

Bille rebondissante sur un plateau oscillant

COMBES Robin, COSSIN Valentin, HERBI Hania¹



²Sorbonne Université - Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Table des matières

1	Introduction	3
2	Matériel et Méthode	3
2.1	Position du problème	3
2.2	Instant de décollage	4
2.3	Instant de collision	4
2.4	Gestion du régime colle	4
2.5	Gestion des collisions	5
2.6	Simulation principale	5
3	Analyse des résultats et discussion	6
3.1	Régime périodique et régime chaotique	6
3.2	Diagramme de bifurcation et nombre de Feigenbaum	7
3.3	Exposant de Lyapunov	8
3.4	Espace des phases réduit	9
4	Conclusion	12
4.1	Critique de la partie informatique du projet	13
4.2	Critique de la partie modélisation physique du projet	13
4.3	Critique de la partie scientifique du projet	13
5	Prise en main du code	13
	Bibliographie	14

1 Introduction

En 1982, P.J. Holmes a été le premier à étudier de manière formelle le comportement d'une bille rebondissant verticalement sur une plaque en oscillation sinusoïdale. Ce projet a pour objectif de modéliser et de simuler les rebonds d'une bille sur un plateau horizontal en oscillation verticale, de pulsation ω , afin d'étudier la dynamique de ce système unidimensionnel, riche et complexe.

À faible pulsation, le système présente des solutions périodiques, où la bille rebondit un nombre fixe de fois par période de l'oscillation du plateau. À mesure que la pulsation augmente, le système entre dans un régime chaotique, caractérisé par une perte de régularité dans le mouvement de la bille. Cette transition, visible à travers un diagramme de bifurcation, se manifeste par des phénomènes typiques des systèmes chaotiques tels que la sensibilité aux conditions initiales, la convergence vers un attracteur étrange, ainsi que l'apparition d'un exposant de Lyapunov strictement positif. Ce projet explore ces phénomènes en variant la pulsation du plateau, en étudiant le comportement de la bille et en simulant différents régimes dynamiques.

2 Matériel et Méthode

2.1 Position du problème

Le système étudié modélise le comportement d'une bille soumise à la gravité et à des interactions avec un plateau en mouvement vertical sinusoïdal. Le mouvement est unidimensionnel et repose sur les équations de Newton ainsi que les principes de la dynamique des chocs.

La bille est initialement lancée depuis une hauteur h_i avec une vitesse v_i , généralement très faible. En l'absence de contact avec le plateau, son mouvement est purement parabolique et s'écrit :

$$y_{\text{ball}}(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_i t + h_i \quad (1)$$

Le plateau suit une oscillation verticale de type sinusoïdal :

$$y_{\text{plate}}(t) = A \sin(\omega t)$$

Une collision se produit lorsque la bille atteint la position du plateau, c'est-à-dire lorsque :

$$y_{\text{ball}}(t) \leq y_{\text{plate}}(t)$$

La vitesse de la bille après collision est calculée à l'aide du coefficient de restitution μ et de la vitesse instantanée du plateau :

$$v_{\text{ball}}^{\text{ap}} = v_{\text{plate}} - \mu(v_{\text{ball}}^{\text{av}} - v_{\text{plate}}) \quad (2)$$

où :

- $v_{\text{ball}}^{\text{av}}$ est la vitesse de la bille juste avant le choc,
- $v_{\text{ball}}^{\text{ap}}$ est la vitesse après le choc,
- v_{plate} est la vitesse du plateau à l'instant du choc,
- μ est le coefficient de restitution, modélisant la perte d'énergie.

Un comportement particulier peut survenir lorsque la bille reste temporairement « collée » au plateau après un choc. Cette transition vers un régime d'adhérence dépend de la dynamique relative entre la bille et le plateau. L'instant de décollage, conditionnant le retour au régime de vol libre, est déterminé par des critères dynamiques abordés dans la section suivante.

2.2 Instant de décollage

Cette section vise à déterminer le moment où la bille quitte le régime « colle », c'est-à-dire lorsqu'elle se détache du plateau oscillant. Pour cela, on pose une condition sur l'accélération du plateau : le décollage se produit dès que l'accélération du plateau dépasse celle de la pesanteur. Cette condition s'écrit :

$$|a_{\text{plate}}(t)| > g \iff | -A\omega^2 \sin(\omega t) | > g.$$

On en déduit :

$$|\sin(\omega t)| > \frac{g}{A\omega^2}.$$

La première valeur de t satisfaisant cette condition est :

$$t_{\text{décolle}} = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{g}{A\omega^2}\right).$$

L'algorithme de décollage repose sur les cas suivants :

- Si $\omega = 0$, le plateau est immobile, et aucun décollage n'est possible : la fonction retourne **False**.
- Si le rapport $K = \frac{g}{A\omega^2} \leq 1$, le décollage est possible. La fonction retourne alors **True** et l'instant $t_{\text{décolle}}$.
- Si $K > 1$, l'accélération maximale du plateau est insuffisante pour permettre un décollage : la fonction retourne **False**.

Cette condition permet de modéliser la transition entre le régime collé et le régime de vol libre, en détectant précisément l'instant où la bille peut se détacher du plateau.

