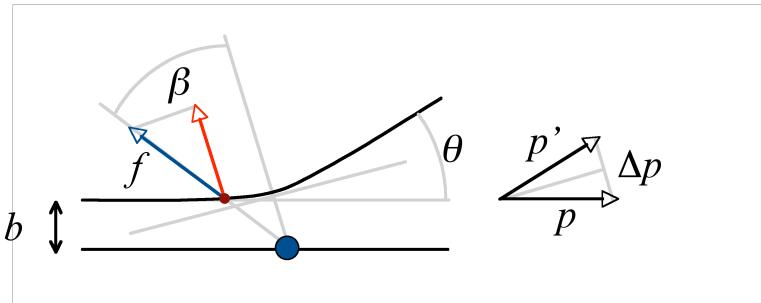


Figura 3.5: La variazione dell'impulso della particella  $\alpha$  è dovuta alla componente  $f \cos \beta = zZe^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2 \cos \beta$  della forza coulombiana nella direzione della bisettrice dell'angolo  $\pi - \vartheta$  (nella direzione ortogonale a questa, la variazione di impulso per  $\beta$  positivi e negativi si compensa per simmetria).

Se definiamo il parametro d'urto  $b$  come la distanza del nucleo dalla traiettoria rettilinea del proiettile prima dell'interazione, il momento angolare

del proiettile rispetto al bersaglio (che si deve conservare essendo la forza centrale) è dato in modulo da  $L = pb$ . D'altra parte, il modulo del momento angolare può essere anche espresso come

$$L = |\vec{r} \wedge m\vec{v}| = rmv_\beta = r^2m \frac{d\beta}{dt} \quad (3.22)$$

dove  $v_\beta = rd\beta/dt$  è la componente della velocità nella direzione ortogonale al raggio. Uguagliando le due espressioni di  $L$  si ottiene

$$dt = \frac{r^2m}{pb} d\beta \quad (3.23)$$

che inserito nella (3.21) dà

$$\Delta p = \int_{-(\pi-\vartheta)/2}^{(\pi-\vartheta)/2} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\beta}{r^2} \frac{r^2m}{pb} d\beta = \frac{zZe^2m}{2\pi\epsilon_0 pb} \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (3.24)$$

che combinata con la (3.20) fornisce una relazione tra il parametro d'urto e l'angolo di diffusione:

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{zZe^2m}{4\pi\epsilon_0 p^2 b}. \quad (3.25)$$

Per  $b = 0$  si ottiene  $\vartheta = \pi$  il che significa che il proiettile ritorna indietro nella direzione iniziale.

Ricavando  $b$  dalla formula precedente, si ottiene:

$$b = -\frac{zZe^2m}{4\pi\epsilon_0 p^2 \tan \frac{\vartheta}{2}}. \quad (3.26)$$

Differenziando ambo i membri possiamo scrivere:

$$db = -\frac{zZe^2m}{4\pi\epsilon_0 p^2} \frac{d\vartheta}{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (3.27)$$

Dalla relazione tra parametro d'urto e angolo di diffusione si ricava facilmente la sezione d'urto differenziale in funzione di quest'ultimo (figura 3.6). Infatti le particelle che vanno ad un angolo compreso tra  $\vartheta$  e  $\vartheta + d\vartheta$  sono quelle che cadono in una corona circolare compresa tra  $b$  e  $b + db$  centrata intorno alla posizione del bersaglio. La superficie di questa corona circolare

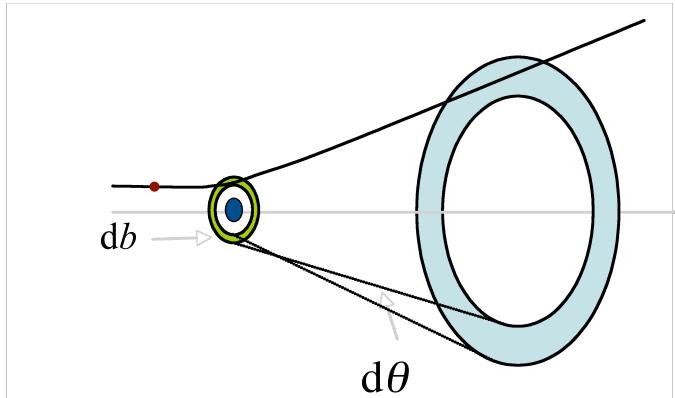


Figura 3.6: Le particelle con parametro d’urto compreso tra  $b$  e  $b + db$  sono deviate di un angolo compreso tra  $\vartheta$  e  $\vartheta + d\vartheta$ .

può essere vista come la sezione d’urto geometrica efficace del bersaglio per le diffusioni a questi angoli:

$$d\sigma = 2\pi b db = 2\pi \left( \frac{zZe^2 m}{4\pi\epsilon_0 p^2} \right)^2 \frac{d\vartheta}{2 \tan \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad (3.28)$$

Introducendo l’angolo solido  $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$  e utilizzando la formula  $\sin \vartheta = 2 \sin \vartheta/2 \cos \vartheta/2$  possiamo scrivere infine

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{zZe^2 m}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{4p^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} = \left( \frac{zZe^2 m}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4}{(\Delta p)^4} \quad (3.29)$$

che rappresenta la *sezione d’urto di Rutherford*. Vale la pena di notare (come vedremo nel paragrafo 5.2) che questa derivazione classica, che è quella sostanzialmente seguita da Rutherford, rimane valida anche in base ad una trattazione quantistica e relativistica.

Le misure di Geiger e Mardsen per la diffusione di particelle  $\alpha$  su fogli sottili di diversi materiali (figura 3.7) confermano l’andamento  $\sin^{-4} \vartheta/2$  della sezione d’urto, così come le altre dipendenze, previste dalla (3.29), dalla carica dei nuclei e dall’energia delle particelle incidenti.

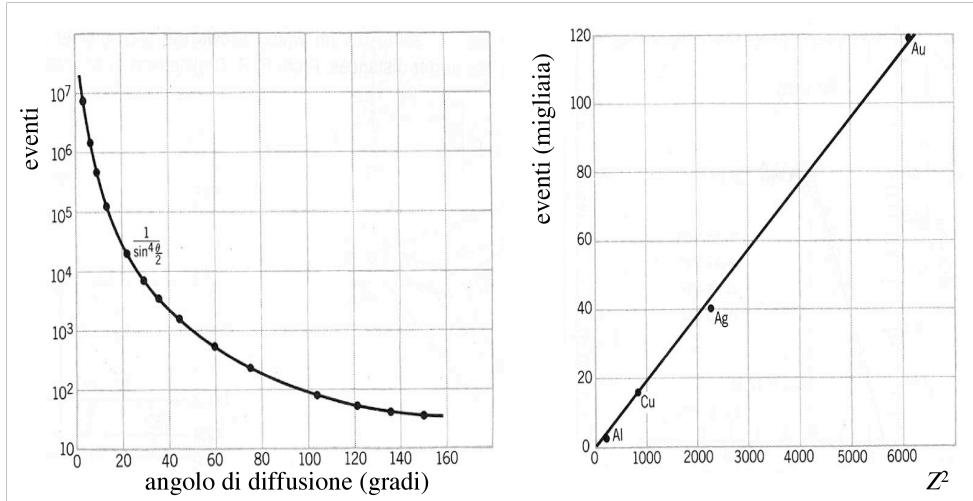


Figura 3.7: A sinistra: distribuzione del numero di eventi in funzione dell’angolo di diffusione per particelle  $\alpha$  incidenti su un foglio d’oro; i dati seguono l’andamento  $\sin^{-4} \vartheta/2$  previsto dalla formula di Rutherford. A destra: numero di eventi in funzione del quadrato del numero atomico del materiale, per alluminio, rame, argento ed oro.

### 3.9 Il protone e le trasmutazioni nucleari

La scoperta del protone come componente elementare dei nuclei è dovuta ancora a Rutherford, che nel 1918 osservò che bombardando con particelle  $\alpha$  un bersaglio di azoto, si ottenevano delle particelle che avevano lo stesso comportamento dei nuclei di idrogeno, che dovevano quindi essere contenuti in quelli di azoto. In realtà aveva osservato la prima trasmutazione artificiale di un nucleo, secondo la reazione:



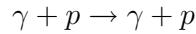
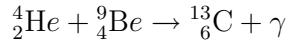
I “nuclei di idrogeno” osservati non sono altro che i protoni, costituenti dei nuclei assieme ai neutroni. Il nucleo dell’idrogeno è costituito da un solo protone. Le particelle  $\alpha$  sono invece nuclei di elio, costituiti da due protoni e due neutroni.

### 3.10 La scoperta del neutrone

Già nel 1920, per superare alcune delle difficoltà create dalla ipotesi che il nucleo fosse costituito solo di elettroni e protoni, Rutherford suggerì che nel nucleo coppie di elettroni e protoni potessero essere combinate a “formare” una particella neutra a cui diede il nome di *neutrone*.

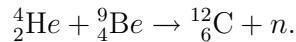
Nel 1928 Bothe e Becker osservarono che bombardando con particelle  $\alpha$  di circa 5.4 MeV, emesse dal polonio, dei nuclei di berillio, si producevano atomi di carbonio insieme ad una radiazione non ionizzante, neutra e molto penetrante: pensarono si trattasse di raggi X.

Nel 1931 I. Curie e F. Joliot, studiando le stesse reazioni, mostraroni che questi processi erano capaci di espellere dei protoni di energia fino a 5.3 MeV da assorbitori ricchi di idrogeno come la paraffina. Spiegarono il fenomeno con la seguente reazione:



Nel 1931 Chadwick notò che un  $\gamma$  capace di causare questa reazione, dove si osservavano protoni di  $\beta \simeq 0.1$ , doveva avere un’energia di almeno 50 MeV, in palese contrasto con i  $\gamma$  osservati sperimentalmente, che arrivano al massimo ad energie di qualche MeV, e con il calcolo basato sul difetto di massa del  ${}_{6}^{13}\text{C}$ , che darebbe un’energia massima di 14 MeV. Chadwick utilizzò camere a ionizzazione nelle quali poteva misurare il numero di ioni prodotti da una particella carica e la lunghezza della traccia. Egli inoltre utilizzò diversi materiali (idrogeno, elio, berilio, carbonio, aria ed argon) come bersaglio per la radiazione sconosciuta prodotta dagli urti delle particelle  $\alpha$  sul berillio. Le particelle espulse dall’idrogeno si comportavano come protoni con velocità che arrivavano fino a  $3.2 \cdot 10^9$  cm/s, mentre le particelle espulse dai bersagli più pesanti avevano un potere di ionizzazione più grande e dovevano essere lo ione di rinculo dell’elemento, rendendo ancora più difficile l’interpretazione in termini di  $\gamma$ , mentre le difficoltà scomparivano se si assumeva che la particella neutra emessa dal berillio fosse pesante.

Chadwick mostrò anche che la nuova particella prodotta aveva una massa uguale a quella del protone entro il 10% e poteva quindi essere identificata col neutrone proposto da Rutherford. La reazione di partenza doveva quindi essere



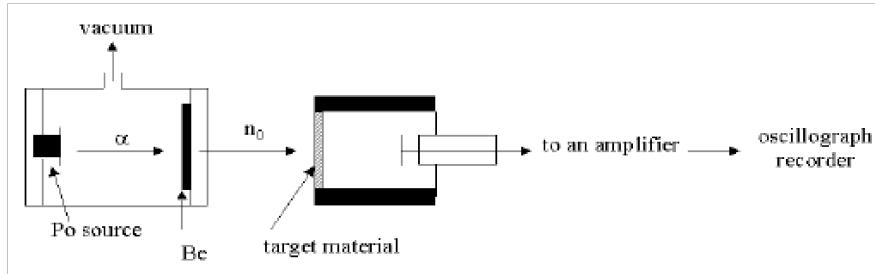


Figura 3.8: La scoperta del neutrone: le particelle  $\alpha$  emesse da una sorgente di polonio raggiungono un bersaglio di berillio, da cui emerge una radiazione neutra che, colpendo successivamente un secondo bersaglio, produce particelle cariche, la cui ionizzazione sviluppa nella camera a destra una corrente che viene amplificata e osservata con un oscilloscopio.

La scoperta del neutrone permise anche di chiarire un certo numero di problemi che erano rimasti aperti sulla struttura dei nuclei. Per interpretare numero atomico e numero di massa senza ricorrere ai neutroni era necessario ipotizzare che il nucleo fosse costituito di  $A$  protoni e  $A - Z$  elettroni. Il principio di indeterminazione metteva in seria difficoltà questo modello, perché per confinare l'elettrone nelle ridotte dimensioni del nucleo era necessario ipotizzarne un impulso molto elevato.

Era ormai anche chiaro almeno dal 1926 che le particelle potevano essere classificate a seconda del loro spin in *fermioni*, con uno spin pari ad un multiplo semintero di  $\hbar$  e in *bosoni*, con uno spin pari ad un multiplo intero di  $\hbar$ . La funzione d'onda di un sistema atomico deve essere simmetrica per lo scambio di due bosoni e antisimmetrica per quello di due fermioni, dando luogo a comportamenti diversi nei due casi. Protoni ed elettroni sono fermioni ed hanno quindi spin  $\hbar/2$ . Ora il nucleo di azoto risultava essere un bosone in base a due metodi di misura completamente indipendenti. D'altra parte, avendo numero atomico pari a 7 e numero di massa pari a 14 doveva essere costituito da 14 protoni e 7 elettroni e doveva essere pertanto un fermione. L'ipotesi del neutrone risolve anche questo problema: il nucleo di azoto è costituito da 7 protoni e 7 neutroni, ed è quindi un bosone.

La scoperta del neutrone è infine la chiave di volta per la interpretazione completa dei decadimenti  $\beta$  come reazioni del tipo  $n \rightarrow pe\nu$ , che saranno interpretate in maniera quantitativa dalla teoria di Fermi.

## Capitolo 4

# Il passaggio della radiazione nella materia

Fin dai primi esperimenti che abbiamo descritto nei precedenti capitoli, le diverse forme di radiazione  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  venivano distinte per le modalità con le quali attraversavano la materia, interagendo con essa fino a venirne assorbite. Queste diverse modalità sono dovute ai processi con cui le diverse radiazioni trasferiscono energia alla materia, sempre per lo più eccitandone i sistemi atomici, fino ad arrivare alla ionizzazione di essi. Il passaggio delle varie forme di radiazione può essere rivelato (e distinto) proprio osservando i processi di diseccitazione atomica (per esempio attraverso la scintillazione, nel caso la diseccitazione avvenga con emissione di un segnale luminoso) o raccogliendo le correnti associate al moto in opportuni campi elettrici esterni degli ioni liberati (come nel caso del contatore Geiger o delle camere a ionizzazione utilizzate da Chadwick e descritte nel par. 3.10). Dai più semplici rivelatori utilizzati nei primi esperimenti a quelli sofisticatissimi richiesti dagli esperimenti odierni, la rivelazione delle particelle avviene dunque raccogliendo un segnale variamente associato al rilascio di energia in questi processi di eccitazione o ionizzazione. Per entrambi i processi si parla in generale di *perdite di energia per ionizzazione*. Nei prossimi paragrafi prenderemo in esame le leggi che regolano la perdita di energia per ionizzazione delle particelle cariche, per poi passare ad esaminare gli effetti del passaggio della radiazione neutra (i raggi  $\gamma$ , ossia i fotoni) e finire con una breve panoramica sulle principali famiglie di rivelatori.

## 4.1 La formula di Bohr

Nella derivazione della formula di Rutherford, abbiamo assunto che il nucleo (avendo una massa molto maggiore del proiettile) non sia in grado di assorbire energia. In questo modo però abbiamo trascurato la possibilità di trasferire energia agli elettroni degli atomi o delle molecole del mezzo. Il calcolo di questa energia può essere fatto con una trattazione classica, arrivando ad una formula ricavata da Bohr nel 1914. Se la particella incidente, di massa  $m \gg m_e$  e carica  $ze$  viaggia con velocità  $v$ , nel suo sistema di riferimento vedrà gli elettroni del mezzo (che assumiamo si muovano con velocità trascurabile rispetto a  $v$ , per cui si possano considerare fermi) avanzare con velocità  $-v$ . Se consideriamo un elettrone a distanza  $b$  dalla traiettoria della particella incidente, la componente dell'impulso trasferito ad esso sarà dato da  $\vec{p}_e = \int e \cdot \vec{\mathcal{E}} dt$ , dove  $\vec{\mathcal{E}}$  indica il campo elettrico. La componente longitudinale si annulla per simmetria, la componente trasversa (che è la stessa nel sistema di riferimento della particella incidente e nel laboratorio) è data da

$$p_e = \int e \cdot \mathcal{E}_\perp dt = \frac{e}{v} \int \mathcal{E}_\perp dx. \quad (4.1)$$

L'integrale che compare nella (4.1) si può valutare immediatamente applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica di raggio  $b$  e di lunghezza infinita intorno alla traiettoria della particella:

$$\Phi(\vec{\mathcal{E}}) = \int \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{n} dS = 2\pi b \int \mathcal{E}_\perp dx = \frac{ze}{\epsilon_0}. \quad (4.2)$$

Sostituendo l'integrale nella (4.1) si ottiene:

$$p_e = \frac{e}{v} \frac{ze}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \frac{2b}{v} \quad (4.3)$$

dove l'ultimo termine evidenzia che l'impulso è quello che sarebbe trasferito da una forza costante pari ad  $ze^2/4\pi\epsilon_0 b^2$  per un tempo  $2b/v$ , detto *tempo d'urto*.

Nell'approssimazione non relativistica, a questo impulso trasferito corrisponderà una energia trasferita all'elettrone del mezzo (e quindi perduta dalla particella in un singolo urto con un elettrone) data da

$$T_e = \frac{p_e^2}{2m_e} = \left( \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 b} \right)^2 \frac{2}{m_e v^2}. \quad (4.4)$$

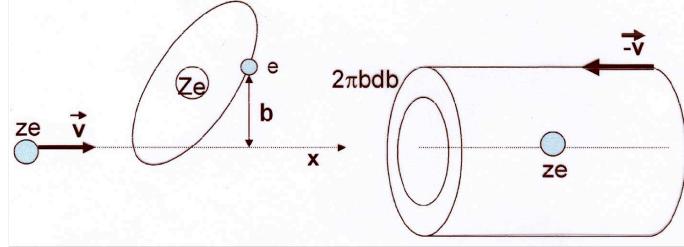


Figura 4.1: A sinistra, una particella di carica  $ze$  passa con velocità  $v$  ad una distanza  $b$  da un elettrone del mezzo. A destra, la particella vede gli elettroni del mezzo avanzare verso di lei con velocità  $-v$ . Gli elettroni del mezzo contenuti nel volume della corona cilindrica rappresentata passano tutti ad una distanza compresa tra  $b$  e  $b + db$ .

Introducendo il raggio classico dell'elettrone<sup>1</sup>  $r_e = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2) = 2.8$  fm e  $\beta = v/c$  possiamo scrivere:

$$T_e = 2m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \frac{r_e^2}{b^2} \quad (4.5)$$

ossia

$$b^2 = 2m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \frac{r_e^2}{T_e} \quad (4.6)$$

La probabilità  $dw$  che in una unità di percorso la particella subisca una collisione con parametro d'urto compreso tra  $b$  e  $db$  (si veda la figura 4.1) sarà

$$dw = 2\pi b db n_e \quad (4.7)$$

dove  $n_e$  è la densità di elettroni per unità di volume. Differenziando la (4.6) si ricava

$$|2bdb| = |2r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \frac{dT_e}{T_e^2}| \quad (4.8)$$

per cui si ha

$$\frac{dw}{dT_e} = 2\pi r_e^2 m_e c^2 n_e \frac{z^2}{\beta^2} \frac{1}{T_e^2} \quad (4.9)$$

---

<sup>1</sup>Il raggio classico dell'elettrone è definito come il raggio di una sfera per la quale l'energia necessaria per concentrare una carica  $e$  sulla sua superficie è uguale alla (metà della) energia di riposo dell'elettrone, come se l'energia associata alla massa fosse di origine elettromagnetica.

da cui si vede che le collisioni con trasferimento di energia  $T_e$  elevato sono rare.

Per avere l'energia totale persa dalla particella in un tratto  $dx$  per urti con elettroni a distanze comprese tra  $b$  e  $b + db$  dovremo moltiplicare la perdita dovuta ad un singolo urto, data dalla (4.5), per il volume della corona cilindrica corrispondente (si veda sempre la figura 4.1),  $2\pi b db dx$  moltiplicato per la densità di elettroni  $n_e$ , per cui:

$$\frac{d^2E}{dxdb} = -4\pi n_e m_e c^2 \frac{z^2 r_e^2}{\beta^2 b} \quad (4.10)$$

che integrata su  $b$  tra una distanza minima  $b_m$  e massima  $b_M$  diventa:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \int_{b_m}^{b_M} \frac{db}{b} = 4\pi n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{b_M}{b_m}. \quad (4.11)$$

Una stima di  $b_m$  e  $b_M$  può essere fatta in base alle seguenti osservazioni:

- il tempo dell'urto che abbiamo visto essere dell'ordine di  $b/v$  deve essere piccolo rispetto al tempo di rivoluzione dell'elettrone  $\gamma T_e = \gamma/\omega_e$  dove il fattore  $\gamma$  tiene conto della dilatazione del tempo di rivoluzione nel riferimento di riposo della particella in moto, per cui  $b_M \simeq v\gamma/\omega_e = \beta c \gamma / \omega_e$ :
- in base al principio di indeterminazione, se l'interazione varia l'impulso dell'elettrone di una quantità  $p_e$  la posizione non può essere determinata meglio di  $b_m = \hbar/p_e = \hbar/(m_e c \beta \gamma)$ .

Inserendo questi valori nella (4.11) otteniamo finalmente la formula di Bohr:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\hbar \omega_e} = 4\pi \frac{N_A Z \rho}{A} r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\hbar \omega_e} \quad (4.12)$$

dove abbiamo utilizzato per la densità degli elettroni di una sostanza con numero atomico  $Z$  e peso atomico  $A$  la formula  $n_e = N_A Z \rho / A$ . Essendo il numero di Avogadro riferito al grammoatomo e misurando la densità in g/cm<sup>3</sup>, se  $m_e c^2$  è espresso in eV, la perdita di energia per unità di lunghezza risulta espressa in eV/cm.

Nel calcolo fatto non si è considerata l'energia trasferita al nucleo. Tuttavia, la dipendenza dalla massa del bersaglio ci fa capire come il contributo dei nuclei sia migliaia di volte più piccolo e possa quindi essere trascurato.

## 4.2 La formula di Bethe e Block

Un calcolo delle perdite per ionizzazione che tiene conto degli effetti quantistici, valido per particelle diverse dagli elettroni (per i quali si devono considerare gli effetti quantistici legati all'identità delle due particelle in interazione) e per particelle con velocità maggiori di qualche centesimo di  $c$ , è stato fatto da Bethe e Block nel 1930, e dà il seguente risultato:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi \frac{N_A Z \rho}{A} r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \left( \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right) \quad (4.13)$$

dove  $I$  è il potenziale medio di ionizzazione del sistema atomico in esame.  $\delta(\gamma)$  è la cosiddetta correzione di densità che tende a limitare per grandi valori di  $\gamma$  la crescita logaritmica delle perdite. Raccogliendo tutti i termini costanti in  $C = 4\pi r_e^2 m_e c^2 N_A \simeq 0.307 \text{ MeV gr}^{-1} \text{ cm}^2$  e dividendo per la densità  $\rho$  la (4.13) si può riscrivere come

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = C \frac{z^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left( \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right) \text{ MeV gr}^{-1} \text{ cm}^2. \quad (4.14)$$

Questa ultima formulazione mette in evidenza le proprietà della Bethe-Block, tutte illustrate nella figura 4.2:

- trascurando la dipendenza logaritmica da  $I$ , la perdita di energia per ionizzazione, espressa in termini dello *spessore di massa*  $\rho dx$  (che si misura in  $\text{g/cm}^2$ )<sup>2</sup> dipende come  $Z/A$  dalle proprietà dei diversi materiali; poiché, a parte l'idrogeno,  $Z/A$  è circa  $1/2$  per tutte le sostanze, in prima approssimazione la perdita di energia per spessore di massa è indipendente dal materiale;
- per piccoli valori di  $\beta$ , la perdita di energia diminuisce come  $1/\beta^2$ , per poi passare per un minimo e risalire in maniera logaritmica quando  $\beta\gamma = p/Mc > 1$  (*risalita relativistica*); se, come si è detto, a grandi valori di  $\gamma$  la risalita relativistica è compensata dall'effetto densità, la perdita di energia tende ad un valore costante;

---

<sup>2</sup>per uno spessore finito  $\Delta x$ , lo spessore di massa  $\rho \Delta x$  si può interpretare come la quantità di massa coperta da una superficie unitaria di materiale

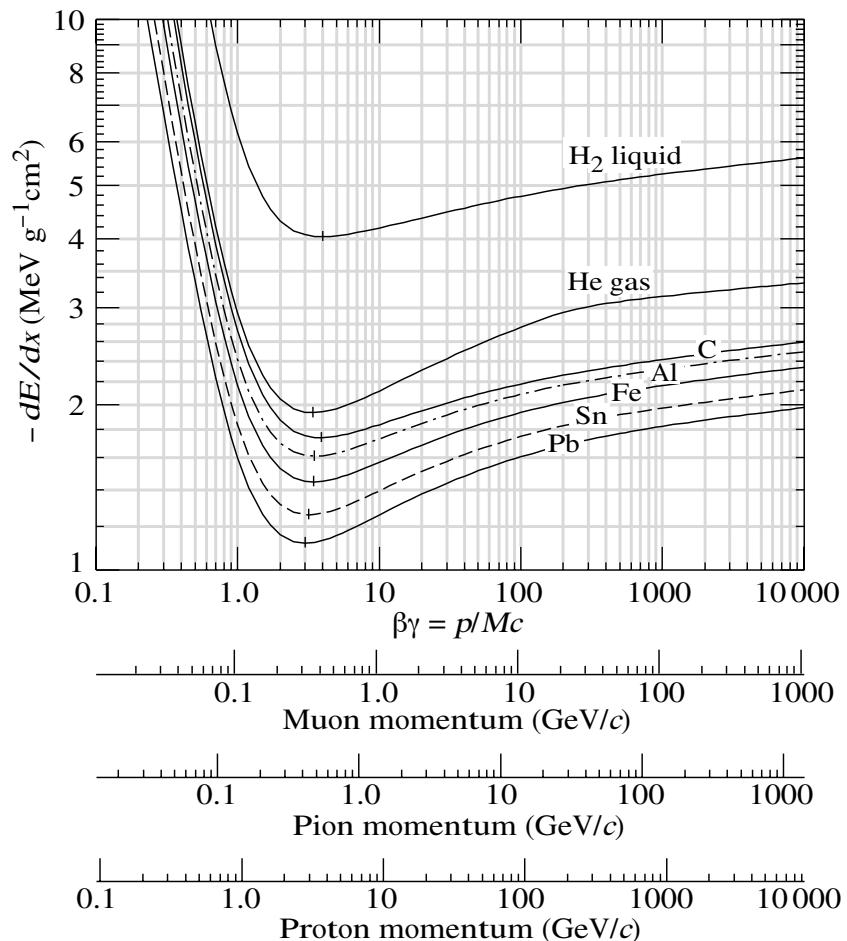


Figura 4.2: Andamento della perdita di energia per ionizzazione (formula di Bethe-Block) in funzione del prodotto  $\beta\gamma$  per diversi materiali (idrogeno, elio, carbonio, alluminio, ferro, stagno e piombo). Le scale in basso riportano il corrispondente velore dell'impulso per muoni, pioni e protoni (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1).

- il  $\beta\gamma$  che corrisponde al minimo dipende debolmente dai diversi materiali tramite  $I$ ; per elementi non eccessivamente leggeri varia da 3.5 a 3 passando da  $Z = 7$  a  $Z = 100$ . La perdita di energia al minimo vale  $1 \div 2 \text{ MeV gr}^{-1} \text{ cm}^2$ ; le particelle al minimo di ionizzazione sono dette, in inglese, *minimum ionizing particles*, o semplicemente MIP.
- la perdita di energia è proporzionale al quadrato della carica della particella, per cui quella delle particelle  $\alpha$  ( $z=2$ ) sarà 4 volte quella del protone;
- la massa della particella incidente entra nella formula solo tramite il parametro  $\beta\gamma = p/Mc$ , per cui la formula, espressa in termini di  $\beta\gamma$ , è universale (con l'eccezione degli elettroni, vedi oltre); in termini dell'energia o dell'impulso della particella incidente, viceversa, la perdita di energia di particelle di massa diversa si otterrà da una semplice traslazione della scala delle ascisse.

Notiamo infine che la formula di Bethe-Block esprime la perdita media di energia, che essendo un processo stocastico dovuto a più urti elementari, sarà soggetta a fluttuazioni. Notiamo anche che, mentre per spessori grandi il teorema del limite centrale garantisce che le fluttuazioni siano gaussiane, per piccoli spessori, o per materiali a bassa densità, compaiono code per perdite di energia elevate, la cui teoria è stata sviluppata da Landau (*code di Landau*).

### 4.3 Il percorso residuo

Si definisce *percorso residuo* (o, in inglese, *range*) il cammino che una particella può compiere prima di perdere tutta la sua energia cinetica. Se l'energia depositata in un tratto  $dx$  è data da  $dE = -(dE/dx)dx$ , possiamo scrivere che  $dx = dE/(-(dE/dx))$ , per cui il range si può ottenere integrando il  $dx$  su tutta l'energia depositata, ossia fino ad  $E$ :

$$R(E) = \int dx = \int_0^E \frac{dE}{(-dE/dx)_{\text{ion}}} \quad (4.15)$$

e può essere calcolato numericamente per le diverse particelle ed i diversi materiali. Le fluttuazioni statistiche sulle perdite per ionizzazione si ripercuotono su  $R(E)$ , dando luogo al cosiddetto *straggling*. Il range ha un senso

fisico soltanto per energie al di sotto delle quali le particelle incidenti non siano soggette ad altre interazioni.

Il calcolo del range ha acquistato una particolare importanza con lo sviluppo delle applicazioni mediche della ionizzazione delle particelle adroniche. E' importante notare che, data la dipendenza da  $\beta$  del  $dE/dx$  il deposito di energia si concentra per  $\beta\gamma < 1$ , dove le perdite crescono rapidamente man mano che la particella rallenta: a fine percorso la particella deposita tutta la sua energia residua in una regione molto limitata. Modulando opportunamente l'energia incidente, è quindi possibile localizzare il deposito di energia sui tessuti che richiedono il trattamento.

## 4.4 La diffusione coulombiana multipla

Come abbiamo sottolineato nel par. 4.1, i nuclei del mezzo non contribuiscono alle perdite per ionizzazione. Sappiamo altresì che l'effetto di questa interazione è di deviare la particella di un angolo  $\theta$  secondo la sezione d'urto (3.29). Attraversando uno spessore finito di materiale, la particella, oltre che perdere energia trasferendola agli elettroni del mezzo (ionizzazione) subirà quindi un gran numero di deflessioni per urti elastici con i nuclei, cambiando la propria direzione (*diffusione multipla*). La distribuzione dell'angolo di diffusione risulta essere approssimativamente una gaussiana centrata intorno a zero, con varianza

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \frac{\int \vartheta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \quad (4.16)$$

mentre si può definire un angolo medio di diffusione come la radice quadrata della varianza:

$$\bar{\vartheta} = \sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} = 21 \text{MeV} \frac{z}{c\beta p} \sqrt{\frac{x}{X_0}} \quad (4.17)$$

dove  $X_0$  è la lunghezza di radiazione (vedi par. 4.6), definita da

$$\frac{1}{X_0} = 4r_e^2 \alpha \frac{N_A Z^2 \rho}{A} \ln(183Z^{-1/3}). \quad (4.18)$$

La formula (4.17) fornisce l'angolo nello spazio, mentre per avere quello su un piano si deve dividere per un fattore  $\sqrt{2}$ .

## 4.5 Effetto Cherenkov

Una particella carica che viaggia in un mezzo con una velocità superiore alla velocità della luce in quel mezzo (che non può quindi essere il vuoto) emette una radiazione luminosa detta *effetto Cherenkov*. Il motivo di tale emissione può essere ricondotto agli effetti di polarizzazione e depolarizzazione del mezzo, associati al passaggio della carica. Questi moti di carica intorno ad ogni punto toccato dalla carica in moto generano una serie di onde sferiche (che in un mezzo non dispersivo viaggiano con velocità di gruppo  $v_g = c/n$ , dove  $n > 1$  è l'indice di rifrazione) il cui inviluppo costituisce un fronte d'onda conico, come mostrato nella figura 4.3. Il fenomeno è analogo alla formazione di una scia da parte di una barca che si muova con velocità maggiore di quella delle onde sulla superficie dell'acqua. Per semplice costruzione geometrica, l'angolo di emissione della luce Cherenkov è dato dalla relazione

$$\beta c \cos \theta_C = v_g = \frac{c}{n} \rightarrow \cos \theta_C = \frac{1}{\beta n} \quad (4.19)$$

da cui risulta immediatamente che l'effetto Cherenkov ha una soglia data da  $\beta_{th} = 1/n$  e permette quindi di selezionare particelle sopra tale soglia. E' altrettanto immediato che per particelle relativistiche ( $\beta \simeq 1$ ) l'angolo di emissione è indipendente dall'impulso e vale  $\cos \theta_C = 1/n$ .

In un fascio di particelle selezionato in impulso, l'effetto Cherenkov permette di selezionare le particelle in base alla loro massa. Infatti si ricava:

$$p_{th} = mc\beta_{th}\gamma_{th} = mc\beta_{th}\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{th}^2}} = \frac{mc}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (4.20)$$

per cui, dato l'impulso  $p$ , la condizione per l'emissione di luce Cherenkov  $p > p_{th}$  diventa

$$mc^2 < pc\sqrt{n^2 - 1}. \quad (4.21)$$

Per discriminare particelle relativistiche ( $pc \gg mc^2$ ), è quindi necessario che  $n$  sia prossimo a 1. A questo scopo si possono usare particolari miscele di gas, con il vantaggio che, essendo l'indice di rifrazione dipendente dalla pressione, il valore della soglia può essere facilmente variato agendo sulla pressione della miscela.

