

# Appunti di

# Nuclear and Particle Physics

Valerio Favitta  
vfavitta@gmail.com

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Particelle elementari ed interazione . . . . .	3
1.2	Evoluzione storica . . . . .	4
1.3	Sonde sperimentali . . . . .	5
1.4	Scala di energia . . . . .	5
1.5	Relazioni importanti . . . . .	6
1.6	Evoluzione post-Rutherford . . . . .	6
1.7	Scoperta del neutrone di Chadwick . . . . .	6
1.8	Derivazione formula di Bethe-Bloch . . . . .	8
1.9	Equazione di Dirac ed esistenza delle antiparticelle . . . . .	12
1.10	beta-decay ed esistenza del neutrino . . . . .	12
1.11	Classificazione delle particelle . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Cinematica relativistica</b>	<b>14</b>
2.1	Trasformazioni di Lorentz . . . . .	14
2.2	Esperimento CPP, muoni, pioni e Yukawa . . . . .	15
2.3	Scoperta dell'antiprotone . . . . .	21
2.4	Differenza target fisso e collider . . . . .	22
2.5	Trasformazioni di Lorentz tra centro di massa e laboratorio . . . . .	23
2.6	Impulso trasverso . . . . .	24
2.7	Scattering elastico . . . . .	25
2.8	Decadimenti . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Senza nome per ora</b>	<b>29</b>
3.1	Interazioni . . . . .	29
3.2	Diagrammi di Feynman . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Modello statico a quark</b>	<b>36</b>
4.1	Simmetrie e leggi di conservazione . . . . .	36

# 1 Introduzione

## 1.1 Particelle elementari ed interazione

Una particella si dice elementare se non possiede una struttura interna.

- Una particella elementare è tale in base al tempo in cui ci troviamo: cambia in base alle nostre conoscenze. Una volta l'atomo era considerato elementare, adesso sappiamo che c'è un nucleo, che è composto a sua volta da nucleoni che è composto a sua volta da quark. Questo è ciò a cui siamo arrivati oggi, non possiamo essere sicuri che i quark siano elementari e quindi che non abbiano una struttura interna.
- Con energie maggiori, siamo in grado di migliorare la nostra risoluzione e poter sondare strutture più piccole, cioè distanze piccole. Questo viene dalla meccanica quantistica e la relazione di De Broglie.
- Un sistema come il nucleo ha dei livelli e questo è dovuto intrinsecamente al fatto che c'è una struttura interna e i nucleoni possono ri-organizzarsi su livelli diverse.
- Oggi con LHC arriviamo a 14 TeV, e così siamo arrivati ai quark. Magari migliorando la risoluzione, cioè aumentando l'energia, scopriamo una struttura interna ai quark.
- L'interazione tra particelle avviene per scambio di particelle mediatrici (non materiali). Queste particelle mediatrici sono dette bosoni e hanno spin intero (uno).

Le scale di energia sono:

- Per cristalli e molecole si parla di cm a cui corrispondono decine di eV.
- Per atomi si parla di  $10^{-10}$  m.
- Per i nuclei si parla di  $10^{-15}$  m a cui corrispondono fino a centinaia di MeV.
- Per le particelle elementari fino ad 1 TeV. **VEDERE SLIDE DIMENSIONI DEI QUARK, SE C'È**

Parliamo del Modello Standard. Sappiamo che ci sono 3 famiglie o generazioni di particelle elementari della materia, che si suddividono in quark e leptoni (sono tutti fermioni). Ricordiamo inoltre che il Modello Standard è basato sul fatto che la massa del neutrino è nulla.

- Le famiglie di leptoni sono
- Sono raggruppati in doppietti perché è sottintesa una simmetria, dovuta alla interazione debole. Si può notare che la differenza di carica tra particella alta e bassa è sempre di 1. Inoltre la particella superiore ha sempre carica maggiore di quella inferiore. Questi fatti sono dovuti al fatto che si passa da una all'altra tramite interazione debole con scambio di bosoni  $W^\pm$ , che è quindi "l'accoppiatore" di queste particelle di ciascuna famiglia. La massa delle famiglie va ad aumentare con il numero di famiglia, che comunque non è un parametro rilevante nella loro interazione.
- I leptoni sono sempre soggetti a forza debole, invece sono soggetti a forza elettromagnetica solo se carichi. Invece i quark sono sempre soggetti a forza forte, ed a forza elettromagnetica.

- I mediatori dell'interazione elettromagnetica sono i fotoni, quelli della interazione forte sono i gluoni (otto), quelli della interazione debole sono i bosoni  $W^\pm$  e  $Z$ .
- La gravità chiaramente agisce su ogni particella in quanto sono dotate di masse. Sul gravitone non si hanno evidenze sperimentali. Ci piacerebbe che esistesse così da poter descrivere la gravità al pari delle altre tre interazioni. Ad ogni modo la sua intensità è 39 ordini di grandezza più piccola rispetto alla interazione forte quindi è molto difficile da osservare.

## 1.2 Evoluzione storica

Vediamo come si è arrivati al Modello Standard.

- Inizialmente, tra il 1700 e il 1800 da studi di reazioni chimiche si ottennero le varie leggi di Dalton, Boyle etc. Dalton giunse alla conclusione che l'atomo fosse la particella costituente della materia e che fosse indistruttibile e indivisibile. In generale la materia è fatta da atomi diversi. Avogadro aggiunse l'esistenza delle molecole, aggregazioni di atomi.
- C'erano 92 elementi la cui massa si poteva sempre esprimere come multiplo del primo elemento cioè l'idrogeno. Questo ci fa pensare che dietro si nasconda una simmetria, ossia c'è qualcosa che si ripete.
- Si può stimare il raggio atomico conoscendo densità **rivedi slide** e assumendo volume di una sfera. Otteniamo  $(\frac{3}{4\pi n}f)^{\frac{1}{3}}$  con  $n$  numero di atomi per unità di volume e  $f$  fattore che tiene conto dell'impacchettamento, cioè quanto sono vicini o lontane le particelle nell'atomo. Si ottiene una stima sui  $10^{-10}$  m.

Parliamo della tavola periodica.

- Essa non può rappresentare le particelle elementari innanzitutto per una questione filosofica: non possono essere così tante le particelle elementari. In realtà niente lo vieta, ma semplicemente non ce lo aspettiamo.
- Un fattore più importante è la regolarità delle proprietà chimico-fisiche degli elementi in essa. Questo nasconde la presenza di struttura interna.
- Ad ogni modo ha molte informazioni. È difficile individuare questo tipo di simmetrie, però sappiamo che qualcosa che si ripete c'è.
- Dunque inizialmente la particella elementare era l'atomo di idrogeno, con tutti gli atomi proporzionali ad esso.
- Successivamente Thomson scoprì l'elettrone di massa 2000 volte minore rispetto all'idrogeno. Questo destabilizza la nostra conoscenza, perché l'atomo è neutro ed è stato scoperta qualcosa di negativo al suo interno. Quindi qualcosa doveva compensare la carica negativa dell'elettrone all'interno dell'atomo. In effetti già questa era la prova che l'atomo non fosse elementare.
- Rutherford quindi testò il modello a panettone di Thomson e scoprì che l'atomo è composto da un nucleo e da elettroni che orbitano attorno ad esso. Questo è il modello planetario. Ciò era dovuto al fatto che mandando un fascio di  $\alpha$  contro un foglio d'oro si osservava che la maggior parte delle particelle passava dritto, ma alcune venivano deviate di molto, alcune addirittura backscatterate. Questo è dovuto al fatto che l'atomo è composto da un nucleo

molto piccolo rispetto al volume dell'atomo, mentre se fosse vero il modello di Thomson le particelle si sarebbero dovute deviare di poco. Questa scoperta fu possibile solo alla scoperta della radioattività naturale, infatti per generare il fascio di  $\alpha$  si usò il polonio che è radioattivo.

- Approfondiamo questo aspetto. Se mandiamo un fascio di  $\alpha$  contro un foglio d'oro, se la carica positiva è diffusa su tutto l'atomo allora in base al parametro d'impatto del fascio, esso vedrà una carica ridotta (cioè non tutta) secondo il teorema di Gauss in base al parametro d'impatto. Si ha che la carica dentro e fuori si compensano e quindi non si dovrebbe avere una grande deflessione, mentre si osservò l'opposto.

### 1.3 Sonde sperimentali

- Per la scelta di una sonda l'elemento chiave è la risoluzione. Il motivo è legato all'ottica. Quando mandiamo onde contro delle fenditure, si devono confrontare l'elemento geometrico (in questo caso l'apertura della fenditura) e la lunghezza d'onda dell'onda incidente. Questo è ciò che dobbiamo fare anche in meccanica quantistica. Minore sono le lunghezze d'onda, maggiore sarà la risoluzione e, ricordando la relazione di De Broglie, maggiore deve essere l'energia. Questa è la base della fisica degli acceleratori. C'è dunque un legame tra la lunghezza d'onda incidente e un fattore geometrico dell'oggetto da osservare.
- Grazie effetto fotoelettrico e relazione di De Broglie c'è completo legame tra onde e particelle.
- Rutherford infatti riuscì nel suo esperimento perché la lunghezza d'onda delle particelle  $\alpha$  era vicina alle dimensioni che oggi sappiamo essere del nucleo, ossia  $10^{-15}$  m. Quindi aveva risoluzione esatta. Impiegò  $v_\alpha = 0.05$  c (vale espressione di impulso classica).  $\lambda_\alpha = \frac{h}{m_\alpha v_\alpha} \approx 10^{-15}$  m. Se di 1 MeV avesse usato energie del keV non avrebbe visto nulla.
- In generale quindi se ho lunghezze d'onda maggiori del raggio nucleare, le particelle incidenti non riescono a vedere il nucleo e interagiscono solo con nube elettronica, portando a debole scattering (cioè piccole deflessioni); se le due dimensioni sono comparabili, si osservano forte deflessioni come in Rutherford e si risolve la struttura nucleare; se la lunghezza d'onda è inferiore al raggio nucleare, non solo esploriamo il nucleo ma anche i costituenti dei nucleoni. Pertanto, la lunghezza d'onda gioca un ruolo chiave nel determinare cosa si possa "vedere" e quali fenomeni si osservano a livello nucleare o subnucleare.
- Tipicamente invece di parlare di lunghezza d'onda si parla di quadrimpulso trasferito  $q^2$ . Esso è collegato al potere risolutivo (se  $q^2$  è grande, la risoluzione è grande).

### 1.4 Scala di energia

- In fisica delle particelle l'energia la si dà in multipli di eV. Nel LHC un protone ha energia di 6.5 TeV. Questi corrispondono a  $10^{-6}$  J, che in scala microscopica è enorme, mentre in scala macroscopica è una energia insignificante. Quindi è rilevante sapere il sistema di cui si sta parlando, oltre all'ordine di grandezza.
- Si usano unità naturali ecc. **Mettere la tabella dalle slide.**
- Un altro punto importante è la analisi dimensionale. Usiamo unità naturali. Al solito tempo e spazio sono omogenei e sono inversi all'energia. **Inserire altra tabella.**

## 1.5 Relazioni importanti

Al solito valgono le formule relativistiche (uso unità naturali).

- Sappiamo che  $E = \gamma m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$ . Se  $v \ll 1$  (cioè  $v \ll c$ ) allora  $E \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2$  sviluppando in serie.
- Inoltre  $p = mv = \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2}}$  e  $E^2 = p^2 + m^2$ . Per il fotone  $E = p$ .
- Facciamo un esempio numerico. Supponiamo di avere un elettrone ( $m = 0.511MeV$  con  $v = 0.99$ ). Quindi  $\gamma = 7.089$ . Allora  $E = 3.62MeV$  e  $p = 3.58MeV$ , cioè sono molto vicini! Questo è dovuto al fatto che la massa è piccola rispetto all'energia. Questa approssimazione la facciamo **sempre**, cioè la massa la poniamo a zero perché trascurabile rispetto all'impulso che ha la particella.
- Se invece  $v = 0.999$ , l'energia e l'impulso erano ancora più vicini.

## 1.6 Evoluzione post-Rutherford

- Allora l'atomo è neutro. Si suppose inizialmente che avesse semplicemente tanti protoni quanti elettroni e che il responsabile della massa dell'atomo fosse il nucleo.
- Ma se fossi così, la massa non tornerebbe con le misure sperimentali. Deve esistere dunque altro. Deve essere neutro perché la carica è già a posto, e deve avere massa simile ai protoni perché la massa misurata era circa il doppio di quella prevista considerando solo protoni.
- Con l'idea del neutrone nasce anche l'idea di una nuova interazione, quella forte che si aggiunge a quella gravitazionale e quella elettromagnetica. Infatti fino ad ora quella elettromagnetica era responsabile di tutto, ma non può invece spiegare come mai i neutroni sono legati.
- Il problema era evidente considerando l'anomalia del  $^{14}N$ . **GUARDA QUADERNO RIZZO** Ma se l'atomo è composto da fermioni, allora nel sistema con 14 protoni e 7 elettroni, avendo 21 particelle avrò per forza spin semintero perché le accoppio a due a due, mentre si misura spin pari a 1.
- Se invece considero il neutrone, allora ho 7 protoni, 7 neutroni e 7 elettroni, quindi ho 28 particelle e quindi spin intero.

## 1.7 Scoperta del neutrone di Chadwick

Non approfondiremo l'apparato sperimentale più di tanto, ma ci concentreremo su altre questioni.

- L'esperimento per la scoperta del neutrone fu fatto già prima di Chadwick (1932) ma fu mal interpretato. Cerchiamo di capire perché.
- La reazione coinvolta è  $\alpha + {}^9_4Be \rightarrow {}^{12}_6C + n$ , che sappiamo essere quella corretta (interpretabile come scattering  $\gamma + n \rightarrow \gamma + n$ ). Sul canale d'ingresso non abbiamo dubbi, perché le particelle  $\alpha$  le forniamo noi dalla sorgente di polonio e il target di berilio lo abbiamo scelto noi. I problemi sorgono sul canale di uscita.

