Date de réalisation | **2023-2024**

Exploration visuelle des catégories

Auteur : Cossin Valentin[1]
Nature du projet : Notes structurées

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(A)"'] & F(B) \arrow[d, "\eta(B)"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

[1]Sorbonne Université– Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

"Une bonne théorie générale ne recherche pas la généralité maximale, mais la bonne généralité."

– Saunders Mac Lane

Avant-propos

La théorie des catégories, née dans les années 1940 sous l'impulsion de Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane, est une branche des mathématiques qui vise à étudier les structures et les relations entre elles de manière abstraite. Elle a émergé dans le contexte de la topologie algébrique, mais ses applications se sont rapidement étendues à divers domaines, tels que la logique, l'informatique théorique et l'algèbre.

Ce projet vise à représenter visuellement les concepts fondamentaux de la théorie des catégories à l'aide de schémas informels, tous élaborés par mes soins. L'accent est mis sur la mise en évidence des liens entre les notions de catégories, foncteurs, morphismes et autres structures de base, sans entrer dans des détails mathématiques complexes. À travers cette approche, mon objectif est de me forger une compréhension claire et intuitive des relations qui sous-tendent cette théorie abstraite.

Table des matières

Chapitre 1

Concepts de bases

Définition 1. Soit une catégorie C, un domaine A (ou source), et un codomaine B (ou but), dans C. On définit un *morphisme* f tel que :

$$f : A \to B$$

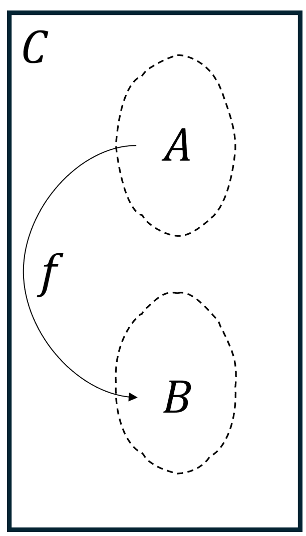

Figure 1.1 – Schéma informel - Morphisme

Définition 2. Soit une catégorie source C, et une catégorie cible D. On définit le *foncteur covariant* $F : C \to D$ tel que :

i) Associateur d'objet : $\forall A$ objet de C, $\exists F(A)$ objet dans D.
ii) Associateur de morphisme : Si $f : A \to B$ est un morphisme dans C, alors $F(f) : F(A) \to F(B)$ est un morphisme de même direction dans D.

Définition 3. De même, on définit le *foncteur contravariant* G de C dans D noté $G : C^{\mathrm{op}} \to D$ tel que :

i) Associateur d'objet : $\forall A$ objet de C, $\exists G(A)$ objet dans D.

ii) Associateur de morphisme : Si $f : A \to B$ est un morphisme dans C, alors $G(f) : G(B) \to G(A)$ est un morphisme de même direction dans D.

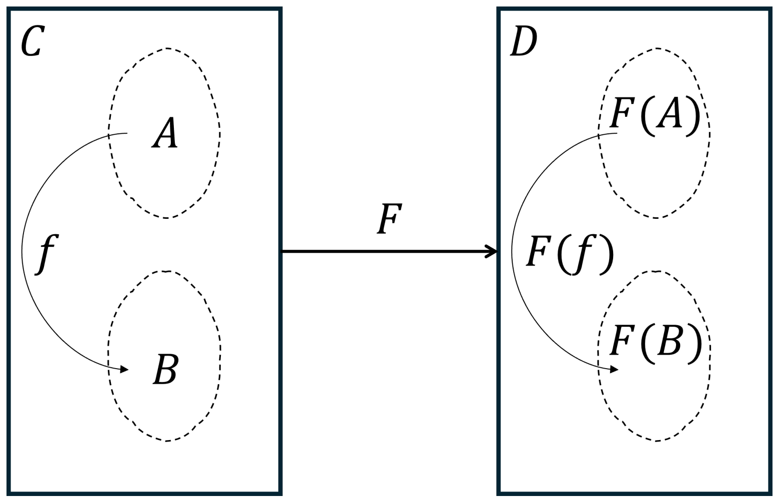

Figure 1.2 – Schéma informel - Foncteur covariant

Définition 4. Soit deux catégories C et D, deux foncteurs covariants de C dans D, et des objets A et B de C. On définit une *transformation naturelle* η de F vers G tel que :

