ANÁLISIS NUMÉRICO III – 2023
Práctico N$^{\underline{o}}$ 1 - Parte I

Objetivos

- Revisión de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferencias ordinarias con valor inicial.

Método de Series de Taylor

1. Verifique que la función $x(t) = \dfrac{t^2}{4}$ es solución del problema a valor inicial

$$\begin{cases} x' &= \sqrt{x} \\ x(0) &= 0. \end{cases}$$

   Aplique el método de series de Taylor de orden 1 y explique por qué la solución numérica difiere de la solución $\dfrac{t^2}{4}$.

2. Calcule $x(0.1)$ al resolver la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x' &= -tx^2 \\ x(0) &= 2 \end{cases}$$

   con un paso del método de series de Taylor de orden 2.

3. Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} 5tx' + x^2 &= 2 \\ x(4) &= 1. \end{cases}$$

   Calcule $x(4.1)$ usando un paso del método de series de Taylor de orden 2.

4. Escriba y testee un programa que resuelva la siguiente ecuación diferencial con condición inicial,

$$\begin{cases} x' &= x + e^t + tx \\ x(1) &= 2 \end{cases}$$

   en el intervalo $[1, 3]$. Use la serie de Taylor de orden 5 y $h = 0.01$.

5. Escriba y testee un código para resolver el siguiente problema a valor inicial

$$\begin{cases} x' &= 1 + x^2 - t^3 \\ x(0) &= -1. \end{cases}$$

   Use el método de series de Taylor de orden 4, con $h = 0.01$. Encuentre la solución en el intervalo $[0, 2]$.

6. Los métodos para resolver problemas a valor inicial también pueden ser utilizados para calcular integrales definidas. Por ejemplo, se puede resolver

$$\int_0^2 e^{-s^2}\, ds,$$

al resolver el problema a valor inicial

$$\begin{cases} x' &= e^{-t^2} \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

en el intervalo $[0, 2]$. Resuelva este problema usando el método de series de Taylor de orden 4.

7. La integral $\int \sqrt{1 + x^3}\, dx$ no puede ser resuelta por métodos del cálculo elemental. Considere la función

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^3}\, dt$$

en el intervalo $[0, 5]$ para resolver un problema a valor inicial adecuado. Use el método de series de Taylor de orden 3 con $h = \dfrac{1}{64}$.

8. Considere el problema a valor inicial $x' = 1 - xt^{-1}$, $x(2) = 2$. Pruebe que

$$\begin{cases} x'' &= (1 - 2x')t^{-1} \\ x^n &= -nx^{n-1}t^{-1} \qquad (n \geq 3) \end{cases}$$

Escriba un programa para resolver este problema mediante el método de series de Taylor de orden 10. Testee el programa con $h = 1$ en el intervalo $[2, 20]$.

Métodos de Runge-Kutta

1. Considere la fórmula de Runge-Kutta de orden 3

$$x(t + h) = x(t) + \frac{1}{9}\Big(2F_1 + 3F_2 + 4F_3\Big)$$

donde,

$$\begin{cases} F_1 &= hf(t, x) \\ \\ F_2 &= hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1) \\ \\ F_3 &= hf(t + \frac{3}{4}h, x + \frac{3}{4}F_2). \end{cases}$$

Muestre que concuerda con el método de series de Taylor de orden 3 para la ecuación diferencial $x' = x + t$.

2. Pruebe que cuando el método de Runge-Kutta de orden 4 es aplicado al problema $x' = \lambda x$, la fórmula para avanzar en esta solución es

$$x(t + h) = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4\right)x(t).$$

3. Escriba un programa para resolver el problema a valor inicial $x' = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ en el intervalo $[t_0, t_m]$. Use el método de Runge-Kutta de orden 4. Testearlo con el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} (e^t + 1)x' + xe^t - x &= 0 \\ x(0) &= 3 \end{cases}$$

Determine la solución analítica y compárela con la calculada numéricamente en el intervalo $[-2, 0]$. Usar $h = -0.01$.

4. Use varios valores de λ, como 5, -5 y -10, para resolver numéricamente el siguiente problema a valor inicial usando el método de Runge-Kutta de orden 4.

$$\begin{cases} x' &= \lambda x + cos(t) - \lambda sen(t) \\ x(0) &= 0. \end{cases}$$

Compare la solución numérica con la solución analítica en el intervalo $[0,5]$, usando $h = 0.01$. ¿Qué efecto tiene el parámetro λ sobre la solución numérica?

5. Escriba un programa para resolver el problema a valor inicial

$$\begin{cases} x' &= e^{xt} + cos(x-t) \\ x(1) &= 3. \end{cases}$$

Use el método de Runge-Kutta de orden 4 con $h = 0.01$ (detener los cálculos antes de que la solución desborde)

6. Considere el problema de valor inicial $x' = -kx$, $x(0) = 1$ en el intervalo $[0,1]$ con varios valores para la constante de decaimiento k. Muestre que la solución analítica es $x(t) = e^{-kt}$. Para $k = 5$, compare el comportamiento del método de Euler y de Runge-Kutta de ordern 4 usando varios valores para la longitud de paso h, $(h = 0.01, 0.1, 0.2, 0.25, 0.5)$. Repita el procedimiento con $k = 25$. Observación: para el método de Euler, la condición $0 \leq hk \leq 2$ se debe satisfacer para resolver el problema correctamente, mientras que en el caso del método de Runge-Kutta es necesario $0 \leq hk \leq 2.8$.