- Nella interpretazione scorretta della reazione, senza considerare il neutrone, si supposeva che la reazione fosse  $\alpha + {}^9_4\text{Be} \rightarrow {}^{13}_6\text{C} + \gamma$  (oppure  $\gamma + p \rightarrow \gamma + p$ ). Infatti ai tempi si sapeva solo che ci fosse radiazione neutra molto penetrante.
- *Quale è la differenza?* Se fosse davvero un  $\gamma$ , avrebbe energia molto elevata, che in realtà non ho a disposizione (50 MeV)

Vediamo l'apparato sperimentale. **METTI IMMAGINE SLIDE**

- Se mandiamo un fascio di protoni contro un bersaglio, essi vengono rallentati e non penetrano più di tanto. Al contrario i neutroni è possibile che passino indisturbati (sono molto penetranti). Se i neutroni collidono con un nucleo, normalmente avviene una reazione di knock-out, ossia esce una particella, tipicamente il protone.
- Quindi serve il vuoto nella camera dei neutroni, si mette polvere di polonio per generare particelle  $\alpha$  e si mette un bersaglio di berillio. Il neutrone penetra il bersaglio di berillio e arriva fino alla camera di ionizzazione. Inoltre si mette della paraffina tra bersaglio e camera a ionizzazione. La paraffina è ricca di protoni, faccio questo per massimizzare la sezione d'urto protone-neutrone, che è elevata perché hanno masse simili. Chiaramente nella camera a ionizzazione rivelo protoni e non neutroni.

Vediamo perché quella reazione è sbagliata.

- La reazione sbagliata che hanno considerato i Curie sarebbe stata  $\alpha + {}^9_4\text{Be} \rightarrow {}^{13}_6\text{C} + \gamma$ , che possiamo esprimerla come  $\gamma + p \rightarrow \gamma + p$ , cioè effetto Compton, ma con il protone.
- Rivediamo velocemente l'effetto Compton.
- Si ha dalla conservazione dell'impulso lungo le due direzioni

$$\begin{cases} p_0 = p_1 \cos \vartheta + p \cos \varphi \\ 0 = p_1 \sin \vartheta - p \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} p_0^2 + p_1^2 \cos^2 \vartheta - 2p_0 p_1 \cos \vartheta = p^2 \cos^2 \varphi \\ p_1^2 \sin^2 \vartheta = p^2 \sin^2 \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} p^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \vartheta \\ p_1^2 \sin^2 \vartheta = p^2 \sin^2 \varphi \end{cases}$$

- Invece dalla conservazione dell'energia

$$E_0 + m_e c^2 = E_1 + T + m_e c^2 \Rightarrow E_0 - E_1 = T \Rightarrow c(p_0 - p_1) = T$$

- Vogliamo l'energia dell'elettrone:  $E_{\text{TOT}}^{\text{elettrone}} = m_e c^2 + T = (m_e^2 c^4 + c^4 + c^2 p^2)^{\frac{1}{2}}$  (usando la relazione di mass-shell) ed elevando al quadrato troviamo  $\frac{T^2}{c^2} + 2m_e T = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \vartheta$  da cui usando la conservazione dell'energia troviamo

$$\frac{p_0 - p_1}{p_0 p_1} = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) \Rightarrow \frac{E_0 - E_1}{E_0 E_1} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)$$

dove  $E_0$  è l'energia del fotone incidente e  $E_1$  è l'energia del fotone diffuso. Possiamo ottenere

$$E_1 = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)}$$

Adesso possiamo trovare l'energia dell'elettrone da  $E = E_0 - E_1$ . Otteniamo

$$E = \frac{\frac{E_0^2}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)}{1 + \frac{E_0}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)} \Rightarrow E_{\text{MAX}}^{\text{elettrone}} = \frac{\frac{2E_0^2}{m_e c^2}}{1 + 2\frac{E_0}{m_e c^2}} = \frac{2E_0^2}{m_e c^2 + 2E_0}$$

- Tornando a Curie, al posto della massa dell'elettrone mettiamo la massa del protone. Dall'ultima relazione otteniamo l'equazione di secondo grado in  $E_0$

$$2E_0^2 - 2E_0E_p^{\text{MAX}} - m_p c^2 E_p^{\text{MAX}} = 0$$

Avendo misurato  $E_p^{\text{MAX}} \approx 5.3$  MeV, si ottiene  $E_0 \approx 52.6$  MeV. Finora negli esperimenti erano abituati a qualche MeV di energia per i fotoni, quindi era una novità. Tuttavia, il problema non era questo. Con l'interpretazione di Curie avrebbero  $E_\gamma = m(\alpha) + m({}_4^9\text{Be}) - m({}_{12}^{13}\text{C}) \approx 11$  MeV. Invece con Chadwick si ha  $T_n = m(\alpha) + m({}_4^9\text{Be}) - m({}_{12}^{12}\text{C}) - m(n) = 945.3\text{MeV} - m(n)$ .

- Dunque con Curie<sup>1</sup> servirebbe un fotone di energia di circa 50 MeV che è incompatibile con l'energia a disposizione di soli 11 MeV. Invece se ho il neutrone, la sua energia cinetica sarà pari a  $T_n \approx 945.3\text{MeV} - m(n)$ .

Ricaviamo la relazione che lega dati sperimentali con la massa del neutrone.

- Stiamo considerando un urto elastico neutrone-protone, quindi si conserveranno sia energia ed impulso.

$$\begin{cases} m_n v_n^{\text{MAX}} = m_p u_p - m_n v'_n \\ \frac{1}{2} m_n v_n^{\text{MAX},2} = \frac{1}{2} m_p u_p^2 + \frac{1}{2} m_n v_n'^2 \end{cases} \quad (1)$$

Si ricava  $v'_n$  dalla prima e lo si sostituisce nella seconda. Alla fine si ottiene

$$u_p = \frac{2m_n}{m_n + m_p} v_n^{\text{MAX}}$$

Se ripetessimo l'esperimento con scattering di azoto, si trova la stessa formula ma con azoto  $u_N = \frac{2m_n}{m_n + m_N} v_n^{\text{MAX}}$ .

- Noi misuriamo  $u_p$  e  $u_N$  mentre  $m_N$  e  $m_p$  sono note, quindi facendo il rapporto si trova

$$\frac{u_p}{u_N} = \frac{m_N + m_n}{m_p + m_n} \Rightarrow m_n \approx m_p$$

Anche se in realtà la massa del neutrone è leggermente superiore di quella del protone.

- Abbiamo detto che si può misurare la velocità dal range della particella carica che attraversa il materiale. Questo è possibile grazie alla formula di Bethe-Bloch.

## 1.8 Derivazione formula di Bethe-Bloch

L'interazione radiazione-materia è alla base della rivelazione di particelle. Consideriamo solo particelle cariche.

- Interagiscono il campo della particella incidente con il campo del mezzo mediante ionizzazione ed eccitazione. Così costruisco diverse tipologie di rivelatori.
- Sono rilevanti il tipo di materiale, il tipo e la velocità della particella incidente. Anche se nel nostro caso non proviene da un fascio da ma una reazione.
- Se  $b > R_{\text{atomico}}$  eccito e/o ionizzo e vedo l'atomo come un blocco. Non c'è deflessione.

<sup>1</sup>Majorana nel frattempo li perculava dicendo che non sapevano di aver già scoperto il neutrone.



- Se  $b \approx R_a$  uguale a prima ma l'elettrone atomico è come se fosse libero.
- Se  $R_N < b < R_a$  vedo il nucleo e c'è forte deflessione.
- Le cariche possono: ionizzare, emettere luce di scintillazione, avere effetto Cherenkov o emettere radiazione di transizione. I  $\gamma$  possono interagire con effetto fotoelettrico, effetto Compton o produzione di coppie. I neutroni urtano un nucleo che rincula. Infine i neutrini possono diffondersi solo per interazione debole, con  $\sigma \approx 10^{-41} \text{ cm}^2$  e quindi servono tonnellate di materiale per rivelarle.

Sappiamo che la perdita di energia  $\frac{dE}{dx} \propto z^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{Z}{A}$ .

- Si usa di solito  $\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}$  per cui il *MIP* (Minimum Ionizing Particle) è simile per tutti i materiali ed è circa  $1 - 2 \frac{\text{MeV} \cdot \text{g}}{\text{cm}^2}$ .
- Da  $\frac{dE}{dx}$  si può ricavare il range residuo della particella carica. Supponendo che  $E_0$  perda energia solo da ionizzazione/eccitazione, possiamo esprimere il range come

$$R = \int_0^R dx = \int_{E_0}^{mc^2} \left( \frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE = m \cdot F(v)$$

quindi il range è funzione della velocità iniziale della particella. A quei tempi il range si misurava dalle camere a nebbia manualmente con un righello! E così si ottenevano informazioni sulla velocità della particella.

- Per le particelle neutre non abbiamo tracce, però possiamo guardare le cariche prodotte dalla collisione. Ad esempio se i prodotti sono  $^{12}\text{C} + n$ , mettiamo uno strato di paraffina così che dallo scattering  $n - p$  riveliamo il protone (lascia una traccia nella camera a nebbia, da cui ricaviamo il range).

Deriviamo la formula di Bethe-Bloch.

- Consideriamo un atomo con carica  $Z$  e massa  $A$  ed una particella incidente di carica  $ze$  e massa  $m$ . Supponiamo che la massa sia tale che  $m \gg m_e$  e che l'elettrone sia fermo rispetto alla particella incidente in quanto la velocità è elevata.

#### • Mettere immagini da slide altrimenti da npp 04

- La particella incidente vedrà gli elettroni del mezzo muoversi con velocità  $-v$ . Possiamo calcolare la quantità di impulso trasferito nell'urto. La forza è dovuta al campo elettrico, quindi  $F = e\varepsilon_{\perp}$  (uguale in sistema di riferimento del laboratorio e della particella), dove la componente longitudinale si elimina per simmetria nell'integrale.

$$\vec{p}'_e = \Delta \vec{p}_e = \int e\varepsilon_{\perp} dt = \int e\varepsilon_{\perp} \frac{dx}{v} = \frac{e}{v} \int \varepsilon_{\perp} dx$$

A questo punto applichiamo il teorema di Gauss, considerando superficie cilindrica di raggio  $b$ , parametro d'impatto. Otteniamo

$$\Phi(\vec{\varepsilon}) = \int_S \vec{\varepsilon} \cdot \hat{n} da = 2\pi b \int \varepsilon_{\perp} dx = \frac{ze}{\varepsilon_0}$$

Dalle ultime due segue che

$$p_e = \frac{ze^2}{2\pi\varepsilon_0 v} \frac{1}{b} = \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b^2} \frac{2b}{v} = \text{Forza di Coulomb} \cdot \text{tempo di urto}$$

- Possiamo notare che l'impulso trasferito è invariante Infatti

$$\begin{cases} \varepsilon_{\perp} = \gamma \varepsilon'_{\perp} \\ \Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} \end{cases}$$

Dunque  $p_e \sim \Delta t \cdot \varepsilon_{\perp} \sim p'_e$  invariante.

- Quindi assumendo  $m \gg m_e$  e che considero elettrone fermo perché particella incidente molto veloce, possiamo scrivere

$$T_e = \frac{p^2}{2m_e} = \left( \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b} \right)^2 \frac{2}{m_e v^2} = 2z^2 \left( \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \right)^2 \frac{(m_e c^2)^2}{b^2 m_e v^2} = 2m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \frac{r_e^2}{b^2} \quad (2)$$

con  $r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}$  raggio classico dell'elettrone. Questo valore di  $T_e$  è l'energia persa dalla particella in un singolo urto!

- Per generalizzare ad  $n$  urti, consideriamo la densità elettronica  $n_e$  in un tratto  $dx$  con parametro d'impatto tra  $b$  e  $b + db$ . Il numero di urti sarà  $n = n_e 2\pi b db dx$ . Quindi l'energia persa per numero di urti sarà

$$\frac{\partial^2 E}{\partial b \partial x} = n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{4\pi}{b} \frac{z^2}{\beta^2} \implies \frac{dE}{dx} = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} 4\pi n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \frac{db}{b} \sim \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

- $b_{\max}$  corrisponde al  $\Delta t$  dell'urto, se esso è grande rispetto al tempo di rivoluzione degli elettroni allora non c'è trasferimento di energia.

$$\frac{b}{v\gamma} > T_e \implies b_{\max} = v\gamma T_e$$

**non capisco che cazzo è. spero nelle slide altrimenti consultare libri.**

- Invece  $b$  non può essere inferiore alle dimensioni dell'elettrone visto dalla particella incidente, quindi da  $\lambda = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e c \beta \gamma} \implies b_{\min} = \frac{h}{m_e c \beta \gamma}$ .
- Se materiale ha proprietà  $Z, A, \rho$  allora ho, considerando  $n_e = \frac{N_a Z \rho}{A}$  e al posto di  $\ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$  metto le espressioni trovate:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi r_e^2 m_e c^2 \frac{N_a Z \rho}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \ln \left( \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_e}{\hbar \omega_e} \right)$$

chiamata *formula di Bohr*, che è il predecessore della formula di Bethe-Bloch in quanto è semiclassica. Da notare che poi per  $\hbar \omega_e$  si mette l'energia di legame dell'elettrone, cioè il potenziale medio di ionizzazione  $I$ .

- Normalmente si passa da spessore  $dx$  a  $\rho dx$  così da avere quantità quasi indipendente dall'atomo. Infatti  $\frac{dE}{\rho dx} \propto \frac{Z}{A} \ln \text{cost.}$  e si definisce  $C = 4\pi r_e^2 m_e c^2 N_a = 0.307 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ , in modo da poter scrivere la formula di Bohr come

$$\frac{dE}{\rho dx} = C \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \ln \left( \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\langle I \rangle} \right)$$

- Dalla Equazione 2 abbiamo:

$$b^2 = 2r_e^2 \frac{z^2 m_e c^2}{\beta^2 E_e} \implies |2b db| = 2r_e^2 \frac{z^2 m_e c^2}{\beta^2 E_e^2} dE_e$$

e da questa possiamo ricavare la probabilità che percorrendo un tratto unitario la particella subisca una collisione con parametro urto tra  $b$  e  $b + db$ , risulta

$$d\sigma = 2\pi b db n_e = \dots \implies \frac{d\sigma}{dE} = 2\pi r_e^2 m_e c^2 n_e \frac{z^2}{\beta^2} \frac{1}{E_e^2}$$

quindi ho dipendenza da  $E_e^{-2}$  quindi collisioni con trasferimento di energia elevato sono rare!