$$\eta(A) : F(A) \to G(A)$$

Alors, $\forall(A, B)$ objets de C et tout morphisme $f : A \to B$, le diagramme 1.4 est commutatif et on a la relation :

$$\boxed{\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A}$$

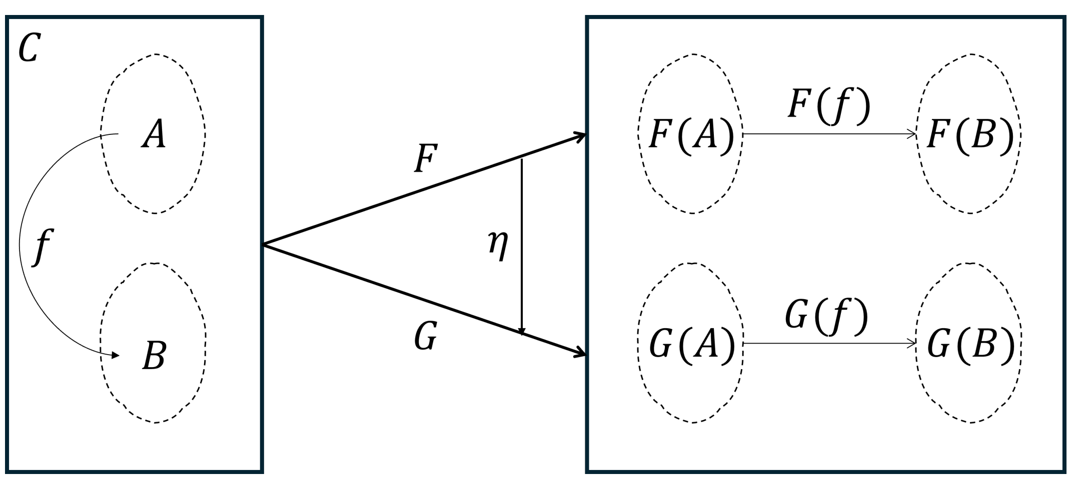

Figure 1.3 – Schéma informel - Transformation naturelle

Un diagramme commutatif illustre la compatibilité entre les morphismes d'une catégorie. Dans le cadre d'une transformation naturelle, il exprime que l'application de η aux objets de C préserve la structure des morphismes, garantissant que l'ordre des applications de F, G et η est invariant. Cette propriété assure la cohérence de la transformation entre les foncteurs et sous-tend de nombreux résultats en théorie des catégories.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(A)"'] & F(B) \arrow[d, "\eta(B)"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Figure 1.4 – Diagramme Commutatif

Chapitre 2

Définition et propriétés

Définition 5. Une catégorie C est la donné de 6 éléments :

i) Une classe $ob(C)$ dont les éléments sont les objets de la catégorie C,

ii) Une classe $mor(C)$ dont les éléments sont les morphismes de la catégorie C,

iii) Une classe $Hom(A, B)$ dont les éléments sont tout les morphismes entre les objets A et B de la catégorie C,

iv) Un morphisme $id_A : A \to A$, $\forall A$ objet de C,

v) Une composition $\circ$ qui à tout couple de morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to C$ associe un morphisme $g \circ f : A \to C$ et tel que :

  i') La composition est associative : $\forall$ morphisme $f : A \to B$, $g : C \to D$, et $h : C \to D$, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$,

  ii') id_A est un élément neutre de la composition : $id_B \circ f = f \circ id_A = f$

Propriété 1. Une catégorie C est dite *localement petite* si et seulement si $\forall (A, B) \in C$; objet de C, la classe $Hom(A, B)$ est un ensemble.

Propriété 2. Une catégorie C est dite *petite* si et seulement la classe $mor(C)$ est un ensemble.

Propriété 3. Une catégorie D est une *sous-catégorie* de C si et seulement si :

i) Les objets de D sont des objets de C.

ii) Pour toute paire d'objets de D, les morphismes de D sont des morphismes de C entre ces objets.

iii) La composition des morphismes dans D est celle induite par C.

iv) Chaque objet de D possède son morphisme identité issu de C.

Propriété 4. Une *sous-catégorie pleine* D d'une catégorie C est une sous-catégorie qui contient certains objets de C et tous les morphismes entre ces objets qui existent dans C.

