Théorie des ensembles

Théorie(s) des ensembles

- Théorie des ensembles : une des branches fondamentales (« le » fondement ?) des mathématiques objet d'actives recherches encore au 21ème siècle.
- On expose ci-après délibérément une théorie naïve où certaines notions (dont celle d'ensemble !) ne sont pas réellement définies (autrement qu'informellement).

Notion d'ensemble

- Par ensemble, nous entendons toute collection M d'objets m de notre intuition ou de notre pensée, définis et distincts, ces objets étant appelés éléments de M (selon Georg Cantor (1895))
- Lorsque m est élément de M on dit que m appartient à M et on note $m \in M$
- Notez que les ennuis commencent (paradoxes divers et variés) si l'on réfléchit aux ensembles qui se contiennent eux mêmes… mais ce n'est pas notre sujet…
- Notez aussi que les choses passionnantes commencent avec les ensembles infinis (sujet principal de Cantor)… on en dira quelques mots à titre de récréation à la fin de ce cours.

Définition en extension

- Pour définir un ensemble fini, on peut tout simplement énumérer ses éléments placés entre accolades :
- Evangélistes = {Matthieu, Marc, Luc, Jean} est l'ensemble des auteurs des quatre évangiles « canoniques »
- Cette définition est dite en extension par opposition à celle (dite en compréhension) définissant un ensemble grâce à une propriété caractéristique de ses éléments : {entiers naturels pairs}

Définition en extension

5

La définition en extension n'est évidemment pas unique :

- L'ordre ne joue pas {2,3} = {3,2} (les éléments sont les mêmes)
- Les répétitions non plus : {1,1}={1} (les éléments sont les mêmes). Dans certains cas c'est utile qu'il en soit ainsi. L'ensemble des racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est toujours (même si ces racines sont égales) :

$$\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

- Ensembles à un élément : appelés singletons. Ensembles à deux éléments : appelés paires (sans ordre) à ne pas confondre avec les couples (avec ordre).
- Cardinal d'un ensemble A (noté Card(A) : nombre d'éléments)

Parties d'un ensemble

On définit une partie d'un ensemble (ou sous-ensemble) en indiquant si chaque élément appartient ($\in$) ou n'appartient pas ($\notin$) à la partie. On énumère donc l'ensemble des parties d'un ensemble à l'aide d'une « table de vérité », exemple pour les parties de {2, 3}

$\mathcal{P}(\{2, 3\})$	2	3
{2, 3}	$\in$	$\in$
{2}	$\in$	$\notin$
{3}	$\notin$	$\in$
{}	$\notin$	$\notin$

Parties d'un ensemble

- L'ensemble $\mathcal{P}$(A) des parties d'un ensemble A a donc $2^{\text{Card(A)}}$ éléments et pour cette raison est parfois noté 2^A.

$\mathcal{P}(\{2, 3\})$	2	3
{2, 3}	$\in$	$\in$
{2}	$\in$	$\notin$
{3}	$\notin$	$\in$
{}	$\notin$	$\notin$

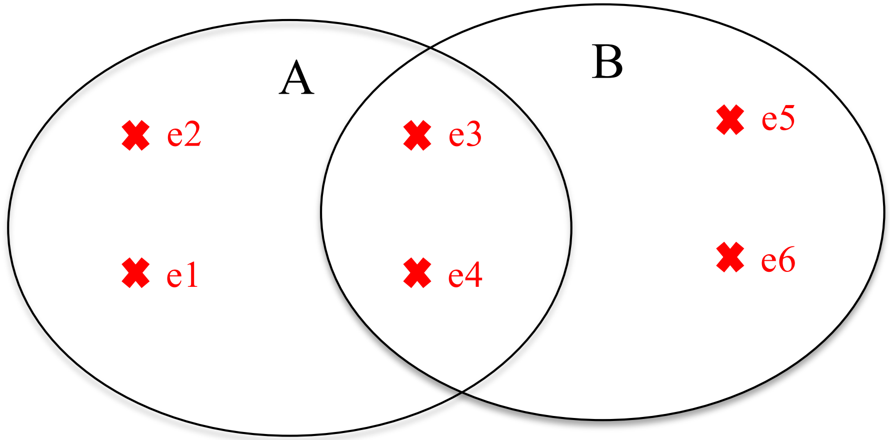
- Un sous-ensemble B d'un ensemble A est dit inclus dans A (noté $B \subset A$).
- Noter que $B \subset A$ et $B \in 2^A$ sont deux manières équivalentes de dire la même chose !