2.3 Instant de collision

L'objectif de cette section est de déterminer numériquement l'instant de collision $T_{\text{collision}}$ entre la bille et le plateau, c'est-à-dire le moment où leurs positions deviennent égales :

$$y_{\text{ball}}(T_{\text{collision}}) = y_{\text{plate}}(T_{\text{collision}}).$$

En remplaçant par les expressions respectives des trajectoires, cette condition s'écrit :

$$-\frac{g}{2}T_{\text{collision}}^2 + v_i T_{\text{collision}} + h_i = A \sin(\omega T_{\text{collision}}).$$

Cette équation étant transcendante, elle ne peut être résolue analytiquement. On procède donc par une méthode numérique de recherche de racine. Le problème revient à trouver un zéro de la fonction :

$$f_{\text{intersection}}(t) = y_{\text{ball}}(t) - y_{\text{plate}}(t).$$

Dans notre implémentation, cette recherche repose sur la méthode de bisection, qui garantit la convergence si un changement de signe est observé dans l'intervalle de recherche. Plus précisément, le test est effectué entre deux instants consécutifs t_{i-2} et t_{i-1} , pour lesquels on vérifie le signe de $f_{\text{intersection}}(t)$. L'algorithme s'appuie sur la fonction `bisect` du module `scipy.optimize`, avec une précision fixée à 2×10^{-12} en valeur absolue et 8.88×10^{-16} en valeur relative. Une limite de 100 itérations est imposée pour éviter toute divergence. L'instant $T_{\text{collision}}$ ainsi obtenu permet ensuite de mettre à jour précisément la position et la vitesse de la bille après l'impact, conformément aux lois de la dynamique des chocs.

2.4 Gestion du régime colle

Cette section traite de la dynamique de la bille lorsqu'elle reste en contact avec le plateau. Ce régime colle est maintenu tant que la condition de décollage $|a_{\text{plate}}| > g$ n'est pas satisfaite. La simulation repose sur les étapes suivantes :

- On vérifie si l'instant courant t_j dépasse le temps de décollage $t_{\text{décolle}}$. Si oui :

1. On ajuste l'instant précédent t_{j-1} à t_{decolle} .
2. On impose la continuité de la position et de la vitesse :

$$y_{\text{ball}}(t_{\text{decolle}}) = y_{\text{plate}}(t_{\text{decolle}}), \quad v_{\text{ball}}(t_{\text{decolle}}) = v_{\text{plate}}(t_{\text{decolle}}).$$

- Après ce réajustement, on évalue si la bille reste collée après un petit pas de temps dt en testant :

$$y_{\text{ball}}(t_j + dt) < y_{\text{plate}}(t_j + dt).$$

1. Si cette condition est satisfaite, la bille suit toujours le plateau, et sa position et vitesse sont mises à jour en conséquence.
 2. Sinon, la bille entre en mouvement libre et on applique les équations de la chute.
- Si $t_j \leq t_{\text{decolle}}$, la bille reste dans le régime colle et suit strictement le mouvement du plateau :

$$y_{\text{ball}}(t_j) = y_{\text{plate}}(t_j), \quad v_{\text{ball}}(t_j) = v_{\text{plate}}(t_j).$$

Cette approche garantit une transition cohérente entre le régime colle et le mouvement libre en anticipant le décollage dès que les conditions physiques l'exigent.

2.5 Gestion des collisions

Cette section décrit la mise à jour des conditions dynamiques de la bille après une collision avec le plateau. Dès la détection de l'impact, la vitesse de la bille juste avant la collision est calculée, puis la position et la vitesse sont ajustées en fonction de celles du plateau à l'instant $T_{\text{collision}}$. Deux régimes peuvent alors se présenter :

- **Régime colle** : la bille reste attachée au plateau. On vérifie si la condition de décollage $|a_{\text{plate}}| > g$ est satisfaite. Si ce n'est pas le cas, la bille suit strictement la trajectoire du plateau. Sinon, le prochain instant de décollage est anticipé à l'aide de :

$$t_n^{\text{decolle}} = t_{\text{decolle}} + n \cdot \frac{2\pi}{\omega},$$

où t_1 est le premier instant de décollage positif, et n le nombre de cycles complets. Si $t_n^{\text{decolle}} < t_{j-1}$, l'instant de décollage est reporté au cycle suivant. Si aucun décollage n'est possible, la simulation est interrompue ; sinon, la trajectoire est poursuivie dans le régime libre après décollage.

- **Régime rebond** : la bille rebondit sur le plateau. Si la condition de colle n'est pas remplie, la bille entre en mouvement libre avec une nouvelle vitesse calculée selon les lois de la collision. La position est ajustée en conséquence.

Cette gestion permet de distinguer précisément les dynamiques post-collision, garantissant une transition cohérente entre régimes colle et rebond.