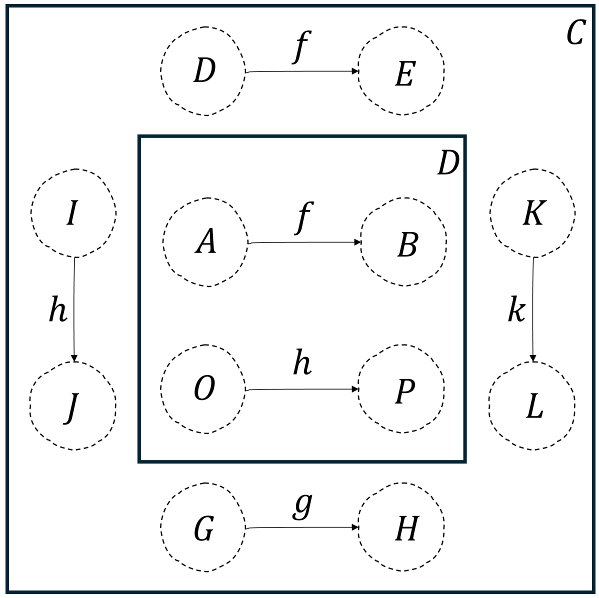

Figure 2.1 – Schéma informel - Sous catégorie D de C

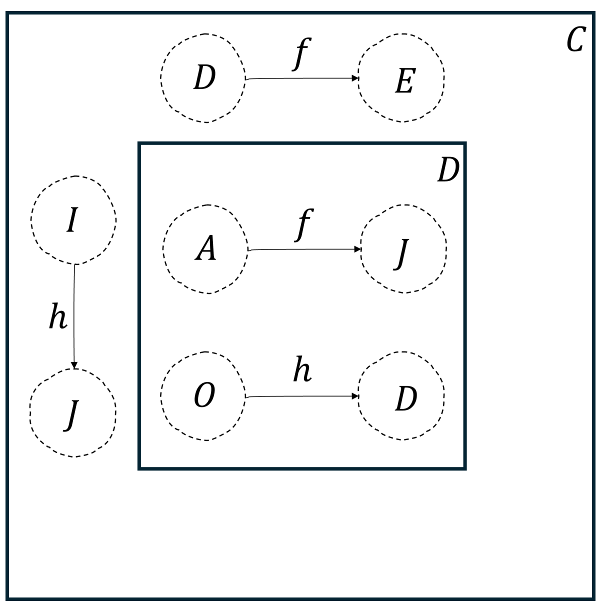

Figure 2.2 – Schéma informel - Sous catégorie pleine D de C

Définition 6. On construit la *catégorie duale* C^{op} de C :

i) En inversant les fonctions sources et but : $f : A \to B$ dans C devient $f^{\text{op}} : B \to A$ dans C^{op},

ii) En conservant les mêmes objets de C pour C^{op}.

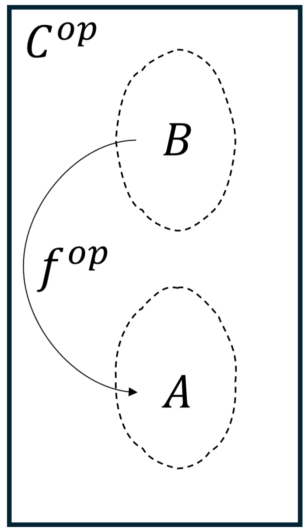

Figure 2.3 – Catégorie dual C^{op} de C

Chapitre 3

Quelques applications

3.1 Exemples de catégories en Mathématiques

En mathématiques, la théorie des catégories fournit un cadre unifiant permettant d'étudier diverses structures algébriques et topologiques à travers leurs relations et transformations. Le tableau ci-dessous illustre quelques catégories usuelles et leurs éléments constitutifs.

Catégorie	**Objets**	**Morphisme**
Ens (ou Set)	ensembles	applications
Top	espaces topologiques	applications continues
Met	espaces métriques	applications uniformément continues
Mon	monoïdes	morphismes de monoïdes
Grp	groupes	morphismes de groupes
Ab	groupes abéliens	morphismes de groupes
ACU	anneaux commutatifs unitaires	morphismes d'anneaux
Ord	ensembles ordonnés	applications croissantes

Table 3.1 – Catégorie en Mathématiques

3.2 Théorie des cobordismes en physique quantique

La théorie des cobordismes fournit un cadre mathématique puissant pour formaliser les transitions entre états de l'espace-temps en physique quantique. Elle joue un rôle central dans les théories des champs topologiques et certaines approches de la gravité quantique. En gravité quantique, on suppose que l'espace-temps n'est pas fixe mais peut fluctuer de manière probabiliste. Un cobordisme entre deux espaces-temps représente alors l'amplitude de transition entre ces deux configurations, comme une fonction d'onde en mécanique quantique qui évolue d'un état à un autre.

