Opciones Barrera con Modelo de Precios Trinomial

Pedro Salomone, Valentin Diaz

Matemática Financiera 2023

FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

UNC Universidad Nacional de Córdoba

Índice

1. Resumen

En este informe desarrollaremos la comparación de un modelo de precios discreto y uno continuo. En particular veremos el caso de una opción call europea vanilla y una opción barrera. Para el modelo continuo, usaremos la fórmula de Black-Scholes en el caso de la no exótica y una modificación de la misma para la exótica. Para el caso discreto utilizaremos el modelo trinomial

2. Preliminares

2.1. Fórmulas Matemáticas

Previo al desarrollo de los resultados mostraremos las fórmulas matemáticas para la obtención de los mismos.
Asumimos que el precio del activo $S(t)$ sigue un movimiento browniano geométrico con tendencia r y volatilidad σ. De esta manera $ln(\frac{S(t)}{S_0})$ es un movimiento browniano con tendencia $r - \frac{\sigma^2}{2}$ y

volatilidad σ. Bajo estas hipótesis el valor de una Call Europea vanilla que no paga dividendos puede ser determinada por la fórmula de Black-Scholes:

$$c = S(0)\Phi(d1) - Ke^{-rT}\Phi(d2)$$

En donde K es el strike, T es la maduración y d_1, d_2 están determinados por:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Por otro lado, la opción barrera call up and out es una call tal que si el precio del subyacente supera un cierto valor fijo B, entonces la call no se puede ejercer.
Esta opción exótica también tiene fórmula si H≥K, y está dada por:

$$c_{uo} = c - S_0\Phi(x_1) + Ke^{-rT}\Phi(x_1 - \sigma\sqrt{T}) + S_0\left((H/S_0)^{2\lambda}\right)(\Phi(-y) - \Phi(-y_1)) -$$
$$Ke^{-rT}\left((H/S_0)^{2\lambda-2}\right)\left(\Phi(-y + \sigma\sqrt{T}) - \Phi(-y_1 + \sigma\sqrt{T})\right)$$

En donde:

$$\lambda = \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} \qquad y = \frac{\ln(H^2)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$x_1 = \frac{\ln(S_0/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \qquad y_1 = \frac{\ln(H/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

Con respecto al modelo discreto tomamos asumimos que en cada t el activo puede multiplicarse por un factor u, d, o m. En particular tomamos $u = \frac{1}{d}$ y $m = 1$.
Para la call barrera, tomaremos un u de forma que exista algun i tal que $S(t) = u^i S(0)$.

Las probabilidades de riesgo neutral para la call barera son:

$$p_d = -\frac{\left(r - \sigma^2/2\right)\Delta t}{2\ln(\mu)} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2\ln^2(\mu)} \qquad p_u = \frac{\left(r - \sigma^2/2\right)\Delta t}{2\ln(\mu)} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2\ln^2(\mu)}$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

Las probabilidades de riesgo neutral para la call vanilla son:

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6} \qquad p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

2.2. Modelo Trinomial

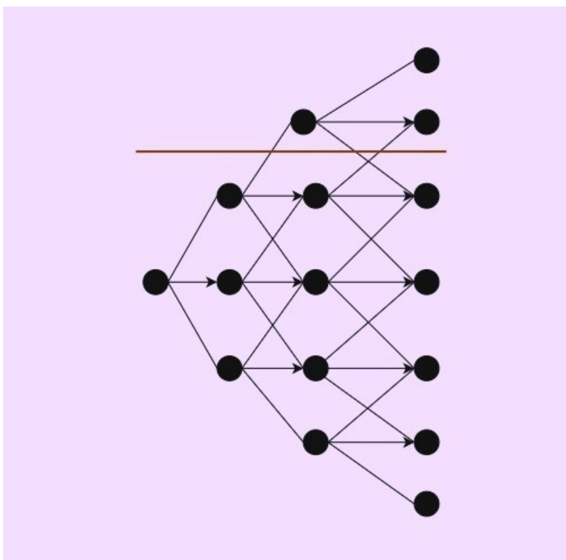
Para el cálculo del valor de una opción barrera es posible utilizar el modelo binomial, sin embargo el modelo trinomial te permite tener un grado más de libertad para el precio del subyacente.

