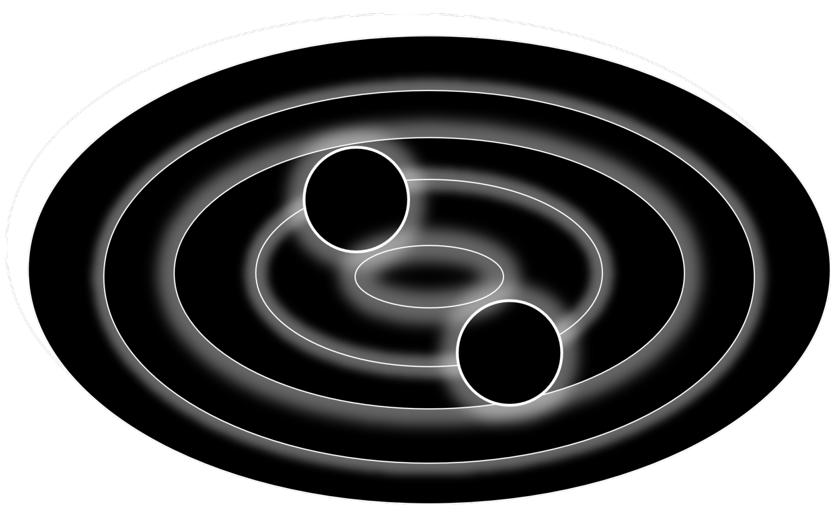
Date de réalisation | **2023-2025**

Cours sur la théorie de la Relativité Générale

Auteur : Cossin Valentin[1]

Nature du projet : Cours



[1]Sorbonne Université– Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

"Le temps est une étoffe qu'il faut travailler, coudre et découdre ; il faut aller profond dedans, avec les mains, l'aérer, le renverser et l'ouvrir."

– Valère Novarina

Avant-propos

La relativité générale, élaborée par Albert Einstein en 1915, constitue l'une des pierres angulaires de la physique moderne. Cette théorie redéfinit la gravitation en la décrivant comme une conséquence de la courbure de l'espace-temps induite par la masse et l'énergie, remplaçant ainsi la vision newtonienne d'une force agissant à distance. Ses prédictions, comme la déviation de la lumière par les corps massifs, le décalage gravitationnel des fréquences lumineuses ou encore l'existence des ondes gravitationnelles, ont été confirmées par de nombreuses observations et expériences. Elle continue de jouer un rôle central dans la compréhension de l'univers.

Mon intérêt pour cette théorie est né de ma réflexion sur la notion du temps en philosophie, avant de se renforcer par l'approche physique de ce concept. C'est cette théorie qui m'a initialement motivé à entreprendre des études en physique. Par ailleurs, elle représente une porte d'entrée vers des domaines plus avancés de la physique théorique, tels que la gravité quantique et les théories unificatrices, que j'ambitionne de comprendre dans le futur.

Ce document est le résultat d'un projet personnel visant à structurer mes notes de lecture et de travail sur la relativité générale. Ces notes s'appuient principalement sur l'ouvrage Relativité Générale de Thomas A. Moore, qui a constitué une référence fondamentale dans ma démarche. Le but de cette initiative est avant tout de consolider ma compréhension de cette théorie à travers un cours organisé.

Il convient de souligner que ce présent document ne constitue pas une version finale ou exhaustive d'un cours sur la relativité générale. Il s'agit d'une mise au propre progressive de mes notes de lecture, dans le but d'en clarifier certains aspects et de consolider ma compréhension personnelle. Seules les parties que je considère comme suffisamment bien assimilées ont été intégrées ici. Ce document fait l'objet de révisions et d'enrichissements au fur et à mesure de l'avancement du projet.

Table des matières

Chapitre 1

Dérivée covariante

Soit un champ scalaire $f(x, y, z, t) = f(x^x, x^y, x^z, x^t) = f(x^\mu)$. On a :

$$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^x} + \frac{\partial f}{\partial x^y} + \frac{\partial f}{\partial x^z} + \frac{\partial f}{\partial x^t} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \partial_\mu f$$

Opérons le changement de coordonnées $x^x, x^y, x^z, x^t \longmapsto x'^x, x'^y, x'^z, x'^t$ soit $x^\mu \longmapsto x'^\mu$:

$$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \partial'_\mu f = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}(\partial_\nu f)$$

