ANÁLISIS NUMÉRICO III – 2023
Práctico N$^{\underline{o}}$ 2

Objetivos

- Estudiar métodos de diferencias finitas y distintos esquemas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de contorno.
- Analizar la aplicación de distintos esquemas de acuerdo a las condiciones de contorno (Dirichlet, Neumann, Robin).

1. Escriba una función que implemente el esquema de diferencias finitas centradas para resolver el problema de valores de contorno

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u_a, \text{ y } u(b) = u_b.$$

La función debe llamarse `two_points`, y tener como entrada los argumentos `(f,a,b,u`$_\mathtt{a}$`,u`$_\mathtt{b}$`,n)`. Donde `f`, es la función externa, `a` y `b` los puntos extremos del intervalo, `u`$_\mathtt{a}$ y `u`$_\mathtt{b}$ las condiciones de contorno y `n` el número de subintervalos de la grilla. Los argumentos de salida deben ser `x` y `U`, donde `x`$= (x_0, \ldots, x_n)$ son los puntos de la grilla y `U`$= (U_0, \ldots, U_n)$ la solución aproximada en los puntos de la grilla.

2. Utilice la función del punto anterior para resolver los siguientes items.

   (a) Encontrar numericamente la solución del problema

   $$u''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \, u(1) = -1,$$

   tomando $n = 50$. Grafique la solución obtenida y la solución exacta. Grafique la diferencia entre la solución exacta y numérica en cada punto de la grilla.

   (b) Considere el problema

   $$u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \, u(1) = 0,$$

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 < x < x_1, \\ 0 & \quad \text{caso contrario,} \end{cases}$$

   con $0 < x_0 < x_1 < 1$. Encuentre la solución para distintos valores de x_0 y x_1 tomando $n = 50$. Grafique las soluciones obtenidas.

3. Cuando se trabaja con contornos irregulares o se utilizan grillas adaptables, las grillas no uniformes son necesarias. Derive los coeficientes de diferencias finitas para

   (a) $u'(\bar{x}) \approx \alpha_1 u(\bar{x} - h_1) + \alpha_2 u(\bar{x}) + \alpha_3 u(\bar{x} + h_2)$

   (b) $u''(\bar{x}) \approx \alpha_1 u(\bar{x} - h_1) + \alpha_2 u(\bar{x}) + \alpha_3 u(\bar{x} + h_2)$

   (c) $u'''(\bar{x}) \approx \alpha_1 u(\bar{x} - h_1) + \alpha_2 u(\bar{x}) + \alpha_3 u(\bar{x} + h_2)$

¿Son consistentes? En otras palabras, si $h = \max\{h_1, h_2\}$ se aproxima a cero, ¿el error también? Si es así, ¿cuáles son los órdenes de precisión?¿Ve algún problema potencial con los esquemas derivados?

4. Considere el siguiente esquema de diferencias finitas para resolver el problema de valores de contorno $u''(x) = f(x)$, $a < x < b$, $u(a) = u_a$ y $u(b) = u_b$,

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 2, ..., n-1$$

donde $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, ..., n$, $h = (b-a)/n$. En $i = 1$, el esquema de diferencias finitas es

$$\frac{U_1 - 2U_2 + U_3}{h^2} = f(x_1).$$

   (a) Encuentre los errores de truncamiento local del esquema en x_i, $i = 2, 3, ..., n-1$, y x_1. ¿Es consistente este esquema?

   (b) ¿El esquema converge? Justifique.

5. Considere el siguiente problema de valores de contorno autoadjunto

$$(p(x)u'(x))' - q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$u(a) = u_a, \quad su(b) + tu'(b) = d.$$

   (a) Escriba una función para resolver el problema anterior. Dicha función debe implementar una grilla uniforme y el esquema

$$\frac{p_{i+\frac{1}{2}}(U_{i+1} - U_i)/h - p_{i-\frac{1}{2}}(U_i - U_{i-1})/h}{h} - q(x_i)U_i = f(x_i).$$

   La función debe llamarse `self_adjoint_bvp`, y tener como entrada los argumentos `(f,p,q,a,b,u`$_\mathtt{a}$`,s,t,d,n)`. Donde f es la función externa, p y q las funciones coeficiente, a y b los puntos extremos del intervalo, u a , s, t y d las constantes que definen las condiciones de contorno y n el número de subintervalos de la grilla. Los argumentos de salida deben ser x y U, donde `x` $= (x_0, \dots, x_n)$ son los puntos de la grilla y `U` $= (U_0, \dots, U_n)$ la solución aproximada en los puntos de la grilla.