Pero no todo es una ventaja, pues calcular el árbol de precios tanto para el subyacente como para la opción es costoso computacionalmente y se produce un gran aumento del error acumulado debido a la cantidad de pasos si no se implementa adecuadamente. Por ejemplo, para 30 pasos en el modelo binomial tendremos que en la última rama hay $2^{30} \approx 10^8$ nodos, pero para el modelo trinomial $3^{30} \approx 10^{13}$. Es decir que para una cantidad relativamente modesta de pasos hay

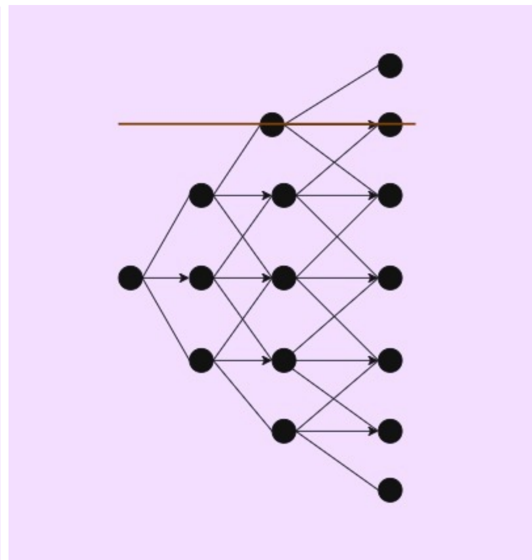
5 ordenes de magnitud de diferencia. Veamos como solucionar esto.

En primer lugar, dado que tomamos $m = 1$ nos ahorrarnos el cálculo $S(t_i)m$. En segundo lugar modificamos el árbol de precios de forma que en algún momento el valor de los nodos sea exactamente el de la barrera.

Llamemos barrera interna a la capa de nodos que esta justo debajo de la barrera y llamemos barrera externa a la capa que esta justo encima. Sabiendo que la distancia entre los nodos de una capa suele ser del orden de $\sqrt{\Delta t}$ entonces tendremos que la diferencia entre la barrera y cualquier nodo que este en la capa interna o externa sera menor que $\sqrt{\Delta t}$ y por lo tanto puede llegar a generar problemas al determinar si en cierto momento de superó o no la barrera.



1. Árbol Clásico



2. Árbol Ajustado

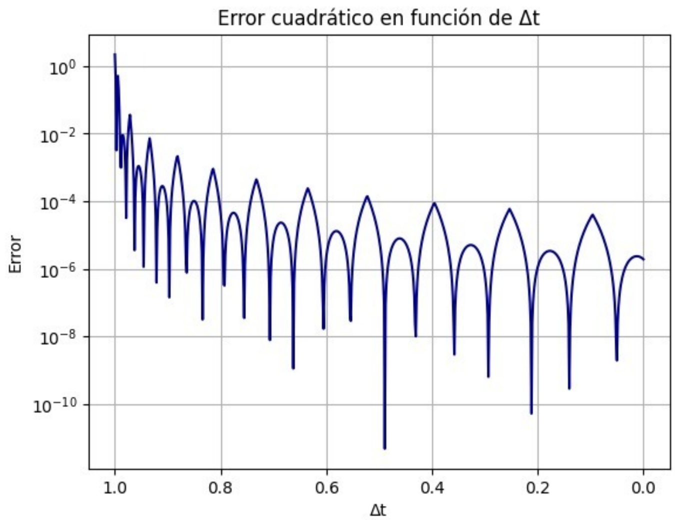
Para poder lograr esto, necesitamos que en algun paso N se cumpla que $H = S_0 u^N$ y por lo tanto $N = int(\frac{ln(H)-ln(S_0)}{ln(u)})$ con $u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}$. Luego actualizamos u con con la condición que impusimos: $u = exp(\frac{ln(H)-ln(S_0)}{ln(u)})$

3. Call Europea Vanilla

Para la valoración de este tipo de opciones podriamos usar diferentes enfoques. En particular veremos como se comporta el modelo discreto según la cantidad de pasos en comparación con el continuo.