- Consideriamo l'urto con un nucleo piuttosto che con elettrone. Per fare ciò dobbiamo considerare  $\frac{Z}{1840A} \sim 10^{-4}$  quindi un contributo totalmente trascurabile!
- Le differenze con la formula di Bethe-Bloch sono i termini che tengono conto degli effetti di densità di carica e l'energia cinetica massima trasferita all'elettrone in un singolo urto.
- Dobbiamo tenere conto di due cose quando passiamo da Bohr a Bethe-Bloch: se abbiamo a che fare con elettroni e positroni il termine nel  $\ln$  va modificato perché le masse delle due particelle sono uguali, detto termine delle fore di scambio; anche  $T_{\max}$  possiamo ricavare dalla cinematica.
- Saltando passaggi matematici (**vedi slide**) sostituendo  $T_{\max}$  e alla fine abbiamo

$$\frac{dE}{\rho dx} \propto z^2 \cdot \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2}.$$

Da qui possiamo comprendere che la traccia dell'azoto è piccola rispetto a quella del protone a parità di energia, proprio per il termine  $z^2$ . Inoltre visto che per la maggior parte dei materiali  $\frac{Z}{A} \sim \frac{1}{2}$  allora abbiamo che il  $MIP \sim 1 - 2 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^{-2}$  (solo per l'idrogeno il rapporto vale 1).

- Questa formula non funziona ad energie elevate ( $> \text{TeV}$ ) perché dovrei tenere conto di altri effetti relativistici, e non funziona neanche a basse energie cioè ad energie paragonabili a quelle degli elettroni atomici in quanto non posso più considerarli fermi.
- Quindi la perdita di energia è la stessa per tutti i materiali! Ad esempio un protone da 10 MeV perde la stessa energia attraversando  $1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$  di rame, alluminio ecc. Per energie minori del MIP ogni particella perde energia in modo diverso, quindi posso identificare la particella.
- Si può scrivere la legge di scala  $-\frac{dE_2}{dx} = -\frac{z_2^2}{z_1^2} \cdot \frac{dE_1}{dx}$
- **Code di Landau** **immagine da slide**: in generale qualunque rivelatore ha una granularità limitata. Misuro la perdita di energia in spessore finito. Se consideriamo uno spessore sottile (e bassa densità), si avranno mediamente poche collisioni e alcune saranno caratterizzate da grande energia trasferita. Se grafichiamo la distribuzione di energia trasferita sarà la distribuzione di Landau con una bella coda lunga. È importante perché di solito si prende il valor medio della distribuzione, ma funziona bene se è gaussiana o in generale simmetrica. In questo caso è asimmetrica ed ho grandi fluttuazioni per perdita di energia grande. Normalmente si tagliano le code iniziali e finali per minimizzare le fluttuazioni e si va il valor medio di quello che resta. Invece con grandi spessori abbiamo distribuzione simmetrica gaussiana, avendo molte collisioni.

Una volta che abbiamo la formula di Bethe-Bloch possiamo ricavare il range come già detto. Le fluttuazioni nella perdita di energia si riflettono nello straggling del range. Se volessimo ricavare range per mesoni  $K^+$  **va be mi secco esempio numerico speriamo slide.**

## 1.9 Equazione di Dirac ed esistenza delle antiparticelle

Poi arrivo l'equazione di Dirac  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$ .

- Al contrario dell'equazione di Schrödinger, questa è relativistica e del primo ordine. Le  $\gamma^\mu$  sono le matrici di Dirac e sono  $4 \times 4$ , quindi  $\psi$  non è uno scalare bensì uno spinore a quattro componenti, in cui le prime due sono per la particella e le altre due per antiparticella. Sono due per tenere conto dello spin up e down. Quindi ci sono quattro soluzioni.
- All'energia negativa quindi associò l'esistenza di una antiparticella. Ma questo doveva essere verificato. La verifica avvenne con la scoperta del positrone da parte di Anderson nel 1932.
- Come già detto, a quei tempi le uniche sonde disponibili per gli esperimenti in laboratorio erano le sorgenti radioattive naturali e i raggi cosmici. Per scoprire il positrone usarono raggi cosmici. Nella camera a nebbia arrivavano queste particelle e mettendo un campo magnetico avevano differente raggio di curvatura.
- Se ho un elettrone o un positrone la curvatura sarà la stessa, quindi solo con camera a nebbia e campo magnetico non posso distinguerli. Allora si mette un blocco di materiale per dare un ordine temporale, perché ogni particella che attraversa un blocco materiale esce con energia minore. Si misura quindi il raggio di curvatura prima e dopo il blocco e si ricava l'impulso dalla relazione  $r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} \implies p(\text{GeV}) = 0.3B(T)Rr(m)$ .
- Una volta che siamo stati in grado di determinare la carica di tale particella (conoscendo  $B$ ), resta ancora il dubbio se fosse il protone (o a questo punto qualunque altra particella nuova positiva). Per risolvere il problema si valuta  $\frac{P}{E}$ . Avendo misurato impulso iniziale di 63 MeV (dalla curvatura), Risulta  $E_p \approx 1.13 \text{ GeV} \implies \frac{p}{E_p} \sim 0.05c$  e a questo valore, dalla formula di Bethe-Bloch si osserva un range  $R \sim 5mm$ . Il punto è che si osservava un range di  $50mm$ , quindi c'è una forte discrepanza. Se invece ripetiamo il calcolo con il positrone, avendo massa trascurabile risulta  $E_{e^+} \approx 63 \text{ MeV}$  stessi, e a questi corrispondono un range compatibile con quello sperimentale.
- Riepilogando, mettendo il blocco facciamo cambiare la curvatura alla traiettoria della particella e da ciò capiamo il segno della carica. Infine capisco che si tratta del positrone e non di altre particelle positive perché calcolando l'energia e vedendo poi la perdita di energia tramite Bethe-Bloch (ricorda che nelle ascisse c'è proprio  $\beta\gamma$ ), risulta un range compatibile con quello misurato.

## 1.10 beta-decay ed esistenza del neutrino

- L'ipotesi dell'esistenza del neutrino nasce andando ad osservare lo spettro energetico dell'elettrone da  $\beta$ -decay. Essendo continuo, non può essere un decadimento a due corpi come si pensava, altrimenti si avrebbe uno spettro discreto come l' $\alpha$ -decay. Quindi deve essere un decadimento a tre corpi, e questa terza particella deve essere neutra ed a massa nulla. A livello nucleare si ha  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ .

Che conoscenze si avevano nel 1935?

- **sta parte storica discorsiva la facciamo dopo che manda slide, lezione 5 e prima parte della lezione 6**

### 1.11 Classificazione delle particelle

- Le particelle si dividono in bosoni con spin intero e fermioni con spin semintero.

$$\text{Fermioni: } \begin{cases} \text{Leptoni } e^\pm, \mu, \tau \text{ e neutrini} \\ \text{Barioni } p, n, \Lambda, \dots \end{cases} \quad \text{Bosoni: } \begin{cases} \text{Mesoni } \pi, K \dots \\ \text{Di Gauge (vettori) } \gamma, W^\pm, Z^0, g \end{cases}$$

- I barioni sono costituiti da tre quark, quindi sono per forza fermioni con spin  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{3}{2}$ . Invece i mesoni sono costituiti da quark e antiquark e quindi sono bosoni con spin 0 o 1. In generale col termine adroni si indicano particelle soggette a interazione forte.
- [...] **slide** Per due particelle identiche vale  $|\psi(1, 2)|^2 = |\psi(2, 1)|^2$ , cioè se lo scambio di posto la probabilità è la stessa. Per i bosoni vale la simmetria, per i fermioni l'antisimmetria  $\psi(1, 2) = -\psi(2, 1)$  da cui ne segue il principio di Pauli cioè che fermioni identici non possono stare nello stesso stato quantistico.
- La materia è fatta da fermioni e sappiamo che ci sono tre generazioni di leptoni e quark, ma solo le prime generazioni compongono la materia. Ribadiamo che i leptoni subiscono sempre forza debole e quella carica solo se carichi, mentre i quark subiscono *tutti i tipi di forza*, anche quella forte.
- I bosoni vettori (o di Gauge) sono gluone, fotone,  $W^\pm$ ,  $Z^0$  e il gravitone. Hanno tutti  $J^\pi = 1^-$  (eccetto  $W^\pm$  per cui vale  $1^+$ ).
- I quark invece si suddividono in leggeri ( $u, d, s$ ) e pesanti ( $c, b, t$ ). Le masse sono:

Quark	Up	Down	Strange	Charm	Bottom	Top
Massa	7 MeV	9 MeV	150 MeV	1.5 GeV	5 GeV	175 GeV

Quindi il quark *top* è la particella più pesante che conosciamo, quella che più si avvicina è il bosone di Higgs di 125 GeV.

- Invece per i leptoni le masse sono:

Leptone	Elettrone	Muone	Tauone	Neutrini
Massa	0.511 MeV	106 MeV	1780 MeV	0

Quindi  $m_\tau \sim 3000 m_e$  e  $m_\mu \sim 200 m_e$ . Nel Modello Standard i neutrini hanno massa nulla, ma sperimentalmente da oscillazioni (cambiano flavour) sappiamo che in realtà hanno massa che non conosciamo, ma di cui abbiamo ottenuto dei limiti superiori. Si pensa siano tutti di qualche frazione di eV.  $m_{\nu_e} < 3 \text{ eV}$ ,  $m_{\nu_\mu} < 0.19 \text{ MeV}$ ,  $m_{\nu_\tau} < 18 \text{ MeV}$ .

- I neutrini, come tutti i fermioni, sono caratterizzati da due stati di spin. In particolare per i neutrini si parla di *elicità*  $\eta = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$  cioè la proiezione dello spin sulla direzione del moto della particella. Notiamo che  $\eta$  è Lorentz invariante per particelle con  $m = 0$ , anche se è comunque utilizzabile in prima approssimazione se  $p \gg m$ , cioè  $\eta$  si conserva. Per  $\eta = 1$  si dice che la particella è destra, per  $\eta = -1$  si dice che è sinistra. *Finora* sono stati osservati solo neutrini sinistri e antineutrini destri. Esistono  $\nu$  con  $\eta = 1$ ? Non lo possiamo sapere! Sappiamo che finora non li abbiamo rivelati, perché  $W$  interagisce solo con neutrini sinistri (e antineutrini destri). Se effettivamente esistono, non interagiscono con interazioni che conosciamo (oppure è con quella gravitazionale).

## 2 Cinematica relativistica

Riprenderei appunti di Russo e basta. Riportiamo cmq quello che dice lei. Ci sono quattro principi base nella relatività.

- Ogni legge fisica è invariante in ogni sistema di riferimento inerziale.
- Energia, impulso, momento angolare in ogni sistema fisica isolato si conservano.
- La velocità della luce è la stessa in ogni sistema di riferimento.
- Il tempo non è invariante (assoluto).
- I primi due sono legati alla meccanica classica, gli ultimi due alla relatività. Da ciò ne segue che le trasformazioni galileiane non valgono più, e al loro posto ci sono le trasformazioni di Lorentz. Nel limite  $\beta \ll 1$  le trasformazioni di Lorentz diventano quelle di Galileo.

### 2.1 Trasformazioni di Lorentz

- Definiamo i quadrivettori come  $A = (a_0, a_i) = (a_0, \vec{a})$ , con  $a_0$  componente temporale e  $a_i$  componente spaziale.
- Definiamo il prodotto scalare tra quadrivettori come  $\tilde{A}\tilde{B} = a_0b_0 - a_ib_i$ . Questo prodotto è invariante sotto trasformazioni di Lorentz.
- Se consideriamo un sistema di riferimento  $S$  e un altro  $S'$ , con  $S'$  che si muove rispetto a  $S$  con velocità  $v$  lungo l'asse  $x$ , allora le trasformazioni di Lorentz sono date da:

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=L(\beta)} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a_0 - \beta\gamma a_1 \\ -\beta\gamma a_0 + \gamma a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \end{cases}$$

Una proprietà importante è  $L(\beta)^{-1} = L(-\beta)$ , da cui ne segue che per invertire le trasformazioni di Lorentz basta scambiare variabile con indice con quelle senza e  $\beta \rightarrow -\beta$ .

- Che si ha al limite non relativistico? Supponiamo  $\beta \ll 1 \implies \gamma \approx 1 + \frac{\beta^2}{2} \approx 1$ . Ne segue per il tempo che

$$ct' = \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)(ct - \beta x) \approx ct - \beta x + \frac{\beta^2}{2}ct \approx ct \implies t' = t$$

e per lo spazio che

$$x' = \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)(x - \beta ct) \approx x - \beta ct \implies x' = x - vt$$

- Se il moto non è solo lungo  $x$ , allora dobbiamo considerare  $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$  e

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta ct) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases}$$

- Dimostriamo che il prodotto scalare è invariante. Sia  $A = (a_0, \vec{a})$  e  $B = (b_0, \vec{b})$ . Calcoliamo  $A' \cdot B'$ .

$$A' \cdot B' = a'_0 b'_0 - \vec{a}' \cdot \vec{b}' = \gamma^2(a_0 - \beta a_1)(b_0 - \beta b_1) - \gamma^2(a_1 - \beta a_0)(b_1 - \beta b_0) - a_2 b_2 - a_3 b_3 = \dots = A \cdot B$$

Vediamo alcune conseguenze in high energy physics.

- La contrazione delle lunghezze. Consideriamo un oggetto di lunghezza  $L$  che si muove con velocità  $v$ . Supponiamo che il sistema solidale ad esso sia  $S'$  e la lunghezza misurata sia  $d' = x'_2 - x'_1$  che avviene simultaneamente quindi  $t_2 = t_1$ . Se trasformiamo otteniamo  $d' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) - \gamma(x_1 - \beta ct_1) = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma\beta c(t_2 - t_1) = \gamma(x_2 - x_1) = d \implies d' = \gamma d$ . Ne segue che la lunghezza misurata da un osservatore in moto è contratta di un fattore  $\gamma$ , e la lunghezza propria, misurata nel sistema solidale all'oggetto è la massima possibile.
- La dilatazione temporale. Consideriamo due eventi che avvengono nello stesso punto nello spazio, ma in tempi diversi. Se trasformiamo otteniamo  $c\Delta t = c(t_2 - t_1) = \gamma c(t'_2 - t'_1) + \beta \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma c\Delta t'$ . Ne segue che il tempo misurato da un osservatore in moto è dilatato di un fattore  $\gamma$ , e il tempo proprio, misurato nel sistema solidale all'oggetto è il minimo possibile. Da ciò si hanno varie conseguenze.