Le gradient d'un champ scalaire dont les coordonnées sont constantes respecte la loi de transformation d'un vecteur covariant. Mais pour des coordonnées curvilignes, par exemple (qui dépendent du temps), le gradient d'un tenseur n'est pas un tenseur. En effet, considérons un quadrivecteur A^μ dont les composantes se transforment comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\nu} &= \partial'_\nu A'^\mu \\
&= \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha\right] \\
&= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha\right] \\
&= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta x^\alpha} A^\alpha + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta}\right)
\end{aligned}$$

On cherche donc à exprimer le gradient d'un tenseur de telle sorte que ce gradient nous renvoie un autre tenseur. Pour ce faire, on introduit ce que l'on appelle les symboles de Christoffel notés $\Gamma^\nu_{\mu\alpha}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\mu} \equiv \Gamma^\nu_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_\nu$$

Exemple : En coordonnées cartésiennes, on aurait 27 termes :

$$\text{Symbole de Christoffel de composantes } x : \quad \Gamma^x_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_x = \begin{bmatrix} \Gamma^x_{xx} & \Gamma^x_{xy} & \Gamma^x_{xz} \\ \Gamma^x_{yx} & \Gamma^x_{yy} & \Gamma^x_{yz} \\ \Gamma^x_{zx} & \Gamma^x_{zy} & \Gamma^x_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\text{Symbole de Christoffel de composantes } y : \quad \Gamma^y_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_y = \begin{bmatrix} \Gamma^y_{xx} & \Gamma^y_{xy} & \Gamma^y_{xz} \\ \Gamma^y_{yx} & \Gamma^y_{yy} & \Gamma^y_{yz} \\ \Gamma^y_{zx} & \Gamma^y_{zy} & \Gamma^y_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\text{Symbole de Christoffel de composantes } z : \quad \Gamma^z_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_z = \begin{bmatrix} \Gamma^z_{xx} & \Gamma^z_{xy} & \Gamma^z_{xz} \\ \Gamma^z_{yx} & \Gamma^z_{yy} & \Gamma^z_{yz} \\ \Gamma^z_{zx} & \Gamma^z_{zy} & \Gamma^z_{zz} \end{bmatrix}$$

On rassemble ceci dans une unique matrice :

$$\Gamma^\nu_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_\nu = \begin{bmatrix} \Gamma^x_{\mu\alpha} \\ \Gamma^y_{\mu\alpha} \\ \Gamma^z_{\mu\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma^x_{xx} & \Gamma^x_{xy} & \Gamma^x_{xz} \\ \Gamma^x_{yx} & \Gamma^x_{yy} & \Gamma^x_{yz} \\ \Gamma^x_{zx} & \Gamma^x_{zy} & \Gamma^x_{zz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Gamma^y_{xx} & \Gamma^y_{xy} & \Gamma^y_{xz} \\ \Gamma^y_{yx} & \Gamma^y_{yy} & \Gamma^y_{yz} \\ \Gamma^y_{zx} & \Gamma^y_{zy} & \Gamma^y_{zz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Gamma^z_{xx} & \Gamma^z_{xy} & \Gamma^z_{xz} \\ \Gamma^z_{yx} & \Gamma^z_{yy} & \Gamma^z_{yz} \\ \Gamma^z_{zx} & \Gamma^z_{zy} & \Gamma^z_{zz} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Connaissant les symboles de Christoffel, on peut écrire la vraie variation d'un champ vectoriel $\boldsymbol{A}(x^\alpha)$:

$$d\boldsymbol{A} = d\left[A^\mu \boldsymbol{e}_\mu\right] = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma \boldsymbol{e}_\mu + A^\mu \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

Ensuite, on change la notation des indices $\sigma \longmapsto \alpha$ et $\mu \longmapsto \nu$:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \boldsymbol{e}_\mu + A^\nu \frac{\partial \boldsymbol{e}_\nu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \\ &= dx^\alpha \boldsymbol{e}_\mu \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\nu \frac{1}{e_\mu} \frac{\partial \boldsymbol{e}_\nu}{\partial x^\alpha} \right) \\ &= dx^\alpha \boldsymbol{e}_\mu \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\nu \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \right) \\ &= \nabla_\alpha A^\mu dx^\alpha \boldsymbol{e}_\mu \end{aligned}$$