Supongamos una opción call europea con precio spot $S_0 = 100$, Strike $K = 130$, tasa libre de riesgo $i = 0{,}05$, volatilidad $v = 0{,}2$ y tiempo de madurez 3 años. El precio de la opción en $t = 0$ dado por el modelo continuo es $c = 9{,}373804025$.

A continuación mostramos como es el error cuadrático entre ambos modelos a medida que Δt tiende a 0:



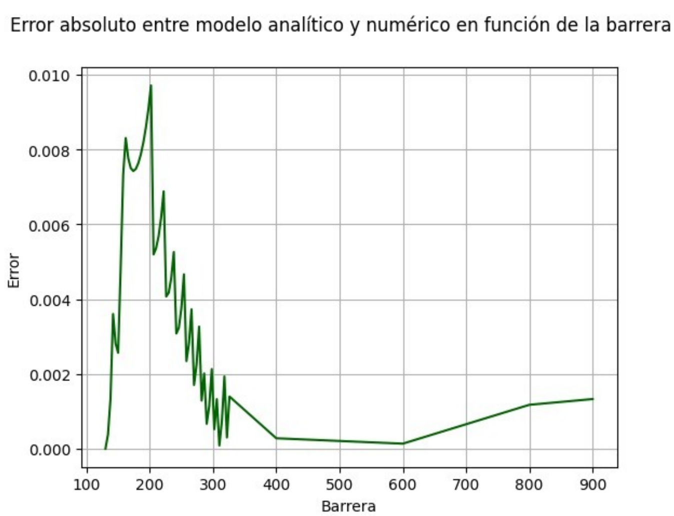
(Tiempo de ejecución para 700 diferentes Δt: 2.00m)

Notar que a medida que los Δt son mas pequeños, el error se acerca a cero. Esto tiene sentido pues un Δt pequeño significa que la cantidad de pasos es grande, es decir que la discretización tiende a ser algo continuo. Mas aún, las oscilaciones de estos errores nos indican que la convergencia podría no ser suave.

4. Opción Call Barrera

Supongamos la opción call con los mismos parámetros que la anterior, pero en este caso es una call barrera up and out.

Compararemos las valoraciones del modelo continuo y del modelo discreto para diferentes valores de barrera H. En particular lo haremos para valores de H $\in \{130, 134, 138, ..., 326\} \cup \{400, 600, 800, 900\}$, es decir que veremos el comportamiento cuando el valor de la barrera es mucho mayor que el srike.



(Tiempo de ejecución para 54 barreras: 33.0s)

5. Conclusión

Con respecto a la comparación de los modelos en la opción vanilla, es razonable que el resultado del modelo discreto tienda a igualar al modelo continuo cuando Δt tiende a cero pues al aumentar la cantidad de pasos, se disminuye la distancia temporal entre los nodos del arbol, tendiendo a cero. Es decir que la discretización se va haciendo mas pequeña y parece tender en el límite a un modelo continuo.

Por otro lado, el modelo trinomial parece converger con buena precisión al modelo analítico, mas aún este error parece reducirse en mayor cantidad cuando la barrera es relativamente más grande que el strike.

6. Repositorio

La implementación en python del informe está disponible en el siguiente enlace: Notebook

Referencias

[1] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives* .

[2] Kisbye, Patricia. *Modelos Matemáticos en Finanzas Cuantitativas*. FAMAF,2023.

[3] Stephen Figlewski and Bin Gao. *The adaptive mesh model: A new approach to efficient option pricing*.