Ensemble vide

- Il existe donc un ensemble qui ne comporte aucun élément : l'ensemble vide noté {} ou ∅. L'ensemble vide est donc inclus dans tous les ensembles.
- Attention aux pièges :
  – Si A={} (ou ∅) : aucun élément (Card(A)=0), ∅⊂A mais ∅∉A
  – Si A={∅} (ou {{}}) : ensemble d'ensembles à un élément (Card(A)=1) qui est l'ensemble vide donc ∅⊂A et ∅∈A
  – Si A={{∅}} (ou {{{}}}) ensemble d'ensembles à un élément (Card(A)=1) qui est {∅} qui n'est pas vide donc ∅⊂A mais ∅∉A

Opérations ensemblistes

- On appelle union de deux ensembles A et B et on note A∪B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A OR B (OR : ou inclusif)

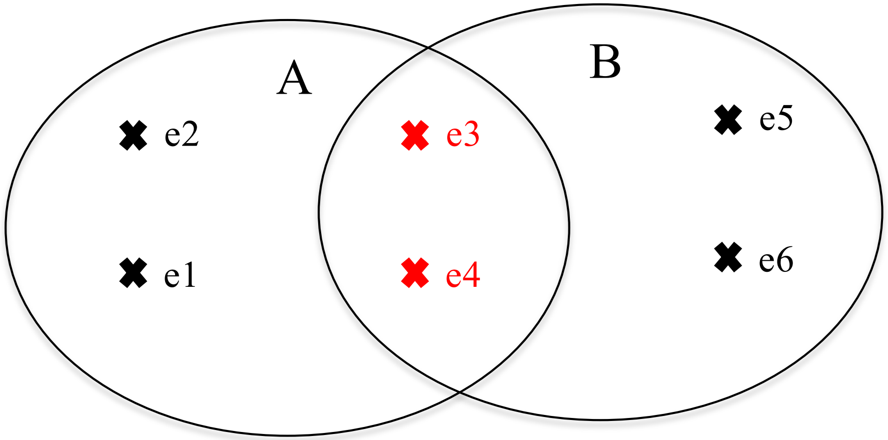


- A={e1,e2,e3,e4}
- B={e3,e4,e5,e6}
- A∪B = {e1,e2,e3,e4,e5,e6}

- L'union est commutative, associative et a ∅ comme élément neutre.

Opérations ensemblistes

- On appelle intersection de deux ensembles A et B et on note A∩B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A AND B

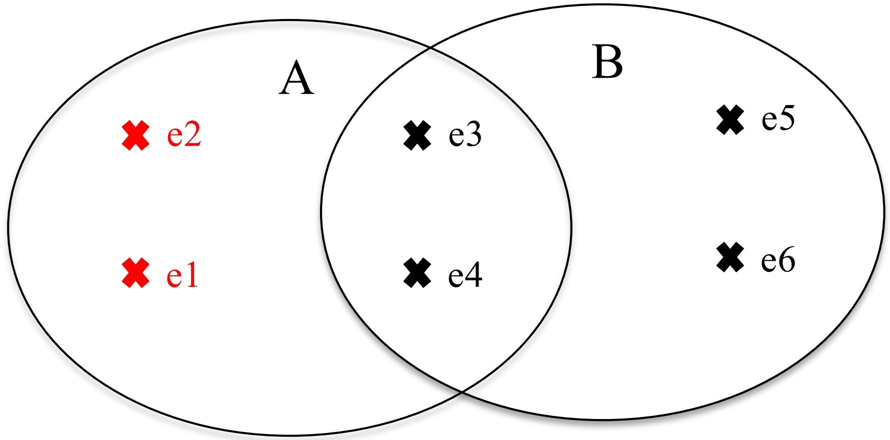


- A={e1,e2,e3,e4}
- B={e3,e4,e5,e6}
- A∩B = {e3,e4}

- L'intersection est commutative, associative et a ∅ comme élément absorbant.