La quantité $\nabla_\alpha A^\mu$ est appelée dérivée covariante ou gradient absolu du champ vectoriel $\boldsymbol{A}$. On peut écrire la dérivée covariante pour un tenseur général $T^{\mu\nu}{}_\sigma$:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu}{}_\sigma = \frac{\partial T^{\mu\nu}{}_\sigma}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^{\beta\nu}{}_\sigma + \Gamma^\nu_{\alpha\delta} T^{\mu\delta}{}_\sigma - \Gamma^\gamma_{\alpha\sigma} T^{\mu\nu}{}_\gamma$$

Les symboles de Christoffel sont symétriques :

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$$

Calcul des symboles de Christoffel : On va repartir de l'équation suivante pour identifier $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\nu_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_\nu \\
&\quad\iff\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\alpha}\cdot \boldsymbol{e}_\rho = \Gamma^\nu_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{e}_\rho \\
&\quad\iff\quad \frac{\partial\left[\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\rho\right]}{\partial x^\alpha} - \boldsymbol{e}_\mu\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\nu_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{e}_\rho \\
&\quad\iff\quad \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\alpha} - \boldsymbol{e}_\mu\cdot\Gamma^\nu_{\alpha\rho} = \Gamma^\nu_{\mu\alpha}g_{\nu\rho} \\
&\quad\iff\quad \partial_\alpha g_{\mu\rho} = \Gamma^\nu_{\mu\alpha}g_{\nu\rho} + \boldsymbol{e}_\mu\cdot\Gamma^\nu_{\alpha\rho} \\
&\quad\iff\quad \Gamma^\nu_{\mu\alpha}g_{\nu\rho} + \Gamma^\nu_{\rho\alpha}g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\rho} \\
&\quad\iff\quad \Gamma^\nu_{\mu\alpha}g_{\nu\rho} + \Gamma^\nu_{\rho\alpha}g_{\nu\mu} = \partial_\alpha g_{\mu\rho}
\end{aligned}$$

En opérant les permutations indicielles circulaires $\mu \longmapsto \alpha$, $\alpha \longmapsto \rho$ et $\rho \longmapsto \mu$, il vient :

$$\Gamma^\nu_{\alpha\rho}g_{\nu\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho}g_{\nu\alpha} = \partial_\rho g_{\alpha\mu}$$

On refait les mêmes permutations sur cette équation, et il vient :

$$\Gamma^\nu_{\rho\mu}g_{\nu\alpha} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\rho\alpha}$$

On additionne cette dernière équation avec l'équation $\Gamma^\nu_{\mu\alpha}g_{\nu\rho} + \Gamma^\nu_{\rho\alpha}g_{\nu\mu} = \partial_\alpha g_{\mu\rho}$:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^\nu_{\rho\mu}g_{\nu\alpha} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\rho} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}g_{\nu\rho} + \Gamma^\nu_{\rho\alpha}g_{\nu\mu} = \partial_\mu g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\rho} \\
&\quad\iff\quad \Gamma^\nu_{\rho\mu}g_{\nu\alpha} + 2\Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\rho} + \Gamma^\nu_{\rho\alpha}g_{\nu\mu} = \partial_\mu g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\rho}
\end{aligned}$$

On soustrait cette dernière équation avec l'équation obtenue par les premières permutations :

$$\begin{aligned}
&\Gamma^\nu_{\rho\mu}g_{\nu\alpha} + 2\Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\rho} + \Gamma^\nu_{\rho\alpha}g_{\nu\mu} - \Gamma^\nu_{\alpha\rho}g_{\nu\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\rho}g_{\nu\alpha} = \partial_\mu g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\mu} \\
&\quad\iff\quad 2\Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\mu} \\
&\quad\iff\quad 2\Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\rho}\cdot\frac{1}{2}g^{\sigma\rho} = \left(\partial_\mu g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\mu}\right)\cdot\frac{1}{2}g^{\sigma\rho} \\
&\quad\iff\quad \Gamma^\nu_{\alpha\mu}\left(g_{\nu\rho}\cdot g^{\sigma\rho}\right) = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\mu}\right) \\
&\quad\iff\quad \boxed{\Gamma^\nu_{\alpha\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\mu}\right)}
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Tenseur de Riemann

Définitions et équations

Soit $u(\tau)$ la quadri-vitesse d'une géodésique de référence $\gamma(\tau)$. Soit $n(\tau)$ le quadri-vecteur séparation entre $\gamma(\tau)$ et sa géodésique voisine $\gamma'(\tau)$.