Il numero di fotoni emessi per unità di lunghezza e unità di energia è dato da:

$$\frac{d^2N_\gamma}{dxdE} = \frac{\alpha z^2}{\hbar c} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n(E)^2} \right) = \frac{\alpha z^2}{\hbar c} \sin^2 \theta_C \quad (4.22)$$

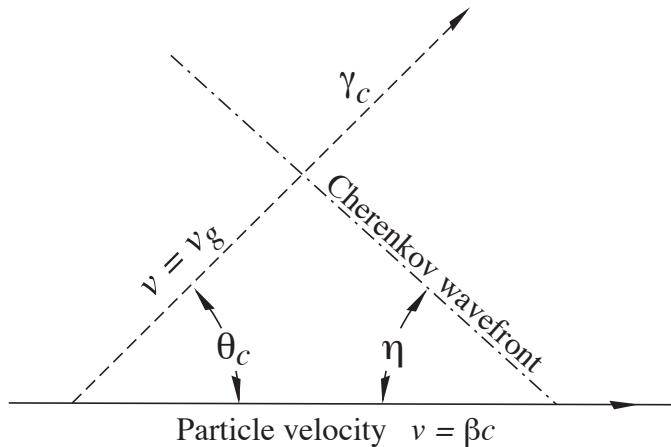


Figura 4.3: Costruzione del fronte d'onda dell'effetto Cherenkov:  $\theta_C$  è la direzione della luce,  $\eta$  è l'angolo di apertura del fronte d'onda conico (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1).

che può essere riscritto in termini di lunghezza d'onda  $\lambda = c/\nu = hc/E$  come

$$\frac{d^2 N_\gamma}{dx d\lambda} = \frac{2\pi\alpha z^2}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n(\lambda)^2} \right). \quad (4.23)$$

## 4.6 Perdite di energia per elettroni

Abbiamo già detto che, nel caso degli elettroni, la formula di Bethe-Block deve essere modificata per tener conto dell'identità tra il proiettile ed il bersaglio. Un effetto più importante nasce però dal fatto che, per effetto degli urti elastici col nucleo, l'accelerazione che una particella carica subisce nel momento della deflessione provoca l'emissione di radiazione elettromagnetica. La teoria di questo processo è stata elaborata da Bethe e Heitler nel 1934. A parità della forza coulombiana del nucleo, l'accelerazione sarà tanto maggiore quanto minore sarà la massa della particella, per cui la perdita di energia per irraggiamento (spesso indicato col termine tedesco *Bremsstrahlung*) sarà molto maggiore per gli elettroni che per le altre particelle. La perdita di energia per irraggiamento degli elettroni può essere espressa dalla

formula:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad} \simeq \frac{E}{X_0} \simeq 4r_e^2 \alpha \frac{N_A Z^2 \rho}{A} \ln(183Z^{-1/3}) E \quad (4.24)$$

e questo contributo va a sommarsi a quello dovuto alla ionizzazione. Come si vede, il contributo radiativo alle perdite di energia degli elettroni è lineare in  $E$ , e dunque per un certo valore di  $E$  queste perdite supereranno quelle dovute alla ionizzazione, che tendono invece a divenire costanti. Il valore di  $E$  per il quale le perdite per ionizzazione egualano quelle per radiazione prende il nome di *energia critica*,  $\epsilon_c$ . Assumendo esatta l'uguaglianza espressa dalla (4.24), che è invece valida solo ad alta energia, l'energia critica rappresenterebbe l'energia per la quale la perdita per ionizzazione per lunghezza di radiazione uguaglia l'energia dell'elettrone (definizione di Rossi dell'energia critica), come illustrato in figura 4.4. L'energia critica per gli elettroni può essere espressa come  $\epsilon_c \simeq 600/Z$  MeV, per cui varia dalle centinaia alla decina di MeV per le diverse sostanze. Il corrispondente valore per particelle pesanti è molto maggiore, per cui queste perdite di energia sono trascurabili con l'eccezione dei muoni di alta energia.

Non è un caso che nella (4.24) compaia la stessa costante che abbiamo incontrato nello scattering multiplo, poiché in entrambi i casi l'origine del processo è la diffusione nel campo coulombiano del nucleo. Integrando la (4.24) si può ottenere l'andamento dell'energia dell'elettrone,  $E = E_0 e^{-x/X_0}$ . La (4.24) può essere quindi assunta come definizione della *lunghezza di radiazione*  $X_0$  che risulta quindi la distanza alla quale l'energia dell'elettrone si riduce di un fattore  $1/e$  per effetto delle sole perdite per radiazione. Ricordiamo che il segno di uguaglianza nella (4.24) vale solo asintoticamente, per cui la definizione appena data richiede che si considerino elettroni di alta energia (si veda la figura 4.4). Le perdite di energia degli elettroni in piombo sono riportate in figura 4.5.

In ogni singola interazione dell'elettrone col nucleo verranno emessi uno o più fotoni. Lo spettro di energia dei fotoni irraggiati va da 0 a  $E$  con probabilità inversamente proporzionale ad  $E$ , mentre l'angolo medio di emissione è dato da  $\langle\vartheta\rangle \simeq m_e c^2 / E_0$ , ed è quindi indipendente dalla energia del fotone emesso.

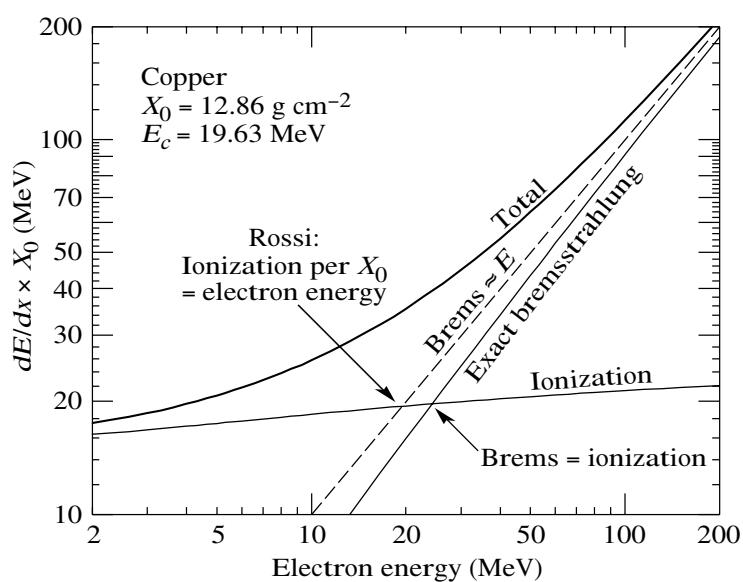


Figura 4.4: Confronto tra le perdite per ionizzazione e quelle per irraggiamento degli elettroni in rame. La differenza tra le due definizioni dell’energia critica rispecchia la circostanza che la (4.24) è valida solo asintoticamente, come si vede dall’andamento delle due curve dell’irraggiamento, calcolate usando l’espressione completa e quella asintotica (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1).

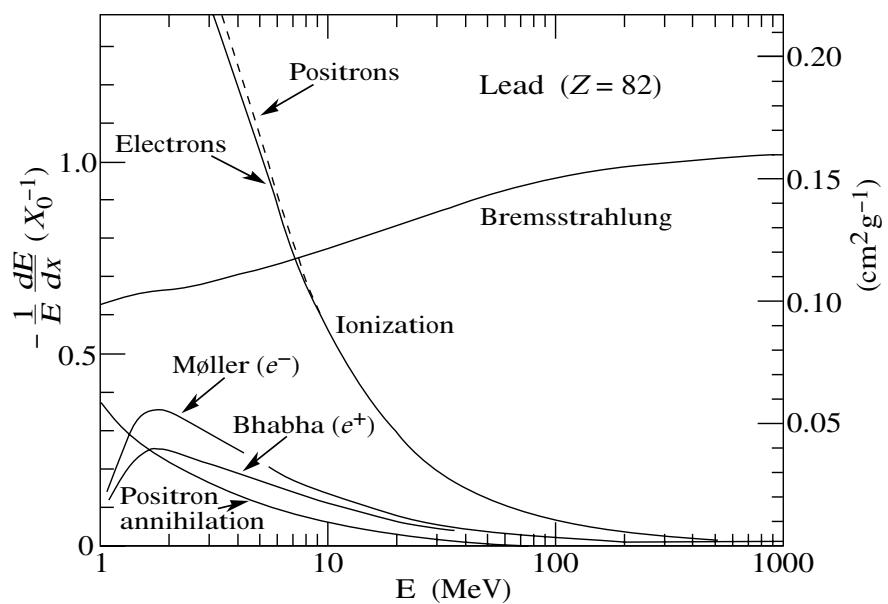


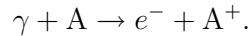
Figura 4.5: Perdite di energia per elettroni in piombo, espresse come  $-\frac{1}{E} \frac{dE}{dx}/X_0$ : in queste unità, il valore asintotico delle perdite dovute all'irraggiamento è 1 (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1).

## 4.7 Interazione dei fotoni con la materia

Come per gli elettroni, anche nell'interazione dei fotoni con la materia si devono distinguere le interazioni con gli elettroni da quelle con i nuclei del mezzo. Nel primo caso, il fotone può essere assorbito dall'elettrone e scomparire, liberando un elettrone (effetto photoelettrico) o cedere parte dell'energia all'elettrone (effetto Compton). Nel secondo, il fotone nel campo del nucleo può materializzarsi in una coppia elettrone-positrone (produzione di coppie).

### 4.7.1 Effetto photoelettrico

Ricordiamo che l'effetto photoelettrico è considerato la prima dimostrazione sperimentale della natura corpuscolare della luce, che risulta costituita da quanti di energia  $E_\gamma = h\nu$ , proporzionale alla frequenza della radiazione luminosa. L'effetto photoelettrico può essere interpretato come una reazione



Notiamo che l'assorbimento del fotone richiede la presenza del nucleo: la reazione  $\gamma + e^- \rightarrow e^-$  non può avvenire, perché la massa invariante dello stato iniziale è maggiore della massa invariante finale, che coincide con la massa dell'elettrone. Il nucleo pesante, come al solito, assorbe impulso senza assorbire energia: tutta l'energia del fotone è trasferita all'elettrone. Ne risulta che l'impulso assorbito dal nucleo deve essere tanto maggiore quanto maggiore è l'energia del fotone, per cui ci aspettiamo che la probabilità dell'effetto photoelettrico diminuisca al crescere dell'energia del fotone. L'effetto photoelettrico richiede che l'energia del fotone sia maggiore dell'energia di legame dell'elettrone. Sopra la soglia, e per energie  $E_\gamma \ll m_e c^2$  dove l'effetto photoelettrico è dominante, la sezione d'urto è

$$\sigma_{p.e.} \propto Z^5 \frac{1}{E_\gamma^3} \quad (4.25)$$

ed è quindi fortemente dipendente dal numero atomico del materiale. La sezione d'urto dell'effetto photoelettrico su carbonio e piombo è riportata nella figura 4.6.

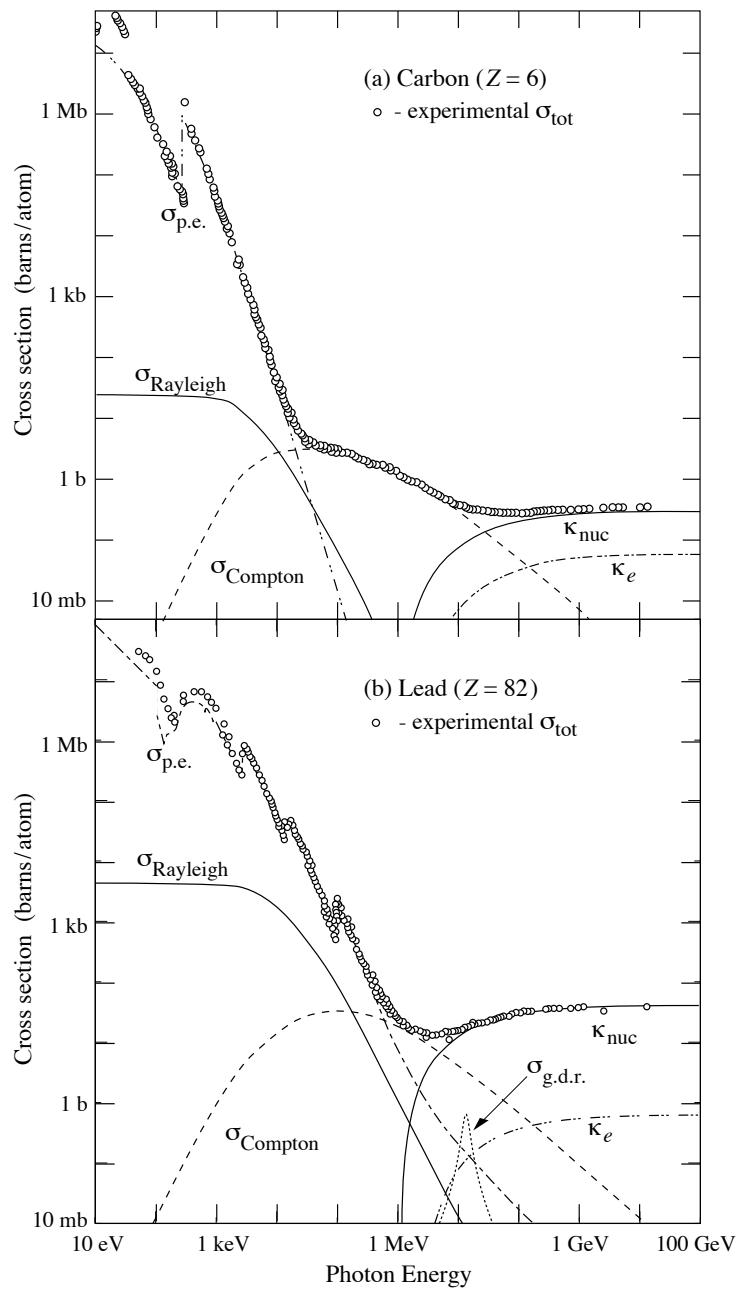


Figura 4.6: Sezioni d'urto (in barn per atomo) per interazioni di fotoni in carbonio (a) e in piombo (b) (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1).

### 4.7.2 Effetto Compton

Per energie molto maggiori dell'energia di legame, gli elettroni si possono considerare liberi e possono interagire con i fotoni tramite il processo elastico

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$

dando luogo all'effetto Compton. L'elettrone assorbe parte dell'energia del fotone incidente, che varia quindi la sua frequenza. La scoperta dell'effetto Compton (1923) è la prova definitiva che la radiazione luminosa non può essere interpretata come un fenomeno puramente ondulatorio, per il quale la frequenza deve rimanere sempre la stessa.

Un semplice calcolo di cinematica relativistica permette di ricavare la relazione tra energia ed angolo del fotone diffuso. Chiamando  $p$  l'impulso finale dell'elettrone,  $\varphi$  l'angolo di questo con la direzione del fotone incidente,  $\nu$  e  $\nu'$  le frequenza iniziale e finale del fotone e  $\vartheta$  l'angolo del fotone uscente e ricordando che l'impulso di un fotone è dato da  $h\nu/c$ , la conservazione dell'impulso longitudinale e trasverso si scrive:

$$\frac{E_\gamma}{c} = \frac{E'_\gamma}{c} \cos \vartheta + p \cos \varphi \quad (4.26)$$

$$0 = \frac{E'_\gamma}{c} \sin \vartheta - p \sin \varphi \quad (4.27)$$

ovvero

$$p \cos \varphi = \frac{E_\gamma}{c} - \frac{E'_\gamma}{c} \cos \vartheta \quad (4.28)$$

$$p \sin \varphi = \frac{E'_\gamma}{c} \sin \vartheta \quad (4.29)$$

che sommate in quadratura e rimoltiplicate per  $c^2$  danno:

$$(pc)^2 = (E_\gamma)^2 + (E'_\gamma)^2 - 2E_\gamma E'_\gamma \cos \vartheta. \quad (4.30)$$

Indicando con  $T = E_\gamma - E'_\gamma$  l'energia cinetica trasferita all'elettrone, e considerando che

$$E^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2 \rightarrow (m_e c^2 + T)^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (4.31)$$

otteniamo anche

$$(pc)^2 = E_e^2 - m_e^2 c^4 = T^2 + 2T m_e c^2 = (E_\gamma)^2 + (E'_\gamma)^2 - 2E_\gamma E'_\gamma + 2(E_\gamma - E'_\gamma)m_e c^2 \quad (4.32)$$

e uguagliando gli ultimi membri delle (4.30) e (4.32) otteniamo infine

$$T = E_\gamma - E'_\gamma = \frac{E_\gamma E'_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta) \quad (4.33)$$

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) \quad (4.34)$$

che esprime la variazione della lunghezza d'onda del fotone in funzione dell'angolo di diffusione di questo, per effetto della diffusione Compton su elettrone. Notiamo che questa variazione è indipendente dall'energia del fotone incidente (e dalle proprietà del mezzo) e dipende invece dalla quantità  $\lambda_C = h/m_e c = 2.43 \cdot 10^{-12}$  m, che prende il nome di *lunghezza d'onda Compton* dell'elettrone (notiamo anche che vale la relazione  $\lambda_C = 2\pi r_e/\alpha$ ). Dal punto di vista del fotone, la (4.33) può essere interpretata dicendo che per subire una variazione significativa di lunghezza d'onda, il fotone deve avere una lunghezza d'onda confrontabile con  $\lambda_C$ . Se traduciamo questa lunghezza d'onda in energia, abbiamo  $h\nu \sim hc/\lambda_C = m_e c^2$ , ossia il fotone deve avere una energia dell'ordine di quella corrispondente alla massa dell'elettrone.

Dalla (4.33) ricaviamo l'energia del fotone uscente:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)}. \quad (4.35)$$

mentre il massimo dell'energia trasferita all'elettrone si ha per  $\vartheta = 180^\circ$ :

$$T^{\max} = E_\gamma \frac{E_\gamma}{\frac{1}{2} m_e c^2 + E_\gamma}. \quad (4.36)$$

La sezione d'urto differenziale in funzione dell'angolo di diffusione dell'elettrone può essere calcolata in elettrodinamica quantistica (formula di Klein-Nishina, 1928):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\gamma} = \frac{1}{2} r_e^2 \frac{Z}{A} \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \left( 1 + \left( \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \right)^2 + \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \sin^2 \vartheta_\gamma \right) \quad (4.37)$$

che, integrata, dà la sezione d'urto totale, che va come  $1/E_\gamma$  per  $E_\gamma \gg m_e c^2$ . La sezione d'urto Compton su carbonio e piombo è riportata nella figura 4.6.

### 4.7.3 Produzione di coppie

Quando  $E_\gamma > 2m_e c^2$ , per il fotone si apre la soglia per la produzione di coppie elettrone-positrone. La creazione di coppie  $e^+e^-$  è la manifestazione sperimentale della teoria di Dirac. La scoperta del positrone sarà discussa nel seguito (par. 6.2), mentre le interazioni di questa particella con la materia sono identiche a quelle degli elettroni sopra descritte. La creazione di coppie non può avvenire nel vuoto: per la differenza tra la massa invariante iniziale (che deve essere nulla) e dello stato finale che contiene i due elettroni, la produzione deve avvenire in presenza di un nucleo che assorba l'impulso in eccesso (il processo può avvenire anche in presenza degli elettroni del mezzo, ma in tal caso l'energia assorbita dall'elettrone di rinculo è molto maggiore di quella del nucleo, riducendo quindi quella a disposizione per la creazione di coppie).

Nel calcolo della sezione d'urto compaiono le stesse quantità che abbiamo incontrato nel caso dell'irraggiamento degli elettroni e della diffusione multipla. Ad alte energie, la sezione d'urto è proporzionale a  $Z^2 \ln 183/Z^{1/3}$ , e può quindi essere scritta come

$$\sigma_{coppie} \simeq \frac{7}{9} \frac{1}{X_0} \frac{A}{\rho N_A}. \quad (4.38)$$

La sezione d'urto per produzione di coppie su carbonio e piombo è riportata nella figura 4.6:  $\kappa_{nuc}$  indica la sezione d'urto sui nuclei e  $\kappa_e$  quella sommata su tutti gli elettroni di un atomo.

L'analogia con l'irraggiamento è completata dall'angolo medio di emissione delle due particelle della coppia, che è lo stesso dei fotoni di Bremsstahlung:  $\langle \vartheta \rangle \simeq m_e c^2 / E_\gamma$ .

## 4.8 Sciami elettromagnetici

Come abbiamo visto nei precedenti paragrafi, ad alta energia i processi dominanti nell'interazione di elettroni e fotoni con la materia sono l'irraggiamento e la produzione di coppie. Entrambi questi processi sono regolati da una scala di lunghezza che è data dalla lunghezza di radiazione  $X_0$ . Se consideriamo quindi un elettrone o un fotone di alta energia che colpiscono un blocco di materiale con uno spessore di qualche  $X_0$ , possiamo immaginare che si sviluppi un processo di moltiplicazione, per cui un fotone produce una coppia

$e^+e^-$ , mentre ciascun  $e^+$  o  $e^-$  emetterà parte della sua energia sotto forma di un ulteriore fotone. Si avrà quindi un processo a cascata, che prende il nome di *cascata elettromagnetica* o *sciame elettromagnetico*. Il percorso tra un processo moltiplicativo e il successivo sarà dell'ordine di  $X_0$ . I prodotti di tali processi avranno energie via via minori man mano che cresce il numero delle generazioni. Quando gli elettroni ridurranno la loro energia al di sotto dell'energia critica, diventeranno dominanti le perdite di energia per ionizzazione, e la cascata si arresterà.

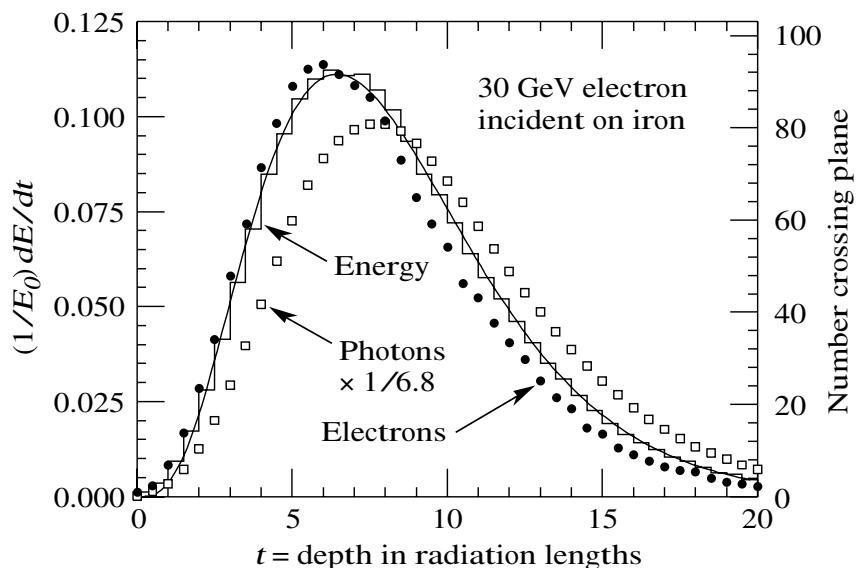


Figura 4.7: Simulazione Montecarlo dello sviluppo longitudinale di uno sciame elettromagnetico, in termini di energia depositata e numero di elettroni e fotoni con energia superiore a 1.5 MeV. La curva continua è un fit con una funzione tipo (4.39). (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1)

Ci si aspetta dunque che il fenomeno dipenda dalle caratteristiche del mezzo solo attraverso  $X_0$  e  $\epsilon_c$ , almeno in prima approssimazione, per cui se si misura l'energia incidente in  $E_0/\epsilon_c$  e lo spessore in  $t = x/X_0$ , lo sviluppo longitudinale dello sciame sia lo stesso per tutti i materiali. Questo sviluppo

è ben rappresentato (si veda la figura 4.7) da una funzione del tipo

$$f(t) \propto E_0/\epsilon_c \cdot t^a e^{-bt} \quad (4.39)$$

( $f(t)$  può rappresentare l'energia depositata o la popolazione di particelle alla profondità  $t$ ), dove  $b$  è una quantità che vale circa 0.5 e dipende leggermente dal materiale, mentre  $a$  dipende dall'energia  $E_0$ . Notiamo che la funzione definita dalla (4.39) deve avere il massimo a  $t_{\max} = a/b$ . Semplici modelli analitici, confermati dalle simulazioni MonteCarlo, mostrano che il massimo deve dipendere logaritmicamente dall'energia:  $t_{\max} = \ln(E_0/\epsilon_c) + c$  (dove  $c$  è una quantità che differisce di circa  $1X_0$  tra elettroni e fotoni) per cui, uguagliando le due espressioni di  $t_{\max}$ , si può ricavare il valore di  $a$ .

Lo sviluppo laterale dello sciame, che dipende dalla diffusione coulombiana multipla, risulta invece indipendente dall'energia incidente e può essere quantificato dal *raggio di Molière*, definito come il raggio di un cilindro che contiene il 90% dell'energia dello sciame e che vale  $R_M \simeq 21X_0/\epsilon_c(\text{MeV})$ .

## 4.9 Sciami adronici

Anche le particelle ad interazione forte danno luogo a moltiplicazioni in cascata, che prendono il nome di *sciami adronici*. I meccanismi alla base degli sciami adronici sono più complessi di quelli degli sciami elettromagnetici. Comunque anche per gli sciami adronici esiste una scala di lunghezza, data dalla *lunghezza di interazione*, ossia dal cammino libero medio tra una interazione adronica e la successiva. Questa grandezza, espressa in  $\text{g cm}^{-2}$ , cresce con  $Z$ , mentre  $X_0$  decresce, cosicché quest'ultima, che è confrontabile per l'idrogeno, diventa via via più piccola dell'altra. In assorbitori pesanti, gli sciami adronici sono quindi molto più estesi di quelli elettromagnetici.

## 4.10 Rivelatori di particelle

La rivelazione del passaggio di una particella richiede un trasferimento di energia dalla particella stessa allo strumento di misura, per cui le tecniche di rivelazione devono essere basate sui processi che abbiamo esaminato nei paragrafi precedenti. La perdita di energia per ionizzazione può essere sfruttata in vari modi:

- in un gas, la produzione di ioni positivi e negativi può essere messa in luce raccogliendo la corrente generata dalla deriva degli ioni in un campo elettrico. Se il campo è sufficientemente intenso, il segnale può essere amplificato attraverso la moltiplicazione in cascata degli ioni, fino ad arrivare alla scarica. Il contatore di Geiger-Mueller (1913) è il primo esempio di questo tipo di rivelatori.
- la eccitazione degli atomi o delle molecole di un solido può dar luogo a processi di diseccitazione radiativa con emissione di segnali ottici: un materiale di questo tipo è detto *scintillatore*. Gli schermi fosforescenti utilizzati agli albori della fisica atomica possono essere considerati i primi esempi di contatori a scintillazione. Negli scintillatori moderni il segnale luminoso è trasformato in un segnale elettronico attraverso un fotorivelatore, basato essenzialmente sull'effetto fotoelettrico, con successiva raccolta della corrente di fotoelettroni emessi dal fotocatodo.
- in un semiconduttore, la ionizzazione comporta la formazione di coppie elettrone-lacuna: su una giunzione polarizzata inversamente, questo processo dà luogo ad una corrente elettrica che può essere raccolta e misurata.
- L'emissione di luce Cerenkov in un gas o in un materiale trasparente, con successiva conversione del segnale attraverso un fotorivelatore, è un'altra modalità di rivelazione molto utilizzata: in essa si può sfruttare la soglia dell'effetto, dipendente dalla massa della particella, che permette di selezionare particelle diverse.

Mentre negli esperimenti pionieristici le scoperte fondamentali potevano essere associate alla rivelazione del semplice passaggio di una particella, in generale gli esperimenti moderni si propongono di determinare il maggior numero possibile di proprietà dello stato finale della reazione che si vuole studiare. L'esperimento ideale è quello che misura il quadrimpulso di tutte le particelle dello stato finale: i diversi rivelatori che si possono effettivamente realizzare sono in grado di misurare l'energia, l'impulso e la traccia spaziale di alcune categorie di particelle. Un esperimento richiede quindi in genere la combinazione di più tecniche sperimentali per raggiungere determinati obiettivi.

#### 4.10.1 Rivelatori di traccia

La possibilità di visualizzare le tracce delle particelle ha sempre costituito un potente strumento di indagine delle interazioni. I primi dispositivi visualizzanti richiedevano di riprendere vere e proprie fotografie delle tracce in questione, soffrendo di una limitata risoluzione temporale e di lunghi tempi morti, mentre negli ultimi decenni si sono sviluppate tecniche elettroniche che permettono di registrare in tempi brevissimi le informazioni delle tracce di un gran numero di eventi.

Il primo strumento utilizzato a questo scopo è la *camera a nebbia* o camera di Wilson (1912), nella quale una rapida espansione di un vapore soprasaturo genera la formazione di goccioline di liquido intorno agli ioni liberati dal passaggio delle particelle. La camera opportunamente illuminata può essere fotografata e la traccia delle particelle è visualizzata dall'insieme delle gocce. La tipica risoluzione spaziale è di  $500 \mu\text{m}$ . Dalla densità di goccioline si può anche ricavare una stima dell'energia persa per ionizzazione per unità di percorso.

Nella *camera a bolle* (Glaser 1952) si utilizza invece un liquido nel quale la pressione idrostatica è portata per qualche millisecondo al di sotto della tensione di vapore. Lungo la traiettoria della particella, sempre in corrispondenza degli ioni, si formano delle bollicine che possono essere fotografate. La risoluzione spaziale va dalla decina alle centinaia di  $\mu\text{m}$ .

Le emulsioni nucleari (Powell 1939) sono invece gelatine nelle quali sono immersi grani di bromuro di argento. Gli elettroni dovuti alla ionizzazione trasformano i grani in argento metallico. In questo caso le tracce sono quindi memorizzate in maniera permanente nelle emulsioni, che devono successivamente essere osservate al microscopio alla ricerca degli eventi interessanti. La risoluzione tipica è dell'ordine del  $\mu\text{m}$ . Nelle emulsioni, la determinazione della ionizzazione specifica può essere abbastanza precisa, permettendo di risalire al  $\beta$  della traccia rivelata.

Una tecnica intermedia tra quelle visualizzanti e quelle elettroniche è la *camera a scintilla*, formata da una coppia di elettrodi separati da un gas nobile. Un forte campo elettrico viene applicato in maniera impulsiva dopo il passaggio delle particelle, dando luogo ad una scarica a scintilla che può essere fotografata. Una variante delle camere a scintilla è la *camera a streamer*.

Nelle tecniche elettroniche, la carica elettrica, prodotta dalla ionizzazione dovuta al passaggio della particella in un gas, un liquido o un solido, viene raccolta con opportuni campi elettrici.

Nelle *camere a fili*, una serie di fili (anodi), con spaziature dell'ordine del millimetro, è immersa in un gas contenuto tra due strati metallici (catodi). Il segnale è costituito dalla corrente prodotta dagli ioni positivi e negativi. Nelle *camere a deriva*, la precisione spaziale è aumentata misurando il tempo di transito delle cariche ioniche: conoscendo la velocità di deriva degli ioni nel gas, si può ricavare con precisione la posizione della traccia rispetto al filo.

Risoluzioni spaziali ancora più spinte (dell'ordine della decina di  $\mu\text{m}$ ) si possono ottenere utilizzando giunzioni semiconduttrici finemente segmentate. Questa tecnica è utilizzata in particolare per ricostruire vertici secondari in prossimità della zona in cui avviene l'interazione primaria.

#### 4.10.2 Spettrometri magnetici

La deflessione di una particella carica in campo magnetico è uno dei primi metodi utilizzati per determinare le caratteristiche delle particelle, come abbiamo visto per la scoperta dell'elettrone. Il moto è regolato dalla forza di Lorentz

$$f_L = \frac{dp}{dt} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (4.40)$$

Se la derivata di un vettore è ortogonale al vettore stesso, il modulo del vettore è costante. Inoltre, se  $B$  è ortogonale a  $v$ , la traiettoria è una circonferenza di raggio  $R = p/qB$  (essendo  $mv^2/R = qvB$ ), da cui ricaviamo  $p = qBR$ . Moltiplicando per  $c$ , assumendo che la carica sia  $e$  ed utilizzando delle unità appropriate per l'impulso si ottiene

$$pc(\text{GeV}) = 0.3 \cdot B(\text{Tesla}) \cdot R(\text{m}). \quad (4.41)$$

Un rivelatore di traccia in campo magnetico permette dunque di misurare l'impulso di una particella ed è detto *spettrometro magnetico*.

Se assumiamo che la deflessione sia piccola, il modo più elementare di eseguire la misura è di determinare lo spostamento  $x$  subito dalla particella rispetto alla direzione iniziale dopo un percorso  $L$  in un campo magnetico  $B$ : se chiamiamo  $\vartheta$  l'angolo di cui è ruotato il raggio della circonferenza, avremo  $R \simeq L/\vartheta$  mentre  $x \simeq L\vartheta/2$ , per cui la (4.41) diventa

$$pc = 0.3 \frac{BL^2}{2x} \quad (4.42)$$

mentre l'incertezza sull'impulso è data da

$$\sigma(cp) = 0.3 \frac{BL^2}{2x^2} \sigma(x) \rightarrow \frac{\sigma(cp)}{cp} = \frac{2cp}{0.3 \cdot BL^2} \sigma(x) \quad (4.43)$$

da cui si vede che il potere risolutivo sull'impulso è direttamente proporzionale alla risoluzione sulla posizione di uscita ed è tanto migliore quanto maggiore è  $BL^2$ , che è quindi il parametro che caratterizza lo spettrometro. Si vede anche che la risoluzione peggiora linearmente con l'aumentare dell'impulso da misurare.

Naturalmente gli spettrometri che permettono di ricostruire nel dettaglio la traccia conducono a determinazioni più sofisticate della curvatura; tuttavia le caratteristiche che abbiamo ricavato sopra, ossia la dipendenza da  $BL^2$  e il peggioramento della risoluzione al crescere dell'impulso sono presenti praticamente in tutti i tipi di spettrometri.

### 4.10.3 Calorimetri

I *calorimetri* sono strumenti disegnati per contenere una larga frazione degli sciami di particelle e devono contenere un elemento rivelatore il cui segnale sia proporzionale all'energia totale depositata dallo sciame nel calorimetro. Data la differenza di scala tra gli sciami adronici ed elettromagnetici, si hanno due tipologie di calorimetri ben distinte tra loro.

Un esempio significativo di calorimetro elettromagnetico è costituito da uno scintillatore pesante, lungo un numero sufficiente di lunghezze di radiazione e di dimensioni trasversali di qualche raggio di Molière. In un simile rivelatore il segnale di scintillazione è direttamente proporzionale all'energia totale depositata nel calorimetro per ionizzazione, e quindi all'energia incidente. Poiché il processo di generazione del segnale è dato dalla combinazione di un gran numero di processi elementari, la fluttuazione del segnale raccolto sarà di natura poissoniana, proporzionale dunque alla radice quadrata del numero dei processi elementari. Poiché anche questi sono proporzionali alla energia incidente, la risoluzione relativa in energia è del tipo

$$\sigma(E)/E \propto 1/\sqrt{(E)} \quad (4.44)$$

e migliora quindi all'aumentare dell'energia incidente. Un calorimetro di questo tipo è detto *omogeneo*. Per motivi di costo, può essere utile combinare un materiale passivo pesante con uno scintillatore leggero: in questo caso

si parla di *calorimetro a campionamento*. La risoluzione è ancora espressa dalla (4.44), ma con valori tipicamente superiori, essendo minore il numero dei processi elementari che sono effettivamente campionati dal rivelatore.

Per gli sciami adronici non si utilizzano mai calorimetri omogenei, non solo per le dimensioni molto maggiori che sarebbero necessarie e che renderebbero estremamente costoso un simile rivelatore, ma soprattutto perché le fluttuazioni intrinseche degli sciami adronici sono molto superiori e dominano comunque la risoluzione.

# Capitolo 5

## Interazioni

### 5.1 Particelle e forze

La fisica delle particelle studia i costituenti fondamentali della materia e le forze che agiscono tra di loro. La nostra conoscenza dei costituenti di cui la materia è formata è considerevolmente cambiata nel tempo poiché si sono scoperte via via nuove “sotto-strutture”. Come abbiamo già visto, la primitiva concezione dell’atomo come la più piccola unità della materia fu soppiantata tra il 1897 ed il 1911 dalla scoperta dell’elettrone e del nucleo. Successivamente si è scoperto che il nucleo è costituito a sua volta da protoni e neutroni. Come vedremo, anche i nucleoni risultano composti da entità più elementari, i *quark*. Oggi sappiamo che elettroni e quark hanno dimensioni minori di  $10^{-18}$  m e che tutta la materia ordinaria è fatta di due tipi di quark, *up* e *down*, da elettroni e da neutrini, particelle neutre che emergono dai decadimenti  $\beta$ . Queste quattro particelle hanno spin 1/2 e sono dunque fermioni. Sappiamo anche che questa prima “famiglia” è replicata tre volte, con masse via via maggiori, e che per ciascuno di questi 12 fermioni esiste un corrispondente antifermione, di massa uguale ma di carica opposta, come predetto dalla teoria di Dirac.