Opérations ensemblistes

- On appelle différence de deux ensembles A et B et on note A\B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B

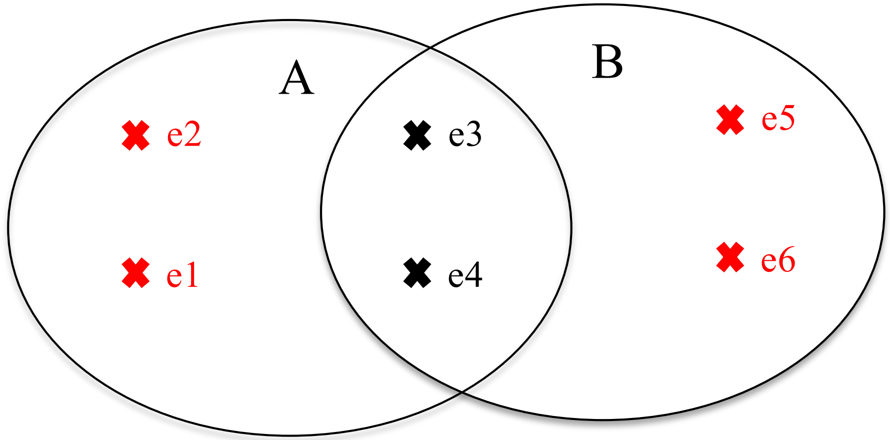


- A={e1,e2,e3,e4}
- B={e3,e4,e5,e6}
- A\B = {e1,e2}

- Lorsque B est inclus dans A cette différence prend le nom de complémentaire de B dans A

Opérations ensemblistes

- On appelle différence symétrique de deux ensembles A et B et on note A∆B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A XOR B



- A={e1,e2,e3,e4}
- B={e3,e4,e5,e6}
- A∆B = {e1,e2,e5,e6}

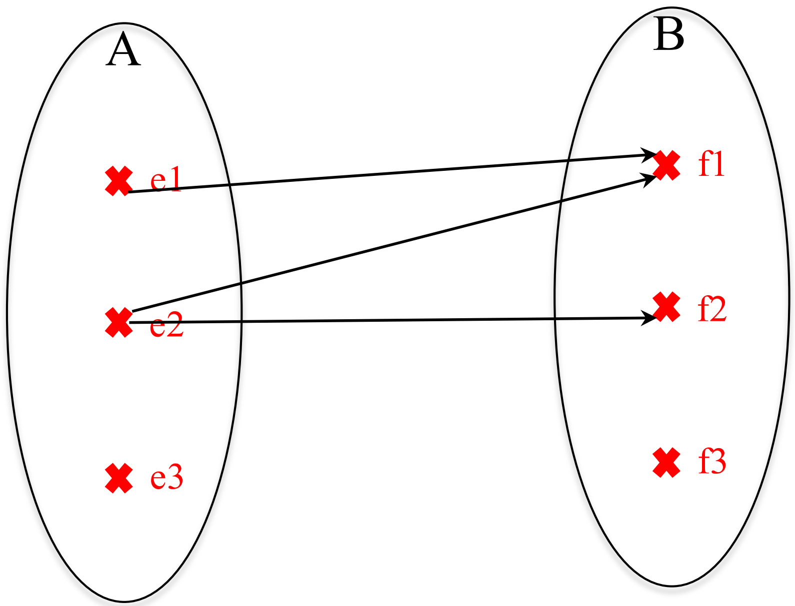
- $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$
- $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$
- La différence symétrique est commutative, associative et a ∅ comme élément neutre.

Couples, produit cartésien

- Couple : donnée de deux objets égaux ou distincts, dans un ordre déterminé (si a et b sont distincts les couples (a,b) et (b,a) sont distincts). A ne pas confondre avec la notion de paire (ensemble à deux éléments).
- Produit cartésien de deux ensembles A et B noté $A\times B$: ensemble des couples dont la première composante est un élément de A et la seconde un élément de B.
- Par conséquent : $Card(A\times B)=Card(A).Card(B)$

Relations

- Une relation entre deux ensembles A et B est la donnée d'un ensemble de couples de A×B (sous-ensemble de A×B). Une relation peut donc être considérée elle-même comme un ensemble.

