Ch4 - Optimisation avec contraintes

I) Introduction

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq i_*$

$h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad 1 \leq j \leq j_*$

(toutes au $\in$ différentiables)

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) = 0 & 1 \leq i \leq i_* \\ h_j(x) \leq 0 & 1 \leq j \leq j_* \end{cases}$$

Déf : f : fonction coût

$g_i(x) = 0$: contrainte d'égalité

$h_j(x) \leq 0$: contrainte d'inégalité

Ensemble Admissible

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \begin{array}{ll} g_i(x) = 0 & \forall i = 1..i_* \\ h_j(x) \leq 0 & \forall j = 1..j_* \end{array} \right\} \neq \emptyset$$

$$(P) \Leftrightarrow \min_{x \in K} f(x)$$

(Pb d'optimisation contraint)

Rq :

K est fermé (contient sa frontière)

Exemple : $h = 1 \cdot 1 - 1$ pour $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

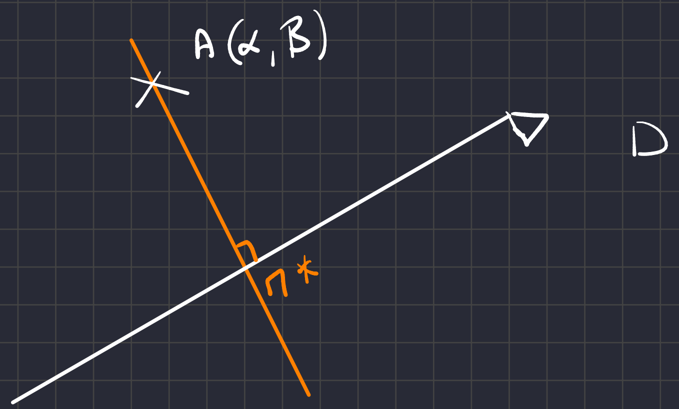
II] Contrainte d'égalité

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq i_* \end{cases}$$

Exemple :

$D : \quad ax + by + c = 0$

$(a, b) \neq 0$



M^* est le projeté orthogonal de A sur D .

Modélisation $\longrightarrow$ Pb d'optimisation

$$\|\overrightarrow{AM^*}\| = \min_{M \in D} \|\overrightarrow{AM}\|$$

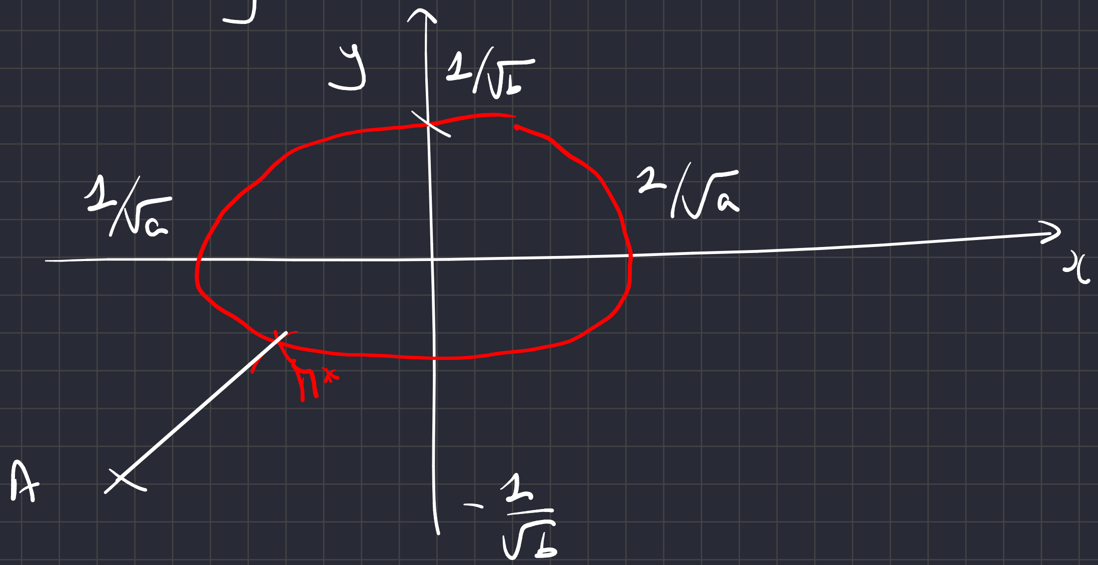
$$f(M) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \frac{1}{2} \left((x_1 - \alpha)^2 - (x_2 - \beta)^2 \right)$$

$$g(M) = ax_1 + bx_2 + c$$

$$(P) \Leftrightarrow \min_{g(x) = 0} f(x) \Leftrightarrow \min_{g(x_1, x_2) = 0} f(x_1, x_2)$$

