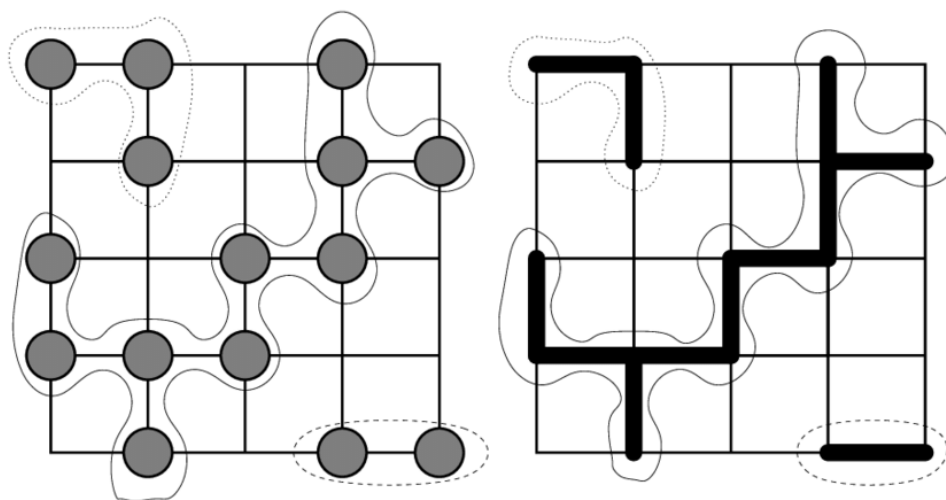


Rapport de Stage

Stagiaire : Amoura Pierre, Cossin Valentin¹
Tuteur du stage : Marco Picco, Laeticia Cugliandolo²



¹Sorbonne Université– Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

²Sorbonne Université–Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies

Remerciements

Nous souhaitons tout d'abord exprimer notre profonde gratitude à nos deux tuteurs de stage. Monsieur Marco Picco, pour son encadrement, sa disponibilité et ses précieux conseils tout au long de cette expérience. Madame Laetitia Cugliandolo, pour sa présentation du modèle d'Ising et nos échanges enrichissants. Nous tenons également à remercier l'administration de l'université et celle du laboratoire pour avoir facilité la recherche et la réalisation de ce stage. Nos discussions avec les doctorants du laboratoire ont été instructives, et nous remercions particulièrement Monsieur Mathis Gueneau pour ses échanges constructifs. Enfin, nous exprimons notre reconnaissance à l'ensemble du personnel du laboratoire pour leur accueil chaleureux et leur bienveillance, qui ont grandement contribué à la qualité de notre stage.

1 Information générale

Dans le cadre d'une unité d'enseignement, un stage nous a été attribué au LPTHE (Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies). Ce laboratoire de recherche est une unité mixte de recherche du CRNS et Sorbonne université, situé à Paris. Il est spécialisé dans divers domaines de la physique théorique, tels que la physique mathématique, la théorie des cordes, la théorie des champs, la matière condensée, la physique statistique, la physique des particules et la cosmologie.

Nous avons eu l'opportunité de réaliser notre stage dans le domaine de la physique statistique, sous la supervision de monsieur Marco Picco et madame Laeticia Cugliandolo. Nos travaux ont porté plus spécifiquement sur la percolation, qui constitue le principal sujet d'étude de nos encadrants. Ces derniers concentrent leurs recherches sur le modèle d'Ising appliqué à la percolation en deux dimensions, ainsi que sur la théorie des champs conformes, un cadre essentiel pour comprendre certains aspects fondamentaux de la physique théorique.

