Optimisation libre (sans contrainte)

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ continue}$$

(P) : Chercher $x_* \in \Omega$;

$$f(x_*) = \min_{x \in \Omega} f(x)$$

Déf :

(P) est un problème d'optimisation libre ssi Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

⚠ q° récurrente aux finaux

q : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ouvert

Ω possède une frontière $\partial\Omega$ (perception intuitive)

Ω est ouvert ssi $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$

Ex : $\Omega = \{ M(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \; x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$

$(\partial\Omega = \{ M(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \; x_1^2 + x_2^2 = 1 \})$

Autre déf :

Ω est ouvert ssi $\forall x \in \Omega, \; \exists r > 0, \; B(x, r) \subset \Omega$

$(B(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^n, \; \|y - x\| < r \})$

Def :

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable

Soit $x_* \in \Omega$

① On dit que x_* est un minimum global de f ssi

$$f(x_*) = \min_{x \in \Omega} f(x)$$

② On dit que x_* est un minimum local de f ssi

$$\exists r > 0, \quad f(x_*) = \min_{x \in B(x_*, r)} f(x)$$

Dans ce cours, on étudie les extremums locaux

Prop :

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Ω ouvert)

Soit $x_* \in \Omega$.

Si x_* est un minimum local de f alors x_* est un point critique ($\nabla f(x) = 0$)

Preuve :

$$\exists r > 0, \quad f(x_*) = \min_{x \in B(x_*, r)} f(x)$$

① Soit $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Cherchons les $t \in \mathbb{R}^n$ tq $x = x_* + th \in B(x^*, r)$

$\Leftrightarrow d(x, x^*) < r$

$\Leftrightarrow \|th\| < r$

$\Leftrightarrow \dots$

$\Leftrightarrow t \in \left] \frac{-r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|} \right[$

② $f(x) - f(x^*) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad f(x_* + th) - f(x) \geq 0$

<u>si $t > 0$</u>, $\quad \dfrac{f(x_* + th) - f(x_*)}{t} \geq 0 \qquad (t \in]0, \frac{\eta}{\|h\|}[)$

à la limite quand $t \to 0^+$ $\quad (\nabla f(x_*), h) \geq 0$

<u>Si $t < 0$</u>

--- $(\nabla f(x_*), h) \leq 0$

<u>Conclusion :</u> $\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad (\nabla f(x_*), h) = 0$

D'où $\underline{\nabla f(x_*) = 0}$.

<u>Rmq</u> : Si x_* est un maximiseur alors $\nabla f(x^*) = 0$.

Réciproque fausse (contre-exemple $f : x \mapsto x^3$
$\nabla f(0) = 0$)

<u>Condition d'optimalité d'ordre 2 :</u>

$f : \underset{\text{ouvert}}{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2 fois différentiable $(\nabla f, Hf)$

<u>Théorème</u> :

Soit $x_* \in \Omega$ tq $\nabla f(x_*) = 0$

① Si $-Hf(x_*)$ est définie positive alors x_* est un <u>minimiseur local</u>.
maximiseur

② $\Big(\exists \eta > 0, \quad -Hf(x)$ est semi définie positive
$\forall x \in B(x_*, \eta) \Big)$

$\Rightarrow$ (x_* est un minimiseur local)
maximiseur

Preuve de (1) :

Taylor :

x_* est un p^t critique

$$f(x) = f(x_*) + \cancel{(\nabla f(x_*), x-x_*)} + \frac{1}{2}\left((Hf(x_*)\cdot(x-x_*), x-x_*) + \|x-x_*\|^2 \varepsilon(x) \right)$$

$$\varepsilon(x) \underset{x \to x^*}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_*) = \frac{1}{2}\left(Hf(x_*)(x-x_*), (x-x_*) \right) + \|x-x_*\|^2 \varepsilon(x)$$

$$\geq \frac{\lambda_{min}(Hf(x_*))}{2} \|x-x_*\|^2 + \|x-x_*\|^2 \varepsilon(x))$$

$$\geq \|x-x_*\|^2 \left(\frac{\lambda_{min}}{2} + \varepsilon(x) \right)$$

$$0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$$

$$x^T Hf(x) x$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)^T Hf(x) (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)^T (\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n)$$
$$= \alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n$$
$$\geq (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2) \lambda_1 = \|x\|^2 \lambda_1 .$$

≥ 0 pour un certain $r > 0$.

Prop : Mêmes hypothèses

$x_* \in \Omega$, $\nabla f(x_*) = 0$

Si $Hf(x_*)$ admet des val. propres > 0
des val. propres < 0

alors x_* n'est pas un extremum

Il s'agit alors d'un point selle.

Rmq :

⚠ Si une valeur propre est nulle, alors on ne sait pas.