Estimation macroscopique du mouvement collectif d'un ensemble de piétons se déplaçant dans une rue par une approche PINN

Résumé des principales étapes du travail à effectuer :

1. Comprendre **le simulateur multi-agents (modèle microscopique)** fourni, basé sur une approche "mécanique" du déplacement individuel de chaque piéton
2. Comprendre le principe de la **modélisation macroscopique** d'un ensemble de piétons
3. Implémenter une approche PINN d'**estimation du modèle de flux du modèle macroscopique** (le diagramme fondamental) à partir d'observations empiriques de la densité et du flux de piétons générées par le modèle microscopique
4. Evaluer la performance de l'approche PINN, notamment en fonction du nombre de piétons du modèle microscopique

Modélisation macroscopique d'un ensemble de piétons en mouvement :

On ne s'intéresse pas au comportement individuel de chaque piéton, mais on cherche à modéliser l'évolution spatiale et temporelle de la densité de piétons (nombre de piétons par unité de surface (m^2)) que l'on note $\rho(t,x,y)$. On s'intéresse également au flux de piétons c'est-à-dire nombre de piétons par unité de temps (le "débit de piétons dans les directions x et y") à chaque instant t et à chaque position (x,y) que l'on note $\phi(t,x,y)$. On montre facilement que $\phi(t,x,y)=\rho(t,x,y)u(t,x,y)$, où $u(t,x,y)$ désigne le vecteur de vitesse moyenne de la densité des individus à l'instant t et à la position (x,y).

En utilisant un principe de conservation de la quantité des piétons (on suppose qu'aucun piéton ne décède en cours de déplacement !), le modèle d'évolution spatio-temporelle de la densité des piétons obéit à une loi de conservation définie par l'équation aux dérivées partielles (EDP d'advection non linéaire) :

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho(t,x,y)+\nabla.\,\phi(\rho(t,x,y))=0, \\ \Leftrightarrow\ &\partial_t \rho(t,x,y)+\partial_x(\rho(t,x,y)u_x(t,x,y))+\partial_y(\rho(t,x,y)u_y(t,x,y))=0, \end{aligned} \tag{1}$$

où (u_x,u_y) désigne les coordonnées de la vitesse u dans le repère cartésien; cela signifie que le flux est aussi un vecteur de coordonnées $(\phi_x=\rho u_x, \phi_y=\rho u_y)$. ∂_t désigne la dérivée partielle par rapport au temps et $\partial_{\{x,y\}}$, la dérivée partielle par rapport à x ou y.

Pour bien définir le problème, il faut généralement donner des conditions aux bords du domaine (ici la rue définie par $(x,y)\in[0,L]\times[0,W]$, où L désigne la longueur de la rue et W, sa largeur) . Par exemple, on définit le flux entrant dans la rue en $x=0$ ou le flux sortant en $x=L$. On dit que les piétons ne quittent pas la rue latéralement (en $y=0$ et/ou $y=W$), etc ...

Principe de l'estimation du modèle de flux :

On va supposer que l'on sait détecter la présence de piétons au voisinage de $M_x\times M_y$ points (x_i,y_j) dans la rue, grâce à un système de mesures distribuées de déformation du sol (DAS = Distributed Acoustic Sensing par fibres optiques) sur une suite d'instants discrets $t_k, k=1,\dots,M_t$, afin de calculer la densité empirique, notée $\rho_e(t_k,x_i,y_j)$, ainsi que le vecteur de flux empirique, noté $\phi_e(t_k,x_i,y_j)=(\phi_x^e(t_k,x_i,y_j),\phi_y^e(t_k,x_i,y_j))$. Comme on ne dispose pas de vraies mesures, on utilisera ici des simulations du modèle microscopique. On définit d'abord $\rho_e(t_k,x_i,y_j)$, où $N(t_k)$ désigne le nombre total de piétons dans la rue à l'instant t_k :

$$\rho_e(t_k,x_i,y_j)\approx\frac{1}{dx\times dy}\sum_{l=1}^{N(t_k)}\mathbb{1}_{(x_i,y_j)}(x_l(t_k),y_l(t_k)), \tag{2}$$

avec $\mathbb{1}_{(x_i,y_j)}(x_l(t_k),y_l(t_k))=1$ lorsque les coordonnées de position $(x_l(t_k),y_l(t_k))$ du piéton l sont telles que $x_l(t_k)\in[x_i-dx/2,x_i+dx/2]$ et $y_l(t_k)\in[y_j-dy/2,y_j+dy/2]$, sinon 0. dx et dy désigne les pas de discrétisation spatiale en x et en y . On notera que la densité peut être obtenue à partir d'un *histogramme en 2D* si l'on considère une grille régulière de points en 2D.

