



Rouch Valentin

ENSAE 2ème année
Stage d'application
Année scolaire 2024–2025

**Développement d'outils quantitatifs d'aide à la
décision pour la gestion de fonds de fonds :
application du modèle de Black–Litterman**

ERES Gestion
Paris

Maître de stage : Olivier-David Zerbib
Juillet 2025 – Septembre 2025

ENSAE Paris
TSA 26644
Service des relations entreprises et des stages
5, avenue Henry Le Chatelier — 91164 PALAISEAU CEDEX — FRANCE - Tél. : +33 (0)1 70 26 67 39 - Courriel : stages@ensae.fr
www.ensae.fr

Table des matières

1	Introduction	2
2	Contributions à la performance	3
2.1	Définition et intérêt	3
2.2	Données nécessaires	3
2.3	Méthodologie	3
2.4	Présentation des résultats	5
3	Modèle de Black-Litterman	6
3.1	Enjeux de la société de gestion	6
3.2	Travaux de recherche et sélection du modèle	6
3.3	Justification du choix du modèle de Black–Litterman	7
3.4	Explication du modèle	7
3.4.1	Reference model (modèle de référence)	7
3.4.2	General equilibrium model (équilibre général)	8
3.4.3	View creation model (modélisation des vues)	9
3.4.4	Theil & Goldberg’s Model (modèle d’agrégation)	11
4	Optimisation sous contraintes	12
4.1	Contexte	12
4.2	Contraintes	12
4.2.1	Contraintes d’exposition	13
4.2.2	Contraintes d’environnement	13
4.2.3	Contraintes de fonctionnalité	14
4.3	Méthode de résolution	14
4.3.1	Fonction cible	14
4.3.2	Formalisation des contraintes	15
4.4	Présentation des résultats	16
4.4.1	Interface	16
4.4.2	Backtests	17
4.4.3	Résultats	19
4.4.4	Analyse des résultats	20
4.4.5	Limites	20
5	Conclusion	22
6	Références bibliographiques	23
7	Annexes	24

1 Introduction

Ce rapport s'inscrit dans le cadre du stage d'application du cycle ingénieur de l'ENSAE Paris, effectué à l'issue de la deuxième année. Ce stage, vise à mettre en pratique les enseignements de mathématiques appliquées, de statistiques et d'économie, en mobilisant les compétences acquises au service d'une problématique concrète.

Le stage s'est déroulé au sein d'**ERES Gestion**, société de gestion indépendante fondée en 2005, spécialisée dans l'épargne retraite et la multigestion. ERES Gestion se distingue par son modèle d'architecture ouverte, qui permet de sélectionner, parmi un large univers de fonds externes, les meilleures opportunités pour construire des allocations diversifiées et performantes au bénéfice des épargnants. L'entreprise propose ainsi une offre complète de fonds de fonds et d'unités de compte en assurance vie. J'ai été intégré à l'équipe *Produit digital*, dont une des missions est de développer des outils quantitatifs et technologiques pour soutenir les gérants et fluidifier leurs processus de décision.

L'enjeu principal du stage portait sur la mise à disposition d'un outil d'aide à la décision en allocation de fonds de fonds. En effet, si l'architecture ouverte offre de nombreux avantages en termes de choix et de diversification, elle introduit également une grande complexité dans la construction et le suivi des portefeuilles. Les gérants doivent composer avec une multiplicité d'instruments, des contraintes réglementaires strictes, et la nécessité d'analyser en profondeur les expositions issues de la transposition des fonds. Le projet confié visait à explorer et mettre en œuvre des techniques quantitatives avancées afin d'éclairer ces décisions : contribution et attribution de performance, calcul ex-ante du risque, optimisation d'allocation sous contraintes, etc.

Plus concrètement, le travail s'est décliné en deux projets distincts.

Le premier projet, intitulé **Contributix**, portait sur le calcul des contributions à la performance. Dans ce cadre, j'ai identifié, conjointement avec un collègue, les formules de calcul pertinentes, puis j'ai assuré en autonomie l'implémentation complète des traitements en Python.

Le second projet, intitulé **Optimix**, visait à construire un outil d'optimisation des allocations en s'appuyant sur le modèle de Black-Litterman. J'ai mené de façon autonome la conception technique et l'implémentation de ce modèle, avant de collaborer avec une gérante afin d'adapter l'outil aux besoins métiers et aux contraintes pratiques.

Pour chacun de ces deux projets, j'ai développé une application web grâce au framework Dash de Python. Ces applications permettent d'afficher dynamiquement les résultats, de les mettre à jour au fil du temps, et surtout de les rendre accessibles à des utilisateurs non familiers de Python, qu'il s'agisse de gérants ou de collaborateurs d'autres équipes.

L'ensemble de ces travaux a reposé sur les données financières disponibles dans **Reflix**, la base SQL interne d'ERES Gestion régulièrement alimentée. Tout au long du stage, j'ai travaillé en étroite collaboration avec la personne responsable du référentiel afin de créer et d'adapter les points de données nécessaires aux calculs et à l'optimisation. Cette collaboration a garanti la cohérence et la fiabilité des données utilisées, condition indispensable pour la pertinence des résultats obtenus.

2 Contributions à la performance

2.1 Définition et intérêt

Identifier les contributions à la performance consiste à attribuer à chaque instrument la part de performance du fonds qui lui revient. Cette démarche permet de décomposer la performance globale, de distinguer les instruments qui contribuent positivement de ceux qui contribuent négativement et d'orienter ainsi le pilotage (réallocation, ajustement des expositions, communication auprès des clients).

2.2 Données nécessaires

Pour déterminer la contribution à la performance des instruments présents en portefeuille sur la période d'observation, il est nécessaire de disposer, pour chaque instrument et à chaque date, de sa valeur liquidative, des quantités détenues et de sa valorisation dans le fonds.

Nous adopterons par la suite les notations suivantes :

- $p_{i,t}$: prix de l'instrument i à la date t
- $q_{i,t}$: quantité de l'instrument i détenu à la date t
- $AuM_{i,t}$: valorisation de l'instrument i à la date t dans le portefeuille
- AuM_t : valorisation totale du fonds étudié à la date t , définie comme la somme des valorisations de l'ensemble des instruments en portefeuille à la date t :

$$AuM_t = \sum_i AuM_{i,t}$$

2.3 Méthodologie

Avant de détailler la méthodologie, il convient de souligner qu'il n'est pas possible de calculer la contribution à la performance en se contentant de pondérer la performance du fonds par les poids de chaque instrument en portefeuille. En effet, nous travaillons sur des fonds ouverts, pour lesquels des souscriptions et des rachats interviennent quotidiennement. Or, si l'on appliquait une méthode aussi basique, ces flux pourraient être interprétés à tort comme de la performance journalière.

Il est donc nécessaire d'adopter une approche qui neutralise l'effet des souscriptions et des rachats afin d'isoler correctement la contribution réelle de chaque instrument à la performance du fonds.

1) Création des fonctions nécessaires

Pour rassembler l'ensemble des informations utiles aux calculs, plusieurs fonctions ont été développées :

- `get_pricing_dates` : détermine l'ensemble des dates de valorisation du fonds sur la période d'intérêt
- `get_inst_list` : établit la liste des instruments détenus dans le fonds au cours de la période considérée
- `get_inst_metrics` : extrait, pour chaque date, le prix, la quantité détenue et la valorisation de chaque instrument dans le portefeuille

2) Décomposition quotidienne du PnL et des flux

Dans l'éventualité où un instrument rentre en position durant la période d'interet, nous avons dû renforcer les données disponibles en créant un prix de référence de veille :

$$p_{i,t-1}^* = \begin{cases} p_{i,t-1}, & \text{si l'instrument était en position en } t-1 \\ p_{i,t}, & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette convention empêche de mesurer la performance de la première journée. Néanmoins, elle s'avère nécessaire. Sans ce choix, l'ensemble des versements initiaux effectués sur un instrument serait artificiellement interprété comme de la performance.