2 Sujet du stage

2.1. Présentation générale

Le stage porte sur le phénomène de percolation, un domaine central de la physique statistique. La percolation décrit la transition critique d'un système, passant d'un état où les sites occupés sont isolés à un état où un réseau d'amas connectés émerge. Ce concept, introduit en 1956 par le mathématicien Hammersley dans le but d'étudier l'efficacité des masques à gaz des soldats, trouve aujourd'hui des applications dans divers domaines scientifiques et techniques. On le retrouve notamment dans l'étude de la propagation des incendies de forêt, la répartition du pétrole dans les réservoirs ou encore la diffusion de l'information dans les réseaux sociaux. C'est dans ce contexte que s'inscrit notre travail, qui s'appuie principalement sur l'ouvrage de Dietrich Stauffer et Amnon Aharony, *Introduction to Percolation Theory* (1994), qui présente de manière détaillée les concepts fondamentaux ainsi que la méthodologie permettant d'aborder ce type de phénomène.

2.2. Position du problème

Soit p une probabilité comprise entre 0 et 1, représentant la probabilité qu'un site d'un réseau soit occupé. Nous considérons ici un réseau Z^d de dimension d , où chaque site peut être occupé avec une probabilité p ou rester inoccupé avec une probabilité $1 - p$. Un site occupé est défini comme « actif », tandis qu'un site inoccupé est « inactif ». Le phénomène de percolation décrit un processus aléatoire où l'on cherche à déterminer si un groupe de sites occupés forme un amas, c'est-à-dire un ensemble de sites connectés entre eux. La connectivité entre ces sites est généralement définie par leur proximité géométrique. Lorsque la probabilité p atteint une valeur critique p_c , ces amas de sites occupés deviennent suffisamment larges pour former un « amas infini », traversant l'ensemble du réseau. Cet amas percole, c'est-à-dire qu'il permet une connectivité continue à travers le réseau. Dans notre étude, nous limitons notre analyse à des réseaux carrés en deux dimensions (Z^2), où l'on observe le comportement de la percolation en fonction de différentes valeurs de p . Cette description de la percolation est ce que l'on appelle la percolation par site. Il existe néanmoins une autre description qui est celle que l'on utilise ici : la percolation par lien.

3 Travaux réalisés

L'objectif était d'abord de se familiariser avec les bases de la percolation, puis de réaliser des simulations numériques pour mesurer des grandeurs d'intérêt appelées exposants critiques.

3.1. Lecture scientifique

Durant nos premiers jours de stage, nous avons dû nous familiariser avec le concept de percolation, qui était nouveau pour nous. En première approche, nous avons lu un article de vulgarisation scientifique en français

écrit par Pierre-Gilles de Gennes, dans lequel est expliqué brièvement le principe de la percolation et ses applications. Par la suite, nous nous sommes appuyés sur le livre en anglais intitulé *Introduction to Percolation Theory*, écrit par Dietrich Stauffer et Amnon Aharony en 1994. Ce livre introduit tout d'abord les principes fondamentaux de la percolation, comme mentionné précédemment.

Au chapitre 2, intitulé "Cluster Numbers", nous avons étudié les calculs des grandeurs associées aux amas dans un réseau à une dimension. Nous avons appris à définir et calculer des quantités essentielles telles que :

- n_s : le nombre d'amas composés de s sites ;
- S : la taille moyenne d'un amas ;
- g_r : la fonction de corrélation, représentant la probabilité que deux sites espacés d'une distance r appartiennent au même amas ;
- ξ : la longueur de corrélation, qui correspond à la taille caractéristique d'un amas de taille finie.

Pour un réseau à deux dimensions, le problème devient plus complexe, et il n'existe plus de solution exacte. En effet, les amas peuvent désormais avoir des orientations variées et ne sont plus limités par deux sites vides, comme dans le cas unidimensionnel. Ces amas peuvent adopter des configurations différentes, que l'on appelle des "animals". Dans ce contexte, une grandeur d'intérêt : le périmètre t , est introduite. Celle-ci représente l'ensemble des sites vides entourant un amas donné dans une configuration particulière. En deux dimensions, le nombre d'amas n_s dépend donc à la fois du nombre de configurations possibles pour un amas de s sites et du périmètre associé à chacune de ces configurations.