## 2.2 Esperimento CPP, muoni, pioni e Yukawa

- Nel 1912 Hess scoprì i raggi cosmici. Nel 1932 Anderson scoprì i positroni, predetti da Dirac nel 1928 (già discussa).
- Nel 1935 Yukawa introdusse la teoria delle interazioni forti, predicendo una massa mediatrice di  $\sim 100$  MeV. Il mesone di Yukawa doveva decadere in elettrone e neutrino con tempo di decadimento di  $\sim 1\mu s$ . Nel 1937 si scoprì il mesotrone (Anderson e Neddermeyer), con una massa di 110 MeV, associata alla particella di Yukawa. Nel 1940 si studiò assorbimento e decadimento delle proprietà di assorbimento del mesone di Yukawa.
- Il decadimento del mesotrone (che in realtà è un  $\mu$ ) fu studiato diverse volte. Nel 1940 si osservò il suo decadimento in positroni; nel 1941 ci fu una misura da Rasetti che ottenne  $\tau = (1.5 \pm 0.3)\mu s$ . Nel 1941 Piccioni e Conversi decisero di lavorare assieme e migliorare la precisione nella misura del tempo di decadimento (del mesone di Yukawa).
- Nel 1939 Montgomery fece un esperimento (Figura 1) per misurare il decadimento del  $\mu$

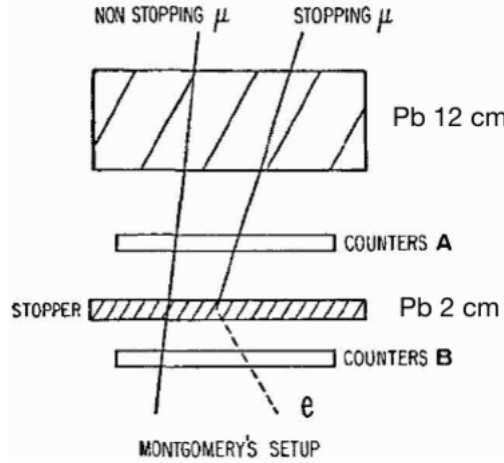


Figura 1: Esperimento di Montgomery. Volevano estrarre il tempo di decadimento dalle intensità delle coincidenze ritardate con e senza stopper. Purtroppo non riuscirono a misurare il tempo di decadimento del  $\mu$  a causa del troppo rumore in B.

- Un altro tentativo fu fatto da Rasetti nel 1940, con un apparato più complicato (Figura 2). Nella procedura sperimentale si definisce un fascio di mestroni con la coincidenza ABCD. L'anticondatore G discrimina dagli sciame elettromagnetici. L'anticondatore F seleziona i mestroni che si sono fermati nell'assorbitore. Il contatore E rivela particelle emesse nell'assorbitore. Non si usarono coincidenze ritardate ma "immediate" con tempi di risoluzione diversi. Guardando le combinazioni dei tempi con cui il segnale arriva, hanno fatto un fit particolare ed estratto il tempo di decadimento. Ottennero  $\tau = (1.5 \pm 0.3)\mu s$ .
- Successivamente l'esperimento fu riproposto da Conversi, Pancini e Piccioni con l'idea di effettuare una misura migliore (vedi Figura 3) Un mesotrone si ferma nell'assorbitore (Fe) e poi decade. Si usano coincidenze ritardate tra i contatori sopra e sotto e le anticoincidenze (A). Gli elettroni si fermano nell'assorbitore di Pb. Le anticoincidenze servono a scartare l'evento. Misurarono  $\tau = (2.33 \pm 0.15)\mu s$ , meglio di Rasetti.

Torniamo ai quadrivettori.

- La matrice della metrica la conosciamo è  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Un quadrivettore importante è quello di impulso  $P^\mu = (E, \vec{p})$ . Questo quadrivettore non è invariante ma il suo quadrato sì. Facendolo, scopriamo che vale  $P^\mu P_\mu = m^2$  usando la relazione di mass-shell.
- Alcune relazioni utili sono:  $p = \gamma mv$ ,  $E = \gamma m$ ,  $T = mc^2(\gamma - 1)$ ,  $\beta = \frac{p}{E}$ .
- Quando facciamo esperimento di fisica di particelle, ci mettiamo nel riferimento di laboratorio solidale all'osservatore e ai rivelatori. In questo riferimento tipicamente  $v_T = 0$ . Possiamo scrivere allora nel riferimento del laboratorio  $P_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ ,  $P_2 = (m_T, 0)$  (1 = proiettile, 2 = target). Allora  $P_{\text{tot}} = sP_1 + P_2 = (E_1 + m_T, \vec{p}_1)$ .
- Un altro sistema di riferimento utile è quello del centro di massa, in cui  $\vec{p}_{\text{tot}} = 0$ . Se consideriamo una particella incidente in un target, avremo  $P_1^* = (E_1^*, \vec{p})$  e  $P_2^* = (E_2^*, -\vec{p})$ . Allora  $P_{\text{tot}}^* = (E_1^* + E_2^*, 0)$ . Poiché è un invariante,  $P_{\text{tot}}^2$  sarà uguale nel riferimento del centro di massa e in quello del laboratorio. Ne segue che  $P_{\text{tot}}^{*,2} = E_{\text{CM}}^2 = P_{\text{tot}}^{\text{lab},2} = (E_1 + m_T)^2 - p_1^2 = E_1^2 + m_T^2 + 2E_1 m_T - p_1^2 = m_1^2 + 2E_1 m_T + m_T^2$ . ('sta roba è inutile?)





Figura 2: Disposizione dei contatori, illustrando le connessioni con gli amplificatori.

- Se consideriamo un fascio di  $n$  particelle allora dovremo considerare la sommatoria.  $P_\mu P^\mu = (E_1 + E_2 + \dots + E_n)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n)^2$  in generale. Se consideriamo il sistema del centro di massa avremo  $P^{\mu,*} = (E_{CM}, 0)$ . Quindi nel riferimento del centro di massa questo scalare è solo il quadrato dell'energia nel sistema del centro di massa.
- Riprendiamo la storia. Nel 1947 ci fu la scoperta del pione, usando le emulsioni nucleari. Decade in sequenza il pione in muone ed infine in elettrone. In tutti gli eventi il muone aveva energia di 4.1 MeV a cui corrisponde il range misurato di 600  $\mu\text{m}$ , le strisce sono tutte di uguale lunghezza (sappiamo da Bethe-Bloch che il range e l'impulso sono legati). In base a densità di ionizzazione ( $dE/dx$ ) distinguiamo il tipo di particella.
- Visto che il range è sempre lo stesso, l'impulso del muone sarà sempre lo stesso 29 MeV. Visto che l'impulso è sempre lo stesso, il decadimento deve essere a due corpi (e non tre altrimenti si avrebbe spettro continuo).
- Supponendo che si abbia un decadimento a due corpi con la particella iniziale che si ferma, abbiamo  $X \rightarrow \mu + \nu_\mu$  e il sistema del centro di massa coincide con il sistema solidale a  $X$  (il  $\pi$ ). Da ciò ne segue che impulso di neutrino e muone sono uguali ed opposti, quindi

$$m_X^2 = E_{cm}^2 = (E_\mu + E_\nu)^2 \implies m_X = \sqrt{m_\mu^2 + p_\mu^2 + p_\nu^2} = \dots = 138.9 \text{ MeV}$$

- Il decadimento  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$  è dovuto alla forza debole, lo si capisce dal fatto che da quando avevo quark e antiquark, nei prodotti non li avrò più cioè non conservano il flavour. Un altro modo per capirlo è dai tempi di decadimento.



Figura 3:

1. Debole  $10^{-8} - 10^{-10}$  s.
2. Elettromagnetico (come  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ )  $10^{-17} - 10^{-16}$  s.
3. Forti  $10^{-22} - 10^{-23}$  s.

Parliamo di processi virtuali e reali.

- Supponiamo di avere  $e^- \rightarrow \gamma + e^-$ . Abbiamo inizialmente (nel riferimento solidale all'elettrone)  $e^-(m_e c^2, \vec{0})$ , invece dopo l'interazione abbiamo  $e^-(E_k, -\vec{k}) + \gamma(c|\vec{k}|, \vec{k})$ . Valutiamo  $\Delta E = ck + \sqrt{(m_e c^2)^2 + (ck)^2} - m_e c^2$  considerando i due casi limite:

1.  $ck \ll m_e c^2 \implies \Delta E \gtrsim ck$
2.  $ck \gg m_e c^2 \implies \Delta E \lesssim 2ck$

Ne segue che

$$kc \leq \Delta E \leq 2kc$$

ma ciò che importa è che  $\Delta E \neq 0$ . Questo è un processo virtuale che non può avvenire da isolato. È possibile per un tempo compatibile con il principio di indeterminazione  $t < \frac{\hbar}{\Delta E}$ , a cui corrisponde uno spazio percorso  $l = ct = \frac{c\hbar}{\Delta E} \propto (\Delta E)^{-1}$ .

- Consideriamo un generico processo di scambio  $A + B \rightarrow A + B$  che avviene tramite  $X$ . Avremo inizialmente  $A(m_A c^2, \vec{0})$ , invece dopo  $A(E_p, \vec{p}) + X(E_X, -\vec{p})$  e uguale per B. Vediamo quanto vale  $\Delta E = E_X + E_p - m_A c^2$  e i due casi limite:

1.  $p \rightarrow \infty \implies \Delta E = 2pc$
2.  $p \rightarrow 0 \implies \Delta E \geq m_X c^2$

ne segue che vale sempre  $\Delta E \geq m_X c^2$ . Abbiamo detto che si può violare la conservazione dell'energia per  $t \sim \frac{\hbar}{\Delta E} \implies l = \frac{c\hbar}{\Delta E} \approx \frac{\hbar}{m_X}$ , dove  $l$  è la massima distanza raggiungibile dal mediatore  $X$  prima di essere ri-assorbito, e corrisponde esattamente al *range della interazione*.

- Viceversa, se conosco il range della interazione posso trovare la massa del mediatore! La relazione dunque è  $R = \frac{\hbar}{m_X c}$ . Cerchiamo la massa del mediatore della interazione forte, supponendo che abbia  $R \approx 1.2 \text{ fm}$ . Abbiamo

$$m_X = \frac{1}{R} = 140 \text{ MeV}$$

che è il mesotrone di Yukawa, chiamato così perché aveva massa intermedia tra  $p$  ed  $e^-$  (uniche particelle note oltre a  $n$ ).

- Dunque se la massa del mediatore è nulla, il range dell'interazione è infinito (interazione elettromagnetica con fotoni). Se invece usiamo la massa del  $W$ , troviamo il range dell'interazione debole

$$R_{\text{debole}} = \frac{\hbar c}{m_W c^2} = \frac{1}{m_W} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{80 \cdot 10^3 \text{ MeV}} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$$

ben tre ordini di grandezza inferiori rispetto a quello nucleare.

- In passato si aveva una visione errata del  $\beta$ -decay, ad esempio  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ . In realtà questo avviene con uno scambio di  $W^-$ , cioè il neutrone (in realtà è tra quark) emette un  $W^-$  diventando un  $p$ , e contemporaneamente  $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}$ . Tuttavia questo processo lo trascuriamo a basse energie (MeV) in quanto irrilevante.

Torniamo alla parte storica e all'esperimento CPP.

- Abbiamo detto che l'esperimento CPP è importante perché da una migliore misura di  $\tau_\mu$ , ma c'è un altro motivo per cui è importante.
- Nel 1940 Tomonaga e Araki proposero una teoria, che fu accettata da tutti, sull'interazione forte. Il mesone di Yukawa interagisce con il nucleo mediante interazione forte. Secondo i calcoli, la cattura nucleare dipende leggermente dallo  $Z$  del materiale. I mesotrone positivi sono respinti dal nucleo, mentre quelli negativi possono essere catturati, ne segue che i mesotrone positivi possono soltanto decadere.
- Per testare questa teoria che prevedeva una asimmetria tra mesotrone positivi e negativi, si usò lo stesso apparato CPP. La differenza stava in assorbitori più sottili (0.6 cm di Fe invece di 5 cm) per migliorare la efficienza di rivelazione degli elettroni. Misurarono il rapporto di mesotrone che decadono dentro il ferro che era in accordo con il valore aspettato (da raggi cosmici si aspettavano un eccesso del 20%).
- Poi ripetettero l'esperimento con un apparato migliore utilizzando le lenti magnetiche per separare mesotrone positivi e negativi. Con un assorbitore ad alto  $Z$  (ferro) ci fu conferma della teoria, con uno a basso  $Z$  (carbonio), per completezza e per rivelare i fotoni emessi da cattura nucleare dei mesotrone negativi, invece ci fu disaccordo. Quindi la differenza è il campo magnetico che distingue i mesotrone positivi e negativi e utilizzo di assorbitori con alto e basso  $Z$ .
- Attraverso assorbitori di 5 cm di Fe c'è accordo perché la frequenza di decadimento è maggiore per quelli positivi non catturati rispetto a quelli negativi, il cui risultato sperimentale è compatibile con zero (vengono catturati dai nuclei prima di decadere). Il problema nasce con assorbitori di grafite, perché si trova che il rate di decadimento delle particelle negative non solo è diverso da zero, ma molto simile a quelle positive. Allora i mesotrone non sono le particelle di Yukawa, quelle che interagiscono fortemente.

- Fermi e altri discussero, e conclusero che ci sono circa 12 ordini di grandezza di differenza tra il tempo di cattura per una particella di Yukawa negativa e i risultati dell'esperimento. Quindi il mesotrone fu ribattezzato, come lo conosciamo oggi, mesone  $\mu$ , ed oggi sappiamo che il pione è la particella di Yukawa.
- Quindi CPP è rivoluzionario perché scopre che il muone non è la particella di Yukawa, quindi è un altro leptone! Apre la strada alla seconda generazione di particelle, con cui si va oltre la materia ordinaria. Quindi è l'inizio della *fisica delle particelle*.

Vediamo il potenziale di Yukawa.

- Consideriamo  $A + B \rightarrow A + B$  con particella mediatrice  $X$ . Questa particella è un bosone, se in più la consideriamo relativistica allora obbedisce all'equazione di Klein-Gordon. Nel caso statico (stazionario) si riduce a

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = \frac{m_X^2 c^2}{\hbar^2} \phi(\vec{x})$$

se la massa è nulla ritroviamo l'equazione di Laplace e quindi il mediatore è il fotone e la soluzione è il campo elettrostatico  $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ . Se invece la massa non è nulla otteniamo  $V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-r/R}}{r}$  che è il *potenziale di Yukawa* con il range  $R = \frac{\hbar}{m_X c}$ . La forma del potenziale è simile a quello che si ottiene quando consideriamo effetti di schermaggio e vogliamo la carica effettiva subita dal sistema.