Définition 7. On appelle *cobordisme* entre deux variétés A et B une variété M de dimension supérieure à A et B, telle que $\partial M = A \sqcup B$. Cela signifie que M est une évolution continue de A vers B.

Propriété 5. La catégorie des cobordismes, notée **Cob**, est définie de la manière suivante :

i) Les objets sont des variétés de dimension n représentant des configurations d'espace-temps,

ii) Les morphismes sont des cobordismes, c'est-à-dire des variétés de dimension $n+1$ reliant ces objets (dont le bord est constitué des objets sources et cibles),

iii) La composition des morphismes correspond à la concaténation des cobordismes.

Exemple 1. Considérons un espace-temps de dimension $2+1$ (deux dimensions spatiales et une temporelle). L'objet initial A est un disque D^2, représentant un état connexe à un instant donné. Un cobordisme possible consiste en une variété M qui déforme progressivement ce disque en deux cercles S^1 formant l'objet B, illustrant une transition topologique où l'espace initial se scinde en deux composantes distinctes. Un exemple typique est une 'paire de pantalons', qui capture cette évolution.

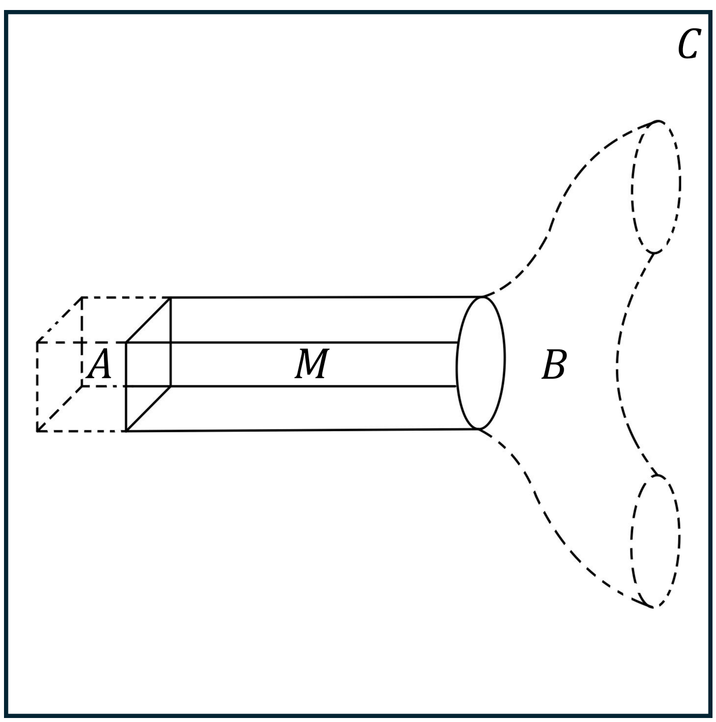

FIGURE 3.1 – Schéma informel - Cobordisme

Interprétation des cobordismes et du temps

Les cobordismes en physique quantique ne décrivent pas une évolution de l'espace-temps dans un temps extérieur préexistant, mais établissent une relation entre différents états possibles de l'univers. Contrairement à la mécanique classique où l'évolution est définie par un paramètre temporel absolu, en gravité quantique, le temps peut émerger en tant que concept effectif à partir de la structure du cobordisme lui-même. Ainsi, un cobordisme représente un lien entre des configurations possibles de l'espace-temps, sans qu'il soit nécessaire de supposer un déjà-là temporel fondamental. En gravité quantique, on va plus loin : il n'y a plus d'évolution temporelle au sens classique, seulement des transitions entre des configurations d'espace-temps !

3.3 Catégories de fibrations en physique quantique

Les catégories de fibrations sont des structures puissantes qui permettent de relier des objets et morphismes dans des catégories plus complexes à une catégorie de base plus simple. En physique quantique, cette approche est utilisée pour formaliser la relation entre différentes configurations d'un système quantique localisé dans un espace-temps plus global, permettant de décrire des phénomènes complexes tout en gardant une relation avec un cadre de référence simplifié.

Définition 8. Une *fibration* est un foncteur $p : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ entre deux catégories $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ tel que pour chaque objet $B \in \mathcal{B}$, la fibre $p^{-1}(B)$ est une catégorie qui peut être vue comme une version plus "détaillée" ou plus "complexe" de l'objet B. En d'autres termes, $\mathcal{E}$ est une catégorie fibrée sur $\mathcal{B}$, et chaque objet de $\mathcal{B}$ est associé à une catégorie $\mathcal{E}_B$.