Nous avons ensuite étudié le cas du réseau de Bethe. Il s'agit d'un réseau sans cycles, où chaque site possède exactement z voisins. Ce type de réseau est particulièrement intéressant car il permet des calculs analytiques exacts, notamment pour déterminer le seuil critique de percolation p_c , c'est-à-dire la probabilité minimale d'occupation à partir de laquelle un amas infini (amas percolant) apparaît. Une grandeur importante est introduite : P la probabilité qu'un site appartienne à l'amas infini. Cette grandeur permet de distinguer les sites appartenant à l'amas percolant de ceux appartenant aux amas finis. La probabilité d'occupation p peut alors être exprimée comme la somme de deux contributions :

$$p = P + \sum_s (n_s s)$$

Où :

- P , la fraction de sites appartenant à l'amas infini ;
- $\sum_s n_s s$, qui représente la contribution des sites appartenant aux amas finis ;

Nous disposons maintenant de deux grandeurs distinctes, P et S , qui peuvent être associées à deux phases différentes du système :

- Lorsque $p < p_c$, il n'existe pas d'amas infini. La grandeur caractéristique de cette région est S , qui représente la taille moyenne d'un amas fini. À mesure que p se rapproche de p_c , S augmente et tend vers l'infini lorsque $p \rightarrow p_c$
- Lorsque $p > p_c$, un amas infini émerge et devient la structure dominante du réseau. La grandeur caractéristique de cette phase est P . On note que P est nul lorsque $p = p_c$, car c'est précisément au seuil critique que l'amas infini commence à se former.

Ainsi, S caractérise la phase sous-critique tandis que P caractérise la phase sur-critique.

3.2. Mesure de l'exposant critique ν par 'data collapsing'

L'objectif de cette section est de déterminer numériquement l'exposant critique ν associé à la longueur de corrélation ξ en utilisant la méthode du 'data collapsing'. Cette méthode permet de faire converger les données

de différentes tailles de réseau vers une courbe universelle, ce qui permet de déterminer l'exposant critique de manière fiable. Nous disposons d'un code en Fortran qui nous a été fourni par notre tuteur de stage Marco Picco, et qui simule le phénomène de percolation par lien sur un réseau carré en deux dimensions de taille L . L'exécution de ce code génère deux ensembles de données :

- Le premier ensemble contient les informations suivantes : la taille de la grille L , la probabilité p de percolation, le nombre moyen de percolations horizontales ou verticales (mesurant la probabilité P' qu'au moins un amas percole), ainsi que son écart-type, la taille relative du plus grand amas (normalisé par le volume $V = L^2$) et son écart-type, ainsi que le nombre de réalisations n_{samples} pour chaque probabilité.
- Le second ensemble contient des informations sur les amas eux-mêmes : la probabilité p , la taille s des amas, le nombre n_s d'amas de taille s par unité de site et son écart-type, ainsi que la taille du plus grand amas.

Nous commençons par tracer (figure 1) la fonction $P'(p)$ pour différentes tailles L du réseau. Ces courbes nous permettent d'observer l'évolution de la probabilité de percolation en fonction de p et L . À partir de ces courbes, on peut noter plusieurs points importants :

- À mesure que la probabilité p augmente, la probabilité qu'un amas percole, P' , tend asymptotiquement vers 1.
- À mesure que la taille L du réseau augmente, la probabilité P' qu'au moins un amas percole augmente plus rapidement.

