ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

INTRODUZIONE ALLE ALGEBRE DI LIE SEMISEMPLICI E RISOLUBILI

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Prof.ssa Nicoletta Cantarini

Presentata da:
Valentina Sanson

Correlatore:
Prof. Francesco Meazzini

Anno Accademico 2022/2023

"La mente non ha bisogno, come un vaso, di essere riempita, ma piuttosto, come legna, di una scintilla che l'accenda vi infonda l'impulso della ricerca e un amore ardente per la verità."
Plutarco, L'arte di ascoltare.

Introduzione

Con questa tesi ho iniziato lo studio delle algebre di Lie di dimensione finita concentrandomi sulla teoria delle algebre di Lie semisemplici e risolubili su un campo algebricamente chiuso e di caratteristica 0. Le algebre di Lie furono introdotte dal matematico norvegese Sophus Lie a cavallo tra il 1800 e il 1900 e sono studiate in numerosi campi della matematica e della fisica, riscontrando un grandissimo numero di applicazioni fondamentali come ad esempio nella fisica delle particelle. Il contenuto della tesi ruota intorno ad alcuni risultati fondamentali della teoria, vale a dire il Teorema di Lie ed il Teorema di Levi (di cui, tuttavia, non si fornisce una dimostrazione completa) ed è arricchito di numerosi esempi e controesempi. Gli strumenti utilizzati sono principalmente di algebra lineare avanzata.

Nel capitolo 1, introduciamo la definizione di algebra di Lie in senso astratto e diamo alcuni esempi di algebre lineari che saranno esempi guida in tutta la trattazione. Nello stesso capitolo introduciamo le nozioni di algebra di Lie nilpotente e risolubile con le loro proprietà, insieme a quella di algebra di Lie semplice. Infine, definiamo i concetti di rappresentazione di un'algebra di Lie e di rappresentazione irriducibile.

Il capitolo 2 è dedicato alle algebre di Lie risolubili e contiene la dimostrazione del Teorema di Lie e del Criterio di Cartan. Diamo la definizione di spazio peso e spieghiamo la sua rilevanza per il Teorema di Lie. Continuiamo la discussione concentrandoci sulla definizione di forma di Killing e sulla decomposizione di Jordan-Chevalley di un endomorfismo e siamo dunque in grado di dimostrare un criterio di risolubilità per algebre di Lie: il Criterio di Cartan.

Nell'ultimo capitolo concentriamo la nostra attenzione sulle algebre di Lie semisemplici ed enunciamo il Teorema di Levi, un teorema di struttura che lega le algebre di Lie semisemplici a quelle risolubili. Concludiamo spiegando alcune conseguenze e alcune applicazioni di questo teorema.

Indice

Capitolo 1

Nozioni preliminari

Sia $\mathbb{F}$ un campo.

1.1 Algebre di Lie: definizione e contenuti generali

Un'algebra di Lie è un'algebra priva di unità in cui il prodotto non è né commutativo né associativo. La definiamo nel seguente modo:

Definizione 1.1. *Un'algebra di Lie è un $\mathbb{F}$-spazio vettoriale $\mathfrak{g}$ sul quale è definita una operazione binaria $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, chiamata bracket di Lie o commutatore, che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *$[\cdot,\cdot]$ è bilineare;*
2. *$[x,x] = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$;*
3. *$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ per ogni $x,y,z \in \mathfrak{g}$.*

Osservazione 1.2. L'assioma *3.* viene chiamato identità di Jacobi, mentre dai primi due assiomi è possibile dedurre la proprietà di anticommutatività: per $x, y \in \mathfrak{g}$ si ha,

$$\begin{aligned} 0 &= [x+y, x+y] \\ &= [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] \\ &= [x,y] + [y,x], \end{aligned}$$

ossia $[x,y] = -[y,x]$.

Definizione 1.3. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Un sottospazio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ è chiamato sottoalgebra di Lie se $[x,y] \in \mathfrak{h}$ per ogni $x, y \in \mathfrak{h}$, ossia $\mathfrak{h}$ è chiuso rispetto all'operazione di bracket.*

Introduciamo ora le nozioni fondamentali di ideale e di omomorfismo di algebre di Lie.

Definizione 1.4. *Un sottospazio* $\mathfrak{h}$ *di un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *è chiamato ideale di* $\mathfrak{g}$ *se per ogni* $g \in \mathfrak{g}$ *e per ogni* $h \in \mathfrak{h}$ *vale* $[g, h] \in \mathfrak{h}$.

Definizione 1.5. *Siano* $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ *algebre di Lie e sia* $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *una funzione lineare.* f *si dice omomorfismo di algebre di Lie se per ogni* $x, y \in \mathfrak{g}$ *vale*

$$[f(x), f(y)] = f([x, y]).$$

In particolare, chiamiamo f *un isomorfismo di algebre di Lie se esso è un omomorfismo biiettivo.*

Osservazione 1.6. Sia $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un omomorfismo di algebre di Lie allora $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathfrak{g}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ e $\mathrm{Im}(f) \subset \mathfrak{g}'$ è una sottoalgebra di Lie.

Osserviamo ora alcuni esempi notevoli di algebre di Lie.

Esempio 1.7. a) Sia V uno spazio vettoriale con l'operazione banale: $[v, w] = 0$ per ogni $v, w \in V$. Allora V ha la struttura di algebra di Lie, detta *algebra di Lie abeliana.*

b) Supponiamo che V sia uno spazio vettoriale finito-dimensionale su $\mathbb{F}$ e sia $End(V)$ lo spazio degli endomorfismi di V. Possiamo definire su $End(V)$ una nuova operazione: $[x, y] = x \circ y - y \circ x$, dove $\circ$ indica la composizione di applicazioni lineari. Osserviamo che su $(End(V), [\cdot, \cdot])$ sono soddisfatti i tre assiomi della Definizione 1.1 e per questo motivo $End(V)$ diventa un'algebra di Lie su $\mathbb{F}$ chiamata *algebra generale lineare* ed indicata con gl_V. Inoltre, ogni sua sottoalgebra è chiamata *algebra di Lie lineare.*
Analogamente, fissata una base di V, è possibile definire su $M_n(\mathbb{F})$ una struttura di algebra di Lie, denotata con $gl_n(\mathbb{F})$, e l'operazione di bracket definita come segue: $[XY] = XY - YX$, dove XY è il prodotto tra matrici. Se V ha dimensione $n \in \mathbb{N}$, $M_n(\mathbb{F})$ ed $End(V)$ sono algebre di Lie isomorfe.

c) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Una derivazione di V è un'applicazione lineare $\delta : V \to V$ che soddisfa la regola di Leibniz: $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$ con a, b elementi di V. L'insieme $\mathrm{Der}\, V$ delle derivazioni di V è una sottoalgebra di gl_V, infatti, siano $\delta, \delta' \in \operatorname{Der} V$ e $a, b \in V$:

$$\begin{aligned}
[\delta, \delta'](ab) &= \delta(\delta'(ab)) - \delta'(\delta(ab)) \\
&= \delta(\delta'(a)b + a\delta'(b)) - \delta'(\delta(a)b + a\delta(b)) \\
&= \delta(\delta'(a)b) + \delta(a\delta'(b)) - \delta'(\delta(a)b) - \delta'(a\delta(b)) \\
&= a(\delta(\delta'(b)) - \delta'(\delta(b))) + (\delta(\delta'(a)) - \delta'(\delta(a)))b \\
&= a([\delta, \delta'](b)) + ([\delta, \delta'](a))b.
\end{aligned}$$

d) Consideriamo l'insieme $sl_n(\mathbb{F})$ delle matrici $n \times n$ aventi traccia 0. Essa è una sottoalgebra di $gl_n(\mathbb{F})$ e, in particolare, anche un ideale di $gl_n(\mathbb{F})$. Infatti, per ogni $X \in sl_n(\mathbb{F})$, $Z \in gl_n(\mathbb{F})$ tali che $[X, Z] = XZ - ZX$ abbiamo $\operatorname{tr}([X, Z]) = 0$ quindi $[X, Z] \in sl_n(\mathbb{F})$.

e) Sia f una forma bilineare simmetrica non degenere su uno spazio vettoriale V di dimensione $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, e la matrice associata a f rispetto a $\{v_1, \ldots, v_{2n+1}\}$ sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$. Chiamiamo *algebra di Lie ortogonale* o_V l'insieme di tutti gli endomorfismi x di V tali che $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$ con $v, w \in V$. Si può facilmente verificare che o_V è una sottoalgebra di gl_V.
Equivalentemente considero la matrice $X = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & M & N \\ C_2 & P & Q \end{pmatrix}$ tale che soddisfi $BX = -X^T B$ allora valgono le seguenti condizioni: $A = 0$, $C_1 = -B_2^T$, $C_2 = -B_1^T$, $Q = -M^T$, $N^T = -N$, $P^T = -P$.

f) Similmente, supponiamo f una forma bilineare antisimmetrica non degenere su V di dimensione pari $2n$, per $n \in \mathbb{N}$, tale che la matrice associata ad f rispetto a una base $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ sia $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Chiamiamo *algebra di Lie simplettica* sp_V l'insieme di tutti gli endomorfismi x di V tali che $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$, $v, w \in V$ ed è possibile verificare che sp_V è una sottoalgebra di gl_V.
In termini di matrici, la seguente matrice $X = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, dove $M, N, P, Q \in gl_n(\mathbb{F})$, è simplettica se soddisfa la condizione $BX = -X^T B$, cioè $N^T = N$, $P^T = P$ e $M^T = -Q$.

g) L'insieme delle matrici triangolari superiori $t_n(\mathbb{F})$, l'insieme delle matrici strettamente triangolari superiori $n_n(\mathbb{F})$, l'insieme delle matrici diagonali $d_n(\mathbb{F})$ e $so_n(\mathbb{F}) = \{A \in gl_n(\mathbb{F}) | \, A + A^T = 0\}$ sono sottoalgebre di $gl_n(\mathbb{F})$.

Osservazione 1.8. Nel caso in cui $\mathfrak{g}$ sia un'algebra di Lie (non uno dimensionale) con un ideale proprio non nullo $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, lo spazio quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ eredita la struttura di algebra di Lie con prodotto $[x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h}] = [x, y] + \mathfrak{h}$. La proiezione al quoziente $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ è un omomorfismo di algebre di Lie con nucleo $\mathfrak{h}$ e, inoltre, possiamo osservare che sono verificati i teoremi di omomorfismo:

Proposizione 1.9. *[1, Proposition 2.2]*

1. *Siano $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ algebre di Lie e sia $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un omomorfismo di algebre di Lie allora $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f)$. Se $\mathfrak{h}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ incluso nel $\operatorname{Ker}(f)$ allora esiste un unico omomorfismo $\phi : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}'$ tale che $f(g) = \phi(\pi(g))$ per ogni $g \in \mathfrak{g}$, dove π è la proiezione canonica sul quoziente.*

2. *Se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ sono due ideali di $\mathfrak{g}$ allora $\mathfrak{i}/\mathfrak{h}$ è un ideale di $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ e $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})/(\mathfrak{i}/\mathfrak{h})$ è isomorfo a $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$.*

3. *Siano $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un ideale, $a \subset \mathfrak{g}$ una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$. Allora $a + \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ e $(a + \mathfrak{h})/\mathfrak{h} \cong a/(a \cap \mathfrak{h})$.*

Ora introduciamo due sottospazi di $\mathfrak{g}$.

Definizione 1.10. *Si chiama centro di $\mathfrak{g}$ l'insieme*

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} | [x, y] = 0 \text{ per ogni } y \in \mathfrak{g}\},$$

ossia l'insieme di tutti gli elementi di $\mathfrak{g}$ che commutano con tutti gli elementi dell'algebra. Si chiama algebra derivata di $\mathfrak{g}$, denotata con $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei commutatori $[x, y]$ con $x, y \in \mathfrak{g}$.