Dans notre démarche visant à dissocier les effets liés aux performances de marché de ceux provenant des flux (souscriptions et rachats), nous calculons quotidiennement deux grandeurs fondamentales :

— Le PnL quotidien de l'instrument i :

$$\text{PnL}_{i,t} = q_{i,t} (p_{i,t} - p_{i,t-1}^*)$$

— Le terme de souscriptions/rachats associé à l'instrument i :

$$\text{SR}_{i,t} = p_{i,t-1}^* (q_{i,t} - q_{i,t-1})$$

En agrégeant ces flux à l'échelle du portefeuille, on obtient le montant global des souscriptions/rachats au jour t :

$$\text{SR}_t = \sum_i \text{SR}_{i,t}$$

Ce qui nous permet désormais de calculer la performance quotidienne du fonds neutralisée des flux :

$$\text{Perf}_t = \frac{\text{AuM}_t - (\text{AuM}_{t-1} + \text{SR}_t)}{\text{AuM}_{t-1} + \text{SR}_t}$$

3) Neutralisation des effets de dilution

Nous avons désormais identifié les performances quotidiennes du fonds. Néanmoins, afin de pouvoir allouer une partie de cette performance à chaque instrument, il est impératif de neutraliser les flux au sein de chaque instrument. Etant donné que nous souhaitons désormais travailler sur les PnL des instruments et pas sur leur performance, nous introduisons un facteur d'ajustement :

$$A_0 = 1, \quad A_t = A_{t-1} + \frac{\text{SR}_t}{\text{AUM}_{t-1}}$$

Ce facteur nous permet de définir le PnL ajusté de chaque instrument à chaque date :

$$\tilde{\text{PnL}}_{i,t} = \text{PnL}_{i,t} / A_t$$

On en déduit le PnL ajusté total par instrument et pour le fonds :

$$\tilde{\text{PnL}}_i = \sum_t \tilde{\text{PnL}}_{i,t}, \quad \tilde{\text{PnL}} = \sum_i \sum_t \tilde{\text{PnL}}_{i,t}$$

4) Pondération et agrégation

On calcule la part de PnL ajusté de chaque instrument :

$$w_i = \frac{\tilde{\text{PnL}}_i}{\tilde{\text{PnL}}}$$

La performance cumulée du fonds sur la période est :

$$\text{Perf}_{\text{fonds}} = \prod_t (1 + \text{Perf}_t) - 1$$

La **contribution** (en points de pourcentage) de l'instrument i est alors :

$$\text{Contr}_i = w_i \times \text{Perf}_{\text{fonds}} \times 100$$

2.4 Présentation des résultats

Afin de rendre l'analyse des contributions interactive et plus facile d'accès, nous avons développé une interface en Python à l'aide du framework Dash. Cette application permet de sélectionner un fonds, de définir la période d'étude (Max, YTD, 3M, 1Y, 3Y, 5Y) et d'afficher les contributions à la performance sous forme d'histogrammes. Elle fournit également des indicateurs de performance globale et propose un module d'export des résultats au format xlsx.

La figure ci-dessous illustre un exemple de l'interface développée :

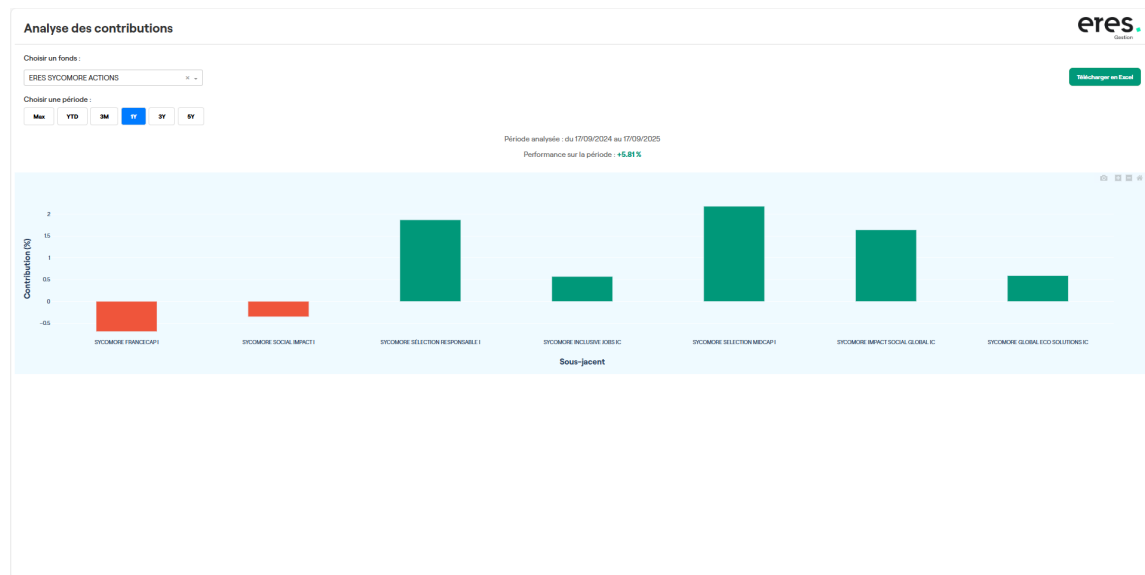


FIGURE 1 – Visualisation des contributions à la performance du fonds ERES SYCOMORE ACTIONS sur un historique d'un an.

3 Modèle de Black-Litterman

3.1 Enjeux de la société de gestion

L'un des principaux défis pour une société de gestion réside dans l'optimisation des allocations. L'architecture ouverte, caractéristique de l'offre d'Eres Gestion, permet de proposer un univers large d'instruments financiers, mais introduit également une complexité accrue dans la construction et le suivi des portefeuilles. La multiplicité des fonds, l'hétérogénéité des styles de gestion et la nécessité de collecter des données de transparence rendent la prise de décision délicate. Dans ce contexte, l'objectif est d'appuyer les gérants à l'aide de méthodes quantitatives permettant d'évaluer et de simuler différents scénarios d'allocation.