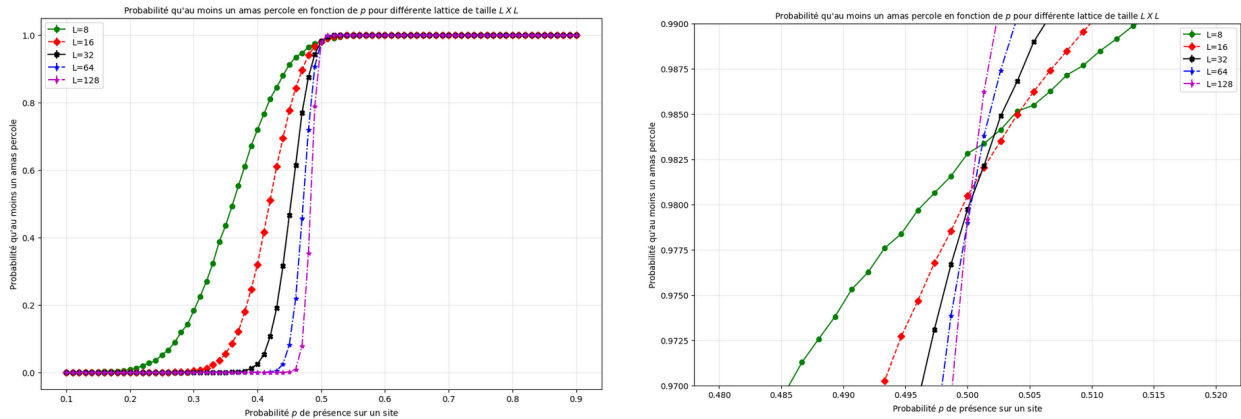


FIGURE 1 – $P'(p)$ pour différentes tailles L : allure générale (à gauche), au croisement (à droite)

Nous cherchons à déterminer la probabilité critique $p_c = \frac{1}{2}$ caractéristique de la percolation par lien dans Z^2 en identifiant le point de croisement des courbes pour différentes tailles de réseau. Dans la pratique, on effectue le changement de variable $p \rightarrow (p - p_c)$, et on centre le point de croisement des courbes en 0 comme illustré dans la figure 1 (à droite). Une fois p_c déterminée, la loi d'échelle pour le nombre d'amas $n_s(p)$ de taille s s'écrit :

$$n_s(p) = s^{-\tau} f[(p - p_c)s^\sigma] \quad (1)$$

En dimension $d \geq 2$, près de la probabilité critique p_c , la longueur de corrélation ξ diverge selon la relation :

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu} \quad (2)$$

En calculant le rapport $\nu(s) = \frac{n_s(p)}{n_s(p_c)}$, et en traçant ce rapport en fonction de la variable réduite $z =$

$(p - p_c)s^\sigma$, l'équation (1) implique que, pour différentes tailles s , les résultats doivent se superposer sur une courbe universelle $f(z)$. Ce phénomène de "data collapsing" (effondrement des données) permet de vérifier que les données de différentes tailles de réseau convergent vers une fonction unique. L'objectif est d'ajuster l'exposant critique ν de manière à obtenir la meilleure superposition possible des courbes, ce qui confirme la validité de la loi d'échelle. Pour cela, nous traçons $P'(p)$ en fonction d'une variable réduite $X = L^{1/\nu}(p - p_c)$ selon l'équation (1). En modulant la valeur de ν , nous cherchons la meilleure valeur qui reproduit le plus fidèlement le comportement prédictif de la loi d'échelle.

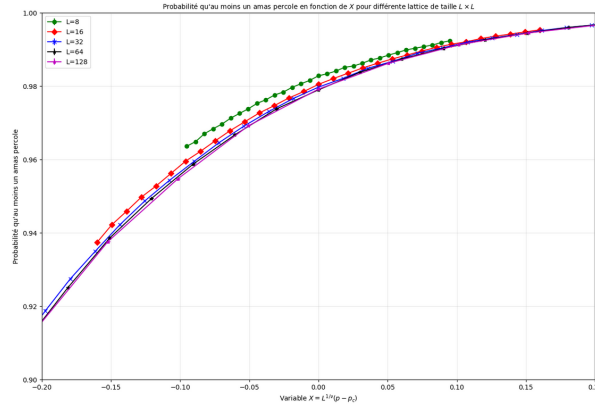


FIGURE 2 – $P'(p)$ pour différentes tailles L à $\nu = 4/3$ fixé

Cette méthode permet de retrouver la valeur tabulée $\nu = 4/3$. Néanmoins, il est important de noter que cette méthode repose sur un ajustement manuel de ν , ce qui signifie que l'on induit cette valeur plutôt que de la dériver de manière théorique ou automatique. Ce processus d'ajustement reste néanmoins très utile pour valider l'application de la loi d'échelle dans le cadre de ce problème de percolation.