   (b) Pruebe su código para el caso

$$p(x) = 1 + x^2, \quad q(x) = x, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad s = 2, \quad t = -3,$$

   y las otras funciones o parámetros se determinan a partir de la solución exacta

$$u(x) = e^{-x}(x-1)^2.$$

   Grafique la solución obtenida y la solución exacta, y el error para una grilla tomando $n = 80$. Realice el análisis de refinamiento de grilla para determinar el orden de precisión de la solución global.

   (c) ¿Puede manejar los casos $s = 0$ o $t = 0$ con su código?

   (d) Si el esquema de diferencias finitas es usado para la ecuación equivalente

$$pu'' + p'u' - qu = f,$$

   ¿Cuáles son las ventajas y desventajas?

6. Considere la siguiente ecuación de convección-difusión de estado estacionario

$$\epsilon u'' - u' = -1, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = 1, \quad u(1) = 3.$$

para algún ϵ dado.

   (a) Verifique que la solución exacta es $u(x) = 1 + x + \left(\dfrac{e^{x/\epsilon} - 1}{e^{1/\epsilon} - 1}\right)$.

   (b) Compare los siguientes métodos para $\epsilon = 0.3, 0.1, 0.05, 0.0005$.

      (i) Esquema de diferencias finitas centrada,

$$\epsilon \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} - \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = -1.$$

      (ii) Esquema de diferencias finitas central-upwind:

$$\epsilon \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h} = -1.$$

      Realice el análisis de refinamiento de grilla para cada caso, para determinar el orden de precisión. Grafique la solución encontrada y la exacta para $h = 0.1$, $h = \frac{1}{25}$, y $h = 0.01$.

      (iii) ¿Qué método diría que es mejor? Justificar.

7. Escriba una función que implemente el esquema de diferencias finitas centradas usando un ghost point, para resolver el problema de valores de contorno mixto

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u_a \quad u'(b) = ux_b.$$

La función debe llamarse `ghost_at_b`, y tener como entrada los siguientes argumentos `(f,a,b,u_a,ux_b,n)`. Donde `f` es la función externa, `a` y `b` los puntos extremos del intervalo, `u_a` y `ux_b` las condiciones de contorno Dirichlet y Neumann respectivamente y `n` el número de puntos en la grilla. Los argumentos de salida deben ser `x` y `U`, donde `x`$= (x_0, \ldots, x_n)$ son los puntos de la grilla y `U`$= (U_0, \ldots, U_n)$ la solución aproximada en los puntos de la grilla.

8. Utilice la función del punto anterior para encontrar numericamente la solución del problema

$$u''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x), \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}, \quad u(0) = 1,\ u'(\tfrac{1}{2}) = -\pi,$$

tomando $n = 50$. Grafique la solución obtenida y la solución exacta. Grafique la diferencia entre la solución exacta y numérica en cada punto de la grilla.

9. Para el siguiente problema

$$u'' = f, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = 0, \quad u'(1) = \sigma,$$

muestre que el método de diferencias finitas usando la fórmula centrada y el método de ghost point en $x = 1$ son estables y consistentes. Encuentre los órdenes de convergencia.

10. Derive el método de diferencias finitas para

$$u''(x) - q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u(b),$$

usando el esquema centrado con grilla uniforme.

(a) Escriba el sistema de ecuaciones $A_hU = F$. ¿Cuántas incógnitas hay? ¿La matriz A_h es tridiagonal?

(b) Si $q(x) = 0$, ¿existe solución? ¿es única? Si no lo es, ¿cómo modificaría el método para obtener una única solución?

11. Aplique el método de diferencias finitas y el método de Newton para encontrar una solución numérica al módelo no lineal del péndulo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + K \sin\theta = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi$$
$$\theta(0) = \theta_1, \quad \theta(2\pi) = \theta_2,$$

donde K, θ_1 y θ_2 son parámetros. Compare la solución con el modelo linealizado

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = 0.$$

12. Investigue la librería `findiff` de python para la resolución numérica de ecuaciones utilizando diferencias finitas. Utilice esta librería para resolver los problemas dados en los items anteriores, siempre que sea posible.