2.6 Simulation principale

La simulation repose sur une discrétisation temporelle, dans laquelle l'évolution de la bille est déterminée à chaque pas de temps en fonction de trois cas distincts, traités à l'aide des fonctions précédemment définies :

- **Chute libre** : Lorsque la bille se trouve au-dessus du plateau ($y_{\text{ball}} > y_{\text{plate}}$), elle suit une trajectoire balistique. Sa position et sa vitesse sont mises à jour via les fonctions $y_{\text{ball}}(t)$ et $v_{\text{ball}}(t)$, calculées à partir des conditions initiales au dernier pas.
- **Régime colle** : Si la bille reste au contact du plateau pendant deux pas de temps consécutifs ($y_{\text{ball}}^{j+1} = y_{\text{plate}}^{j+1}$ et $y_{\text{ball}}^{j+2} = y_{\text{plate}}^{j+2}$), elle entre dans un régime colle : elle épouse alors le mouvement du plateau. On vérifie si un décollage est possible à l'instant suivant en comparant sa trajectoire libre et celle du plateau. Si non, la bille suit le mouvement imposé du plateau.

- **Collision** : Si la bille touche le plateau sans être en régime colle, une collision est détectée. L'instant exact est déterminé par la méthode de bisection. La vitesse post-collision est calculée selon un modèle amorti ($v_{\text{ball}} = v_{\text{plate}} - \mu(v_{\text{ball}}^{\text{avant}} - v_{\text{plate}})$). Ensuite, on teste si la bille repart ou reste collée au plateau. Dans ce dernier cas, si aucun nouveau décollage n'est possible, la simulation est arrêtée.

Le programme alterne donc entre ces trois régimes pour simuler la dynamique complète du système. Cette structure permet de capter les comportements typiques observés dans les systèmes bille-plateau oscillant : chute, rebond amorti, adhérence temporaire ou permanente.

3 Analyse des résultats et discussion

3.1 Régime périodique et régime chaotique

À l'aide des fonctions définies précédemment, on commence par tracer les trajectoires de la bille et du plateau. On remarque que, en variant légèrement les paramètres du problème, le comportement de la bille peut passer d'un régime périodique à un régime totalement chaotique.

On voit que pour le jeu de paramètres :

$$(\mu = 0.53, \quad \omega = 2\pi(20.43002) \text{ Hz}, \quad A = 10^{-3} \text{ m}, \quad h_i = 0.05 \text{ m})$$

on obtient un comportement parfaitement périodique (après un régime transitoire) à partir de $t = 0.575 \text{ s}$ (figure 1). En prenant une pulsation légèrement différente $\omega = 2\pi(20.43)$, la bille suit un comportement totalement chaotique (figure 2).

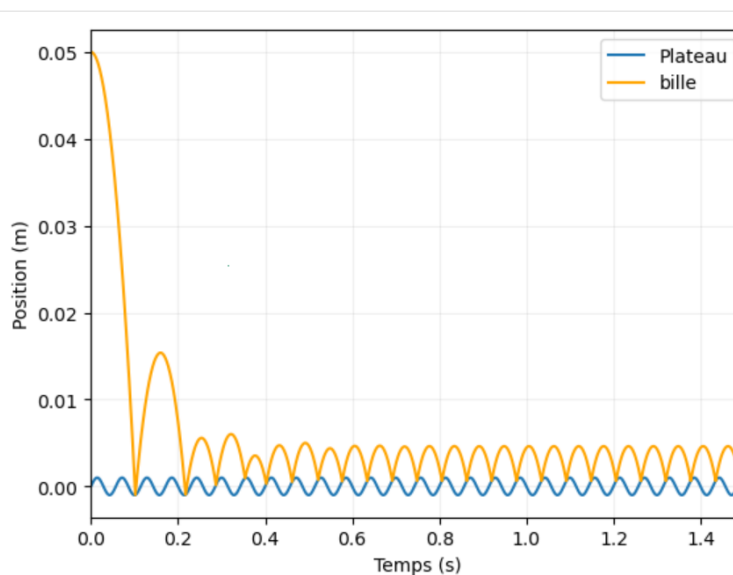


FIGURE 1 – Trajectoire de la bille et du plateau (comportement périodique)

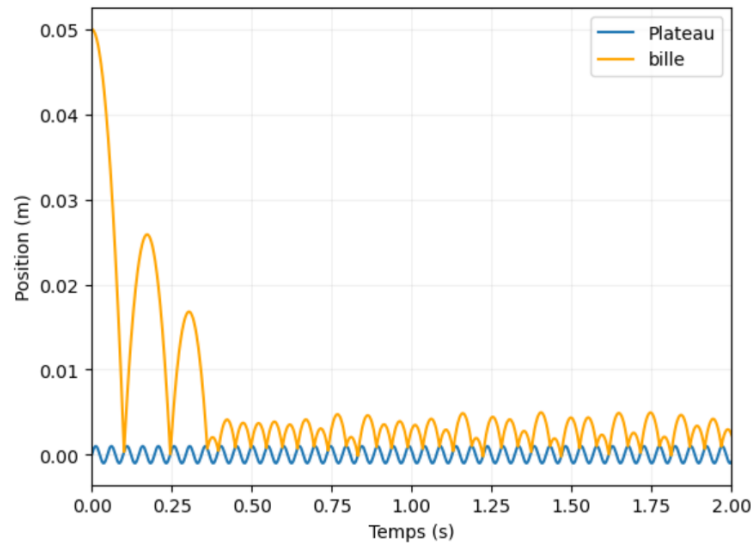


FIGURE 2 – Trajectoire de la bille et du plateau (comportement chaotique)

3.2 Diagramme de bifurcation et nombre de Feigenbaum

Dans cette partie, on souhaite tracer le diagramme de bifurcation associé à la bille lorsque cette dernière a un comportement chaotique en prenant le jeu de paramètres :

$$(A = 10^{-3}m, \quad h_i = 75 \text{ mm})$$

et en faisant varier ω dans l'intervalle $[118 \text{ rad}, 128 \text{ rad}]$.