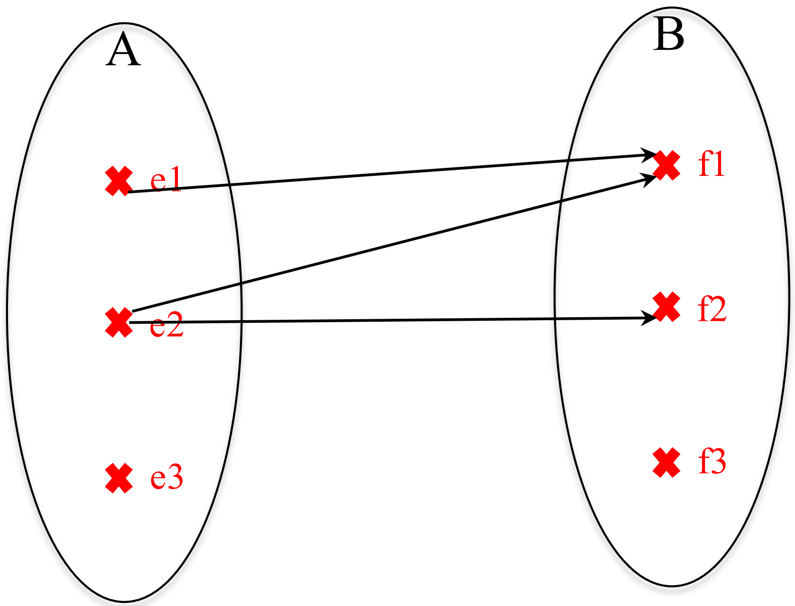


- R={(e1,f1),(e2,f1),(e2,f2)}
- Le langage B note les couples en utilisant le maplet, les parenthèses et virgules étant déjà nombreuses…
- R={e1|->f1, e2|->f1,e2|->f2}

Relations

15

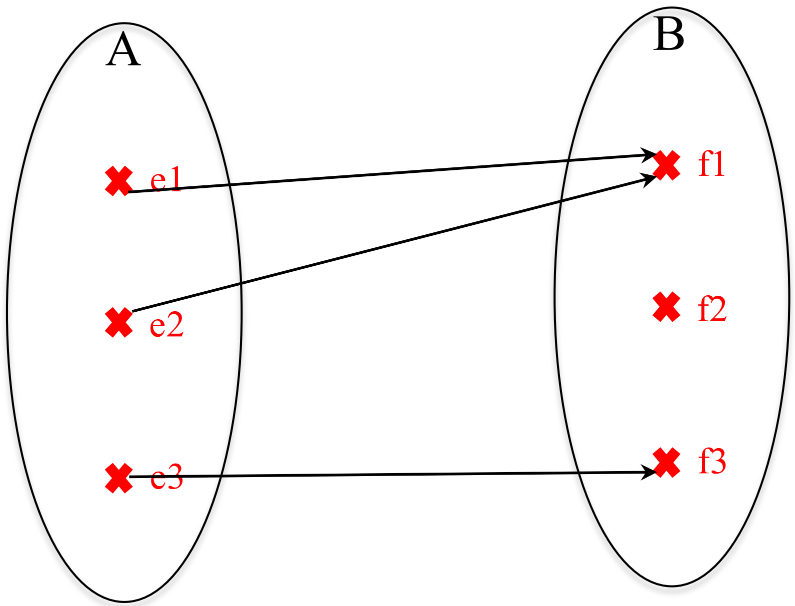
- L'inverse R^{-1} (noté R~ en méthode B) d'une relation R de A vers B est la relation de B vers A obtenue en inversant les couples :
R~={(f1,e1),(f1,e2),(f2,e2)}



- Le domaine d'une relation est l'ensemble des éléments de A qui ont au moins une image : dom(R)={e1,e2}
- Le codomaine (range) d'une relation est le domaine de son inverse : ran(R)={f1,f2}

Applications (ou fonctions)

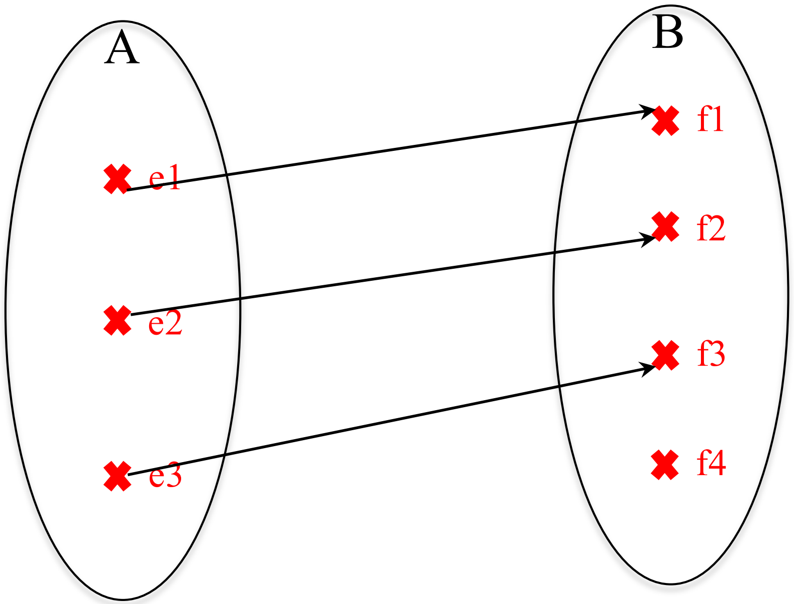
- Une fonction (ou application) entre deux ensembles A et B est une relation pour laquelle tout élément de A est en relation avec exactement un élément de B