- Ci sono delle ipotesi su cui si basa il modello di Yukawa.
  1. I nucleoni sono le sorgenti del campo nucleare e l'interazione tra essi avviene tramite scambio di bosoni che quantizzano il campo nucleare (detti mesoni).
  2. L'interazione è a corto range, con range legato alla massa della particella mediatrice.
  3. L'interazione nucleare è indipendente dalla carica elettrica.
  4. Il potenziale è a simmetria sferica e dipende anche dagli spin dei nucleoni (che abbiamo ignorato).

Il modello di Yukawa serve anche a spiegare lo scattering  $p - n$ .

- La distribuzione angolare di scattering protone-neutrone ha un andamento a parabola con picchi in 0 e 180 gradi (e minimo in mezzo da qualche parte). Senza il modello di Yukawa non è spiegabile.
- Se lo scattering è elastico  $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$ . L'impulso trasferito varrà  $\Delta p = |\vec{p}_i - \vec{p}_f| = F_{\text{media}} \Delta t$ . Considerando il potenziale nucleare come una buca, avremo  $F_{\text{media}} = \frac{V_0}{R}$ . La variazione di impulso è legata all'angolo soltanto visto che è elastico, quindi (usando  $\Delta t = R/v$ )

$$\Delta \vartheta \approx \frac{\Delta p}{p} = \frac{F_m \Delta t}{p} = \frac{V_0}{vp} \implies \vartheta = \frac{V_0}{2E_{\text{cin}}}$$

usando il valore tipico di  $V_0 = 35 \text{ MeV}$  e  $100 \text{ MeV} \leq E_{\text{cin}} \leq 600 \text{ MeV}$  (usati sperimentalmente) otteniamo  $\vartheta = 10$  gradi, che è in accordo con i dati sperimentali.

- Quindi con la cinematica spieghiamo il picco ad angoli bassi, ma non quello ad angoli alti. Per spiegarlo dobbiamo considerare il modello di Yukawa, si scambiano un pione quindi esiste uno stato intermedio (non è puntuale, pensando a diagramma di Feynman senza mediatore).

### 2.3 Scoperta dell'antiprotone

- Gli antiprotoni sono più difficili da rivelare rispetto ai positroni perché avranno una massa pari a quella del protone e quindi sono più difficile da produrre. Ovviamente ce li aspettiamo con massa negativa.
- Quindi come possiamo crearli? Da raggi cosmici non è possibile vederli. Serve un acceleratore e non deve essere collider. A quanta energia deve arrivare? Consideriamo la reazione  $p + p \rightarrow p + p + \bar{p} + p$  e troviamo la energia di soglia.
- Calcoliamo l'energia di soglia nel caso in cui abbiamo inizialmente un proiettile  $i$  contro un target  $T$  fermo e si hanno  $N$  particelle finali. perché visto che voglio l'energia di soglia basta la loro "massa". Ne segue che

$$m_i^2 + m_T^2 + 2m_T E_i \geq \left( \sum_k m_k \right)^2$$

Sostituendo  $E_i = T_i + m_i$  risulta

$$T_i \geq \frac{(\sum_k m_k)^2 - (m_T + m_i)^2}{2m_T}$$

Questa relazione ci da l'idea di quanta energia devo dare alla particella incidente per produrre una certa reazione.

- Appliciamolo al nostro caso per produrre l'antiprotone.

$$T_i \geq \frac{(4m_p)^2 - (2m_p)^2}{2m_p} = 5.6 \text{ GeV}$$

Questo non va bene. Il problema è che abbiamo considerato il protone del target fermo, ma noi non abbiamo mai un protone libero.

- In questo particolare esperimento usarono rame come target, quindi il protone era confinato nel nucleo e si muove. Assumendo che in questa interazione interagiamo con quello della shell più esterna, questo avrà l'impulso di Fermi  $p_F = 0.24 \text{ GeV}$ . Questo complica il calcolo perché adesso c'è una certa distribuzione di energia in quanto questo impulso può essere orientato casualmente. Studiamo i casi limite in cui è parallelo e antiparallelo all'impulso della particella incidente.
- Nel riferimento del laboratorio abbiamo  $P^\mu = (E_i + E_F, \vec{p}_i + \vec{p}_F)$ , dunque

$$\text{Iniziale: } P^\mu P_\mu = (E_i + E_F)^2 - (\vec{p}_i + \vec{p}_F)^2 = E_i^2 + E_F^2 + 2E_i E_F - p_i^2 - p_F^2 - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}_F$$

Applichiamo la relazione di mass-shell  $E_{i,F}^2 - p_{i,F}^2 = m_{i,T}^2$  e consideriamo  $\vec{p}_i \cdot \vec{p}_F = \pm p_i p_F$ , dove il caso antiparallelo corrisponde al segno meno, che diventa positivo, e quindi corrisponde ad energia di soglia maggiore. Risulta

$$2m_p^2 + 2E_p E_F \pm 2p_p p_F \geq 16m_p^2$$

- Facciamo un paio di considerazioni.

1.  $E_F = m_p + \frac{p_F^2}{2m_p}$ , cioè un approccio classico dovuto al fatto che l'energia di Fermi è bassa.
2.  $E_p \approx p_p$  che in realtà sarebbe  $p = 6$  GeV contro la massa del protone  $m_p = 1$  GeV ma approssimiamo lo stesso  $p \gg m$ .

Ne segue che

$$2m_p^2 + 2E_p \left( m_p + \frac{p_F^2}{2m_p} \right) \pm 2p_F E_p \geq 16m_p^2 \implies \dots \implies$$

$$\implies E_p \geq \frac{7m_p}{1 + \frac{p_F^2}{2m_p^2} \pm \frac{p_F}{m_p}}$$

- A questo punto l'energia cinetica la ricaviamo da  $T_p = E_p - m_p$  ottenendo

$$4.2 \text{ GeV} \leq T_p \leq 7.5 \text{ GeV}$$

Sono importanti sia il minimo che il massimo: il minimo perché altrimenti non riusciamo a vedere quello che desideriamo, il massimo perché costruire acceleratori che raggiungono alte energie è costoso (se possibile tecnologicamente). Segrè e l'altro fecero questo esperimento a 6.2 GeV, quindi non prendevano proprio tutti i casi in quanto non avevano la massima energia possibile, ma è un esperimento di scoperta quindi basta una rivelazione.

- Adesso che sappiamo che energia incidente serve, come riveliamo l'antiprotone? Tanto per cominciare dalla reazione  $p + p$  possono succedere tante cose.
- Come prima cosa distinguiamo il segno delle cariche usando un campo magnetico. Adesso serve distinguere i  $\pi^-$  da i  $\bar{p}$ . I pioni veloci si possono tagliare tramite un rivelatore Cherenkov che dà un trigger solo se si ha una certa velocità e si scartano le particelle che lo attivano. Resta il problema dei pioni lenti. Per risolvere questo problema si misura il tempo di volo. **Appunti di albergo non capisco** e conoscendo tempo di volo e massa si può identificare l'antiprotone.

## 2.4 Differenza target fisso e collider

Bisogna fare attenzione a non confondere acceleratori circolari, in cui il target è comunque fisso, con collider.

- Nei collider di solito c'è particella contro antiparticella oppure particelle uguali. È Più efficiente produrre particelle in questo modo perché non spendo energia per spostare il centro di massa.
- Consideriamo target fisso. Abbiamo  $P_1^\mu = (E_1, \vec{p}_1)$  e  $P_2^\mu = (m_2, 0)$ . Calcoliamo la massa invariante (sommando i quadri-impulsi)

$$s^2 = P^\mu P_\mu = (E_1 + m_2)^2 - p_1^2 = \dots = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2 \xrightarrow{m_{1,2} \ll E_1} \sqrt{s} = \sqrt{2E_1 m_2}$$

- Consideriamo collider. In generale  $P_1^\mu = (E_1, \vec{p}_1)$  e  $P_2^\mu = (E_2, \vec{p}_2)$  da cui (di solito  $E_1 = E_2$ )

$$s^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = \dots = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \xrightarrow{\substack{m_{1,2} \ll E_1 \\ |\vec{p}_{1,2}| \approx E_{1,2}}} s = 2E^2(1 - \cos \vartheta)$$

Da cui, visto che è un collider avremo  $\vartheta = \pi \implies \sqrt{s} = 2E$ .

- Dunque, ricordando che  $E_{\text{cm}} = \sqrt{s}$ , si avrà che l'energia a disposizione per creare nuove particelle sarà maggiore, a parità di energia del fascio, per il collider piuttosto che target fisso.
- Possiamo fare un calcolo esplicito. Consideriamo un fascio di protoni a  $E = 100$  GeV. Nel caso di target fisso abbiamo

$$\sqrt{s} = \sqrt{2E_1 m_2} \approx 14 \text{ GeV}$$

invece in un collider ho

$$\sqrt{s} = 2E_1 \approx 200 \text{ GeV}$$

Quindi con un collider ho molta più energia a disposizione. Se volessi infatti avere a disposizione 200 GeV a target fisso dovrei avere un fascio di energia

$$200 = \sqrt{2E} \implies E = 2 \cdot 10^4 \text{ GeV}$$

d'altra parte già dagli anni 70 si usano solo collider.

## 2.5 Trasformazioni di Lorentz tra centro di massa e laboratorio

- Per un sistema di  $n$  particelle abbiamo

$$P_{\text{lab}}^\mu = \left( \sum_k E_k, \sum_k \vec{p}_k \right)$$

$$P_{\text{cm}}^\mu = \left( \sum_k E_k^{\text{cm}}, 0 \right) = (\sqrt{s}, 0)$$

Se trasformiamo con Lorentz abbiamo

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{cm}} & -\beta_{\text{cm}}\gamma_{\text{cm}} & 0 & 0 \\ -\beta_{\text{cm}}\gamma_{\text{cm}} & \gamma_{\text{cm}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_k \frac{E_k}{c} \\ \sum_k \vec{p}_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \frac{\sqrt{s}}{c} = \gamma_{\text{cm}} \sum_k \frac{E_k}{c} - \beta_{\text{cm}}\gamma_{\text{cm}} \sum_k |\vec{p}_k| \\ 0 = -\beta_{\text{cm}}\gamma_{\text{cm}} \sum_k \frac{E_k}{c} + \gamma_{\text{cm}} \sum_k |\vec{p}_k| \end{cases}$$

da cui  $\beta_{\text{cm}} = \frac{|p_{\text{lab}}^{\text{tot}}|}{E_{\text{lab}}^{\text{tot}}}$  velocità del centro di massa, e  $\gamma_{\text{cm}} = \frac{E_{\text{lab}}^{\text{tot}}}{\sqrt{s}}$  sempre del centro di massa.

- Si può anche fare al contrario da sistema del centro di massa a sistema del laboratorio. Stavolta abbiamo

$$P_{\text{lab}}^\mu = (E_1 + m_2, \vec{p}_1)$$

$$P_{\text{cm}}^\mu = \left( \sum_k E_k^{\text{cm}}, 0 \right) = (\sqrt{s}, 0)$$

Se trasformiamo con Lorentz abbiamo

$$\begin{pmatrix} E_1 + m_2 \\ 0 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{cm}} & 0 & 0 & \beta_{\text{cm}}\gamma_{\text{cm}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_{\text{cm}}\gamma_{\text{cm}} & 0 & 0 & \gamma_{\text{cm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1 + m_2 = \gamma_{\text{cm}} \sqrt{s} \\ p_1 = \beta_{\text{cm}} \gamma_{\text{cm}} \sqrt{s} \end{cases}$$

da cui  $\beta_{\text{cm}} = \frac{p_1}{E_1 + m_2}$  e  $\gamma_{\text{cm}} = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{s}}$

## 2.6 Impulso trasverso

Normalmente nei collider si usano rivelatori a simmetria cilindrica o sferica. Vediamo le relazioni in termini di coordinate sferiche.

- Assumiamo che il centro di massa si muova lungo  $z$ , e passiamo dal riferimento del centro di massa a quello del laboratorio. Indichiamo con  $*$  le quantità nel riferimento del centro di massa.

$$P^\mu = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ p \sin \vartheta \cos \varphi \\ p \sin \vartheta \sin \varphi \\ p \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* \\ p^* \sin \vartheta^* \cos \varphi^* \\ p^* \sin \vartheta^* \sin \varphi^* \\ p^* \cos \vartheta^* \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = \gamma E^* + \beta \gamma p^* \cos \vartheta^* \\ p \sin \vartheta \cos \varphi = p^* \sin \vartheta^* \cos \varphi^* \\ p \sin \vartheta \sin \varphi = p^* \sin \vartheta^* \sin \varphi^* \\ p \cos \vartheta = E^* \beta \gamma + \gamma p^* \cos \vartheta^* \end{cases}$$

Dalla seconda e terza equazione otteniamo  $\tan \varphi = \tan \varphi^*$  cioè che l'angolo azimutale  $\varphi$  è invariante per trasformazioni di Lorentz. Invece dalla terza e quarta otteniamo

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \vartheta^*}{\gamma \frac{\beta}{\beta^*} + \cos \vartheta^*}$$

con  $\beta^* = p^*/E^*$ .

- L'impulso trasverso. È definito come  $p_\perp = p \sin \vartheta$ . Dalla seconda e terza equazione (facendo il quadrato e sommando) otteniamo che  $p_\perp = p_\perp^*$ , cioè l'impulso trasverso è invariante per trasformazioni di Lorentz.
- Che configurazioni possiamo avere? Dobbiamo guardare il denominatore di  $\tan \vartheta$ .