On calcule ensuite les instants de collisions et on stock les différences entre deux instants de collisions successifs dans un tableau.

On trace alors ces différences de moments de collisions en fonction des impulsions ω . On obtient :

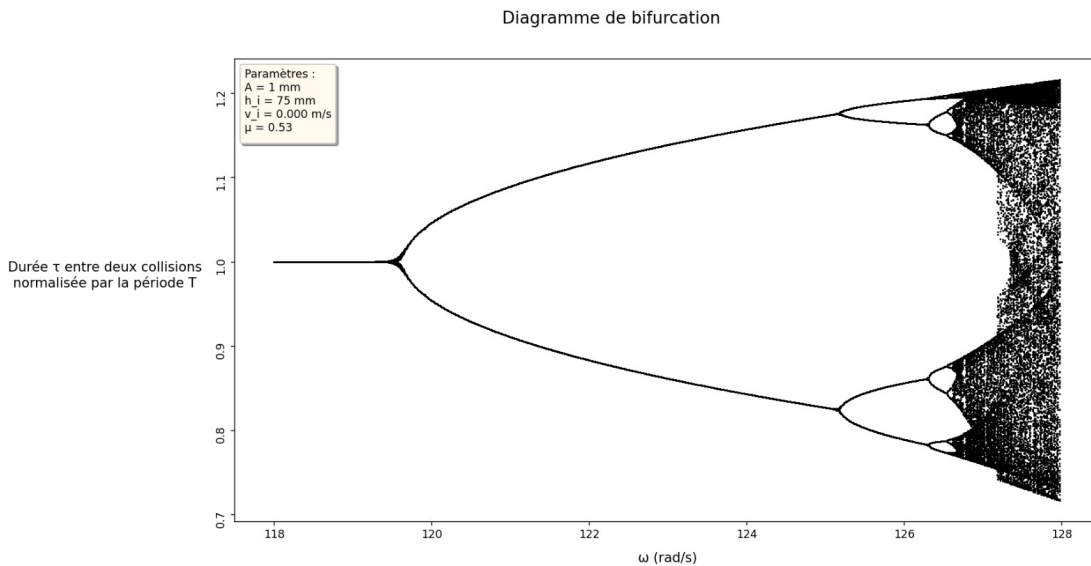


FIGURE 3 – Diagramme de bifurcation

Le nombre de Feigenbaum est une constante universelle qui apparaît dans l'étude des systèmes dynamiques non linéaires. Il caractérise le taux de convergence des bifurcations successives menant au chaos dans des systèmes présentant un doublement de période, comme la célèbre *application logistique* :

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

Lorsque le paramètre de contrôle μ augmente, le système subit une série de bifurcations où la période de l'orbite stable double avant d'entrer dans un régime chaotique. Le rapport entre les intervalles successifs des valeurs critiques de μ aux bifurcations suit une loi universelle et tend vers la constante de Feigenbaum :

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}} \approx 4.6692$$

Cette constante, découverte par le mathématicien Mitchell Feigenbaum, est indépendante du système étudié et constitue un résultat fondamental de la théorie du chaos. Dans notre cas, le paramètre de contrôle est la pulsation. Pour calculer le nombre de Feigenbaum, nous utilisons sa définition :

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\omega_{n+2} - \omega_{n+1}}$$

où ω_i représente la $i^{\text{ème}}$ pulsation pour laquelle une bifurcation se produit. La méthode consiste à choisir une échelle de zoom adaptée sur le diagramme de bifurcation (c'est-à-dire à fixer la précision des mesures) et à identifier la première pulsation où une branche se divise en deux. Dans un diagramme comportant 1000 points, nous obtenons les valeurs suivantes :

$$\omega_1 = 119.25 \quad , \quad \omega_2 = 124.98 \quad , \quad \omega_3 = 126.25 \quad , \quad \omega_4 = 126.53 \quad , \quad \omega_5 = 126.59$$

Nous calculons ensuite le nombre de Feigenbaum :

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2} = 4.51 \quad , \quad \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_4 - \omega_3} = 4.53 \quad , \quad \frac{\omega_4 - \omega_3}{\omega_5 - \omega_4} = 4.66$$

Nos résultats sont donc en accord avec la théorie, puisqu'ils se rapprochent de cette valeur lorsque l'on considère des bifurcations de rang supérieur.

