

# Méthodes de gradient

(P) :  $\min_{x \in \Omega} f(x) = f(x_*)$   $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable  
 $\uparrow$  ouvert

Objectif : Construire  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$  tq :

- (i)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_*$
- (ii) le calcul de  $x_k$  à chaque étape ne doit pas être cher.

## I) Méthode de descente

Déf :

$d \in \mathbb{R}^n$  est dit direction de descente pour la fonction  $f$  au point  $x \in \Omega$  s'il existe  $\bar{\epsilon} > 0$  tq  
 $f(x+td) < f(x) \quad \forall t \in [0, \bar{\epsilon}]$

Algo :

$x_0 \in \Omega$

À l'itération  $k$  :

$k \leftarrow x_k$

$d_k$  : direction de descente

$t_k$  : pas de descente ( $f(x_k + t_k d_k) < f(x_k)$ )

$x_{k+1} = x_k + t_k d_k$

$\rightarrow x_{k+1}$

Prop:

$d \in \mathbb{R}^n$ ,  $(\nabla f(x), d) < 0 \Rightarrow d$  direction de descente de  $f$  en  $x$

Démo:

$$\begin{aligned} t > 0 \quad f(x+td) - f(x) &= (\nabla f(x), td) + \|td\| \underbrace{\varepsilon(td)}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0} \\ &= t \left[ \underbrace{(\nabla f(x), d)}_{< 0} + \|d\| \varepsilon(td) \right] \\ &< 0 \\ t < 1 \end{aligned}$$

D'où  $f(x+td) < f(x)$



Exemple:

$$d = -\nabla f(x)$$

$$(\nabla f(x), d) = -\|\nabla f(x)\|^2 < 0$$

## II-2) Méthodes de gradient

Prop:  $d \in \mathbb{R}^n$  direction de descente de  $f$  en  $x$ ,  $\|d\|=1$

$$g = \frac{-\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$$

$$(\nabla f(x), g) \leq (\nabla f(x), d) < 0$$

Démo:

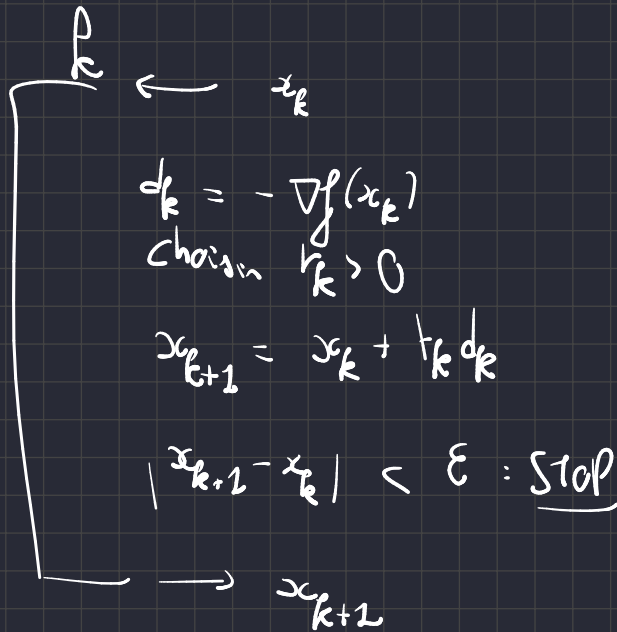
$$(\nabla f(x), g) = \dots = -\|\nabla f(x)\|$$

$$\text{On } |(\nabla f(x), d)| \leq_{C-S} \|\nabla f(x)\| \times \|d\| = \|\nabla f(x)\|$$

$$\text{Donc } -\|\nabla f(x)\| \geq (\nabla f(x), d)$$

$$\text{Donc } (\nabla f(x), g) < (\nabla f(x), d) < 0$$

### Algorithme



Rmq :

① Si le pas de descente est constant

$$t_k = t \quad \forall k.$$

→ On utilise la méthode du gradient à pas constant.

②  $t_k > 0$ ,

$$f(x_k + t_k d_k) \leq f(x_k + t d_k) \quad \forall t > 0$$

→ On utilise ici la méthode du gradient à pas optimal.