- R={(e1,f1),(e2,f1),(e3,f3)}
- En méthode B cela s'appelle fonction totale, le B définissant également la notion de fonction partielle (certains éléments de A peuvent ne pas avoir d'image)
- R={(e1,f1),(e2,f1)} est une fonction partielle de A dans B

Fonctions injectives (ou injections)

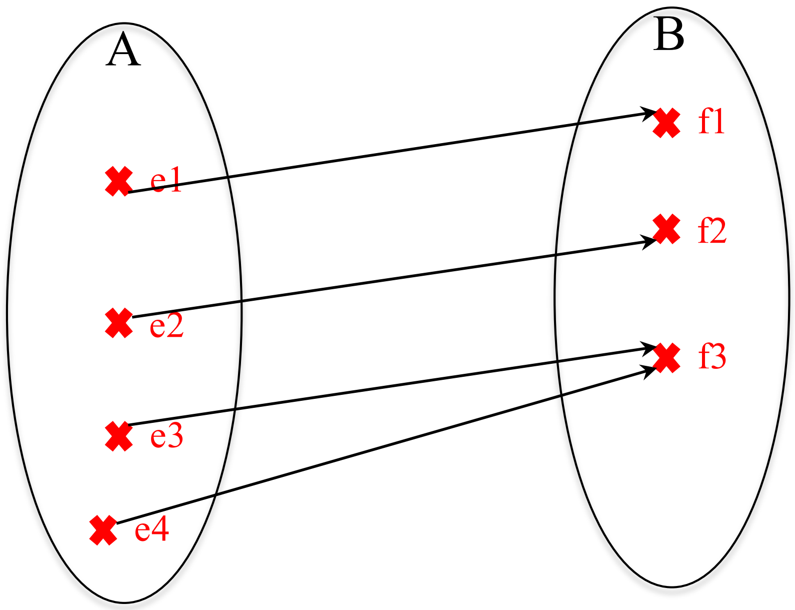
- Une fonction de A dans B est dite injective (ou on dit que c'est une injection) si tout élément de B a au plus un antécédent (i.e. est l'image d'au plus un élément) dans A



- R={(e1,f1),(e2,f2),(e3,f3)}
- En méthode B cela s'appelle d'injection totale, le B définissant également la notion de d'injection partielle
- R={(e1,f1),(e2,f2)} est une injection partielle de A dans B

Fonctions surjectives (ou surjections)

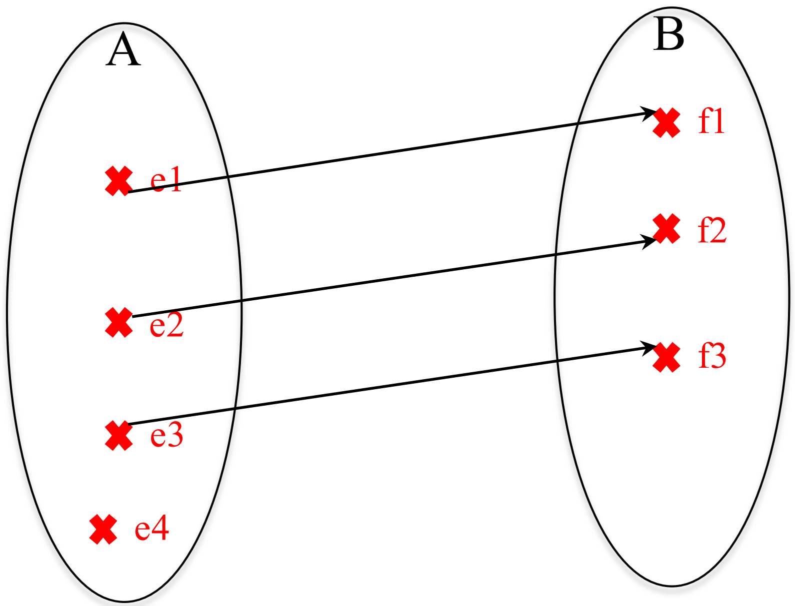
- Une fonction de A dans B est dite surjective (ou on dit que c'est une surjection) si tout élément de B a au moins un antécédent dans A



