ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°6 - 2022
Autovalores

1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   a) Si λ es un autovalor de A y $\mu \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda - \mu$ es un autovalor de $A - \mu I$.

   b) Si A es real y λ es un autovalor de A, entonces $-\lambda$ es un autovalor de A.

   c) Si A es real y λ es un autovalor de A, entonces $\bar{\lambda}$ es un autovalor de A.

   d) Si λ es un autovalor de A y A es no singular, entonces $1/\lambda$ es un autovalor de A^{-1}.

   e) Si todos los autovalores de A son cero, entonces $A = 0$.

   f) Si A es hermitiana y λ es un autovalor de A, entonces $|\lambda|$ es un valor singular de A.

   g) Si A es diagonalizable y todos sus autovalores son iguales entre sí, entonces A es diagonal.

2. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Aplicar el método de las potencias comenzando por el vector $v^{(0)} = (a, b)$, donde $a \neq b$. Explicar porque la sucesión generada por el método no converge.

3. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 2.99 & 0 & 0 \\ 0 & 1.99 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Dar los autovalores y autovectores de A.

   b) Dar los autovalores de $(A - \rho I)$ y $(A - \mu I)^{-1}$, donde $\mu = 0.99$. Aplicar el método de las potencias y el de la iteración inversa a $(A - \mu I)$ empezando con $v^{(0)} = (1, 1, 1)$. A que vectores convergen estos métodos?. Cuál converge más rápido?

   c) aplicar el método de iteración inversa con $\mu = 2$ y $\mu = 3$. Usar el mismo vector inicial que en el item anterior. A que vectores convergen estas sucesiones?

4. **Implemente** las siguientes funciones para encontrar un autovalor ρ con su autovector q utilizando método de las potencias. Deben tener como entrada una matriz A, un vector inicial q^0, una tolerancia ϵ y una cantidad máxima de iteraciones m (por defecto, $\epsilon = 10^{-10}$ y $m = 500$):

   - `aut_potencias` utilizando el esquema de potencias estándar.
   - `aut_rayleigh` utilizando el esquema de potencias con coeficiente de Rayleigh.

5. Utilice las funciones implementadas para encontrar un autovalor de la siguiente matriz:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. **Implemente** la función `aut_inversas` para encontrar un autovalor ρ con su autovector q utilizando método de las potencias inversas. Debe tener como entrada una matriz A, un vector inicial q^0, una tolerancia ϵ y una cantidad máxima de iteraciones m (por defecto, $\epsilon = 10^{-10}$ y $m = 500$). Resolver el sistema lineal en cada iteración con la descomposición QR.

7. Sea p un polinomio tal que $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Demuestre que las raíces de p son los autovalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \end{bmatrix}.$$

8. Sean $H, R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ donde H es una matriz Hessenberg superior y R triangular superior. Probar que HR RH son matrices Hessenberg superior.

9. Sea H Hessenberg superior tal que $H = Q^T AQ$. Demuestre que si A es simétrica entonces H es tridiagonal.

10. **Implemente** una función llamada `autqr`, que ejecute el método de iteraciones QR para hallar los autovalores de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, comenzando con una reducción en su forma de Hessenberg y utilizando luego rotaciones de Givens. Debe tener como entrada una matriz A, una tolerancia ϵ y una cantidad máxima de iteraciones m (por defecto, $\epsilon = 10^{-10}$ y $m = 500$).