Optimización de Portafolio utilizando el CAPM

Valentín Díaz

Mayo 2024

FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

UNC Universidad Nacional de Córdoba

Índice

1. Introducción

En este informe se presenta un estudio detallado sobre el Capital Asset Pricing Model (CAPM), un modelo fundamental en la teoría financiera que se utiliza para determinar la tasa rendimiento esperada de un activo en función de su riesgo sistemático. Se demostrará matemáticamente la fórmula del CAPM, proporcionando una comprensión profunda de sus fundamentos teóricos. Posteriormente, se desarrollará un problema de programación lineal basado en el CAPM para optimizar un portafolio de acciones. Además, se desarrollará una estrategia de inversión y se implementará en Python utilizando esta formulación de programación lineal.

2. El Capital Asset Pricing Model

El CAPM es una herramienta central en la teoría financiera moderna que describe la relación entre la tasa de rendimiento esperada de un activo y su riesgo sistemático. Este modelo fue introducido por William Sharpe en la década del 60 y ha sido ampliamente adoptado por inversores y académicos para evaluar el retorno de activos. La fórmula es la siguiente:

$$E(R_i) = R_f \, + \, \beta_i(\, E(R_m) - R_f \,) \qquad \text{con} \quad \beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_m)}{\mathrm{Var}(R_m)}$$

En donde:

- $E(R_i)$: Tasa de retorno esperada de un activo i.
- R_f: Tasa de retorno de un activo libre de riesgo.
- β_i: Beta del activo i.
- $E(R_m)$: Tasa de retorno esperada del mercado.

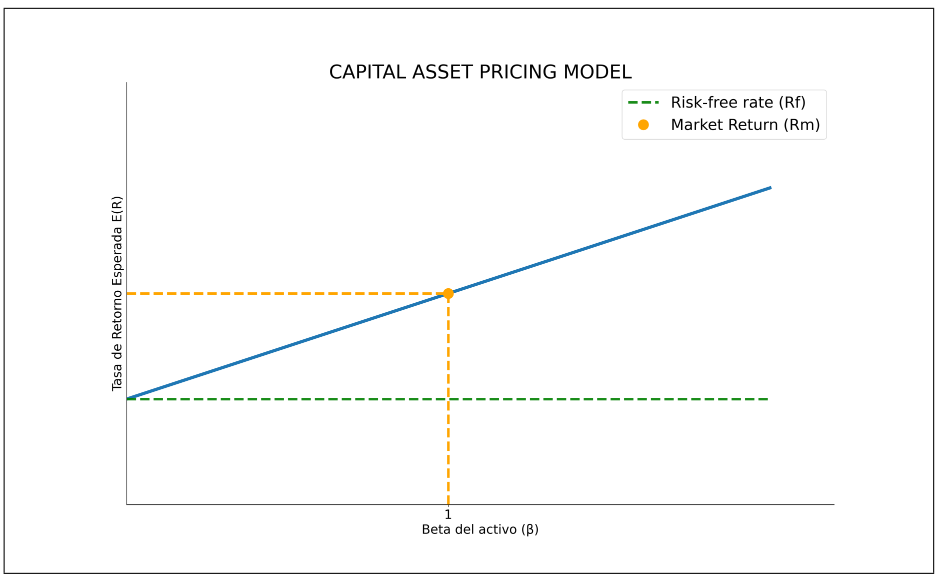

Figura 1: Imagen que representa la relación lineal del $E(R)$ con respecto a β.

La tasa de retorno libre de riesgo proviene de un activo cuyo rendimiento se considera completamente seguro y sin riesgo de pérdida. En la práctica, el activo libre de riesgo suele ser representado por bonos del gobierno de países con una sólida capacidad crediticia, como los bonos del Tesoro de los Estados Unidos.

El coeficiente beta mide la sensibilidad del rendimiento de un activo en relación con los movimientos del mercado en el siguiente sentido:

- Si $\beta_i = 1$, el activo tiene una volatilidad similar a la del mercado, por ejemplo, si el mercado sube o baja un 1 %, se espera que el rendimiento del activo también suba o baje respectivamente un 1 %.
- Si $\beta_i > 1$, el activo es más volátil que el mercado, por ejemplo, si el beta es 1.5, se espera que el rendimiento del activo suba un 1.5 % si el mercado sube un 1 % y baje un 1.5 % cuando el mercado baja un 1 %.
- Si $\beta_i < 1$, el activo es menos volátil que el mercado, por ejemplo, si el beta es 0.5, se espera que el rendimiento del activo suba un 0.5 % cuando el mercado sube un 1 % y baje un 0.5 % cuando el mercado baja un 1 %.
- Si $\beta_i < 0$, el activo tiene una relación inversa con la volatilidad del mercado, por ejemplo si el beta es -1, se espera que el rendimiento del activo baje un 1 % cuando el mercado sube un 1 %, y suba un 1 % cuando el mercado baja un 1 %.