Queste particelle interagiscono tra loro tramite quattro forze fondamentali:

- la forza gravitazionale, che è attrattiva e agisce su tutte le particelle dotate di massa;
- la forza elettromagnetica, che attrae o respinge le cariche elettriche, curva le traiettorie delle particelle cariche e tiene insieme gli atomi;

- la forza debole, responsabile della “mutazione” dei nuclei e delle particelle;
- la forza forte o di colore, che tiene insieme sia gli adroni che i nuclei, “incollando” tra loro rispettivamente i quark ed i nucleoni.

Nella tabella 5.1 sono elencate le quattro forze fondamentali ordinate per intensità relativa. La determinazione dei rapporti tra le intensità sarà discussa nel par. 5.10. Queste interazioni, nella comprensione odierna, avvengono come risultato dello scambio di bosoni, particelle di spin intero, da parte dei fermioni. Ciascuna interazione è causata da uno o più scambi di questi bosoni, indicati nella tabella. Ad ognuna delle prime tre interazioni è assegnata una carica: la carica forte, la carica elettrica e la carica debole. La carica forte è anche detta carica di colore o semplicemente colore. Ciascuna particella è soggetta a quelle interazioni di cui trasporta la relativa carica.

Tabella 5.1: Le interazioni fondamentali e le loro intensità relative. Per la stima di queste ultime, si veda il paragrafo 5.10.

interazione	bosoni	intensità
interazione forte	gluoni	1
interazione elettromagnetica	fotoni	$10^{-2}$
interazione debole	bosoni $W^\pm$ e $Z$	$10^{-7}$
gravità	gravitonni	$10^{-42}$

In sintesi, possiamo pensare di suddividere le particelle fondamentali in fermioni di spin  $1/2$ , che rappresentano le “sorgenti” dei campi di forza, e bosoni di spin  $1$ , i *bosoni di Gauge*<sup>1</sup>, che rappresentano i “mediatori” delle

---

<sup>1</sup>Il nome deriva dal fatto che l’elettrodinamica è invariante per trasformazioni di *gauge*, ossia di calibrazione, nel senso che sono possibili diverse scelte dei potenziali che conducono alle stesse espressioni per i campi elettromagnetici. L’esempio più semplice è il potenziale elettrostatico, che è sempre definito a meno di una costante. Nella elettrodinamica quantistica, la richiesta che i campi siano invarianti se moltiplicati per una fase complessa locale, ossia diversa per ogni posizione dello spazio (per cui si dovrebbe parlare in realtà di invarianza di fase, piuttosto che di invarianza di scala), richiede l’introduzione nella lagrangiana delle particelle cariche di un termine che rappresenta l’interazione tra il campo della particella carica e il potenziale vettore, che costituisce appunto il campo del fotone, per cui quest’ultimo è detto bosone di gauge. Anche gli altri bosoni di gauge sono introdotti in base ad analoghe richieste di invarianza delle relative lagrangiane.

diverse interazioni. Detto in altre parole: nella rappresentazione moderna i campi di forza sono “particelle di forza” scambiate tra particelle, o campi, di materia! Nei prossimi paragrafi discuteremo come lo scambio di bosoni può dare origine alle forze tra le particelle.

Ci sono ottime ragioni per considerare le forze deboli ed elettromagnetiche come due diversi aspetti di una unica forza “elettrodebole”, esattamente come le forze elettrostatiche e magnetiche sono diverse manifestazioni dell’elettromagnetismo. Inoltre c’è una speranza forte e fondata che alla fine la unificazione raggiunta per le forze elettromagnetiche e deboli possa essere estesa a tutte e quattro le forze presenti in natura. Questa teoria di unificazione è chiamata “Modello Standard”. La gravitazione non è ancora incorporata in maniera coerente in questo modello, sebbene la sua struttura possa essere descritta da una teoria costruita in modo molto simile a quello del Modello Standard. D’altra parte, come è evidente dalla tabella 5.1, la forza gravitazionale tra particelle elementari ha una intensità completamente trascurabile rispetto alle altre tre forze, e non verrà trattata in questo corso.

In questo capitolo descriveremo le diverse interazioni a cui sono sottoposte le particelle ed i meccanismi attraverso i quali interagiscono. In particolare, prendendo ad esempio la forza elettromagnetica, introdurremo l’ampiezza di transizione dovuta ai potenziali di interazione, il concetto di propagatore, i grafici di Feynman. Infine discuteremo le frequenze di decadimento dei nuclei e delle risonanze e la formula di Breit-Wigner che descrive la distribuzione in probabilità della massa delle risonanze.

## 5.2 L’interazione elettromagnetica

Consideriamo la diffusione di elettroni su protone dovuta alle cariche elettriche. Il processo classico è rappresentato dalla diffusione degli elettroni da parte del potenziale statico del protone  $V(r) \propto -1/r$ . Il campo classico è definito su tutto lo spazio ed agisce istantaneamente a distanza sugli elettroni. Si può ricordare che già Newton a proposito delle azioni a distanza notava: “that one body can act upon another at a distance, through a vacuum, without the mediation of anything else, . . . , is to me a great absurdity”. In elettrodinamica quantistica l’interazione tra due cariche elettriche è invece mediata da un campo di bosoni di massa nulla, i fotoni, e la sua intensità è data dalla costante di accoppiamento, che è proporzionale al prodotto delle

cariche elettriche, moltiplicata per un termine che dipende dal quadrimpulso trasferito e prende il nome di *propagatore*.

Se  $H_i$  è la hamiltoniana che descrive l'interazione, la probabilità che avvenga un processo fisico da uno stato iniziale  $|i\rangle$  ad uno stato finale  $|f\rangle$  è proporzionale a  $|\langle f|H_i|i\rangle|^2$ . Secondo la teoria delle perturbazioni, l'Hamiltoniana libera può essere sostituita dalla somma  $H_i = H_0 + V(\vec{r})$  e nell'*approssimazione di Born*<sup>2</sup>, che consiste nell'approssimare le funzioni d'onda della particella diffusa nello stato iniziale e finale con le funzioni d'onda di particelle libere, ponendo per semplicità  $\hbar = c = 1$  si ha:

$$\langle f|H_i|i\rangle \propto \frac{1}{4\pi} \int e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} dv = \frac{1}{4\pi} \int V(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} dv = f(\vec{q}) \quad (5.1)$$

per cui l'ampiezza di diffusione  $f(\vec{q})$  è la trasformata di Fourier del potenziale rispetto al momento trasferito tra le particelle  $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ . Se inseriamo il potenziale coulombiano  $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ , abbiamo:

$$f(q) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{iqr \cos \vartheta} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr \quad (5.2)$$

che integrata su  $\varphi$  e chiamando  $y = \cos \vartheta$  diventa:

$$f(q) = -\frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 r e^{iqry} dr dy = -\frac{\alpha}{2iq} \int_0^\infty (e^{iqr} - e^{-iqr}) dr = -\frac{\alpha}{q} \int_0^\infty \sin qrd r \quad (5.3)$$

dove  $\alpha$  è la costante di struttura fine della fisica atomica. L'integrale ha un andamento oscillante per  $r \rightarrow \infty$ . Tuttavia, se si considera che a grandi distanze dal protone il campo di questo sarà schermato da altre cariche, per cui  $V(r) \rightarrow 0$  prima che  $r \rightarrow \infty$ , possiamo porre a zero il valore a  $r = \infty$  del risultato dell'integrale definito, per cui:

$$f(q) \simeq \frac{\alpha}{2iq} \left( \frac{1}{iq} + \frac{1}{iq} \right) = -\frac{\alpha}{2iq} \frac{2iq}{q^2} = -\frac{\alpha}{q^2} \quad (5.4)$$

Notiamo che la sezione d'urto sarà proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza di diffusione, e quindi ritroviamo lo stesso andamento ottenuto nel calcolo classico di Rutherford rappresentato dalla (3.29):

$$\sigma \propto f(q)^2 = \left( \frac{\alpha}{q^2} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{16p^4 \sin^4 \vartheta/2} \quad (5.5)$$

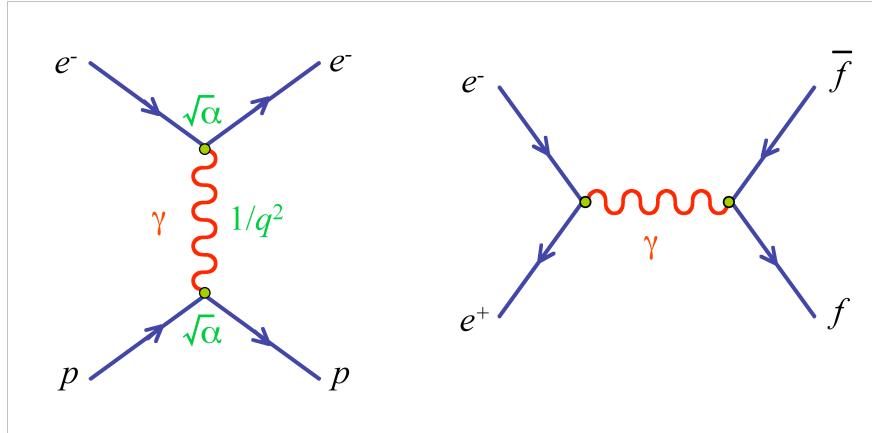


Figura 5.1: Grafici di Feynman, a sinistra per la diffusione di un elettrone su protone, a destra per l'annichilazione di una coppia elettrone-positrone con la susseguente creazione di una coppia fermione-antifermione. Il tempo scorre da sinistra a destra. Le frecce sono concordi con lo scorrere del tempo per i fermioni, discordi per gli antifermioni.

Ora è possibile dare una rappresentazione grafica dell'ampiezza di diffusione nel modo illustrato nella figura 5.1: nell'interazione col protone l'elettrone devia cedendo un impulso  $q$  che viene trasferito dal fotone (rappresentato dal tratto interno ondulato) al protone. Nel calcolo dell'ampiezza di diffusione entrano le cariche dell'elettrone e del protone, attraverso  $\alpha$ , che rappresenta la *costante di accoppiamento* dell'interazione, e l'inverso del quadrato di  $q$  che è per l'appunto l'impulso trasportato dal fotone. La rappresentazione pittorica che ne risulta è detta *grafico di Feynman* e ad essa corrisponde la regola di calcolo per cui un vertice contribuisce all'ampiezza con un fattore  $\sqrt{\alpha}$ , mentre la linea interna, il *propagatore*, contribuisce con un fattore  $1/q^2$ . Benché una esposizione della teoria dell'elettrodinamica quantistica e la derivazione completa delle regole associate ai diagrammi di Feynman esulino dallo scopo di questo corso, ne discuteremo alcune caratteristiche qualitative, che rendono molto utile questa rappresentazione nella descrizione dei diversi processi di diffusione e di decadimento che affronteremo nel seguito.

---

<sup>2</sup>Si veda ad esempio J.J. Sakurai, Meccanica Quantistica Moderna (Zanichelli, 1990), par. 7.2.

Notiamo che il fotone, nonostante sia il messaggero, o mediatore, della forza elettromagnetica, è privo di carica elettrica. Inoltre ha massa nulla, ed è proprio questa proprietà che rende il raggio d'azione del potenziale elettromagnetico infinito e decrescente come  $1/r$ , dove  $r$  è la distanza dalla sorgente. Tuttavia, il fotone interno scambiato nella prima interazione della figura 5.1 non ha massa invariante nulla, come si può dimostrare con un semplice calcolo di cinematica: se la diffusione è elastica, essendo  $M_p \gg M_e$ , l'elettrone diffuso avrà la stessa energia e lo stesso modulo dell'impulso dell'elettrone incidente, quindi  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} \equiv (0, -(\vec{p}' - \vec{p}))$  da cui  $M_\gamma^2 = q^2 = -2p^2 + 2p^2 \cos \vartheta < 0$ . Se consideriamo il diagramma di Feynman della seconda interazione della figura 5.1, che corrisponde all'annichilazione di due elettroni, possiamo calcolare il modulo del quadrimpulso del fotone nel centro di massa dei due elettroni, per cui se  $E$  è la loro energia in questo riferimento,  $M_\gamma^2 = 4E^2 > 0$ . Dunque, in un diagramma di Feynman,  $|\mathbf{p}|^2 = M^2$  solo per i rami esterni (per le particelle libere). I propagatori rappresentano *particelle virtuali*, che sono, come si dice, *off mass-shell*, ossia non hanno la massa che avrebbero se fossero particelle reali. Dai calcoli precedenti, vediamo che se il propagatore è orientato nella direzione in cui scorre il tempo (nei nostri diagrammi da sinistra a destra) avrà modulo del quadrimpulso positivo (è quindi un quadrivettore di tipo tempo) mentre se è orientato in direzione ortogonale avrà modulo del quadrimpulso negativo (è un quadrivettore di tipo spazio).

### 5.3 Introduzione ai diagrammi di Feynman

I diagrammi di cui abbiamo visto un esempio nel precedente paragrafo sono in realtà una tecnica grafica, sviluppata da Feynman intorno al 1950 allo scopo di calcolare le ampiezze di transizione dei processi di interazione tra le particelle e dei loro decadimenti, che rappresenta una pietra miliare nella fisica delle particelle elementari. Originariamente questi diagrammi furono introdotti da Feynman per il calcolo degli elementi di matrice di transizione dei processi elettromagnetici nell'ambito della elettrodinamica quantistica (QED). In questi diagrammi spazio-temporali ogni simbolo corrisponde ad un termine dell'elemento di matrice. Il significato dei singoli termini ed i legami tra loro sono fissati dalle *regole di Feynman*, di cui abbiamo visto qualche esempio. Analoghe prescrizioni esistono anche per il calcolo dei processi regolati dalle interazioni deboli e forti. Come già ricordato, in questo testo

useremo questi diagrammi unicamente per una illustrazione schematica dei vari processi, in quanto una trattazione quantitativa richiede la conoscenza della teoria relativistica dei campi.

La figura 5.1, come abbiamo detto, mostra il diagramma di Feynman per lo scattering elastico elettrone-protone. Adottiamo la convenzione che vede il tempo scorrere da sinistra verso destra mentre l'asse spaziale è orientato verso l'alto. Nei diagrammi le linee rette rappresentano i fermioni nello stato iniziale e finale. Le antiparticelle sono simbolizzate da frecce che puntano indietro nel tempo; i fotoni sono visualizzati da linee ondulate, i bosoni pesanti da linee tratteggiate e i gluoni da linee elicoidali. I punti dove tre o più linee del grafico si incontrano sono detti *vertici* o *nodi*. L'intensità dell'interazione tra il bosone virtuale e il fermione è chiamata costante di accoppiamento. Per l'interazione elettromagnetica è proporzionale alla carica elettrica. In un generico grafico, i vertici rappresentano l'intensità dell'accoppiamento dell'interazione moltiplicata per la carica relativa del fermione. Inoltre in ciascun vertice devono valere le appropriate leggi di conservazione. Per esempio, durante l'interazione è possibile che i fermioni cambino alcune loro proprietà: se il bosone di Gauge è carico, allora i fermioni dopo l'interazione avranno la carica variata in modo che ad ogni vertice la carica elettrica si conservi, così come si deve conservare il quadrimpulso. Ricordiamo inoltre che la particella scambiata è off mass-shell: è quindi virtuale.

Lo scambio del fotone tra l'elettrone e il protone può anche essere pensato come una emissione del fotone da parte dell'elettrone con conseguente rinculo; il fotone è poi assorbito dal protone che, in seguito a ciò, ne assorbe anche il quadrimpulso modificando la sua direzione di moto. Quindi c'è uno scambio di energia ed impulso tra l'elettrone e il protone: si esercita quindi una forza tra le particelle di materia, ma questa è però sempre il risultato di una interazione locale tra le particelle e i campi di forza.

Nelle figure 5.2, 5.3 e 5.4 sono mostrati alcuni diagrammi di Feynman per processi virtuali che coinvolgono elettroni, positroni e fotoni. Ciascuno di questi processi ha un solo vertice, e quindi, secondo la regola che abbiamo enunciato, ha una ampiezza proporzionale a  $\sqrt{\alpha}$ , a cui è associata una probabilità proporzionale al quadrato dell'ampiezza, ossia ad  $\alpha$ , costante di accoppiamento elettromagnetica: sono quindi grafici al *primo ordine in  $\alpha$* . Notiamo di nuovo che l'emissione di un fotone reale da parte di un elettrone non può conservare l'energia e l'impulso. Tuttavia il principio di indeterminazione di Heisenberg,  $\Delta E \Delta t \simeq \hbar$ , permette la non conservazione dell'energia

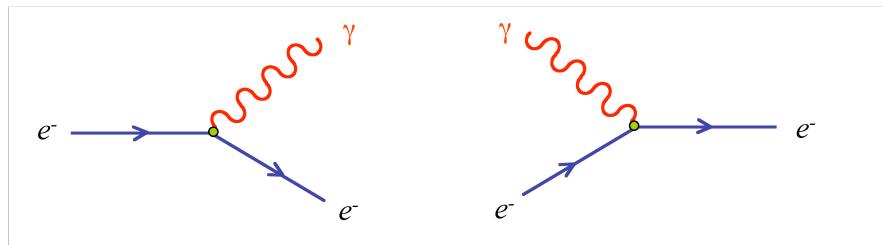


Figura 5.2: Vertici elettrone-fotone: a sinistra,  $e^- \rightarrow e^- + \gamma$  ; a destra,  $\gamma + e^- \rightarrow e^-$ .

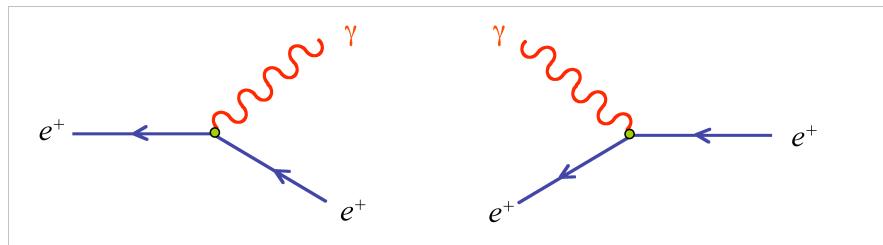


Figura 5.3: Vertici positrone-fotone: a sinistra,  $e^+ \rightarrow e^+ + \gamma$  ; a destra,  $\gamma + e^+ \rightarrow e^+$ .

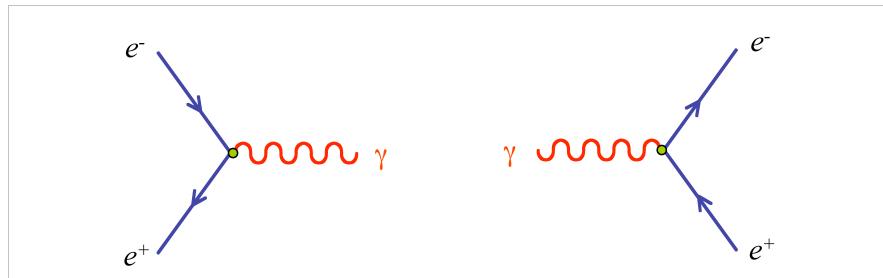


Figura 5.4: A sinistra, annichilazione  $e^- + e^+ \rightarrow \gamma$  ; a destra, creazione di coppia  $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ .

per un tempo  $\Delta t$  che soddisfi la relazione

$$\Delta t \leq \hbar / \Delta E_e = \hbar / E_\gamma. \quad (5.6)$$

Ma allora l'emissione o il riassorbimento di un fotone di energia  $E_\gamma$  da parte di un elettrone all'interno di un intervallo di tempo che soddisfa questa condizione in principio *non è misurabile*. Nessuno di questi processi da solo può rappresentare un fenomeno fisico osservabile.

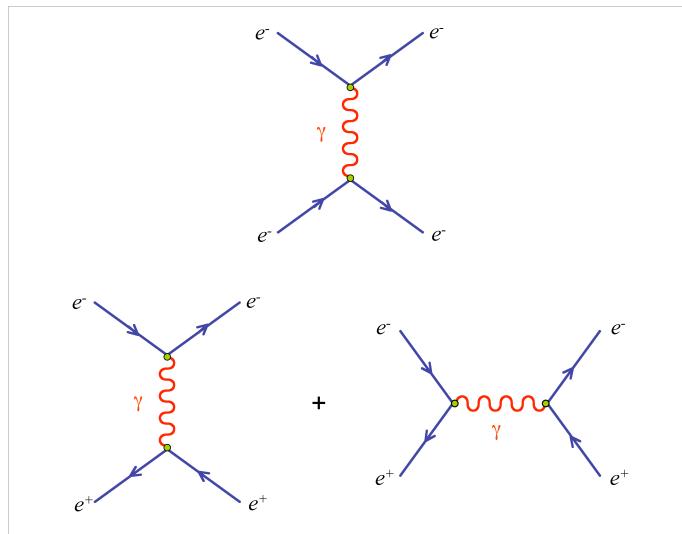


Figura 5.5: Grafici del secondo ordine in  $\alpha$ : in alto, diffusione  $e^-e^-$ ; in basso diffusione  $e^+e^-$ .

Per avere un processo osservabile, bisogna considerare grafici al secondo ordine in  $\alpha$ , come quelli della figura 5.5, dove una particella virtuale emessa (o assorbita) nel primo vertice viene assorbita (o emessa) nel secondo. In questo caso tutte le particelle che entrano o escono dal diagramma sono reali (ossia hanno la massa invariante che compete loro, sono *on mass-shell*). Notiamo anche che due grafici che hanno lo stesso stato iniziale e lo stesso stato finale (nella figura, i due grafici della diffusione  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  che coinvolgono lo scambio, rispettivamente, di un fotone di tipo spazio e uno di tipo tempo) sono indistinguibili dal punto di vista della meccanica quantistica (il fotone non è osservabile) e devono quindi essere sommati tra loro per il calcolo della

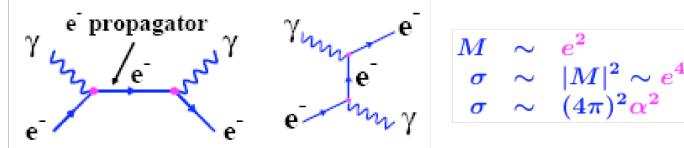


Figura 5.6: Grafico di Feynman per l'effetto Compton.

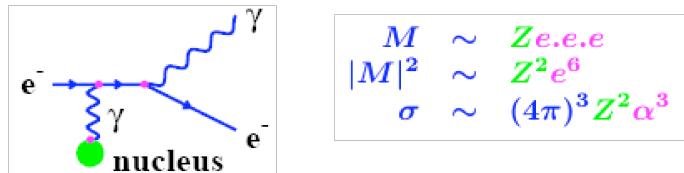


Figura 5.7: Grafico di Feynman per la Bremsstrahlung nel campo elettromagnetico del nucleo.

probabilità totale. Viceversa, per la diffusione  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  lo scambio di un fotone di tipo tempo non interviene, perché nel vertice  $e^-e^- \rightarrow \gamma$  non si conserverebbe la carica elettrica.

I grafici di Feynman dei processi studiati nel capitolo 4 sono mostrati in figura 5.6 per il processo Compton (del secondo ordine in  $\alpha$ ), in figura 5.7 per la Bremsstrahlung ed in figura 5.8 per la creazione di coppie: com'è facile verificare, questi ultimi due processi sono del terzo ordine in  $\alpha$ . Nelle figure sono anche indicati i valori delle ampiezze e delle sezioni d'urto relative ai vari processi.

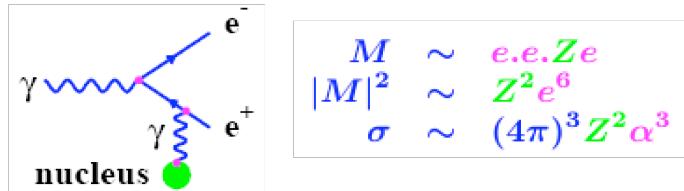


Figura 5.8: Grafico di Feynman per la produzione di coppie nel campo elettromagnetico del nucleo.

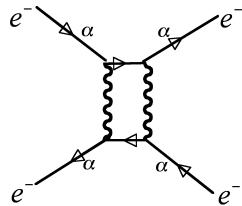


Figura 5.9: Diagramma di Feynman di ordine  $\alpha^4$ .

Nulla vieta di scambiare più di un fotone come in figura 5.9. Tuttavia i diagrammi agli ordini superiori sono sempre più soppressi da potenze crescenti di  $\alpha$  che vale  $1/137$ . Questo è il motivo per cui in elettrodinamica quantistica di solito è sufficiente considerare solo i diagrammi all'ordine più basso.

Concludiamo questo paragrafo sottolineando che quanto illustrato dà una spiegazione del motivo per cui le forze elettromagnetiche decrescono rapidamente con la distanza ( $f \propto 1/r^2$ ). Ricordiamo ancora una volta la relazione  $\Delta E \Delta t \simeq \hbar$ . Dunque se un elettrone emette un fotone virtuale di energia grande, esso può esistere solo per un tempo molto corto e può quindi esercitare una forza intensa solo su di un altro elettrone che gli passi vicino. D'altra parte un fotone virtuale di piccola energia può avere influenza, sebbene con intensità più debole, su distanze più grandi.

## 5.4 Range delle interazioni forti e ipotesi di Yukawa

La semplice osservazione che i nuclei, formati da protoni e neutroni, sono stabili, dimostra l'esistenza di una forza, molto più intensa di quella repulsiva tra le cariche elettriche dei protoni, capace di tenere insieme i nucleoni in una regione spaziale di qualche fermi di raggio. Si deve poi notare che per diffusione di particelle  $\alpha$  a distanze di circa 2 fermi la formula di Rutherford non riproduce i dati sperimentali. Come vedremo nel capitolo 8 questo è dovuto alla interazione attrattiva tra i nucleoni e la particella incidente. Sperimentalmente si misura che il raggio di azione, o *range*, delle forze nucleari,  $R$ , è attrattivo per valori di qualche fermi e repulsivo per  $R < 10^{-1}$  fm. La prima

interpretazione del range delle forze nucleari è stata data da Hideki Yukawa nel 1935 in termini di scambio, tra neutrone e protone, di una particella che nello stato libero venne in seguito identificata come il pione (vedi capitolo 6). Il modello, simile a quello per le forze elettromagnetiche appena discusso, ipotizza che la forza tra i nucleoni del nucleo sia dovuta allo scambio di quanti del campo nucleare, che sono i messaggeri della forza, di cui i nucleoni sono le “sorgenti”. Il modello deve spiegare l’intensità della forza, il corto raggio d’azione ed infine il fatto che le forze di tipo nucleare che si esercitano tra protoni-protoni, protoni-neutroni e neutroni-neutroni, sembrano essere uguali. Applicando ancora una volta il principio di indeterminazione di Heisenberg tra il tempo e l’energia e sapendo dai dati sperimentali che il raggio di azione delle forze nucleari era dell’ordine dei fermi, Yukawa stimò l’ordine di grandezza della massa del bosone continuamente emesso e riassorbito dai nucleoni nel nucleo: se il range del bosone scambiato deve essere 1-2 fm, ponendo  $R = c\Delta t$  e  $\Delta E = Mc^2$ , per rispettare il principio di Heisenberg dovremo avere:

$$\Delta E \Delta t \simeq \hbar \rightarrow Mc^2 \simeq \frac{\hbar c}{R} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1 \div 2 \text{ fm}} = 100 \div 200 \text{ MeV} \quad (5.7)$$

Il bosone di Yukawa venne chiamato *mesone*, dal greco  $\mu\epsilon\sigma o\zeta$ , intermedio, in quanto di massa intermedia tra quella dell’elettrone e quella del protone. Se combiniamo gli operatori dell’energia e dell’impulso, in unità naturali ( $\hbar = c = 1$ )  $E = i\partial/\partial t$  e  $p = -i\partial/\partial x$ , con la relazione tra energia, impulso e massa della relatività ristretta,  $E^2 = p^2 + M^2$ , otteniamo l’equazione di Klein-Gordon, che rappresenta l’equazione quanto-relativistica che devono soddisfare le funzioni d’onda dei bosoni:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (\nabla^2 - M^2) \psi \quad (5.8)$$

e si riduce all’equazione di d’Alembert nel limite  $M \rightarrow 0$ . In condizioni statiche, l’equazione diventa:

$$\nabla^2 \psi = M^2 \psi \quad (5.9)$$

ed ammette soluzioni del tipo

$$\psi = -\frac{g_s^2}{4\pi r} e^{-Mr} \quad (5.10)$$

che si riducono a  $\psi \propto 1/r$  per  $M = 0$  (per  $M = 0$ , l'equazione statica di Klein-Gordon (5.9) si riduce all'equazione del potenziale elettrostatico nel vuoto). Per analogia col campo elettrostatico, se consideriamo un nucleone di prova in prossimità di un altro nucleone che costituisce la sorgente dei mesoni di Yukawa, possiamo allora interpretare la soluzione dell'equazione di Klein-Gordon non solo come la funzione d'onda del bosone, ma anche come il potenziale del campo generato dalla sorgente della forza nucleare:

$$U(r) = -\frac{g_s^2}{4\pi r} e^{-Mr} \quad (5.11)$$

e considerare  $g_s$  come la carica nucleare, analoga alla carica elettrica. L'analogo di  $\alpha$  sarà quindi  $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ , costante di accoppiamento nucleare che caratterizza l'interazione forte fino a distanze dell'ordine di  $R = \hbar/Mc$  che coincide con la lunghezza d'onda Compton del mesone. Per distanze inferiori a  $10^{-1}$  fm, il potenziale diventa repulsivo a causa del principio di esclusione di Pauli. Complessivamente, il potenziale effettivo può essere approssimato come una buca di potenziale di  $30 \div 40$  MeV.

Come vedremo nel capitolo 6, la massa del mesone di Yukawa ha un valore molto simile a quello della particella costituente la componente dura dei raggi cosmici, il muone. Con la osservazione di questa particella, questa fu identificata con il mesone di Yukawa, ma fu presto dimostrato sperimentalmente da Conversi, Pancini e Piccioni che i muoni, nella interazione con la materia, non hanno il comportamento di una particella che interagisce forte con protoni e neutroni. Il modello di Yukawa ebbe un grande successo a partire dal 1947, quando fu finalmente identificato il pion carico, o mesone  $\pi$ , con massa  $M_\pi \simeq 140$  MeV/ $c^2$  e successivamente fu osservato anche il pion neutro, con valore di massa simile.

Nella figura 5.10 sono mostrati alcuni diagrammi di Feynman che illustrano come le interazioni tra protoni e neutroni derivano dallo scambio dei mesoni carichi e neutri. Il protone (o il neutrone) è in uno stato di attività continua ed emette ed assorbe pioni. I pioni sono virtuali e la conservazione dell'energia impedisce loro di allontanarsi troppo dal nucleone di origine: ciascun nucleone è circondato da una nuvola di pioni virtuali che fluttuano continuamente dal protone al neutrone e viceversa. I protoni e neutroni interagiscono tra loro attraverso questa nuvola di pioni e questo scambio dà come risultato una forza attrattiva. Oggi sappiamo che i pioni sono particelle con struttura interna (sono stati legati di quark e antiquark, vedi il paragrafo 7.7) e non sono i bosoni mediatori dell'interazione nucleare. Nonostante

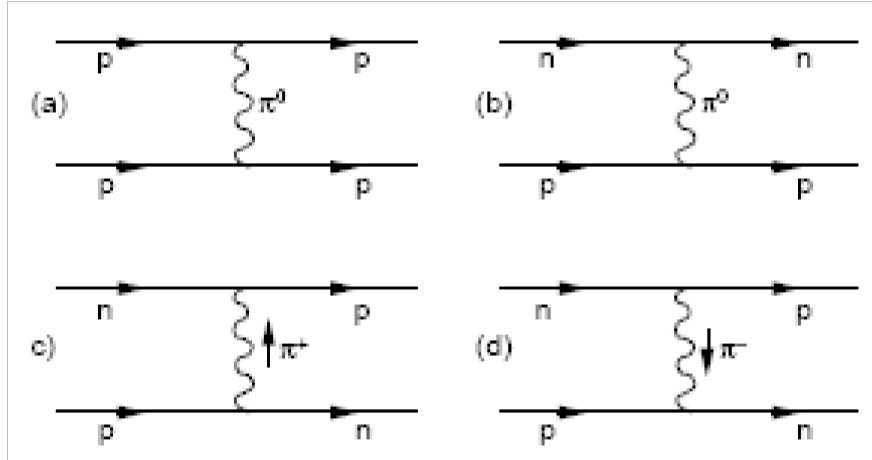


Figura 5.10: Alcuni diagrammi di Feynman che descrivono le forze tra i nucleoni in termini di scambio di mesoni  $\pi$  carichi e neutri.

questo, le basi teoriche del modello di Yukawa sono tuttora valide e anche ipotizzando soltanto lo scambio di mesoni vettori (i mesoni  $\rho$ ) e scalari (i pioni) si riescono a spiegare alcuni potenziali nucleari.

## 5.5 Evidenza sperimentale dello scambio di mesoni carichi

La distribuzione sperimentale della diffusione elastica neutrone-protone in funzione dell'angolo di diffusione nel riferimento del centro di massa è mostrata in figura 5.11.

Si può dare in maniera semplice una stima degli angoli di diffusione considerando che per lo scattering elastico  $|\vec{p}_i| \sim |\vec{p}_f|$  e  $\Delta p \simeq p\vartheta$ . D'altra parte,  $\Delta p \simeq \langle f \rangle \Delta t$ , dove  $\Delta t \simeq R_0/v$  è il tempo di interazione, mentre  $\langle f \rangle$  è la forza media, che può essere stimata dal rapporto tra la profondità della buca di potenziale e il raggio d'azione:  $\langle f \rangle \simeq V_0/R_0$ . In definitiva

$$\vartheta \simeq \frac{\Delta p}{p} \simeq \frac{\langle f \rangle \Delta t}{p} \simeq \frac{V_0}{R_0} \frac{R_0}{v} \frac{1}{p} = \frac{V_0}{vp} = \frac{V_0}{2T} \quad (5.12)$$

dove  $T$  è l'energia cinetica del neutrone incidente. Nell'esperimento preso

in esame,  $100 \text{ MeV} < T < 600 \text{ MeV}$ , che per  $V_0 = 35 \text{ MeV}$  dà un angolo  $\vartheta < 10^\circ$ . Nella figura 5.11 si osserva in effetti una distribuzione concentrata a piccoli angoli, ma sono presenti in egual misura anche angoli prossimi a  $180^\circ$ ! La spiegazione di Yukawa è semplicissima: se si assume che esistano sia mesoni neutri che carichi, la diffusione può procedere anche col neutrone incidente che si trasforma in un protone, emettendo un mesone negativo, e procede in avanti a piccolo angolo, mentre il protone assorbendo il mesone si trasforma in un neutrone, che nel centro di massa procede in direzione opposta, a circa  $180^\circ$  rispetto alla direzione incidente.