3.3. Mesure de l'exposant critique τ par ajustement

En repartant du rapport ν_s introduit précédemment, nous pouvons trouver un exposant critique qui caractérise le comportement de n_s lorsque $p \rightarrow p_c$. En utilisant $\nu_s = f((p - p_c)s^\sigma)$, et en sachant que $n_s(p_c) \sim s^{-\tau}$, il vient :

$$n_s(p) \sim s^{-\tau}$$

On trace donc n_s en fonction de s pour différentes taille de réseaux L (en échelle logarithmique) avec $p = p_c$. On réalise ensuite un ajustement linéaire sur la partie de n_s qui suit ce comportement linéaire pour obtenir les valeurs de τ .

Par ajustement linéaire on trouve τ pour différentes tailles de L du réseaux (voir la table 1). La valeur de τ en 2 dimensions donné par *Introduction to Percolation Theory* est :

$$\tau = \frac{187}{91} \approx 2.05494$$

On remarque qu'il y a une invariance d'échelle. L'exposant τ ne dépend pas de la taille du réseau L . La décroissance exponentiel de n_s par l'exposant critique τ est commune à tous les réseaux carré en deux dimensions.

L	τ (ajustement linéaire)
8	2.06375
16	2.06404
32	2.06472
64	2.06458
128	2.06449

TABLE 1 – Résultats des ajustements linéaires pour τ

3.4. Mesure de l'exposant critique σ par ajustement

Le comportement $n_s \sim s^{-\tau}$ ne peut pas être valable pour des tailles s arbitrairement grandes. Cela violerait la normalisation du système (la somme des n_s sur toutes les tailles s doit rester finie). Pour tenir compte des grandes tailles d'amas, il est nécessaire d'ajouter un facteur de coupure exponentielle à la loi de puissance :

$$n_s(p) \sim s^{-\tau} e^{-s/s_\xi} \quad (3)$$

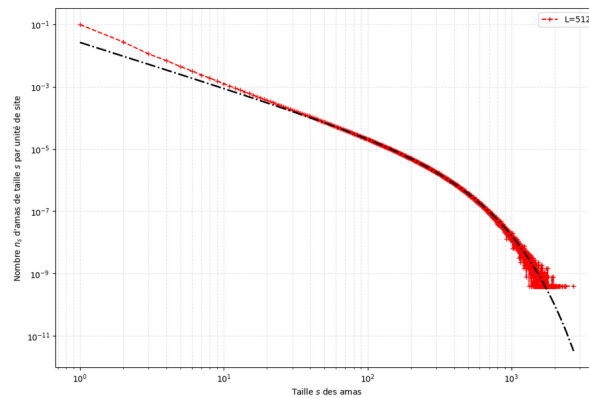
Où :

- s_ξ est un paramètre caractéristique qui dépend de la probabilité p et qui décrit la taille typique des amas dans le système.
- e^{-s/s_ξ} agit comme une coupure qui réduit fortement n_s pour des tailles $s \gg s_\xi$.

La fonction d'ajustement est donc la suivante :

$$n_s(p) = a s^{-t} e^{-s/b} \quad (4)$$

On retrace donc le nombre d'amas n_s de taille s par unité de site en fonction de la taille s des amas, que l'on va ajuster avec (4) dans une plage bien choisie (celle où les données suivent un comportement exponentiel). La figure 3 représente cet ajustement à L et p fixé.