3.3 Exposant de Lyapunov

L'objectif de cette section est d'estimer l'**exposant de Lyapunov**, un indicateur fondamental de la stabilité d'un système dynamique. Il permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales, c'est-à-dire la vitesse à laquelle deux trajectoires initialement proches divergent ou convergent au cours du temps. Formellement, soit $y_i(t)$ et $y_j(t)$ deux trajectoires du système dont les conditions initiales ne diffèrent que d'une petite perturbation ϵ . L'écart $\Delta(t) = |y_j(t) - y_i(t)|$ évolue, pour des temps suffisamment longs, selon :

$$\boxed{\Delta(t) \propto \exp(\lambda t)} \quad (3.1)$$

où λ est appelé exposant de Lyapunov.

- Si $\lambda > 0$, les trajectoires divergent de manière exponentielle : le système est **chaotique**.
- Si $\lambda < 0$, les trajectoires convergent : le système est **stable**.
- Si $\lambda = 0$, les trajectoires restent à distance constante : le système est **marginalelement stable** (cas limite).

Pour estimer λ , on compare deux trajectoires dont l'une est légèrement perturbée (ici, une perturbation $\epsilon = 10^{-6}$ m est ajoutée à la hauteur initiale h_i). On calcule l'évolution de l'écart $\Delta(t)$ entre les trajectoires au cours du temps, puis on trace $\ln(\Delta(t))$ en fonction de t (voir figure 4).

La portion linéaire du graphe est ensuite ajustée par une régression affine $y = \lambda t + b$, ce qui permet d'estimer directement l'exposant de Lyapunov (voir figure 5). On obtient ici :

$$\boxed{\lambda = 10.83 > 0}$$

Ce résultat indique une divergence exponentielle des trajectoires : le système présente un **comportement instable**, typique des systèmes chaotiques.

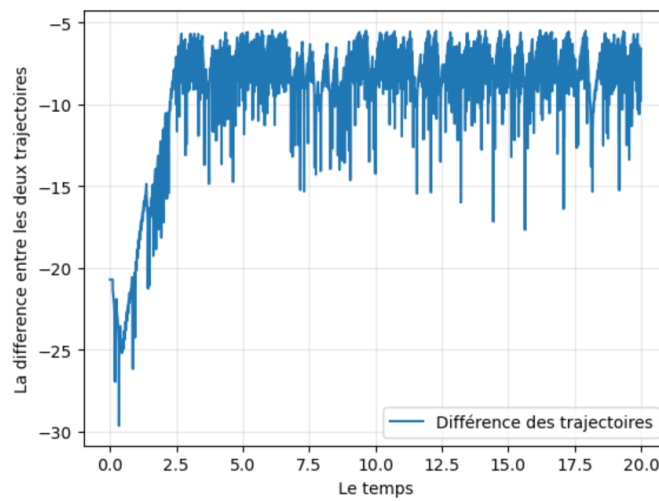


FIGURE 4 – Évolution de $\ln(\Delta(t))$ en fonction du temps

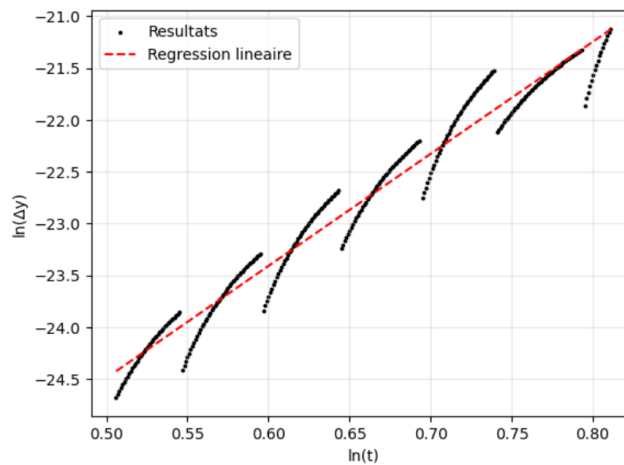


FIGURE 5 – Ajustement linéaire de $\ln(\Delta(t))$: estimation de l'exposant de Lyapunov

3.4 Espace des phases réduit

Nous nous sommes également intéressés à la représentation du comportement de la bille dans l'espace des phases réduit portant sur l'axe des ordonnées la durée séparant deux collisions et sur l'axe des abscisses la vitesse de la bille après la 2^e collision. On peut reprendre le diagramme de bifurcation obtenu précédemment en mettant en évidence certains régimes particuliers d'intérêts auxquels on associe une couleur distincte (figure 6).

A chaque régime identifié est alors respectivement associé une des représentations dans l'espace des phases des figures 7 (avec les couleurs correspondantes).

On constate que l'on retrouve ainsi les mêmes informations obtenues avec le diagramme de bifurcation pour les régimes stables non chaotiques.

Afin de mettre en évidence la complexité de la dynamique chaotique, nous avons représenté un attracteur étrange obtenu numériquement à partir d'une simulation longue ($T_{\max} = 3600$ s). La figure 8 montre une représentation du système dans l'espace des phases réduit, où chaque point correspond à un état du système caractérisé par la vitesse de la bille après la 2^e collision (abscisse) et le temps τ écoulé entre deux collisions successives, normalisé par la période d'oscillation du plateau (ordonnée). On observe que l'ensemble des points forme une structure non triviale, repliée sur elle-même, typique d'un attracteur étrange. Ce comportement indique une dynamique déterministe mais très sensible aux conditions initiales.