Exemple 2. Considérons la situation en physique des particules, où $\mathcal{E}$ représente l'espace des configurations locales d'un champ quantique (par exemple, des états quantiques dans différentes régions de l'espace-temps), et $\mathcal{B}$ représente l'espace-temps global (paramétrisé par un temps ou un autre paramètre global). Le foncteur p projette chaque configuration locale $\mathcal{E}_B$ sur la catégorie de base $\mathcal{B}$, reliant ainsi les configurations locales de champs à un paramètre global. Ce foncteur p permet de décrire les configurations d'un champ à différents instants dans un cadre simplifié.

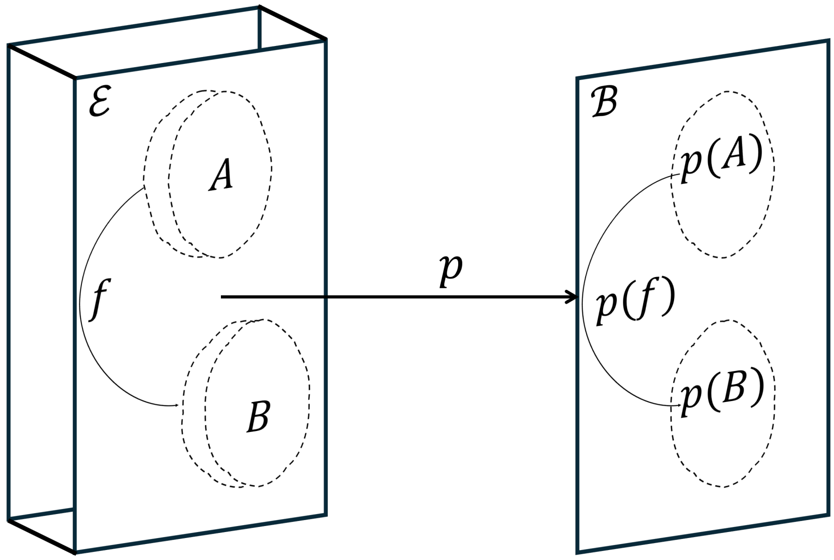

Figure 3.2 – Schéma informel - Catégorie de fibration

Interprétation des fibrations et des foncteurs de projection

Un foncteur p entre deux catégories peut être vu comme un outil de *projection*, qui décompose des informations complexes en un cadre plus simple. Dans le cas des fibrations, ce foncteur p projette les objets et morphismes d'une catégorie complexe $\mathcal{E}$ vers une catégorie de base $\mathcal{B}$. Cela permet de conserver une relation entre des configurations locales (qui peuvent être complexes, représentant des champs ou des états quantiques) et un cadre global plus simple (comme l'espace-temps). Ainsi, le foncteur agit comme un "compresseur" de l'information, simplifiant les détails tout en préservant la structure fondamentale du système. En physique quantique, cela permet de relier les objets locaux d'un système à une vue globale de l'évolution du système, tout en conservant des informations essentielles sur les configurations locales à chaque instant.

3.4 Cobordismes et fibrations : une vision unifiée

On a vu que les cobordismes et les fibrations sont deux concepts centraux en mathématiques et en physique théorique. Alors que les cobordismes décrivent les transitions continues entre états de l'espace-temps, les fibrations permettent d'organiser ces transitions en une structure projetée plus simple. En combinant ces deux notions, nous obtenons une hiérarchie naturelle entre une catégorie riche en structure et une catégorie plus simple où l'information est condensée.

Définition 9. Soit $\mathcal{E}$ une catégorie où les objets sont des paires (a_n, b_n) et les morphismes sont des cobordismes M_n reliant ces objets. Une *projection fibrée* est un foncteur $p : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ vers une catégorie $\mathcal{B}$, où les objets sont les projections des paires (a_n, b_n) et les morphismes m_n sont les images des cobordismes M_n sous p.