FIGURE 3 – Distribution des tailles d'amas $n_s(s)$ pour $L = 512$ à $p = 0.44$ fixé

On procède néanmoins à ces ajustements pour différentes tailles L et pour différents p . On se retrouve donc avec des données sur $b = s_\xi$, que l'on va vouloir tracer en fonction de p . En effet, près du seuil de percolation (pour $p < p_c$), on sait que s_ξ suit la loi de puissance suivante :

$$s_\xi = (p - p_c)^{-\frac{1}{\sigma}} \quad (5)$$

En ajustant $s_\xi(p)$, on peut récupérer l'exposant critique σ (toujours pour différentes tailles L). La figure 5 représente l'ajustement sur la partie droite et gauche pour un L fixé :

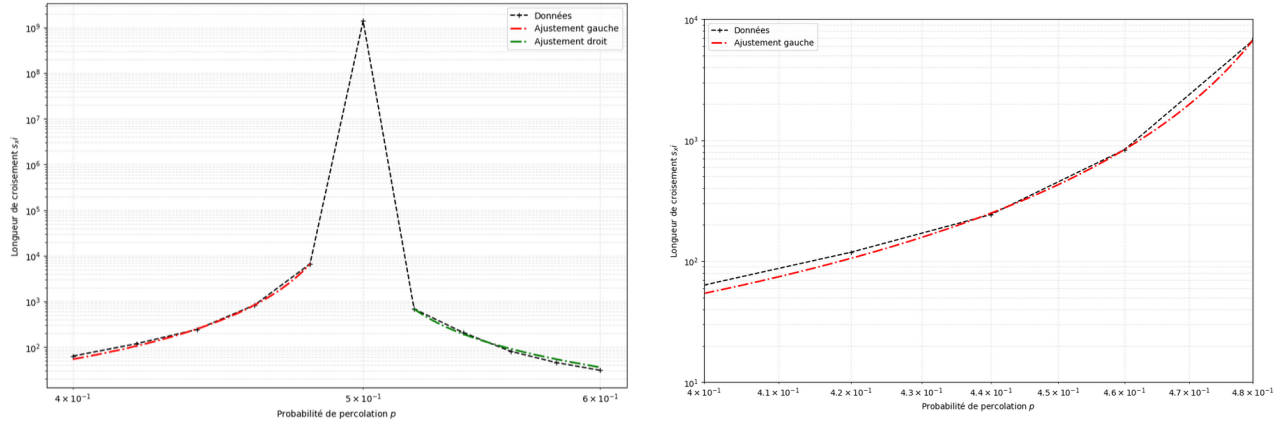


FIGURE 4 – $s_\xi(p)$ pour $L = 1024$: ajustement générale (à gauche), partie gauche de l'ajustement (à droite)

On trouve ainsi l'exposant σ (calculé sur les parties droites et gauches) pour différents L :

L	σ_{gauche} (ajustement gauche)	σ_{droit} (ajustement droit)
256	0.31862	0.35995
512	0.36346	0.61814
1024	0.33487	0.54657

TABLE 2 – Résultats des ajustements pour σ

La valeur tabulée de σ est :

$$\sigma_{\text{tab}} = \frac{36}{91} \approx 0.39560$$

L'invariance d'échelle semble être encore respectée. Néanmoins les résultats paraissent meilleur pour des valeurs de $p < p_c$ (ajustements gauches) plutôt que pour des valeurs de $p > p_c$ (ajustements droits).

3.5. Modèle d'Ising

Cette section est consacrée à une introduction au modèle d'Ising, qui nous a été présenté par notre tutrice de stage, Laetitia Cugliandolo. Ce modèle, issu de la physique statistique, permet de décrire des phénomènes caractérisés par des interactions locales entre particules i et j , chacune pouvant adopter deux états : s_i et s_j . Son application principale concerne les matériaux ferromagnétiques, où les particules, représentées par des spins, sont orientées selon un axe commun et peuvent prendre deux valeurs distinctes : $s_i = +1$ pour le 'spin up' et $s_i = -1$ pour le 'spin down'. L'Hamiltonien du modèle d'Ising s'exprime ainsi :

$$H(s) = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j$$

Où :

- J est la constante d'interaction ferromagnétique, favorisant l'alignement des spins voisins.
- $\langle ij \rangle$ indique une somme restreinte aux paires de premiers voisins sur le réseau.