② Ellipse

$$ax^2 + by^2 - 1 = 0 \qquad ab > 0$$



M_* ? $\qquad \min\limits_{g(M)=0} f(M)$

Déf :

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On dit que x est un point régulier pour (P) si

① $g_i(x) = 0 \quad \forall i = 1..i_*$

② $(\nabla g_i(x))_{1 \leq i \leq i_*}$ libre dans $\mathbb{R}^n$.

Rq :

Si $i_* > n$: aucun point régulier.

(en réalité, on a très très souvent $i_* \ll n$)

Thm (d'Euler - Lagrange)

Soit $x_* \in K$ solution de $(P) \Leftrightarrow \min f(x)$
$g_i(x) = 0 \quad \forall i = 1..i_*$

On suppose que x_* est un pt régulier.

Alors :

$$\exists \underbrace{(\lambda_i)_{i=1..i_*}}_{\text{multiplicateurs de Lagrange}} \in \mathbb{R}^{[\![1, i_*]\!]}, \quad \underbrace{\nabla f(x_*) + \sum_{i=1}^{i_*} \lambda_i \nabla g_i(x_*) = 0}_{\text{Eq° d'Euler - Lagrange}}$$

Rmq :

Système complet (condition d'optimalité d'ordre 1)

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \dots + \lambda_{i_*} \nabla g_{i_*}(x) = 0 \\ g_i(x) = 0 \qquad i = 1..i_* \end{cases}$$

($n + i_*$ éq° scalaire)

Application :

Trouver la projection orthogonale d'un point sur 1 droite

$$f(M) = f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left((x_1 - \alpha)^2 + (x_2 - \beta)^2\right)$$

$$g(M) = g(x_1, x_2) = a x_1 + b x_2 + c = 0 \qquad (a,b) \neq (0,0)$$

$$(P) : \min_{g(x)} f(x)$$

① Pts réguliers : $\nabla g(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Tout pt x est régulier.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - \alpha \\ x_2 - \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \lambda_i \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 - \alpha \\ x_2 - \beta \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{0} \\ a x_1 + b x_2 + c = 0 \end{cases}$$

x_1, x_2, λ ?

$$\iff \begin{cases} x_1 - \alpha + \lambda a = 0 \\ x_2 - \beta + \lambda b = 0 \\ a x_1 + b x_2 + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \alpha - \lambda a \\ x_2 = \beta - \lambda b \\ a(\alpha - \lambda a) + b(\beta - \lambda b) + c = 0 \quad ③ \end{cases}$$

$$\left(③ \quad -\lambda(a^2 + b^2) + (a\alpha + b\beta + c) = 0 \iff \lambda = \frac{a\alpha + b\beta + c}{a^2 + b^2} \right)$$

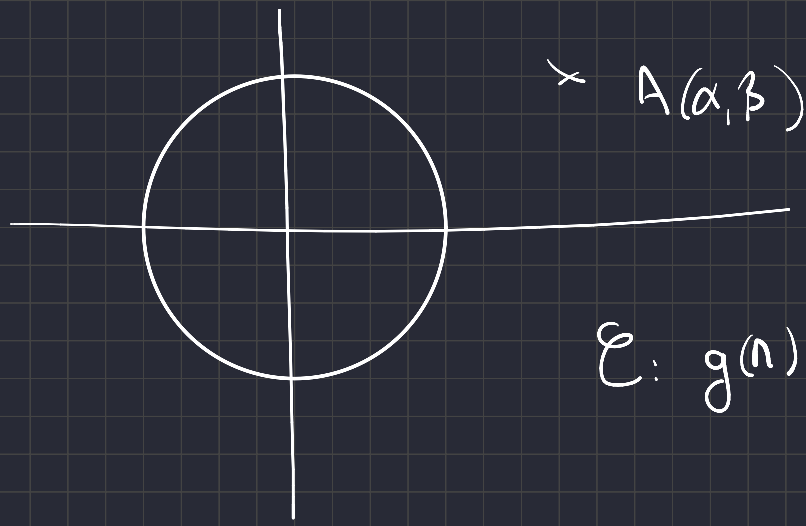
$$\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{a\alpha + b\beta + c}{a^2 + b^2} \\ x_1^* = \alpha - \left(\dfrac{a\alpha + b\beta + c}{a^2 + b^2} \right) a \\ x_2^* = \beta - \left(\dfrac{a\alpha + b\beta + c}{a^2 + b^2} \right) b \end{cases}$$