On définit le tenseur de Riemann $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ comme la quantité encapsulant la déviation relative de $\gamma'(\tau)$, qui était initialement parallèle à $\gamma(\tau)$:

$$\left[\frac{d^2 n}{d\tau^2}(\tau)\right]^{\alpha} = -R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} u^{\beta} n^{\mu} u^{\nu}$$

Explicitons cette équation :

$$\frac{d^2 n^{\alpha}}{d\tau^2}(\tau) = -\sum_{\beta=t}^{z}\sum_{\mu=t}^{z}\sum_{\nu=t}^{z} R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} u^{\beta} n^{\mu} u^{\nu}$$

On projette cette équation sur les axes t, x, y, et z :

$$\iff \frac{d^2 n^{t}}{d\tau^2} = -\sum_{\mu=t}^{z}\sum_{\nu=t}^{z} R^{t}_{\mu\nu} u^{\mu} n^{\mu} u^{\nu}$$

$$\frac{d^2 n^{x}}{d\tau^2} = -\sum_{\mu=t}^{z}\sum_{\nu=t}^{z} R^{x}_{\mu\nu} u^{\mu} n^{\mu} u^{\nu}$$

$$\frac{d^2 n^{y}}{d\tau^2} = -\sum_{\mu=t}^{z}\sum_{\nu=t}^{z} R^{y}_{\mu\nu} u^{\mu} n^{\mu} u^{\nu}$$

$$\frac{d^2 n^{z}}{d\tau^2} = -\sum_{\mu=t}^{z}\sum_{\nu=t}^{z} R^{z}_{\mu\nu} u^{\mu} n^{\mu} u^{\nu}$$

Définition 1. Contraction tensorielle

Soit un tenseur $T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\gamma\ldots\alpha_k}_{\beta_1\beta_2\ldots\gamma\ldots\beta_l}$ de type (k,l). Contracter implique de sommer sur une paire d'indices α_i et β_j (un indice doit être covariant et l'autre contravariant) :

$$T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i\ldots\alpha_k}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j\ldots\beta_l} \to \sum_{\gamma} T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\gamma\ldots\alpha_k}_{\beta_1\beta_2\ldots\gamma\ldots\beta_l}$$

Le tenseur contracté sera de rang $(k-1, l-1)$.

Exemple de contraction d'un tenseur de rang 2 : Considérons un tenseur T_μ^ν de rang 2 avec $\mu, \nu \in \{t, x, y, z\}$. On a :

$$T_\mu^\nu \to \sum_{\gamma=t}^{z} T_\gamma^\gamma = T_t^t + T_x^x + T_y^y + T_z^z = \mathrm{Tr}(T_\mu^\nu)$$

Exemple de contraction d'un tenseur de rang 3 : Considérons un tenseur $T_{\mu\nu}^\sigma$ de rang 3 avec $\mu, \nu, \sigma \in \{t, x, y, z\}$. Deux contractions distinctes sont possibles (sur la paire (μ, σ) ou sur la paire (ν, σ)) :

$$T_{\mu\nu}^\sigma \to \sum_{\gamma=t}^{z} T_{\gamma\nu}^\gamma = T_{t\nu}^t + T_{x\nu}^x + T_{y\nu}^y + T_{z\nu}^z$$

$$T_{\mu\nu}^\sigma \to \sum_{\gamma=t}^{z} T_{\mu\gamma}^\gamma = T_{\mu t}^t + T_{\mu x}^x + T_{\mu y}^y + T_{\mu z}^z$$

Exemple de contraction d'un tenseur de rang 4 : Considérons le tenseur de Riemann $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ (de rang 3 avec $\beta, \mu, \nu, \alpha \in \{t, x, y, z\}$). Trois contractions distinctes sont possibles (sur la paire (β, α), (μ, α), ou sur la paire (ν, α)) :

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha \to \sum_{\gamma=t}^{z} R_{\gamma\mu\nu}^\gamma = R_{t\mu\nu}^t + R_{x\mu\nu}^x + R_{y\mu\nu}^y + R_{z\mu\nu}^z$$

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha \to \sum_{\gamma=t}^{z} R_{\beta\gamma\nu}^\gamma = R_{\beta t\nu}^t + R_{\beta x\nu}^x + R_{\beta y\nu}^y + R_{\beta z\nu}^z$$

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha \to \sum_{\gamma=t}^{z} R_{\beta\mu\gamma}^\gamma = R_{\beta\mu t}^t + R_{\beta\mu x}^x + R_{\beta\mu y}^y + R_{\beta\mu z}^z$$

Tenseur de Riemann en fonction des symboles de Christoffel

$$\boxed{R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\gamma - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma}$$

Chapitre 3

Le tenseur énergie-impulsion

La source du champ gravitationnel est l'énergie relativiste. La "poussière" est une matière idéale composée de particules en mouvement libre. Considérons un ensemble de N particules de masse m, au repos dans une petite boîte de volume V_0 au repos dans S'.