3.2 Travaux de recherche et sélection du modèle

Afin d'identifier le cadre méthodologique le plus adapté, nous avons consulté l'ouvrage de Cajas, D. (2025). *Advanced Portfolio Optimization : A Cutting-edge Quantitative Approach.*, qui retrace l'évolution des modèles d'optimisation de portefeuille depuis Markowitz jusqu'aux approches les plus récentes. L'auteur distingue plusieurs contributions majeures, parmi lesquelles :

- **Le modèle de Markowitz (Markowitz, 1952)** : première formalisation quantitative du problème d'allocation optimale, reposant sur le compromis entre espérance de rendement et variance (mesure du risque). Il introduit la notion de *frontière efficiente*, où aucun portefeuille ne peut améliorer simultanément rendement espéré et risque.
- **Le modèle MEDAF (Treynor, 1961 ; Sharpe, Lintner, Mossin)** : le *Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers* (ou CAPM en anglais) établit une relation linéaire entre le rendement espéré d'un actif et son risque systématique mesuré par le bêta. Il fournit une interprétation de l'équilibre des marchés où tous les investisseurs détiennent une combinaison du portefeuille de marché et de l'actif sans risque.
- **Le modèle APT (Ross, 1976)** : l'*Arbitrage Pricing Theory* généralise le CAPM en supposant que les rendements des actifs dépendent de plusieurs facteurs économiques ou financiers. L'absence d'opportunités d'arbitrage contraint les prix des actifs à s'aligner sur une combinaison linéaire de ces facteurs.
- **Le modèle Black-Litterman (Black & Litterman, 1992)** : propose un cadre bayésien qui combine les rendements d'équilibre issus du modèle moyenne-variance avec les vues subjectives des gérants. Contrairement aux approches purement statistiques, il permet d'incorporer des anticipations prospectives tout en contrôlant leur degré de confiance, offrant ainsi un outil plus réaliste pour l'allocation de portefeuille.
- **Le modèle Fama-French (Fama & French, 1993)** : extension du CAPM à trois facteurs (taille, valeur et marché), qui explique mieux les rendements observés des actions que le seul bêta de marché. Ces modèles multifactoriels sont devenus des standards pour mesurer et décomposer la performance.
- **Le modèle PCR (Fekedulegn et al., 2002)** : l'*analyse en composantes principales* (Principal Component Regression) est utilisée pour réduire la dimensionnalité des données financières et identifier les facteurs dominants expliquant la variance des rendements. Cette approche permet de mieux gérer les problèmes d'instabilité statistique lorsqu'il existe de nombreux actifs et peu d'observations.

3.3 Justification du choix du modèle de Black–Litterman

Parmi ces modèles, le choix s’est porté sur l’approche de Black–Litterman, car elle offre un compromis pertinent entre rigueur quantitative et pertinence opérationnelle pour les gérants. En effet, contrairement aux modèles purement statistiques ou factoriels, qui reposent uniquement sur l’exploitation de données historiques et fonctionnent de manière indépendante des anticipations humaines, le modèle de Black–Litterman permet d’intégrer les vues des gérants, sans pour autant les substituer entièrement aux informations passées.

Cette approche présente donc un double avantage : elle garantit une continuité avec les équilibres de marché estimés à partir des données historiques, tout en offrant la possibilité d’introduire des convictions prospectives. En d’autres termes, elle permet d’enrichir l’analyse avec des éléments tournés vers l’avenir, grâce aux anticipations formulées par les gérants, et constitue ainsi un outil flexible et puissant d’aide à la décision.

3.4 Explication du modèle

À l’issue de la revue de littérature, quatre documents ont servi de base pour comprendre et implémenter le modèle de Black–Litterman :

- Black, F. & Litterman, R. (1991). *Asset Allocation : Combining investor views with market equilibrium*
- Black, F. & Litterman, R. (1991). *Global Asset Allocation with equities, bonds and currencies*
- Bevan, A. & Winkelmann, K. (1998). *Using the Black-Litterman global asset allocation model : Three years of practical experience*
- Walters, J. (2014). *The Black-Litterman model in detail*

Ces documents nous ont permis de comprendre que le modèle de Black–Litterman est en réalité composé de 4 modèles sous-jacents :

- Le modèle de référence
- Le modèle d’équilibre général
- Le modèle de création de vues
- Le modèle d’estimations mixtes (Theil & Golberg, 1961)

3.4.1 Reference model (modèle de référence)

Le *reference model* constitue la base théorique du cadre de Black–Litterman. Il précise quelles variables sont considérées comme aléatoires, quelles sont fixées, et comment les différentes distributions interagissent. Comme le souligne Walters, J. (2014), il s’agit du socle sur lequel reposent les modèles ultérieures (modèle d’équilibre général, modélisation des vues et le modèle de Theil & Golberg).

Hypothèses :

- Les rendements r des actifs suivent une loi normale :

$$r \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

où μ est le vecteur des espérances de rendement et Σ la matrice de covariance.

- La moyenne μ elle-même est considérée comme une variable aléatoire suivant une loi normale :

$$\mu \sim \mathcal{N}(\pi, \Sigma_\pi)$$

où π est l'estimation a priori (rendement d'équilibre) et Σ_π la covariance qui mesure l'incertitude autour de cette estimation.

- Les deux variances sont proportionnelles avec un facteur $\tau > 0$

$$\Sigma_\pi = \tau \Sigma$$

En combinant les deux premières hypothèses, on obtient (preuve en **Annexe 1**) :

$$r \sim \mathcal{N}(\pi, \Sigma_r) \quad \text{où} \quad \Sigma_r = \Sigma + \Sigma_\pi$$

Cela signifie que Σ_r , la variance totale des rendements autour de l'estimation π , est toujours supérieure ou égale à la variance intrinsèque Σ . En d'autres termes, l'ajout d'une incertitude sur la moyenne accroît logiquement la variance totale des rendements.

Par ailleurs, en considérant désormais la dernière hypothèse, on en déduit :

$$r \sim \mathcal{N}(\pi, (1 + \tau)\Sigma)$$

3.4.2 General equilibrium model (équilibre général)

Le *general equilibrium model* (ou modèle d'équilibre de marché) constitue la seconde brique du modèle de Black–Litterman. L'idée est d'obtenir un vecteur de rendements d'équilibre π , qui servira de *prior*, en partant des allocations observées dans le portefeuille de marché. Pour cela nous allons faire une optimisation inverse à partir du portefeuille de marché.

Hypothèses :

- Les investisseurs maximisent une fonction d'utilité quadratique.
- Les rendements des actifs sont distribués normalement avec Σ pour matrice de covariance estimée.
- Le portefeuille de marché w_{mkt} est efficient au sens moyenne-variance.
- Un paramètre d'aversion au risque $\delta > 0$ caractérise la tolérance des investisseurs au risque.

Données du modèle

- **Entrées** : les prix de tous les instruments et leur poids sur le marché w_{mkt} à chaque date
- **Sortie** : vecteur des excès de rendements d'équilibre π et la matrice de covariance Σ

Dans le cadre moyenne-variance, on suppose que les investisseurs maximisent une fonction d'utilité quadratique :

$$U(w) = w^\top \pi - \frac{\delta}{2} w^\top \Sigma w$$

où

- w est le vecteur des pondérations du portefeuille
- π est le vecteur des espérances des rendements excédentaires des actifs
- Σ est la matrice de covariance des rendements
- δ est le coefficient d'aversion au risque

En dérivant $U(w)$ par rapport à w et en annulant le gradient, on obtient :

$$CPO : \quad \frac{\partial U}{\partial w} = 0 \Rightarrow \pi - \delta \Sigma w = 0$$

d'où

$$w^* = \frac{1}{\delta} \Sigma^{-1} \pi$$

Si l'on suppose que le portefeuille optimal correspond au portefeuille de marché observé w_{mkt} , alors on peut inverser la relation précédente pour obtenir les rendements d'équilibre :

$$\pi = \delta \Sigma w_{\text{mkt}}$$

Par ailleurs, afin de pouvoir calculer π , nous devons identifier δ . Pour cela, on multiplie par w_{mkt}^\top les deux coté de l'équation précédente pour obtenir :

$$r_m - r_f = \delta \sigma_m^2 \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m^2}$$

où

- r_m est le rendement total du portefeuille de marché ($r_m = w_{\text{mkt}}^\top \Pi + r_f$)
- r_f est le taux sans risque
- σ_m^2 est la variance du portefeuille de marché ($\sigma_m^2 = w_{\text{mkt}}^\top \Sigma w_{\text{mkt}}$)

Ainsi, une fois δ calibré à partir des caractéristiques du portefeuille de marché, π peut être estimé directement à partir des poids de marché et de la matrice de covariance.