③ Projecto sur le cercle unité

$$f(x) = \frac{1}{2}\left((x_1 - \alpha)^2 + (x_2 - \beta)^2 \right)$$

$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$\alpha^2+\beta^2>1$$



$$\mathcal{C} : g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - \alpha \\ x_2 - \beta \end{pmatrix}$$

x régulier ? $\quad \nabla g(x) = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = 0$

Mais $x=0$ n'est pas sur le cercle...

$\forall x \in \mathcal{C} \quad \nabla g(x) \neq 0 \quad$ Tout $x \in \mathcal{C}$ est régulier.

<u>Sys optimalité</u>

$$\begin{cases} x_1 - \alpha + \lambda(2x_1) = 0 \\ x_2 - \beta + \lambda(2x_2) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(1+2\lambda) = \alpha \\ x_2(1+2\lambda) = \beta \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

<u>1er cas</u> : $(1+2\lambda) = 0 \iff \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \cancel{A = 0}$

<u>2e cas</u> : $(1+2\lambda) \neq 0 \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{\alpha}{1+2\lambda} \\ x_2 = \dfrac{\beta}{1+2\lambda} \\ \left(\dfrac{\alpha}{1+2\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{\beta}{1+2\lambda}\right)^2 = 1 \end{cases} \quad (3)$

③ $\Leftrightarrow \quad \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{(1+2\lambda)^2} = 1$

$\Leftrightarrow \quad (1+2\lambda)^2 = \alpha^2+\beta^2$

$\Leftrightarrow \quad 1+2\lambda = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

Cas 2.1 : $\quad 1+2\lambda = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$$(x_*)_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$(x_*)_2 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\Pi_* \left((x_*)_1, (x_*)_2\right)$$

$$(\alpha, \beta) \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

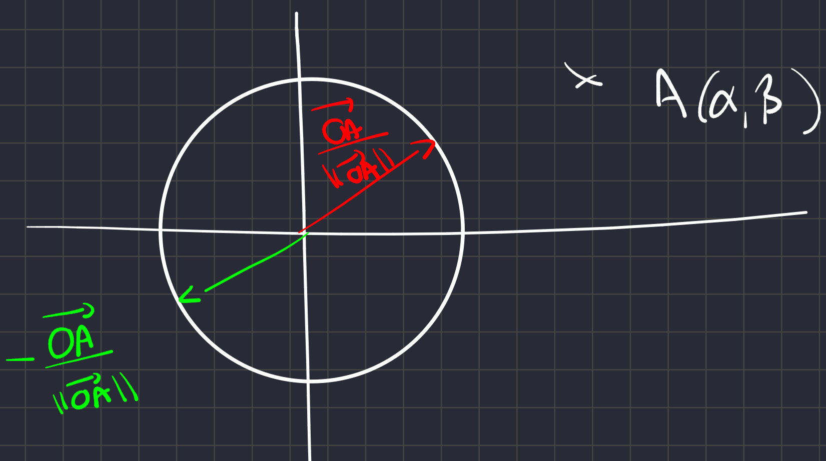
$$\overrightarrow{O\Pi_*} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$$

Cas 2.2 :

$$1+2\lambda = -\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\Pi^* (\alpha, \beta) \left(\frac{-1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \right)$$

$$\overrightarrow{O\Pi^*} = -\frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}.$$