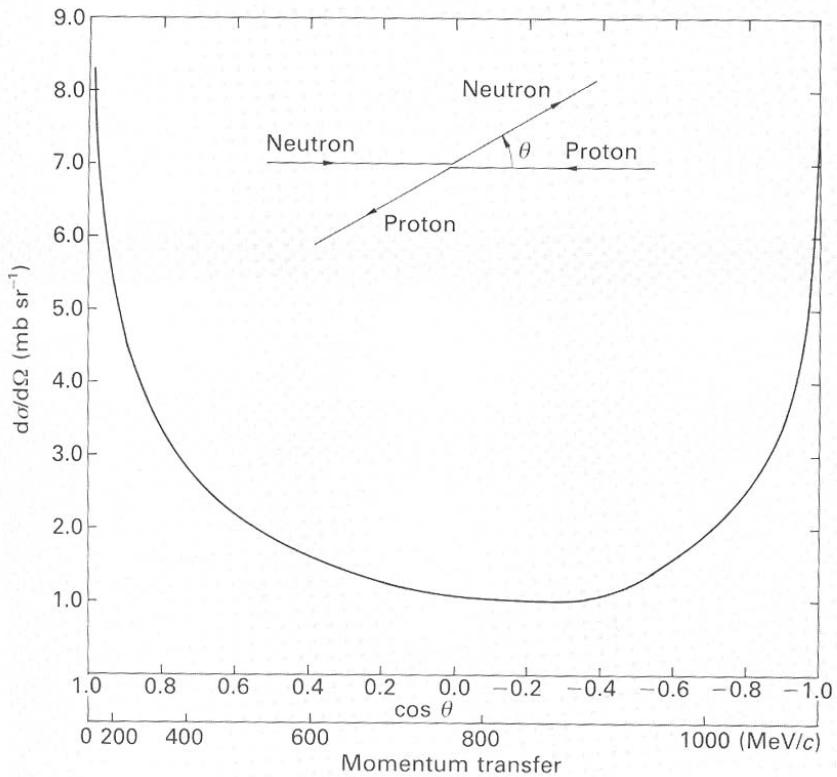


Figura 5.11: Diffusione elastica di neutrone su protone: distribuzione angolare del neutrone diffuso; nella scala inferiore è riportato il momento trasferito  $\Delta p$  per  $T = 600 \text{ MeV}$ .

## 5.6 Il propagatore per il potenziale di Yukawa

Torniamo ora al propagatore nel caso del potenziale di Yukawa. Consideriamo la diffusione di un pion da parte di un potenziale nucleare  $V(r)$  ad un angolo  $\vartheta$  rispetto alla direzione iniziale del pion ed indichiamo con  $\vec{p} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$  l'impulso trasferito dal pion. Calcoliamo di nuovo l'ampiezza di diffusione nell'approssimazione di Born, come trasformata di Fourier del potenziale:

$$\begin{aligned} M_{fi} &\propto \frac{1}{4\pi} \int e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} V(r) d^3\vec{r} \\ &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{ipr \cos \vartheta} \frac{e^{-Mr}}{r} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr \end{aligned} \quad (5.13)$$

che integrata su  $\varphi$  e chiamando  $y = \cos \vartheta$  diventa

$$\begin{aligned} M_{fi} &\propto -\frac{\alpha_s}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 r e^{ipry} e^{-Mr} dr dy \\ &= -\frac{\alpha_s}{2ip} \int_0^\infty (e^{ipr} - e^{-ipr}) e^{-Mr} dr \\ &= -\frac{\alpha_s}{2ip} \int_0^\infty (e^{(ip-M)r} - e^{(-ip-M)r}) dr \\ &= \frac{\alpha_s}{2ip} \left( \frac{1}{ip - M} + \frac{1}{ip + M} \right) = \frac{\alpha_s}{2ip} \frac{2ip}{(-p^2 - M^2)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

ossia

$$M_{fi} \propto -\frac{\alpha_s}{M^2 + p^2} \quad (5.15)$$

che dà l'ampiezza di diffusione, espressa in funzione del momento trasferito al pion. Questa derivazione non è completa, perché oltre all'impulso si deve considerare anche l'energia trasferita al pion. Un calcolo analogo in quattro dimensioni dà l'espressione relativisticamente corretta:

$$M_{fi} \propto -\frac{\alpha_s}{\mathbf{p}^2 + M^2} \quad (5.16)$$

dove ora  $\mathbf{p}$  è il quadrimpulso trasferito, ed il termine  $1/(\mathbf{p}^2 + M^2)$  rappresenta il contributo del propagatore.

## 5.7 Il propagatore delle interazioni deboli

Notiamo che il propagatore di Yukawa dato dalla (5.16) è valido per qualunque bosone intermedio dotato di massa, dunque anche per i bosoni intermedi delle interazioni deboli. Anche questa interazione è a corto range, ma Fermi, benché avesse già postulato che questa circostanza fosse dovuta allo scambio di bosoni pesanti, formulò la sua teoria delle interazioni deboli assumendo che queste fossero dovute ad una interazione puntuale a quattro fermioni, ossia, per il decadimento  $\beta$ , con un grafico come quello a destra della figura 5.12. Se consideriamo invece lo scambio di un bosone pesante di massa  $M_W$  (grafico a sinistra della figura 5.12), l'elemento di matrice conterrà il propagatore e sarà analogo alla (5.16):

$$M(q) = -\frac{g_w^2}{q^2 + M_W^2}. \quad (5.17)$$

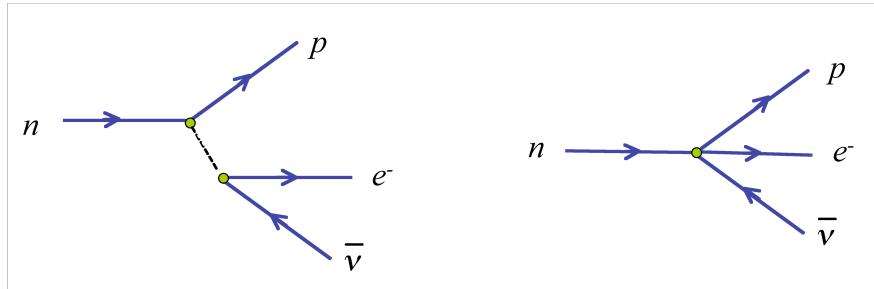


Figura 5.12: Diagrammi di Feynman per il decadimento  $\beta$ : a sinistra, l'interazione è mediata dal propagatore di un bosone pesante; a destra, il decadimento è provocato da una interazione puntuale a quattro fermioni.

Ora nel decadimento  $\beta$  dove i momenti trasferiti sono dell'ordine del MeV, per un bosone di massa  $M_W^2 \gg q^2$  l'ampiezza di transizione si riduce a  $g_w^2/M_W^2$  e deve essere uguale alla costante di Fermi

$$G = 1.16 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \quad (5.18)$$

L'unificazione delle interazioni deboli ed elettromagnetiche prevede che  $g_w \simeq e$  e che la differenza di intensità a basse energie sia dovuta alla differenza

tra la massa dei bosoni intermedi e la massa nulla del fotone, mentre ad alte energie ( $q^2 \gg M_W^2$ ) le due interazioni hanno la stessa intensità. Dalla (5.18) si ottiene anche una stima per la massa dei bosoni intermedi,  $M_W \simeq 80$  GeV/ $c^2$ , fatta per la prima volta negli anni '60 e molto vicina alle masse effettivamente osservate alla metà degli anni '80.

## 5.8 Leggi di decadimento di nuclei e particelle instabili

Se consideriamo  $N$  sistemi instabili identici con  $N$  sufficientemente grande e se

- i decadimenti sono tra loro indipendenti,
- la probabilità di decadimento nell'unità di tempo è una proprietà tipica del sistema e del processo di decadimento e *non* dipende dal tempo in cui avviene il decadimento,
- la probabilità di decadimento del singolo sistema *non* dipende da  $N$

allora la probabilità di decadimento in un intervallo di tempo  $dt$  può essere scritta come

$$dP = \lambda dt \quad (5.19)$$

dove  $\lambda$  è la *costante di decadimento* che caratterizza il processo ed ha le dimensioni dell'inverso del tempo. La variazione del numero di sistemi nell'intervallo di tempo  $dt$  è allora data da

$$dN = -\lambda N dt \quad (5.20)$$

che integrata rispetto al tempo con la condizione iniziale  $N(t=0) = N_0$  dà la *legge di decadimento*:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (5.21)$$

Per caratterizzare il tempo di decadimento si può utilizzare la *vita media*  $\tau$ , definita dal valor medio della distribuzione

$$\tau = \frac{\int_0^\infty t N(t) dt}{\int_0^\infty N(t) dt} = \frac{1}{\lambda} \quad (5.22)$$

oppure il *tempo di dimezzamento*  $t_{1/2}$ , definito come l'intervallo di tempo nel quale il numero dei componenti si dimezza:

$$\int_0^{t_{1/2}} \lambda N(t) dt = \int_{t_{1/2}}^{\infty} \lambda N(t) dt = \frac{N_0}{2}. \quad (5.23)$$

La vita media, utilizzata nella fisica delle particelle, è legata al tempo di dimezzamento, utilizzato nella fisica dei nuclei, dalla relazione  $t_{1/2} = \tau \log 2$ .

Si definisce poi *attività di una sostanza radioattiva* (e si indica con  $A$ ) il numero di decadimenti per unità di tempo, dato dal prodotto della costante di decadimento per il numero di componenti, per cui  $A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$ . L'unità di misura dell'attività di una sostanza radioattiva è il Curie, o Ci, definito come l'attività di un grammo di radio:

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ disintegrazioni/secondo};$$

in alternativa si utilizza il Bequerel, o Bq, che corrisponde ad una disintegrazione al secondo, per cui  $1 \text{ Bq} = 0.27 \cdot 10^{-10} \text{ Ci}$ .

Vediamo ora come si può rappresentare da un punto di vista quantistico un processo di decadimento: in meccanica quantistica lo stato di un sistema stabile, caratterizzato da un livello di energia  $E_i$ , è descritto dalla evoluzione temporale degli autostati a  $t = 0$ :

$$|\Psi_i(t)\rangle = |\Psi_{i0}\rangle e^{-\frac{iE_i t}{\hbar}}; \quad (5.24)$$

da cui

$$\langle \Psi_i(t)|\Psi_i(t)\rangle = \langle \Psi_{i0}|\Psi_{i0}\rangle \quad (5.25)$$

per cui la densità di probabilità si conserva.

Se il sistema può invece decadere, la probabilità dello stato iniziale  $|i\rangle$  non si conserva. La probabilità di decadimento si può calcolare con la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo<sup>3</sup>. L'evoluzione temporale del sistema (nel suo riferimento di riposo) può essere scritta come:

$$|\Psi(t)\rangle = a_i(t)|i\rangle + \sum_f a_f(t)|f\rangle \quad (5.26)$$

---

<sup>3</sup>Si veda ad esempio J.J. Sakurai, Meccanica Quantistica Moderna (Zanichelli, 1990), par. 5.8, oppure B.R. Martin and G. Shaw, Particle Physics, 2<sup>nd</sup> ed. (Wiley, 1997), par. B.5.1.

dove la sommatoria è estesa a tutti i possibili stati finali. Se vogliamo che l'ampiezza di probabilità dello stato  $|i\rangle$  decresca esponenzialmente nel tempo, la  $a_i(t)$  deve avere una parte reale del tipo  $e^{-\frac{\Gamma_i t}{\hbar}}$ , in modo che sia

$$a_i(0)a_i^*(0) = 1; \quad a_i(t)a_i^*(t) = e^{-\frac{\Gamma_i t}{\hbar}} \quad (5.27)$$

Confrontando con la definizione di vita media  $\tau$  data dalla (5.22), abbiamo  $\Gamma_i = \hbar/\tau_i = \hbar\lambda$ . Per calcolare la  $\Gamma_i$  si può utilizzare la *regola d'oro di Fermi* valida in generale per tutte le probabilità di transizione (appendice 5.A). Si ha:

$$\Gamma_i = \frac{\hbar}{\tau_i} = \hbar W = 2\pi|M_{if}|^2 \int \rho_f d\Omega \quad (5.28)$$

Dalle relazioni precedenti si vede che tanto più piccolo è  $\tau_i$  tanto più grande è  $\Gamma_i$ : vediamo di nuovo in azione il principio di indeterminazione.  $\Gamma_i$ , che prende il nome di *larghezza di decadimento*, rappresenta l'incertezza con cui è nota l'energia dello stato non stazionario  $|\psi_i(t)\rangle$ , tanto maggiore quanto minore è la vita media dello stesso, in modo che  $\Delta E_i \tau_i \sim \hbar$ . La legge di decadimento può essere riscritta come:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{\Gamma_i t}{\hbar}} \quad (5.29)$$

in base alla quale la larghezza di decadimento può essere calcolata sperimentalmente dal rapporto

$$\Gamma = -\hbar \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}. \quad (5.30)$$

## 5.9 La formula di Breit e Wigner

Vediamo come è possibile ricavare la distribuzione di energia degli stati eccitati dei nuclei e degli adroni, nota come *distribuzione di Breit e Wigner*, come conseguenza intrinseca delle caratteristiche di decadimento di uno stato quantico che abbiamo descritto nel paragrafo precedente.

Se riscriviamo la parte dipendente dal tempo dell'ampiezza di uno stato con vita media  $\tau = \hbar/\Gamma$  nel riferimento di quiete dello stato, chiamando  $M_0$  il valore centrale della sua massa a riposo,abbiamo:

$$\psi_i(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(M_0 c^2 - i\frac{\Gamma}{2})t} \quad (5.31)$$

per cui

$$|\psi_i(t)|^2 = e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t} \quad (5.32)$$

la distribuzione di probabilità in energia sarà data dalla trasformata di Fourier nello spazio coniugato di  $t$ :

$$\chi(Mc^2) \simeq \int_0^\infty \psi(t) e^{\frac{i}{\hbar} Mc^2 t} dt \quad (5.33)$$

$$\chi(Mc^2) \propto \frac{1}{(Mc^2 - M_0 c^2) + i\frac{\Gamma}{2}} \quad (5.34)$$

che al quadrato dà la formula di Breit-Wigner, che rappresenta la distribuzione di massa per una risonanza di massa  $M_0$  e larghezza  $\Gamma$ :

$$|\chi(Mc^2)|^2 \propto \frac{1}{(Mc^2 - M_0 c^2)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}; \quad (5.35)$$

questa non è altro che la distribuzione Lorentziana, che ha una caratteristica forma a campana centrata intorno ad  $M_0 c^2$ , mentre  $\Gamma$  rappresenta la larghezza a metà altezza della distribuzione.

Se il sistema può decadere in più stati finali e per ogni stato  $i$  il decadimento è caratterizzato da una *larghezza di decadimento parziale*  $\Gamma_i$ , la larghezza totale sarà la somma di tutte le larghezze parziali e la vita media del sistema sarà data dalla relazione

$$\frac{\hbar}{\tau} = \Gamma = \sum_i \Gamma_i \quad (5.36)$$

mentre il rapporto  $\Gamma_i/\Gamma$  è detto *branching ratio* (in italiano, assai poco utilizzato, “rapporto di diramazione”) ed esprime la probabilità del singolo decadimento rispetto alla probabilità totale.

## 5.10 Intensità relativa delle interazioni fondamentali

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come sia le sezioni d’urto delle reazioni che i decadimenti dipendono, tramite la regola d’oro di Fermi, dagli elementi di matrice delle transizioni tra lo stato iniziale e lo stato finale,

mentre gli elementi di matrice a loro volta dipendono dalle costanti di accoppiamento, e dagli effetti del propagatore. Nella regola d'oro entra però anche la densità dello spazio delle fasi finale, sia nel caso delle reazioni che nel caso dei decadimenti. Per confrontare tra loro le intensità delle diverse interazioni, bisogna quindi tener conto di questi fattori. Nel caso dei decadimenti, il parametro che deve essere confrontabile è l'energia cinetica a disposizione nello stato finale che è data dal cosiddetto *valore-Q* o  $Q$  della reazione ( $Q$  è definito in generale come la differenza tra l'energia cinetica finale e iniziale. Per un decadimento,  $Q$  è uguale alla differenza di massa tra lo stato iniziale e finale,  $Q = \Delta mc^2$ ).

Per esempio, possiamo confrontare le larghezze di decadimento delle particelle  $\Sigma$ . Queste appartengono alla famiglia delle particelle strane (vedi il par. 6.5) ed esistono con diversi valori di massa. La  $\Sigma^0(1383)$  può decadere per interazione forte in  $\Lambda(1115) + \pi^0$ , con  $Q = 130$  MeV e larghezza di decadimento  $\Gamma = 36$  MeV, a cui corrisponde  $\tau \sim 2 \cdot 10^{-23}$  s. La  $\Sigma^0(1192)$  non può accedere allo stesso decadimento, perché la differenza di massa con la  $\Lambda(1115)$  non è sufficiente per produrre un  $\pi^0$ . Decade quindi elettromagneticamente in  $\Lambda(1115) + \gamma$  con una vita media  $\tau \sim 10^{-19}$  s ed un  $Q = 77$  MeV, comparabile quindi col precedente. Vediamo che

$$\frac{\alpha_{forte}}{\alpha_{e.m.}} \simeq \sqrt{\frac{10^{-19}}{10^{-23}}} = 10^2. \quad (5.37)$$

Il decadimento elettromagnetico  $\Sigma^0(1192) \rightarrow \Lambda(1115) + \gamma$  può essere a sua volta confrontato con il decadimento  $\Sigma^-(1189) \rightarrow p + \pi^0$ . In questo decadimento non si conserva la stranezza (vedi sempre il par. 6.5) per cui non può avvenire attraverso le interazioni forti, che conservano questo numero quantico. Si tratta quindi di un decadimento debole, con una vita media  $\tau \sim 10^{-10}$  s e  $Q = 189$  MeV. Dal rapporto tra le vite medie si ricava:

$$\frac{\alpha_{debole}}{\alpha_{e.m.}} \simeq \sqrt{\frac{10^{-19}}{10^{-10}}} = 10^{-5}. \quad (5.38)$$

Per completare il quadro, possiamo determinare il rapporto tra interazione elettromagnetica e gravitazionale confrontando direttamente la forza di Newton e la forza di Coulomb che si esercitano tra un protone ed un elettrone:

$$F_{gravitaz.} = G_N \frac{m_e m_p}{D^2}, \quad F_{e.m.} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{D^2} \quad (5.39)$$

da cui  $\alpha_{gravitaz}/\alpha_{e.m.} \sim 10^{-40}$ , per cui, a livello nucleare, la gravitazione è completamente trascurabile.

## Appendice

### 5.A La seconda regola d'oro di Fermi

Come abbiamo visto nel paragrafo 3.1, la sezione d'urto è una quantità sperimentale misurata dalla frequenza dei conteggi  $dN/dt$ . Il quadrato dell'ampiezza dell'elemento di matrice di transizione  $M_{fi}$  espime invece la probabilità della transizione tra lo stato iniziale  $i$  e lo stato finale  $f$ . Ora la frequenza della reazione dipenderà dal prodotto della probabilità di transizione verso lo stato  $f$  per la densità degli stati finali disponibili per  $f$ , ossia la *densità dello spazio delle fasi*  $\rho$ , secondo quella che prende il nome di *seconda regola d'oro di Fermi*<sup>4</sup>, che esprime la probabilità per unità di tempo della reazione, normalizzata ad una particella proiettile ( $p$ ) ed una particella bersaglio ( $b$ ):

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho. \quad (5.40)$$

Ora in base alla (3.4) e alla (3.6) possiamo scrivere

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_p N_b} = \frac{\phi N_b \sigma}{N_p N_b} = \frac{n_p v_p N_b \sigma}{N_p N_b} = \frac{v_p \sigma}{V} \quad (5.41)$$

e quindi

$$\sigma = \frac{WV}{v_p} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho \frac{V}{v_p}. \quad (5.42)$$

La regola d'oro di Fermi (5.40) si può applicare anche ai decadimenti, per i quali  $M_{fi}$  rappresenta l'elemento della matrice di transizione dallo stato iniziale  $i$  ad uno dei possibili stati finali  $f$ .

Sia per le reazioni che per i decadimenti, il calcolo di  $\rho(E')$  può essere fatto tenendo conto che, per il principio di indeterminazione, nello spazio delle fasi a 6 dimensioni, definito dall'impulso e dalle coordinate della particella, ognuna delle particelle dello stato finale occupa un volume pari a  $(2\pi\hbar)^3$ , per

---

<sup>4</sup>Si veda ad esempio J.J. Sakurai, Meccanica Quantistica Moderna (Zanichelli, 1990), par. 5.6.

cui la densità per un generico elemento di volume  $V$  con impulso compreso tra  $p'$  e  $p' + dp'$  è data da

$$dn = \frac{V 4\pi p'^2 dp'}{(2\pi\hbar)^3} \quad (5.43)$$

che può essere trasformato in una densità di energia attraverso la relazione

$$\rho(E) = \frac{dn}{dE'} = \frac{dn}{dp'} \frac{dp'}{E'} \quad (5.44)$$

dove  $dE'/dp'$  può essere calcolato da  $E' = \sqrt{p'^2 c^2 + m^2 c^4}$  da cui

$$\frac{dE'}{dp'} = \frac{1}{2E'} 2p'c^2 = \frac{c^2 p'}{E'} = v' \quad (5.45)$$

che inserito nella (5.44) dà:

$$\rho(E') = \frac{dn}{dE'} = \frac{dn}{v' dp'} = \frac{V 4\pi p'^2}{v' (2\pi\hbar)^3}. \quad (5.46)$$

# Capitolo 6

## Particelle

### 6.1 I raggi cosmici

Fino all'avvento delle macchine acceleratrici, l'unica fonte di particelle di alta energia era costituita dalle particelle che arrivano sulla superficie terrestre dallo spazio e che prendono il nome di *raggi cosmici*. I raggi cosmici furono scoperti da Hess nel 1912 con elettrometri montati su palloni aereostatici. Hess stabilì che la ionizzazione cresce in funzione della altitudine, raddoppiando dai 1000 ai 4000 m. Oggi sappiamo che quelli osservati da Hess costituiscono la componente secondaria dei raggi cosmici, ossia quella generata negli alti strati dell'atmosfera dai raggi cosmici primari che provengono per lo più dall'esterno del sistema solare e sono costituiti per l'80% circa da protoni e per il resto da nuclei di elio ed altri nuclei pesanti, con una piccola componente di elettroni (circa l'1%). L'interazione con nuclei dell'atmosfera genera una cascata adronica, all'interno della quale sono presenti vari tipi di particelle. Tenendo conto dei decadimenti, sulla superficie terrestre arrivano per il 75% muoni (*componente dura*) e per il resto elettroni e fotoni (*componente molle*). A questi vanno aggiunti i neutrini, sia di origine primaria (i neutrini sono prodotti copiosamente nei processi nucleari che tengono accese le stelle) che secondaria (come prodotti dei decadimenti di pioni e muoni).

### 6.2 La scoperta del positrone

Come abbiamo già ricordato, quando un fotone di energia superiore a  $2m_e c^2$  interagisce col campo elettromagnetico del nucleo, può produrre una coppia

elettrone-positrone in accordo con la teoria di Dirac. La prima osservazione dell'antiparticella dell'elettrone è dovuta ad Anderson (1933). Anderson utilizzava una camera a nebbia costruita insieme a Millikan, immersa in un campo magnetico di 15 kG ed esposta ai raggi cosmici. Un piatto orizzontale di 6 mm di piombo divideva in due il volume della camera.

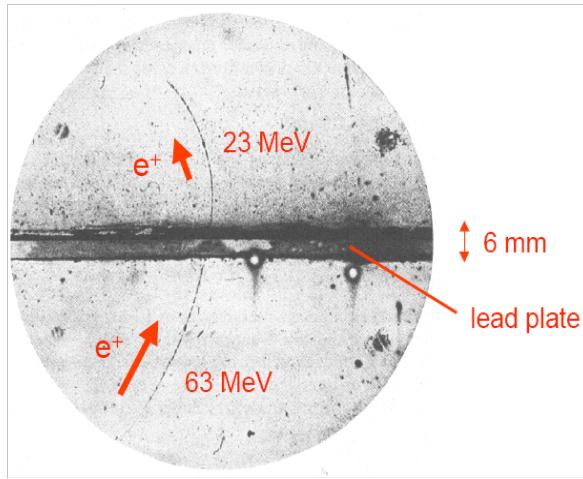


Figura 6.1: Prima osservazione di un positrone; la particella entra dal basso e perde parte della sua energia attraversando la lastra di piombo.

L'evento attribuito al positrone era costituito da una traccia entrante dal basso, come si deduce dal fatto che nell'attraversare la lastra di piombo la traccia diminuisce la propria curvatura. La traccia non poteva essere un protone, perché un protone di energia corrispondente alla curvatura osservata doveva avere un range in aria di circa 5 mm, mentre la traccia percorre almeno 6 cm nella camera, di cui una parte in piombo. La probabilità che le due tracce siano dovute a due elettroni entranti dall'alto e sovrapposti casualmente nella foto è trascurabile. L'ipotesi che un fotone incidente abbia colpito la lastra di piombo, generando due particelle che procedono nel vapore con curvatura opposta, comporta comunque che una delle due particelle leggere abbia una carica positiva. Benché non fosse possibile una misura precisa della ionizzazione specifica, si poteva nondimeno affermare che la carica doveva essere meno del doppio di quella dell'elettrone. Facendo l'ipotesi dunque di una particella di carica positiva pari ad  $e$ , dalla curvatura si deriva

un impulso di 63 MeV/c per la traccia inferiore e di 23 MeV/c per la traccia superiore, con una perdita nei 6 mm di piombo molto vicina alla perdita media misurata da Anderson per elettroni di quell'impulso. Da queste considerazioni si poteva stimare che la massa della particella osservata non doveva superare di 20 volte la massa dell'elettrone (si veda il par. 4.2). Nello stesso articolo si riportano almeno 15 tracce positive osservate, nessuna delle quali compatibile con la massa di un protone.

Al tempo della scoperta, non era affatto chiaro però quale potesse essere il meccanismo per la produzione dei positroni: Dirac infatti aveva stabilito che per la produzione della coppia erano necessari due fotoni, circostanza che sembrava irrealizzabile in laboratorio. L'ipotesi corretta dell'interazione del fotone di alta energia con un fotone virtuale associato al campo elettromagnetico del nucleo è dovuta a Blackett e Occhialini. Questi ultimi avevano in effetti anche osservato delle tracce simili a quelle di Anderson, ma non pubblicarono i loro risultati prima di aver saputo della scoperta di Anderson.

### 6.3 Il mesotrone

Anderson continuò per qualche tempo a fare esperimenti con la camera a nebbia. Nel 1937, insieme a Neddermeyer, fece delle misure di perdita di energia in una lastra di 1 cm di platino, sempre col metodo del confronto della curvatura della traccia prima e dopo l'attraversamento della lastra. Trovarono una serie di eventi con particelle di impulso compreso tra 100 e 500 MeV/c. Nell'ipotesi che si trattasse di elettroni, questi dovevano essere relativistici per cui, in accordo con la (4.24), l'energia persa nella lastra doveva essere proporzionale all'energia incidente. Inoltre, particelle di questa energia avrebbero dovuto essere associate a sciami elettromagnetici, ed alcune dovevano generare sciami elettromagnetici nella lastra. Tra gli eventi osservati, un certo numero aveva effettivamente le caratteristiche attese per gli elettroni (bisogna notare che queste osservazioni costituivano anche la prima verifica sperimentale della validità della teoria di Bethe-Heitler). Ma era presente anche una seconda categoria di tracce che perdevano poca energia e non erano associate a sciami elettromagnetici. Queste particelle penetranti, di cariche in egual misura positive e negative, dovevano quindi essere più pesanti degli elettroni, per cui non erano soggette a perdite radiative, ma molto più leggere dei protoni, perché protoni di quell'impulso avrebbero avuto un  $\beta$

piccolo e quindi (si veda la (4.14)) una ionizzazione specifica molto maggiore di quella osservata, che era invece simile a quella degli elettroni.

Una stima della massa del nuovo tipo di particella fu data da Street e Stevenson, che misuravano contemporaneamente l'impulso e la velocità delle tracce. Per stimare la velocità a partire dalla ionizzazione è necessario misurare tracce con velocità piccole, per le quali la dipendenza della ionizzazione da  $\beta$  è molto significativa (si veda ancora la (4.14)). E' quindi necessario osservare tracce a fine percorso, e a questo scopo Street e Stevenson utilizzarono il metodo dell'anticoincidenza, sviluppato da Blackett e Occhialini: la camera a nebbia veniva fatta espandere solo quando una serie di tubi elettronici in coincidenza rivelavano l'ingresso di una traccia nella camera con una certa direzione, ma al tempo stesso altri tubi posti lungo la direzione d'uscita non rivelavano alcun segnale. Su 1000 tracce registrate, due avevano densità di ionizzazione significativamente maggiore di quella degli elettroni: una fu identificata come un protone ed la seconda come una particella di massa circa 130 volte quella dell'elettrone (e 1.6 volte più piccola della massa effettiva del muone), con una incertezza del 25%.

Come già sappiamo, la teoria di Yukawa, all'epoca appena formulata, prevedeva l'esistenza di una particella di massa intermedia tra quella dell'elettrone e del protone, di circa  $200 \text{ MeV}/c^2$ . Era abbastanza naturale identificare il mesone di Yukawa, o *mesotrone*, con la nuova particella, per la quale con successive misure la massa era ormai stabilita intorno a  $100 \text{ MeV}/c^2$ . Alla ricerca di conferme o smentite di questa ipotesi, Tomonaga ed Araki nel 1940 avevano notato che il comportamento dei mesoni di Yukawa a fine percorso doveva essere molto diverso a seconda della loro carica: le particelle positive dovevano perdere tutta la loro energia fino a fermarsi e poi decadere (nel 1942 Rasetti osservò effettivamente questi decadimenti, dando una prima stima della vita media,  $\tau \simeq 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ , successivamente stabilita in  $2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ ). Le particelle negative potevano invece essere catturate dagli atomi, ma con un raggio di Bohr  $r_B = \hbar/m\alpha$  molto piccolo, per cui le loro orbite dovevano sovrapporsi con grande probabilità al nucleo atomico, interagire con esso ed essere assorbite secondo il meccanismo di Yukava, in tempi molti minori rispetto alla vita media misurata da Rasetti.

## 6.4 L'esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni. Pioni e muoni

Nel 1945, a Roma, Conversi, Pancini e Piccioni, utilizzando un apparato magnetico (figura 6.2) per selezionare le cariche dei mesoni, ne osservarono i decadimenti in un assorbitore attraverso la tecnica delle coincidenze ritardate sulla scala dei microsecondi. I risultati mostrano una sostanziale differenza tra il comportamento dei mesoni in un assorbitore pesante (ferro), nel quale i mesoni positivi decadono e quelli negativi no, come previsto da Tomonaga ed Araki, o in un assorbitore leggero (carbonio), nel quale si osservano in egual misura i decadimenti dei mesoni positivi e negativi. I calcoli di Tomonaga ed Araki non sono molto diversi per ferro e carbonio, dando in ogni caso una probabilità dominante al processo di cattura sopra descritto. L'osservazione dei decadimenti dei mesoni negativi non era assolutamente compatibile col modello di Yukava.

Nel 1947, Perkins osserva un evento in emulsioni fotografiche che mostra un mesone negativo che si ferma, probabilmente assorbito da un nucleo leggero dell'emulsione (azoto, carbonio o ossigeno), che immediatamente dopo si disintegra in tre frammenti, di cui due identificati come protoni ed uno come un nucleo di trizio.

Questo comportamento “nucleare” del mesone rimetterebbe in discussione il risultato di Conversi, Pancini e Piccioni, ma pochi mesi dopo, sempre in emulsioni, Lattes, Occhialini e Powell osservano una catena completa che permette di identificare due particelle distinte, di massa non molto diversa, che decadono una nell'altra. La prima, il *pione*, si comporta effettivamente come il mesone di Yukava: il pione negativo è catturato, mentre il pione positivo decade in un *muone*, che non partecipa alla interazione forte ed è in tutto e per tutto una replica pesante dell'elettrone.

Il decadimento del pione è in due corpi, come si deduce dal fatto che il range del muone nelle emulsioni è sempre lo stesso, mentre la seconda particella deve essere molto leggera. Oggi sappiamo che, essendo il muone positivo un antifermione, deve essere prodotto sempre in coppia con un fermione, che in questo caso deve essere un neutrino muonico (vedi 6.8):

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Il comportamento dei muoni negativi in presenza di nuclei pesanti può essere spiegato come un processo di cattura nucleare (già precedentemente

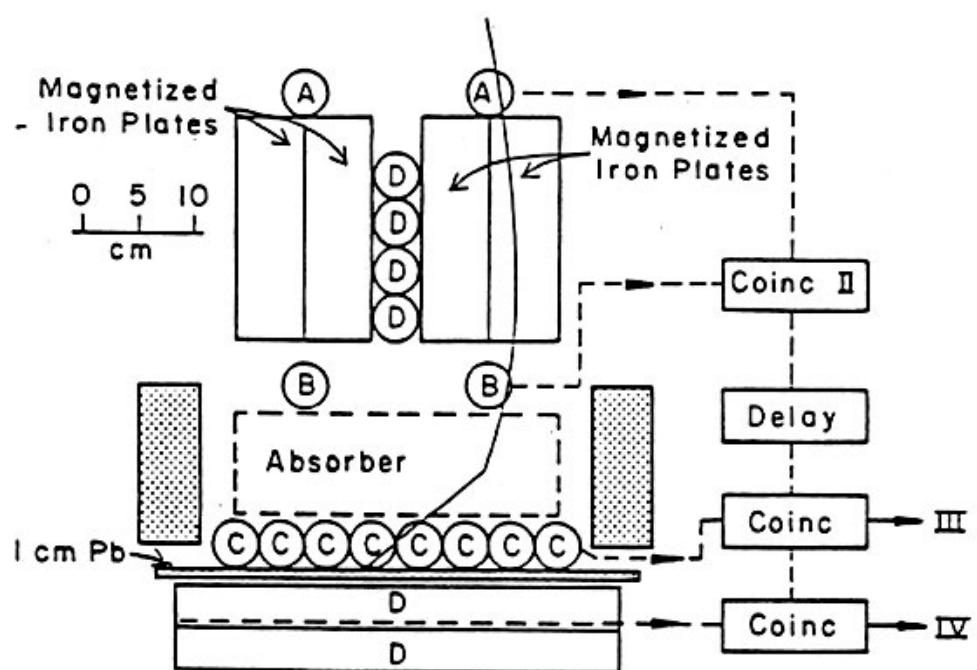
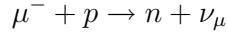


Figura 6.2: Schema originale dell'esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni: l'arrivo del mesone è segnalato dalla coincidenza dei contatori A e B. Il campo magnetico permette di focalizzare una carica e defocalizzare la carica opposta. Il decadimento del mesone in un elettrone nell'assorbitore produce una coincidenza ritardata con i contatori C.

osservato per gli elettroni) del tipo:



la cui probabilità va come la quarta potenza di Z ed è quindi molto maggiore per gli elementi pesanti.

Se ci soffermiamo ad osservare il panorama delle “particelle elementari” rivelato fino a questo punto, vediamo che sono state osservate tutte le particelle necessarie ad interpretare la materia atomica e nucleare, incluse le particelle responsabili delle interazioni forti. L’unico elemento “fuori posto”, per così dire, è costituito dal muone, che non sembra avere nessun ruolo particolare. Ma mentre ancora oggi non abbiamo trovato una giustificazione per l’esistenza delle “repliche” delle famiglie delle particelle, negli anni immediatamente successivi alla identificazione del piona e del muone molte altre particelle vengono a complicare il panorama semplice ed elegante che abbiamo fin qui delineato.