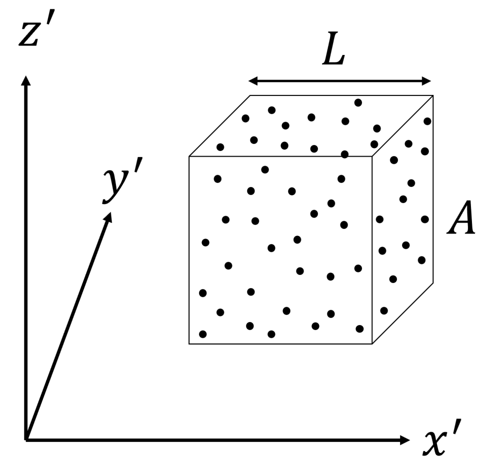


FIGURE 3.1 – Système S'

Soit n_0 la densité numérique de particules dans V_0 ($[n_0] = L^{-3}$) :

$$n_0 = \frac{N}{V_0}$$

La densité d'énergie totale dans la boîte vaut :

$$\rho_0 = n_0 m$$

On a : $[\rho_0] = ML^{-3}$. C'est bien une densité d'énergie puisque $E = mc^2$ et par analogie :

$$[\rho_0 c^2] = ML^{-3}L^2T^{-2} = ML^{-1}T^{-2} = \text{Énergie[Volume]}.$$

Regardons maintenant la boîte dans un référentiel S en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$. À cause de la contraction des longueurs, on écrit :

$$n = \frac{N}{V_0\sqrt{1-v^2}} = \frac{n_0}{\sqrt{1-v^2}}$$

On écrit ensuite la quadri-vitesse $\boldsymbol{u}$ du fluide (ici $c = 1$) :

$$\boldsymbol{u}^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}} \end{bmatrix} = u^t v_x u^t v_y u^t v_z$$

On peut donc réécrire n ($[n] = L^{-3}LT^{-1} = L^{-2}T^{-1}$) :

$$n = n_0 u^t$$

L'énergie de chaque particule vaut $p^t = mu^t$ ($[p^t] = MLT^{-1}$) dans S', la densité d'énergie totale est donc :

$$\rho = np^t = (n_0 m) u^t u^t$$

On a : $[\rho] = L^{-2}T^{-1} \cdot MLT^{-1} = ML^{-1}T^{-2} =$ Énergie[Volume]. En généralisant :

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu = \begin{bmatrix} T^{tt} & T^{tx} & T^{ty} & T^{tz} \\ T^{xt} & T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{yt} & T^{yx} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{zt} & T^{zx} & T^{zy} & T^{zz} \end{bmatrix}$$

Chapitre 4

L'équation d'Einstein

Loi gravitationnelle en mécanique newtonnienne

En mécanique newtonnienne, on peut écrire une loi qui relie le champ gravitationnel à la masse volumique source (similaire au théorème de Gauss qui relie le champ électromagnétique à la densité source volumique de charge) :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$$

Or, on sait que le champ gravitationnel est dérivé d'un potentiel gravitationnel V :

$$\mathbf{g} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot [-\boldsymbol{\nabla} V] = -4\pi G\rho$$

ce qui donne :

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho$$

Généralisation tensorielle

On cherche une généralisation tensorielle de cette équation. Au chapitre précédent, on a vu que la généralisation de la densité de masse est le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

La conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement implique que :

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

D'où l'équation précédente se réécrit :

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = \kappa \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$$

Où $G^{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein (tenseur de rang 2, donc 16 composantes). L'objectif est de construire $G^{\mu\nu}$. On va supposer qu'il est de la forme :