C'est M_* le plus proche de A

c'est M^* le plus éloigné de A

M^* réalise $\max\limits_{g(M)} f(M) \Leftrightarrow (P')$

Corollaire

x_* est solution de $(P') : \max\limits_{g_i(x)=0} f(x)$

Si x_* est régulier alors

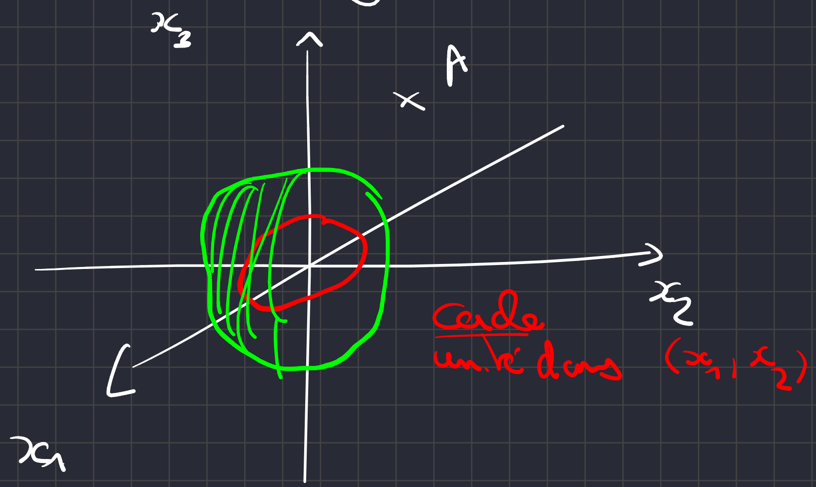
$$\begin{cases} \nabla f(x_*) + \sum\limits_{i=1}^{i_*} \lambda_i \nabla g_i(x_*) = 0 \\ \left(g_i(x_*) = 0 \quad i = 1, \dots, i_*\right) \end{cases}$$

Ex 3

$A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq 1$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto f(M) = \frac{1}{2}\|\vec{AM}\|^2$$
$$= \frac{1}{2}\left((x_1-\alpha)^2 + (x_2-\beta)^2 + (x_3-\gamma)^2\right)$$

$$\mathcal{C} = \left\{ M(x_1,x_2,x_3), \quad \begin{array}{l} g_1(M) = x_1^2+x_2^2+x_3^2-1 = 0 \\ g_2(M) = x_3 = 0 \end{array} \right\}$$



$M_* \in \mathcal{E}$ le $\oplus$ proche de A :

$$\min_{M \in \mathcal{E}} f(M) \iff \begin{array}{c} \min f(M) \\ g_1(M) = 0 \\ g_2(M) = 0 \end{array}$$

$$\nabla g_1(M) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\{\nabla g_1(M), \nabla g_2(M)\}$ <u>Système lié</u>

$$\iff x_1 = x_2 = 0$$

- $M \in \mathcal{E}$ tq $\{\nabla g_1(M), \nabla g_2(M)\}$ lié

$$\iff x_1 = x_2 = 0 \text{ et } x_3 = 0$$

$$\iff M = 0 \notin \underline{\mathcal{E}}$$

Tous les points de $\mathcal{E}$ sont réguliers.

<u>Syst. d'opt</u>.

$$\begin{cases} \nabla f(M) + \lambda_1 \nabla g_1(M) + \lambda_2 \nabla g_2(M) = 0 \\ g_1(M) = 0 \\ g_2(M) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \alpha + \lambda_1 (2x_1) = 0 \\ x_2 - \beta + \lambda_1 (2x_2) = 0 \\ x_3 - \gamma + \lambda_1 (2x_3) + \lambda_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \alpha + \lambda_1 (2x_1) = 0 \\ x_2 - \beta + \lambda_1 (2x_2) = 0 \\ \lambda_2 = \gamma \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \gamma \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

III - Contraintes d'inégalités

$$(P) \quad \min_{\substack{h_j(x) \leq 0 \\ j = 1 .. j_*}} f(x)$$

où

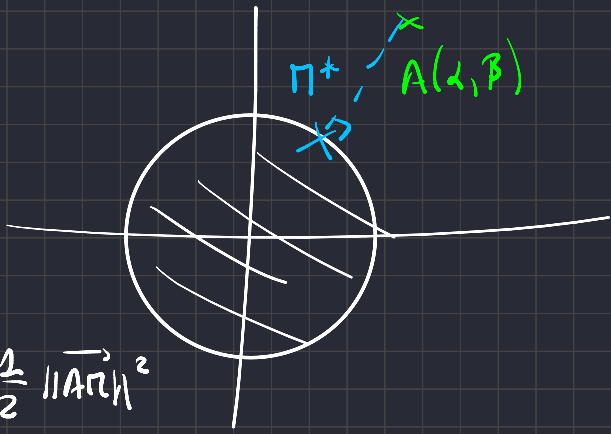
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Espace admissible :

$$K = \{ x \in \mathbb{R}^n, \ h_j(x) \leq 0, \ \forall j \in [\![1, j_*]\!] \}$$