## 6.5 Le particelle “strane”

A partire dal 1947, una serie di eventi prodotti da raggi cosmici in emulsioni e in camere a nebbia rivelò la presenza di una categoria di particelle il cui comportamento presentava una inaspettata “stranezza”: queste particelle sembravano essere prodotte con sezioni d’urto tipiche delle interazioni forti, ma poi decadevano con vite medie lunghe ( $10^{-8} - 10^{-10}$  s), simili a quelle tipiche dei decadimenti deboli, mentre per decadimenti forti ci si aspetterebbero tempi molto più brevi, dell’ordine di  $10^{-23}$  s. Questa circostanza era tra l’altro all’origine della prima tipologia di eventi osservati, che vennero chiamati “a V”, in quanto una particella neutra, prodotta da un cosmico nella lastra della camera a nebbia viaggiava per qualche millimetro prima di decadere in due tracce, che si componevano in una V. In altri casi una particella carica viaggiava fino a decadere in una coppia carica-neutra, ed in questo caso la V era dovuta alle tracce cariche prima e dopo il decadimento.

In realtà, la prima particella di questa famiglia era stata osservata addirittura prima della definitiva scoperta del piona, nel 1943 in camera a nebbia, da due fisici francesi. L’evento osservato mostra una particella carica di circa 500 MeV/c, che viene diffusa da un elettrone, di cui si può determinare l’impulso, che risulta essere di circa 1 MeV/c. Assumendo che la diffusione sia elastica, si può determinare un valore della massa della particella di circa

500 MeV/c<sup>2</sup>, con una incertezza di ±60 MeV/c<sup>2</sup>, che la fa ritenere un  $K^+$ , secondo la terminologia odierna.

Tornando alle  $V$ , queste vennero osservate sia con masse intermedie tra il pion e il protone, sia con masse superiori a quella del protone (*iperoni*). La vita media poteva essere stimata attraverso la lunghezza di decadimento, secondo la relazione  $\lambda = \gamma\beta c\tau = p/m \cdot c\tau$  dove l'impulso era misurato come al solito dalla curvatura della traccia in campo magnetico e la massa poteva essere determinata ricostruendola dagli impulsi dei prodotti di decadimento, nelle ipotesi alternative che questi fossero pioni o nucleoni. Vennero poi osservati decadimenti in muoni e particelle neutre. A complicare la scena, vennero osservate anche particelle che decadono in tre pioni (dette  $\tau$ ), con masse e vite medie praticamente uguali a quelle delle particelle che decadono in due pioni (dette  $\theta$ ), che non potevano essere però identificate come un'unica particella, nell'ipotesi della conservazione della parità (si veda il paragrafo 7.4).

Tornando qui alla stranezza delle differenti interazioni responsabili della produzione e del decadimento di queste particelle, cerchiamo ora di interpretarla in base alle caratteristiche determinate negli anni successivi (soprattutto utilizzando i primi protosincrotroni, vedi paragrafo 6.6.4) e utilizzando per semplicità la moderna classificazione di queste particelle: il mesone  $K$ , di spin nullo, si presenta in due stati carichi opposti, di massa uguale,  $M_{K^\pm} = 493.68$  MeV/c<sup>2</sup> e in uno stato neutro di massa leggermente diversa  $M_{K^0} = 497.65$  MeV/c<sup>2</sup>. L'iperone  $\Lambda$ , di spin 1/2, ha  $M_\Lambda = 1115.68$  MeV/c<sup>2</sup>. L'iperone  $\Sigma$ , sempre di spin 1/2, si presenta in tre stati di carica, con masse leggermente diverse,  $M_{\Sigma^+} = 1189.4$  MeV/c<sup>2</sup>,  $M_{\Sigma^0} = 1192.6$  MeV/c<sup>2</sup> e  $M_{\Sigma^-} = 1197.4$  MeV/c<sup>2</sup>.

La produzione tramite l'interazione forte avviene sempre in maniera associata, nel senso che viene prodotta sempre almeno una coppia di particelle strane:

$$\begin{aligned}\pi^- p &\rightarrow K^0 \Lambda \\ \pi^- p &\rightarrow K^0 K^- p \\ \pi^+ n &\rightarrow K^+ \Lambda\end{aligned}$$

ma non si osserva la reazione  $\pi^- n \rightarrow K^- \Lambda$ .

Si può allora ipotizzare che si debba assegnare a queste particelle un nuovo numero quantico, la *stranezza*, che è conservato nelle interazioni forti, ma non nelle interazioni deboli ed è nullo per i nucleoni ed i pioni. La produzione associata forte richiede quindi che, partendo da uno stato iniziale con

stranezza nulla, la coppia di particelle strane dello stato finale abbia stranezza opposta. Dalle produzioni associate osservate, si deve ipotizzare che, se si assegna convenzionalmente al  $K^+$  stranezza positiva, il  $\Lambda$  deve avere stranezza negativa, il  $K^0$  deve avere la stessa stranezza del  $K^+$ , mentre il  $K^-$  deve avere stranezza opposta. Essendo la particella strana più leggera, il  $K$  non può decadere per interazione forte, ma può decadere attraverso la interazione debole, per la quale non è richiesta la conservazione della stranezza. Il  $\Lambda$  decade debole in  $p\pi^-$  o  $n\pi^0$ . Potrebbe decadere forte in  $K^-$  e pioni. Non osservandosi tale decadimento, deve operare la conservazione di un altro numero quantico: poiché, come è noto, il protone è stabile, ed il neutrone decade sempre in un protone, queste particelle, insieme al  $\Lambda$ , devono essere dotate di un numero quantico rigorosamente conservato, il *numero barionico*.

Per quanto riguarda l'iperone  $\Sigma$ , le reazioni nelle quali viene prodotto sono:

$$\begin{aligned}\pi^- p &\rightarrow K^0 \Sigma^0 \\ \pi^- p &\rightarrow K^+ \Sigma^- \\ \pi^+ n &\rightarrow K^+ \Sigma^0 \\ \pi^+ n &\rightarrow K^0 \Sigma^+ \\ \pi^+ p &\rightarrow K^+ \Sigma^+\end{aligned}$$

I  $\Sigma$  devono avere quindi tutti e tre stranezza negativa e lo stesso numero barionico del protone. In effetti, si osservano i decadimenti deboli ( $\tau \simeq 10^{-10}$  s)  $\Sigma^- \rightarrow n\pi^-$ ,  $\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0$  e  $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$ . Notiamo che il  $\Sigma^0$  ha numero barionico e stranezza uguali a quelli del  $\Lambda$ , ma la differenza di massa è troppo piccola per decadere forte in  $\pi\Lambda$ . Il decadimento  $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda$  può però avvenire per via elettromagnetica, con emissione di un fotone e vita media molto minore ( $\tau = 7.4 \cdot 10^{-20}$  s) rispetto alle altre particelle strane. L'assenza della produzione associata  $\pi^- p \rightarrow K^- \Sigma^+$  permette inoltre di escludere che la stranezza, come si era pensato per un certo tempo, potesse essere un numero quantico moltiplicativo.

Il panorama delle particelle strane è completato dall'osservazione degli iperoni  $\Xi$ , prodotti per esempio nelle reazioni  $K^- p \rightarrow \Xi^- K^+, \Xi^0 K^0$ , che devono avere quindi stranezza pari a -2, carica nulla o negativa e decadimenti  $\Xi^- \rightarrow \Lambda\pi^-$  e  $\Xi^0 \rightarrow \Lambda\pi^0$ .

Tutte le particelle ad interazione forte fin qui incontrate (con l'aggiunta dell' $\eta$ , scoperto nel 1962) possono essere raggruppate in due ottetti, uno per i mesoni, uno per i barioni, rappresentati nella tabella 6.1. Notiamo

solo che, mentre la tabella dei mesoni comprende le particelle e tutte le rispettive antiparticelle (il  $\pi^0$  e l' $\eta$ , avendo tutti i numeri quantici nulli, sono antiparticelle di se stesse), per i barioni si può scrivere un'altra tabella per le rispettive antiparticelle, a cominciare dall'antiproton (vedi paragrafo 6.7), con i numeri quantici  $B$ ,  $Q$  ed  $S$  cambiati di segno. Le analogie e le differenze tra i due ottetti balzano immediatamente agli occhi, e la loro interpretazione come multipletti di SU(3) sarà alla base dello sviluppo del *modello a quark* (paragrafo 7.7).

Tabella 6.1: Ottetti dei barioni e dei mesoni. Per ogni particella sono indicate la massa  $m$ , il numero barionico  $B$ , la carica  $Q$  e la stranezza  $S$ .

barioni	$m(\text{MeV}/c^2)$	$B$	$Q$	$S$	mesoni	$m(\text{MeV}/c^2)$	$B$	$Q$	$S$
$p$	938.272	+1	+1	0	$K^+$	493.68	0	+1	+1
$n$	939.565	+1	0	0	$K^0$	497.65	0	0	+1
$\Lambda$	1115.68	+1	0	-1	$\eta$	547.7	0	0	0
$\Sigma^+$	1189.4	+1	+1	-1	$\pi^+$	139.570	0	+1	0
$\Sigma^0$	1192.6	+1	0	-1	$\pi^0$	134.977	0	0	0
$\Sigma^-$	1197.4	+1	-1	-1	$\pi^-$	139.570	0	-1	0
$\Xi^0$	1314.8	+1	0	-2	$\bar{K}^0$	497.65	0	0	-1
$\Xi^-$	1321.3	+1	-1	-2	$K^-$	493.68	0	-1	-1

## 6.6 Acceleratori di particelle

Un acceleratore è un dispositivo nel quale un campo elettrico è utilizzato per variare l'energia di una particella carica. Da questo punto di vista, anche il tubo catodico può essere considerato un acceleratore. Tuttavia, finché ci si limita all'uso di campi elettrostatici, che non possono superare il limite della scarica in aria, le energie che si possono raggiungere sono decisamente inferiori a quelle fornite dai raggi cosmici; come abbiamo visto questi furono per un lungo periodo la fonte delle scoperte più importanti.

### 6.6.1 Acceleratori lineari

Per superare il limite sul campo accelerante dovuto alla scarica, una possibile soluzione è di far passare più volte le particelle attraverso dei campi acceleranti. Per fare in modo che la particella trovi ad ogni passaggio un campo accelerante senza raggiungere voltaggi elevati, si possono usare tensioni alternate che ad ogni passaggio si trovino in fase con le particelle da accelerare. La prima macchina di questo tipo è l'acceleratore lineare di Wi-

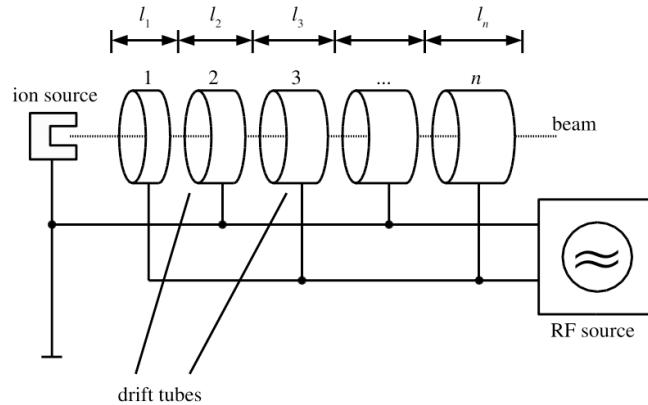


Figura 6.3: Schema della macchina lineare di Wideroe: i *drift tubes* sono gabbie di Faraday le cui lunghezze  $l_i$  sono tali per cui il tempo di attraversamento delle particelle di energia crescente è sempre lo stesso ed è l'inverso del doppio della radiofrequenza applicata:  $t = l_i/v_i = 1/2f_{RF}$ .

deroe (1928, figura 6.3): il percorso è spezzato in una serie di tubi metallici che costituiscono delle gabbie di Faraday. I poli di un unico generatore di tensione alternata sono collegati tra ogni tubo ed il successivo in modo che la tensione venga invertita nell'intervallo di tempo in cui la particella percorre il tubo: in questo modo, all'interno della gabbia di Faraday la particella viaggia indisturbata, mentre nella zona tra le pareti trova sempre un campo accelerante. Per realizzare questa condizione, le lunghezze dei diversi tubi che si susseguono devono essere fissate in modo che il tempo che impiegano le particelle di velocità via via crescente per attraversare ciascun tubo sia sempre lo stesso e sia pari al semiperiodo della tensione alternata. Se si

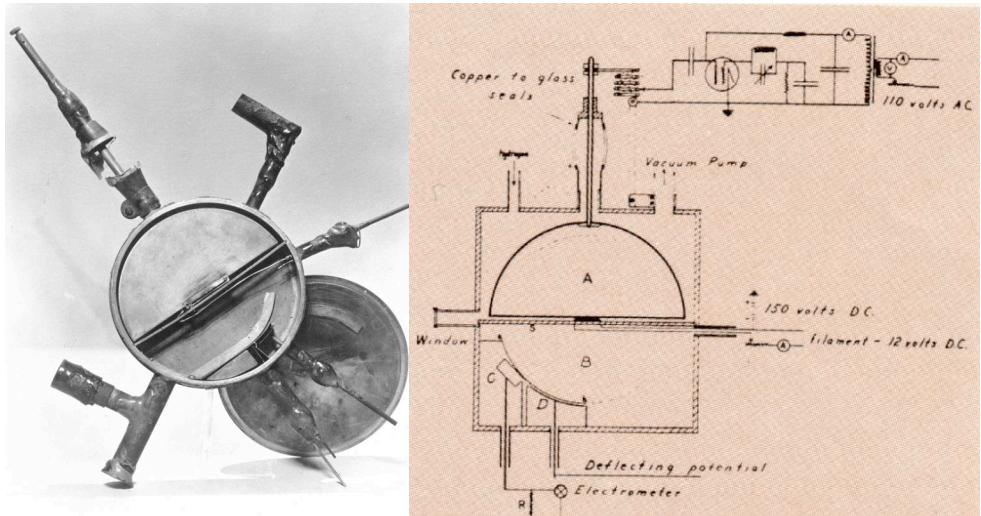


Figura 6.4: A sinistra, foto del primo ciclotrone costruito da Lawrence. Il raggio della camera a vuoto centrale è meno di 5 cm. A destra, disegno originale di Lawrence: il circuito in alto è il generatore di radiofrequenze. (© Lawrence Berkeley National Laboratory).

vogliono raggiungere velocità pari a frazioni significative di  $c$ , il generatore dovrà operare nelle radiofrequenze.

### 6.6.2 Ciclotrone

Una maniera molto elegante di realizzare successivi passaggi della particella attraverso lo stesso campo oscillante è realizzata nel *ciclotrone* progettato da Lawrence e dal suo allievo Livingston nel 1929. In figura 6.4 è riportata una immagine della macchina, insieme ad un disegno schematico originale di Lawrence: il circuito oscillante fa variare continuamente la differenza di tensione tra le due semicirconferenze A e B, che costituiscono due gabbie di Faraday e sono immerse in un campo magnetico ortogonale al piano del disegno. Degli ioni di idrogeno molecolare sono emessi nella zona tra le due semicirconferenze.

Assumiamo che nell'istante dell'emissione la differenza di potenziale sia tale da accelerare gli ioni verso l'alto. Nel momento in cui entrano nella

gabbia di Faraday, gli ioni non risentono più del campo elettrico e, se hanno una velocità all'incirca parallela al piano del disegno, saranno mantenuti su un'orbita circolare dal campo magnetico per effetto della forza di Lorentz, come abbiamo analizzato nel paragrafo 4.10.2. Il tempo necessario per descrivere una semicirconferenza e raggiungere di nuovo il bordo della gabbia superiore, finché la particella non è relativistica, è dato da

$$t = \frac{\pi r}{v} = \pi \frac{p}{qBv} = \pi \frac{m}{qB}. \quad (6.1)$$

Se il circuito oscillante ha una frequenza pari a  $\nu_c = 1/2t = qB/2\pi m$ , detta *frequenza di ciclotrone* (che, dato il rapporto tra carica e massa del protone, risulta essere una radiofrequenza), quando la particella arriva tra le piastre troverà una differenza di potenziale invertita rispetto al primo passaggio, e verrà accelerata di nuovo. Poiché il tempo di percorrenza non dipende dalla velocità, anche la seconda semicirconferenza sarà percorsa nello stesso tempo  $t$ , e la particella passerà di nuovo tra le piastre attraverso una differenza di potenziale accelerante. La particella nei passaggi successivi continuerà a trovarsi in fase con la differenza di potenziale, e verrà continuamente accelerata, finché il raggio non supererà quello del magnete, e le particelle non più deflesse usciranno in linea retta dall'acceleratore. Con il primo ciclotrone, nel 1931, Livingston riuscì ad accelerare gli ioni di idrogeno fino ad 80 KeV dopo una quarantina di giri.

Come abbiamo visto, perché la frequenza non cambi con l'impulso della particella è necessario che la velocità della particella sia piccola rispetto alla velocità della luce. La relazione relativistica tra  $p$  e  $v$  è infatti  $p = \gamma mv$  e per  $\gamma$  sensibilmente maggiore di 1 la frequenza diventa quindi  $\nu = qB/2\pi\gamma m$  e dipende dall'impulso tramite  $\gamma$ . Questo è il motivo per cui il ciclotrone non è utile per accelerare elettroni, che sono relativistici già a bassi impulsi, e anche per protoni l'energia massima è limitata a qualche decina di MeV.

### 6.6.3 Sincrociclotrone

Per ovviare a questo problema, è necessario far variare la radiofrequenza, man mano che le particelle vengono accelerate, sincronizzandola con il tempo di rivoluzione del fascio. Una macchina del genere prende il nome di *sincrociclotrone*. Un limite importante delle macchine fin qui descritte, nelle quali le orbite delle particelle sono contenute all'interno di un unico magnete, è dato dalla relazione (4.41) che lega impulso, campo magnetico e raggio:

$pc(\text{GeV}) = 0.3 \cdot B(\text{Tesla}) \cdot R(\text{m})$ , che limita per esempio a 300 MeV/c l'impulso di un (sincro)ciclotrone con campo di 1 Tesla e raggio di 1 metro.

#### 6.6.4 Sincrotrone

Una alternativa per mantenere la sincronizzazione tra la radiofrequenza e il fascio è di variare il campo magnetico in maniera proporzionale a  $\gamma$ . In questo modo, non appena le particelle sono relativistiche, ( $\beta \simeq 1 \rightarrow p \simeq \gamma mc$ ), il campo magnetico risulta proporzionale anche all'impulso, ed il raggio della traiettoria diventa quindi costante. Il grande vantaggio di una macchina di questo tipo, che prende il nome di *sincrotrone*, è che il campo magnetico deve coprire una traiettoria fissa, e può quindi essere realizzato con una serie di dipoli magnetici disposti lungo un percorso circolare, anziché con un unico grande magnete che copre l'intera superficie che racchiude la traiettoria. Inoltre, poiché il raggio non aumenta durante l'accelerazione, le particelle possono passare moltissime volte attraverso la radiofrequenza, che non richiede quindi campi elettrici troppo elevati. Nel 1949 viene realizzato il primo *elettrosincrotrone* ossia un sincrotrone per elettroni. Nel 1952 viene realizzato a Brookhaven il *Cosmotrone*, un sincrotrone per protoni da 3 GeV.

In una macchina circolare, un aspetto molto importante è la perdita di energia delle particelle dovuta all'irraggiamento provocato dall'accelerazione della loro carica elettrica. La formula classica di Larmor che esprime la potenza irraggiata va modificata per particelle relativistiche nel modo seguente:

$$W = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} e^2 a^2 \rightarrow \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6 e^2 \left( a^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \wedge \vec{a})^2 \right). \quad (6.2)$$

Nel moto circolare uniforme,  $(\vec{v} \wedge \vec{a})^2 = v^2 a^2$  e  $a = v^2/R$ , per cui la formula precedente diventa

$$W = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\gamma^4 v^4}{R^2} \quad (6.3)$$

e per  $v \rightarrow c$

$$W = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{E^4}{R^2 (mc^2)^4}. \quad (6.4)$$

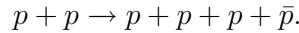
Quindi la potenza dissipata per irraggiamento cresce con la quarta potenza dell'energia ed è inversamente proporzionale alla quarta potenza della massa della particella accelerata. Così, la potenza irraggiata da un elettrone è  $10^{13}$

volte maggiore di quella irraggiata da un protone della stessa energia. Mentre in un protosincrotrone la massima energia della macchina è fissata dal massimo valore raggiungibile dal campo magnetico deflettore, in un elettrosincrotrone, quando l'energia fornita per giro dalle radiofrequenze uguaglia l'energia dissipata per irraggiamento, il processo di accelerazione termina e l'energia delle radiofrequenze serve solo a mantenere costante l'energia delle particelle. Un semplice calcolo fornisce:

$$\Delta E_{giro}(\text{KeV}) = W \cdot T = W \frac{2\pi R}{c} = 88.5 (E(\text{GeV}))^4 / R(\text{m}). \quad (6.5)$$

## 6.7 L'antiproton

Come abbiamo visto, i protosincrotroni permisero di accelerare i protoni ad energie di qualche GeV. A Berkeley, la costruzione di una macchina del genere, il *Bevatron* (che prende il nome dall'uso americano di BeV al posto di GeV) fu finalizzata al superamento della soglia per la produzione di antiprotoni, con la reazione



Un semplice calcolo di cinematica premette di stabilire che tale soglia è pari a  $6 m_p = 5.6$  GeV per un protone fermo. Se si considera il moto interno del protone nel nucleo, corrispondente ad un impulso medio di circa 240 MeV, la soglia si riduce a 4.3 GeV. Lavorare a soglia è molto utile da un punto di vista sperimentale. Infatti la produzione a soglia avviene con i quattro nucleoni fermi nel riferimento del centro di massa, per cui il loro impulso nel laboratorio è univocamente determinato dalla trasformazione di Lorentz tra i due riferimenti, con il fattore  $\gamma$  fissato dall'impulso del protone incidente.

Oltre venti anni dopo la scoperta della prima antiparticella, il positrone, la ricerca dell'antiproton era considerata ancora molto importante. L'estensione della teoria di Dirac al protone richiede naturalmente l'esistenza dell'antiproton. Tuttavia c'erano già alcune indicazioni che il protone (che oggi sappiamo essere una particella composita) non era completamente descritto dall'equazione di Dirac, per cui non era scontato che si trattasse effettivamente di una particella di Dirac come l'elettrone. Una seconda ragione che metteva in dubbio l'esistenza dell'antiproton era molto più profonda, ed era il fatto sperimentale incontrovertibile che nell'Universo non c'è simmetria tra materia ed antimateria, per ottenere la quale sono necessari gli antiprotoni e

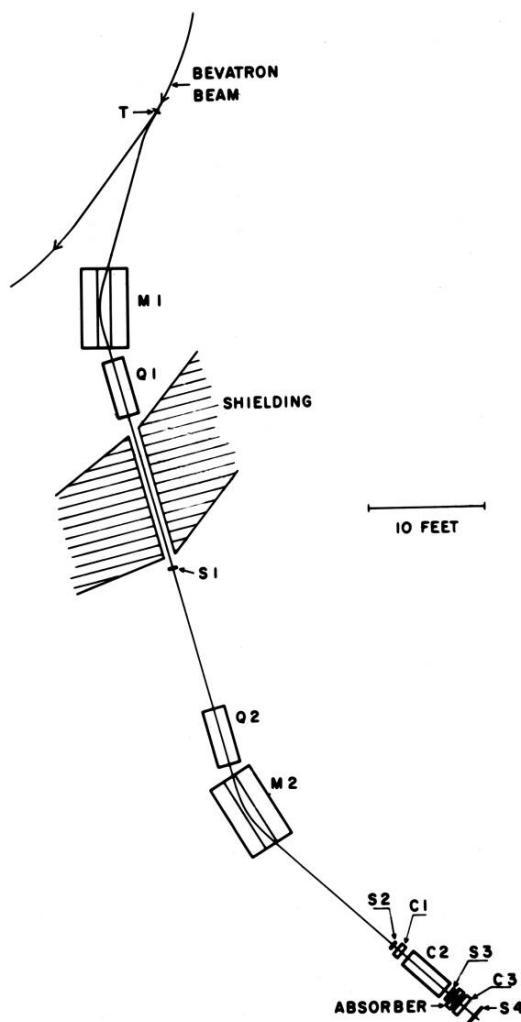
gli antineutroni, oltre ai positroni. Ancora oggi non abbiamo una spiegazione di questa notevole circostanza.

La scoperta dell'antiprotone è dovuta a Chamberlain, Segré, Wiegand e Ypsilantis (1955). Lo schema dell'esperimento è illustrato in figura 6.5. Il fascio di protoni del Bevatron colpisce un bersaglio di rame. I prodotti dell'interazione tra proiettile e bersaglio sono selezionati in momento già dal magnete della macchina presso il quale è posto il bersaglio di rame. le particelle cariche negativamente sono indirizzate verso una prima coppia di magneti, costituita da un dipolo deflettore seguito da un quadrupolo focalizzatore. All'uscita del dipolo, le particelle avranno direzioni diverse a seconda del loro impulso. Quelle con un impulso di  $1.19 \text{ GeV}/c$ , corrispondente all'impulso aspettato per la produzione a soglia degli antiprotoni, si incanalano in un apposito collimatore, ricavato in una spessa parete di schermatura. Una seconda coppia di magneti ripulisce il fascio da eventuali particelle di momento spurio, prodotte nelle interazioni con gli ultimi strati della parete che definiscono l'apertura del collimatore. Una serie di scintillatori identificano la traiettoria delle particelle dell'impulso selezionato.

Per separare gli antiprotoni dal fondo dominante di pioni negativi, copiosamente prodotti nell'interazione  $p-p$ , si utilizza un contatore Cherenkov a soglia (C1, con  $\beta > 0.78$ ) in anticoincidenza con un contatore Cherenkov differenziale (C2, con  $0.75 < \beta < 0.78$ ). Gli antiprotoni, tenendo conto delle perdite per ionizzazione nei due scintillatori a monte, hanno un  $\beta$  medio di circa 0.765, mentre i pioni hanno  $\beta = 0.99$ . Per aumentare la reiezione dei pioni si utilizza poi la tecnica del tempo di volo tra i due scintillatori S1 e S2, separati da 12.2 m: i tempi di volo per pioni e antiprotoni sono rispettivamente 40 e 51 ns.

Nel primo esperimento furono osservati 60 candidati antiprotoni. Per confermare la natura di tali particelle, era però necessario osservare la loro annichilazione con i protoni della materia. L'annichilazione  $\bar{p}-p$  può produrre sia uno stato finale a più fotoni, sia uno stato finale a più pioni. Successivamente entrambe queste annichilazioni furono osservate presso la stessa linea di fascio, utilizzando nel primo caso un contatore Cherenkov in vetro al piombo che misurava l'energia totale depositata dai fotoni, nel secondo registrando le tracce dei pioni in emulsioni nucleari.

Un paio d'anni dopo la scoperta dell'antiprotone, al Bevatron era già possibile realizzare un intenso fascio di antiprotoni, col quale fu scoperto l'antineutrone, e successivamente, in camera a bolle o in emulsioni, furono osservate le varie antiparticelle dell'ottetto dei barioni (paragrafo 6.5).



XBD 9606-02963

Figura 6.5: Schema dell'esperimento di Chamberlain, Segré, Wiegand e Ypsilantis al Bevatron. T: bersaglio di rame. M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>: magneti deflectori. Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>: quadrupoli focalizzatori. S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>, S<sub>3</sub>, S<sub>4</sub>: scintillatori . C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>: contatori Cherenkov (© Lawrence Berkeley National Laboratory).

## 6.8 Neutrini

### 6.8.1 L'ipotesi del neutrino

Abbiamo visto nel paragrafo 2.2 come fin dal 1898 Rutherford aveva mostrato che la radiazione dal decadimento dell'uranio, scoperta da Becquerel, aveva due componenti, la radiazione  $\beta$  più penetrante, poi identificata con gli elettroni, e la radiazione  $\alpha$  poco penetrante. Negli anni successivi i risultati degli esperimenti mostrarono che con l'emissione  $\beta$  un nucleo cambia numero atomico e che i decadimenti  $\beta$  avvengono con vite medie distribuite tra i millisecondi e i miliardi di anni. Nel 1904 Bragg aveva dimostrato che particelle  $\alpha$  di una stessa sorgente attraversano la stessa distanza di un rivelatore prima di fermarsi: ne aveva quindi dedotto che i decadimenti  $\alpha$  sono monoenergetici. Nel 1914 J. Chadwick scoprì che, oltre agli elettroni prodotti per conversione interna, e quindi con energia ben definita essendo un processo a due corpi, i nuclei emettono elettroni con uno spettro di energia continuo (figura 6.6).

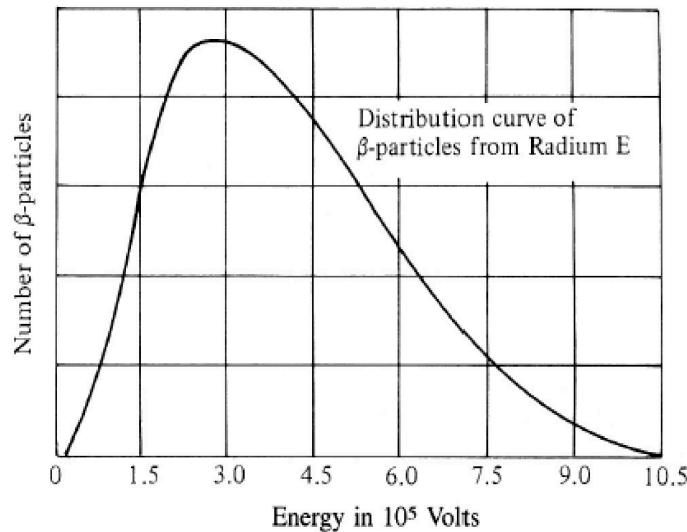
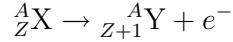


Figura 6.6: Distribuzione delle energie degli elettroni emessi nel decadimento del *radium E*, ossia il  $^{210}\text{Bi}$ , un isotopo radioattivo prodotto nella catena di decadimento dell' $^{238}\text{U}$ .

Chadwick notò subito che se il decadimento coinvolge solo i nuclei e l'elettrone con una transizione del tipo



allora l'elettrone emesso dovrebbe essere monoenergetico, con una energia totale che, se si trascura l'energia cinetica associata al rinculo del nucleo Y,  $T_Y = 1/2 \cdot p_e^2/M_Y$ , è data da

$$E_e = \sqrt{(p_e c)^2 + m_e^2 c^4} \simeq (M_X - M_Y)c^2 \quad (6.6)$$

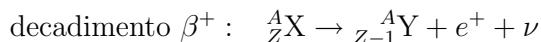
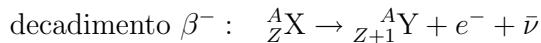
Quindi, per conservare energia ed impulso, oltre all'elettrone ed al nucleo Y si deve produrre energia sotto forma di radiazione neutra.

Prima del 1930 per risolvere il puzzle furono proposte parecchie soluzioni, tutte sbagliate, inclusa quella della non conservazione dell'energia. Tra l'altro, nell'ipotesi del decadimento a due corpi sorgono anche problemi legati alla statistica: infatti i nuclei X e Y, avendo lo stesso numero di nucleoni, o sono entrambi bosoni o entrambi fermioni: non è quindi possibile avere un solo nuovo fermione nello stato finale. Ed ancora, se i nuclei sono bosoni il momento angolare totale è un multiplo intero di  $\hbar$  nello stato iniziale e semi-intero in quello finale, e viceversa se sono fermioni, per cui non si conserva il momento angolare. Questo implica anche che l'eventuale energia mancante non può essere dovuta a radiazione  $\gamma$  visto che il fotone ha spin 1.

Nel 1930 W. Pauli, per ristabilire tutte le leggi di conservazione, ipotizzò che nel decadimento  $\beta$ , insieme all'elettrone, fosse anche emessa una particella neutra e di spin 1/2, che non interagisce né in modo elettromagnetico né nucleare, che chiamò neutrone e che Fermi ribattezzò “neutrino” dopo la scoperta del neutrone (vedi il par. 3.10). L'ipotesi del neutrino risolve il problema dell'energia mancante (il neutrino non interagisce nei rivelatori e se ne va inosservato), della statistica e della conservazione del momento angolare. Inoltre il valore osservato della massima energia dell'elettrone,  $E_{\max}^e$ , ci dice che il neutrino deve avere una massa estremamente piccola.

### 6.8.2 La teoria di Fermi

Nei nuclei si osservano tre diversi tipi di decadimento  $\beta$ :





Le vite medie associate ai decadimenti  $\beta$  hanno uno spettro molto ampio. Tuttavia nel 1933 Sargent aveva notato che, per  $E_{\max}^e \gg m_e c^2$ , la vita media dipende dalla quinta potenza di  $E_{\max}^e$ :

$$\tau \simeq \frac{1}{(E_{\max}^e)^5}. \quad (6.7)$$

Nel 1934, Fermi, prendendo come modello la descrizione della diffusione elettrone-protone fornita dall'elettrodinamica quantistica, propone anche per il decadimento  $\beta$  un tipo di interazione basato su una teoria di campo, nella quale le particelle emesse nel decadimento non sono presenti nel nucleo prima della loro emissione, ma vengono create nell'istante del decadimento. Fermi utilizza il formalismo matematico degli operatori di creazione e distruzione delle particelle introdotto da Jordan per l'elettrodinamica. In questo caso però, l'interazione è puntiforme e viene detta *interazione a quattro fermioni*, costituendo una interazione “di contatto” tra le quattro particelle di spin 1/2 coinvolte nella reazione, il neutrone (che costituisce lo stato iniziale), il protone, l'elettrone ed il neutrino (che costituiscono lo stato finale).

La natura di contatto dell'interazione si traduce nel fatto che nel calcolo della probabilità di decadimento non compare nessun termine associato ad un propagatore dell'interazione. Nel caso del decadimento del neutrone libero, lo stato iniziale è  $\Psi_i = \Psi_n$  mentre lo stato finale è  $\Psi_f = \Psi_p \Psi_e \Psi_\nu$ , per cui l'hamiltoniano della interazione può essere scritto come:

$$H_{fi} = \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle = \int \Psi_f^* H_{\text{int}} \Psi_i dv = G_F \int \Psi_p^* \Psi_e^* \Psi_\nu^* \Psi_n dv \quad (6.8)$$

dove la costante  $G_F$  rappresenta l'intensità dell'interazione. Poiché  $H$  ha le dimensioni di un'energia e il prodotto di due funzioni d'onda esprime una probabilità per unità di volume, l'integrale ha le dimensioni dell'inverso di un volume e  $G$  deve avere quindi le dimensioni di un'energia per un volume,  $[G] = [EV]$ . In unità naturali,  $\hbar = c = 1$ ,  $[V] = [E^{-3}]$ , per cui  $[G] = [E^{-2}]$  e si esprime quindi in  $\text{eV}^{-2}$ .