- R={(e1,f1),(e2,f2),(e3,f3),(e4,f3)}
- En méthode B cela s'appelle surjection totale, le B définissant également la notion de surjection partielle
- R={(e1,f1), (e2,f2),(e3,f3)} est une surjection partielle de A dans B

Fonctions bijectives (ou bijections)

- Une fonction de A dans B est dite bijective (ou on dit que c'est une bijection) elle est à la fois injective et surjective



- En maths usuelles (qui ne connaît pas les fonctions partielles), cela signifie que A et B ont même cardinal (toutes les bijections sont totales)
- En méthode B on considère aussi des bijections partielles
- R={(e1,f1),(e2,f2),(e3,f3)}

Récréation : Cardinaux infinis

- Dans les traces d'un des plus grands esprits mathématiques de tous les temps, Georg Cantor (1845-1918) essayons d'utiliser nos connaissances sur la théorie des ensembles pour domestiquer l'infini !

Ensembles dénombrables

- Il y a autant d'entiers naturels non nuls que d'entiers naturels…

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

- Il y a autant d'entiers naturels strictement plus grands que 80 (ou tout autre entier qui vous plaira !) que d'entiers naturels…

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96

Ensembles dénombrables

- Il y a autant d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels…

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30

- Et donc aussi autant d'entiers naturels impairs que d'entiers naturels…

- Pour les ensembles infinis, deux ensembles ont autant d'éléments ssi on sait établir une bijection de l'un dans l'autre…

Ensembles dénombrables

- Il y a autant d'entiers naturels que d'entiers relatifs… et donc que d'entiers naturels pairs

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	6	-7	7	-8

Recette très simple ici (on peut en inventer d'autres…)

- N<->N/2 si N est pair
- N<->-(N+1)/2 si N est impair
- Un ensemble que l'on sait mettre en bijection avec les entiers naturels est dit dénombrable (on sait mettre ses éléments en rang et les compter un par un sans en oublier).

Ensembles dénombrables

Il y a autant de couples d'entiers naturels non nuls que d'entiers naturels non nuls (follow the yellow brick road !), ainsi (4,5) est il le 22$^{\text{ème}}$ couple (on peut inventer plein d'autres règles !)