- $\beta_{\text{cm}} > \beta^*$  (velocità del centro di massa è maggiore della velocità nel centro di massa). In questo caso il denominatore è positivo per ogni valore di  $\vartheta^*$ . Da ciò ne segue che  $0 < \vartheta < \pi/2$  cioè nel riferimento del laboratorio è sempre in avanti. **Speriamo nelle slide non capisco bene.** La espressione si annulla per  $\vartheta^* = 0, \pi$  a cui corrisponde un valore nel laboratorio di massimo  $\vartheta_{\text{max}}$ . Troviamolo facendo la derivata e ponendola pari a zero:

$$\frac{d \tan \vartheta}{d \vartheta^*} = \dots = \frac{1 + \frac{\beta}{\beta^*} \cos \vartheta^*}{\gamma \left( \frac{\beta}{\beta^*} + \cos \vartheta^* \right)^2} = 0 \Rightarrow \cos \vartheta^* = -\frac{\beta}{\beta^*} \Rightarrow \tan \vartheta_{\text{max}} = \frac{\beta^*}{\gamma \sqrt{\beta^2 - \beta^{*,2}}}$$

E possiamo anche trovare che valore di energia corrisponde ad esso (ad un certo punto si usa  $\beta^* = p^*/E^*$  e  $E^* = \gamma^* m$ )

$$E(\vartheta_{\text{max}}) = \gamma(E^* + \beta p^* \cos \vartheta^*) = \dots = m \frac{\gamma}{\gamma^*}$$



2.  $\beta_{\text{cm}} < \beta^*$ . In questo caso non ho valori massimi di  $\vartheta$  perché la derivata è sempre positiva. La velocità della particella nel centro di massa può compensare (parzialmente) il boost del centro di massa, quindi posso anche avere backscattering.
3.  $\beta_{\text{cm}} = \beta^*$ . In questo caso  $\cos \vartheta^* = -1$  e quindi  $\vartheta_{\text{max}} = \pi/2$ . La particella nel riferimento del centro di massa viaggia in verso opposto al moto del centro di massa, nel laboratorio il centro di massa è fermo.

## 2.7 Scattering elastico

Consideriamo elettrone contro un nucleo. Ricordiamo che le particelle prima e dopo non cambiano.

- In scattering elastico si conserva il quadri-impulso (lo indico solo con  $P$ , e quando è accentato è post-collisione).

$$P_e + P_N = P'_e + P'_N \text{ con } \begin{cases} P_e = (E, \vec{p}) \\ P_N = (m_N, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} P'_e = (E', \vec{p}') \\ P'_N = (E'_N, \vec{p}'_N) \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato la relazione

$$P_e^2 + P_N^2 + 2P_e P_N = P_e'^2 + P_N'^2 + 2P'_e P'_N \xrightarrow[P_N^2 = m_N^2]{P_e^2 = m_e^2} P_e P_N = P'_e P'_N$$

poiché non accediamo all'energia del nucleo che rincula, la riscriviamo usando  $P'_N = P_e + P_N - P'_e$ , infatti noi accediamo all'energia dell'elettrone diffuso che è proprio ciò che riveliamo.

$$P_e P_N = P'_e (P_e + P_N - P'_e) = P'_e P_e + P'_e P_N - \underbrace{P_e'^2}_{m_e^2} = P'_e P_e + P'_e P_N - m_e^2$$

Nel riferimento del laboratorio dunque abbiamo, sviluppando i prodotti tra tensore

$$Em_N = EE' - \vec{p} \cdot \vec{p}' + E'm_N - m_e^2 \underset{m_e \ll p}{\approx} E'E - E'E \cos \vartheta + E'm_N \implies E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_N}(1 - \cos \vartheta)}$$

Dunque in generale  $E \neq E'$ . Coincidono se il nucleo sostanzialmente non prende energia. L'energia diffusa dell'elettrone dipende dall'angolo di scattering, a bersaglio fissato. L'energia di rinculo del nucleo  $E - E'$  dipende dal rapporto  $E/m_N$  e quindi aumenta con l'energia iniziale dell'elettrone (**slide**).

## 2.8 Decadimenti

### Decadimenti a due corpi

Secondo la prof noi diamo per vero che lo spettro sia discreto senza sapere il perché. Non si ricorda che già abbiamo il titolo di "Dottore in Fisica".

- Se abbiamo un decadimento ad  $n$  corpi, si ha

$$m = \sum_{i=1}^n = \sum_i \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \geq \sum_i m_i \implies m \geq \sum_i m_i$$

cioè la massa del nucleo originale è sempre maggiore o uguale alla somma di tutti i prodotti.

- Se consideriamo un decadimento a due corpi, abbiamo nel riferimento del centro di massa

$$\begin{cases} m_a = E_b^* + E_c^* \\ 0 = \vec{p}_b^* + \vec{p}_c^* \end{cases} \implies m_a = (p_b^{*2} + m_b^2)^{1/2} + (p_c^{*2} + m_c^2)^{1/2} \implies \\ \implies m_a = (p^{*2} + m_b^2)^{1/2} + (p^{*2} + m_c^2)^{1/2} \implies m_a - (p^{*2} + m_b^2)^{1/2} = (p^{*2} + m_c^2)^{1/2}$$

Va be con tanti conti elevando due volte al quadrato (si tiene  $(m_b^2 - m_c^2)$  come termine unico nella seconda quadratura) si arriva a

$$p^{*2} = \frac{m_a^4 - 2m_a^2(m_b^2 + m_c^2) + (m_b^2 - m_c^2)^2}{4m_a^2} = \frac{[m_a^2 - (m_b + m_c)^2][m_a^2 - (m_b - m_c)^2]}{4m_a^2}$$

da cui

$$\begin{aligned} E_b^* &= \sqrt{p^{*2} + m_b^2} = \frac{m_a^2 + (m_b^2 - m_c^2)}{2m_a} \\ E_c^* &= \sqrt{p^{*2} + m_c^2} = \frac{m_a^2 - (m_b^2 - m_c^2)}{2m_a} \end{aligned}$$

belle queste formule, ma quello che ci interessa è che l'energia dei prodotti finali ha dei valori fissi, che dipendono dalle masse coinvolte. Questo spiega matematicamente perché lo spettro è discreto. Se  $b = c$  allora l'energia è ripartita a metà equamente tra i due corpi prodotti, infatti  $E^* = E_b^* + E_c^* = \frac{m_a}{2}$ . Questo nel riferimento del centro di massa, cioè della particella originale che decade.

### Distribuzioni angolari del decadimento a due corpi

Consideriamo  $a \rightarrow b + c$ .

- Nel riferimento del centro di massa si ha

$$\begin{cases} m_a = E_b^* + E_c^* \\ 0 = \vec{p}_b^* + \vec{p}_c^* \end{cases}$$

sappiamo che valgono le formule  $\beta = \frac{p}{E}$  e  $\beta\gamma = \frac{p}{m_a}$ .

- Nel riferimento del laboratorio abbiamo due angoli  $\vartheta_{1,2}$  rispetto alla direzione di volo della particella originale, mentre nel centro di massa c'è un solo angolo  $\vartheta^*$  (rispetto a direzione iniziale) e le figlie hanno impulso uguale ed opposto. Cerchiamo una relazione tra questi due angoli e quello nel centro di massa, usando le formule di trasformazione di Lorentz.
- Consideriamo il passaggio da laboratorio a centro di massa. Nel piano  $xy$  abbiamo

$$\begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* \\ p_x^* \\ p_y^* \end{pmatrix} \implies \begin{cases} E_1 = \gamma E_1^* + \beta\gamma p_x^* = \gamma E_1^* + \beta\gamma \cos \vartheta^* p^* \\ p_{1x} = p_1 \cos \vartheta_1 = \gamma p_{1x}^* + \beta\gamma E_1^* = \gamma p^* \cos \vartheta^* + \beta\gamma E_1^* \\ p_{1y} = p_1 \sin \vartheta_1 = p_{1y}^* = p^* \sin \vartheta^* \end{cases}$$

Per la particella due le relazioni sono identiche con l'unica differenza che se  $p_1$  è positivo,  $p_2$  è negativo. Quindi  $\vartheta^* \rightarrow \pi + \vartheta^*$  ed il coseno cambia segno ( $\cos(x + \pi) = -\cos x$ ). Dunque

$$\begin{cases} E_2 = \gamma E_2^* - \beta\gamma \cos \vartheta^* p^* \\ p_{2x} = p_2 \cos \vartheta_2 = -\gamma p^* \cos \vartheta^* + \beta\gamma E_2^* \\ p_{2y} = p_2 \sin \vartheta_2 = p_{2y}^* = p^* \sin \vartheta^* \end{cases}$$

Adesso troviamo la tangente facendo al solito la divisione:

$$\tan \vartheta_1 = \frac{p^* \sin \vartheta^*}{\gamma(p^* \cos \vartheta^* + \beta E_1^*)} = \frac{\sin \vartheta^*}{\gamma(\cos \vartheta^* + \beta \frac{E^*}{p^*})} = \frac{\sin \vartheta^*}{\gamma(\cos \vartheta^* + \frac{\beta}{\beta_1^*})}$$

e per l'angolo due al solito la stessa espressione cambiando il segno al coseno:

$$\tan \vartheta_2 = \frac{\sin \vartheta^*}{\gamma(-\cos \vartheta^* + \frac{\beta}{\beta_2^*})}$$

Come già visto, se  $\beta^* < \beta$  le particelle vengono emesse in avanti. Possiamo calcolare anche in questo caso il valore dell'angolo massimo e si ha un risultato analogo.

$$\frac{d \tan \vartheta_1}{d \vartheta^*} = 0 \implies \cos \vartheta^* = -\frac{\beta_1^*}{\beta} \implies \tan \vartheta_{1,\max} = \frac{\beta_1^*}{\gamma \sqrt{\beta^2 - \beta_1^{*,2}}}$$

- Indicando con  $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$  l'angolo tra le due particelle, possiamo scrivere  $P^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2 \cos \vartheta = M^2$  e da qui ricavo

$$\cos \vartheta = \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - M^2}{2p_1p_2} \underset{E_i \approx p_i}{\approx} \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - M^2}{2E_1E_2} \Rightarrow \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sqrt{M^2 - m_1^2 - m_2^2}}{2\sqrt{E_1E_2}}$$

Si ha il valore di  $\vartheta$  minimo quando il denominatore è massimo. Troviamo i valori per cui è massimo:

$$E_0 = E_1 + E_2 \implies E_1E_2 = E_1(E_0 - E_1) \implies \frac{d}{dE_1}(E_1E_0 - E_1^2) = 0 \implies E_1 = \frac{E_0}{2} = E_2$$

dunque abbiamo il valore dell'angolo minimo nel caso in cui l'energia è equipartita tra i due corpi.

## Decadimento del pione

- Ci concentriamo sul decadimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ . Questo a differenza del decadimento dei pioni carichi, è un decadimento elettromagnetico infatti ha  $\tau \approx 10^{-16}$  s, mentre quello debole è  $\tau \approx 10^{-8}$  s.
- Ci sono principalmente due motivi per cui è utile studiare questo decadimento:
  1. Perché i pioni sono in generale i mediatori della interazione nucleare.
  2. Perché da raggi cosmici che penetrano nell'atmosfera vengono prodotti principalmente pioni. Anche in qualunque esperimento a bersaglio fisso. D'altra parte visto che la forza nucleare è indipendente dalla carica, ci sono sempre pioni carichi e neutri in mezzo.
- In questo caso abbiamo un nucleo origine che decade in due figli di uguale massa, che in particolare è zero! Quindi i due fotoni nel riferimento del laboratorio avranno un certo impulso con un certo angolo rispetto quello del  $\pi^0$  e per rivelarli dovrò rivelare le coppie elettrone-positrone, che se sono in un campo magnetico curveranno con verso opposto. Quindi avremo nel riferimento del laboratorio  $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  e  $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ :

$$\begin{cases} \vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \implies p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \vartheta \\ \sqrt{m_{\pi^0}^2 + p_0^2} = E_1 + E_2 = p_1 + p_2 \implies m_{\pi^0}^2 + p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \end{cases}$$

$$\implies 2p_1p_2(1 - \cos \vartheta) = m_{\pi^0}^2 \implies \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{m_{\pi^0}^2}{4E_1E_2}$$

che è lo stesso risultato di prima ma generico.

- Ci sarebbero i commenti ad un grafico che se mai avrò le slide metterò. C'è una iperbole nel primo quadrante, ed è  $\vartheta_{\min}$  in funzione dell'energia in GeV, per il  $\pi^0$  e  $\eta$ . Si vede che ad energie basse l'angolo minimo è grande, mentre ad energie alte l'angolo minimo diminuisce sempre più. Questo vuol dire che se faccio esperimenti ad alta energia, avrò i due fotoni proiettati in avanti, quindi se voglio essere in grado di distinguerli serve un rivelatore con risoluzione sufficiente.
- Vediamo la distribuzione energetica dei due fotoni nel riferimento del laboratorio, perché nel centro di massa sappiamo che sono più energetici e si ha  $E^* = \frac{m_{\pi^0}}{2}$ . Fissiamo assi in modo tale che  $x$  è direzione del moto di  $\pi^0$  e il moto è nel piano  $xy$ .
- Facciamo il conto:

$$\beta = \frac{p_0}{E_0}, \quad \gamma = \frac{E_0}{E^*} = \frac{E_0}{m_{\pi^0}/2}, \quad p_y = p_y^* = p^* \sin \vartheta, \quad p_x = \gamma(p^* \cos \vartheta + \beta E^*)$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma(E_1^* + \beta p_1^* \cos \vartheta^*) = \gamma \frac{m_{\pi^0}}{2} (1 + \beta \cos \vartheta^*) = \frac{E_0}{m_{\pi^0}} \frac{m_{\pi^0}}{2} \left(1 + \frac{p_0}{E_0} \cos \vartheta^*\right) = \\ &= \frac{E_0}{2} \left(1 + \frac{p_0}{E_0} \cos \vartheta^*\right) = \frac{E_0}{2} \frac{E_0 + p_0 \cos \vartheta^*}{E_0} = \frac{E_0 + p_0 \cos \vartheta^*}{2} \end{aligned}$$

Questo è per  $E_1$  e ovviamente se guardo  $E_2$  ho lo stesso risultato con il segno cambiato del coseno.

- Dunque la distribuzione energetica è compresa tra un valore massimo e minimo di  $E_1$  per i valori limite del coseno.

$$E_{\min} = \frac{E_0 - p_0}{2} \quad (\vartheta^* = \pi), \quad E_{\max} = \frac{E_0 + p_0}{2} \quad (\vartheta^* = 0)$$

e chiaramente i valori sono complementari tra fotone 1 e 2, cioè quando uno è al minimo l'altro è al massimo e viceversa.