Nei decadimenti nucleari, nei quali il ruolo del protone e del neutrone possono essere scambiati tra stato iniziale e stato finale, le funzioni d'onda della parte nucleare dipenderanno dal tipo di nucleo, per cui le indicheremo genericamente  $\Psi_{iN}$  e  $\Psi_{fN}$ , mentre il volume di integrazione si ridurrà al

volume nucleare, che indicheremo con  $\Omega$ . L'hamiltoniano sarà quindi:

$$H_{fi} = G_F \int \Psi_{fN}^* \Psi_e^* \Psi_\nu^* \Psi_{iN} d\Omega. \quad (6.9)$$

Poiché il neutrino e l'elettrone non hanno interazione nucleare, potremo assumere che le loro funzioni di stato siano onde piane normalizzate in  $\Omega$ :

$$\Psi_e = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}, \quad \Psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}$$

e il loro prodotto è

$$\Psi_e \Psi_\nu = \frac{1}{\Omega} e^{i(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{r}/\hbar}$$

Se consideriamo che energie ed impulsi devono essere dell'ordine delle transizioni nucleari, ossia di qualche MeV, e che le posizioni all'interno di  $\Omega$  devono essere dell'ordine del fermi, vediamo che  $(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{r}/\hbar$  è sempre molto piccolo, per cui le funzioni d'onda possono essere sviluppate in serie:

$$\Psi_e \Psi_\nu = \frac{1}{\Omega} [1 + \frac{i(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{r}}{\hbar} + \frac{1}{2} \left( \frac{i(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{r}}{\hbar} \right)^2 + \dots] \quad (6.10)$$

dove i termini successivi sono via via più piccoli. Il primo termine non dipende da  $\vartheta$ . Ora, se sviluppiamo alternativamente la funzione d'onda in armoniche sferiche, vediamo che l'unico termine che non dipende da  $\vartheta$  è l'onda  $s$ , ossia quello con momento orbitale uguale a zero. Quindi il primo termine dello sviluppo,  $\Psi_e \Psi_\nu = \frac{1}{\Omega}$ , corrisponde all'emissione di una coppia elettrone-neutrino con momento orbitale nullo. I termini successivi corrispondono invece all'emissione di una coppia di leptoni con momento orbitale diverso da zero, e dunque alla variazione del momento angolare dei nucleo, che avranno probabilità molto minori. Il primo termine corrisponde alle *transizioni permesse*, i termini successivi costituiscono le *transizioni proibite*. Tuttavia, se la differenza tra i momenti angolari dei nuclei iniziale e finale richiede che i leptoni compensino la variazione di momento angolare, il decadimento avverrà attraverso una transizione proibita, e avrà probabilità molto minore.

Se consideriamo solo le transizioni permesse, l'hamiltoniano sarà quindi:

$$H_{fi} = \frac{G_F}{\Omega} \int \Psi_{fN}^* \Psi_{iN} d\Omega = \frac{G_F M_{fi}}{\Omega} \quad (6.11)$$

dove  $M_{fi}$  è l'elemento di matrice dell'interazione nucleare che dipende dalla natura dei nuclei coinvolti, ma non dalle energie dei leptoni.

Per passare ora alle probabilità di transizione, e quindi alle vite medie, bisogna ricorrere alla regola d'oro di Fermi (vedi 5.A, eq. 5.40).

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}|^2 \rho = \frac{2\pi G_F^2}{\hbar \Omega^2} |M_{fi}|^2 \rho. \quad (6.12)$$

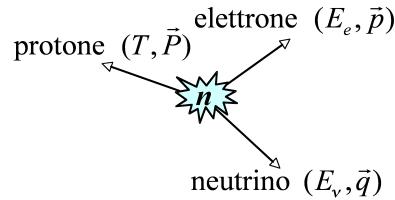


Figura 6.7: Energia ed impulso dei prodotti di decadimento nel riferimento di quiete del neutrone.

Rimane ora da calcolare la densità dello spazio delle fasi  $\rho(E)$ , che rappresenta il numero di modi nei quali è possibile ripartire tra le particelle dello stato finale l'energia  $dE_0$  dovuta all'indeterminazione con cui è nota l'energia iniziale. Consideriamo la transizione tra due stati nucleari che possiamo considerare fermi, a causa della loro massa molto maggiore di quella dell'elettrone e del neutrino emessi. Possiamo quindi limitare il calcolo alla distribuzione in energia dell'elettrone e del neutrino. Con riferimento al decadimento elementare  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ , mettiamoci nel sistema di riferimento del neutrone, dove, usando i simboli introdotti nella fig.6.7, si può scrivere  $\vec{P} + \vec{p} + \vec{q} = 0$  e  $T + E_e + E_\nu = E_0 = m_n - m_p \simeq 1 \text{ MeV}$ . Poiché  $pc < E_e < E_0$  e  $qc < E_e < E_0$ , l'impulso del protone  $P$  sarà dell'ordine del  $\text{MeV}/c$ , per cui  $T = P^2/2m_p \sim 10^{-3} \text{ MeV} \sim 0$ . L'energia  $E_0$  a disposizione si ripartisce quindi tra l'elettrone e l'antineutrino. Assumendo per l'antineutrino una massa nulla,  $qc = E_\nu = E_0 - E_e$ . Il numero di stati dell'elettrone con impulso compreso tra  $p$  e  $p + dp$  è

$$dN_e = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \quad (6.13)$$

mentre il numero di stati dell'antineutrino con impulso compreso tra  $q$  e  $q + dq$  è

$$dN_\nu = \frac{4\pi q^2 dq}{(2\pi\hbar)^3} \quad (6.14)$$

Fissati  $p$  e  $q$ , il momento del protone è fissato dalla conservazione dell'energia e dell'impulso, per cui non contribuisce allo spazio delle fasi. I fattori dell'elettrone e dell'antineutrino devono invece essere moltiplicati tra di loro, essendo gli impulsi delle due particelle indipendenti:

$$dN = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} p^2 dp q^2 dq \quad (6.15)$$

Se fissiamo un valore  $(E_e, p)$  per l'elettrone, avremo che  $d(qc) = dE_0$ , dove  $dE_0$  rappresenta l'effetto del principio di indeterminazione sull'energia dovuto alla vita media finita dello stato iniziale. Abbiamo pertanto

$$\frac{dN}{dE_0} = \frac{dN}{c dq} = \frac{1}{4\pi^4 \hbar^6 c} p^2 (E_0 - E_e)^2 dp \quad (6.16)$$

Se introduciamo questo fattore dello spazio delle fasi nella regola d'oro, possiamo integrare su tutto l'angolo solido e tenendo conto che l'elemento di matrice è indipendente dall'energia dei leptoni, otteniamo

$$N(p)dp \propto p^2 (E_0 - E_e)^2 dp. \quad (6.17)$$

Dividendo per  $p^2 dp$  ed estraendo la radice otteniamo lo spettro di energia dell'elettrone nel decadimento  $\beta$ :

$$\sqrt{N(p)/p^2} \propto (E_0 - E_e) \quad (6.18)$$

che rappresenta un andamento rettilineo di  $N(p)/p^2$  in funzione di  $E_e$ . Questo grafico è detto *plot di Kurie* e la retta incrocia l'asse delle  $x$  per  $E_e = E_0$ . Se il neutrino è dotato di massa, la curva si deve discostare dall'andamento rettilineo in prossimità di  $E_e = E_0$  (*end point* della distribuzione). È questa la tecnica con cui si cerca di determinare in modo diretto la massa dei neutrini. Tuttavia questi esperimenti sono estremamente difficili, poiché il numero di eventi in prossimità dell'end-point è piccolissimo e lo spettro è complicato da molti effetti: la limitata risoluzione nell'energia dell'elettrone, le perdite di energia dell'elettrone all'interno della sorgente, gli effetti dovuti ai legami molecolari.

Se integriamo la (6.17) nell'ipotesi di elettroni relativistici ( $pc \simeq E_e$ ), otteniamo che il numero di eventi (e quindi la probabilità di decadimento) va come la quinta potenza della massima energia dell'elettrone, data da  $E_0$ : ritroviamo quindi la regola di Sargent.

### 6.8.3 La scoperta sperimentale del neutrino

Il successo della teoria di Fermi nel descrivere i decadimenti nucleari e i decadimenti deboli delle particelle era una convincente evidenza “indiretta” della esistenza del neutrino; dalla ipotesi di Pauli ci sono voluti però più di 25 anni per rivelare gli effetti di una interazione da neutrino in un esperimento. Questo è dovuto ai valori incredibilmente piccoli delle sezioni d’urto delle interazioni neutrino-materia. Dalla teoria di Fermi abbiamo infatti  $\sigma(\nu p) \simeq 10^{-43} \text{ cm}^2 \text{ MeV}^{-2} E_\nu^2$ . Per rivelare queste interazioni è quindi necessario disporre di una sorgente di neutrini con un flusso elevatissimo e di un bersaglio dotato di una massa molto elevata. Le interazioni di neutrino o antineutrino più semplici sono quelle di *decadimento β inverso*,

$$\nu_e + n \rightarrow e^- + p$$

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$$

Nel 1956, G. Cowan e F. Reines proposero di sfruttare l’alto flusso di  $\bar{\nu}_e$  prodotti dalla fissione dell’uranio nel reattore da 1 GW di potenza dell’impianto di Savannah-River. I reattori nucleari sono sorgenti molto intense di  $\bar{\nu}_e$  che derivano dal decadimento  $\beta$  dei neutroni di cui sono ricchi i frammenti della fissione nucleare.

Il flusso di neutrini dal reattore può essere stimato considerando che in media una reazione di fissione fornisce 200 MeV di energia termica e produce 6  $\bar{\nu}_e$  per fissione, per cui, indicando con  $P_t$  la potenza termica in Watt del reattore, il flusso sull’intero angolo solido è dato da:

$$\Phi_\Omega = \frac{P_t}{200 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} 6 \text{ s}^{-1} = 1.87 \cdot 10^{11} P_t \text{ s}^{-1} \quad (6.19)$$

Per un reattore da 1 GW abbiamo dunque un  $\Phi_\Omega \sim 1.9 \cdot 10^{20}$  antineutrini/s, con uno spettro continuo e un’energia media di  $\sim 3$  MeV. Naturalmente la distribuzione di questi neutrini è praticamente isotropa, per cui è comunque necessario un rivelatore di grandi dimensioni, posto sufficientemente vicino al reattore.

L’apparato progettato da Cowan e Reines è costituito da un bersaglio di circa 1000 litri di soluzione acquosa di cloruro di cadmio,  $\text{CdCl}_2$ , contenuto in due recipienti alternati con altri tre contenitori riempiti di uno scintillatore liquido che funge da rivelatore (figura 6.8).

La segnatura sperimentale della reazione da neutrino è la seguente:

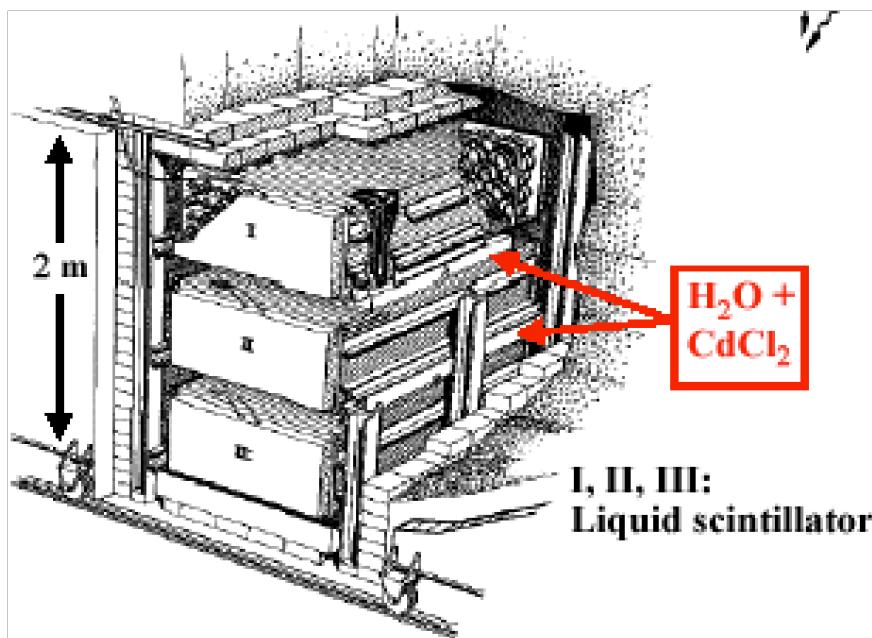


Figura 6.8: L'esperimento di Cowan e Reines.

- il positrone prodotto dalla reazione si annichila rapidamente con un elettrone dell'acqua in una coppia di fotoni, che producono luce per effetto Compton negli scintillatori che circondano l'acqua. La luce viene rivelata con dei fotomoltiplicatori. Il tempo caratteristico è di circa  $10^{-9}$  s e la coincidenza tra due scintillatori (I e II oppure II e III della figura 6.8) rappresenta il  $t_0$  della misura;
- il neutrone viene rallentato (“moderato”) dalle collisioni con l’acqua ed in un tempo di  $\sim 10^{-5}$  s viene catturato dal cadmio. Dalla cattura vengono emessi fotoni da  $\sim 6$  MeV. Abbiamo quindi una coincidenza ritardata rispetto a  $t_0$  nella stessa coppia di scintillatori e questo definisce la strategia della presa dati.

La segnatura che distingue gli eventi cercati è dunque una doppia coincidenza in una stessa coppia di scintillatori, separata da un tempo di qualche microsecondo. In una prima serie di misure della durata di 200 ore furono raccolti 567 eventi di questo tipo. Il fondo stimato a reattore spento era

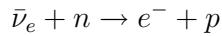
di 209 eventi. La fluttuazione del fondo aspettata è quindi  $\sqrt{209}$ , per cui l'osservazione di 567 eventi è molto significativa. Il risultato della misura è

$$\sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+) = (1.1 \pm 0.3) \cdot 10^{-43} \text{ cm}^2$$

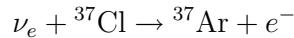
Reines ricevette il premio Nobel per questo esperimento nel 1995.

#### 6.8.4 Il neutrino muonico

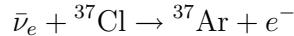
Il fatto che nell'esperimento di Cowan e Reines non si fossero trovati eventi del tipo



si può considerare una evidenza sperimentale che il neutrino è diverso dall'antineutrino. Questo tipo di reazioni non avviene neanche all'interno di un nucleo, come si può stabilire confrontando la reazione



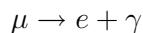
effettivamente osservata, con la reazione



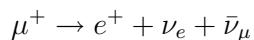
che invece non viene osservata. Queste reazioni prendono il nome di *reazioni di Pontecorvo-Davis*.

La differenza tra  $\nu_e$  e  $\bar{\nu}_e$  non deve essere considerata scontata, poiché il neutrino è una particella neutra. Per giustificarla si può introdurre un nuovo numero quantico, il *numero leptonico*, che è posto uguale ad 1 per elettrone e neutrino e -1 per positrone ed antineutrino.

Un'altra questione è se i neutrini che compaiono nei decadimenti dei muoni e dei pioni siano gli stessi di quelli che compaiono nei decadimenti  $\beta$ . In questo caso sarebbe possibile il decadimento elettromagnetico del muone:



per il quale già alla fine degli anni '50 c'era un limite superiore di  $10^5$  volte il decadimento  $\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ . Questa assenza richiede quindi che il numero leptonico dell'elettrone sia diverso dal numero leptonico del muone, per cui questi si devono conservare separatamente:



$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

Bruno Pontecorvo aveva sempre pensato che i due neutrini fossero diversi, tanto che aveva proposto di chiamarli con due nomi diversi, neutrino e *neutretto*. Nel 1959 lui e M. Schwartz proposero in modo indipendente di studiare le interazioni di neutrini prodotto dagli acceleratori, usando i decadimenti di  $\pi$  e  $K$  come sorgenti di fasci di neutrini. Questa realizzazione era resa possibile dalla costruzione di due nuovi acceleratori, il protosincrotrone (PS) da 28 GeV del CERN di Ginevra e l'Alternating Gradient Synchrotron (AGS), entrato in funzione a Brookhaven nel 1960. Questa nuova generazione di acceleratori utilizzava il principio della "focalizzazione forte", che permetteva di raggiungere energie sempre più elevate.

L'esperimento che doveva mettere in luce l'esistenza di due tipi di neutrini fu progettato nel 1962 da Lederman, Schwartz e Steinberger nel 1962 per il fascio di neutrini dell'AGS. Se esiste un solo tipo di neutrino, nell'interazione col bersaglio questo deve produrre con la stessa probabilità muoni ed elettroni. Se i neutrini sono diversi, poiché i mesoni  $\pi$  e  $K$  decadono per lo più in muoni, il fascio di neutrini è costituito essenzialmente di  $\nu_\mu$  e questi non possono produrre elettroni nello stato finale, per cui l'unica reazione che si osserva deve essere

$$\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + X.$$

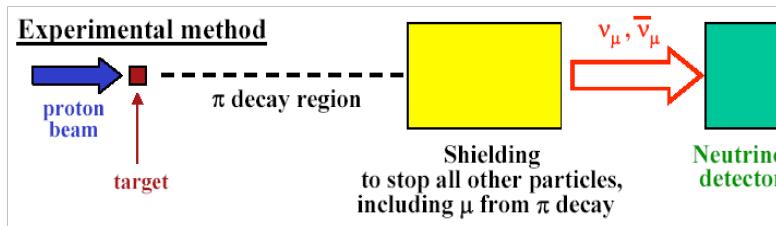


Figura 6.9: Schema dell'esperimento di Lederman, Schwartz e Steinberger: il fascio di protoni colpisce una bersaglio di berillio; i mesoni prodotti vengono fatti decadere nel vuoto e successivamente tutte le particelle cariche sono assorbite da uno schermo in ferro, da cui fuoriescono solo i neutrini.

I pioni ed i kaoni erano prodotti dalle interazioni dei protoni da 15 GeV dell'AGS che colpivano un bersaglio di berillio. I pioni e i kaoni, decadendo in volo, producevano il fascio di neutrini. Un muro di ferro, spesso 13.5 metri

e posto ad una distanza di 21 metri dal bersaglio di berillio, fermava tutte le particelle secondarie cariche prodotte dall'interazione dei protoni sul berillio, ivi inclusi i muoni provenienti dai decadimenti in volo dei pioni e dei kaoni. Le interazioni da neutrini venivano osservate con un rivelatore a camere a scintilla di alluminio, con una massa totale di 10 tonnellate, posto dietro il muro di ferro (Fig. 6.9).

Il rivelatore consisteva di una serie di 90 piani (ciscuno di  $1.2 \text{ m}^2$ ) di camere a scintilla in alluminio ed era in grado di distinguere il segnale di una particella lunga e penetrante che perde energia al minimo, come un muone, e rispetto a quello dovuto alla cascata elettromagnetica di un elettrone, caratterizzato da una serie di tracce corte con molte scintille.

Con 300 ora di raccolta dati furono selezionati

- 34 eventi con un muone singolo, candidati per le reazioni

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$$

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$$

- 2 eventi consistenti con cascate elettromagnetiche di un elettrone, dovute alla contaminazione di  $\nu_e$  nel fascio.

Il neutrino associato all'elettrone ed il neutrino associato al muone sono dunque due particelle differenti. Ci limitiamo qui ad osservare che nel 1974 fu scoperto un nuovo leptone carico, il leptone  $\tau$  (in greco  $\tau$  vuole appunto dire terzo) e che nel 2002 sono stati rivelati tre eventi da interazione da neutrino  $\tau$ . Negli anni '90 a LEP è stato infine dimostrato che non ci sono ulteriori neutrini (almeno con masse minori della metà della massa del bosone intermedio  $Z$ ). Possiamo quindi affermare che esistono tre distinte famiglie di leptoni e che i numeri leptonici ad esse associati si conservano separatamente.

# Capitolo 7

## Invarianza e Simmetrie

Sappiamo che in meccanica la conservazione della quantità di moto e del momento angolare sono collegate rispettivamente alla omogeneità e all'isotropia dello spazio. Queste sono due proprietà di invarianza, nel senso che sono legate all'invarianza dello spazio vuoto per traslazioni e per rotazioni. In meccanica quantistica questo legame tra invarianza e conservazione può essere messo in luce in maniera molto semplice. Sappiamo infatti che l'evoluzione temporale della funzione d'onda di un qualunque sistema fisico è governata dall'operatore hamiltoniano, secondo l'equazione

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (7.1)$$

e che l'operatore che corrisponde alla derivata di un qualunque operatore  $f$  (non dipendente esplicitamente dal tempo) è dato dal commutatore dell'operatore con  $H$ :

$$\hat{f} = \frac{i}{\hbar} (\hat{H}\hat{f} - \hat{f}\hat{H}) \quad (7.2)$$

per cui gli operatori che rappresentano quantità conservative ( $\dot{f} = 0$ ) devono commutare con  $H$ . In termini di autostati, si può dire che se in un certo istante la  $\psi$  è un autostato di  $\hat{f}$ , per cui la grandezza  $f$  ha un valore determinato, negli istanti successivi la grandezza  $f$  continua ad avere un valore determinato, che deve essere lo stesso di prima.

Ora l'hamiltoniano di una singola particella libera è dato da

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (7.3)$$

e come si vede facilmente, è invariante per traslazione:

$$\hat{H}(\vec{r}') = \hat{H}(\vec{r} + \delta\vec{r}) = \hat{H}(\vec{r}). \quad (7.4)$$

Chiamando  $\hat{D}$  l'operatore che opera una traslazione su una qualunque funzione d'onda si ha:

$$\hat{D}\psi(\vec{r}) \equiv \psi(\vec{r} + \delta\vec{r}) = \psi(\vec{r}) + \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\psi(\vec{r}) \quad (7.5)$$

per cui, essendo  $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ , otteniamo

$$\hat{D} = 1 + i/\hbar \delta\vec{r} \cdot \vec{p}. \quad (7.6)$$

Ora applichiamo l'operatore  $\hat{D}$  al prodotto  $\hat{H}(\vec{r})\psi(\vec{r})$ . Abbiamo

$$\hat{D}\hat{H}(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \hat{H}(\vec{r} + \delta\vec{r})\psi(\vec{r} + \delta\vec{r}) = \hat{H}(\vec{r})\psi(\vec{r} + \delta\vec{r}) = \hat{H}(\vec{r})\hat{D}\psi(\vec{r}) \quad (7.7)$$

dove abbiamo sfruttato l'invarianza per traslazioni di  $\hat{H}$ . L'ultima relazione si può scrivere

$$\begin{aligned} \hat{D}\hat{H} - \hat{H}\hat{D} &= 0 \\ \hat{H} + i/\hbar \delta\vec{r} \cdot \vec{p}\hat{H} - \hat{H} - \hat{H}i/\hbar \delta\vec{r} \cdot \vec{p} &= 0 \\ i/\hbar \delta\vec{r} \cdot (\vec{p}\hat{H} - \hat{H}\vec{p}) &= 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

da cui

$$\vec{p}\hat{H} - \hat{H}\vec{p} = 0 \quad (7.9)$$

che esprime la conservazione dell'impulso.

Analogamente si può derivare la conservazione del momento angolare dalla invarianza dell'hamiltoniana per rotazioni intorno ad un asse. Ora, in linguaggio geometrico, l'invarianza dell'hamiltoniano sotto una determinata trasformazione sta a significare che l'hamiltoniano è simmetrico rispetto alla trasformazione data, ossia che tale trasformazione riporta l'hamiltoniano su se stesso. La *simmetria* dell'hamiltoniano sotto queste trasformazioni implica quindi la conservazione delle quantità fisiche che corrispondono alle trasformazioni stesse.

Se l'hamiltoniano in considerazione è quello che regola l'interazione di un sistema di particelle, l'esame delle proprietà di simmetria di  $H$  può essere uno strumento molto potente per analizzare la conservazione dei numeri quantici

nell'interazione stessa. D'altra parte, l'osservazione sperimentale della conservazione (o non conservazione) dei numeri quantici in una certa interazione permette di studiare le proprietà dell'hamiltoniana dell'interazione stessa.

A titolo di esempio, che sarà discusso nel paragrafo 7.5, il fatto che le interazioni nucleari forti sono indipendenti dalla carica (per esempio le forze nucleari non distinguono tra protone e neutrone) porta ad introdurre un numero quantico "interno", l'isospin, che distingue il protone e il neutrone. L'hamiltoniano delle interazioni forti deve essere quindi simmetrico per rotazioni nello spazio dell'isospin, e l'isospin deve quindi essere conservato. Inoltre le regole di combinazione dell'isospin permettono di determinare lo spettro che ci dobbiamo aspettare quando consideriamo i sistemi costituiti da più adroni.

Ma il risultato più sorprendente trovato in base alle analisi delle proprietà di simmetria delle interazioni elementari è senza dubbio la *violazione della parità nelle interazioni deboli*, che verrà discussa nel paragrafo 7.4. Prima dobbiamo però introdurre la trasformazione di riflessione o *parità spaziale*.

## 7.1 Parità

L'espressione (7.3) dell'hamiltoniano di particella libera, oltre ad essere invariante per traslazioni e per rotazioni, è anche palesemente invariante per il cambiamento simultaneo del segno di tutte e tre le coordinate,  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ . Notiamo subito che questa trasformazione corrisponde ad una inversione speculare, ossia al cambiamento di una sola delle tre coordinate seguito da una rotazione di  $180^\circ$  intorno all'asse di questa, per cui si parla solitamente di riflessione. Notiamo anche che non è possibile ottenere la riflessione semplicemente combinando delle rotazioni, e che invece cambiando segno successivamente a due assi qualunque si ottiene un sistema che può essere sovrapposto di nuovo con successive rotazioni al sistema di partenza. In altri termini, ogni riflessione cambia una terna levogira in una destrogira e viceversa. Questa alternanza di due casi possibili in una serie di riflessioni è l'origine del termine di *parità* per indicare questa trasformazione.

L'operatore corrispondente alla riflessione è  $\hat{P}$ , definito da

$$\hat{P}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}). \quad (7.10)$$

Applicando due volte l'operatore  $\hat{P}$  si riottiene lo stato di partenza, per cui gli autostati della parità devono avere  $P^2 = 1$ , ossia  $P = \pm 1$ . Gli stati con

$P = 1$  sono detti *pari*, mentre quelli con  $P = -1$  sono detti *dispari*. Se consideriamo un sistema di più particelle indipendenti, la funzione d'onda complessiva sarà il prodotto delle funzioni d'onda delle singole particelle. Applicando  $\hat{P}$  alla funzione d'onda complessiva, questa risulterà moltiplicata per  $\pm 1$  a seconda che il prodotto di tutte le parità delle singole particelle sia  $\pm 1$ , ossia:  $P_T = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots$ . La parità è quindi un numero quantico moltiplicativo.

La parità degli autostati del momento angolare si deriva facilmente dalla forma delle armoniche sferiche, da cui risulta  $P = (-1)^l$ .

Se l'hamiltoniano di un sistema è simmetrico rispetto alla parità, ossia se è invariante per riflessioni spaziali (e quindi commuta con l'operatore parità,  $\hat{P}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}$ ) allora la parità è conservata, per cui se il sistema è in uno stato di parità definita (autostato della parità) questa parità si conserva. Se lo stato iniziale di una interazione il cui hamiltoniano sia simmetrico rispetto alla parità ha una parità definita, anche lo stato finale deve avere la stessa parità.

Poiché per una particella libera, data l'invarianza per riflessioni del suo hamiltoniano, la parità è conservata, si potrebbe pensare, in analogia con l'impulso ed il momento angolare, che si debba conservare anche la parità di un sistema isolato. Ossia che le leggi fisiche che regolano le interazioni del sistema isolato, oltre ad essere simmetriche per traslazioni nello spazio e per rotazioni dello spazio, lo debbano essere anche per riflessioni. Con linguaggio figurato, si potrebbe dire che le leggi fisiche sono le stesse al di qua e al di là di uno specchio. Questa era in effetti una convinzione radicata, fino alla scoperta della violazione della parità nelle interazioni deboli (paragrafo 7.4).

Se consideriamo la natura geometrica delle varie grandezze fisiche, vediamo che oltre alla solita classificazione in scalari, vettori ecc. dobbiamo aggiungere anche le proprietà di trasformazione sotto la parità. Tra le quantità scalari, chiameremo *pseudoscalari* quelle che hanno parità negativa, e semplicemente scalari le altre. I normali vettori, come la posizione o l'impulso, hanno evidentemente parità negativa, mentre il prodotto vettoriale di due vettori non cambia di segno, e viene quindi detto *pseudovettore*: il momento angolare è quindi uno pseudovettore. Il prodotto scalare di due vettori o di due pseudovettori è uno scalare, mentre il prodotto scalare di un vettore con uno pseudovettore è uno pseudoscalare. Se l'hamiltoniano di interazione (e quindi in definitiva la probabilità di transizione) dipende da una quantità dispari, e quindi non è simmetrico rispetto alla parità, in quella interazione la parità non sarà conservata.

## 7.2 Parità intrinseca

Come nell'analisi della conservazione del momento angolare è necessario includere nel conto il momento angolare intrinseco delle varie particelle, così ci si può domandare se le singole particelle abbiano una parità intrinseca. Finché il numero totale di particelle dello stesso tipo non cambia nell'evoluzione del sistema, dato il carattere moltiplicativo della parità, il prodotto di tutte le parità intrinseche dello stato iniziale deve essere uguale al prodotto di tutte le parità intrinseche dello stato finale, e non può quindi essere determinato sperimentalmente. Nelle interazioni nelle quali il numero delle particelle cambia, per esempio perché viene prodotta una singola particella, come nel caso dei bosoni, o una coppia di particelle, come nel caso dei fermioni, possiamo invece portare avanti una analisi di questo tipo e determinare la parità intrinseca delle particelle in base alle reazioni che vengono effettivamente osservate. La situazione è abbastanza diversa per fermioni o bosoni, sempre a causa del carattere moltiplicativo della parità.

### 7.2.1 Parità dei fermioni

Poiché i fermioni devono essere sempre prodotti (o annichilano) in coppie, non è possibile determinare la parità assoluta di particella e antiparticella, ma solo la loro parità relativa.

La parità relativa di elettrone e positrone può essere determinata analizzando le annichilazioni

$$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$$

dove la coppia  $e^+e^-$  si trova in uno stato detto *parapositronio* caratterizzato dall'avere momento totale nullo (onda  $s$ ). La parità iniziale è quindi  $P_i = P_{e^+}P_{e^-}$ . La parità di uno stato con due fotoni con momento totale nullo è positiva o negativa a seconda che i vettori polarizzazione dei due fotoni siano tra loro paralleli o ortogonali<sup>1</sup>. Una misura indiretta della polarizzazione dei fotoni dello stato finale mostra che le polarizzazioni sono ortogonali e quindi che il prodotto  $P_{e^+}P_{e^-}$  deve essere negativo.

Questo risultato è coerente con la teoria quantistica relativistica, nella quale la funzione d'onda dei fermioni descrive contemporaneamente la coppia fermione-antifermione e l'equazione che governa questa funzione d'onda, l'equazione di Dirac, richiede che ciascun fermione abbia parità opposta a

---

<sup>1</sup>Si veda ad esempio L. Landau, E. Lifchiz: Teoria quantistica relativistica, par. 9.

quella del corrispondente antifermione. Essendo arbitraria la parità assoluta dei fermioni, per ogni coppia fermione-antifermione (elettrone, muone, protone ecc.) per convenzione si fissa positiva la parità del fermione e negativa quella dell'antifermione:

$$P_{e^-} = P_{\mu^-} = P_{\tau^-} = P_p = P_n \equiv 1$$

$$P_{e^+} = P_{\mu^+} = P_{\tau^+} = P_{\bar{p}} = P_{\bar{n}} \equiv -1$$

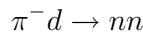
Come vedremo nel paragrafo 7.7, la scelta per la parità dei nucleoni corrisponde ad assegnare parità positiva ai quark e negativa agli antiquark.

### 7.2.2 Parità dei fotoni

La densità di carica elettrica è uno scalare e l'operatore divergenza è dispari, per cui dalla prima equazione di Maxwell,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ , segue che il campo elettrico deve essere dispari, ed è quindi un vettore. Essendo dispari anche l'operatore gradiente ed essendo pari la derivata rispetto al tempo, dalla relazione tra campo elettrico e potenziali,  $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$ , segue che  $\phi$  è uno scalare ed  $\vec{A}$  un vettore. Se il potenziale vettore rappresenta quindi il limite classico del campo del fotone, la parità intrinseca del fotone deve essere negativa.

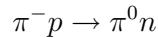
### 7.2.3 Parità dei pioni

La parità intrinseca dei pioni fu stabilita in un esperimento che studiava l'arresto di pioni negativi su bersagli di idrogeno e deuterio (Panofsky, Aamodt e Hadley, 1951). La reazione rilevante per la parità è la seguente:

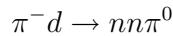


nella quale il pione è catturato negli orbitali atomici del deuterio, trasformando il protone in neutrone. Per essere assorbito, deve scendere verso i livelli più interni, con emissione di fotoni (nello spettro dei raggi  $X$ ). L'assorbimento deve avvenire in un orbitale  $s$ , l'unico con probabilità ragionevole di sovrapposizione tra pione e nucleo di deuterio. Lo spin totale del deuterio è 1 come il suo momento angolare totale  $J$ . Il suo momento orbitale è quindi nullo, per cui la parità orbitale è pari. Le parità intrinseche di  $p$  e  $n$ , come abbiamo visto, sono le stesse, per cui la parità totale del deuterio è pari. La

parità dello stato iniziale è quindi data dalla parità intrinseca del  $\pi^-$ , visto che è pari sia la sua parità orbitale (assorbimento in onda  $s$ ) che la parità del deuterio. La parità dello stato finale può essere dedotta dalla conservazione del momento angolare e dal principio di esclusione di Pauli: lo stato finale di due fermioni identici deve essere antisimmetrico ed ha momento totale  $J = 1$ , come quello iniziale (assumendo che il pion abbia spin nullo: in realtà questa circostanza fu stabilita quasi contemporaneamente, ma da altri esperimenti). Se gli spin fossero opposti ( $S = 0$ ), la funzione d'onda di spin sarebbe antisimmetrica, per cui dovrebbe essere simmetrica la funzione d'onda spaziale ( $L = 0, 2, \dots$ ) e non sarebbe possibile avere  $J = S + L = 1$ . Lo stato con spin paralleli ( $S = 1$ ) ha funzione d'onda di spin simmetrica, per cui deve essere dispari il momento orbitale e di conseguenza la parità. La parità intrinseca del  $\pi^-$  è quindi negativa. Notiamo anche che il pion neutro era stato osservato soltanto un anno prima, ma già nell'esperimento che abbiamo discusso, osservando la reazione



e soprattutto attraverso la non osservazione della reazione



si potè stabilire che anche il  $\pi^0$  ha parità negativa. Anche in questo caso, l'assunzione che i tre pioni abbiano parità negativa è in accordo col modello a quark, per il quale i pioni sono formati da coppie di quark ed antiquark (vedi il paragrafo 7.7). Notiamo anche che il fatto che per i bosoni particelle ed antiparticelle hanno la stessa parità, a differenza delle coppie di fermioni, è del tutto generale.

### 7.3 Simmetrie C e T

Un'altra simmetria o trasformazione discreta è quella che si ottiene sostituendo ad ogni particella la relativa antiparticella, scambiando quindi il segno della carica (e quindi del momento magnetico) e degli altri numeri quantici interni (numero barianico, leptonico ecc.) e lasciando invariate le grandezze dinamiche (impulso, spin ecc.). Questa simmetria è detta *coniugazione di carica* e si indica con C, mentre l'operatore che la realizza è  $\hat{C}$ . Anche per questa simmetria, la sua conservazione implica che il suo operatore commuti

con l'hamiltoniano:  $\hat{C}\hat{H} = \hat{H}\hat{C}$ . Analogamente alla parità, l'operatore  $\hat{C}$  è hermitiano, ha come autovalori  $\pm 1$  ed è un numero quantico motliplicativo. Notiamo subito che nessuna particella carica può essere autostato di  $\hat{C}$ , mentre lo è qualunque coppia di particella e antiparticella: per esse, l'autovalore sarà 1 o -1 a seconda che la funzione d'onda complessiva sia simmetrica o antisimmetrica. Le particelle neutre possono essere o meno autostati di  $\hat{C}$ : lo è per esempio il fotone (che ha C-parità negativa, come si deduce considerando che il potenziale vettore cambia di segno per lo scambio di tutte le cariche che generano il campo elettromagnetico), ma non lo è il neutrone, che è distinto dalla sua antiparticella.