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}$$

où R est le scalaire de courbure, et b, Λ des constantes. On a donc :

$$\nabla_\nu \left[R^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}\right] = 0 \tag{4.0.1}$$
$$\Leftrightarrow \nabla_\nu R^{\mu\nu} + b\nabla_\nu \left[g^{\mu\nu}R\right] + \Lambda \nabla_\nu g^{\mu\nu} = 0 \tag{4.0.2}$$
$$\Leftrightarrow \nabla_\nu R^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}\nabla_\nu R + bR\nabla_\nu g^{\mu\nu} + \Lambda \nabla_\nu g^{\mu\nu} = 0 \tag{4.0.3}$$
$$\Leftrightarrow \nabla_\nu R^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}\nabla_\nu R + bR \cdot 0 + \Lambda \cdot 0 = 0 \tag{4.0.4}$$
$$\Leftrightarrow \nabla_\nu R^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}\nabla_\nu R = 0 \tag{4.0.5}$$

Identité de Bianchi généralisée :

$$\nabla_\nu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\nabla_\nu R$$

On a donc :

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\nabla_\nu R + bg^{\mu\nu}\nabla_\nu R = 0 \tag{4.0.6}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + b\right) g^{\mu\nu}\nabla_\nu R = 0 \tag{4.0.7}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + b = 0 \tag{4.0.8}$$
$$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \tag{4.0.9}$$
$$\Rightarrow \nabla_\nu \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}\right] = 0 = \nabla_\nu \left[\kappa T^{\mu\nu}\right] \tag{4.0.10}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}} \tag{4.0.11}$$

Calcul du scalaire de courbure pour une sphère

Élément de ligne

$$ds^2 = (G_2)^2(dx_2)^2 + (G_3)^2(dx_3)^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

Métrique

On a :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\theta\theta}(dx^\theta)^2 + g_{\phi\phi}(dx^\phi)^2$$

Par identification :

$$g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta$$

La métrique s'écrit alors :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Métrique inverse

Comme $g_{\mu\nu}$ est diagonale, on peut facilement calculer son inverse :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Calcul des dérivées partielles de la métrique

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\phi} = 0, \quad \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\phi} = 0$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\theta} = r^2 \frac{d}{d\theta}\left[\sin^2\theta\right] = 2r^2\cos\theta\sin\theta$$

Calcul des symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel sont donnés par :

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\mu}\right)$$

Exemples de calculs des symboles :

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = 0, \quad \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\cos\theta\sin\theta, \quad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{\sin^2\theta} = \cot\theta$$

Calcul des dérivées des symboles de Christoffel

$$\frac{\partial\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}}{\partial\theta} = 2\sin^2\theta - 1$$

$$\frac{\partial\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}}{\partial\theta} = -\csc^2\theta$$

Calcul du tenseur de Riemann

Le tenseur de Riemann est donné par :

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$$

Par exemple, pour $R^{\phi}_{\theta\theta\phi}$:

$$R^{\phi}_{\theta\theta\phi} = -\csc^2\theta + \cot^2\theta = -1$$

Calcul du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure

Le tenseur de Ricci est donné par :

$$R_{\theta\theta} = 1, \quad R_{\phi\phi} = \sin^2\theta, \quad R_{\theta\phi} = 0$$

Le scalaire de courbure est :

$$R = \frac{2}{r^2}$$

Application numérique pour la Terre

Pour la Terre de rayon $r = 6371\,\mathrm{km}$, on a :

$$\boxed{R \approx 49\,\mathrm{fm}^{-2}}$$

Chapitre 5

Métrique FLRW pour le Cosmos

On pose l'élément de ligne :

$$ds^2 = -dt^2 + [a(t)]^2 d\bar{r}^2 + [a(t)q(\bar{r})]^2 d\theta^2 + [a(t)q(\bar{r})]^2 \sin^2\theta d\phi^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Par identification, on a la métrique suivante :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\bar{r}} & g_{t\theta} & g_{t\phi} \\ g_{\bar{r}t} & g_{\bar{r}\bar{r}} & g_{\bar{r}\theta} & g_{\bar{r}\phi} \\ g_{\theta t} & g_{\theta\bar{r}} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi t} & g_{\phi\bar{r}} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [a(t)]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [a(t)q(\bar{r})]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [a(t)q(\bar{r})]^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