Lemma 1.11. *Siano $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{i}$ due ideali di $\mathfrak{g}$ allora $[\mathfrak{h}, \mathfrak{i}]$ è un ideale.*

Dimostrazione. Siano $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{h}$ e $z \in \mathfrak{i}$ allora utilizzando l'identità di Jacobi otteniamo $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{i}]$. □

1.2 Rappresentazioni di un'algebra di Lie

Proseguiamo con la nozione di rappresentazione di un'algebra di Lie.

Definizione 1.12. *Una rappresentazione di un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *è un omomorfismo di algebre di Lie* $\pi : \mathfrak{g} \to gl_V$*. In altre parole,* π *è una mappa lineare tale che*

$$\pi([x, y]) = \pi(x) \circ \pi(y) - \pi(y) \circ \pi(x), \tag{1.1}$$

dove $\circ$ *è l'operazione di composizione.*

Osservazione 1.13. Notiamo che spesso è conveniente usare il linguaggio dei moduli invece di quello delle rappresentazioni per questioni di praticità, ma i due linguaggi sono del tutto equivalenti. Quando sarà possibile elimineremo π dalla notazione e scriveremo $x.v$ al posto di $\pi(x)(v)$, per $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. In particolare (1.1) diventa

$$[x, y].v = x.(y.v) - y.(x.v).$$

Di seguito alcuni esempi.

Esempio 1.14. a) Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Chiamiamo rappresentazione aggiunta la seguente rappresentazione di $\mathfrak{g}$ su se stessa:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow gl_{\mathfrak{g}} \\ x &\longmapsto \mathrm{ad}\, x \end{aligned}$$

dove $\mathrm{ad}\, x(y) = [x, y]$ per $y \in \mathfrak{g}$. Utilizzando l'identità di Jacobi è possibile dimostrare che $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{g} \subset gl_{\mathfrak{g}}$ infatti per $x, y, x \in \mathfrak{g}$ si ha:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Di seguito mostriamo che ad preserva l'operazione di bracket e per $x, y, z \in \mathfrak{g}$ vale:

$$\begin{aligned} [\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y](z) &= \mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y(z) - \mathrm{ad}\, y\, \mathrm{ad}\, x(z) \\ &= \mathrm{ad}\, x([y, z]) - \mathrm{ad}\, y([x, z]) \\ &= [x, [y, z]] - [y[x, z]] \\ &= [x, [y, z]] + [[x, z], y] \qquad (1.2) \\ &= [[x, y], z] \qquad (1.3) \\ &= \mathrm{ad}[x, y](z) \end{aligned}$$

e nel punto (1.2) abbiamo utilizzato la proprietà di anticommutatività e nel punto (1.3) l'identità di Jacobi. Inoltre, si nota che $\mathrm{Ker(ad)} = \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ e per questo motivo se $\mathfrak{g}$ non possiede ideali propri non nulli ad è una funzione iniettiva e $\mathfrak{g}$ è isomorfa a un'algebra di Lie lineare. In aggiunta, possiamo osservare che $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$ è un ideale di $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$, infatti sia $x \in \mathfrak{g}$ e sia $\delta \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ allora con un breve calcolo si vede che $[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(\delta(x)) \in \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ per ogni $y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
[\delta, \operatorname{ad} x](y) &= [\delta \operatorname{ad} x - \operatorname{ad} x\delta](y) \\
&= \delta(\operatorname{ad} x(y)) - \operatorname{ad} x(\delta(y)) \\
&= \delta([x, y]) - [x, \delta(y)] \\
&= \delta(xy - yx) - [x, \delta(y)] \\
&= \delta(x)y + x\delta(y) - \delta(y)x - y\delta(x) - x\delta(y) + \delta(y)x \\
&= \delta(x)y - y\delta(x) \\
&= [\delta(x), y] \\
&= \operatorname{ad}(\delta(x))(y).
\end{aligned}$$

b) Se $\mathfrak{g} = gl_V$ con V spazio vettoriale su $\mathbb{F}$ allora la funzione identità $gl_V \to gl_V$ è una rappresentazione di gl_V su V che è chiamata rappresentazione standard.

c) Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie allora $\pi : \mathfrak{g} \to gl_1$ è un omomorfismo ed è chiamato rappresentazione banale.

Definizione 1.15. *Sia V uno spazio vettoriale. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie e sia $\pi : \mathfrak{g} \to gl_V$ una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ su V. Una sottorappresentazione di V è un sottospazio $W \subset V$ che è invariante rispetto a tutti gli elementi $\pi(x)$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$, cioè $\pi(x)(w) \in W$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$.*

Proseguiamo dando la definizione di rappresentazione irriducibile.

Definizione 1.16. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie e sia π una rappresentazione di $\mathfrak{g}$. Chiamiamo π rappresentazione irriducibile se non contiene sottorappresentazioni proprie non nulle, o equivalentemente, diciamo che V è irriducibile rispetto a $\pi(\mathfrak{g})$ se gli unici sottospazi invarianti di V rispetto a $\pi(\mathfrak{g})$ sono 0 e V stesso.*

Esempio 1.17. Sia $\mathfrak{g} \subset gl_V$ una sottoalgebra dell'algebra lineare con V spazio vettoriale finito-dimensionale. Per ogni coppia di vettori non nulli v_1 e v_2 in V possiamo trovare un endomorfismo $g \in gl_V$ che manda v_1 in v_2. Per questo motivo, ogni sottospazio invariante non nullo di gl_V deve contenere ogni vettore non nullo di V e contenere anche il vettore nullo. Quindi V è irriducibile rispetto a gl_V.

1.3 Algebre di Lie semplici, risolubili e nilpotenti

Di seguito riportiamo le definizioni di algebra di Lie semplice, risolubile e nilpotente che saranno centrali nella nostra discussione.

Definizione 1.18. *Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ si dice semplice se non è abeliana e non contiene ideali propri non nulli, i.e. i suoi unici ideali sono $\mathfrak{g}$ e $\{0\}$.*

Osservazione 1.19. Se un'algebra è semplice allora $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ e $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Definizione 1.20. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Si chiama serie derivata la sequenza di ideali di $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$,...,$\mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}]$. Chiamiamo $\mathfrak{g}$ risolubile se $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.*

Osservazione 1.21. Per definizione un'algebra di Lie abeliana è risolubile poiché $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Enunciamo alcune proprietà delle algebre di Lie risolubili che ci saranno d'aiuto nella risoluzione di alcuni problemi.

Proposizione 1.22. *[1, Proposition 3.1]*
Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie.

1. *Se $\mathfrak{g}$ è risolubile allora tutte le sue sottoalgebre e le immagini di $\mathfrak{g}$ attraverso un omomorfismo lo sono.*

2. *Se $\mathfrak{h}$ è un ideale risolubile di $\mathfrak{g}$ tale che $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sia risolubile allora anche $\mathfrak{g}$ lo è.*

3. *Se $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{i}$ sono ideali risolubili di $\mathfrak{g}$ allora anche $\mathfrak{h} + \mathfrak{i}$ lo è.*

Definizione 1.23. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Si chiama serie centrale discendente la sequenza di ideali di $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1]$, ..., $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}]$. $\mathfrak{g}$ si dice nilpotente se $\mathfrak{g}^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.*

Osservazione 1.24. Ogni algebra abeliana è nilpotente poiché $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, inoltre le algebre di Lie nilpotenti sono risolubili infatti $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$. Il viceversa è falso: consideriamo l'algebra di Lie non abeliana di dimensione due con base $\mathcal{B} = \{x, y\}$ e il suo bracket definito nel seguente modo: $[x, y] = x$. Essa è risolubile ma non nilpotente infatti: $\mathfrak{g}^{(1)} = span\{x\}$ e $\mathfrak{g}^{(2)} = 0$, mentre $\mathfrak{g}^i = span\{x\}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Anche per le algebre di Lie nilpotenti valgono delle proprietà simili a quelle delle algebre di Lie risolubili.

Proposizione 1.25. *[1, Proposition 3.2]*
Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie.

1. *Se $\mathfrak{g}$ è nilpotente allora tutte le sue sottoalgebre e le immagini di $\mathfrak{g}$ attraverso un omomorfismo lo sono.*

2. *Se $\mathfrak{g}/\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ è nilpotente allora anche $\mathfrak{g}$ lo è.*

3. Se $\mathfrak{g}$ *è nilpotente e non nullo allora* $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Introduciamo ora il concetto di elemento ad-nilpotente.

Definizione 1.26. *Se* $\mathfrak{g}$ *è un'algebra di Lie e* $x \in \mathfrak{g}$ *diciamo che un elemento* x *è ad-nilpotente se* $\operatorname{ad} x \in gl_{\mathfrak{g}}$ *è un endomorfismo nilpotente. Inoltre se* $\mathfrak{g}$ *è nilpotente allora tutti gli elementi di* $\mathfrak{g}$ *sono ad-nilpotenti.*

Vale anche il viceversa:

Teorema 1.27 (Teorema di Engel)**.** *[1, Theorem 3.2] Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie. Se tutti gli elementi di* $\mathfrak{g}$ *sono ad-nilpotenti allora* $\mathfrak{g}$ *è nilpotente.*

Osservazione 1.28. È facile per una matrice essere ad-nilpotente in $gl_n(\mathbb{F})$ senza essere nilpotente. Infatti la matrice identità, I_n, offre un esempio di questo comportamento: $(\operatorname{ad} I_n)^k = 0$ per $k = 1$. Inoltre, due esempi diversi di algebre di Lie nilpotenti sono $d_n(\mathbb{F})$ e $n_n(\mathbb{F})$, ovvero l'algebra delle matrici diagonali e quella delle matrici strettamente triangolari superiori.

Capitolo 2

Il Teorema di Lie e il Criterio di Cartan

In questo capitolo V è uno spazio vettoriale finito-dimensionale su un campo $\mathbb{F}$ algebricamente chiuso e di caratteristica 0.

2.1 Il Teorema di Lie e le sue conseguenze

Introduciamo dei sottospazi che generalizzano il concetto di autospazio di un endomorfismo.

Definizione 2.1. *Siano $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, $\pi : \mathfrak{g} \to gl_V$ una sua rappresentazione e $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Il sottospazio $V_\lambda^{\mathfrak{g}} = \{v \in V \mid \pi(a)(v) = \lambda(a)v \text{ per ogni } a \in \mathfrak{g}\}$ è chiamato spazio peso di $\mathfrak{g}$ relativo a λ.*
In particolare, $V_\lambda^{\mathfrak{g}} \neq 0$ se e solo se V contiene un autovettore comune a tutti gli elementi di $\pi(\mathfrak{g})$, con autovalori dati dalla funzione $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$, che chiamiamo peso.