Pour conclure, le modèle d'équilibre général fournit donc une estimation à priori sur les rendements attendus, extraite des pondérations, des rendements et de la volatilité observés sur le marché. Cela constitue la première étape de la construction Black–Litterman.

3.4.3 View creation model (modélisation des vues)

Le *view creation model* constitue la troisième brique du modèle de Black–Litterman. Il permet d'introduire les convictions des gérants sur certains instruments ou regroupements d'instruments, et de les formaliser avec des matrices.

Le modèle de Black–Litterman autorise deux formes de vues :

- **Vues absolues** : un actif est supposé générer un rendement spécifique
- **Vues relatives** : comparaison entre deux actifs ou catégories d'actifs

Après échange avec les gérants, nous avons retenu uniquement les vues **relatives**, qui s'inscrivent mieux dans leurs méthodes de travail actuelles et réduisent le risque d'exprimer des anticipations trop ponctuelles ou fragiles.

Par ailleurs, afin d'adapter le modèle au contexte particulier des fonds de fonds, nous avons travaillé avec les gérants pour catégoriser chaque instrument selon plusieurs critères (classe d'actif, zone géographique, qualité de crédit, maturité, etc.). Toutes ces informations sont renseignées dans le fichier `asset_class.xlsx`.

Grâce à cette classification, les vues peuvent être exprimées à un niveau macroéconomique, ce qui les rend plus robustes : par exemple, « les fonds composés d'actions européennes vont surperformer les fonds d'actions américaines », plutôt que des anticipations trop ciblées sur un seul instrument isolé.

Les matrices P , Q et Ω .

- La matrice P (de dimension $k \times n$, avec k le nombre de vues et n le nombre d'actifs) encode la structure des vues : chaque ligne correspond à une vue, en pondérant les actifs concernés positivement ou négativement. Une ligne peut par exemple représenter une conviction relative : Action Europe – Action US.
- Le vecteur Q (dimension $k \times 1$) contient les rendements attendus associés aux vues. Dans le cas de vues relatives, il correspond à l'écart attendu entre les actifs concernés.
- La matrice Ω (dimension $k \times k$) modélise l'incertitude associée à chaque vue, supposée indépendante entre elles. Elle est diagonale.

Exemple : Considérons un univers composé de 5 actifs catégorisés de la manière suivante :

- Actif 1 : Actions Europe
- Actif 2 : Actions US
- Actif 3 : Actions Japon
- Actif 4 : Actions Japon
- Actif 5 : Actions US

Supposons que les gérants formulent deux vues :

1. Les actions européennes surperformeront les actions américaines de 2% (vue relative)
2. Les actions japonaises généreront un rendement attendu de 1% (vue absolue)

La matrice P et le vecteur Q s'écrivent alors :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix}$$

Ici :

- La première ligne de P traduit la vue relative : (+1) réparti sur les actifs catégorisés comme "Actions Europe" et (−1) réparti sur les actifs catégorisés comme "Actions US".
- La deuxième ligne de P sélectionne uniquement les actifs catégorisés comme "Actions Japon" pour formuler une vue absolue.
- La matrice Ω , diagonale de dimension 2×2 , spécifie l'incertitude associée à chaque vue. ω_1 et ω_2 représentent respectivement le niveau d'incertitude des gérants sur la vue relative (Actions Europe vs Actions US) et sur la vue absolue (Actions Japon). Plus ω_i est petit, plus la confiance dans la vue est forte.

Définition de Ω . Plusieurs approches sont envisageables parmi lesquelles :

- **Méthode manuelle** : entrer à la main un paramètre de confiance pour chaque vue, permettant un ajustement fin avec les gérants. Cependant, lors de nos discussions, les gérants ont exprimé la volonté de réduire le nombre de paramètres à saisir, afin d'alléger le processus d'utilisation.
- **Méthode proportionnelle à la variance du prior** (*Solution retenue*) : Elle définit l'incertitude associée à chaque vue en fonction de la variance des actifs impliqués dans la vue, pondérée par un facteur global τ . Formellement, si P est la matrice de vues et Σ la matrice de covariance des actifs, alors :

$$\Omega = \text{diag}(P\tau\Sigma P^T)$$

L'idée sous-jacente est que plus les actifs concernés par une vue sont volatils, plus il est difficile d'énoncer une anticipation précise à leur sujet, et donc plus l'incertitude associée à cette vue doit être élevée.

Ce choix permet d'automatiser la construction d' Ω , tout en laissant la possibilité de moduler le paramètre global τ pour refléter différents degrés de confiance.

3.4.4 Theil & Goldberg's Model (modèle d'aggrégation)

Le *Theil & Goldberg mixed estimation model* constitue la dernière brique du modèle de Black–Litterman. Il permet de combiner les informations issues du modèle de marché (a priori) et celles du modèle de création de vues, afin d'obtenir une distribution corrigée des rendements attendus (a posteriori).

- Le **modèle de marché** fournit une distribution *a priori* des espérances de rendement, ancrée sur l'équilibre du portefeuille de marché :

$$\mu = \pi + u, \quad u \sim \mathcal{N}(0, \tau \Sigma)$$

- Le **modèle de création de vues** ajoute de l'information supplémentaire en formulant des contraintes bruitées sur les espérances de rendement :

$$P\mu = Q + v, \quad v \sim \mathcal{N}(0, \Omega)$$

- Le **modèle de Theil et Goldberg** synthétise ces deux sources d'information dans une équation unique, qui peut être interprétée comme un système de régressions mixtes :

$$\begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \mu = \begin{bmatrix} \pi \\ Q \end{bmatrix} + \epsilon$$

$$\text{avec } \epsilon = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, u \sim \mathcal{N}(0, \tau \Sigma) \text{ et } v \sim \mathcal{N}(0, \Omega)$$

En appliquant la méthode des moindres carrés généralisés (GLS), on obtient les formules de la loi *a posteriori* de μ (preuve en **Annexe 2**) :

$$\mu_{BL} = [(\tau \Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \pi + P^\top \Omega^{-1} Q]$$

et la covariance associée :

$$\Sigma_{BL} = \Sigma + [(\tau \Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P]^{-1}$$

Interprétation.

- Le vecteur μ_{BL} constitue la moyenne *a posteriori* des rendements attendus, c'est-à-dire l'équilibre de marché corrigé par les vues des gérants.
- La matrice Σ_{BL} décrit l'incertitude totale ajustée après prise en compte des vues.
- Ces résultats découlent directement d'une estimation des GLS, en pondérant l'information du prior et celle des vues selon leur incertitude respective.

Ainsi, le modèle de Theil et Goldberg permet de passer d'une distribution *a priori*, fondée uniquement sur le marché, à une distribution *a posteriori*, corrigée par les vues exprimées par les gérants.

4 Optimisation sous contraintes

4.1 Contexte

Le modèle de Black–Litterman fournit, en sortie, deux éléments fondamentaux :

- un vecteur de rendements espérés μ_{BL} pour chaque instrument de l’univers
- une matrice de variance–covariance Σ_{BL} qui décrit la structure du risque entre les instruments.

