N 2.

$$\begin{pmatrix} 3x & 6 & 9 \\ -3 & 3y & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 \\ 4 & -12 & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x+2 & 10 & -1 \\ 1 & 3y-12 & 12+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$\cancel{3x+2 = 8}$

$\cancel{3y : 6 + 3y - 12 = v}$

$\cancel{3 + 2z + 8 = -1}$

$\cancel{-3}$

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ 2y = v+6 \\ -10z = -4 \\ 2y + 16z = 9 \\ \cancel{1+12=13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3{,}4 \\ z = 0{,}4 \\ v = 2 \end{cases} \leftarrow \text{ОТВЕТ}$$

№1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$D = A^T C - 2A^T B^T$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $A^T C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 12+12-8 & -6-15-1 & 18+6-5 \\ -24+20+0 & 12-25+0 & -36+10+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 16 & -22 & 19 \\ -4 & -13 & -26 \end{pmatrix}}$$

2) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -8 & 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4+12-14 & -12-24+0 & 20+12-2 \\ -8+20+0 & +24-40+0 & -40+20+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -36 & 30 \\ 12 & -16 & -20 \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} 16 & -22 & 19 \\ -4 & -13 & -26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -36 & 30 \\ 12 & -16 & -20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 14 & -11 \\ -16 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$ — ОТВЕТ

№4

Чтобы показать, что данное мн.-во образует

4х мерное линейное пр-во:

1) Для любых матриц A, B и C

выполняется $(A+B)+C = A+(B+C)$

2) Для любых матриц A и B выполняется

$A+B = B+A$

3) Для любых матриц A и B и для любого

c, выполняется: $c(A+B) = cA + cB$ и

$(c+d)A = cA + dA$

Один из возможных базисов этого пр-ва

может состоять из 4 матриц:

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Эти матрицы являются

линейно независимыми и любая

$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ квадратная матрица 2го

порядка м.б. выражена

$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ как линейная комбинация

$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ этих матриц.

№5.

$Ax=0$, x – вектор столбец неизвестных.

A:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & p & 0 \\ 5 & 10 & q & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & p-9 & 0 \\ 0 & 0 & q-15 & 0 \end{array}\right)$$

ранг $A=1$ тогда и только тогда, когда все строки матрицы линейно зависимы

$$\begin{matrix} p-9=0 \\ q-15=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} p=9 \\ q=15 \end{matrix}$$

Чтобы ранг $A=1$: $\boxed{p=9;\quad q=15}$

ОТВЕТ

№ 6

нужно проверить, что f_1 и f_2 линейно независимы. $f_1\ (2, -5)$ $f_2\ (-1; 3)$

$a f_1 + b f_2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ -5a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ векторы линейно независимы и могут служить базисом в R^2

$$\begin{cases} 2a - b = x_1 \\ -5a + 3b = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 1 \\ -5a + 3b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Значит, коорд. вектора x в новом базисе

$(-1, -1)$

№ 7.

Матрица перехода от (e_1, e_2) к $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$ – Ответ.

№3.

1. Аксиома коммутативности сложения.

$(u_1;v_1)+(u_2;v_2)=(u_2;v_2)+(u_1;v_1)$

верно.

2. Аксиома ассоциативности сложения.

$((u_1;v_1)+(u_2;v_2))+(u_3;v_3)=(u_1;v_1)+$
$+((u_2;v_2)+(u_3;v_3)))$

умножение чисел ассоциативно, поэтому можно менять порядок скобок.

3. Аксиома сущ. нулевого эл.

$\exists\ (0,1)$, что $\forall\ (u;v)$ ~~выполняется~~.

выполнено: $(u;v)+(0;1)=(u;v)$

$(0,1)$ – нулевой эл-т.

4. Аксиома существования противоположного эл-та.

для любой пары $(u;v)$ $\exists$ пара $(-u;-v)$, ~~rs~~

что $(u;v)+(-u;-v)=(0;1)$

умножение на отриц ~~эл-т~~ число дает обратный эл-т относительно умножения.

=> $(-u; -v)$ - против. элемент.

5. Аксиома дистрибутивности умножения относительного сложения.

$$a((u_1; v_1) + (u_2; v_2)) = a\cdot(u_1; v_1) + a\cdot(u_2; v_2)$$

6. Аксиома ассоциативности умножения на скаляр: $(a\cdot b)\cdot(u; v) = a\cdot(b\cdot(u; v))$

можно менять порядок умножения.

7. Аксиома единичного эл-та: $1\cdot(u; v) = (u.v)$

Действительно, умножение на единицу не меняет числа.

=> мн-во M удовлетворяет всем Аксиомам.

а) нулевым эл-ом будет $(1; 1)$

б) противоположным эл-ом будет:

$$\frac{1}{u}; \frac{1}{v}$$

б) размерность пр-ва = 2, и одним из базисных векторов м.б. пара (2, 1). Другим базисным вектором м.б. пара (1, 2)