Exemple :

$\alpha^2+\beta^2-1>0$



$$D = \{(x_1,x_2),\ x_1^2+x_2^2-1 \leq 0\}$$
$$= \{(x_1,x_2),\ h(x_1,x_2) \leq 0\}$$

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left((x_1-\alpha)^2+(x_2-\beta)^2\right) = \frac{1}{2}\|\vec{AM}\|^2$$

$$f(M^*) = \min_{h(M)=0} f(x) \qquad (P')$$

$$(P) : \quad \min_{h(M)\leq 0} f(x) = f(M^*) \qquad (A \notin D)$$

$\Omega = D \setminus \mathcal{C}$ ouvert : $M^* \in \Omega$

M^* solution de (P) :

$A \notin \Omega$

① $M^* \in \mathcal{C}$, $h(M^*) = 0$ (Contrainte activée)

$\Rightarrow$ M^* solution de (P')

$\Rightarrow$ Thm. Euler - Lagrange.

② $M^* \notin \mathcal{C}$, $h(M^*) < 0$ $\qquad A \in \Omega$

Nécessairement $M^* = A$ $\qquad (\alpha^2+\beta^2<1)$

$$f(M^*) = \min_{M\in\Omega} f(M) \qquad (P'')$$

(OPTIMISATION LIBRE)

$$\Rightarrow \nabla f(M^*) = 0$$

Déf :

Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$. On dit que x^* est **régulier** pour (P)

(i) $x_* \in K$, $h_j(x_*) \leq 0$ $\quad j = 1..j_*$

(ii) $\left(\nabla h_j(x_*) \right)_{j=1..j_*}$ est libre dans $\mathbb{R}^n$.

Thm (de Kuhn-Tucker).

Soit x_* la sol° de (P) : $\min f(x)$

$$h_j(x) \leq 0$$
$$j = 1..j_*$$

On suppose que x_* est régulier. Alors il existe $(\lambda_j)_{j=1..j_*}$ tq $\nabla f(x_*) + \sum_{j=1}^{j_*} \lambda_j \nabla h_j(x_*) = 0$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1..j_*$$

$$\lambda_j h_j(x_*) = 0 \qquad \text{(complémentarité)}.$$

Rmq :

$$\lambda_j \geq 0 \quad \Longleftarrow \quad h_j(x) \leq 0$$

$$\lambda_j \leq 0 \quad \not\Longleftarrow \quad h_j(x) \geq 0$$

Rmq :

$$(Q) \quad \max f(x)$$
$$h_j(x) \leq 0 \quad \longrightarrow \quad \underline{\lambda_j \leq 0}.$$
$$j = 1..j_*$$

Signe des λ

	$\max f$	$\min f$
$h \leq 0$	$-$	$+$
$h \geq 0$	$+$	$-$

Exemple :

$$A(\alpha, \beta) \qquad f(M) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \frac{1}{2}\left((x_1-\alpha)^2 + (x_2-\beta)^2\right)$$

$$D = \{M, \quad h(M) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}$$

$$(P) : \quad \min_{h(M) \leq 0} f(M) = f(M^*)$$

KT :

Régularité :

$$\nabla h(M) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$M \in D$ est régulier ssi $\underline{M \neq 0}$.

$\rightarrow$ Tout $M \in D \setminus \{0\}$ est régulier.

$$(KT) : \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \nabla f(M) + \lambda \nabla h(M) = 0 \\ \lambda \geq 0, \quad \lambda h(M) = 0 \end{array} \right. \\ h(M) \leq 0 \end{array} \right.$$

Syst complet

$$\begin{cases} x_1-\alpha+\lambda(2x_1)=0 & (1)\\ x_2-\beta+\lambda(2x_2)=0 & (2)\\ \boxed{\lambda\geq 0}, \quad \boxed{\lambda(x_1^2+x_2^2-1)=0} & \\ x_1^2+x_2^2-1\leq 0 & \end{cases}$$