Lemma 2.2 (Lemma di Lie)**.** *Siano π una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su V e $\mathfrak{h}$ un ideale di $\mathfrak{g}$. Allora per ogni $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ gli spazi peso di $\mathfrak{h}$ relativi a λ sono $\pi(\mathfrak{g})$-invarianti, cioè $\pi(\mathfrak{g})(V_\lambda^{\mathfrak{h}}) \subseteq V_\lambda^{\mathfrak{h}}$.*

Dimostrazione. Assumiamo $V_\lambda^{\mathfrak{h}} \neq 0$. Vogliamo provare che per ogni $h \in \mathfrak{h}, g \in \mathfrak{g}, v \in V_\lambda^{\mathfrak{h}}$ si ha:

$$\pi(h)(\pi(g)(v)) = \lambda(h)\pi(g)(v).$$

Utilizziamo l'espressione $xy = yx + [x, y]$ con $x, y \in gl_V$ e il fatto che π sia un omomorfismo per riscrivere l'equazione nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\pi(h)(\pi(g)(v)) &= \pi(g)(\pi(h)(v)) + [\pi(h), \pi(g)](v)\\ &= \pi(g)(\pi(h)(v)) + \pi([h, g])(v).\end{aligned}$$

Poiché $\mathfrak{h}$ è un ideale, $[h, g] \in \mathfrak{h}$ e, a questo punto, possiamo utilizzare la definizione di $V_\lambda^{\mathfrak{h}}$ e semplificare ulteriormente l'equazione:

$$\pi(h)(\pi(g)(v)) = \lambda(h)\pi(g)(v) + \lambda([h, g])v.$$

Ora vogliamo dimostrare che $\lambda([h, g]) = 0$ per ogni $h \in \mathfrak{h}$, per ogni $g \in \mathfrak{g}$.
Prendiamo v un vettore non nullo tale che $v \in V_\lambda^{\mathfrak{h}}$ e un qualunque elemento $g \in \mathfrak{g}$. Sia $m \in \mathbb{N}$ il più piccolo numero tale che i vettori $v, \pi(g)(v), \dots, \pi(g)^{m-1}(v)$ siano linearmente indipendenti, ma $v, \pi(g)(v), \dots, \pi(g)^m(v)$ siano linearmente dipendenti. Allora posto $W_k = span\{v, \pi(g)(v), \dots, \pi(g)^k(v)\}$, otteniamo

$$\pi(g)(W_{m-1}) \subset W_{m-1} = W_m = W_{m+1} = \dots$$

Vogliamo mostrare che per ogni $h \in \mathfrak{h}$, $\pi(h)(W_n) \subset W_n$ per ogni $n < m$ e, inoltre, che la matrice di $\pi(h)$ rispetto alla base $\{v, \pi(g)(v), \dots, \pi(g)^n(v)\}$ è $\begin{pmatrix} \lambda(h) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda(h) \end{pmatrix}$.
Procediamo per induzione su n: per $n = 0$ otteniamo $\pi(h)(v) = \lambda(h)v$ e la matrice è $(\lambda(h))$. Ora assumiamo l'ipotesi induttiva. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\pi(h)\pi(g)^n(v) &= \pi(h)\pi(g)\pi(g)^{n-1}(v)\\ &= (\pi(g)\pi(h) + [\pi(h), \pi(g)])\pi(g)^{n-1}(v)\\ &= \pi(g)\pi(h)\pi(g)^{n-1}(v) + \pi([h, g])\pi(g)^{n-1}(v).\end{aligned}$$

Dato che $[h, g] \in \mathfrak{h}$ il secondo termine $\pi([h, g])\pi(g)^{n-1}(v) \in W_{n-1}$. Per il primo termine usiamo l'ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned}\pi(g)\pi(h)\pi(g)^{n-1}(v) &= \pi(g)(\lambda(h)\pi(g)^{n-1}(v) + c_{n-2}\pi(g)^{n-2}(v) + \dots + c_0 v)\\ &= \lambda(h)\pi(g)^n(v) + c_{n-2}\pi(g)^{n-1}(v) + \dots + c_0\pi(g)(v).\end{aligned}$$

In particolare, abbiamo mostrato che W_{m-1} è invariante sia rispetto a $\pi(h)$ che a $\pi(g)$ e $\pi(h)$ è triangolare superiore su W_{m-1} con $\lambda(h)$ sulla diagonale. Questo mostra che la matrice di $\pi([h, g])$ ristretto a W_{m-1} è triangolare superiore con elementi sulla diagonale tutti uguali tra loro e uguali a $\lambda([h, g])$, ma ogni endomorfismo della forma $\pi([h, g]) = [\pi(h), \pi(g)]$ ha traccia nulla perché $\operatorname{tr}([\pi(h), \pi(g)]) = \operatorname{tr}(\pi(h)\pi(g) - \pi(g)\pi(h)) = 0$ quindi $m\lambda([h, g]) = 0$ cioè $\lambda([h, g]) = 0$ dal momento che $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$. □

Utilizziamo il Lemma di Lie per dimostrare il seguente risultato.

Teorema 2.3 (Teorema di Lie). *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie risolubile e sia $\pi : \mathfrak{g} \to gl_V$ una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ su V. Allora esiste un autovettore $v \in V$ comune a tutti gli operatori $\pi(a)$, con $a \in \mathfrak{g}$, cioè $\pi(a)(v) = \lambda(a)v$ dove $\lambda(a) \in \mathbb{F}, v \neq 0$. (Equivalentemente, esiste un peso $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tale che $V_\lambda^\mathfrak{g} \neq 0$).*

Dimostrazione. Notiamo che $\pi(\mathfrak{g}) \subset gl_V$ è una sottoalgebra di dimensione finita poiché la dimensione di V per ipotesi è finita quindi possiamo assumere che la dimensione di $\mathfrak{g}$ sia finita e procedere per induzione sulla dimensione di $\mathfrak{g}$:
se $n = 1$, cioè $\mathfrak{g} = span\{a\}$ con $a \in \mathfrak{g}$, possiamo scegliere v come qualsiasi autovettore di $\pi(a)$ perché tutti gli autovalori stanno nel campo essendo il campo algebricamente chiuso. Supponiamo di aver provato il teorema per $\dim \mathfrak{g} = n - 1$ e assumiamo $\dim \mathfrak{g} = n$. Dato che $\mathfrak{g}$ è risolubile allora $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subsetneq \mathfrak{g}$; prendiamo un sottospazio $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ di codimensione 1 e contenente $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Osserviamo che $\mathfrak{h}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ perché $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. La $\dim \mathfrak{h} = n - 1$ e un ideale di un'algebra di Lie risolubile è risolubile quindi possiamo applicare l'ipotesi induttiva e trovare $v \in V$ autovettore comune a tutti gli operatori $\pi(h)$, cioè $\pi(h)(v) = \lambda(h)v$ per ogni $h \in \mathfrak{h}$, con $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Per il Lemma di Lie si ha $\pi(g)(V_\lambda^\mathfrak{h}) \subset V_\lambda^\mathfrak{h}$ per ogni $g \in \mathfrak{g}$. Inoltre, possiamo scrivere la seguente decomposizione di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + span\{a\}.$$

Ora basta notare che $\pi(a)(V_\lambda^\mathfrak{h}) \subset V_\lambda^\mathfrak{h}$ e che, essendo $V_\lambda^\mathfrak{h}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo algebricamente chiuso, l'operatore $\pi(a)$ ha un autovettore $v \in V_\lambda^\mathfrak{h}$ che è l'autovettore cercato. □

Osservazione 2.4. Il Lemma di Lie e di conseguenza anche il Teorema di Lie continuano a valere su un campo algebricamente chiuso di caratteristica p, $p > \dim V$. Infatti, l'unico momento in cui abbiamo usato l'ipotesi di $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$ nella dimostrazione del Lemma di Lie è stato quando abbiamo dedotto $\lambda([h, g]) = 0$ dall'identità $m\lambda([h, g]) = 0$, dove m era la dimensione del sottospazio W_{m-1}, argomento che rimane valido anche se $\operatorname{char} \mathbb{F} = p > \dim V > m$.

Introduciamo brevemente l'algebra di Heisenberg che ci sarà utile nel prossimo esempio.

Definizione 2.5. *L'algebra di Heisenberg, denotata con $\mathfrak{H}_n$, è un'algebra di Lie di dimensione $2n + 1$ con base*

$$\{P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n, C\}$$

e operazione definita da

$$[P_i, P_j] = [Q_i, Q_j] = [P_i, C] = [Q_i, C] = [C, C] = 0, \quad [P_i, Q_j] = C\delta_{ij}.$$

Nel seguente esempio mostriamo che l'ipotesi sulla caratteristica è necessaria affinché valga il Teorema di Lie.

Esempio 2.6. Consideriamo la rappresentazione ρ dell'algebra di Heisenberg $\mathfrak{g} = \mathfrak{H}_1$ su $\mathbb{F}[x]$ con $\rho(P) = \frac{d}{dx}$, $\rho(Q) = x$, $\rho(C) = 1$. Supponiamo $\operatorname{char}\mathbb{F} = p > 0$. Allora
$U = \oplus_{j \geq p} span\{x^j\}$ è una sottorappresentazione. Quindi $V = \mathbb{F}[x]/U$ è una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ di dimensione p. Vogliamo mostrare che non esiste un autovettore comune a $\rho(Q)$ e a $\rho(P)$ in V e che quindi il Teorema di Lie non è valido.
Supponiamo $f \in U$ allora $\rho(Q)(f) \in U$. Se $\deg f > p$ allora il grado di $\rho(P)(f)$ è maggiore uguale a p e quindi $\rho(P)(f) \in U$. Se $\deg f = p$, cioè $f = cx^p$ per qualche costante $c \in \mathbb{F}$, otteniamo $\rho(P)(f) = cpx^{p-1} = 0$ perché $\operatorname{char}\mathbb{F} = p$. Quindi U è una sottorappresentazione e il quoziente $V = \mathbb{F}[x]/U$ è una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ di dimensione p. Osserviamo che l'unico autovettore non nullo per $\rho(Q)$ in V è un multiplo scalare di x^{p-1}, ma x^{p-1} non è un autovettore per $\rho(P)$ infatti: $\rho(P)(x^{p-1}) = (p-1)x^{p-2}$. Quindi il Teorema di Lie non è verificato.

Osservazione 2.7. Se $\mathfrak{g}$ è abeliana, con le ipotesi del Lemma di Lie, otteniamo $\lambda([h, g]) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathfrak{h}^*, g, h \in \mathfrak{g}$. Quindi il Lemma di Lie e il Teorema di Lie continuano a valere per $\mathbb{F}$ algebricamente chiuso ma non necessariamente di caratteristica 0.
Se $\mathfrak{g}$ è abeliana allora $[\pi(g), \pi(h)] = 0$ e quindi otteniamo

$$\pi(h)(\pi(g)(v)) = \pi(g)\pi(h)(v) = \lambda(h)(\pi(g)(v))$$

per ogni $h \in \mathfrak{h}, g \in \mathfrak{g}$ e quindi che $\pi(\mathfrak{g})(V_\lambda^{\mathfrak{h}}) \subset V_\lambda^{\mathfrak{h}}$.

Procediamo osservando alcune conseguenze del Teorema di Lie:

Corollario 2.8. *1) Per ogni rappresentazione π di un'algebra di Lie risolubile $\mathfrak{g}$ su V, esiste una base di V rispetto alla quale le matrici di tutti gli operatori $\pi(g)$, $g \in \mathfrak{g}$, sono triangolari superiori.*

2) Una sottoalgebra $\mathfrak{g} \subset gl_V$ è risolubile se e solo se, rispetto ad una base opportuna, le matrici di tutti gli operatori di $\mathfrak{g}$ sono triangolari superiori.

3) Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie risolubile di dimensione finita allora $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è un'algebra di Lie nilpotente.

Dimostrazione. 1) Per il Teorema di Lie esiste un autovettore comune v a tutti gli elementi $\pi(g)$ con $g \in \mathfrak{g}$. Sia $v_1 = v$. Il sottospazio $V_1 = span\{v_1\}$ è $\pi(\mathfrak{g})$-invariante e quindi possiamo considerare la rappresentazione π_{V/V_1} di $\mathfrak{g}$ su V/V_1. Applicando nuovamente il Teorema di Lie, possiamo trovare un autovettore comune $v_2' \in V/V_1$ agli elementi $\pi_{V/V_1}(g)$, $g \in \mathfrak{g}$. Questo vuol dire che se $v_2 \in V$ è preimmagine di v_2' attraverso la proiezione canonica sul quoziente allora $\pi(\mathfrak{g})(v_2) \in V_1 + V_2$, dove $V_2 = span\{v_2\}$. Ora consideriamo $V/(V_1+V_2)$ e costruiamo $v_3 \in V$ nello stesso modo tale che $\pi(\mathfrak{g})(v_3) \in V_1+V_2+V_3$, ecc. Quindi per qualsiasi $a \in \mathfrak{g}$, esistono $v_1, v_2, v_3, \dots \in V$ tali che:

$$\begin{aligned}
&\pi(a)(v_1) \in V_1 \\
&\pi(a)(v_2) \in V_1 + V_2 \\
&\pi(a)(v_3) \in V_1 + V_2 + V_3 \\
&\qquad \dots
\end{aligned}$$

In altre parole, la matrice di $\pi(a)$ è triangolare superiore rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$.
2) Se le matrici di tutti gli operatori $\mathfrak{g}$ sono triangolari superiori rispetto a qualche base allora $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di Lie dell'algebra delle matrici triangolari superiori. Quindi $\mathfrak{g}$ è risolubile.
Viceversa, se $\mathfrak{g} \subset gl_V$ è risolubile allora possiamo applicare il punto *1)* per trovare una base rispetto alla quale tutte le matrici sono triangolari superiori.
3) Consideriamo la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$, ad: $\mathfrak{g} \to gl_{\mathfrak{g}}$. Sappiamo che $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ è abeliano, quindi è un ideale risolubile e $\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$ è risolubile per la Proposizione 1.22. Inoltre, per il Teorema di omomorfismo anche $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ è risolubile. Per provare che $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è un'algebra di Lie nilpotente è sufficiente provare che $\mathrm{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}, \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}]$ è nilpotente grazie al Teorema di Engel. Ma $\mathrm{ad}\;\mathfrak{g} \subset gl_{\mathfrak{g}}$ è una sottoalgebra risolubile e per il punto *2)* per qualche base di $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di matrici triangolari superiori per qualche base di $\mathfrak{g}$. Poiché il commutatore di due matrici triangolari superiori è strettamente triangolare superiore, $\mathrm{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è contenuto nel sottospazio delle matrici strettamente triangolari superiori. Quindi $\mathrm{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è un'algebra di Lie nilpotente perciò anche $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ lo è. □

2.2 La forma di Killing

Per prima cosa vogliamo introdurre alcune forme bilineari simmetriche su $\mathfrak{g}$.