	1	2	3	4	5
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

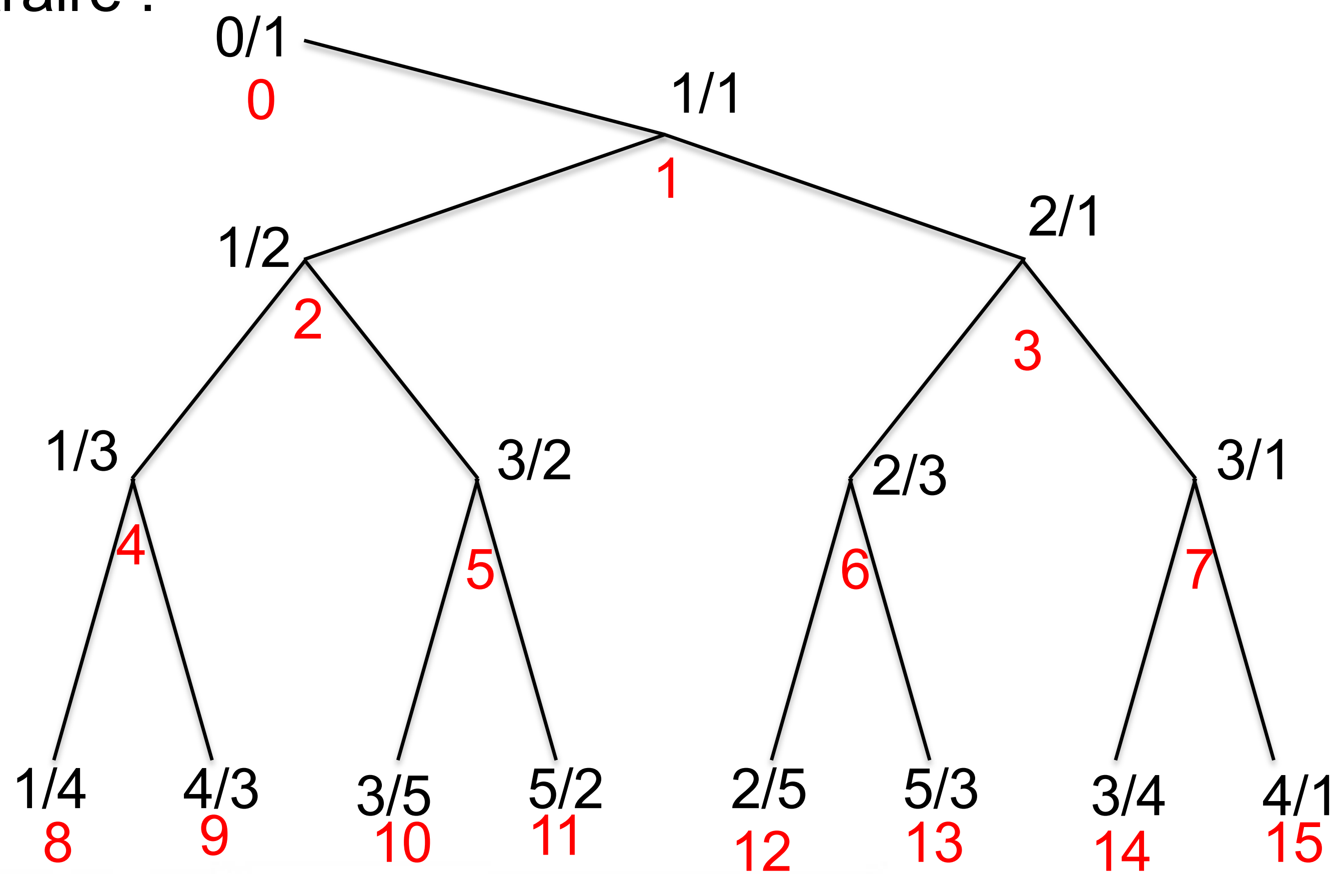
Ensembles dénombrables

Il y a donc autant de rationnels que d'entiers naturels (enlever, comme ici, de la liste les représentations réductibles, est optionnel…)

	1	2	3	4	5
1	1/1 (1)	1/2 (2)	1/3 (7)	1/4 (8)	1/5 (19)
2	2/1 (3)	2/2	2/3 (6)	2/4	2/5 (18)
3	3/1 (4)	3/2 (5)	3/3	3/4 (9)	3/5 (17)
4	4/1 (11)	4/2	4/3 (10)	4/4	4/5 (16)
5	5/1 (12)	5/2 (13)	5/3 (14)	5/4 (15)	5/5

Ensembles dénombrables

On peut aussi représenter cela sous forme d'un arbre (Calkin-Wilf) : la règle est que chaque nœud a/b a pour fils gauche a/(a+b) et pour fils droit (a+b)/b ce qui ne fournit que des fractions irréductibles. On numérote alors selon une règle arbitraire :



Ensembles non dénombrables

L'ensemble des réels n'est pas dénombrable, l'intervalle [0,1] ne l'étant déjà pas. Supposons en effet que l'on sache ranger les réels entre 0 et 1 dans un certain ordre. Par exemple :

