

ANÁLISIS NUMÉRICO III – 2023

Práctico N^o 4

Objetivos

- Estudiar métodos de elementos finitos y sus distintas formulaciones, para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de contorno.
- Revisar fundamentos teóricos de estos métodos.

1. Escriba una función que implemente el esquema de elementos finitos con funciones base lineales a trozos, para resolver el problema de valores de contorno

$$-u''(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

La función debe llamarse **fem1d** y tener como entrada los argumentos **(f,x)**. Donde **f** es la función externa y **x** el vector de nodos. El argumento de salida debe ser **U= (U₀, ..., U_n)**, la solución aproximada en los puntos nodales.

2. Utilice la función del punto anterior para resolver los siguientes problemas.

- (a) Encontrar numericamente la solución del problema

$$-u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

tomando como grillas $x = [0, 0.1, 0.3, 0.333, 0.5, 0.75, 1]$ y una grilla igualmente espaciada. Grafique las soluciones obtenidas numericamente y la solución exacta. Grafique la diferencia entre la solución exacta y numérica en cada punto de la grilla (para ambos casos).

- (b) Considere el problema

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Encuentre una solución numérica utilizando una grilla igualmente espaciada (pruebe distintos valores para n). Grafique las soluciones obtenidas.

3. Considere el siguiente problema,

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

(a) Muestre que la forma variacional es

$$(u', v') + (u, v) = (f, v) \quad \forall v(x) \in H_0^1(0, 1),$$

donde,

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x) dx, \\ H_0^1(0, 1) = \left\{ v(x), v(0) = v(1) = 0, \int_0^1 v^2 dx < \infty \right\}.$$

(b) Derive el sistema lineal de las ecuaciones para la aproximación con elementos finitos

$$u_h = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \phi_j(x),$$

con la siguiente información:

- $f(x) = 1$.
- Los puntos nodales y los elementos están indexados como

$$x_0 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{4}, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_4 = 1.$$

$$\Omega_1 = [x_3, x_1], \quad \Omega_2 = [x_1, x_4], \quad \Omega_3 = [x_2, x_3], \quad \Omega_4 = [x_0, x_2].$$

- Las funciones bases son

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

- Ensamblar la matriz de rigidez y el vector de carga elemento a elemento.

4. Use el código del ejercicio 1 para resolver

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

utilizando dos grillas diferentes.

- Los puntos nodales 0, 0.1, 0.3, 0.333, 0.5, 0.75, 1.
- La grilla uniforme de nodos $x_i = ih$ para $i = 0, \dots, M$, tomando $M = 10$.

Use ambas grillas para resolver el problema dado, con las siguientes $f(x)$ y $u(x)$ solución exacta:

- dado $u(x) = \sin(\pi x)$, ¿cuál es $f(x)$?
- dado $f(x) = x^3$, ¿cuál es $u(x)$?
- dada $f(x) = \delta(x - \frac{1}{2})$, donde $\delta(x)$ es la función (distribución) Delta de Dirac, ¿cuál es $u(x)$?

Ayuda: Si $u''(x) = -\delta_{x_0}(x)$ entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u'(x) = -H(x - x_0) + a$, donde H es la función de Heaviside usual.

5. Considere el siguiente problema con coeficientes variables,

$$-(a(x)u'(x))' = f(x), \quad 0 < x < L,$$

y condiciones de contorno mixtas,

$$a(0)u'(0) = \kappa_0(u(0) - g_0), \\ -a(L)u'(L) = \kappa_L(u(L) - g_L),$$

donde $a > 0$ y f son funciones dadas, y $\kappa_0 \geq 0$, $\kappa_L \geq 0$, g_0 y g_L parámetros del problema.

- Derive la formulación variacional del problema (utilice las condiciones de borde para reescribir los términos correspondientes al contorno)
- Plantee el sistema lineal asociado, es decir, la matriz de rigidez y el vector de carga. ¿Cuál será una base para el espacio V_h ?
- Escriba una función para resolver el problema planteado. La función debe llamarse `fem1d_coeffs` y tener como entrada los argumentos `(f,a,x,p)`. Donde `f` es la función externa, `a` el coeficiente variable (función), `x` el vector de nodos y `p` la lista ordenada $[\kappa_0, g_0, \kappa_L, g_L]$. El argumento de salida debe ser $U = (U_0, \dots, U_n)$, la solución aproximada en los puntos nodales.
- Utilice la función anterior para calcular la temperatura T en una varilla de longitud $L = 6$ m, de sección transversal $A = 0.1$ m², con coeficiente de conductividad térmica $\kappa = 5 - 0.6x$ [J/(Ksm)] y una fuente de calor dada por $f = 0.03(x - 6)^4$ [J/sm]. La varilla se mantiene a una temperatura constante $T = -1$ [K] en $x = 2$ y aislado térmicamente en $x = 8$. Grafique la solución obtenida.

Ayuda: La temperatura de una varilla de área de sección transversal A y de conductividad térmica κ , sometido a una fuente de calor de intensidad f (durante un tiempo prologando, de manera que la transferencia de calor dentro de la varilla sea constante), es modelado con la ecuación $-(A\kappa T')' = f$.

6. Asuma que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) dx = \frac{h}{6},$$

donde $h = x_{i+1} - x_i$, y ϕ_i y ϕ_{i+1} son las funciones sombrero centradas en x_i y x_{i+1} respectivamente. Modifique el código del ejercicio 1 para resolver

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Utilice la grilla uniforme de nodos $x_i = ih$, con $i = 0, \dots, 10$ y $h = \frac{1}{10}$. Para las soluciones exactas $u(x)$ tales que,

- $u(x) = \sin(\pi x)$, ¿cuál es $f(x)$?
- $u(x) = x(1 - x)/2$, ¿cuál es $f(x)$?

7. Considere la función $v(x) = |x|^\alpha$ en $\Omega = (-1, 1)$ con α real.

- ¿Para qué valores de α , $v \in H^0(\Omega)$?
- ¿Para qué valores de α , $v \in H^1(\Omega)$ y ¿ $v \in H^m(\Omega)$?

8. Considere el problema

$$-((1+x)u'(x))' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 1.$$

Divida el intervalo $[0, 1]$ en 3 subintervalos de igual longitud, $h = \frac{1}{3}$, y sea V_h el espacio de las funciones lineales a trozo que se anulan en $x = 0$.

- Determine la solución de forma analítica.
- Use V_h para formular un método de elementos finitos.
- Verifique que la matriz de rigidez A y el vector de carga b están dados por:

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 16 & -9 & 0 \\ -9 & 20 & -11 \\ 0 & -11 & 11 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(d) Verifique que A es simétrica y definida positiva.

9. Considere el siguiente problema.

$$-u'' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) = u'(1) = 1.$$

Calcule la matriz de rigidez asociada al problema en una grilla uniforme con dos elementos.
¿Por qué la matriz es singular?