Ces informations sont indispensables pour l’allocation, mais elles ne suffisent pas à déterminer quelle est la meilleure combinaison d’instruments pour composer un portefeuille. En effet, à l’issue de Black–Litterman, tous les instruments de l’univers sont encore en course : chacun possède un rendement attendu et figure dans la matrice Σ_{BL} . Or, dans la réalité de la gestion, tous ces instruments ne seront pas retenus dans le portefeuille final.

De plus, la construction effective d’un portefeuille ne peut pas se limiter à une simple maximisation rendement/risque. Les sociétés de gestion sont soumises à un ensemble de réglementations, notamment celles dictées par l’Autorité des Marchés Financiers (AMF), qu’elles doivent impérativement respecter. À ces exigences s’ajoutent les contraintes spécifiques inscrites dans le prospectus de chaque fonds, qui encadrent strictement la politique d’investissement et limitent les marges de manœuvre des gérants.

C’est dans ce cadre que l’optimisation sous contraintes prend tout son sens. Elle permet de transformer les résultats quantitatifs de Black–Litterman en allocations réalistes, conformes aux obligations réglementaires et aux objectifs de gestion.

4.2 Contraintes

En effet, la construction d’un portefeuille ne peut pas se faire uniquement à partir des résultats du modèle de Black–Litterman. Un travail approfondi a été mené avec les gérants afin d’identifier et de formaliser l’ensemble des contraintes qui encadrent la gestion des fonds.

Dans un premier temps, nous avons recensé les contraintes réglementaires issues des prospectus des fonds. Un périmètre de 19 fonds ERES a été retenu (voir **Annexe 3**), et pour chacun d’entre eux, les contraintes explicites ont été extraites et synthétisées dans un document appelé `constraints.xlsx`. Ces contraintes limitent l’environnement investissable et l’exposition à certaines classes d’actifs, zones géographiques ou types de risque.

Dans un second temps, nous avons également défini des contraintes dites de fonctionnalité. Celles-ci ne proviennent pas directement des prospectus mais visent à s’assurer que le modèle d’optimisation aboutisse à des allocations réalistes et exploitables en pratique.

Au total, nous distinguons donc trois catégories de contraintes :

- les contraintes d’exposition
- les contraintes d’environnement
- les contraintes de fonctionnalité

4.2.1 Contraintes d'exposition

Dans le cadre de la gestion de fonds de fonds, le contrôle des expositions nécessite de disposer de données de *transparisation*. Autrement dit, il est indispensable de connaître la composition détaillée des instruments sélectionnables, afin de pouvoir mesurer leur contribution aux différentes expositions globales du portefeuille. Sans cette transparence, il serait impossible de vérifier le respect des contraintes réglementaires et prospectus.

À partir de ces données, plusieurs contraintes d'exposition doivent être respectées. Elles encadrent la pondération du portefeuille sur différentes classes d'actifs, zones géographiques ou segments de marché :

- exposition minimale et maximale sur les **actions**
- exposition maximale sur les **taux de change hors euro**
- exposition minimale et maximale sur les **obligations**
- exposition maximale sur le segment **high yield**
- exposition minimale et maximale sur la **duration**
- exposition maximale sur les **obligations convertibles**
- exposition maximale sur les **CoCo bonds** (obligations contingentes convertibles)
- exposition maximale sur les **pays émergents**

4.2.2 Contraintes d'environnement

Les contraintes d'environnement se situent à un niveau de granularité plus élevé que les contraintes d'exposition. Ici, l'objectif n'est plus d'analyser directement la transparence des sous-jacents, mais de considérer uniquement la manière dont les instruments sont classifiés. Autrement dit, on ne regarde pas le contenu détaillé des fonds sous-jacents, mais bien l'étiquette attribuée à chaque instrument.

Dans ce cadre, les types de contraintes identifiés sont les suivants :

- pourcentage maximum des montants du fonds investis dans des instruments catégorisés **FIA**
- pourcentage maximum dans des instruments catégorisés **Monétaire**
- pourcentage minimum et maximum dans des instruments catégorisés **UCITS**
- pourcentage minimum dans des instruments catégorisés **ISR**
- pourcentage minimum et maximum dans des instruments catégorisés **Solidaires**
- pourcentage maximum dans des instruments catégorisés **FCPR**
- pourcentage minimum dans des instruments catégorisés **SFDR 8** ou **SFDR 9**
- pourcentage minimum dans des instruments appartenant à l'**univers Natixis**
- pourcentage minimum dans des instruments catégorisés **PEA-PME**
- pourcentage maximum dans des instruments catégorisés **Private Asset**

4.2.3 Contraintes de fonctionnalité

Les contraintes de fonctionnalité ne relèvent pas directement du cadre réglementaire, mais ont été introduites afin de garantir que les allocations produites par le modèle soient réalistes, cohérentes avec les pratiques de gestion et véritablement exploitables par les gérants. Elles permettent ainsi de transformer les résultats quantitatifs en portefeuilles opérationnels.

Les contraintes de fonctionnalité sont les suivantes :

- **Somme des poids des instruments** : bornée entre un minimum et un maximum, de manière à autoriser jusqu'à 10% de trésorerie dans le fonds. Cela permet d'intégrer la possibilité pour un gérant de conserver une poche de liquidités.
- **Poids minimal pour chaque instrument** : cette contrainte permet de définir implicitement un nombre maximal d'instruments présents dans le portefeuille. Elle reflète la volonté des gérants d'éviter une trop forte dispersion.
- **Poids maximal pour chaque instrument** : en théorie, il existe une contrainte réglementaire qui limite le poids maximum d'un instrument dans un portefeuille, avec une exception pour deux fonds spécifiques qui ont la possibilité d'aller jusqu'à 79% sur un instrument particulier. Dans la pratique, pour éviter la concentration, les gérants n'utilisent pas ces marges extrêmes jugées trop risquées. C'est pourquoi la borne sur le poids d'un instrument a été intégrée dans les contraintes de fonctionnalité, tout en conservant explicitement l'exception réglementaire applicable à ces deux fonds.

4.3 Méthode de résolution

La résolution du problème d'optimisation sous contraintes a été réalisée à l'aide de la librairie `cvxpy`. Il s'agit d'une bibliothèque Python dédiée à la modélisation et à la résolution de problèmes d'optimisation convexes. Elle permet de formuler de manière déclarative une fonction objectif et un ensemble de contraintes, puis de déléguer la résolution mathématique à un solveur spécialisé. L'intérêt majeur de `cvxpy` est sa souplesse : il est possible de définir des problèmes complexes en quelques lignes de code, tout en gardant une syntaxe proche de l'algèbre matricielle.

Pour la résolution effective, nous avons choisi le solveur SCIP (*Solving Constraint Integer Programs*). Développé par l'université de Zuse Institute Berlin, SCIP est reconnu comme l'un des meilleurs solveurs open-source pour les problèmes d'optimisation linéaire, quadratique et en nombres entiers. Dans notre cas, SCIP s'est révélé particulièrement adapté car il est capable de gérer efficacement les contraintes réglementaires et de fonctionnalité.

Bien que des solveurs propriétaires comme Gurobi ou CPLEX soient considérés comme plus performants dans certains cas, leur licence est payante et ne correspond pas au cadre de notre projet. Ainsi, SCIP représente un compromis optimal : il combine la gratuité, la robustesse et une performance suffisante pour notre problématique d'optimisation de portefeuilles.