3. Justificación Matemática del CAPM

Supongamos que queremos invertir dinero en algun portafolio de activos $i = 1, ..., n$. Sea x_i la proporción del activo i en el portafolio, $1 - ||x||_1$ la proporción de un activo libre de riesgo con tasa de retorno R_f y R el vector cuya componente R_i es la tasa de retorno del activo i. Tendremos que la tasa de retorno del portafolio estará dado por:

$$R_p = x^T R + (1 - ||x||_1) R_f$$

Luego:

$$\begin{cases} Var(R_p) = x^T Var(R) x \qquad (= \sigma_p^2) \\ E(R_p) = x^T E(R) + (1 - ||x||_1) R_f \end{cases}$$

Fijando una tasa de retorno esperada para nuestro portafolio, uno quisiera minimizar su riesgo. El riesgo de un activo se asocia generalmente a la volatilidad del mismo, y esta se estima a través de su desviación estándar. Luego definimos la función langrangiana para dicho problema como:

$$L(x, \lambda) = \sqrt{Var(R_p)} + \lambda \left(E(R_p) - x^T E(R) - (1 - ||x||_1) R_f \right)$$

Notando que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{Var(R_p)} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^T Var(R) x} = \frac{1}{2\sqrt{Var(R_p)}} \left(Var(R) + Var(R)^T \right) x$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_p^{-1} \, 2 \, \sigma_R^2 \, x = \sigma_p^{-1} \, Var(R) \, x$$

Entonces tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \sigma_p^{-1} Var(R)x + \lambda(R_f.1 - E(R))$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E(R_p) - R_f(1 - ||x||_1) - x^T E(R)$$

Supongamos que existe x que minimiza la desviación sujeto a una cierta tasa de retorno fija, entonces tenemos que:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad (2)$$

Multiplicamos (1) por x^T:

$$\sigma_p^{-1} x^T Var(R)x + \lambda(R_f x^T 1 - x^T E(R)) = 0$$

$$\sigma_p + \lambda(R_f ||x||_1 - x^T E(R)) = 0 \qquad (3)$$

Volvamos por un momento a la definición de $E(R_p)$. Si tomamos en particular el portafolio del mercado, entonces la proporción de la tasa de retorno del activo libre de riesgo es cero y por lo tanto $||x||_1 = 1$. Por consiguiente $E(R_m) = x^T E(R)$. Utilizando esto en (3) nos queda:

$$\frac{1}{\lambda} = (E(R_m) - R_f)\sigma_m^{-1}$$

Despejamos $E(R)$ de (1) para luego reemplazar el valor de lambda anterior:

$$E(R) = R_f + \frac{1}{\lambda}\sigma_m^{-1} Var(R)x = R_f + (E(R_m) - R_f)\sigma_m^{-2} Var(R)x$$

Por último reemplazamos $Var(R)x$:

$$Var(R)x = E[R - E(R)]\ (R - E(R))^T x$$

$$= E[R - E(R)]\ (x^T R - x^T E(R))^T$$

$$= E[R - E(R)]\ (R_m - E(R_m))^T$$

$$= Cov(R, R_m)$$

Finalmente:

$$E(R) = R_f + \frac{Cov(R, R_m)}{Var(R_m)}(E(R_m) - R_f)$$

$$E(R) = R_f + \beta\,(E(R_m) - R_f)$$

4. Portfolio Management con Programación Lineal

4.1. Problema General

Se quiere invertir en activos $i = 1, ..., n$ de forma que la tasa retorno sea lo máximo posible. La proporción de capital invertido en el activo i es w_i y su tasa de retorno es μ_i. Para lograr una ganancia, habrá que asumir un cierto riesgo, en particular se utilizará aquí el concepto del CAPM y se restringirá el riesgo sistemático del portafolio a:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \leq \beta_0$$

Donde β_0 es algun beta arbitrario que dependerá de la elección del inversor y β_i es el beta del activo i. Además se dispondrá del 100 % del capital y no se podrán shortear acciones, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad \wedge \quad 0 \leq w_i \leq 1$$

Por lo tanto, obtener las proporciones de capital a invertir en cada activo dada las restricciones anteriores se traduce en el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_{w} \quad & \mu^T w \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \leq \beta_0 \\ & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ & 0 \leq w_i \leq 1 \quad , \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