Definizione 2.9. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie e sia π una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ su uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{F}$. Possiamo definire una forma bilineare $t : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$, chiamata forma di traccia, ponendo, per $x, y \in \mathfrak{g}$*

$$t(x, y) = \mathrm{tr}(\pi(x)\pi(y)),$$

dove $\mathrm{tr}(\cdot)$ *è la traccia di una applicazione lineare.*

Osservazione 2.10. La forma di traccia, così definita, è simmetrica poiché $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$ per ogni endomorfismo a, b di V. Inoltre, essa è *invariante*, ossia vale

$$t([x, y], z) = t(x, [y, z])$$

per $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Questa proprietà si dimostra come segue:

$$\begin{aligned}
t([x, y], z) &= \mathrm{tr}(\pi([x, y])\pi(z)) \\
&= \mathrm{tr}([\pi(x), \pi(y)]\pi(z)) \\
&= \mathrm{tr}(\pi(x)\pi(y)\pi(z) - \pi(y)\pi(x)\pi(z)) \\
&= \mathrm{tr}(\pi(x)\pi(y)\pi(z)) - \mathrm{tr}(\pi(y)\pi(x)\pi(z)) \\
&= \mathrm{tr}(\pi(x)\pi(y)\pi(z)) - \mathrm{tr}(\pi(x)\pi(z)\pi(y)) \\
&= \mathrm{tr}(\pi(x)(\pi(y)\pi(z) - \pi(z)\pi(y))) \\
&= \mathrm{tr}(\pi(x)[\pi(y), \pi(z)]) \\
&= t(x, [y, z]).
\end{aligned}$$

Esempio 2.11. Vogliamo mostrare che la forma di traccia è non degenere [1] per la rappresentazione standard di $gl_n(\mathbb{F}), sl_n(\mathbb{F}), so_n(\mathbb{F}), sp_n(\mathbb{F})$.

Dimostrazione. Per prima cosa, definiamo e_{xy} come la matrice elementare $n \times n$ con 1 nel posto xy e 0 altrove. Osserviamo che vale la seguente uguaglianza: $\mathrm{tr}(e_{ij}e_{kl}) = \mathrm{tr}(\delta_{jk}e_{il}) = \delta_{jk}\delta_{il}$, dove δ_{ij} è la funzione delta di Kronecker. Per mostrare che la forma di traccia associata alla rappresentazione standard di un'algebra di Lie $\mathfrak{g} \subset gl_n(\mathbb{F})$ è non degenere è sufficiente mostrare che per ogni $a \in \mathfrak{g}$ si ha $\mathrm{tr}(ab) \neq 0$ per almeno un $b \in \mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g} = gl_n(\mathbb{F})$: Consideriamo un elemento non nullo $A = (a_{ij})$ di $\mathfrak{g}$ e scelti x, y in modo che $a_{xy} \neq 0$ allora $\mathrm{tr}(Ae_{yx}) = a_{xy} \neq 0$.

$\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{F})$: Sia $A = (a_{ij}) \neq 0$ un elemento di $\mathfrak{g}$. Se A non è una matrice diagonale allora è sempre possibile scegliere $x \neq y$ tali che $a_{xy} \neq 0$ e, come prima, si ottiene che $\mathrm{tr}(Ae_{yx}) \neq 0$. Supponiamo ora che A sia una matrice diagonale $A = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ e $A \neq \alpha I_n$ per qualsiasi α (altrimenti $A = 0$). Da questo segue che per qualche $k < n$ si avrà che $b_k \neq b_n$ e calcoliamo $\mathrm{tr}(A(e_{kk} - e_{nn})) = b_k - b_n \neq 0$.

[1] In generale, una forma bilineare $\beta(x, y)$ si dice non degenere se il suo radicale $rad(\beta)$ è 0, dove $rad(\beta) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \beta(x, y) = 0 \text{ per ogni } y \in \mathfrak{g}\}$.

$\mathfrak{g} = so_n(\mathbb{F})$: Scegliamo una base tale che $so_n(\mathbb{F})$ sia l'algebra delle matrici antisimmetriche, cioè $so_n(\mathbb{F}) = \{A \in gl_n(\mathbb{F}) \mid A^T = -A\}$. Dunque una base per $\mathfrak{g}$ sarà $\mathcal{B} = \{e_{ij} - e_{ji} \mid i < j\}$ e per ogni coppia di elementi, b_1, b_2, di $\mathcal{B}$ si avrà $\operatorname{tr}(b_1 b_2) = -2$ se $b_1 = b_2$ oppure $\operatorname{tr}(b_1 b_2) = 0$ se $b_1 \neq b_2$. Allora, considerato un elemento non nullo $A \in \mathfrak{g}$ e presi $x < y$ tali che $a_{xy} \neq 0$, calcoliamo $\operatorname{tr}(A(e_{xy} - e_{yx})) = -2a_{xy} \neq 0$.

$\mathfrak{g} = sp_n(\mathbb{F})$: Osserviamo che, per definizione di $sp_n(\mathbb{F})$, $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Se scegliamo $\left(\begin{smallmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{smallmatrix}\right)$ la matrice relativa alla forma bilineare antisimmetrica allora $\mathfrak{g}$ sarà costituita da tutte le matrici esprimibili nella seguente forma $X = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{smallmatrix}\right)$, dove $A, B, C \in M_m(\mathbb{F})$ e B e C sono simmetriche. Presa $X \in sp_n(\mathbb{F})$ di questa forma, se supponiamo che $B = C = 0$, allora si avrà che $\operatorname{tr}(X \cdot \left(\begin{smallmatrix} D & 0 \\ 0 & -D^T \end{smallmatrix}\right)) = 2\operatorname{tr}(AD)$ e poiché $A \neq 0$ e la forma di traccia è non degenere su $gl_m(\mathbb{F})$ è possibile trovare $D \in gl_m(\mathbb{F})$ tale che $2\operatorname{tr}(AD) \neq 0$. Altrimenti possiamo assumere senza perdita di generalità che $B \neq 0$ allora $\operatorname{tr}(X \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{smallmatrix}\right)) = \operatorname{tr}(BE)$. Vogliamo dunque trovare una matrice simmetrica E tale che $\operatorname{tr}(BE) \neq 0$. Ora, consideriamo una base per le matrici simmetriche di ordine m: $\mathcal{B} = \{e_{ii}\}_{i=1}^m \cup \{e_{ij} + e_{ji} \mid i < j\}$ e osserviamo che se prendiamo $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, $\operatorname{tr}(b_1 b_2) \neq 0$ se e solo se $b_1 = b_2$. Quindi, posto $B = \sum_{b_i \in \mathcal{B}} c_i b_i$ per qualche costante $c_i \in \mathbb{F}$ e fissato k tale che $c_k \neq 0$ si ha $\operatorname{tr}(B \cdot b_k) = c_k \operatorname{tr}(b_k^2) \neq 0$, come richiesto. □

Definizione 2.12. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie finito-dimensionale su un campo $\mathbb{F}$. La forma di Killing $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$ è la forma di traccia $K(a, b) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(a)\operatorname{ad}(b))$, associata alla rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$.*

Proposizione 2.13. *La forma di Killing su $sl_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, è non degenere se e solo se $\operatorname{char}\mathbb{F} \nmid n$.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che K sia non degenere e che $\operatorname{char}\mathbb{F} \mid n$. Allora $\operatorname{tr}(I_n) = n = 0$ su $\mathbb{F}$ e quindi $I_n \in sl_n(\mathbb{F})$ per definizione. Osserviamo però che I_n è ad-nilpotente e quindi per ogni $g \in gl_n(\mathbb{F})$ abbiamo che $K(I_n, g) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} I_n)(\operatorname{ad} g)) = 0$, contraddicendo il fatto che K è non degenere allora $\operatorname{char}\mathbb{F} \nmid n$.
Ora, invece, supponiamo che $\operatorname{char}\mathbb{F} \nmid n$.
In ciò che segue, fissata una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$ di uno spazio vettoriale V e dato un vettore $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ chiamiamo α_i la v_i-componente di v. Sia $\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{F})$ e consideriamo la base $\mathcal{B} = \{e_{ij} \mid i \neq j\} \cup \{e_{ii} - e_{nn} \mid i < n\}$ di $\mathfrak{g}$; se indichiamo con $\{b_1, \dots, b_{n^2-1}\}$ gli elementi di $\mathcal{B}$ allora per ogni $a, b \in \mathfrak{g}$, $K(a, b) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} a)(\operatorname{ad} b))$ è la somma delle b_i-componenti di $(\operatorname{ad} a)(\operatorname{ad} b)b_i$ al variare di i. Sia $a \in \mathfrak{g}$ e, per prima cosa, calcoliamo $K(a, e_{xy})$ per $x \neq y$ e osserviamo che per $[a, [e_{xy}, e_{pq}]]$ la e_{pq}-componente è $\delta_{py} a_{px} + \delta_{xq} a_{yq} = (\delta_{py} + \delta_{xq}) a_{yx}$, e per $[a, [e_{xy}, e_{ii} - e_{nn}]]$ la $(e_{ii} - e_{nn})$-componente è

$(\delta_{iy}(1+\delta_{nx})+\delta_{ix}(1+\delta_{ny}))a_{yx}$, quindi otteniamo

$$\begin{aligned} K(a,e_{xy}) &= \sum_{p\neq q}\sum_{q=1}^{n}(\delta_{py}+\delta_{xq})a_{yx}+\sum_{i=1}^{n-1}(\delta_{iy}(1+\delta_{nx})+\delta_{ix}(1+\delta_{ny}))a_{yx} \\ &= 2(n-1)a_{yx}+(1+\delta_{nx}-\delta_{ny})a_{yx}+(1+\delta_{ny}-\delta_{nx})a_{yx}=2na_{yx}. \end{aligned}$$

Quindi se a non è diagonale possiamo scegliere $x \neq y$ tali che $a_{xy} \neq 0$ e ottenere $K(a,e_{xy}) = 2na_{yx} \neq 0$, dove utilizziamo l'ipotesi che $\operatorname{char}\mathbb{F} \nmid n$ e $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$.
Similmente è possibile fare un ragionamento analogo per $K(a, e_{ii} - e_{nn}) = 2n(a_{ii} - a_{nn})$. Se a è una matrice diagonale allora $a \neq \alpha I_n$ per qualsiasi α altrimenti $a = 0$ oppure $\operatorname{tr}(a) = n\alpha$ con $n, \alpha \neq 0$, ma questo contraddice la definizione di $sl_n(\mathbb{F})$. Dunque esiste un $k < n$ tale che $a_{kk} \neq a_{nn}$ e allora $K(a, e_{kk} - e_{nn}) = 2n(a_{kk} - a_{nn}) \neq 0$. Quindi abbiamo osservato che per ogni elemento non nullo $a \in \mathfrak{g}$ possiamo trovare un elemento b della base $\mathcal{B}$ tale che $K(a, b) \neq 0$, ossia K è non degenere. □

2.3 Il Criterio di Cartan

Introduciamo la decomposizione di Jordan-Chevalley di un endomorfismo.