4.3.1 Fonction cible

L'objectif de l'optimisation est de déterminer les pondérations w du portefeuille qui maximisent le rendement espéré corrigé du risque. Dans la continuité du modèle d'équilibre général présenté précédemment, nous avons retenu une fonction d'utilité quadratique de la forme :

$$G(w) = w^\top \mu_{BL} - \frac{\delta}{2} w^\top \Sigma_{BL} w$$

où :

- w est le vecteur des poids du portefeuille
- μ_{BL} est le vecteur des rendements espérés a posteriori issus du modèle de Black–Litterman
- Σ_{BL} est la matrice de variance–covariance a posteriori
- δ est le paramètre d’aversion au risque

Cette formulation traduit un compromis classique entre rendement espéré et risque, directement hérité du cadre moyenne–variance de Markowitz. Le premier terme $w^\top \mu_{BL}$ formalise le rendement attendu du portefeuille, tandis que le second terme $\frac{\delta}{2} w^\top \Sigma_{BL} w$ pénalise par le risque total du portefeuille mesuré par la variance-covariance.

Le choix de cette fonction cible se justifie par souci de cohérence avec le modèle de marché. Elle reprend exactement la même logique que celle qui avait permis de définir le vecteur d’équilibre π . Ainsi, l’optimisation sous contraintes s’inscrit dans une continuité méthodologique avec Black–Litterman, en prolongeant le raisonnement initial vers une allocation opérationnelle.

4.3.2 Formalisation des contraintes

La mise en œuvre opérationnelle des contraintes d’exposition a nécessité une formalisation sous forme de sommes pondérées avec des bornes à respecter.

Dans un but d’uniformité, nous avons aussi voulu intégrer les contraintes d’univers sous la même forme. Pour cela, un ensemble de variables booléennes a été créé pour chaque instrument afin d’indiquer son appartenance à une catégorie donnée (FIA, ISR, UCITS, etc.).

Pour simplifier le traitement numérique, toutes les contraintes ont été réécrites sous forme d’inégalités du type « inférieur ou égal ». Pour cela, une fonction `get_matrix_constraints()` a été développée. Elle permet :

- d’identifier si une borne est de type *min* ou *max*
- d’associer à cette borne la variable correspondante
- de construire une matrice A de dimension $k \times n$ et un vecteur b de dimension $k \times 1$, où n est le nombre d’instruments et k le nombre de contraintes

Ainsi, l’ensemble des contraintes peut être synthétisé dans un système matriciel unique :

$$A \cdot \omega \leq b$$

où ω désigne le vecteur des pondérations de dimension $n \times 1$

En complément, les contraintes de fonctionnalité ont été ajoutées de manière indépendantes :

- contrainte globale sur les poids : $\sum_i \omega_i + \omega_{\text{cash}} = 1$
- borne sur la trésorerie : $\omega_{\text{cash}} \leq 0,1$
- contraintes de poids minimum par instrument : $-\omega \leq -\omega_{\text{min_weight}} * z$
- contraintes de poids maximum par instrument : $\omega \leq \omega_{\text{max_weight}} * z$

Ayant plusieurs centaines d’instruments dans notre univers, nous avons dû trouver une solution pour respecter simultanément les contraintes de poids minimum et globale.

Pour cela, il a fallu ajouter la possibilité au modèle d’exclure certains instruments. De fait, l’optimisation est menée non seulement sur les pondérations ω , mais aussi sur un vecteur binaire z de dimension $n \times 1$.

L'interface est composée des éléments suivants :

- **Paramètre τ** : réglable entre 2,5% et 5%, il permet d'ajuster le niveau d'incertitude attribué aux vues des gérants. Ce paramètre est particulièrement utile en période de forte volatilité (par exemple lors de la crise du Covid).
- **Date de prise en compte** : elle définit la date à partir de laquelle l'historique des données est considéré pour le calcul du modèle de marché. Ce paramètre permet de restreindre ou d'élargir l'horizon historique utilisé.
- **Sélecteur de fonds** : situé en haut à gauche, ce menu déroulant permet de choisir le fonds que l'on souhaite optimiser.
- **Déroulants pour la saisie des vues** : permettent d'intégrer les vues relatives des gérants. On commence par choisir le *thème* de la vue, puis les catégories impliqués et le pourcentage de surperformance attendu. Les thèmes disponibles et leurs catégories sont :
 - **Classe d'actif** : Equity, Crédit, Govies, Mixed Allocation, Money Market, Private Equity, etc.
 - **Zone géographique** : Europe, Zone Euro, USA, Japon, Monde, Asie Pacifique ex-Japon
 - **Secteur (Actions)** : Technologie, Finance, Santé, Consommation, Energie, etc.
 - **Facteur (Actions)** : Growth, Value
 - **Qualité de crédit** : HY (High Yield), IG (Investment Grade)
 - **Zone géographique (Crédit)** : Zone Euro, USA, Monde
 - **Zone géographique (Govies)** : Zone Euro, Monde
 - **Maturité (Crédit)** : Monétaire, CT (court terme), MT (moyen terme), LT (long terme)
- **Tableau de synthèse des vues** : récapitule toutes les vues saisies par les gérants avant optimisation.
- **Bouton « Optimiser »** : permet de lancer l'optimisation avec l'ensemble des paramètres et vues saisis.
- **Tableau des résultats** : après optimisation, le portefeuille optimal est affiché sous forme de tableau avec :
 - l'identifiant interne de l'instrument
 - le code ISIN
 - le nom
 - le poids associé dans le portefeuille optimisé

4.4.2 Backtests

Afin d'évaluer la pertinence du modèle, nous avons souhaité comparer les allocations issues de l'optimisation Black-Litterman avec celles mises en œuvre par les gérants au cours de l'année passée.

Les gérants tiennent un comité d'allocation stratégique trimestriel (CAST), au cours duquel ils redéfinissent les orientations du portefeuille. Nous avons donc aligné notre protocole de backtest sur ces échéances, en découpant l'horizon en quatre périodes distinctes :

- **Période 1** : 18/07/2024 – 22/10/2024
- **Période 2** : 23/10/2024 – 21/01/2025
- **Période 3** : 22/01/2025 – 23/04/2025
- **Période 4** : 24/04/2025 – 16/07/2025

Les backtests ont été réalisés sur un périmètre de 6 fonds :

- ERES NIM Modéré
- ERES NIM Équilibre
- ERES Multigestion Court Terme

- OTIS Long Terme Actions
- ERES MHCS Équilibre
- ERES Allocation ETF

Pour chacun de ces fonds, nous avons retenu comme date de prise en compte le **10/09/2023**, afin de tester la pertinence du modèle sur l'année écoulée.

En complément, afin de disposer d'un horizon plus long, nous avons également réalisé des backtests sur le fonds **ERES Allocation ETF** en utilisant une deuxième date de prise en compte, le **10/09/2021**. Cela permet d'évaluer la robustesse du modèle sur un historique élargi et de comparer les résultats sur deux fenêtres temporelles différentes. Ce qui représente donc 7 backtests au total.

Concrètement, pour chaque période, nous avons :

1. entraîné le modèle à partir de la date de prise en compte choisie
2. tronqué les données au début de la période pour replacer le modèle dans la situation exacte des gérants lors du CAST
3. intégré les anticipations qualitatives fournies par les gérants (illustration ci-dessous), ce qui a permis de construire les vues associées

	Classe d'actifs	juil-25
ALLOCATION D'ACTIFS	Actions	-
	Crédit	+
	Emprunts d'Etat	+
	Liquidités	-
ACTIONS	Pays	
	Etats-Unis	-
	Zone Euro	+
	Royaume-Uni	Neutre
	Japon	-
	Marchés émergents	-
	Asie Pacifique hors Japon	-
CREDIT	Crédit	
	Investment Grade	+
	High Yield	+
	Dettes émergentes	+
EMPRUNTS D'ETAT	Emprunts d'Etat	
	Bons du Trésor américain	-
	Taux européens core	++
	Obligations souveraines Monde	-
MATURITES	Maturités	
	Monétaire (< 1 an)	-
	Court (1- 3 ans)	++
	Moyen Terme (3-5ans)	-
	Long Terme (>7 ans)	++

FIGURE 3 – Matrice des convictions renseignées par les gérants lors du CAST de Juillet 2025.