- Adesso non ci resta che trovare come varia l'energia in questo intervallo. Sappiamo che  $\pi^0$  è un mesone a spin zero, quindi i fotoni nel centro di massa sono emessi isotropicamente. Quindi la distribuzione angolare non dipende dall'angolo solido, cioè uniforme su  $\cos \vartheta^*$ . Sia  $f(\cos \vartheta^*)$  la distribuzione angolare, allora avremo

$$\int_{-1}^1 f(\cos \vartheta^*) d \cos \vartheta^* = 1 \implies f(\cos \vartheta^*) = \frac{1}{2}$$

differenziando  $E_1 = \frac{E_0}{2} + \frac{p_0}{2} \cos \vartheta^*$  rispetto a  $\cos \vartheta^*$  otteniamo

$$\frac{dE_1}{d \cos \vartheta^*} = \frac{p_0}{2} \left( = \frac{\beta E_0}{2} = \frac{1}{2} \beta \gamma m_{\pi^0} \right) \implies dn = f(\cos \vartheta^*) d \cos \vartheta^* = \frac{1}{2} d \cos \vartheta^* = \frac{dE_1}{p_0}$$

la distribuzione di energia è costante tra i valori massimo e minimo

$$\frac{dn}{dE_1} = \frac{1}{p_0}$$

Dunque nel riferimento del centro di massa è una  $\delta$  centrata nella massa del  $\pi^0$ ; invece nel riferimento del laboratorio è una distribuzione piatta tra i valori massimo e minimo.

- Dimostriamo che la configurazione di decadimento per  $\vartheta_{\min}$  è proprio quella più probabile. Partiamo da

$$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{m_{\pi^0}^2}{4E_1E_2} \Rightarrow 4E_1(E_0 - E_1) = \frac{m_{\pi^0}^2}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \Rightarrow \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{m_{\pi^0}^2}{4E_1E_2} \Rightarrow 4E_1(E_0 - E_1) = \frac{m_{\pi^0}^2}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

$$\Rightarrow 4(E_0 - 2E_1) dE_1 = -2 \frac{m_{\pi^0}^2}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{1}{2} d\vartheta = -m_{\pi^0}^2 \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta$$

Se torniamo alla distribuzione angolare

$$\frac{dn}{d\vartheta} = \frac{dn}{dE_1} \frac{dE_1}{d\vartheta} = \frac{1}{p_0} \frac{m_{\pi^0}^2}{4(E_0 - 2E_1)} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}}$$

Facciamo un altro passaggio diverso

$$E_1(E_0 - E_1) = \underbrace{\frac{m_{\pi^0}^2}{4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}}_{=A} \Rightarrow E_1^2 - E_0 E_1 + A = 0 \Rightarrow E_0 - 2E_1 = \mp \sqrt{E_0^2 - 4A} = \mp \frac{E_0}{\sin \frac{\vartheta}{2}}$$

da cui sostituendo in  $\frac{dn}{d\vartheta}$  otteniamo

$$\frac{dn}{d\vartheta} = \frac{m_{\pi^0}^2}{p_0 E_0} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \frac{m_{\pi^0}^2}{E_0^2}}}$$

e si ha un massimo quando il denominatore è minimo (divergenza) per cui si ottiene proprio la formula di prima di  $\vartheta_{\min}$  (ponendo la radice quadrata pari a zero). Questa è proprio la configurazione più probabile, quando i due fotoni hanno minore apertura angolare che corrisponde ad energia iniziale equipartita.

- **servirebbe slide.** Facciamo esempi numerici. Supponiamo di essere nel riferimento del laboratorio e abbiamo energia del fascio  $\pi^0$  di 4.05 GeV. L'energia del pione nel laboratorio è  $E_{\pi^0}^{\text{lab}} = \gamma m_{\pi^0}$  e  $\beta^* \gamma \dots$

### 3 Senza nome per ora

#### 3.1 Interazioni

- L'interazione classica a distanza è descritta da un potenziale o da un campo. In meccanica quantistica invece c'è uno scambio di quanto, e ad ogni interazione è associato un bosone.
- Ad esempio consideriamo due cariche. Classicamente la forza che la prima carica esercita sulla seconda dipende dal campo elettrico; quantisticamente invece l'interazione tra le due cariche è mediata da un fotone, figlio della violazione di conservazione di energia in accordo con il principio di indeterminazione di Heisenberg  $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ .
- Esistono quattro tipi di interazione:

1. Forte. Lega i quark in adroni e protoni/neutroni in nuclei. È mediata dai gluoni.

2. Elettromagnetica. Lega gli elettroni al nucleo formando l'atomo ed è anche responsabile delle forze molecolari in liquidi e solidi. È mediata dai fotoni.
  3. Debole. È responsabile dei decadimenti radioattivi, specie i  $\beta$ -decay. È mediata dai bosoni W e Z.
  4. Gravitazionale. È la più debole e riguarda ogni corpo con massa. È mediata dai gravitoni... o forse no.
- Come sappiamo la massa del mediatore è inversamente proporzionale al range della interazione. Se il mediatore ha massa nulla, il range è infinito (fotone ed interazione elettromagnetica). Se il mediatore ha massa finita, il range è finito. Più è massivo, più è corto il range. Infatti la interazione debole ha range molto piccolo (inferiore al fermi) e il mediatore lo metto in evidenza solo ad energie elevate.
  - Per indicare l'intensità di ciascuna forza (non ho letto sbene slide diceva di protoni che si toccano) si pone pari a uno l'interazione forte. Allora avremo

Forte	Elettromagnetica	Debole	Gravitazionale
1	$10^{-2}$	$10^{-7}$	$10^{-39}$

Secondo Einstein forse è possibile unificare le quattro forze in un'unica teoria, ma non è ancora stato fatto. Finora solo la forza elettromagnetica e debole sono state unificate in una sola teoria. Si pensa che ad alte energie si riescono a unificare tutte le forze, solo che sono troppo elevate per raggiungerle. A  $10^{16}$  GeV si uniscono forza elettromagnetica, debole e forte; A  $10^{19}$  GeV si unisce anche la gravitazionale. Oggi siamo a 12 ordini di grandezza di distanza da  $10^{16}$  GeV.

- L'intensità di una forza è associata ad una costante di accoppiamento.

1. Quella elettromagnetica sappiamo che è la costante di struttura fine

$$\alpha = \frac{\text{Energia elettrostatica tra due elettroni a distanza } \hbar/mc}{\text{massa a riposo dell'elettrone}} = \frac{\frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{\hbar/mc}}{m_e c^2} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137}$$

2. Quella debole interviene nei  $\beta$ -decay e in assorbimenti di neutrini (che sarebbe la stessa cosa). Ma interviene anche in altri processi più *strani*. Vediamo i due decadimenti:

$$\Sigma_{dds}^- \rightarrow \underset{ddu}{n} + \pi^- \quad \tau_w \sim 10^{-10} s \quad \text{Forza debole}$$

$$\Sigma_{uds}^0 \rightarrow \underset{uds}{\Lambda} + \gamma \quad \tau_{EM} \sim 10^{-19} s \quad \text{Forza elettromagnetica}$$

La prima è effettivamente associata all'interazione debole in quanto viene violata la conservazione di flavour (un quark strange diventa up) ed ha un tempo di  $10^{-10}$ s, mentre la seconda è elettromagnetica perché, oltre alla presenza di un fotone, viola soltanto la conservazione dell'isospin e il tempo è di  $10^{-19}$ s. Come già sappiamo, il principio di indeterminazione lega vita media e larghezza del decadimento in modo inversamente proporzionale. Ma anche la larghezza di decadimento  $\Gamma$  dipende dalla costante di accoppiamento  $\alpha$  che caratterizza l'interazione tra lo stato iniziale e i prodotti finali del decadimento. In generale, il tasso di decadimento (sezione d'urto) è proporzionale al quadrato della costante di accoppiamento, quindi possiamo scrivere che  $\Gamma \propto \alpha^2$ . Questa dipendenza dal quadrato della costante di accoppiamento è una conseguenza della teoria quantistica dei campi, dove l'ampiezza della transizione dipende linearmente da  $\alpha$ , mentre la probabilità di transizione (e quindi il tasso

di decadimento o sezione d'urto) dipende dal modulo al quadrato di tale ampiezza. Da ciò segue che il tempo di vita medio  $\tau$  è inversamente proporzionale al quadrato della costante di accoppiamento  $\alpha$ :  $\tau \propto \alpha^{-2}$  di conseguenza, più è forte l'interazione (cioè, maggiore è la costante di accoppiamento), più breve sarà il tempo di vita della particella, mentre un'interazione più debole (con  $\alpha$  più piccolo) darà luogo a un tempo di vita più lungo.

$$\frac{\alpha_w}{\alpha} = \sqrt{\frac{\tau_{EM}}{\tau_w}} \approx 10^{-4} - 10^{-5}$$

Cioè, come già visto nella tabella precedente, la forza debole è 4-5 ordini meno intensa di quella elettromagnetica.

3. L'interazione forte invece conserva tutto. Quindi quella elettromagnetica viola al massimo la conservazione di isospin; quella debole viola molte cose tra cui parità, coniugazione di carica, flavour ed isospin; quella forte non viola niente. Vediamo le due reazioni:

$$\Sigma^{0*}(1385) \rightarrow \Lambda + \pi^0 \quad \tau \sim 10^{-23}s \quad \text{Forza forte } \Gamma = 36\text{MeV}$$

$$\Sigma^0(1192) \rightarrow \Lambda + \gamma \quad \tau \sim 10^{-19}s \quad \text{Forza elettromagnetica}$$

In questo caso abbiamo

$$\frac{\alpha_s}{\alpha} = \sqrt{\frac{\tau_{EM}}{\tau_s}} = \sqrt{\frac{10^{-19}}{10^{-23}}} \approx 10^2$$

I quanti in questo caso sono i gluoni e ci sono sei cariche. La forza tra i quark è simmetrica per colore ossia non dipende da essa. Vale la cromodinamica quantistica per l'interazione forte, e si hanno i due comportamenti:

Libertà asintotica	$V_s \rightarrow \alpha_s/r$ $V_s \rightarrow kr$	$q^2 \rightarrow \infty$ $q^2 \rightarrow 0$
Confinamento		

Cioè ad alte energie (piccole distanze) il potenziale è coulombiano, mentre a piccole energie (grandi distanze) il potenziale è elastico. La soglia di energia alta/bassa è sui GeV.

### 3.2 Diagrammi di Feynman

Introduzione inutile sui diagrammi. Lei però considera tempo da sinistra verso destra. Dice anche la storia dell'interferenza di quando consideri più diagrammi per uno stesso processo (fai il quadrato della somma, non la somma dei quadrati quella storia lì perché i diagrammi sono ampiezze).

#### Variabili di Mandelstam

Consideriamo il processo  $a + b \rightarrow c + d$  (e.g.  $p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}$ ). Le variabili di Mandelstam sono (per processi  $2 \rightarrow 2$ ):

1.  $s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2$  è il quadrato dell'energia nel centro di massa.

2.  $t = (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2$  è il quadrato del momento trasferito.

3.  $u = (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2$  è il quadrato del momento scambiato.

Inoltre vale  $s + t + u = (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)$  è la somma delle masse a riposo.

- Facciamo un esempio con lo scattering elettrone-positrone, quindi supponendo  $E_i \sim p_i$ . Nel riferimento del centro di massa avremo:

$$\begin{cases} p_a = (E, p, 0, 0) \\ p_b = (E, -p, 0, 0) \\ p_c = (E, p \cos \vartheta, p \sin \vartheta, 0) \\ p_d = (E, -p \cos \vartheta, -p \sin \vartheta, 0) \end{cases}$$

con  $\vartheta$  l'angolo tra la direzione iniziale di collisione e la direzione di scattering (finale). Allora abbiamo:

$$\begin{cases} s = 4E^2 \text{ come nei collider} \\ t = -\frac{1}{2}s(1 - \cos \vartheta) = -s \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \\ u = -\frac{1}{2}s(1 + \cos \vartheta) = -s \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \end{cases}$$

e si ha effettivamente  $s + t + u = 0$ , che vuol dire che solo due variabili sono indipendenti e scegliamo noi quale usare per descrivere il sistema (e.g.  $(E, \vartheta), (s, t), (\sqrt{s}, \vartheta)$ ). Invece l'angolo azimutale  $\varphi$  non compare e c'è simmetria (della sezione d'urto) in esso se la dinamica non lo esplicita, ad esempio con lo spin. Se non posso trascurare la massa  $s = m_a^2 + m_b^2 + 2p_a p_b \Rightarrow s + t + u = \sum_i m_i^2$ .

- Consideriamo adesso masse uguali. Diamo una rappresentazione grafica o qualcosa del genere non è che si capisce a che cosa serva.

$$\begin{cases} s = 4E^2 \geq 4m^2 \\ t = -4p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \\ u = -4p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \end{cases}$$

L'equazione  $s + t + u = 4m^2 = M$  oltre a dirci che solo due variabili sono indipendenti, rappresenta l'equazione di un piano nello spazio 3D  $stu$ . La regione del piano in cui  $s, t, u > 0$  forma un triangolo equilatero, come in Figura 4. I confini di questo triangolo sono dati dalle

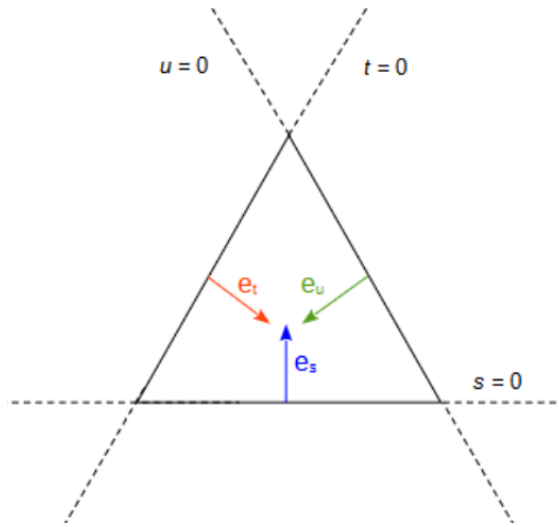


Figura 4: Piano di Mandelstam



linee  $s = 0$ ,  $t = 0$  e  $u = 0$ , come mostrato. Il vertice superiore del triangolo corrisponde a  $t = u = 0$ , quindi, dalla equazione precedente, vediamo che l'altezza del triangolo è  $M$ . Sebbene siano necessari solo due vettori unitari per specificare una posizione in questo piano, è consuetudine definire tre vettori unitari  $\hat{e}_s$ ,  $\hat{e}_t$  e  $\hat{e}_u$ , ciascuno dei quali è perpendicolare alla rispettiva linea zero, come mostrato in Figura 4. Visto che l'angolo tra due di questi versori è sempre  $\frac{2}{3}\pi$ , abbiamo

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \quad i \neq j$$

Per qualche motivo oscuro vogliamo esprimere  $\hat{e}_i$  in funzione di  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ . Notiamo subito che  $\hat{e}_s = \hat{y}$ . Invece  $\hat{e}_u$  ha un angolo pari a  $\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{6}\pi$  rispetto all'asse  $\hat{x}$ , dunque  $\hat{e}_u = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ . Infine  $\hat{e}_t$  sta a  $-\frac{\pi}{6}$  rispetto all'asse  $\hat{x}$ , quindi  $\hat{e}_t = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ . Queste relazioni possiamo invertirle e ricavare  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  in funzione di  $\hat{e}_i$ . Sempre per lo stesso oscuro motivo, la prof ci tiene a dire che le regioni fisicamente permesse sono quelle fuori dal triangolo e comprese tra le linee che fuoriescono da ciascun angolo. Per esempio la regione permessa di  $s$  sta sopra. IO credo sia dovuto a questo: quando siamo nella retta parallela all'asse  $x$  e passante per il vertice in alto, abbiamo  $s = 4m^2, t = u = 0$ . Quindi se andiamo "sopra",  $s > 4m^2$  e  $t, u < 0$ . Ok però così non ha senso che non si possa stare anche dentro il triangolo ok ci rinuncio.