à voir en commençant ici

(i) $\underline{\lambda\neq 0}$: $\begin{cases} x_1^2+x_2^2-1=0 \\ (1) \\ (2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Trouvé précédemment

$\left(\alpha^2+\beta^2 \overset{?}{\geq} 1\right)$

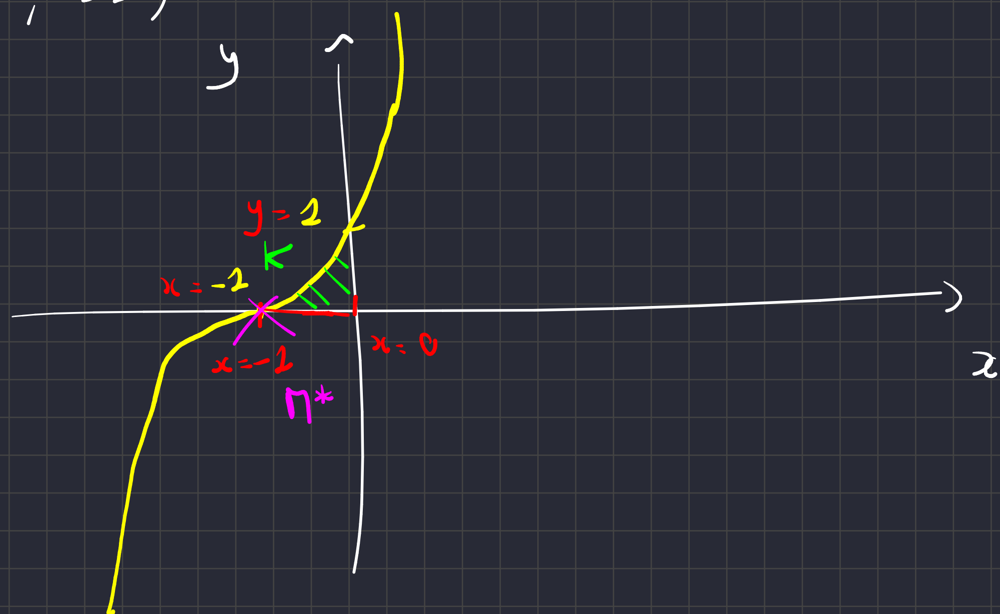
$\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \geq 0$

(ii) $\underline{\lambda=0} \Longrightarrow \begin{cases} x_1-\alpha=0 \\ x_2-\beta=0 \\ x_1^2+x_2^2\leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=\beta \\ \alpha^2+\beta^2\leq 1 \end{cases}$

$\Longrightarrow M_* = A \qquad \left(\|\overrightarrow{OA}\|\leq 1\right)$

Exercice (II, TD5)

1)



$$-1 = \min_{(x,y)\in K} x \quad ; \qquad \text{atteint en } \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

2) (KT) :

$$\nabla f(M) + \lambda_1 \nabla h_1(M) + \lambda_2 \nabla h_2(M) + \lambda_3 \nabla h_3(M) = 0$$

$$\lambda_i h_i(M) = 0 \quad , \quad \lambda_i \geq 0$$

$$h_i(M) \leq 0$$

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1 - 3(1+x)^2 \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 x = 0 \ , \ \lambda_2 y = 0 \ , \ \lambda_3 \left(y - (1+x)^3\right) = 0 \\ x \leq 0 \qquad y \leq 0 \qquad y - (1+x)^3 \leq 0 \end{cases}$$

Cas 1 :

$x \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

× Cas 1.1 : $y \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow 1 = 0$

BRUH

× Cas 1.2 : $y = 0 \Rightarrow \lambda_3(1+x^3) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad (\text{et } \lambda_1 = 0)$

BRUH

Cas 2 : $x = 0$

× Cas 2.1 :

$y \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \ (<0)$

Cas 2.2 :

$y = 0 \Rightarrow \lambda_3(1+x)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$

(KT) $\Rightarrow$ Pas de solution

(KT) ne s'applique pas

$$\nabla h_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla h_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla h_3(x) = \begin{pmatrix} -3(1+x)^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

~~x^* pt régulier~~

$h_1(x^*(-1,0))$ non saturée

$\Rightarrow$ Laisser tomber h_1.

KT avec h_2 et h_3 ...

Pas de solution !

$$\nabla h_2(x_*) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x_* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla h_3(x_*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$