Lorsque tous les spin sont aligné $\sum_{ij}(s_i s_j) < j$ est à son maximum, le magnétisme atteint lui aussi son maximum. Plus il y a de spin 'down' moins le magnétisme est puissant. Lorsqu'il y a autant de spin 'up' que de spin 'down' le magnétisme est nul.

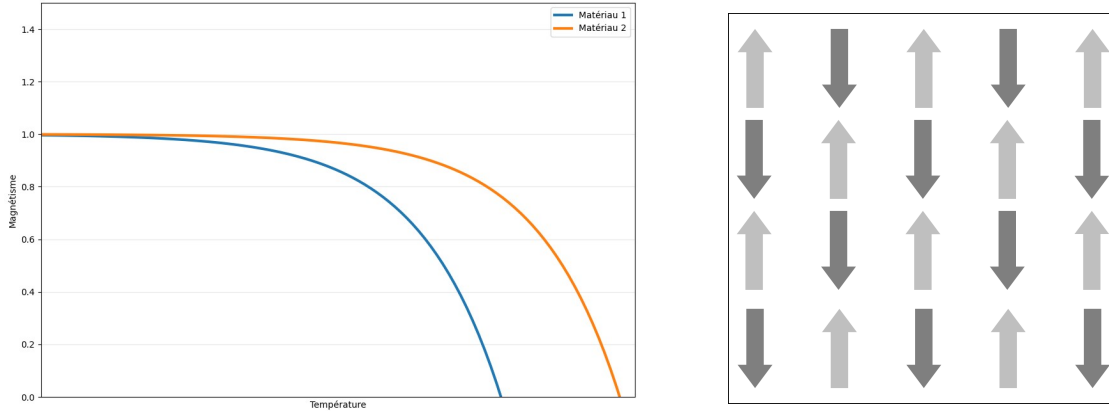


FIGURE 5 – Allure du magnétisme en fonction de la température (à gauche), Antiferromagnétisme, le magnétisme est nul (à droite).

La méthode de Monte-Carlo est une méthode algorithmique permettant de calculer une valeur numérique approchée à l'aide de techniques aléatoires. Dans notre contexte, l'algorithme suit les étapes suivantes :

- Sélectionner un spin dans le matériau.
- Proposer de retourner le spin. Si l'énergie diminue ($\Delta H < 0$) en le retournant, le changement est accepté. Si l'énergie augmente ($\Delta H > 0$), le changement est accepté avec une probabilité $q(T)$, et refusé avec une probabilité $1 - q(T)$.
- Répéter les deux étapes précédentes jusqu'à avoir interrogé tous les spins du matériau.

Pour effectuer cette procédure :

- L'échantillon du matériau est préparé à très haute température afin d'obtenir une distribution aléatoire des spins.
- L'échantillon est ensuite refroidi progressivement jusqu'à une température finale ($T_i \rightarrow T_f$).
- Les spins s'alignent généralement avec leurs voisins proches pour minimiser l'énergie libre $F = U - TS$. Cependant, il peut subsister des sections du matériau où les spins s'alignent dans des directions opposées, créant ainsi des "domain walls".

Dans cette représentation, les spins 'down' sont associés à des sites vides, tandis que les spins 'up' correspondent à des sites occupés. En observant la répartition des spins sur des réseaux bidimensionnels (figure 7), on constate que les amas peuvent percoler de trois façons différentes : de haut en bas, de bas en haut, ou en diagonale à travers les coins.

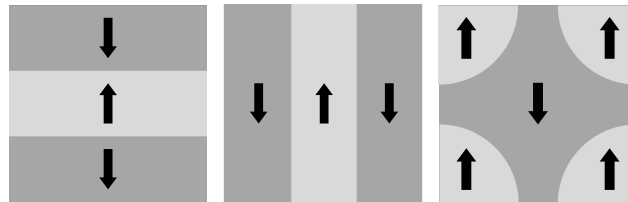


FIGURE 6 – Types de percolation observés dans un réseau bidimensionnel du modèle d'Ising - Percolation horizontale (à gauche), percolation verticale (au centre), percolation diagonale (à droite).