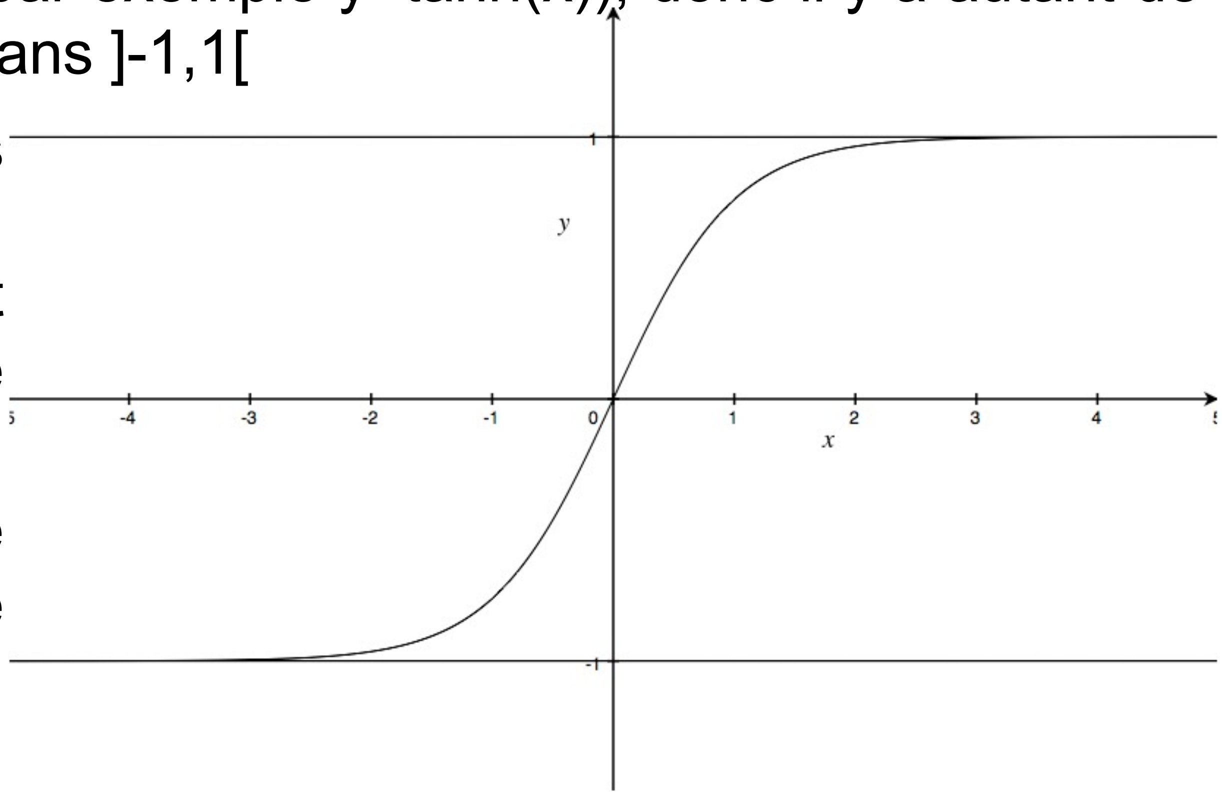
1	0,40094943852506
2	0,41428312136007
3	0,04649389947851
4	0,25044903050176
5	0,17511171631790
6	0,83479700466584
7	0,97319033831377
8	0,81437255224002
9	0,32761945135995
10	0,71795110693195
11	0,72986659920731
12	0,45681339087693
13	0,12779550026954

Fabriquons maintenant un réel compris entre 0 et 1 qui n'est pas dans la liste $0,n_1n_2n_3\ldots$. :

- n_i vaut 1 si la i-ième décimale après la virgule du nombre numéroté i ne vaut pas 1, n_i vaut 2 sinon (dans l'exemple cela donne 0,1211211121111
- Ce nombre diffère de tous ceux de la liste par au moins une décimale
- Il n'est pas décimal (développement infini, ne se terminant pas par une infinité de 9), sinon attention 0,49999…=0,50000…
- Il n'est donc pas dans la liste, donc…

Non dénombrabilité des réels

- L'argument qui précède (appelé diagonale de Cantor) montre que [0,1] n'est pas dénombrable (donc a fortiori l'ensemble des nombres réels non plus.
- Mais de toutes façons il existe des bijections des réels dans (par exemple)]-1,1[(ici par exemple y=tanh(x)), donc il y a autant de réels que de réels dans]-1,1[
- Deux ensembles pouvant être mis en bijection sont dit équipotents (même puissance).
- Ils ont le même cardinal (« nombre d'éléments »)



Cardinaux infinis

- L'œuvre de Cantor permet donc de manipuler et comparer des cardinaux infinis.
- Le plus petit cardinal infini est donc celui des entiers noté $\aleph_0$
- Les cardinaux infinis peuvent être rangés par ordre croissant : $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$
- Le cardinal de l'ensemble des réels est dit cardinal du continu et noté $\aleph_c$
- On montre que l'ensemble des parties des entiers naturels est équipotent à l'ensemble des réels.
- L'hypothèse du continu (due à Cantor) : énonce qu'il n'y a pas d'infini intermédiaire entre celui des entiers et celui des réels (ou des parties des entiers). Autrement dit $\aleph_1 = \aleph_c$
- L'hypothèse du continu généralisée énonce que les infinis successifs sont : les entiers, les parties des entiers, les parties des parties des entiers etc.

Axiomatisation de la théorie des ensembles

- La théorie des ensembles (finis ou non) s'axiomatise par un ensemble d'axiomes qui fait à peu près l'unanimité, nommé ZFC du nom de ses inventeurs Zermelo, Fraenkel (C pour le dernier axiome : l'axiome du choix).
- Le but est de fonder la théorie sur des bases solides évitant de tomber dans des considérations type $x \in x$, sources de paradoxes.
- L'hypothèse du continu est prouvée indécidable dans ZFC (Kurt Gödel 1938 – Paul Cohen 1963)
- Cela ne signifie nullement qu'elle soit « fondamentalement » indécidable mais plutôt que l'axiomatique ZFC n'est pas complète.