Université de Technologie de Compiègne **RO04**

— EXAMEN FINAL—

Date : 23 Juin 2015 **Documents et calculatrices non autorisés**

Exercice I : — Optimisation sans contraintes
On considère la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x,y) = x^2 y - x\ln(y).$$

On définit les points $P = (0,1)$ et $Q = (e^{-2}, e^2)$.

1. Calculer ∇f.
2. Vérifier que P et Q sont des points critiques de f. Prouver que ce sont les seuls points critiques.
3. Calculer la hessienne de f.
4. Dire si P et Q déterminent des extremums locaux (ou non).
(*Vous pouvez utiliser le résultat suivant : une matrice symétrique est définie postive si et seulement si sa trace et son déterminant sont positifs*)

Exercice II : — Optimisation avec contraintes

1. On définit le domaine

$$D = \Big\{(x,y); \qquad x^2 + y^2 \leq 1, \ \ x + y \geq 1\Big\}$$

   (a) Représenter D dans le plan.
   (b) Expliquer pourquoi D est compact (fermé borné)?

2. Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$$

   (a) La fonction possède-elle un minimum sur D?
   (b) En écrivant les conditions de Kuhn-Tucker, déterminer le (ou les) point(s) où f atteint son minimum sur D.

Exercice III : Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n et $c \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul. On définit la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x).$$

Soit le problème de minimisation sous contrainte,

$$\min_{1-(c,x)\leq 0} f(x) \tag{1}$$