Definizione 2.14. *Siano V uno spazio vettoriale finito-dimensionale su un campo $\mathbb{F}$ e $x \in End(V)$. Diciamo che x è semisemplice se le radici del polinomio minimo su $\mathbb{F}$ sono tutte distinte. Equivalentemente se $\mathbb{F}$ è algebricamente chiuso, x è semisemplice se e solo se x è diagonalizzabile.*

Osservazione 2.15. Notiamo che due endomorfismi semisemplici che commutano sono simultaneamente diagonalizzabili, ossia esiste una base comune di autovettori per i due operatori lineari. Per questo motivo la somma e la differenza di endomorfismi semisemplici che commutano sono ancora semisemplici.

Proposizione 2.16. *[1][Proposition 4.2] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{F}$ e sia $x \in End(V)$. Valgono le seguenti:*

1. *Esistono unici x_s, $x_n \in End(V)$ tali che $x = x_s + x_n$, dove x_s è semisemplice, x_n è nilpotente e x_s e x_n commutano tra loro.*

2. *Esitono due polinomi $p(t)$ e $q(t)$, privi del termine costante, tali che $x_s = p(x)$ e $x_n = q(x)$. In particolare, x_s e x_n commutano con tutti gli endomorfismi che commutano con x.*

La decomposizione $x = x_s + x_n$ è chiamata decomposizione di Jordan-Chevalley di x e x_s e x_n sono chiamate rispettivamente la parte semisemplice e la parte nilpotente di x.

Osservazione 2.17. Consideriamo la rappresentazione aggiunta di gl_V. Se x è semisemplice allora anche $\operatorname{ad} x$ lo è. Infatti, se considero una base $\{v_1, \ldots, v_k\}$ di V rispetto alla quale la matrice associata a x sia diagonale: $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_k)$, allora $\operatorname{ad} x(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$ la matrice associata ad $\operatorname{ad} x$ relativa alla base $\mathcal{C} = \{e_{ij}\}$ di $gl_n(\mathbb{F})$ è diagonale. Quindi $\operatorname{ad} x$ è semisemplice.

Introduciamo una serie di risultati che ci saranno utili per dimostrare il Criterio di Cartan.

Lemma 2.18. *Siano V spazio vettoriale su $\mathbb{F}$ e $x \in gl_V$ un endomorfismo nilpotente allora* $\operatorname{ad} x$ *è nilpotente.*

Dimostrazione. È possibile associare a x due endomorfismi di $End(V)$, la moltiplicazione a sinistra e la moltiplicazione a destra: $\lambda_x(y) = xy$ e $\rho_x(y) = yx$, che sono nilpotenti poiché x lo è. In aggiunta, λ_x e ρ_x commutano, infatti, $\lambda_x(\rho_x(y)) = xyx = \rho_x(\lambda_x(y))$. Dato che la somma o la differenza di due endomorfismi nilpotenti che commutano è ancora nilpotente allora $\operatorname{ad} x = \lambda_x - \rho_x$ è nilpotente. □

Lemma 2.19. *Siano V spazio vettoriale su $\mathbb{F}$ e $x \in End(V)$. Sia $x = x_s + x_n$ la sua decomposizione di Jordan-Chevalley allora* $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ *è la decomposizione di Jordan-Chevalley di* $\operatorname{ad} x$.

Dimostrazione. Per l'Osservazione 2.17 e il lemma precedente sappiamo che $\operatorname{ad} x_s$ e $\operatorname{ad} x_n$ sono rispettivamente semisemplice e nilpotente. Inoltre, commutano poiché $[\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n] = \operatorname{ad}[x_s, x_n] = 0$ e per il punto *1.* della Proposizione 2.16 abbiamo la tesi. □

Lemma 2.20. *Siano $A \subset B$ due sottospazi di gl_V con V spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Posto $M = \{x \in gl_V | \, [x, B] \subset A\}$ e supposto che $x \in M$ soddisfi* $\operatorname{tr}(xy) = 0$ *per ogni $y \in M$, allora x è nilpotente.*

Dimostrazione. Sia $x \in M$. Per la Proposizione 2.16 esiste la decomposizione di Jordan-Chevalley di x, $x = x_s + x_n$, ed essa è unica; vogliamo mostrare che $x = x_n$, i.e. $x_s = 0$. Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ di V, con $m \in \mathbb{N}$, tale che la matrice associata a x_s relativa a questa base sia diagonale $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_m)$, con $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ autovalori di x_s. Ora consideriamo E un sottospazio vettoriale di $\mathbb{F}$ sul campo $\mathbb{Q}$ e generato dagli autovalori $\{a_1, \ldots, a_m\}$ di x_s. Quindi dobbiamo mostrare che $x_s = 0$ o, equivalentemente, che $E = 0$. Dato che E ha dimensione finita su $\mathbb{Q}$ allora è sufficiente mostrare che lo spazio duale E^* è 0, cioè che ogni funzione lineare $f : E \to \mathbb{Q}$ sia identicamente nulla. Presa $f \in E^*$, sia y un elemento di gl_V tale che la matrice associata a y rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia $\operatorname{diag}(f(a_1), \ldots, f(a_m)))$. Se prendiamo la base $\{e_{ij}\}$ di gl_V allora valgono:

$$\operatorname{ad} x_s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij} \text{ e } \operatorname{ad} y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}.$$

Ora consideriamo un polinomio $p(t) \in \mathbb{F}[t]$, privo del termine costante, che soddisfa l'equazione $p(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$ per ogni coppia di $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. L'esistenza di questo polinomio è assicurata dal teorema di interpolazione di Lagrange [2]. Inoltre, osserviamo che $a_i - a_j = a_k - a_l$ implica che $f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l)$ per linearità. Dunque, per quanto visto sopra, vale $\operatorname{ad} y = p(\operatorname{ad} x_s)$.
Ora osserviamo che $\operatorname{ad} x_s$ è la parte semisemplice di $\operatorname{ad} x$ per il Lemma 2.19 e quindi per la Proposizione 2.16 può essere scritto come un polinomio in $\operatorname{ad} x$ senza termine costante. Inoltre, per ipotesi $\operatorname{ad} x(B) \subset A$ e quindi $\operatorname{ad} y(B) \subset A$, cioè $y \in M$. Utilizzando l'ipotesi del Lemma, $\operatorname{tr}(xy) = 0$, otteniamo che $\operatorname{tr}(xy) = \sum_{i=1}^{m} a_i f(a_i) = 0$, dove il termine di sinistra è una combinazione lineare dei vettori della base di E. A questo punto applichiamo f a destra e a sinistra dell'uguale e per linearità di f otteniamo $\sum_{i=1}^{m} f(a_i)^2 = 0$. Dato che f ha valori in $\mathbb{Q}$ e quindi $\sum_{i=1}^{m} f(a_i)^2 = 0$ è una somma finita di elementi positivi, essi necessariamente devono essere tutti nulli. Per questo motivo f è identicamente nulla. □

Dimostriamo ora un criterio importante per la risolubilità di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ che si basa sulla traccia di certi endomorfismi di $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.21 (Criterio di Cartan)**.** *Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Sia $\mathfrak{g}$ una sottoalgebra di gl_V e tale che $\operatorname{tr}(xy) = 0$ per ogni $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $y \in \mathfrak{g}$, allora $\mathfrak{g}$ è risolubile.*

Dimostrazione. Osserviamo che se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è nilpotente allora $\mathfrak{g}$ è risolubile, perciò è sufficiente mostrare che $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è nilpotente o, equivalentemente, che tutti gli elementi di $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ sono nilpotenti per il Lemma 2.18 e il Teorema di Engel. Per dimostrare questo applichiamo il lemma precedente ponendo $A = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $B = \mathfrak{g}$ e quindi M equivale all'insieme $\{x \in gl_V \,|\, [x, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$. Per costruzione $\mathfrak{g} \subset M$ e per ipotesi vale che $\operatorname{tr}(xy) = 0$ per ogni $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $y \in \mathfrak{g}$, ma per applicare il lemma è necessario mostrare che $\operatorname{tr}(xy) = 0$ per ogni $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $y \in M$. Siano $x, y \in \mathfrak{g}$ e $z \in M$ allora per la proprietà di invarianza della forma di traccia vale $\operatorname{tr}([x, y]z) = \operatorname{tr}(x[y, z]) = \operatorname{tr}([y, z]x)$ e $[y, z] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ per definizione di M e quindi $\operatorname{tr}([x, y]z) = 0$ da cui la tesi. □

Corollario 2.22. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie finito-dimensionale sul campo $\mathbb{F}$ allora $\mathfrak{g}$ è risolubile se e solo se $K(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $K(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ allora per il Criterio di Cartan $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ è risolubile. Per la Proposizione 1.22 $\mathfrak{g}$ è risolubile se $\mathfrak{g}/\operatorname{Z}(\mathfrak{g})$ e $\operatorname{Z}(\mathfrak{g})$ lo sono, cioè se

[2] L'interpolazione di Lagrange è un particolare tipo di interpolazione polinomiale: data una funzione f e $n+1$ punti $x_0, \ldots, x_n$, chiamati nodi, si definisce il polinomio interpolante di Lagrange il polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$.

$\mathfrak{g}/\operatorname{Z}(\mathfrak{g})$ è risolubile poiché $\operatorname{Z}(\mathfrak{g})$ è abeliano e quindi risolubile. Dato che $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}) = \operatorname{Z}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}/\operatorname{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\operatorname{Ker}(\operatorname{ad})$ è risolubile e quindi $\mathfrak{g}$ lo è.
Supponiamo ora che $\mathfrak{g}$ sia risolubile. Allora $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subset gl_{\mathfrak{g}}$ è una sottoalgebra risolubile di $gl_{\mathfrak{g}}$ e per il punto *2)* del Corollario 2.8 esiste una base di $\mathfrak{g}$ rispetto alla quale le matrici associate a tutti gli operatori di $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ sono triangolari superiori. Per questo motivo $\operatorname{ad}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [\operatorname{ad}\mathfrak{g}, \operatorname{ad}\mathfrak{g}]$ è contenuto nel sottospazio delle matrici strettamente triangolari superiori e quindi $K(\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\mathfrak{g}\operatorname{ad}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$. □

Introduciamo una nuova notazione: data un'algebra di Lie su un campo $\mathbb{F}$ non algebricamente chiuso, sia $\overline{\mathbb{F}}$ la chiusura algebrica di $\mathbb{F}$ e sia $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}$.