4.4.3 Résultats

Les résultats des backtests sont présentés dans les tableaux suivants. Chaque tableau correspond à une date de prise en compte et rapporte les performances sur 4 horizons (3 mois, 6 mois, 9 mois et 1 an), issues de la composition des performances obtenues sur les 4 périodes étudiées. Les tableaux 1 et 3 représentent les performances issues des portefeuilles du modèle tandis que les tableaux 2 et 4 représentent les performances du modèle face aux performances effectives des gérants.

TABLE 1 – Résultats des backtests (allocation du modèle, date de prise en compte : 10/09/2023)

Fonds	3 mois	6 mois	9 mois	1 an
ERES NIM Modéré	1,57%	2,27%	2,35%	3,86%
ERES NIM Équilibre	1,85%	2,53%	2,36%	3,05%
ERES Multigestion Court Terme	1,52%	0,84%	2,01%	3,82%
OTIS Long Terme Actions	4,65%	1,14%	2,94%	4,97%
ERES MHCS Équilibre	1,32%	-0,06%	1,34%	3,51%
ERES Allocation ETF	2,52%	-1,08%	-0,16%	1,61%

TABLE 2 – Performances relatives (modèle – gérants), date de prise en compte : 10/09/2023

Fonds	3 mois	6 mois	9 mois	1 an
ERES NIM Modéré	0,45%	1,14%	0,62%	0,56%
ERES NIM Équilibre	-1,00%	1,81%	0,19%	-0,75%
ERES Multigestion Court Terme	0,70%	-0,94%	-0,63%	-0,25%
OTIS Long Terme Actions	-2,16%	4,45%	2,91%	2,77%
ERES MHCS Équilibre	0,49%	-1,07%	-0,19%	0,56%
ERES Allocation ETF	1,90%	-1,80%	-0,98%	-0,38%

TABLE 3 – Résultats des backtests (allocation du modèle, date de prise en compte : 10/09/2021)

Fonds	3 mois	6 mois	9 mois	1 an
ERES Allocation ETF	1,06%	-0,99%	-1,00%	0,34%

TABLE 4 – Performances relatives (modèle – gérants), date de prise en compte : 10/09/2021

Fonds	3 mois	6 mois	9 mois	1 an
ERES Allocation ETF	0,44%	-1,71%	-1,82%	-1,64%

4.4.4 Analyse des résultats

Si l'on considère les performances relatives aux gérants, on observe que sur l'horizon de 3 mois, le modèle surperforme dans 5 cas sur 7. En revanche, lorsque l'on étend la période d'analyse (6, 9 et 12 mois), le modèle ne surperforme que dans 3 cas sur 7.

En examinant plus finement les résultats, on constate que la **troisième période** (22/01/2025 – 23/04/2025) est en grande partie à l'origine de la baisse de performance du modèle. En effet, par construction, le modèle tend à privilégier les fonds ayant bien performé historiquement. C'est notamment le cas des fonds exposés aux États-Unis, dont les marchés affichent une performance moyenne d'environ 10% par an depuis leur création, ce qui conduit naturellement le modèle à leur accorder une pondération plus importante. De plus, lors du CAST de janvier 2025, les gérants exprimaient des vues positives sur les États-Unis. Ainsi, le modèle a donc choisi d'avoir des expositions relativement élevées aux fonds américains au début de la période 3.

Cependant, au cours de cette période, l'annonce des **taxes douanières décidées par Donald Trump** au début du mois d'avril a entraîné une baisse marquée des marchés américains. Les allocations proposées par le modèle, plus exposées à cette zone géographique, ont ainsi subi des pertes significatives. À l'inverse, les gérants, ayant anticipé cet événement, dont les discussions et rumeurs circulaient déjà plusieurs jours, voire plusieurs semaines avant l'annonce officielle, ont ajusté leurs portefeuilles en réduisant leur exposition aux États-Unis. Cette flexibilité leur a permis de limiter, voire d'annuler, une partie des pertes liées à cette correction de marché.

Cette différence de comportement illustre une limite structurelle du modèle dans le cadre des backtests. En effet, par construction, le modèle ne peut effectuer des réallocations qu'à la fréquence trimestrielle, en cohérence avec les dates des CAST (les seules périodes pour lesquelles les vues des gérants sont disponibles). Il n'est donc pas capable d'intégrer des ajustements tactiques entre deux comités, contrairement à la pratique réelle des gérants.

Ainsi, les fonds **ERES Multigestion Court Terme**, **ERES MHCS Équilibre** et **ERES Allocation ETF** (dans les deux configurations de date de prise en compte, 10/09/2023 et 10/09/2021) sont ceux qui ont le plus souffert de cet épisode, confirmant l'impact de cet événement exogène sur la performance du modèle. Néanmoins, on observe qu'au-delà de la période 3, le modèle retrouve progressivement de la performance et tend à réduire l'écart créé avec les gérants, ce qui illustre sa capacité à se réaligner avec la dynamique de marché une fois l'effet de choc passé.

4.4.5 Limites

Il convient enfin de souligner plusieurs limites méthodologiques :

- la traduction des anticipations des gérants en vues quantitatives reste approximative, car leurs notations qualitatives (« + », « - ») sont difficiles à convertir en pourcentages précis.
- les frais indirects, déterminants dans le choix des allocations (sauf pour le fonds ERES Allocation ETF), ne sont pas pris en compte.
- Le modèle de Black-Litterman repose sur des hypothèses (normalité des rendements, proportionnalité des variances, etc.) qui peuvent ne pas être vérifiées en pratique.

Concernant la comparaison des performances du modèle avec celle des gérants, il existe aussi certaines limites :

- les allocations sont recalculées trimestriellement tandis que les gérants peuvent arbitrer les fonds quotidiennement. Cela représente un gros handicap dans le cas d'informations importantes (ex : taxes douanières des US).
- les contraintes d'exposition sont utilisées à leur maximum, ce qui ne reflète pas totalement la pratique réelle. En effet, les gérants évitent en général de s'approcher trop près des bornes, afin de limiter le risque de dépassement lié aux fluctuations de marché.
- les résultats obtenus sont issues d'une repondération quotidienne des instruments tandis que les gérants n'ont pas cette possibilité en réalité.

5 Conclusion

Ce stage d'application, réalisé au sein d'ERES Gestion dans le cadre du cycle ingénieur de l'ENSAE Paris, m'a permis de mettre en pratique des compétences en statistique, finance et programmation au service d'une problématique concrète de gestion d'actifs. L'objectif principal était de concevoir des outils quantitatifs permettant d'aider les gérants dans la prise de décision et le suivi des portefeuilles, dans un contexte de multigestion et d'architecture ouverte particulièrement complexe.