Un zoom progressif sur différentes portions de l'attracteur (voir figure 9) met en évidence sa structure fractale : malgré un grossissement de plusieurs ordres de grandeur, la complexité persiste. Cela révèle la présence de sous-structures similaires à toutes les échelles.

Ce comportement chaotique résulte de la forte non linéarité du système : à chaque collision, la vitesse de rebond dépend de manière complexe de l'instant d'impact, lui-même dépendant de la trajectoire précédente. Du point de vue mathématique, le chaos naît de deux phénomènes conjoints :

- Un mécanisme d'étirement des trajectoires dans l'espace des phases : des conditions initiales légèrement différentes donnent naissance à des trajectoires de plus en plus divergentes comme on l'a vu dans la section 3.3 ;
- un mécanisme de repliement : la dissipation (liée à $\mu < 1$) contracte les trajectoires dans certaines directions, forçant leur regroupement sur une région de dimension réduite, comme on vient de le voir dans cette section.

L'alternance de ces deux mécanismes (étirement et repliement), combinée à la perte d'énergie, conduit à la formation d'un attracteur étrange vers lequel les trajectoires convergent. L'attracteur porte donc l'empreinte du chaos déterministe propre à ce système.

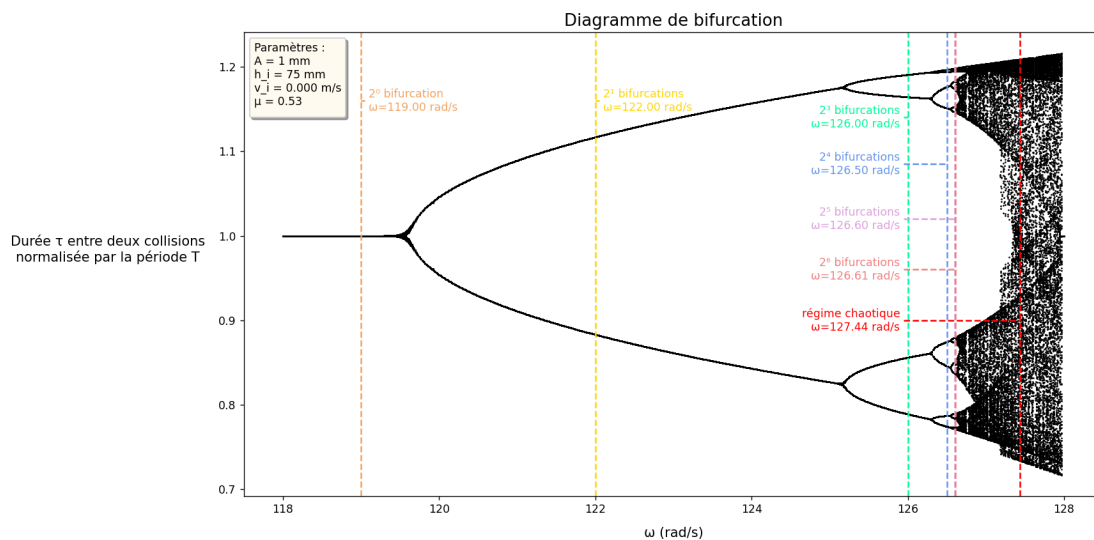


FIGURE 6 – Diagramme de bifurcation pour l'espace des phases

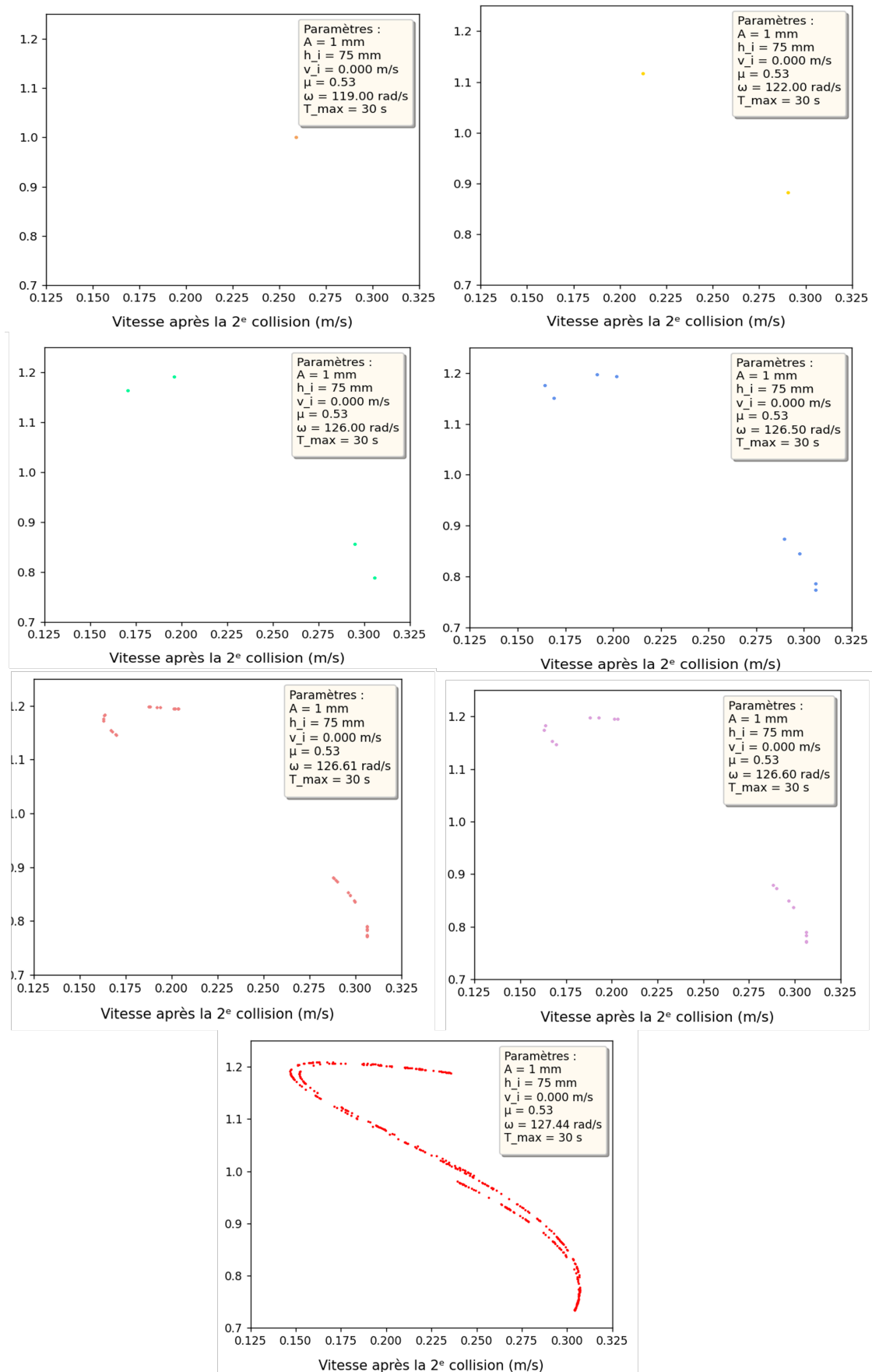


FIGURE 7 – Ensemble des portrait de phase

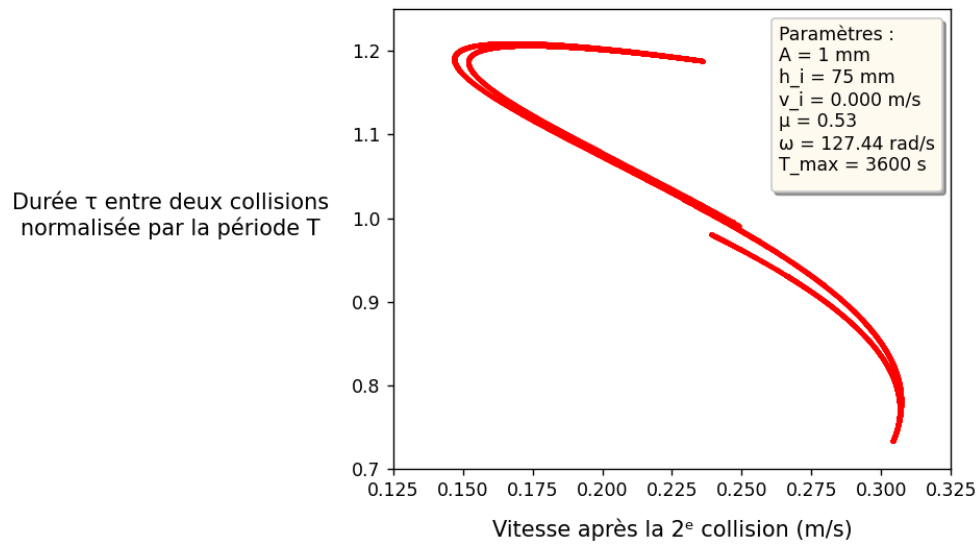


FIGURE 8 – Représentation de l'attracteur dans l'espace des phases réduit

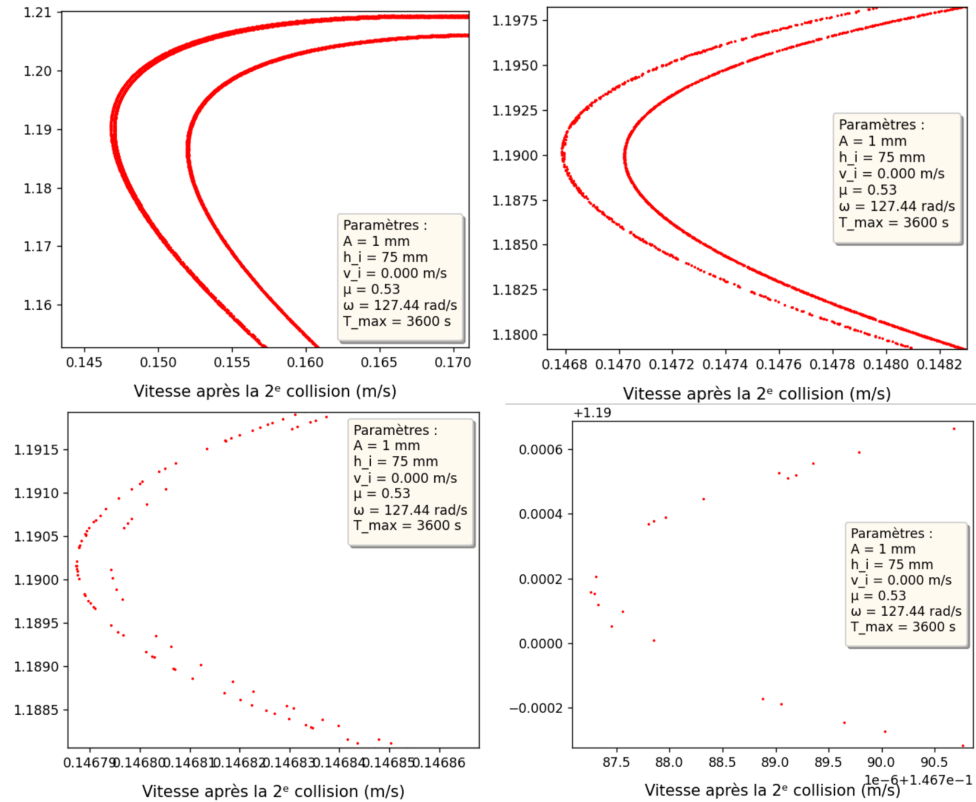


FIGURE 9 – Représentation de l'attracteur étrange à différentes échelles

4 Conclusion

Ce projet nous a permis de modéliser et simuler le comportement dynamique d'une bille rebondissant sur un plateau oscillant, en explorant à la fois les régimes de rebond, de "collage" et les caractéristiques temporelles des chocs.