- c'è una parte poco chiara servirebbero slide.
- A cosa servono? Due sono indipendenti, la terza no e in base al processo che abbiamo esprimiamo le sezioni d'urto in funzione di una variabile piuttosto che di un'altra. Consideriamo un processo  $X$  indipendente (forse senza polarizzazione?) da  $\varphi$ , allora

$$\frac{d\sigma_X}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma_X}{d \cos \vartheta} = \frac{s}{4\pi} \frac{d\sigma_X}{dt} \quad \text{perché } t = -\frac{s}{2}(1 - \cos \vartheta)$$

Per  $m^2 \ll s$  la sezione d'urto dipende dal modulo quadro dell'elemento di matrice del processo

$$\frac{d\sigma_X}{dt} = \frac{|M_X|^2}{16\pi s^2}$$

In base al processo che considero, avrò una espressione diversa.

- Definizione di sezione d'urto, al solito probabilità di interazione quando il proiettile entra in regione unitaria di volume con un target. Consideriamo un fascio di  $N_b$  particelle contro uno strato  $dl$  del target con  $N_T$  particelle in volume  $V$ . Indicando con  $n_T = dN_T/V$  la densità del target, abbiamo che  $dN_b \propto N_b n_t dl$ .

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \cos \vartheta \partial \varphi} \quad \text{Non dipende da } \varphi \implies \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{d \cos \vartheta}$$

$$\frac{d\sigma}{d\vec{p}} = \frac{d^3 \sigma}{dp_x dp_y dp_z} = \frac{d^3 \sigma}{p_T dp_T dp_L d\varphi} \implies \text{slide}$$

Non lo so perchè ho scritto ciò<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Ho chiesto a ChatGPT di spiegare i passaggi e sotto c'è lo jacobiano (ovviamente mi dicono dalla regia, cervello mode: off) da  $(x, y, z) \rightarrow (p_T, \varphi, p_L)$  con  $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ ,  $\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{p_y}{p_x} \right)$ ,  $p_L = p_z$

- Una cosa da attenzionare è che la sezione d'urto bisogna precisare a cosa è riferita. Consideriamo  $ab \rightarrow cX$ . Se mi interessa solo sapere come è prodotto  $c$  e non mi interessa da cosa è accompagnato, è una sezione d'urto *inclusiva*  $\sigma(ab \rightarrow cX)$  e devo considerare tutti i processi che lo producono. Se invece sono interessato ad un canale ben preciso, avrò la sezione d'urto *esclusiva*. La somma di tutte le sezioni d'urto esclusive darà quella inclusiva. Quindi se  $\sigma_{\text{inc}} \ll \sigma_{\text{tot}}$  allora posso esplicitare la probabilità di produrre  $c$ :

$$\mathbb{P}(c) = \frac{\sigma_{\text{inc}}(ab \rightarrow cX)}{\sigma_{\text{tot}}(ab)}$$

Se invece  $\sigma_{\text{inc}} \approx \sigma_{\text{tot}}$  allora quel rapporto fornisce il numero di  $c$  prodotti nello stato finale.

- In base al contesto posso esplicitare o meno se si tratta di sezione d'urto inclusiva/esclusiva. Ad esempio in LHC si lavora per la produzione di Higgs, quindi è sottointeso che la sezione d'urto sia inclusiva.

$$\sigma_{\text{Higgs}}(\text{LHC}, 8 \text{ TeV}) = \sigma_{\text{inc}}(pp \rightarrow Hx, \sqrt{s} = 8 \text{ TeV}) \approx 22.3 \text{ pb}$$

$$\sigma_{\text{tot}}(pp, \sqrt{s} = 8 \text{ TeV}) = 101.7 \pm 2.9 \text{ mb}$$

Quindi ci sono 10 ordini di grandezza di differenza (pico =  $10^{-12}$ , milli =  $10^{-3}$ ). Il rapporto ci dà la probabilità di produrre il bosone di Higgs:

$$\mathbb{P}(\text{Higgs @ LHC}) = 2 \cdot 10^{-10}$$

Vediamo un altro esempio.

$$\sigma_{\text{inc}}(pp \rightarrow \pi^0 X, p_{\text{LAB}} = 24 \text{ GeV}) = 53.5 \pm 3.1 \text{ mb}$$

$$\sigma_{\text{to}}(pp, p_{\text{LAB}} = 24 \text{ GeV}) = 38.9 \text{ mb}$$

In questo caso il rapporto dà il numero. La probabilità la abbiamo solo se la frazione è *molto* piccola.

- La sezione d'urto inoltre è legata alla matrice del processo, al fattore di spazio delle fasi ( $\frac{2\pi}{h}\rho(E)$ ) e al rapporto tra elemento di volume e velocità della particella incidente tramite la seconda regola d'oro di Fermi.

$$\sigma = \frac{WV}{v_b} = \frac{2\pi}{h} |M_{\text{if}}|^2 \rho(E) \frac{V}{v_b}$$

Con la teoria abbiamo questa espressione della sezione d'urto. Noi con la teoria accediamo a  $|M_{\text{if}}|^2$  mentre sperimentalmente abbiamo numero di eventi in un determinato canale e poi si confronta.

- Nel caso di stati eccitati il decadimento è esponenziale  $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$  con  $\tau$  tempo di vita medio del processo, con al solito  $\Gamma \propto \frac{1}{\tau}$ . Se  $\tau$  è piccolo, l'energia a riposo (o massa) di uno stato non è unica (non è una delta di Dirac) ma varia attorno ad un valore centrale. La funzione che descrive la distribuzione di energia che lo stato può assumere è una lorentziana:

$$|\tilde{\psi}(E)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{|\psi_0|^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

che però in questo contesto fisico chiamiamo formula di Breit-Wigner (la si ricava facendo la trasformata di Fourier di  $\psi(t) = \psi_0 e^{-i(E_0 - i\Gamma/2)t}$ ). La larghezza a metà altezza della lorentziana è proprio  $\Gamma$  ed è la larghezza di decadimento. Questa formula è importante perché la Breit-Wigner appare ogni volta che abbiamo processi con risonanze, e dal picco troviamo la massa e dalla larghezza del picco troviamo la larghezza di decadimento (o tempo di vita medio).

- Consideriamo un processo con step intermedio  $ab \rightarrow R \rightarrow X$ . Allora abbiamo la formula ( $J_R$  momento angolare totale della risonanza mentre  $s_a, s_b$  spin delle particelle iniziali)<sup>3</sup>

$$\sigma(ab \rightarrow R \rightarrow X, E_{\text{cm}} = \sqrt{s}) = \frac{\pi}{|p_{ab}|^2} \underbrace{\frac{2J_R + 1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)}}_{\text{molteplicità di stati di spin e momento angolare}} \underbrace{\frac{\Gamma_{ab}\Gamma_X}{(\sqrt{s} - M_R)^2 + \Gamma_R^2/4}}_{\text{Breit-Wigner}} \approx$$

$$\underset{s \approx |p_{ab}|^2}{\text{trascuro masse}} \approx \frac{16\pi}{s} \frac{2J_R + 1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} \frac{\Gamma_{ab}}{\Gamma_R} \frac{\Gamma_X}{\Gamma_R} \frac{\Gamma_R^2/4}{(\sqrt{s} - M_R)^2 + \Gamma_R^2/4}$$

quindi la si scrive in termini del branching ratio BR con i rapporti delle larghezze di decadimento. Appliciamola ad un caso specifico:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{16\pi}{s} \frac{3}{4} \frac{\Gamma_{e^+e^-}}{\Gamma_{J/\psi}} \frac{\Gamma_{\mu^+\mu^-}}{\Gamma_{J/\psi}} \frac{\Gamma_{J/\psi}^2/4}{(E - M_{J/\psi})^2 + \Gamma_{J/\psi}^2/4} =$$

$$= \frac{12\pi}{s} \text{BR}(J/\psi \rightarrow e^+e^-) \text{BR}(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-) \frac{\Gamma_{J/\psi}^2/4}{(E - M_{J/\psi})^2 + \Gamma_{J/\psi}^2/4}$$

Da notare che non si conosceva nulla sulla  $J/\psi$ , né momento angolare né massa. Da fit si ricavarono entrambi. È importante sottolineare che la presenza di questo step intermedio è dovuta al fatto che sperimentalmente si osserva una risonanza, da ciò deduciamo che non sta semplicemente avvenendo  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

- Ci sono diverse formule di Breit-Wigner semi-empiriche o *ispirate*. Ne abbiamo già viste due, ma possiamo anche averne una considerando  $M_R \gg \Gamma_R$  e nego la dipendenza da  $s$  (?); oppure in regime relativistico un'altra formula.
- In generale quando faccio una misura io **non** ottengo mai la vera larghezza di decadimento, ma una convoluzione della larghezza intrinseca del decadimento e l'efficienza del rivelatore.
- Quando abbiamo grandi numeri, consideriamo la distribuzione gaussiana mentre con piccoli numeri può essere binomiale o altro a seconda dei casi. Per scoprire una nuova particella consideriamo la distribuzione di Gauss e quando siamo distanti dal valore atteso: quando ci troviamo tra 3 e 5 deviazioni standard, si conclude che abbiamo *osservato* qualcosa di nuovo. Se siamo oltre 5 deviazioni standard, si conclude che abbiamo *scoperto* qualcosa di nuovo. Ovviamente è una convenzione.
- La forma della curva quando si osserva una risonanza è la *Voigt* che tiene conto di larghezza intrinseca e risoluzione del rivelatore. Non ha una forma analitica ma solo integrale (di gaussiana per lorentziana).

<sup>3</sup>Sto 16 nella formula dopo non lo capisco, dovrebbe essere un 4. Purtroppo la campionessa non passa le slide quindi non posso controllare se è colpa mia.

## 4 Modello statico a quark

pippo

### 4.1 Simmetrie e leggi di conservazione

In generale una legge fisica è simmetrica rispetto ad una trasformazione quando la forma della legge è invariante per questa trasformazione. Sia in meccanica classica che quantistica.

- In QM se l'operatore non dipende esplicitamente dal tempo allora commuta con la hamiltoniana del sistema. In generale (non sempre?) i numeri quantici conservati sono associati ad operatori che commutano con l'hamiltoniana.
- Le simmetrie si dividono in continue e discrete. Vediamo ad esempio la traslazione spaziale (continua)

$$\psi(r + \delta r) = \psi(r) + \delta r \frac{d\psi}{dr} = \left(1 + \delta r \frac{\partial}{\partial r}\right) \psi(r)$$

L'operatore che descrive una traslazione finita è l'impulso:

$$D = 1 + \frac{i}{\hbar} p \delta r \implies D = \lim_n \left(1 + \frac{ip \Delta r}{n \hbar}\right)^n = e^{\frac{i}{\hbar} p \Delta r}$$

Chiamiamo  $p$  generatore dell'operatore  $D$  di traslazione spaziale. Se l'hamiltoniana è invariante per traslazioni, allora commuta con  $D$  e dunque anche con  $p$ . Questo lo si può esprimere in tre modi equivalenti:

1. L'impulso si conserva in un sistema isolato.
  2. L'hamiltoniana è invariante per traslazioni spaziali.
  3. L'operatore impulso commuta con l'hamiltoniana.
- A simmetrie continue associamo numeri quantici additivi, a simmetrie discrete sono associati numeri quantici moltiplicativi.

### Parità

La trasformazione di parità è l'inversione delle coordinate spaziali.

$$P\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

Chiaramente se applico due volte l'operatore ottengo la funzione iniziale:

$$P^2\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \implies P^2 = 1 \text{ (unitario)} \implies \lambda = \pm 1$$

Vediamo degli esempi:

- Consideriamo le semplici funzioni trigonometriche

$$\psi(x) = \cos x \xrightarrow{P} \cos(-x) = \cos(x) = \psi(x) \text{ Pari}$$

$$\psi(x) = \sin x \xrightarrow{P} \sin(-x) = -\sin(x) = -\psi(x) \text{ Dispari}$$

In generale una combinazione lineare  $\psi(x) = \cos x + \sin x$  non è detto che sia simmetrica per parità.

- Un altro esempio può essere la funzione d'onda di un elettrone in un atomo di idrogeno. La simmetria della funzione d'onda ha la stessa parità di  $l$ . Infatti

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \chi(r) \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_m^l(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

Fare una trasformazione di parità vuol dire

$$\begin{aligned} \vec{r} \rightarrow -\vec{r} &\Rightarrow \begin{cases} \vartheta \rightarrow \pi - \vartheta \\ \varphi \rightarrow \pi + \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{im\varphi} \rightarrow e^{im(\pi+\varphi)} = (-1)^m e^{im\varphi} \\ P_m^l(\cos \vartheta) \rightarrow (-1)^{l+m} P_m^l(\cos \vartheta) \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Y_l^m(\vartheta, \varphi) \rightarrow (-1)^{l+2m} Y_l^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

Questo risultato vale in generale per le armoniche sferiche, che quindi hanno parità data da  $l$ . Nelle transizioni di dipolo elettrico la regola di selezione è  $\Delta l = \pm 1$ , quindi la parità atomica cambia. Però nei processi elettromagnetici la parità si conserva, quindi la parità della radiazione emessa deve essere negativa per compensare la parità.

- In questo caso il numero quantico è moltiplicativo e non si conserva soltanto nei decadimenti deboli. Inoltre è necessario che per convenzione assegniamo una parità intrinseca a ciascuna particella: a protoni e neutroni assegniamo parità positiva.