Une fois connues, les densités sur les cellules (x_i,y_j) et à chaque instant t_k, il est possible de calculer les flux empiriques $\phi_e(t_k,x_i,y_j)$ sur les différentes cellules et à chaque instant t_k, à partir de la vitesse moyenne (variation temporelle de la position moyenne) des piétons présents dans une cellule élémentaire centrée sur (x_i,y_j) :

$$\begin{aligned}
u_x^e(t_k,x_i,y_j) &\approx \frac{1}{dt}\Big[\sum_{l=1}^{N(t_k)} x_l(t_k)\mathbb{1}_{(x_i,y_j)}(x_l(t_k),y_l(t_k))/\sum_{l=1}^{N(t_k)}\mathbb{1}_{(x_i,y_j)}(x_l(t_k),y_l(t_k))\\
&-\sum_{l=1}^{N(t_{k-1})} x_l(t_{k-1})\mathbb{1}_{(x_i,y_j)}(x_l(t_{k-1}),y_l(t_{k-1}))/\sum_{l=1}^{N(t_{k-1})}\mathbb{1}_{(x_i,y_j)}(x_l(t_{k-1}),y_l(t_{k-1}))\Big],\\
u_y^e(t_k,x_i,y_j) &\approx \frac{1}{dt}\Big[\sum_{l=1}^{N(t_k)} y_l(t_k)\mathbb{1}_{(x_i,y_j)}(x_l(t_k),y_l(t_k))/\sum_{l=1}^{N(t_k)}\mathbb{1}_{(x_i,y_j)}(x_l(t_k),y_l(t_k))\\
&-\sum_{l=1}^{N(t_{k-1})} y_l(t_{k-1})\mathbb{1}_{(x_i,y_j)}(x_l(t_{k-1}),y_l(t_{k-1}))/\sum_{l=1}^{N(t_{k-1})}\mathbb{1}_{(x_i,y_j)}(x_l(t_{k-1}),y_l(t_{k-1}))\Big],\\
\phi_x^e(t_k,x_i,y_j) &\approx \rho_e(t_k,x_i,y_j)u_x^e(t_k,x_i,y_j),\\
\phi_y^e(t_k,x_i,y_j) &\approx \rho_e(t_k,x_i,y_j)u_y^e(t_k,x_i,y_j),
\end{aligned}\tag{3}$$

où $dt=t_k-t_{k-1}$ désigne le pas constant de discrétisation en temps.

En utilisant ces mesures empiriques, on va pouvoir déterminer le modèle de flux en résolvant le problème d'estimation PINN suivant, qui permet d'obtenir la densité et le flux en tout point (t,x,y) :

$$\begin{aligned}
\min_{\theta,\theta_\phi}\frac{1}{M_tM_xM_y}\sum_{k,i,j}(\rho_\theta(t_k,x_i,y_j)-\rho_e(t_k,x_i,y_j))^2+\frac{1}{M_tM_xM_y}\sum_{k,i,j}\|\phi_{\theta_\phi}(t_k,x_i,x_j)-\phi_e(t_k,x_i,y_j)\|^2\\
+\frac{K}{M}\sum_{l=1}^{M}(\partial_t\rho_\theta(t_l,x_l,y_l)-\partial_x(\phi_{\theta_\phi})_x(t_l,x_l,y_l)-\partial_y(\phi_{\theta_\phi})_y(t_l,x_l,y_l))^2, K>0,
\end{aligned}\tag{4}$$

où ρ_θ désigne l'estimation de la densité produite par *un réseau de neurones* de paramètres θ et d'entrées (t,x,y) et ϕ_{θ_ϕ}, l'estimation du vecteur de flux produite par *un réseau de neurones* de paramètres θ_ϕ et d'entrées (t,x,y). La suite $\{(t_l,x_l,y_l)\}_{l=1,\dots,M}$ est obtenue par une *suite à discrépance faible de Sobol'* en 3 dimensions définie sur $[0,T]\times[0,L]\times[0,W]$.

A partir des solutions ρ_θ et ϕ_{θ_ϕ} issus du problème PINN, il est possible d'obtenir une estimation du *diagramme fondamental*, c'est-à-dire de la relation $\phi(\rho)$ qui caractérise complétement le comportement dynamique du groupe de piétons étudié, en utilisant une méthode de régression non linéaire, par exemple *un réseau de neurones* d'entrée ρ_e et de sorties (ϕ_x^e,ϕ_y^e). On notera que l'on peut également obtenir ainsi une estimation du diagramme fondamental en vitesse : $u_x(\rho)=\dfrac{\phi_x(\rho)}{\rho}$ et $u_y(\rho)=\dfrac{\phi_y(\rho)}{\rho}$.