

UV LO22

TD1 Méthode B – Théorie des ensembles

Introduction

Les exercices suivants sont inspirés de [Diller].

1 Théorie des ensembles

1.1 Constructeur de base

Exercice 1 : Soit $U = \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17\}$ et $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ecrivez ce que vaut :

- $U \cup V$,
- $U \cap V$,
- $U - V$.

Exercice 2 : Soit $U = \{aa, bb, cc, dd\}$ indiquez pour chaque ensemble suivant s'il est égal ou différent à U .

- $\{dd, cc, bb, aa\}$,
- $\{aa, bb, cc, cc, dd, dd\} \cap \{dd, cc\}$
- $\{aa, bb, bb, cc, cc, dd, dd, dd\}$
- $\{aa, bb, cc, cc, dd, dd\} \cup \{dd, cc\}$
- $\{aa, bb, bb\} - \{dd, cc\}$
- $\{aa, bb, bb\} - \{\}$

Exercice 3 : Soit $U = \{xx \mid xx : 1..10 \wedge (xx \bmod 2 = 0)\}$ indiquez quel ensemble de valeurs représente U .

Exercice 4 : Soit $U = \{england, france, spain\}$, répondez aux questions suivantes :

- indiquez quel ensemble de valeurs prend l'expression suivante $P(U)$.
- indiquez ce que valent les expressions
 1. $\{\} \in P(U)$
 2. $\{\} \in U$
 3. $england \in U$
 4. $\{england\} \in U$
 5. $\{england\} \subset U$
 6. $\{england\} \subset P(U)$

Exercice 5 : Soit $U = \{1, 2, 3\}$ et $V = \{4, 5, 6\}$, répondez aux questions suivantes :

- indiquez quel ensemble de valeurs prend l'expression suivante $U * V$,
- indiquez ce que valent les expressions
 1. $\{\} \in U * V$
 2. $(1, 4) \in U * V$
 3. $\{(1, 4)\} \in U * V$

4. $\{\} \subset U * V$
5. $(1, 4) \subset U * V$
6. $\{(1, 4)\} \subset U * V$

Exercice 6 : A partir de l'ensemble de base *INTEGER* redéfinir les ensembles :

1. INT (ensemble fini ayant pour borne MAX_INT),
2. NATURAL,
3. NAT (ensemble fini ayant pour borne MAX_INT),
4. NAT1

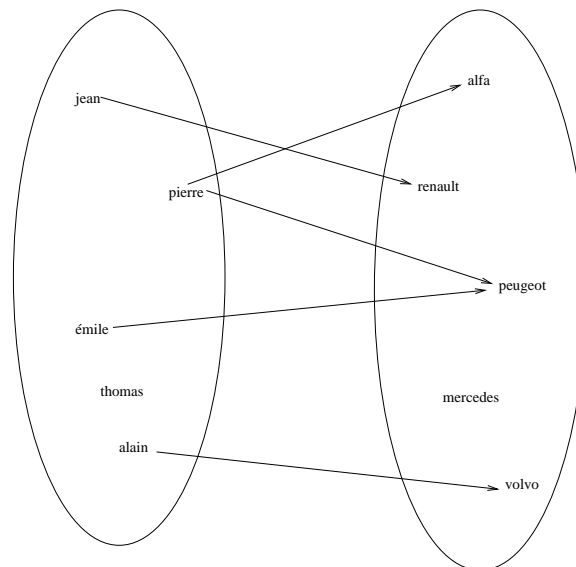
Exercice 8 : Décrire en terme mathématique les ensembles suivants :

1. ensemble des nombres pairs,
2. ensemble des nombres impairs.

1.2 Relation et fonction

Exercice 9 : Soit les ensembles $X = \{a, b\}$ et $Y = \{0, 1\}$
 – indiquez quel ensemble de valeurs prend l'expression suivante
 $X < - > Y$.

Exercice 10 : La figure suivante présente une relation (noté R) que nous allons étudier.



Décrivez le ensembles *CONDUCTEURS* et *MARQUES*.

Ecrivez ce que vaut :

- $dom(R)$,
- $ran(R)$,

- $\text{card}(R)$,
- $\{\text{jean}, \text{pierre}\} < |R$,
- $\{\text{pierre}\} << |R$,
- $(\{\text{jean}, \text{pierre}\} < |R) \ ;$
- $|R| > \{\text{peugeot}\}$,
- $|R| >> \{\text{peugeot}\}$.

Pour chaque réponse suivante, en cas de réponse négative indiquez ce qu'il faut faire :

- R est une relation ?
- R est une fonction ?
- R est une fonction injective ?
- R est une fonction surjective ?
- R est un ensemble ?

2 Exercices complémentaires

2.1 Description de fonction

Exercice 11 : Modéliser une machine abstraite pour fonction involutive (de E sur E telle que $f^{-1} = f$).

Exercice 12 : Construire les fonctions suivantes :

- *square* qui serait la racine carrée de tout nombre entier naturel.
- *abs* qui produit la valeur absolue de tout nombre entier relatif.
- *divides* qui s'applique a deux nombre entier naturel et indique si le premier est un diviseur du second.
- *est_un_diviseur_comun* qui s'applique à trois paramètres et indique si le troisième est un diviseur commun des deux précédents.

Exercice 13 : Construire la fonction *est_premier* qui indique si l'entier naturel donné en paramètre est premier ou non.

2.2 Différence symétrique

Exercice 14 : Cet exercice est repris de [Backhouse]

La différence symétrique, noté $ds(A, B)$, de deux ensemble a et B est l'ensemble de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B et de tous les éléments de B qui n'appartiennent pas à A .

Exprimez à l'aide d'opérateurs logiques la différence symétrique $ds(A, B)$.

Références

- [Diller] Antoni Diller, *Z, an Introduction to Formal Methods*,
Jon Wiley & Son, 1994
- [Backhouse] R.C Backhouse, *Construction et Vérification de Programmes*,
MASSON - PRENTICE HALL, 1989