Sappiamo che le interazioni forti e quelle elettromagnetiche sono invarianti sotto  $\hat{C}$ . Una conseguenza di questa circostanza è che il  $\pi_0$  decade in due fotoni, ed ha quindi C-parità positiva, mentre non decade in tre fotoni (B.R.  $< 3 \cdot 10^{-8}$ ), stato a C-parità negativa.

La terza simmetria discreta che vogliamo discutere è la trasformazione  $t \rightarrow -t$ , a cui corrisponde l'operatore di inversione temporale  $\hat{T}$ . A questo operatore, che cambia il segno a tutti gli impulsi e le proiezioni dei momenti angolari, non corrisponde nessuna osservabile, e quindi nessuna legge di conservazione. La sua “conservazione”, ossia la sua commutatività con  $\hat{H}$ , è l'analogo della reversibilità delle leggi della meccanica, per cui se si invertono istantaneamente le velocità di tutte le particelle, il moto si svolge all'indietro in maniera perfettamente invertita. Quindi se si considera una reazione che porta un certo stato iniziale in uno stato finale, la conservazione di T implica che, se si invertono gli impulsi e le proiezioni dei momenti angolari di tutte le particelle dello stato finale, la reazione inversa deve aver luogo con la stessa ampiezza.

Come per P e C, anche T è conservato nelle interazioni forti ed elettromagnetiche, ma non nelle interazioni deboli. Tuttavia si può dimostrare un teorema, detto *teorema CPT*, secondo il quale in ogni teoria quantistica relativistica l'applicazione combinata di  $\hat{C}$ ,  $\hat{P}$  e  $\hat{T}$  deve commutare con  $\hat{H}$ . Una conseguenza di questo teorema è che le masse, i momenti magnetici e le vite medie di particelle ed antiparticelle devono essere uguali. Sulla base dello stesso teorema possiamo però stabilire immediatamente che se una certa interazione non conserva la combinazione di C e P, allora in essa deve essere violata anche T, per poter conservare CPT.

## 7.4 Violazione della parità

Le prime idee sulla possibile non conservazione della parità nelle interazioni deboli vennero formulate in relazione al cosiddetto  $\theta - \tau$  puzzle (si veda il paragrafo 6.5), che consisteva nel fatto che queste due particelle, che avevano la stessa massa e la stessa vita media, decadevano rispettivamente in  $2\pi$  e  $3\pi$  e dovevano avere quindi parità intrinseca opposta: infatti il pione, come abbiamo visto, è  $J^P = 0^-$ , per cui gli stati con due pioni devono essere  $0^+$ ,  $1^-$ , ecc. mentre gli stati con tre pioni, in base ad una analisi sperimentale dei decadimenti (*Dalitz plot*), possono essere  $0^-$ ,  $2^-$ , ecc., per cui la parità è comunque opposta. Nel 1956, Lee e Yang misero in luce che non erano mai state registrate evidenze sperimentali sulla conservazione della parità nelle interazioni deboli, per cui, rinunciando a questa convinzione, si poteva assumere che si trattasse semplicemente di due possibili decadimenti di un'unica particella, che oggi chiamiamo mesone  $K$ .

Per mettere dunque alla prova l'assunzione “naturale” della conservazione della parità, era necessario evidenziare una dipendenza di qualche probabilità di transizione debole da una quantità dispari sotto la parità. Lee e Yang suggerirono di studiare l'isotropia degli elettroni emessi nei decadimenti deboli di nuclei polarizzati: se la parità è conservata per cui l'hamiltoniano è invariante sotto questa trasformazione, ci si aspetta che la distribuzione degli elettroni di decadimento rispetto alla direzione della polarizzazione originale abbia valor medio nullo: infatti uno stato con un elettrone diretto verso l'alto rispetto alla polarizzazione del nucleo si trasforma sotto parità in uno stato con l'elettrone diretto verso il basso (l'impulso dell'elettrone è un vettore e deve cambiare verso) con la polarizzazione che rimane invariata, essendo lo spin del nucleo uno pseudovettore. Se la probabilità di questi due stati è uguale, allora il valor medio della proiezione dell'impulso degli elettroni lungo la direzione della polarizzazione iniziale sarà nullo. Se viceversa la probabilità di questi due stati è diversa, per cui gli elettroni sono emessi di preferenza verso l'alto o verso il basso rispetto alla polarizzazione iniziale, allora l'hamiltoniano dell'interazione non è invariante sotto parità (dipende dalla proiezione di un vettore su uno pseudovettore, che è una quantità pseudoscalare) e la parità non si conserva.

La polarizzazione degli spin dei nuclei si può realizzare allineando il corrispondente momento magnetico con un campo magnetico esterno. Questa semplice idea è in realtà molto difficile da realizzare sperimentalmente, per il fatto che il momento magnetico corrispondente ad un determinato momento

angolare è inversamente proporzionale alla massa della particella, ed è quindi molto più piccolo per un nucleo che per un elettrone. D'altra parte la polarizzazione  $P$ , ossia la frazione media di particelle orientate, è proporzionale al momento magnetico del nucleo ed all'intensità del campo magnetico polarizzante e inversamente proporzionale alla temperatura:

$$P \propto \frac{\mu B}{kT}$$

dove  $k$  è la costante di Boltzmann. L'ordine di grandezza del campo magnetico necessario per ottenere una polarizzazione sensibile è dunque  $B = kT/\mu$  e per i nuclei è migliaia di volte maggiore di quello necessario per la polarizzazione degli atomi, dovuta al momento angolare e allo spin degli elettroni. Anche a temperature molto basse, dell'ordine del centesimo di K, una polarizzazione significativa dei nuclei richiede quindi campi magnetici proibitivi, dell'ordine di 10 T.

Nonostante queste difficoltà, l'idea fu realizzata appena un anno dopo dalla Sig.ra Wu in uno storico esperimento che riuniva le più avanzate conoscenza della fisica atomica, nucleare e della criogenia.

#### 7.4.1 L'esperimento del $^{60}\text{Co}$

L'esperimento fu realizzato studiando i decadimenti del cobalto-60 secondo la reazione:



La transizione avviene tra uno stato di spin 5 ed uno stato di spin 4 che hanno la stessa parità ed appartiene alle cosiddette interazioni di Gamow-Teller. Il nucleo di nichel eccitato decade successivamente nello stato fondamentale attraverso una sequenza di due decadimenti radiativi. I due fotoni sono emessi preferenzialmente in un piano ortogonale allo spin del nucleo di nichel e questa circostanza permette di determinare lo stato di polarizzazione nucleare attraverso una misura dell'anisotropia dei fotoni.

Il cobalto, insieme al ferro, al nichel e ad alcune terre rare (noti come paramagneti di Van Vleck), è un atomo paramagnetico che è in grado di generare, in prossimità del suo nucleo, campi magnetici elevatissimi: a temperature sufficientemente basse, con un piccolo campo magnetico esterno che consenta di allineare i momenti atomici si possono ottenere così quegli altissimi campi magnetici necessari alla polarizzazione dei nuclei.

Le basse temperature necessarie, ben inferiori alla temperatura dell'elio liquido ( $\sim 1$  K) potevano essere realizzate utilizzando la tecnica della depolarizzazione adiabatica dei sali paramagnetici. Questa tecnica (che aveva permesso nei primi anni '30 di scendere per la prima volta sotto la temperatura dell'elio liquido e rimase per un lungo periodo la tecnica criogenica più potente) si basa sulla variazione dell'entropia associata all'ordinamento di un sistema di dipoli magnetici. Poiché l'ordinamento è il risultato della competizione tra il campo magnetico e l'agitazione termica, l'entropia deve dipendere dal rapporto tra la temperatura e il campo magnetico orientante:  $s \propto T/B$ . In una depolarizzazione adiabatica reversibile l'entropia deve mantenersi costante, per cui la diminuzione di  $B$  deve essere compensata da una diminuzione simultanea di  $T$ .

La sostanza paramagnetica utilizzata era costituita da un cristallo di nitrato di cerio-magnesio, sul quale i nuclei di cobalto erano depositati in uno strato sottile e con un ottimo contatto termico. Il cristallo era posto in un criostato (ossia un recipiente termicamente isolato) contenente elio liquido ed era in contatto termico con questo attraverso i vapori di elio. La polarizzazione degli atomi del cristallo era realizzata a temperatura costante con un intenso campo magnetico esterno prodotto da un ferromagnete. L'elio gassoso veniva poi pompato via dal criostato (lasciando quindi il cristallo termicamente isolato) e quindi il campo magnetico veniva rimosso, dando luogo ad una depolarizzazione adiabatica reversibile, nella quale l'entropia deve mantenersi costante. Nelle condizioni dell'esperimento, questa tecnica permetteva di raggiungere una temperatura di 0.01 K. A questo punto, il rapido inserimento di un solenoide produceva il debole campo magnetico sufficiente per riorientare i momenti atomici del cobalto, che generavano a loro volta sui loro nuclei l'intenso campo magnetico necessario per la polarizzazione dei momenti magnetici nucleari.

Lo schema dell'esperimento è mostrato in Fig. 7.1. La polarizzazione dei nuclei è misurata come si è detto dall'anisotropia dei fotoni emessi nella catena di decadimento del nichel. A tal fine, due cristalli di ioduro di sodio (NaI) sono posizionati rispettivamente nella direzione del campo magnetico (B) e sul piano ortogonale ad esso (A). Normalizzando all'unità i conteggi dei due contatori in assenza di polarizzazione, quando la polarizzazione nucleare è realizzata A deve contare più di B. E' quanto si osserva nel grafico in alto a destra, dove i conteggi di A e B sono riportati in funzione del tempo, a partire dal momento in cui si inserisce il campo magnetico solenoidale. Il campione si riscalda con una costante di tempo di qualche minuto, per cui

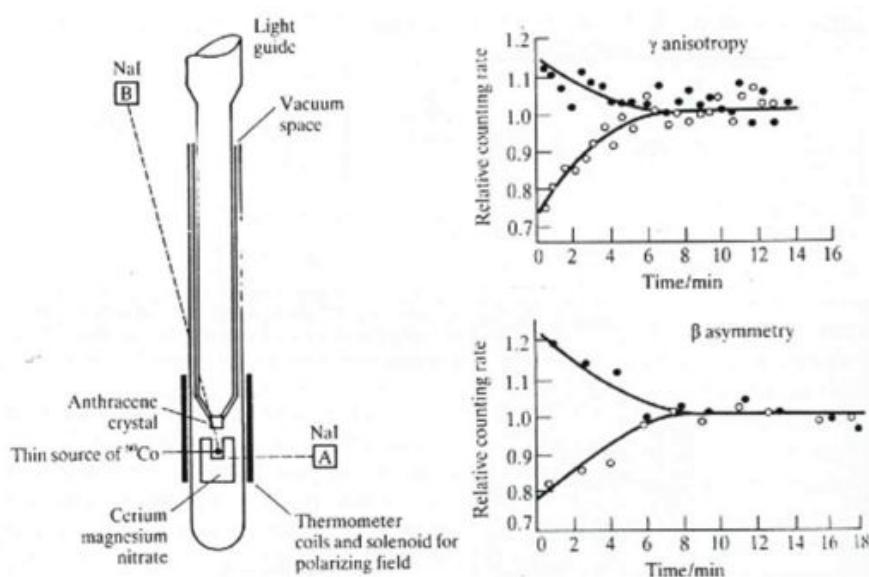


Figura 7.1: L'esperimento del  $^{60}\text{Co}$ . A sinistra, schema dell'esperimento: il campo magnetico è orientato secondo la verticale; i due scintillatori di NaI rivelano i fotoni emessi rispettivamente nella direzione del campo magnetico (B) e sul piano ortogonale ad esso (A); il cristallo di antracene rivela gli elettroni emessi verso l'alto. A destra, in funzione del tempo, e quindi della temperatura del campione, in alto frequenza relativa dei fotoni nei due contatori (cerchi pieni: contatore A, cerchi vuoti: contatore B), in basso frequenza relativa degli elettroni (cerchi pieni: campo diretto verso il basso, cerchi vuoti: campo diretto verso l'alto).

dopo circa 6/8 minuti la polarizzazione dei nuclei è completamente rimossa e la distribuzione dei fotoni ridiventata isotropa.

Una ulteriore difficoltà è data dalla rivelazione degli elettroni, che non sarebbero in grado di fuoriuscire dalle spesse pareti del criostato. Il rivelatore di elettroni deve essere quindi posizionato subito sopra al campione, ad una temperatura di circa 1 K ed è costituito da un cristallo di antracene. Non essendo possibile operare un fotorivelatore ad una simile temperatura, il segnale luminoso doveva essere portato all'esterno del criostato attraverso una lunga guida di luce, fino ad un fotomoltiplicatore che operava a temperatura ambiente.

L'asimmetria degli elettroni emessi in condizioni di polarizzazione è evidente nel grafico in basso: normalizzando i conteggi alle condizioni di non polarizzazione (tempi maggiori di 8 minuti), la frequenza degli elettroni emessi nella stessa direzione del campo magnetico è inversamente proporzionale alla polarizzazione dei nuclei. Gli elettroni sono emessi quindi preferenzialmente in direzione opposta alla polarizzazione. La dipendenza dell'asimmetria degli elettroni dalla temperatura, perfettamente correlata col grado di polarizzazione misurato con i fotoni, esclude che l'effetto potesse essere legato in qualche modo alla interazione dello stato finale col campo magnetico, che non cambia nel tempo. Inoltre, invertendo il campo magnetico, l'asimmetria si invertiva quasi perfettamente, escludendo quindi che l'asimmetria fosse generata da altri effetti strumentali.

La probabilità del decadimento  $\beta$  del cobalto dipende quindi dal prodotto scalare tra uno pseudovettore, lo spin del nucleo, ed un vettore, la direzione degli elettroni. Se ne conclude che anche l'hamiltoniano del decadimento deve mostare la stessa dipendenza e non è quindi invariante sotto trasformazioni di parità. In conseguenza, la parità risulta non conservata nei decadimenti  $\beta$  dei nuclei.

#### 7.4.2 Violazione della parità nei decadimenti del pion e del muone

Una volta osservata la violazione della parità nei decadimenti  $\beta$  dei nuclei, era naturale ricercarne gli effetti anche nei decadimenti in volo dei pioni in muoni e dei muoni in elettroni. La violazione della parità si manifesta attraverso la polarizzazione dello spin dei muoni lungo la direzione di volo di questi. A sua volta, la direzione di decadimento del muone in elettrone deve

mostrare una anisotropia che si manifesta con una distribuzione  $1 + a \cos \vartheta$ , dove  $a$  dipende dal grado di polarizzazione dei muoni. La misura fu fatta indipendentemente da due gruppi, Friedman e Telegdi in emulsioni, osservando le tracce delle diverse particelle, e Garwin, Lederman e Weinrich utilizzando dei contatori: questo esperimento è particolarmente elegante, perché applicando un campo magnetico lo spin dei muoni viene fatto precedere tra il primo ed il secondo decadimento. Disponendo un contatore per gli elettroni in una posizione fissa, si osserva una modulazione dei conteggi in funzione del tempo<sup>2</sup>. Da questa modulazione si ricava  $a = -0.33 \pm 0.03$ , coincidente con il valore di  $1/3$  corrispondente ad una polarizzazione completa. Il periodo di questa modulazione permette inoltre di determinare il momento magnetico dei muoni, il cui rapporto giromagnetico viene così misurato per la prima volta e risulta essere uguale a  $2$ . Può essere interessante notare che la stessa tecnica della precessione dello spin del muone è stata utilizzata oltre venti anni dopo dalla collaborazione CHARM per determinare la violazione della parità nel decadimento inverso del muone, ossia nella reazione  $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ .

## 7.5 Isospin

Come è noto, le masse del protone e del neutrone sono molto vicine tra loro,  $938.3$  contro  $939.6$  MeV/ $c^2$ . Anche il comportamento di queste due particelle rispetto alle interazioni nucleari è simile, come si può vedere studiando le sezioni d'urto  $pp$  e  $np$ , corrette per gli effetti coulombiani. Ancora più notevole è la similitudine tra i livelli nucleari dei cosiddetti nuclei speculari, ossia quelli si ottengono scambiando il numero dei protoni con quello dei neutroni, per esempio  ${}^7\text{Li}$ , composto da  $3$  protoni e  $4$  neutroni, e  ${}^7\text{Be}$ , composto da  $4$  protoni e  $3$  neutroni, o  ${}^{13}\text{C}(6\text{p},7\text{n})$  e  ${}^{13}\text{N}(7\text{p},6\text{n})$ .

Una semplice verifica può essere fatta confrontando la massa dell'elio con quella del trizio:  ${}^3\text{He}(\text{ppn})$  ha una energia di legame di  $7.718$  MeV,  ${}^3\text{H}(\text{pnn})$  di  $8.481$  MeV. Il raggio di Coulomb di  ${}^3\text{He}$  è  $r_C = 1.97$  fm =  $9.98$  GeV $^{-1}$ , per cui l'energia coulombiana associata al protone in più è

$$V_C = \hbar c \frac{\alpha}{r_C} = 0.731 \text{ MeV} \quad (7.11)$$

quasi uguale alla differenza tra le energie di legame.

---

<sup>2</sup>In realtà, tenendo conto che il periodo di precessione è proporzionale al prodotto  $\mu H$  dove  $\mu$  è il momento magnetico ed  $H$  è il campo magnetico esterno, la misura veniva fatta con un tempo di ritardo fisso, facendo variare l'intensità del campo magnetico.

Sulla base di queste circostanze, fin dagli anni '30, Heisenberg, Condon e Carren introdussero l'*isospin* come grado di libertà interno di un'unica entità, il nucleone, che compare in due possibili stati, il protone ed il neutrone. In base a questa ipotesi, le forze nucleari sono per loro natura indipendenti dalla carica. In analogia con lo spin, che per i fermioni può assumere due sole "proiezioni" ,  $\pm 1/2$ , così il nucleone ha isospin  $I = 1/2$ , mentre per il protone  $I_3 = 1/2$  e per il neutrone  $I_3 = -1/2$ . L'isospin si combina con le stesse regole dello spin, per cui per ogni valore dell'isospin  $I$  abbiamo  $2I + 1$  valori di  $I_3$ , a cui corrispondono dei  $(2I + 1)$ -plets di stati: così avremo un singoletto per  $I = 0$ , un doppietto per  $I = 1/2$ , un tripletto per  $I = 1$  ecc. Per esempio, uno stato  $np$  ( $I_3 = 0$ ) può appartenere sia ad un singoletto che ad un tripletto.

Per un nucleo composto da  $Z$  protoni e  $N$  neutroni, la proiezione dell'isospin sarà data dalla somma delle proiezioni degli isospin dei nucleoni componenti:

$$I_3(\text{nucleo}) = \frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}N = \frac{Z - N}{2} \quad (7.12)$$

e considerando che la carica in unità della carica  $e$  del protone è  $Q = Z$  ed il numero barionico è  $B = Z + N$ , si può esprimere il legame tra carica e proiezione dell'isospin attraverso la seguente formula:

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}. \quad (7.13)$$

In assenza del campo elettromagnetico, che distingue le diverse proiezioni dell'isospin, l'hamiltoniano nucleare non distingue tra i vari stati, è invariante per rotazioni nello spazio dell'isospin. L'isospin è dunque conservato dalle interazioni forti, ma non in quelle elettromagnetiche (né in quelle deboli). Le differenze di massa tra membri dello stesso multipletto di isospin sono quindi da attribuirsi esclusivamente alle interazioni elettromagnetiche: se queste non ci fossero, il neutrone ed il protone avrebbero la stessa massa, e il neutrone sarebbe stabile.

L'introduzione del numero quantico di isospin richiede di rivisitare le condizioni imposte dalla statistica alle funzioni d'onda dei sistemi che rappresentano dei fermioni: come più volte ricordato, queste devono essere antisimmetriche. Per un sistema di due fermioni, l'antisimmetria garantisce il principio di esclusione di Pauli, che esclude che due fermioni identici possano trovarsi nello stesso stato, ossia abbiano tutti gli stessi numeri quantici. Nell'ipotesi

dell'isospin, i nucleoni sono particelle identiche e la richiesta di antisimmetria deve essere applicata alla funzione d'onda espressa come

$$\Psi = \psi(\text{spaziale})\chi(\text{spin})I(\text{isospin}). \quad (7.14)$$

Come abbiamo più volte ricordato, per quanto riguarda il momento orbitale, sulla base della simmetria delle armoniche sferiche,  $L$  pari dà luogo a funzioni simmetriche,  $L$  dispari a funzioni antisimmetriche, per cui la simmetria della  $\psi$  è data da  $(-1)^L$ . Per quanto riguarda lo spin, due particelle con spin opposto (spin totale  $S = 0$ ) sono antisimmetriche, mentre due particelle con spin uguale sono simmetriche. La simmetria della  $\chi$  può essere espressa da  $(-1)^{S+1}$ . Per l'isospin la simmetria è formalmente analoga allo spin e si può quindi scrivere come  $(-1)^{I+1}$ . La simmetria complessiva di un sistema di due nucleoni deve essere quindi  $(-1)^L(-1)^{S+1}(-1)^{I+1} = (-1)^{L+S+I} = -1$  (ossia  $L + S + I$  dispari) per avere una funzione d'onda complessiva antisimmetrica, come richiesto dal principio di Pauli.

Queste considerazioni possono essere applicate al deutone, lo stato legato  $np$  che costituisce il nucleo del deuterio. Questo stato ha evidentemente  $I_3 = 0$ . Non osservandosi stati legati  $pp$  o  $nn$ , che costituirebbero gli altri componenti  $I_3 = \pm 1$  di uno stato di tripletto  $I = 1$ , possiamo assumere che l'unico stato osservato costituisca un singoletto  $I = 0$ . Ma allora  $L + S$  deve essere dispari, e quindi lo stato fondamentale ( $L = 0$ ) deve avere spin totale  $S=1$ , come verificato sperimentalmente.

## 7.6 Risonanze adroniche

La maggior parte delle particelle che abbiamo fin qui incontrato è stabile o decade attraverso le interazioni deboli, con vite medie superiori a  $10^{-10}$  s. Queste particelle possono quindi percorrere distanze che ne permettono la osservazione sotto forma di tracce in camere a bolle o in emulsioni. Abbiamo però detto più volte che le particelle che decadono per interazione forte hanno vite medie di vari ordini di grandezza più brevi, che non lasciano quindi tracce misurabili nei rivelatori. Ci si può domandare quindi come sia possibile determinarne la vita media. D'altra parte abbiamo visto che in base al principio di indeterminazione, una vita media breve implica una indeterminazione nell'energia dello stato, che si traduce nel fatto che diverse misure della massa di queste particelle daranno valori diversi. Sappiamo anche che

la distribuzione di massa deve avere un andamento alla Breit-Wigner, dato dalla (5.35). Quindi da una misura della larghezza della distribuzione di massa si può ricavare il valore della vita media. Per esempio, una larghezza  $\Gamma = \Delta M c^2 = 100$  MeV corrisponde ad una vita media  $\tau = \hbar/(100 \text{ MeV}) \simeq 10^{-23} \text{ s}$ .

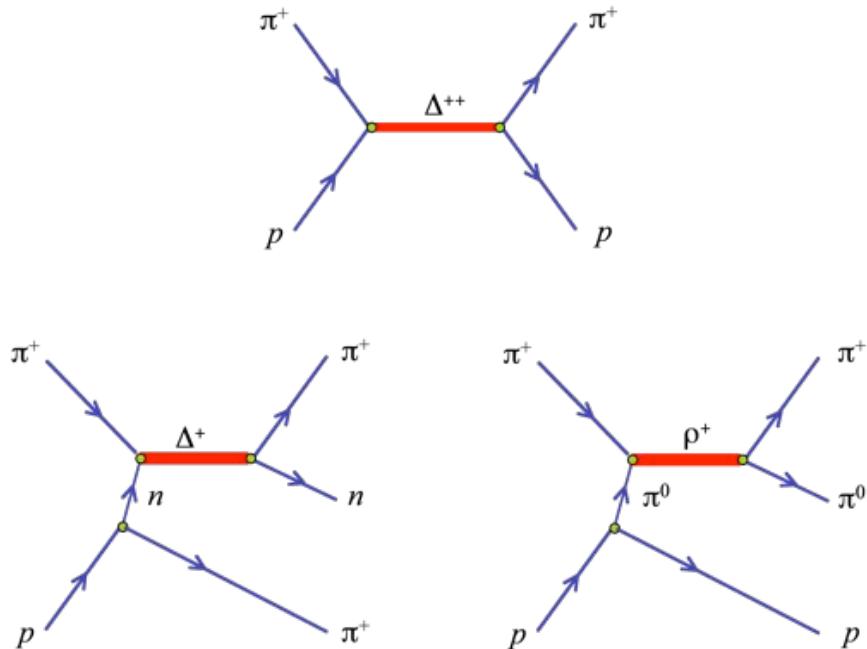


Figura 7.2: In alto, risonanza adronica in formazione. In basso, a sinistra risonanza barionica in produzione; a destra, risonanza mesonica in produzione.

Le risonanze possono essere osservate attraverso due processi distinti (figura 7.2): nel primo, detto di *formazione*, il proiettile ed il bersaglio hanno i numeri quantici e l'energia necessari per la formazione della risonanza in questione, per cui le particelle dello stato finale sono costituite dai prodotti di decadimento della risonanza. Nel secondo, detto di *produzione*, il bersaglio scambia col proiettile una particella virtuale con i numeri quantici necessari per la formazione della risonanza. Nello stato finale saranno presenti sia i prodotti di decadimento della risonanza, sia il bersaglio modificato nei suoi

numeri quantici dall'emissione della particella virtuale. Le risonanze mesoniche, di numero barionico pari a zero, sono necessariamente osservate in produzione, non essendo disponibile un bersaglio di mesoni. Le risonanze in formazione sono molto più semplici da osservare e misurare, in quanto è sufficiente l'osservazione di un picco nella sezione d'urto tra proiettile e bersaglio, e dall'andamento della sezione d'urto in funzione dell'energia nel centro di massa è possibile ricavare massa e larghezza della risonanza. Le risonanze in produzione invece richiedono la ricostruzione dello spettro in massa invariante dei prodotti di decadimento, il che implica la determinazione cinematica completa dello stato finale e la identificazione delle diverse particelle di esso.

Una misura assoluta della sezione d'urto di produzione permette di ricavare altre informazioni sulla risonanza osservata. Per una risonanza di spin zero e trascurando lo spin delle particelle incidenti, la formula di Breit e Wigner combinata con la regola d'oro di Fermi permette di scrivere direttamente la sezione d'urto in termini della larghezza:

$$\sigma = \frac{4\pi\hbar^2}{k^2} \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (7.15)$$

dove  $k^2$  è il quadrato dell'impulso nel sistema del centro di massa: vediamo che la sezione d'urto alla risonanza non dipende dalle costanti di accoppiamento o altro. Se consideriamo una risonanza con spin  $j \neq 0$  e consideriamo gli spin  $s_1$  e  $s_2$  del proiettile e del bersaglio, la sezione d'urto diventa invece:

$$\sigma = \frac{4\pi\hbar^2}{k^2} \frac{2j+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (7.16)$$

Si vede quindi come una misura della sezione d'urto permette di determinare anche lo spin della risonanza in esame.

### 7.6.1 Risonanze barioniche

La prima risonanza in formazione fu osservata nel 1952 da Anderson, Fermi, Long e Nagle al Ciclotrone di Chicago. La prima osservazione fu la differenza nell'andamento in energia tra la sezione d'urto dei  $\pi^+$  e quella dei  $\pi^-$ , che presentavano comunque entrambe un notevole aumento fino ad energie cinetiche dei pioni di circa 180 MeV. Benché l'energia del fascio non fosse sufficiente per esplorare tutto l'andamento alla Breit-Wigner delle sezioni d'urto (permettendo in pratica di osservarne solo la prima metà), una analisi

dettagliata delle distribuzioni angolari degli stati finali permise di stabilire che doveva trattarsi di uno stato con spin 3/2, mentre la presenza di una risonanza nel canale  $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ , insieme al rapporto tra le sezioni d'urto di questo canale e dei canali  $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$  e  $\pi^-p \rightarrow \pi^-p$  mostra che deve trattarsi di un sistema di stati di isospin 3/2. La analisi della diffusione  $\pi p$  fu completata nel 1956 al Ciclotrone di Rochester. La risonanza prende il nome di  $\Delta$ , ha una massa di  $\sim 1232 \text{ MeV}/c^2$  ed una larghezza di 120 MeV e compare in quattro stati di carica (con masse leggermente diverse tra loro), in accordo con la relazione (7.13),  $Q = I_3 + 1/2$ :  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^+$ ,  $\Delta^0$  e  $\Delta^-$ . Gli stati  $\Delta^+$  e  $\Delta^0$  furono osservati successivamente in processi di produzione.

Negli anni successivi, lo spettro delle risonanze bariane si andò accrescendo sempre più, in particolare quando fasci di mesoni  $K$  al Bevatrone di Berkeley, intorno al 1960, permisero la scoperta in camera a bolle di risonanze con stranezza (Alvarez et al.), le  $\Sigma^*$ , tripletto con massa  $\sim 1385 \text{ MeV}/c^2$  e le  $\Xi$ , doppietto con massa  $\sim 1530 \text{ MeV}/c^2$ .

### 7.6.2 Risonanze mesoniche

L'anno dopo lo stesso gruppo di Alvarez osservò la prima risonanza mesonica, nel canale  $K^-p \rightarrow K^0\pi^-p$ , evidentemente un mesone con stranezza, che come il  $K$  compare in due doppietti di stranezza  $\pm 1$ , detto  $K^*$ , con massa  $\sim 894 \text{ MeV}/c^2$  e spin 1. Quasi contemporaneamente, un altro gruppo osservò, sempre in camera a bolle ma al Cosmotrone di Brookhaven, una risonanza nel canale  $\pi\pi$ , studiando la diffusione di pioni su protone. Questa risonanza, il  $\rho$ , con massa  $\sim 760 \text{ MeV}/c^2$  compare in tre stati di carica, come il pion, ma ha spin 1. Ancora nello stesso anno, il gruppo di Alvarez, lavorando con un fascio di antiprotoni, trovò una risonanza nella reazione  $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- + \pi^- + \pi^0$  come picco nella massa invariante  $\pi^+\pi^-\pi^0$  a  $\sim 782 \text{ MeV}/c^2$ . Questa risonanza, l' $\omega$ , è neutra, ha spin 1 e non ha partner carichi.

Questa proliferazione di particelle e risonanze, che si presentano però in configurazioni regolari sia negli stati bariani che in quelli mesonici, suggerisce che vi sia una struttura nascosta che dia conto al tempo stesso della varietà e della regolarità delle configurazioni osservate. Questa linea di pensiero porterà prima ad una rappresentazione formale basata sul gruppo di simmetria SU(3) e successivamente alla interpretazione fisica costituita dal modello a quark

## 7.7 La simmetria $SU(3)$ e il modello a quark

Se proviamo ad estendere il formalismo dell'isospin ai mesoni, e agli altri gruppi di particelle adroniche elencati nella tabella 6.1, vediamo che i pioni costituiscono un tripletto di masse vicine, e possono quindi essere considerati un tripletto di isospin con  $I = 1, I_3 = -1, 0, 1$ . Avendo numero barionico nullo, la formula (7.13) funziona perfettamente. Vediamo anche come l' $\eta$ , che ha gli stessi numeri quantici del  $\pi^0$  ma una massa molto maggiore, non può appartenere allo stesso multipletto. Può però essere considerato uno stato di singoletto,  $I = 0, I_3 = 0$ . Il doppietto  $K^+, K^0$  dovrà avere  $I = 1/2, I_3 = \pm 1/2$ . La formula (7.13) però in questo caso non funziona. Considerando il doppietto coniugato di carica,  $K^-, \bar{K}^0$ , si vede però che tutte e quattro le cariche sono riprodotte correttamente se si trasforma la (7.13) nel modo seguente:

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (7.17)$$

dove  $Y = B + S$  è detta *ipercarica*. Se ora esaminiamo i multipletti dei barioni con masse vicine, vediamo che ritroviamo la stessa struttura di isospin, due doppietti ( $n, p$  e  $\Xi^0, \Xi^-$ ), un tripletto (le  $\Sigma$ ) ed un singoletto (la  $\Lambda$ ), mentre la formula della carica modificata (7.17) fornisce i corretti valori di tutte le cariche. Gli ottetti elencati nella tabella 6.1 possono essere allora rappresentati in un unico schema utilizzando due coordinate,  $I_3$  e  $Y = B + S$ .

La *via degli ottetti (eightfold way)*, introdotta da Gell-Mann ed altri nei primi anni '60 venne formalizzata matematicamente attraverso le proprietà del gruppo di simmetria unitaria  $SU(3)$ , che permetteva di dar conto di tutto lo spettro di adroni osservati, inclusi i mesoni di spin 1 e le risonanze bario-niche di spin 3/2. La simmetria  $SU(3)$  non è esatta, e la conseguenza di ciò è che le masse dei componenti dei multipletti non sono degeneri: come già i multipletti di isospin hanno masse leggermente diverse, così le differenze di massa all'interno dei supermultipletti di  $SU(3)$ , benché più marcate, mostrano regolarità perfettamente predicibili nell'ambito del meccanismo di rottura della simmetria. Non solo, ma le due particelle mancanti benché previste dallo schema, l' $\eta$  (di massa  $547 \text{ MeV}/c^2$ ) e l' $\Omega^-$  furono osservate nel giro di due anni. L' $\Omega^-$  in particolare, aveva numeri quantici piuttosto particolari, completamente fissati dal modello: stranezza -3, isospin nullo (e dunque un singoletto), spin 3/2 e parità positiva. Gell-Mann arrivò a predirne la massa intorno a  $1680 \text{ MeV}/c^2$ . La sua scoperta in camera a bolle, attraverso un

solo evento spettacolare e inconfondibile a causa della lunga ma ineluttabile catena di decadimento (figura 7.3),

$$\begin{aligned}
 K^- p &\rightarrow \Omega^- K^+ K^0 \\
 \Omega^- &\rightarrow \Xi^0 \pi^- \\
 \Xi^0 &\rightarrow \Lambda \pi^0 \\
 \Lambda &\rightarrow p \pi^-
 \end{aligned}$$

fu considerato un vero trionfo teorico e sperimentale.

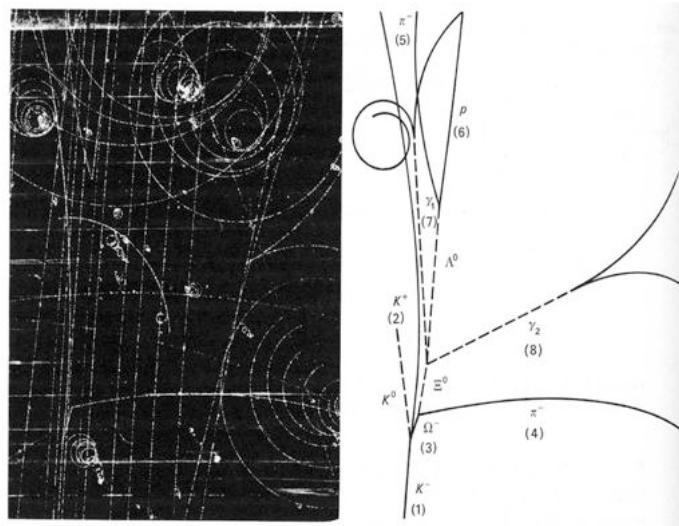


Figura 7.3: Osservazione dell' $\Omega^-$  in camera a bolle con la ricostruzione della catena di decadimento.