4.1 Critique de la partie informatique du projet

Sur le plan informatique, le programme fonctionne globalement de manière satisfaisante et permet une visualisation claire des trajectoires, des rebonds et des régimes dynamiques. Toutefois, plusieurs pistes d'amélioration sont envisageables :

- Certaines fonctions pourraient être davantage factorisées pour améliorer la lisibilité et faciliter les modifications ultérieures (par exemple, les fonctions de traitement des collisions ou de filtrage des données).
- Une meilleure organisation du code sous forme de modules ou de classes permettrait d'améliorer le recyclage du code, en particulier si l'on souhaite étendre le modèle ou explorer d'autres régimes d'oscillation du plateau ou de la bille.
- L'intégration d'interfaces graphiques simples ou de menus pour tester différentes conditions initiales ou paramètres physiques en temps réel améliorerait l'exploration du système (typiquement avec l'utilisation des `Widgets` de `Matplotlib`).

4.2 Critique de la partie modélisation physique du projet

Du point de vue physique, notre modèle capture bien les dynamiques essentielles de la bille, en prenant en compte l'oscillation du plateau et les conditions de décollage et de rebond. Cependant, certains aspects de la réalité physique restent simplifiés :

- La modélisation du contact suppose un coefficient de restitution fixe, sans prise en compte d'effets dépendant de la vitesse ou de la hauteur du rebond.
- Les forces dissipatives comme les frottements de l'air ou les pertes d'énergie non modélisées pourraient influencer les résultats, surtout dans les régimes de faible rebond.
- La phase de transition entre collage et rebond mériterait une modélisation plus fine, notamment si l'on souhaite explorer des comportements critiques ou chaotiques du système.

4.3 Critique de la partie scientifique du projet