Proposizione 2.23. *Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è risolubile (rispettivamente nilpotente e abeliana) se e solo se $\overline{\mathfrak{g}}$ lo è, e vale $\overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = [\overline{\mathfrak{g}},\overline{\mathfrak{g}}]$.*

Dimostrazione. Per prima cosa vogliamo dimostrare che prese due algebre di Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ su $\mathbb{F}$ vale $[\overline{\mathfrak{g}},\overline{\mathfrak{h}}] = \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]}$. Osserviamo che $\mathfrak{g} \subset \overline{\mathfrak{g}}$ e $\mathfrak{h} \subset \overline{\mathfrak{h}}$ allora $\overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]} \subset \overline{[\overline{\mathfrak{g}},\overline{\mathfrak{h}}]} = [\overline{\mathfrak{g}},\overline{\mathfrak{h}}]$. Siano $\{g_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una base di $\mathfrak{g}$ e $\{h_\beta\}_{\beta\in J}$ una base di $\mathfrak{h}$, con I, J insiemi degli indici. Notiamo che queste stesse basi generano $\overline{\mathfrak{g}}$ e $\overline{\mathfrak{h}}$ quando combinate con scalari in $\overline{\mathbb{F}}$. Dunque l'insieme $\{[g_\alpha, h_\beta]\}_{\alpha\in I,\beta\in J}$ genera $[\overline{\mathfrak{g}},\overline{\mathfrak{h}}]$ su $\overline{\mathbb{F}}$, ma questo insieme genera anche $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]$ con coefficienti su $\mathbb{F}$, quindi quando estendiamo $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]$ a $\overline{\mathbb{F}}$ otteniamo $[\overline{\mathfrak{g}},\overline{\mathfrak{h}}] \subset \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]}$ e da qui la tesi.
Dall'osservazione precedente, segue facilmente che $\overline{\mathfrak{g}}^i = \overline{\mathfrak{g}^i}$ e che $\overline{\mathfrak{g}}^{(i)} = \overline{\mathfrak{g}^{(i)}}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Allora $\mathfrak{g}$ è risolubile se e solo se $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, ma questo è equivalente a $\overline{\mathfrak{g}^{(n)}} = 0$, ossia $\overline{\mathfrak{g}}^{(n)} = 0$, e quindi $\overline{\mathfrak{g}}$ è risolubile se e solo se $\mathfrak{g}$ lo è.
Si ragiona in modo analogo per $\mathfrak{g}$ nilpotente considerando $\mathfrak{g}^i$ al posto di $\mathfrak{g}^{(i)}$, e per $\mathfrak{g}$ abeliana si considera il caso $n = 1$ della risolubilità. □

Fino a questo punto abbiamo posto come condizione che $\mathbb{F}$ fosse un campo algebricamente chiuso e di caratteristica 0. Ora osserviamo che la richiesta che $\mathbb{F}$ sia algebricamente chiuso non è sempre necessaria.

Lemma 2.24. *Sia $\mathbb{F}$ un campo di caratteristica 0 che non sia necessariamente algebricamente chiuso, siano $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{F}$. Allora valgono le seguenti:*

1. *Il Criterio di Cartan vale su $\mathbb{F}$.*

2. *Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra finito-dimensionale e risolubile allora $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ è nilpotente.*

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo il punto *1.*. Per la proposizione precedente sappiamo che $\mathfrak{g}$ è risolubile se e solo se $\overline{\mathfrak{g}}$ lo è e per il Criterio di Cartan vale che $\overline{\mathfrak{g}}$ è risolubile se e solo se $K(\overline{\mathfrak{g}},[\overline{\mathfrak{g}},\overline{\mathfrak{g}}]) = 0$. Dato che:

$$K(\overline{\mathfrak{g}},[\overline{\mathfrak{g}},\overline{\mathfrak{g}}]) = K(\overline{\mathfrak{g}},\overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]})$$

allora $K(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}) = 0$ se e solo se $K(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$. Per questo motivo il Criterio di Cartan vale anche per $\mathfrak{g}$ su un campo non algebricamente chiuso.
Infine, dimostriamo l'ultimo punto e assumiamo che $\mathfrak{g}$ sia finito-dimensionale e risolubile. Allora $\overline{\mathfrak{g}}$ è finito-dimensionale e risolubile e quindi per il Corollario 2.8 $[\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{g}}]$ è nilpotente. Per la proposizione precedente sappiamo che $[\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{g}}] = \overline{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$, quindi $\overline{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ è nilpotente e quindi anche $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ lo è. $\square$

Capitolo 3

Le algebre di Lie semisemplici

3.1 Definizione e prime proprietà

Introduciamo alcune proprietà delle algebre di Lie risolubili che ci saranno utili in seguito.

Proposizione 3.1. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su un campo $\mathbb{F}$.*

1. *La somma di due ideali di $\mathfrak{g}$ è ancora un ideale di $\mathfrak{g}$.*

2. *La somma finita di ideali risolubili di $\mathfrak{g}$ è ancora un ideale risolubile di $\mathfrak{g}$.*

3. *La somma di una collezione di ideali risolubili di un'algebra di Lie finito-dimensionale è un ideale risolubile.*

4. *La somma di un ideale e di una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$.*

Dimostrazione. 1) Siano $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ due ideali di $\mathfrak{g}$. Un qualsiasi elemento di $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ è del tipo $c_1a + c_2b$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$, $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Sia $g \in \mathfrak{g}$. Allora

$$[g, c_1a + c_2b] = c_1[g, a] + c_2[g, b],$$

dove $[g, a] \in \mathfrak{a}$ e $[g, b] \in \mathfrak{b}$ perché ideali e, quindi, otteniamo la tesi.
2) Per dimostrare questo punto è sufficiente mostrare che la somma di due ideali risolubili, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$, è ancora un ideale risolubile e poi procedere per induzione. Per prima cosa osserviamo che $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ è un ideale grazie al punto 1). Ponendo $\mathfrak{a}^{(m)} = \mathfrak{b}^{(n)} = 0$ per qualche $m, n \in \mathbb{N}$ per ipotesi allora $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{(m+n)}$ è costituito da elementi che sono la somma di termini del tipo

$$[a_{m+n} + b_{m+n}, [a_{m+n-1} + b_{m+n-1}, [\dots [a_2 + b_2, a_1 + b_1] \dots].$$

Dato che $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono ideali ogni addendo sta in $\mathfrak{a}^{(m)}$ oppure in $\mathfrak{b}^{(n)}$ a seconda se ci sono almeno m termini di $\mathfrak{a}$ o almeno n termini di $\mathfrak{b}$. Quindi ogni termine è zero allora otteniamo $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{(m+n)} = 0$.
3) Ora assumiamo che $\mathfrak{g}$ sia finito-dimensionale e consideriamo gli ideali risolubili come sottospazi vettoriali. Osserviamo che $\sum_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$ è un sottospazio che contiene ogni $\mathfrak{a}_\alpha$, ideale risolubile di $\mathfrak{g}$, e dimostriamo che è possibile trovare una sottocollezione finita $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$, $n \in \mathbb{N}$, di ideali risolubili di $\mathfrak{g}$ tale che

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \sum_\alpha \mathfrak{a}_\alpha.$$

Dunque prendiamo un ideale non vuoto $\mathfrak{a}_1$. Se $\mathfrak{a}_1 = \sum_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$ abbiamo concluso, altrimenti prendiamo un altro ideale $\mathfrak{a}_2$ che non è contenuto in $\mathfrak{a}_1$. Se $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \sum_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$ abbiamo concluso, altrimenti ripetiamo il processo. A ogni passo la dimensione di $\sum_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$ aumenta almeno di 1 e, poiché è contenuto in uno spazio finito-dimensionale $\mathfrak{g}$, il processo termina in un numero finito di passi. A questo punto ci riconduciamo al punto 2).
4) Siano $\mathfrak{a}$ un ideale e $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$, siano $a_1, a_2 \in \mathfrak{a}$, $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$ e $c_i \in \mathbb{F}$ con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Allora

$$[c_1a_1 + c_2h_1, c_3a_2 + c_4h_2] = c_1[a_1, c_3a_2 + c_4h_2] + c_2c_3[h_1, a_2] + c_2c_4[h_1, h_2].$$

I primi due termini sono contenuti nell'ideale, mentre il terzo termine è contenuto nella sottoalgebra. Possiamo concludere che la somma di un ideale e di una sottoalgebra è, infatti, una sottoalgebra. Le altre proprietà si possono verificare tramite un semplice calcolo e seguono immediatamente dalla bilinearità. □

Consideriamo ora $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie finito-dimensionale e $\mathfrak{h}$ un ideale risolubile massimale che sappiamo essere unico grazie al punto *1)* della Proposizione 3.1. Questo ideale massimale viene chiamato radicale e denotato con $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$. Il radicale risulterà uno strumento essenziale per descrivere le algebre finito-dimensionali.

Definizione 3.2. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie non nulla finito-dimensionale, se* $\operatorname{Rad}\mathfrak{g} = 0$ *allora $\mathfrak{g}$ è detta semisemplice, ossia non contiene ideali risolubili non nulli. Equivalentemente, $\mathfrak{g}$ è semisemplice se non contiene ideali abeliani non nulli.*
L'equivalenza può essere spiegata come segue: se $\mathfrak{g}$ contiene un ideale abeliano non nullo allora contiene un ideale risolubile non nullo poiché gli ideali abeliani sono risolubili. Viceversa, se $\mathfrak{g}$ possiede un ideale risolubile non nullo $\mathfrak{h}$ allora $\mathfrak{h}^{(n)} = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ allora $\mathfrak{h}^{(n-1)}$ è un ideale abeliano non nullo.

Osservazione 3.3. Notiamo che un'algebra semplice è semisemplice perché non possiede ideali non banali.

Proposizione 3.4. *Per un'algebra di Lie finito-dimensionale* $\mathfrak{g}$*,* $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ *è un'algebra di Lie semisemplice.*

Dimostrazione. Siano $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$ e sia $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ la proiezione canonica sul quoziente. Indichiamo con $\overline{g_1}, \overline{g_2}$ le immagini di g_1, g_2 in $\overline{\mathfrak{g}}$ attraverso π. Vogliamo dimostrare che $\overline{[g_1, g_2]} = [\overline{g_1}, \overline{g_2}]$. Questo è abbastanza immediato perché $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ è un ideale e, quindi, prendendo diversi rappresentanti h_1 di $\overline{g_1}$ e h_2 di $\overline{g_2}$ e calcolando $[h_1, h_2]$ otteniamo un elemento che differisce da $[g_1, g_2]$ per un elemento del radicale di $\mathfrak{g}$.
Sia $\overline{m}$ un ideale risolubile di $\overline{\mathfrak{g}}$ e sia m la sua preimmagine in $\mathfrak{g}$ attraverso π allora, per quanto abbiamo già dimostrato, sappiamo che $[\overline{m}, \overline{m}] = \overline{[m, m]}$. Applicando questo ripetutamente osserviamo che $\overline{m}$ è risolubile se e solo se $m^{(n)} \subset \operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Essendo $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ risolubile allora anche m lo è e, per definizione di radicale, vale $m \subset \operatorname{Rad}\mathfrak{g}$. Per questo motivo $\overline{m} = 0$ e quindi $\overline{\mathfrak{g}}$ è semisemplice. □

3.2 Il Teorema di Levi e le sue conseguenze

Poniamo V uno spazio finito-dimensionale sul campo $\mathbb{F}$ di caratteristica 0.

Definizione 3.5. *Data la tripla* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{s}, \phi)$*, con* $\mathfrak{h}, \mathfrak{s}$ *algebre di Lie e* ϕ *un omomorfismo* $\mathfrak{h} \to \operatorname{Der}\mathfrak{s}$*, definiamo la somma semi-diretta di* $\mathfrak{h}$ *e di* $\mathfrak{s}$ *come l'algebra di Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{s}$ *tale che:*

- $\mathfrak{g}$ *è una somma diretta di spazi vettoriali* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$*.*
- *Il commutatore di due elementi di* $\mathfrak{h}$ *è ancora in* $\mathfrak{h}$ *e il commutatore di due elementi in* $\mathfrak{s}$ *è ancora in* $\mathfrak{s}$*.*
- *Il commutatore* $[h, s]$*, con* $h \in \mathfrak{h}$ *e* $s \in \mathfrak{s}$*, è definito come* $\phi(h)(s)$*.*

In particolare, $\mathfrak{s}$ *è un ideale di* $\mathfrak{g}$*.*

Mostriamo che la definizione appena data è ben posta con il seguente lemma.