4.2. Formato Estándar

Dado que mas adelante se buscará resolver este problema mediante solvers provistos por librerias de Python, se transforma el problema a formato estándar:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

De la primera restricción se agrega una variable $s \geq 0 \in \mathbb{R}$ y generamos la restricción:

$$w^t \beta + s = \beta_0$$

De la segunda restricción se agregan las variables $t_i \geq 0 \in \mathbb{R}$ y generamos la restricción:

$$w_i + t_i = 1 \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

Sea x un vector de $2n+1$ componentes de la siguiente forma:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} w \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

Se define A y b de la siguiente manera:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1_1, & \dots, & 1_n, & 0_{n+1}, & \dots, & 0_{2n+1} \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(1)} = 1$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \beta_1, & \dots, & \beta_n, & 1_{n+1}, & 0_{n+2}, & \dots, & 0_{2n+1} \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(2)} = \beta_0$$

$$A^{(3\,:\,\mathrm{n}+2)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & | & 0 & | & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(3\,:\,\mathrm{n}+2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

En donde Id es la matriz identidad nxn y 0 es un vector columna. Por último definimos $f(x) = -\mu^T x$. De esta manera se tiene definido el problema en formato estándar, y al resolverlo solo se necesitan las con las primeras n componentes de la solución x.

5. Implementación y Estrategia de Inversión

Se diseñará una estrategia de inversión que utilice el planteo de PL anterior y se implementaremá su backtesting en Python. Se utilizarán librerias como yfinance, pandas y NumPy para la importación y manipulación de datos. Se hará uso de la libreria SciPy para la resolución numérica del problema en el cual la implementación decidirá automaticamente si lo resuelve con el método dual simplex revisado o el método de puntos interiores.

Los activos que se utilizarán serán acciones estadounidenses. Las acciones serán del rubro IT, energía, banca, inmobiliario, agropecuario, y de servicios. El β_0 será el beta del S&P 500 ETF, es decir el fondo cotizado en bolsa que sigue el rendimiento del índice S&P 500, con el fin de mantener una menor exposición a la volatilidad del mercado. Al resolver el problema de PL se obtendrá la cantidad de capital para cada activo (la mayoría serán cero) y se ejecutará la siguiente estrategia de trading:

1. En el día t definir a μ como la media de la tasa de los retornos de los últimos 30 días de los activos.

2. En el día t resolver el problema de LP y ponerse en posición long en dichos activos en el cierre del mercado.

3. Holdear los activos por 7 días hábiles bursátiles.

4. Vender los activos en la apertura del mercado en el día $t+7$ días hábiles bursátiles.

5. Volver al paso 1.

Se implementó esta estrategia durante 70 días hábiles bursátiles ($\approx$3 meses y medio) en 6 diferentes ventanas de tiempo y estos fueron los resultados:

Retorno del Portafolio (%)	**Retorno del S&P 500 (%)**	**Inicio**	**Finalización**
14.1458	-7.5153	2022-08-15	2022-11-23
3.6571	-0.6437	2022-11-25	2023-03-10
9.2645	12.6090	2023-03-13	2023-06-23
-2.3558	-2.1718	2023-06-26	2023-10-05
19.2720	10.3529	2023-10-06	2024-01-19
38.4730	3.7088	2024-01-22	2024-05-02

6. Repositorio

La implementación en Python del backtesting está disponible en el siguiente enlace: Notebook

7. Conclusión

El CAPM proporciona un marco conceptual bastante útil para entender la relación entre el riesgo y el rendimiento en los mercados financieros, ofreciendo una fórmula simple para estimar los rendimientos esperados basados en el riesgo sistemático. Sin embargo es importante notar que solo se centra en el riesgo en relación al mercado y no tiene en cuenta el riesgo del activo en sí mismo.

Por otro lado, si bien la solución "semanal" del problema de PL siempre colocaba el capital en 1 o máximo 2 activos, es destacable su alto rendimiento a través del tiempo. Al tener poca cantidad de activos, se esperaría tener una alta exposición a retornos negativos, sin embargo, esto parece estar muy bien controlado por el beta, logrando que la ganancia sea estable a lo largo del tiempo. Mas aún, aunque el portafolio era más conservador ante el riesgo sistemátio que el S&P 500, logró obtener mayores rendimientos.

Es muy importente tener en cuenta que el problema de PL podría tener infinitas soluciones y esto dependerá de las acciones y la cantidad de las mismas. Esto es un problema a la hora de la implementación dado que con solo cambiar el orden de las acciones en el vector w, la solución de del problema cambiará y por lo tanto los retornos del backtesting también.

Referencias

[1] T.J. Watsham, K. Parramore. *Quantitative Methods in Finance.*