3.6. Suivre d'un séminaire de physique mathématique

Dans le cadre de notre stage, nous avons assisté à un séminaire portant sur l'article "1d Ising model with $1/r^{1.99}$ interaction" de Dario Benedetti et al. Le séminaire traite d'une variante unidimensionnelle du modèle d'Ising (les spins, qui représentent les variables du modèle, sont disposés le long d'une seule chaîne) avec des interactions à longue portée décroissant selon une loi en $1/r^{1+s}$, où s contrôle l'étendue des interactions. Malgré le niveau requis que nous n'avons pas pour comprendre au delà de l'expression du hamiltonien, nous avons pu découvrir l'importance de la théorie des champs, des symétries conformes, et des interactions à longue portée en physique statistique.

3.7. Conclusion

Lors de notre travail, nous avons constaté que les méthodes utilisées pour obtenir nos exposants critiques manquaient de précision. Nous avons déterminé l'exposant critique ν de manière qualitative. Concernant τ , l'ajustement linéaire s'est avéré plus simple à réaliser et plus précis ; nous avons obtenu des valeurs de τ très proches de celles tabulées. En revanche, l'ajustement exponentiel nécessaire pour calculer σ a été plus difficile à effectuer. Il était crucial de sélectionner correctement la plage d'ajustement afin de suivre précisément la partie de la courbe présentant un comportement exponentiel. Malgré cela, et bien que nous ayons observé des écarts de valeurs non négligeables, nous obtenons des résultats relativement proches de la valeur tabulée de σ .

Nous avons cherché à déterminer nos exposants critiques ν , τ et σ pour plusieurs tailles L de réseaux carrés. Nos résultats montrent que ces derniers sont indépendants de L . Ils ne dépendent pas non plus du type de réseau, mais uniquement de la dimension d . On dit que ces exposants critiques sont "universels".

Concernant la présentation du modèle d'Ising, elle nous a permis de comprendre sa capacité à décrire une multitude de phénomènes caractérisés par des interactions entre deux états, ainsi qu'à optimiser des systèmes de ce type. Associé à la méthode de Monte-Carlo, le modèle d'Ising permet également de résoudre d'autres problèmes complexes, comme le problème d'optimisation du voyageur de commerce.

4 Bilan personnel

Ce stage m'a permis de découvrir le fonctionnement concret du domaine de la recherche, notamment ses méthodes et ses exigences. Il a renforcé mon envie de m'orienter vers une carrière en physique théorique, car les activités associées à la recherche – comme le travail bibliographique, les simulations numériques et la rédaction scientifique – correspondent à des tâches que j'aimerais intégrer à mon futur métier.

J'ai également apprécié le format du séminaire : d'une part, la démarche du présentateur, qui consiste à structurer et partager ses résultats, et d'autre part, l'interaction avec le public scientifique, qui favorise l'échange de connaissances.

Concernant le sujet de mon stage, la percolation, il s'agit d'un thème vers lequel je ne me serais pas tourné spontanément. Néanmoins, bien que la découverte d'un nouveau sujet ait suffi à éveiller mon intérêt, j'ai été particulièrement séduit par l'approche minimaliste et élégante que le modèle de percolation propose pour modéliser des systèmes complexes et diversifiés.

Références

- [1] D. M. Dario Benedetti, Edoardo Lauria and P. van Vliet. *1d Ising model with $1/r^{1.99}$ interaction*. arXiv :2412.12243, 16 décembre 2024.
- [2] P. G. de Gennes. *La percolation ; un concept unificateur*. La recherche, N°72, Novembre 1976.

-
- [3] D. Stauffer and A. Aharony. *Introduction to Percolation Theory*. Taylor & Francis, Revised 2nd edition 1994.