Grandeurs fondamentales de la sûreté de fonctionnement

Travaux Dirigés de LO22/AI20

Introduction : Ce TD a pour objectif de se familiariser, à partir de raisonnements simples, avec les grandeurs fondamentales de la sûreté de fonctionnement. Les résultats qui y seront donc établis seront dans une trés large mesure repris dans le cours.

Sujet : On considère un dispositif en état de fonctionnement à un instant pris conventionnellement pour origine $t = 0$. On note r_1 sa probabilité de survivre (ne pas connaître de défaillances) sur $[0, T]$ en ne supposant rien d'autre que que le fait qu'il est en état de fonctionner à $t = 0$.

On fait l'hypothèse que s'il a survécu jusqu'à T, sa probabilité de survie ultérieure sur l'intervalle $[T, 2T]$ est également r_1 (et par extension que la probabilité conditionnelle de survie sur l'intervalle $[kT, (k + 1)T]$ sachant que le système était en vie à l'instant kT vaut r_1 pour tout entier positif k). En d'autres termes la probabilité de survie sur une période ne dépend que de la longueur de cette période (quelle que soit la valeur de cette période) et non pas de son instant absolu de début (qui représenterait une sorte d'age du composant).

Questions :

1. Quelle est la signification de cette hypothèse ?
2. Compte tenu de cette hypothèse, quelle est la probabilité de survie notée r_k (sur la durée $[0, kT]$ en ne suposant rien d'autre que le fait que le composant est opérationnel à l'instant $t = 0$?
3. Compte tenu du résultat précédent et du fait que la durée T est arbitraire, quelle est la probabilité de survie $r_{\frac{1}{k}}$ sur la durée $[0, \frac{T}{k}]$?
4. À partir de l'expression précédente par un passage à la limite, trouver en fonction de r_1 et de T, l'expression de la grandeur suivante :
$$\frac{\mathbb{P}(\text{« Défaillance sur } [0, dt] \text{ »})}{dt}$$
5. La grandeur obtenue, notée λ est appelée taux de défaillance du dispositif. Sous les hypothèses que nous avons faites (la probabilité de survie ne dépend que de la durée de l'intervalle considéré et non de sa position absolue), λ est par conséquent :
$$\frac{\mathbb{P}(\text{« Défaillance sur } [t, t + dt] \text{ »} \mid \text{ « le dispositif à survécu jusqu'à } t \text{ »})}{dt}$$
cette valeur est, dans notre cas particulier, *constante*.
6. Montrer que dans ces conditions, la probabilité de survie sur l'intervalle de temps $[O, t]$ en ne supposant rien d'autre que le fait que le dispositif est opérationnel à l'instant 0 vaut nécessairement :
$$r(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$
$r(t)$ est la fiabilité (reliability) du dispositif à l'instant t (l'expression précédente n'étant évidemment valable que pour les dispositifs à λ constants).
7. On considère deux dispositifs identiques à même λ constant indépendants les uns des autres : Quelle est la probabilité pour que les deux survivent sur $[O, t]$? Généraliser à N dispositifs.
8. Le modèle précédent représente un système sans redondance (qui ne survit que si tous ses composants survivent). Que peut on dire du taux de défaillance de ce système ?
9. On considère deux dispositifs identiques de même λ constant indépendants les uns des autres : Quelle est la probabilité que les deux défaillent sur $[0, t]$? Généraliser à N dispositifs.

10. Le modèle précédent représente un système avec redondance (qui ne défaille que si tous ses composants défaillent). Que peut on dire du taux de défaillance de ce système ?
11. En utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle, montrer à partir de la définition de λ donnée à la question 5 qu'en toute généralité sont expression en fonction de r vaut :

$$\lambda\left(t\right) = -\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}$$

12. Envisageant le cas du système redondant à deux composants indépendants de λ constant, donner l'expression du taux de défaillance Λ du système en fonction de λ et de t. En étudiant sommairement la fonction donner l'allure de ses variations et commenter les cas limites.
13. On considère N composants indépendants de λ constant. Quelle est la probabilité pour qu'exactement i survivent sur $[0, t]$? Quelle est la probabilité par conséquent pour qu'au moins p survivent sur [0,t] ? L'expression obtenue est la fiabilité d'un système à voteur p/N. Montrer qu'elle permet de retrouver les résultats des questions 7 et 9 qu'elle contient comme cas particulier.
14. Si l'on suppose la quantité λt petite devant 1 et par conséquent le nombre de défaillances i constatées sur [0,t] petit devant le parc total N, donner l'expression limite de la probabilité de constater i défaillances sur [0,t]. Comment s'appelle la loi obtenue ?
15. Monter (par récurrence) que pour l'expérience à un seul composant de λ constant que l'on autorise à changer autant de fois que nécessaire par un composant identique dès qu'il connaît une défaillance, la probabilité de constater i défaillances sur $[0, t]$ suit une loi de même type qu'à la question précédente.
16. Trouver dans ce cas l'expression de la probabilité pour que la $i$ème défaillance surviennent sur $[t, t + dt]$. Quelle est le nom de la loi correspondante ?