Lemma 3.6. *La somma semi-diretta* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{s}$ *come definita sopra è un'algebra di Lie.*

Dimostrazione. Osserviamo che la bilinearità e l'anticommutatività seguono direttamente dalla definizione, allora ci resta da verificare solo l'identità di Jacobi. Siano $h_1 \in \mathfrak{h}$ e $s_1, s_2 \in \mathfrak{s}$ e verifichiamo l'identità di Jacobi per questi elementi:

$$[h_1, [s_1, s_2]] = [[h_1, s_1], s_2] + [s_1, [h_1, s_2]].$$

Si ha: $[h_1, [s_1, s_2]] = \phi(h_1)([s_1, s_2])$, mentre $[[h_1, s_1], s_2] + [s_1, [h_1, s_2]] = [\phi(h_1)(s_1), s_2] + [s_1, \phi(h_1)(s_2)]$. Allora l'uguaglianza è verificata poiché $\phi(h_1) \in \operatorname{Der}\mathfrak{s}$. □

Osservazione 3.7. In particolare, osserviamo che se $\phi = 0$ allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{s}$ è la somma diretta di $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{s}$. Per questo motivo, notiamo che la classificazione delle algebre di Lie finito-dimensionali su un campo di caratteristica zero si riconduce allo studio di tre oggetti:

- Le algebre di Lie semisemplici finito-dimensionali.
- Le algebre di Lie risolubili finito-dimensionali.
- Per $\mathfrak{h}$ semisemplice, $\mathfrak{s}$ risolubile, gli omomorfismi $\phi : \mathfrak{h} \to \operatorname{Der} \mathfrak{s}$.

Il seguente teorema ci permette di studiare le algebre di Lie finito-dimensionali attraverso oggetti più semplici:

Teorema 3.8 (Teorema di Levi)**.** *Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie finito-dimensionale su $\mathbb{F}$ allora esiste una sottoalgebra semisemplice $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ tale che*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \operatorname{Rad} \mathfrak{g},$$

come somma di spazi vettoriali.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione sulla dimensione di $\mathfrak{g}$ e solo nel caso di $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ non abeliano, i.e. $[\operatorname{Rad} \mathfrak{g}, \operatorname{Rad} \mathfrak{g}] \neq 0$. Consideriamo $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/[\operatorname{Rad} \mathfrak{g}, \operatorname{Rad} \mathfrak{g}]$ e dato che $\dim \overline{\mathfrak{g}} < \dim \mathfrak{g}$ per ipotesi induttiva esiste una sottoalgebra semisemplice $\overline{\mathfrak{h}} \subset \overline{g}$ tale che $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{h}} + \operatorname{Rad} \overline{\mathfrak{g}}$. Dunque, presa $\mathfrak{g}_1$ in $\mathfrak{g}$ la preimmagine di $\overline{\mathfrak{h}}$ attraverso la proiezione canonica allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \operatorname{Rad} \mathfrak{g}$. Osserviamo che $\dim \mathfrak{g}_1 < \dim \mathfrak{g}$ e quindi possiamo applicare l'ipotesi induttiva su $\mathfrak{g}_1$ e ottenere $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} + \operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1$, dove $\mathfrak{h}$ è semisemplice. Sostituendo abbiamo $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + (\operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1 + \operatorname{Rad} \mathfrak{g})$, dove $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1$ è una sottoalgebra di $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}$. Ora osserviamo che $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1 + \operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ è un ideale risolubile di $\mathfrak{g}$.
Presi un elemento qualsiasi di $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1 + \operatorname{Rad} \mathfrak{g}$, $a + b$ con $a \in \operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1$ e $b \in \operatorname{Rad} \mathfrak{g}$, e un elemento di $\mathfrak{g}$, $c + d$ dove $c \in \mathfrak{g}_1$ e $d \in \operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ allora

$$\begin{aligned}[a + b, c + d] &= [a, c + d] + [b, c + d] \\ &= [a, c] + [a, d] + [b, c + d].\end{aligned}$$

Dato che $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1$ è un ideale di $\mathfrak{g}_1$ allora $[a, c] \in \operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1$, $[a, d], [b, c + d] \in \operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ poiché è un ideale di $\mathfrak{g}$. Ora osserviamo che $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1 + \operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ è risolubile. Dato che $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ e $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ allora $(\operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1 + \operatorname{Rad} \mathfrak{g})^{(p)} \subset \operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1^{(p)} + \operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ per qualche $p \in \mathbb{N}$. Quindi, se $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1^{(n)} = 0$ e $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}^{(m)} = 0$ per qualche $n, m \in \mathbb{N}$ allora $(\operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1 + \operatorname{Rad} \mathfrak{g})^{(mn)} = 0$. Dunque $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}_1 + \operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ è un ideale risolubile di $\mathfrak{g}$ che contiene $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}$, ma per massimalità del radicale esso coincide con $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}$, da cui

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \operatorname{Rad} \mathfrak{g}.$$

Nel caso generale facciamo riferimento al testo *Lie Groups: Beyond an Introduction* di A. W. Knapp. □

Osservazione 3.9. Notiamo che la somma di spazi vettoriali del Teorema di Levi è una somma diretta poiché $\mathfrak{h} \cap \operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ è contenuto in $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ e per questo motivo risolubile, ma poiché è contenuto anche in $\mathfrak{h}$, che è semisemplice, deve necessariamente essere 0. In effetti si tratta di una somma semi-diretta in cui l'omomorfismo

$$\mathfrak{h} \to \operatorname{Der}(\operatorname{Rad} \mathfrak{g}),$$

è definito da

$$h \to \operatorname{ad} h|_{\operatorname{Rad} \mathfrak{g}}.$$

Esempio 3.10. Sia $\mathfrak{g} \subset gl_{m+n}(\mathbb{F})$ l'algebra di Lie che consiste di tutte le matrici della forma

$$g = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & c \end{array}\right),$$

con $a \in gl_m(\mathbb{F})$, $c \in gl_n(\mathbb{F})$, e $b \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. Ora vogliamo trovare il radicale di $\mathfrak{g}$ e un suo complementare $\mathfrak{h}$ e descrivere l'omomorfismo $\phi : \mathfrak{h} \to \operatorname{Der}(\operatorname{Rad} \mathfrak{g})$.
Osserviamo che dalla moltiplicazione

$$\left[\left(\begin{array}{c|c} a_0 & b_0 \\ \hline 0 & c_0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ \hline 0 & c_1 \end{array}\right)\right] = \left(\begin{array}{c|c} [a_0, a_1] & * \\ \hline 0 & [c_0, c_1] \end{array}\right),$$

se esiste un ideale $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ di $\mathfrak{g}$ allora l'insieme degli elementi che appaiono nel blocco "a" deve essere un ideale di $gl_m(\mathbb{F})$ e l'insieme degli elementi del blocco "c" deve essere un ideale di $gl_n(\mathbb{F})$. In più, poiché $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ è risolubile allora anche questi ideali devono esserlo. Nell'esempio 3.12 dimostreremo che l'ideale risolubile massimale di $gl_m(\mathbb{F})$ è il sottospazio delle matrici scalari, ma per adesso assumiamo che questo sia vero e dimostriamo che $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ non ha altre restrizioni oltre a questa. In particolare $\operatorname{Rad} \mathfrak{g}$ consiste di tutte le matrici della forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & b \\ \hline 0 & \mu I_n \end{array}\right),$$

per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, e $b \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. Per prima cosa vogliamo mostrare che questa sottoalgebra è un ideale, infatti si ha:

$$\left[\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_m & b_1 \\ \hline 0 & \mu_1 I_n \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & c \end{array}\right)\right] = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Con un calcolo simile si osserva che esso è un ideale risolubile:

$$\left[\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_m & b_1 \\ \hline 0 & \mu_1 I_n \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 I_m & b_2 \\ \hline 0 & \mu_2 I_n \end{array}\right)\right] = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si nota che le matrici dell'algebra derivata sono tutte triangolari strettamente superiori, e per questo motivo la nostra sottoalgebra è risolubile. Come complementare $\mathfrak{h}$ consideriamo l'insieme delle matrici del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c} d & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right),$$

con $d \in sl_m(\mathbb{F})$ ed $e \in sl_n(\mathbb{F})$. Notiamo che $\mathfrak{h}$ è semisemplice e calcolando il bracket possiamo osservare che

$$\phi : \mathfrak{h} \to \mathrm{Der}(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g})$$
$$\left(\begin{array}{c|c} d & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right) \to \phi_{d,e}$$

dove

$$\phi_{d,e} : \left(\begin{array}{c|c} \lambda & b \\ \hline 0 & \mu \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & db - be \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Teorema 3.11. *Siano $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie finito-dimensionale su $\mathbb{F}$, algebricamente chiuso e di caratteristica 0, e π una rappresentazione irriducibile finito-dimensionale di $\mathfrak{g}$ su V allora vale una delle seguenti:*

- *$\mathfrak{g}$ è semisemplice;*
- *$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus span\{I_V\}$, dove $\mathfrak{h}$ è semisemplice e I_V indica l'identità su V.*

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio peso

$$V_\lambda^{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}} = \{v \in V \,|\, a.v = \lambda(a)v \text{ per ogni } a \in \mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}\}.$$

Dato che $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ è risolubile il Teorema di Lie ci assicura l'esistenza di un autovettore comune non nullo a per tutti gli operatori di $\pi(\mathfrak{g})$. Per questo motivo lo spazio peso $V_\lambda^{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}}$ contiene almeno un elemento a non nullo per qualche $\lambda \in (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g})^*$.
Per il Lemma di Lie, $V_\lambda^{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}}$ è invariante rispetto a $\pi(\mathfrak{g})$ e, dunque, per ipotesi possiamo concludere che, essendo $V_\lambda^{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}} \neq 0$, $V_\lambda^{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}} = V$ quindi, necessariamente $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} = 0$ oppure $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} = span\{I_V\}$. Nel primo caso, $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ è 0 e quindi l'algebra è semisemplice. Nel secondo caso, invece, indicata con $\mathfrak{h}$ un'algebra di Lie complementare, essa è semisemplice per il Teorema di Levi e, in questo caso, la somma è diretta poiché $span\{I_V\} \subset \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ allora $span\{I_V\}$ è un ideale risolubile, ma $\mathfrak{h}$ è semisemplice quindi $\mathfrak{h} \cap span\{I_V\} = 0$ e dunque abbiamo la tesi. □

Esempio 3.12. Il Teorema 3.11 nel caso della rappresentazione standard di gl_V fornisce la decomposizione

$$gl_V = sl_V \oplus span\{I_V\}.$$

Questa equazione segue dal fatto che sl_V è un ideale di gl_V e l'intersezione con $span\{I_V\}$ è vuota e la somma delle loro dimensioni è la dimensione di gl_V ($\dim sl_V = n^2 - 1$). Dunque per il teorema appena dimostrato possiamo assumere che sl_V sia semisemplice e che $span\{I_V\}$ sia il radicale di gl_V. Osserviamo che questo risultato non è valido nel caso in cui la caratteristica del campo sia $p > 0$ e p divida la dimensione di V perché in questo caso le matrici scalari hanno traccia nulla.

Esempio 3.13. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{F}$ algebricamente chiuso e di caratteristica 0. Mostriamo che $sp_n(\mathbb{F})$ è sempre semisemplice.

Per prima cosa consideriamo $sp_n(\mathbb{F})$, e sia $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, altrimenti la forma è degenere. Sia β una forma bilineare antisimmetrica non degenere su V tale che la matrice B associata alla forma bilineare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_{2m}\}$ sia $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_m \\ \hline -I_m & 0 \end{array}\right)$ e $X \in sp_n(\mathbb{F})$ verifica la condizione $BX + X^T B = 0$. Allora $sp_n(\mathbb{F})$ sarà costituita da tutte le matrici esprimibili nella seguente forma

$$X = \left(\begin{array}{c|c} L & M \\ \hline N & -L^T \end{array}\right),$$

dove ogni blocco ha dimensione $m \times m$ e M e N sono simmetriche. Presa $A \in sp_n(\mathbb{F})$, $A = (a_{ij})$, di questa forma e dato che gli elementi sulla antidiagonale sono arbitrari è chiaro che se v è un vettore con nessuna componente nulla allora possiamo mandare v in qualsiasi altro vettore w scegliendo opportuni elementi dell'antidiagonale e tutti gli altri nulli. Consideriamo ora un vettore v con $v_i = 0$, e $v_j \neq 0$ e prendiamo una matrice di $sp_n(\mathbb{F})$ tale che $a_{ij} = 1$. Se $i + j = n + 1$ allora tutti gli altri coefficienti della matrice scelta sono nulli. Altrimenti poniamo -1 il coefficiente necessario affinché sia ancora valida l'equazione $BA + A^T B = 0$ e tutti i restanti nulli. Osserviamo che nel secondo caso il coefficiente di valore -1 dovrà essere in una riga differente dal coefficiente di valore 1. Quindi, in entrambi i casi, la matrice mapperà il vettore v nel vettore w, tale che $w_i = v_j \neq 0$. Ripetendo questo ragionamento e considerando le combinazioni lineari delle matrici sopra citate osserviamo che ogni sottospazio invariante contenente v contiene anche un altro elemento non nullo e, per quanto detto sopra, questo sottospazio deve necessariamente essere tutto V. Dato che abbiamo supposto che la caratteristica del campo sia diversa da 2 e, quindi $sp_n(\mathbb{F})$ non contiene le matrici scalari, allora per il teorema precedente $sp_n(\mathbb{F})$ è semisemplice.