Propriété 6. Une telle projection satisfait les propriétés suivantes :

i) **Compression de l'information** : le foncteur p projette la complexité des cobordismes en des morphismes plus simples dans $\mathcal{B}$, réduisant ainsi la dimension de l'évolution spatiale.

ii) **Relèvement des morphismes** : si p est une fibration de Grothendieck, tout morphisme m_n dans $\mathcal{B}$ peut être relevé en un cobordisme M_n dans $\mathcal{E}$, préservant ainsi la richesse de la structure originale.

iii) **Perspective physique** : en théorie quantique, cela revient à dire que nous pouvons soit travailler avec une description détaillée des transitions (via les cobordismes), soit utiliser une version simplifiée où seules les connexions entre états sont visibles.

Exemple 3. En physique des particules, considérons un espace où chaque état (a_n, b_n) représente une paire de particules interagissant par un processus M_n. En appliquant le foncteur de fibration p, nous obtenons une description simplifiée où seules les particules et leurs transitions m_n sont visibles, sans détail sur les chemins intermédiaires de l'interaction.

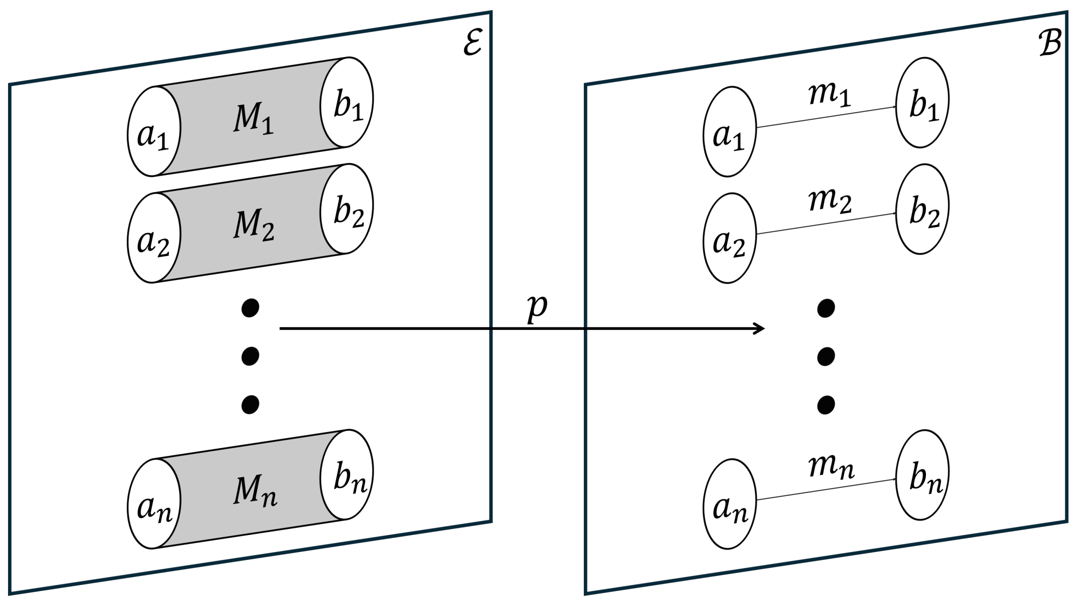

Figure 3.3 – Schéma informel - Projection fibrée d'un cobordisme vers une structure plus simple

Compression de l'information par fibration

Le foncteur p joue un rôle crucial dans la simplification des structures complexes : il projette une catégorie $\mathcal{E}$ riche en objets et en morphismes vers une catégorie plus simple $\mathcal{B}$, où seule une information essentielle est conservée. Cette approche est analogue à la manière dont un observateur en mécanique quantique ne perçoit que les états mesurables d'un système, sans accès direct aux superpositions intermédiaires. Ainsi, la fibration fournit un cadre formel pour relier des descriptions détaillées et simplifiées de la dynamique de l'espace-temps.

Bibliographie

[1] A. Blass. *Questions and Answers - A Category Arising in Linear Logic, Complexity Theory, and Set Theory.* 1993. arXiv :9309208v1.

[2] D.-E. Diaconescu. *Enhanced D-Brane Categories from String Field Theory.* 2001. arXiv :0104200v3.

[3] E. R. Fosco Loregian. *Categorical Notions of Fibration.* 2019. arXiv :1806.06129v2.

[4] E. L. Lev Landau. *Physique Théorique : Théorie des Champs.* Ellipses, 1993.

[5] I. B. F. Louis Crane. *Four Dimensional Topological Quantum Field Theory, Hopf Categories, and the Canonical Bases.* 2004. arXiv :9405183v3.

[6] M. D. J. H. M. U. Roberta Angius, José Calderón-Infante. *At the End of the World : Local Dynamical Cobordism.* 2022. arXiv :2203.11240v3.