On peut déduire la métrique inverse :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{[a(t)]^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{[a(t)q(\bar{r})]^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{[a(t)q(\bar{r})]^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Ensuite, on calcule les dérivées partielles non nulles de la métrique :

$$\frac{\partial g_{\bar{r}\bar{r}}}{\partial t} = 2\dot{a}a \tag{5.0.1}$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial t} = 2[q(\bar{r})]^2 \dot{a}a \tag{5.0.2}$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \bar{r}} = 2[a(t)]^2 q(\bar{r})\frac{\partial q(\bar{r})}{\partial \bar{r}} \tag{5.0.3}$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial t} = 2\dot{a}a[q(\bar{r})]^2\sin^2\theta \tag{5.0.4}$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \bar{r}} = 2q(\bar{r})\frac{\partial q(\bar{r})}{\partial \bar{r}}[a(t)]^2\sin^2\theta \tag{5.0.5}$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} = 2[a(t)q(\bar{r})]^2\cos\theta\sin\theta \tag{5.0.6}$$

On peut maintenant calculer les symboles de Christoffel :

$$\Gamma^\nu_{\alpha\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\mu}\right)$$

Exemple de calcul pour $\Gamma^{\bar{r}}_{\bar{r}t}$ (ici, l'indice ρ est obligatoirement $\rho = \alpha = \bar{r}$ puisque la métrique n'as pas de composantes extra diagonaux) :

$$\Gamma^{\bar{r}}_{\bar{r}t} = \frac{1}{2} g^{\bar{r}\bar{r}} \left(\partial_t g_{\bar{r}\bar{r}} + \partial_{\bar{r}} g_{t\bar{r}} - \partial_{\bar{r}} g_{\bar{r}t} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{[a(t)]^2} (2\dot{a}a) = \frac{\dot{a}}{a}$$

Pour $\Gamma^{\theta}_{\theta t}$, $\Gamma^{\phi}_{\phi t}$:

$$\Gamma^{\theta}_{\theta t} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\partial_t g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{t\theta} - \partial_\theta g_{\theta t} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{[a(t)q(\bar{r})]^2} \left(2\, [q(\bar{r})]^2\, \dot{a}a \right) = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi t} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(\partial_t g_{\phi\phi} \right) = \frac{\dot{a}}{a}$$

Pour $\Gamma^{\theta}_{\theta\bar{r}}$:

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\bar{r}} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\partial_{\bar{r}} g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\bar{r}\theta} - \partial_\theta g_{\theta\bar{r}} \right) = \frac{1}{q(\bar{r})} \frac{\partial q(\bar{r})}{\partial \bar{r}}$$

Pour $\Gamma^{\phi}_{\phi\theta}$:

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_\theta g_{\phi\phi} = \cot\theta$$

Pour $\Gamma^{\phi}_{\phi\bar{r}}$:

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\bar{r}} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(\partial_{\bar{r} g_{\phi\phi}} \right) = \frac{1}{q(\bar{r})} \frac{\partial q(\bar{r})}{\partial \bar{r}}$$

On remarque qu'aucun symbole de Christoffel ne dépend de ϕ. Ensuite, on calcule les dérivées partielles non nulles des symboles de Christoffel :

Pour les dérivés par rapport à t :

$$\partial_t \Gamma^{\bar{r}}_{\bar{r}t} = \partial_t \Gamma^{\theta}_{\theta t} = \partial_t \Gamma^{\phi}_{\phi t} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2$$

Pour les dérivés par rapport à $\bar{r}$:

$$\partial_{\bar{r}} \Gamma^{\theta}_{\theta\bar{r}} = \partial_{\bar{r}} \Gamma^{\phi}_{\phi\bar{r}} = \frac{q''(\bar{r})}{q(\bar{r})} - \left(\frac{q'(\bar{r})}{q(\bar{r})} \right)^2$$

Pour la dérivé par rapport à θ :

$$\partial_\theta \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = -\frac{1}{\sin^2\theta} = -\csc^2\theta$$

On peut ensuite calculer les composantes non nulles du tenseur de Riemann via la formule :

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$$

Puis extraire le tenseur de Ricci via contraction du tenseur de Riemann :

$$R_{\mu\nu} = \sum_\rho R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$$

On obtient finalement :

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\
R_{\bar{r}\bar{r}} &= 2\dot{a}^2 + a\ddot{a} - 2\frac{q''}{q} \\
R_{\theta\theta} &= 2q^2\dot{a}^2 + q^2 a\ddot{a} - (q')^2 + 1 - qq' \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta}
\end{aligned}
$$

Bibliographie

[1] E. Bertschinger. Introduction to general relativity. `http://www-cosmosaf.iap.fr/MIT-RG8F.pdf`, 1999. Lecture Notes.

[2] T. Moore. *Relativité Générale*. de boeck, 10 Mars 2014.