Teorema 3.14. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie finito-dimensionale su $\mathbb{F}$ allora $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e solo se la sua forma di Killing è non degenere.*

Dimostrazione. Supponiamo che la forma di Killing sia non degenere. Per mostrare che $\mathfrak{g}$ è semisemplice mostriamo che non esistono ideali risolubili massimali o, equivalentemente, che $\mathfrak{g}$ non contiene ideali abeliani non nulli. Dunque, consideriamo un ideale abeliano $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ e mostriamo che $\mathfrak{h} = 0$. Ora, osserviamo che per $h \in \mathfrak{h}$,

$$\operatorname{ad} h : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$$

e l'immagine di $\mathfrak{h}$ attraverso $\operatorname{ad} h$ è 0 perché $\mathfrak{h}$ è abeliano. Similmente per $g \in \mathfrak{g}$ si ha $\operatorname{ad} g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ e l'immagine di $\mathfrak{h}$ attraverso questa funzione è $\mathfrak{h}$ perché $\mathfrak{h}$ è un ideale. Allora possiamo scrivere $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, dove $\mathfrak{a}$ è un complementare di $\mathfrak{h}$ e per quanto appena osservato possiamo scrivere le matrici associate ad $\operatorname{ad} h$ e $\operatorname{ad} g$ rispetto a una base $\mathcal{B}$:

$$\text{ad } h = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\text{ad } g = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right).$$

Il prodotto di queste due matrici è una matrice triangolare strettamente superiore e $K(h, g) = 0$. Dato che abbiamo preso $g \in \mathfrak{g}$ arbitrario e supposto che la forma di Killing sia non degenere allora $\mathfrak{h} = 0$ e quindi abbiamo la tesi.
Ora assumiamo che $\mathfrak{g}$ sia semisemplice e consideriamo l'insieme

$$\mathfrak{r} = \{a \in \mathfrak{g} : K(a, \mathfrak{g}) = 0\}.$$

Osserviamo che $\mathfrak{r}$ è un ideale: siano $r \in \mathfrak{r}, g \in \mathfrak{g}$ allora $[r, g] \in \mathfrak{r}$ se e solo se $K([r, g], \mathfrak{g}) = 0$, ossia

$$K([r, g], \mathfrak{g}) = K(r, [g, \mathfrak{g}]) = 0$$

per la proprietà della forma di traccia. Considerando la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{r}$ in $gl_{\mathfrak{g}}$ e il corollario del Criterio di Cartan si ha che $\operatorname{ad} \mathfrak{r}$ è risolubile. Quindi per definizione $(\operatorname{ad} \mathfrak{r})^{(\mathfrak{m})} = 0$, per qualche $m \in \mathbb{N}$, e quindi $\mathfrak{r}^{(m)}$ è contenuto nel centro di $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{r}^{(m+1)} = 0$ e questo implica che $\mathfrak{r}$ è risolubile, ossia $\mathfrak{r} = 0$ poiché $\mathfrak{g}$ è semisemplice e la forma di Killing è non degenere. □

Introduciamo un risultato utile alla dimostrazione del prossimo teorema.

Proposizione 3.15. *Se V è uno spazio vettoriale finito-dimensionale dotato di una forma bilineare simmetrica non degenere β e un sottospazio U sul quale β sia non degenere allora $V = U \oplus U^{\perp}$, dove*

$$U^{\perp} = \{v \in V \,|\, \beta(v, u) = 0 \text{ per ogni } u \in U\}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $U \cap U^\perp = \{u \in U | \, \beta(u, u') = 0 \text{ per ogni } u' \in U\}$ e questo insieme coincide con il radicale di $\beta|_U$, ma dato che per ipotesi β ristretta a U è non degenere allora per definizione $U \cap U^\perp = 0$. Inoltre, $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ e quindi si ha la tesi. □

Definizione 3.16. *Una derivazione d di $\mathfrak{g}$ si dice interna se $d \in \operatorname{ad} \mathfrak{g}$.*

Teorema 3.17. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie finito-dimensionale. Se la forma di Killing su $\mathfrak{g}$ è non degenere allora il centro $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ di $\mathfrak{g}$ è nullo e tutte le derivazioni di $\mathfrak{g}$ sono interne. (In particolare, per il teorema precedente questo vale per un'algebra di Lie semisemplice su $\mathbb{F}$.)*

Dimostrazione. Per prima cosa mostriamo che il centro è zero. Sia $c \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ allora $\operatorname{ad} c = 0$ e, quindi, la forma di Killing è la seguente:

$$K(c, a) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} c)(\operatorname{ad} a)) = 0,$$

con $a \in \mathfrak{g}$. Dato che la forma è non degenere allora $c = 0$ e $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = 0$.
Ora vogliamo mostrare che le derivazioni sono interne, ossia che $\operatorname{ad} \mathfrak{g} = \operatorname{Der} \mathfrak{g}$. Sia, quindi,

$$\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to gl_{\mathfrak{g}}$$

la rappresentazione aggiunta e poiché abbiamo visto che $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}) = \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ allora l'omomorfismo è iniettivo. Per definizione la forma di Killing su $\mathfrak{g}$ è la forma di traccia su $gl_{\mathfrak{g}}$ e la sua restrizione ad $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ è non degenere per ipotesi. Ora definiamo il seguente insieme $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp = \{\delta \in \operatorname{Der} \mathfrak{g} | \, t(\delta, g) = 0 \text{ per ogni } g \in \operatorname{ad} \mathfrak{g}\}$ e vogliamo applicare la proposizione precedente; dunque otteniamo $\operatorname{Der} \mathfrak{g} = \operatorname{ad} \mathfrak{g} \oplus (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp$, come somma diretta di spazi vettoriali. Inoltre, sappiamo che $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ è un ideale di $\operatorname{Der} \mathfrak{g}$ e anche $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp$ è un ideale di $\operatorname{Der} \mathfrak{g}$ poiché la forma di traccia gode della proprietà di invarianza. Infatti, per ogni $g \in \operatorname{ad} \mathfrak{g}, \lambda \in (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp$ e $\delta \in \operatorname{Der} \mathfrak{g}$ vale $t(\lambda, [g, \delta]) = 0$ perché $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ è un ideale e $t([\lambda, \delta], g) = t(\lambda, [g, \delta]) = 0$ quindi $[\lambda, \delta] \in (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp$. Dunque la nostra somma diretta non è solamente una somma diretta di spazi vettoriali, ma anche una somma diretta di ideali e, per questo, si ha che $[\operatorname{ad} \mathfrak{g}, (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp] = 0$. Questo significa che se $\delta \in (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp$ allora $\operatorname{ad}(\delta g) = [\delta, \operatorname{ad} g] = 0$ per ogni $g \in \mathfrak{g}$, ma necessariamente $\delta g = 0$ perché ad è iniettiva e quindi $\delta = 0$. In conclusione $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp = 0$ e $\operatorname{ad} \mathfrak{g} = \operatorname{Der} \mathfrak{g}$. □

Con il seguente esempio vogliamo mostrare che non vale il viceversa del teorema appena dimostrato.

Esempio 3.18. Le derivazioni di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ non abeliana di dimensione due sono interne, ma la forma di Killing è degenere.

Dimostrazione. Innanzitutto, osserviamo che esiste un'unica algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di dimensione 2 non abeliana a meno di isomorfismi. Questa algebra di Lie ha base $\mathcal{B} = \{x, y\}$ e il suo bracket è definito nel seguente modo: $[x, y] = x$. Per prima cosa mostriamo che le derivazioni sono tutte interne, ossia $\operatorname{ad} \mathfrak{g} = \operatorname{Der} \mathfrak{g}$.
Sia D una derivazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Sappiamo che

$$\begin{aligned} D(x) &= D([x, y]) \\ &= [D(x), y] + [x, D(y)]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Poniamo $D(x) = \alpha_1 x + \beta_1 y$ e $D(y) = \alpha_2 x + \beta_2 y$ con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}$. Allora possiamo riscrivere l'equazione (3.1) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y &= [\alpha_1 x + \beta_1 y, y] + [x, \alpha_2 x + \beta_2 y] \\ &= [\alpha_1 x, y] + [x, \beta_2 y] \\ &= \alpha_1 x + \beta_2 x. \end{aligned}$$

Dunque otteniamo che $\beta_1 y = \beta_2 x$, ossia $\beta_1 = \beta_2 = 0$, cioè $D(x) = \alpha_1 x$ e $D(y) = \alpha_2 x$. Possiamo scrivere la matrice associata a D relativa alla base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora vogliamo determinare $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$. Sia $v = \gamma_1 x + \delta_1 y \in \mathfrak{g}$ e calcoliamo

$$\operatorname{ad} v(x) = \operatorname{ad}(\gamma_1 x + \delta_1 y)(x) = \delta_1 \operatorname{ad} y(x) = -\delta_1 x$$

e

$$\operatorname{ad} v(y) = \gamma_1 \operatorname{ad} x(y) + \delta_1 \operatorname{ad} y(y) = \gamma_1 x,$$

sostituendo $-\delta_1$ con δ_1' otteniamo $\operatorname{ad} v(x) = \delta_1' x$. Osserviamo, quindi, che la matrice associata ad $\operatorname{ad} v$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la seguente:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\operatorname{ad} v) = \begin{pmatrix} \delta_1' & \gamma_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\delta_1', \gamma_1 \in \mathbb{F}$. Dunque, $\operatorname{Der} \mathfrak{g}$ e $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ sono lo stesso spazio vettoriale, ossia tutte le derivazioni sono interne.
Inoltre, notiamo che il centro della nostra algebra è banale poiché nessun elemento commuta con tutti gli elementi di $\mathfrak{g}$. Dato che $\operatorname{ad} x(x) = 0$ e $\operatorname{ad} x(y) = x$ la matrice associata ad $\operatorname{ad} x$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sarà

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\operatorname{ad} x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mentre $\operatorname{ad} y(x) = -x$ e $\operatorname{ad} y(y) = 0$ allora la matrice associata ad $\operatorname{ad} y$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sarà

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\operatorname{ad} y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi se calcoliamo la forma di Killing di x e y otteniamo che $K(x, y) = K(x, x) = 0$, ossia la forma di Killing è degenere. $\square$

Bibliografia

[1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Prima edizione. Springer: New York, 1972.

[2] K. Erdmann, M. J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*. Prima edizione, seconda stampa. Springer: Londra, 2007.

[3] Z. Wu, Note del corso *Lie Algebras* del professore Victor Kac (MIT, 2004).

[4] S. Sivek, Note del corso *Lie Algebras* del professore Victor Kac (MIT, 2004).

[5] C. Davis, Note del corso *Lie Algebras* del professore Victor Kac (MIT, 2004).

[6] K. McGerty, Note del corso *Lie Algebras* (University of Oxford).

[7] P. Woit, Appunti del corso *Lie Groups and Representation* del professore Peter Woit (Columbia University, 2013).

[8] A. W. Knapp, *Lie Groups: Beyond an Introduction*. Seconda edizione. Birkhauser: 2002, pp.659.