Notiamo che tutti i decadimenti dei barioni sono con cambiamento di stranezza e sono quindi deboli. L' $\Omega^-$  è dunque una particella e non una risonanza.

Si tratta ora di capire se la classificazione degli adroni in multipletti di SU(3) ha una natura puramente matematica, o esprime qualcosa di fondamentale sulla struttura fisica degli adroni. L'idea ulteriore di Gell-Mann e Zweig è di identificare la rappresentazione fondamentale di SU(3), il tripletto e l'antitripletto attraverso i quali si possono costruire i vari multipletti che

corrispondono alle particelle osservate fenomenologicamente, con un insieme di  $3 + 3$  costituenti fondamentali degli adroni, i *quark*. I quark sono fermioni: due, l'*up* e il *down* sono un doppietto di isospin ( $I = 1/2$ ) ed hanno stranezza nulla, il terzo, lo *strange*, è un singoletto di isospin ( $I = 0$ ) ed ha stranezza -1. Il tripletto di antiquark ha naturalmente tutti questi numeri quantici scambiati. I barioni sono costituiti da 3 quark (gli antibarioni da 3 antiquark), mentre i mesoni sono costituiti da una coppia quark-antiquark. Da ciò risulta evidente che il numero barionico deve essere  $1/3$  per i quark e  $-1/3$  per gli antiquark, e quindi anche la carica deve essere frazionaria, secondo la (7.17). I vari numeri quantici dei due tripletti sono riportati nella tabella 7.1.

Tabella 7.1: Numeri quantici di quark e antiquark: per ogni quark sono indicati l'isospin  $I$  e la sua terza componente  $I_3$ , il numero barionico  $B$ , la stranezza  $S$ , l'ipercarica  $Y$  e la carica elettrica  $Q$

$q$	$I$	$I_3$	$B$	$S$	$Y$	$Q$	$\bar{q}$	$I$	$I_3$	$B$	$S$	$Y$	$Q$
$u$	$1/2$	$1/2$	$1/3$	$0$	$1/3$	$2/3$	$\bar{u}$	$1/2$	$-1/2$	$-1/3$	$0$	$-1/3$	$-2/3$
$d$	$1/2$	$-1/2$	$1/3$	$0$	$1/3$	$-1/3$	$\bar{d}$	$1/2$	$1/2$	$-1/3$	$0$	$-1/3$	$1/3$
$s$	$0$	$0$	$1/3$	$-1$	$-2/3$	$-1/3$	$\bar{s}$	$0$	$0$	$-1/3$	$1$	$2/3$	$1/3$

La composizione degli adroni in termini di quark si può ottenere scrivendo esplicitamente tutte le combinazioni di tre quark per i barioni, o di una coppia quark-antiquark per i mesoni. Più significativamente, i vari adroni possono essere costruiti attraverso il metodo grafico di combinazione dei tripletti rappresentato in figura 7.4 per i mesoni e in figura 7.5 per i barioni.

La tabella 6.1 può essere ora riscritta includendo l'isospin e l'ipercarica (tabella 7.2).

Oltre all'ottetto, le combinazioni possibili di due quark generano un ulteriore singoletto, da identificare con l' $\eta'$  di massa  $958 \text{ MeV}/c^2$ . Se assegnamo ai quark parità positiva e agli antiquark parità negativa, la parità dei mesoni (assumendo ragionevolmente che lo stato fondamentale abbia momento orbitale nullo, e dunque parità orbitale positiva) deve essere negativa. Le combinazioni di  $q\bar{q}$  che abbiamo considerato hanno gli spin antiparalleli, e costituiscono quindi un multipletto di mesoni pseudoscalari  $J^P = 0^-$ . Se i quark sono accoppiati con spin paralleli, otteniamo un secondo multipletto

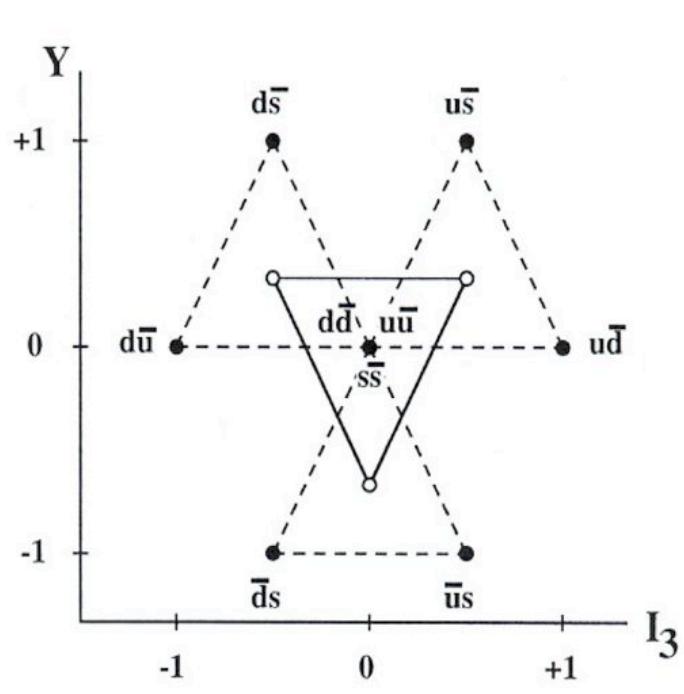


Figura 7.4: Costruzione grafica dei mesoni, costituiti da coppie quark-antiquark: i cerchi aperti rappresentano le posizioni del tripletto di quark nel piano ( $I_3, Y = B + S$ ); con centro in ciascuno dei cerchi aperti, si riporta il tripletto di antiquark: i numeri quantici di ciascun punto pieno saranno quindi la somma dei numeri quantici di tutte le possibili coppie  $q\bar{q}$ , indicate in prossimità dei punti stessi. Possiamo riconoscere un ottetto ed un singoletto: in totale abbiamo infatti 9 stati, di cui 5 con  $Y = 0$ . Di questi, uno è un singoletto, quattro appartengono all'ottetto: uno come singoletto di isospin, tre come tripletto di isospin.

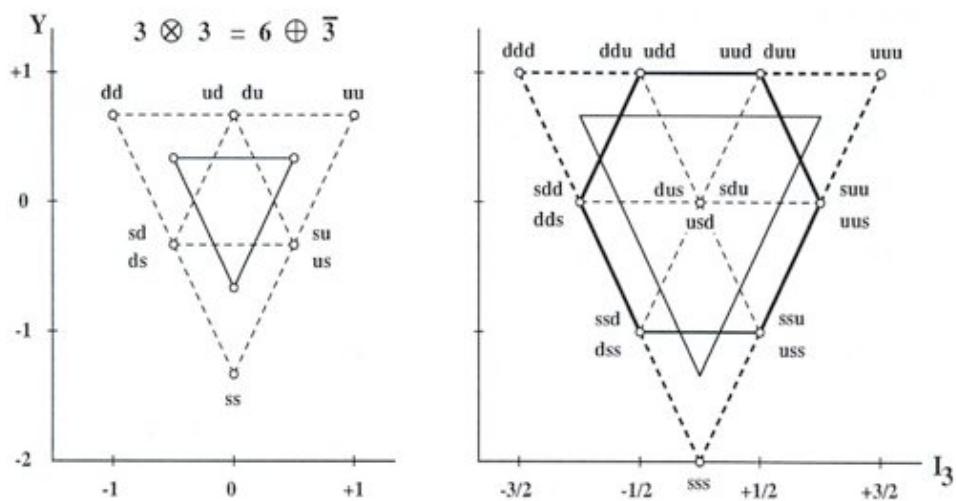


Figura 7.5: Costruzione grafica dei multipletti dei barioni: a sinistra è rappresentata la combinazione di due tripletti di quark nel piano ( $I_3, Y = S+B$ ) (con la stessa procedura descritta nella figura 7.4), che danno luogo ad un sestetto, più un tripletto che ha la configurazione rovesciata degli antiquark; a destra, la combinazione del sestetto con un altro tripletto produce un ottetto ed un decupletto. Ai vertici del triangolo esterno sono presenti solo membri del decupletto, ai vertici dell'esagono la molteplicità degli stati è doppia, comparendo sia i membri dell'ottetto che quelli del decupletto. A  $Y = 0, I_3 = 0$ , la molteplicità 3 è dovuta al membro del decupletto ed ai due membri dell'ottetto, un singoletto di isospin ed un membro con  $I_3 = 0$  di un tripletto.

Tabella 7.2: Ottetti dei barioni di spin 1/2 e dei mesoni pseudoscalari: per ogni particella sono indicati l'isospin  $I$  e la sua terza componente  $I_3$ , il numero barionico  $B$ , la stranezza  $S$  e l'ipercarica  $Y$

barioni	$I$	$I_3$	$B$	$S$	$Y$	mesoni	$I$	$I_3$	$B$	$S$	$Y$
$p$	1/2	1/2	1	0	1	$K^+$	1/2	1/2	0	1	1
$n$	1/2	-1/2	1	0	1	$K^0$	1/2	-1/2	0	1	1
$\Lambda$	0	0	1	-1	0	$\eta$	0	0	0	0	0
$\Sigma^+$	1	1	1	-1	0	$\pi^+$	1	1	0	0	0
$\Sigma^0$	1	0	1	-1	0	$\pi^0$	1	0	0	0	0
$\Sigma^-$	1	-1	1	-1	0	$\pi^-$	1	-1	0	0	0
$\Xi^0$	1/2	1/2	1	-2	-1	$\bar{K}^0$	1/2	1/2	0	-1	-1
$\Xi^-$	1/2	-1/2	1	-2	-1	$K^-$	1/2	-1/2	0	-1	-1

di mesoni vettori  $J^P = 1^-$ , nel quale possiamo accomodare tutte le risonanze mesoniche di spin 1 (tabella 7.3).

Per quanto riguarda i barioni, essendo costituiti da 3 quark avranno parità positiva, in accordo con quanto fissato per il protone ed il neutrone nel paragrafo 7.2.1. Mentre per i mesoni gli ottetti comprendono tutte le antiparticelle, le antiparticelle dei barioni costituiscono degli ulteriori multipletti di parità negativa. I tre quark generano anche un decupletto: questo corrisponde ai barioni di spin 3/2, costituiti da tre quark con gli spin allineati, mentre l'ottetto corrisponde a due dei tre quark con spin antiparalleli. Il decupletto è riportato in tabella 7.4.

Notiamo infine che i tre stati ai vertici del triangolo del decupletto sono costituiti da quark che hanno tutti i numeri quantici uguali, ed avendo momento orbitale nullo, devono avere funzione d'onda completamente simmetrica, in palese contrasto col principio di esclusione di Pauli. Come si vedrà, questo è uno degli argomenti per introdurre nei quark il numero quantico di colore, alla base della teoria della *cromodinamica quantistica*.

Tabella 7.3: L'ottetto e il singoletto dei mesoni vettori.

Mesoni vettori	Massa (MeV/ $c^2$ )	$I$	$I_3$	$B$	$S$	$Y$
$K^{*+}$	892	1/2	1/2	0	1	1
$K^{*0}$	896	1/2	-1/2	0	1	1
$\omega$	782	0	0	0	0	0
$\rho^+$	769	1	+1	0	0	0
$\rho^0$	769	1	0	0	0	0
$\rho^-$	769	1	-1	0	0	0
$\bar{K}^{*0}$	896	1/2	1/2	0	-1	-1
$K^{*-}$	892	1/2	-1/2	0	-1	-1
$\phi$	1019	0	0	0	0	0

Tabella 7.4: Il decupletto dei barioni di spin 3/2.

Barioni	Massa (MeV/ $c^2$ )	$I$	$I_3$	$B$	$S$	$Y$
$\Delta^{++}$	1232	3/2	3/2	1	0	1
$\Delta^+$	1232	3/2	1/2	1	0	1
$\Delta^0$	1232	3/2	-1/2	1	0	1
$\Delta^-$	1232	3/2	-3/2	1	0	1
$\Sigma^+$	1383	1	1	1	-1	0
$\Sigma^0$	1384	1	0	1	-1	0
$\Sigma^-$	1387	1	-1	1	-1	0
$\Xi^0$	1532	1/2	1/2	1	-2	-1
$\Xi^-$	1535	1/2	-1/2	1	-2	-1
$\Omega^-$	1672	0	0	1	-3	-2

# Capitolo 8

## Cenni di Fisica del Nucleo

### 8.1 Proprietà generali dei nuclei

In questo capitolo affrontiamo lo studio dei nuclei. Un nucleo è un insieme di neutroni e protoni legati insieme (“incollati”) dalla forza nucleare. Le grandezze che caratterizzano i nuclei atomici e che danno informazioni sulla loro struttura sono:

- la massa, il raggio, lo spin;
- la carica elettrica, il momento di dipolo magnetico, il momento di quadrupolo elettrico, ....

I nuclei sono indicati con il simbolo chimico dell’ elemento,  $X$ , il numero atomico,  $Z$  ed il peso atomico o *numero di massa*,  $A$ , nel modo seguente:



Nel nucleo ci sono  $A$  nucleoni, di cui  $Z$  protoni e  $A - Z$  neutroni. Così  ${}^{36}_{17} \text{Cl}$  e  ${}^{37}_{17} \text{Cl}$  indicano rispettivamente un nucleo di Cloro con 19 e con 20 neutroni. Poiché il simbolo chimico identifica il numero di protoni, questa informazione è spesso omessa. Considerando che il nucleo dello stesso elemento chimico può avere un numero diverso di neutroni, si indica generalmente con *nuclide* ogni particolare combinazione di  $A$  e  $Z$ .

La carica elettrica del nucleo è data dal numero atomico  $Z$  moltiplicato per la carica elementare  $e=1.6 \cdot 10^{-36}$  Coulomb,  $Q = Ze$ . Il numero atomico  $Z$  determina le proprietà chimiche di un dato elemento:

- nuclei con lo stesso  $Z$  e diverso  $A$  sono chiamati *isotopi*: hanno la stessa posizione nella Tavola di Mendeleev.
- nuclei con lo stesso  $A$  e diverso valore di  $Z$  sono chiamati isobari: hanno la massa approssimativamente uguale.
- nuclei con lo stesso numero di neutroni ( $N = A - Z$ ) sono chiamati isotoni.

Il numero atomico  $Z$  può essere determinato eccitando in modo opportuno (con elettroni, protoni o utilizzando radiazione di sincrotrone) gli atomi e misurando gli spettri di emissione di raggi X che sono caratteristici dell'atomo in esame. Nel 1913 Moseley, stabilendo una relazione tra la frequenza dei raggi X ed il numero atomico degli elementi, ordinò *tutti* gli elementi allora noti nella tavola di Mendeleev. La Legge di Moseley è data da

$$h\nu = \frac{3}{4}R_y(Z-1)^2 \quad (8.1)$$

dove  $R_y = m_e c^2 \alpha^2 / 2 = 13.6$  eV è chiamata *energia di Rydberg*.

## 8.2 La dimensione e la forma dei nuclei

Come abbiamo visto, nei suoi esperimenti Rutherford aveva a disposizione particelle  $\alpha$ , nuclei di elio di energie di qualche MeV. La sua “sonda” non gli permetteva quindi né di raggiungere parametri di impatto di grandezza paragonabile al campo di azione delle forze nucleari, né di scoprire che le cariche delle particelle  $\alpha$  e dei nuclei d'oro non sono puntiformi. Tuttavia, usando come bersagli nuclei più leggeri, Rutherford misurò deviazioni dalla sua legge a distanze di circa  $10^{-14}$  metri. Queste deviazioni sono presenti sia perché a queste distanze le distribuzioni di densità delle cariche elettriche del proiettile e del bersaglio si sovrappongono, sia perché entrano in gioco le interazioni forti tra le particelle  $\alpha$  ed i nuclei. Per misurare la dimensione dei nuclei è necessario distinguere tra i contributi alla diffusione dovuti alla distribuzione delle sorgenti dei campi elettrici, legate alla carica dei protoni, e quelli dovuti alle sorgenti dei campi nucleari, legate sia ai protoni che ai neutroni. Possiamo in linea di principio pensare di usare due diversi proiettili: uno sensibile solo alla distribuzione della carica elettrica e l'altro solo a quella forte. Gli elettroni, che si accoppiano alla carica elettrica dei protoni dei

nuclei ma non hanno interazione forte, e i neutroni, che viceversa sentono solo la forza forte, sono i proiettili usati in diversi esperimenti di diffusione per misurare rispettivamente le dimensioni legate ai protoni e quelle legate alla distribuzione dei nucleoni nei nuclei. Misure precise vennero realizzate negli anni '50 con esperimenti di urto elastico usando elettroni di energie  $> 100$  MeV. Un altro vantaggio nell'uso di leptoni carichi (elettroni o muoni) per sondare la materia nucleare è legato al fatto che i leptoni non hanno struttura interna: sono cioè puntiformi.

### 8.3 Masse dei nuclei

La massa dei nuclei stabili può essere determinata misurando la traiettoria degli ioni in campi elettrici e magnetici. Oggi si raggiungono precisioni fino a  $\simeq 10^{-6}$ . Per ridurre gli errori sistematici, le misure si fanno di solito per confronto con nuclei di calibrazione che hanno valori di massa molto vicini a quelli dei campioni da misurare. L'unità di misura usata in fisica nucleare, l'*unità di massa atomica*, u, è definita come  $1/12$  della massa dell'isotopo  $^{12}_6\text{C}$  e corrisponde a  $931.494$  MeV/ $c^2$ . In queste unità la massa dell'idrogeno è

$$M(^1_1\text{H}) = 1.00794 \text{ u} = 938.890 \text{ MeV}/c^2$$

Il motivo per cui le masse dei nuclidi non sono date semplicemente dalla somma delle masse di tutti i protoni e di tutti i neutroni contenuti nel nuclide risiede nel fatto che i nuclei sono tenuti insieme da forze attrattive. E' necessario fornire del lavoro per separare un nucleo nei suoi componenti, per cui, sulla base dell'equivalenza tra massa ed energia, la massa del nucleo deve essere minore della massa dei suoi componenti. Si definisce *energia di legame* la grandezza

$$B(Z, A) = (Z \cdot M(^1_1\text{H}) + (A - Z)M_n - M(A, Z)) \quad (8.2)$$

dove  $M(^1_1\text{H}) = M_p + M_e$  e si trascura l'energia di legame dell'idrogeno che vale 13.6 eV. Per come è stata definita, l'energia di legame è positiva per un nucleo stabile, che ha una energia di riposo minore di quella dei suoi componenti posti a distanza infinita tra loro.

Le masse dei nuclidi instabili a vita media breve non possono essere misurate con uno spettrometro di massa. In questi casi si devono usare le leggi della conservazione dell'energia in opportune reazioni nucleari. In 5.10 è stato

già definito poi il *valore-Q* di una reazione nucleare come

$$Q = (M_i - M_f)c^2 = T_f - T_i \quad (8.3)$$

attraverso il quale la massa incognita di un nuclide può essere determinata in una reazione nella quale il nuclide partecipi insieme ad altri di massa nota, misurando le energie cinetiche iniziali e finali della reazione e determinando la massa incognita dalla formula (8.3).

Se si divide l'energia di legame  $B$  per il numero di massa  $A$  si ha l'energia di legame per nucleone (Fig. 8.1): questa è evidentemente nulla per l'idrogeno, poi cresce rapidamente in funzione di  $A$  fino a circa 7 MeV/nucleone, poi più lentamente fino ad un valore di circa 9 MeV/nucleone per  $A \sim 60 - 70$ , per poi diminuire sotto 8 MeV/nucleone per i nuclei più pesanti.

La curva può essere interpretata come la sovrapposizione di una serie di contributi:

1. Il primo è dovuto alla forza di legame nucleare. Trattandosi di una forza a corto range, il contributo dominante sarà tra primi vicini, e quindi proporzionale al numero di nucleoni,  $A$ . Se la forza fosse a lunga distanza, e quindi si esercitasse per ogni coppia di nucleoni, sarebbe proporzionale a  $A^2$ . Questo contributo a  $B/A$  è quindi costante.
2. Il contributo di volume deve essere corretto per tenere conto che i nucleoni sulla superficie sono meno legati di quelli al centro. Poiché il rapporto tra volume e superficie varia come  $A^{2/3}$ , la correzione di superficie a  $B/A$  è negativa e va come  $A^{-1/3}$ .
3. Un altro contributo negativo a  $B$  è dato dalla forza repulsiva di Coulomb, che è proporzionale a  $Z^2/R \propto Z^2/A^{1/3}$ , per cui il contributo a  $B/A$  è proporzionale a  $Z^2/A^{4/3}$ .
4. Infine è presente un contributo di natura puramente quantistica, dovuto al principio di esclusione Pauli, per cui il legame tra neutrone e protone è più forte di quello tra  $n - n$  o  $p - p$ , che a piccolissime distanze devono respingersi. Questo effetto rende dunque più stabili i nuclei con lo stesso numero di neutroni e protoni ( $N = Z$  per  $A$  pari e  $N = Z \pm 1$  per  $A$  dispari) e può essere schematizzato come un contributo negativo a  $B/A$  che cresce con l'asimmetria tra neutroni e protoni, detto quindi “termine di asimmetria”, proporzionale a  $(A/2 - Z)^2/A^2$ .

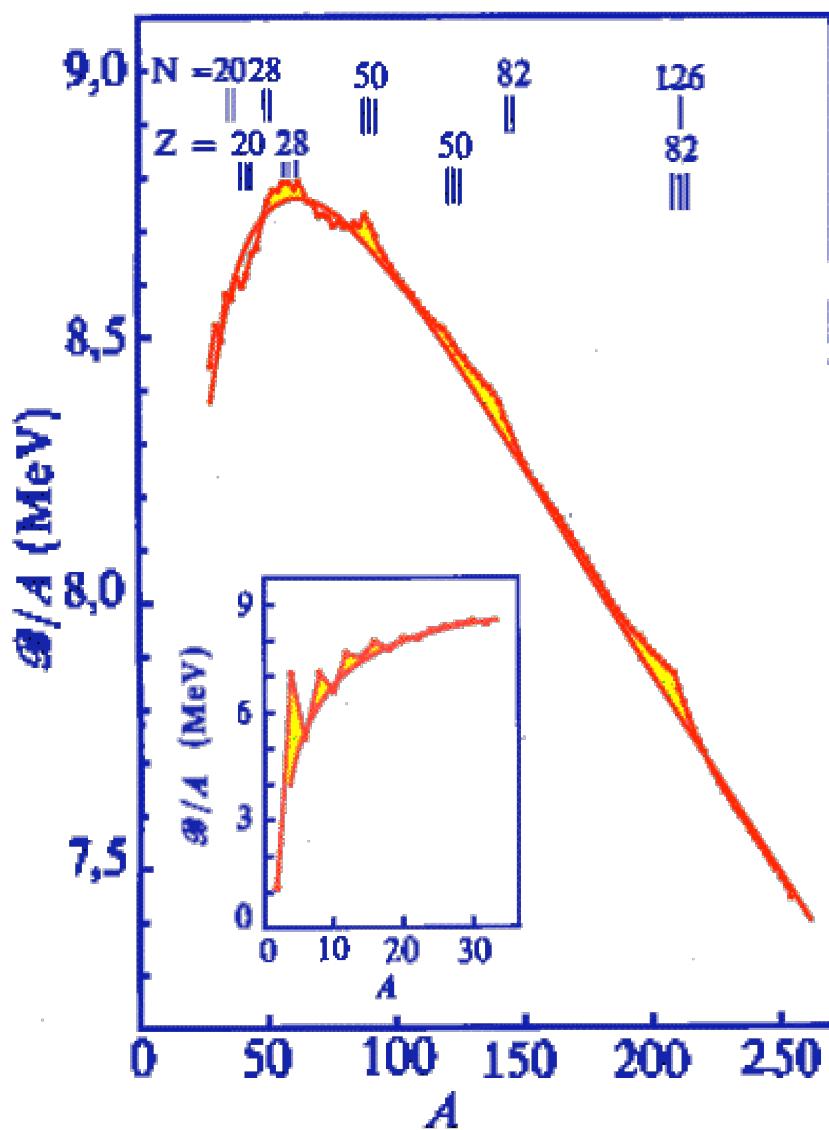


Figura 8.1: Andamento dell'energia di legame per nucleone in funzione del numero di massa  $A$ : la curva spezzata è la congiungente dei valori empirici, la curva continua rappresenta la formula (8.4).

In definitiva, mettendo insieme i vari termini si ha la formula di Weizsäcker:

$$B/A = a_V - a_S \frac{1}{A^{1/3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_A \frac{(A/2 - Z)^2}{A^2} \quad (8.4)$$

dove i vari coefficienti possono essere determinati sperimentalmente e valgono:

$$a_V \simeq 16 \text{ MeV} \quad a_S \simeq 18 \text{ MeV} \quad a_C \simeq 95 \text{ MeV} \quad a_A \simeq 0.7 \text{ MeV}.$$

Come si può vedere in fig. 8.1 vi sono delle differenze piccole ma significative tra la curva e i valori effettivi: questi sono dovuti ad effetti che possono essere interpretati nell'ambito del modello a *shell*, che non sarà discusso in questa sede. Su base fenomenologica, il contributo dell'interazione tra gli spin dei nucleoni, diverso per le varie combinazioni di  $A$  e  $Z$  pari e dispari, può essere parametrizzato come correzione alla formula di Weizsäcker per un termine  $\delta(A, Z)$ , nullo se  $A$  è dispari mentre è uguale a  $\pm\delta_0 = \pm a_P/A^{3/2}$ , dove il segno è positivo o negativo rispettivamente per  $Z$  e  $N$  pari e per  $Z$  e  $N$  dispari;  $a_P$ , come gli altri coefficienti della formula (8.4), può essere determinato empiricamente e vale circa 12 MeV.

## 8.4 Stabilità

I nuclidi presenti in natura possono essere rappresentati nella “carta di Segré” (fig. 8.2), dove si riporta in ascissa il numero di neutroni  $N = A - Z$  e in ordinata il numero di protoni  $Z$ . Ogni nuclide è rappresentato da un punto in questa carta. I nuclidi possono essere suddivisi in nuclei stabili ed instabili, considerando stabili anche quei nuclei che hanno vite medie grandi rispetto all’età della sistema solare. Fino a  $A \sim 40$ , i nuclei stabili sono concentrati in una stretta regione attorno a  $N \simeq Z \simeq A/2$ , mentre per valori di  $A$  sempre più elevati i nuclei stabili hanno un eccesso crescente di neutroni per bilanciare con l’attrazione nucleare la repulsione coulombiana tra i protoni.

I nuclidi instabili decadono in vari modi: per gli isobari con un eccesso di neutroni, è energeticamente vantaggioso convertire un neutrone in un protone attraverso un decadimento  $\beta^-$ , mentre nel caso di un eccesso di protoni il decadimento  $\beta^+$  può avvenire solo se energeticamente possibile. Una ulteriore possibilità di decadimento  $\beta$  è la *cattura elettronica* di un elettrone atomico da parte del nucleo attraverso il decadimento  $\beta$  inverso  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ .

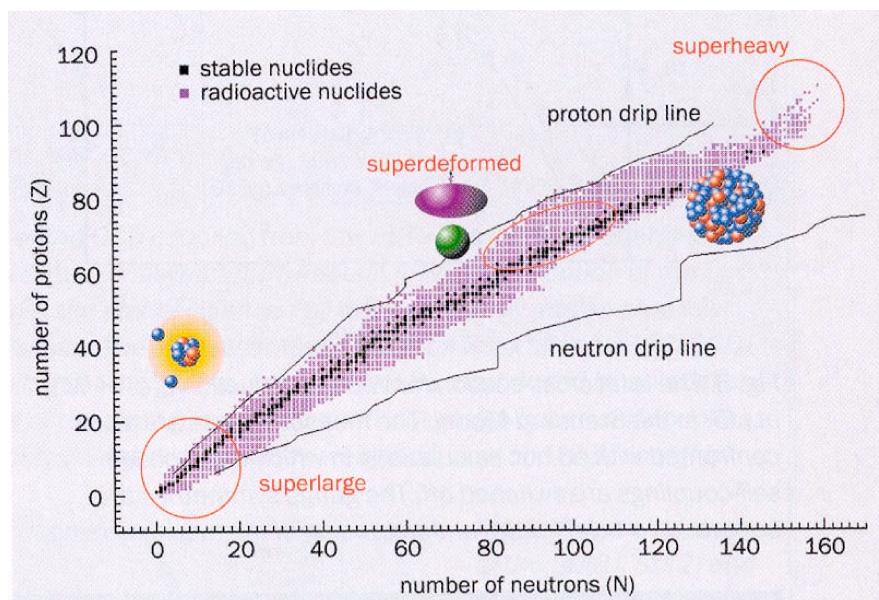


Figura 8.2: Carta di Segré, dove sono rappresentati tutti i nuclidi come punti nel piano  $N, Z$ . I punti neri rappresentano i nuclei stabili.

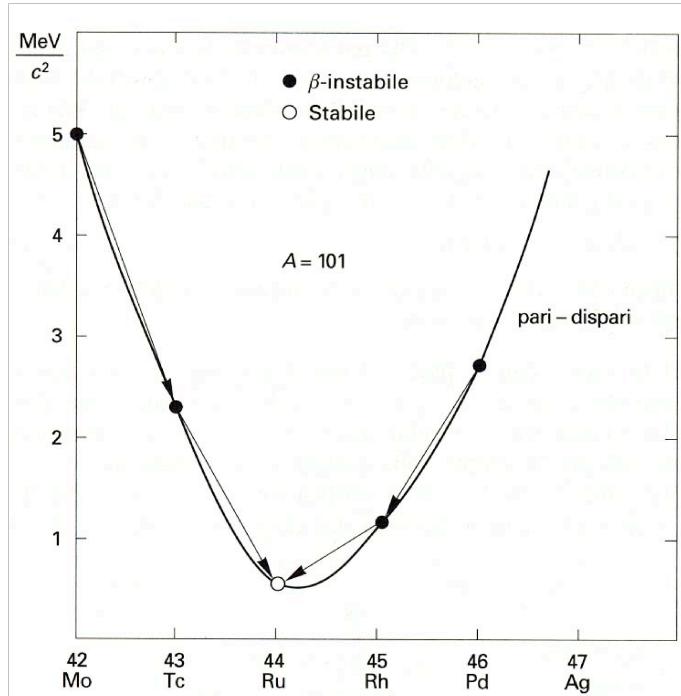


Figura 8.3: Parabola di massa per  $A$  dispari. In ascissa il numero atomico, l'origine della scala delle masse è arbitraria. I decadimenti possibili sono indicati dalle frecce.

Poiché la formula di Weizsäcker (8.4), fissato  $A$  dispari, rappresenta una parabola in funzione di  $Z$ , in una sequenza di isobari ci sarà un nucleo con massa più piccola che sarà stabile rispetto al decadimento  $\beta$ . Nuclei con  $Z$  minore rispetto a quello a massa minima decadrono  $\beta^-$ , mentre nuclei con  $Z$  maggiore possono decadere  $\beta^+$  o per cattura elettronica (si veda la fig. 8.3, che rappresenta la parabola di massa per  $A = 101$ ). Viceversa, per  $A$  pari, a causa della correzione  $\delta$  le parabole sono due, separate di  $2\delta$  e possono esserci anche due o tre isobari stabili, separati di  $2Z$  (fig. 8.4, per  $A=106$ ).

A partire dal massimo della curva di  $B/A$ , l'andamento decrescente dell'energia di legame per nucleone rende possibili altri modi di decadimento per nuclei pesanti che siano  $\beta$ -stabili: può diventare energeticamente conveniente che un nucleo pesante si spezzi in due nuclei leggeri che abbiano una energia

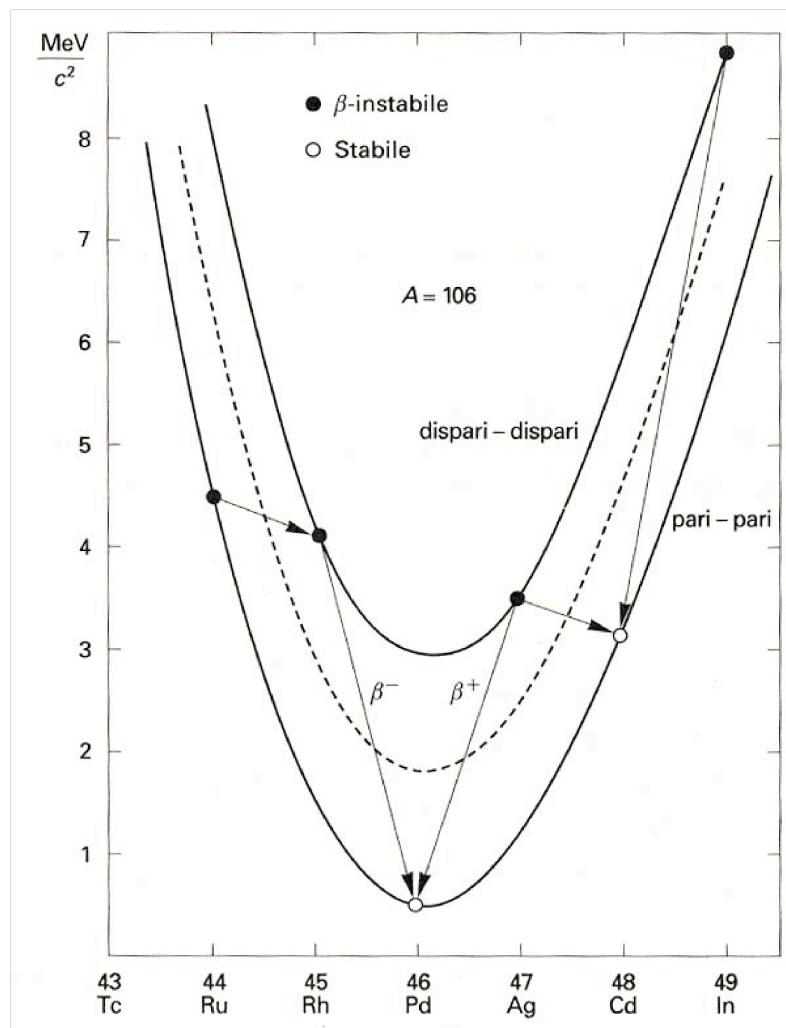


Figura 8.4: Parabole di massa per  $A$  pari. Le due parabole corrispondono a  $Z, N$  pari-pari e dispari-dispari. Come si vede, ci possono essere più nuclei stabili, tutti in configurazione pari-pari.

di legame totale maggiore di quella del nucleo padre. Tra questi, il processo più comune è il decadimento  $\alpha$ , nel quale uno dei due nuclei figli è un nucleo di elio. Poiché l'energia di legame dell'elio è 28.3 MeV, la condizione per il decadimento  $\alpha$  è che:

$$B(A, Z) < B(A - 4, Z - 2) + 28.3 \text{ MeV}.$$

Questa condizione è soddisfatta a partire da  $A \geq 165$ , ma i tempi di decadimento sono così lunghi che i nuclei sono praticamente  $\alpha$ -stabili fino al bismuto, con  $A = 209$ . Tutti i successivi elementi sono instabili, con l'eccezione del torio e dell'uranio (i cui tempi di decadimento sono più lunghi dell'età del sistema solare), e non sono quindi più presenti sulla terra, a parte quelli che compaiono nelle catene di decadimento del torio e dell'uranio. In definitiva, non possono essere naturalmente presenti sulla terra nuclei al di là dell'uranio, anche se nuclei più pesanti possono essere prodotti artificialmente. Un altro processo energeticamente favorevole, per  $A$  grande, può essere il decadimento in due nuclei più leggeri: questo processo è chiamato *fissione*.