Enfin, d'un point de vue plus scientifique, plusieurs pistes d'exploration auraient pu enrichir le projet :

- Bien que nous ayons envisagé d'analyser le phénomène d'hystérésis, les résultats graphiques obtenus ne montraient pas de structure suffisamment claire ou significative pour apporter une réelle plus-value au projet. Une étude plus approfondie, avec d'autres paramètres ou une résolution plus fine, pourrait toutefois permettre de révéler des effets d'hystérésis cachés.
- Une étude fréquentielle des collisions ou des vitesses de rebond aurait permis d'identifier des régimes de résonance ou des signatures caractéristiques du système.

5 Prise en main du code

Le code principal de la simulation est contenu dans le fichier `main_code.py`, qui doit être placé dans le même répertoire que le fichier `Notebook.ipynb`. Ce fichier `main_code.py` agit comme une bibliothèque et est essentiel pour le bon fonctionnement du notebook, car il contient les fonctions qui régissent la dynamique de la bille.

Le notebook, quant à lui, est utilisé pour explorer diverses applications physiques basées sur cette dynamique. Parmi les fonctionnalités implémentées dans le notebook, on retrouve des analyses telles que la bifurcation, l'exposant de Lyapunov, l'attracteur étrange, et d'autres comportements physiques associés à la simulation de la bille en chute et en rebond sur un plateau oscillant.

Pour utiliser ces codes, il suffit de s'assurer que les deux fichiers `main_code.py` et `Notebook.ipynb` sont dans le même dossier. Ensuite, vous pouvez ouvrir le notebook et l'exécuter cellule par cellule. Les fonctions définies dans `main_code.py` seront directement accessibles dans le notebook pour permettre l'exécution des différentes analyses.

Références

- [1] P. Boissel. La bille qui rebondit : une expérience simple pour aborder la physique du chaos. *Bulletin de l'union des physiciens*, 1992.