Dans cette démarche, deux projets ont été menés à bien : **Contributix**, dédié à la mesure des contributions à la performance, et **Optimix**, centré sur l'optimisation des allocations à l'aide du modèle de **Black-Litterman**. Le premier a permis d'automatiser et de fiabiliser le calcul des contributions, offrant aux collaborateurs une lecture fine des sources de performance. Le second a constitué un travail de recherche et de développement plus approfondi, visant à adapter un modèle de prédiction à la réalité opérationnelle et réglementaire des fonds d'ERES Gestion.

L'implémentation complète du modèle de Black-Litterman, la formalisation des contraintes réglementaires et de gestion, ainsi que la mise en place de l'optimisation sous contraintes, ont abouti à la création d'un outil robuste, paramétrable par les équipes de gestion. Les backtests réalisés ont montré que le modèle permettait de reproduire des allocations cohérentes avec les choix des gérants, tout en identifiant certaines situations où la réactivité humaine demeure déterminante face à des événements exogènes non anticipables.

Sur le plan technique, ce stage m'a permis de développer une expertise approfondie en modélisation statistique, optimisation numérique et architecture applicative en Python, notamment à travers l'utilisation de la librairie `cvxpy` et du framework `Dash`. Sur le plan professionnel, ce stage m'a permis de m'immerger pleinement dans un environnement de gestion d'actifs, en collaborant au quotidien avec les gérants et l'équipe produits. Cette proximité m'a aidé à mieux comprendre les enjeux concrets de la gestion de portefeuille et l'importance d'un dialogue constant entre les approches quantitatives et la vision stratégique des marchés portée par les gérants.

En conclusion, ce stage a été une expérience formatrice à la fois technique et analytique. Il m'a permis de contribuer concrètement à la modernisation des outils de gestion d'ERES Gestion et d'enrichir ma compréhension des interactions entre modèles théoriques et contraintes réelles de gestion.

Les perspectives d'évolution du projet Optimix sont nombreuses : extension du modèle à un univers d'investissement plus grand, intégration de contraintes supplémentaires (ex : turnover maximum, frais indirects maximum, etc.), amélioration et automatisation de la catégorisation des instruments.

Ces travaux constituent une base solide pour la poursuite du développement d'outils d'aide à la décision au sein de la société.

6 Références bibliographiques

- Black, F. & Litterman, R. (1991). *Asset Allocation : Combining investor views with market equilibrium*
- Black, F. & Litterman, R. (1991). *Global Asset Allocation with equities, bonds and currencies*
- Bevan, A. & Winkelmann, K. (1998). *Using the Black-Litterman global asset allocation model : Three years of practical experience*
- Walters, J. (2014). *The Black-Litterman model in detail*.
- Cajas, D. (2025). *Advanced Portfolio Optimization : A Cutting-edge Quantitative Approach*. Springer.

7 Annexes

Annexe 1 : Composition de lois normales

Montrons que : $X | Y \sim \mathcal{N}(Y, \sigma_X^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_Y^2) \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

On a,

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma_X^2}\right), \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_Y} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

La densité marginale de X est

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x | y) f_Y(y) dy = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(y-\mu)^2}{2\sigma_Y^2}\right) dy$$

Développons les deux termes :

$$\frac{(x-y)^2}{2\sigma_X^2} = \frac{x^2}{2\sigma_X^2} - \frac{xy}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{2\sigma_X^2}, \quad \frac{(y-\mu)^2}{2\sigma_Y^2} = \frac{y^2}{2\sigma_Y^2} - \frac{\mu y}{\sigma_Y^2} + \frac{\mu^2}{2\sigma_Y^2}$$

En regroupant on obtient :

$$\frac{(x-y)^2}{2\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu)^2}{2\sigma_Y^2} = Ay^2 - By + C$$

avec

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\sigma_Y^2} \right), \quad B = \left(\frac{x}{\sigma_X^2} + \frac{\mu}{\sigma_Y^2} \right), \quad C = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{\mu^2}{\sigma_Y^2} \right)$$

On utilise l'identité

$$Ay^2 - By = A \left(y - \frac{B}{2A} \right)^2 - \frac{B^2}{4A}$$

Donc

$$Ay^2 - By + C = A \left(y - \frac{B}{2A} \right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{4A} \right)$$

Ainsi l'intégrale devient

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y} \exp\left(-\left(C - \frac{B^2}{4A}\right)\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-A \left(y - \frac{B}{2A}\right)^2\right) dy$$

Or en posant

$$m = \frac{-B}{2A}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-A(y-m)^2) dy = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

Donc

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\left(C - \frac{B^2}{4A}\right)\right)$$

On vérifie par calcul algébrique que

$$C - \frac{B^2}{A} = \frac{(x - \mu)^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)} \quad \text{et que} \quad \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y} \sqrt{\frac{\pi}{A}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}}$$

Ainsi

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}\right)$$

Par identification on peut donc affirmer que

$$\boxed{X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}$$

Annexe 2 : Démonstration des formules de μ_{BL} et Σ_{BL}

On part des deux regressions :

$$\mu = \pi + u, \quad u \sim \mathcal{N}(0, \tau\Sigma)$$

$$P\mu = Q + v, \quad v \sim \mathcal{N}(0, \Omega)$$

et on suppose u et v indépendants. En empilant, on obtient un système linéaire unique

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix}}_X \mu = \underbrace{\begin{bmatrix} \pi \\ Q \end{bmatrix}}_y + \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_\varepsilon \iff y = X\mu + \varepsilon$$

Variance du bruit ε . Par indépendance et diagonalité par blocs,

$$\text{Var}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \text{Var}(u) & 0 \\ 0 & \text{Var}(v) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}}_{:\Sigma_\varepsilon}$$

et

$$\Sigma_\varepsilon^{-1} = \begin{bmatrix} (\tau\Sigma)^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega^{-1} \end{bmatrix}$$

Estimateur GLS. L'estimateur GLS du paramètre μ dans le modèle $y = X\mu + \varepsilon$ avec $\text{Var}(\varepsilon) = \Sigma_\varepsilon$ est

$$\hat{\mu}_{\text{GLS}} = (X^\top \Sigma_\varepsilon^{-1} X)^{-1} X^\top \Sigma_\varepsilon^{-1} y$$

En substituant $X, y, \Sigma_\varepsilon^{-1}$, on obtient

$$X^\top \Sigma_\varepsilon^{-1} X = I^\top (\tau\Sigma)^{-1} I + P^\top \Omega^{-1} P = (\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P =: M$$

$$X^\top \Sigma_\varepsilon^{-1} y = I^\top (\tau\Sigma)^{-1} \pi + P^\top \Omega^{-1} Q = (\tau\Sigma)^{-1} \pi + P^\top \Omega^{-1} Q$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mu_{BL} = \hat{\mu}_{\text{GLS}} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1} \pi + P^\top \Omega^{-1} Q]}$$

Covariance a posteriori de μ . Dans le modèle linéaire gaussien $y = X\mu + \varepsilon$ avec $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_\varepsilon)$, le posterior est gaussien :

$$\mu | y \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}_{\text{GLS}}, (X^\top \Sigma_\varepsilon^{-1} X)^{-1})$$

Or, on a posé $M := X^\top \Sigma_\varepsilon^{-1} X = (\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P$.

Ainsi,

$$\boxed{\text{Var}(\mu | y) = M^{-1} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P]^{-1}}$$

Covariance prédictive des rendements r . Si l'on modélise les rendements conditionnels par $r \mid \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, alors par variance totale :

$$\text{Var}(r \mid y) = E[\text{Var}(r \mid \mu, y)] + \text{Var}(E[r \mid \mu, y])$$

Or,

$$\text{Var}(r \mid \mu, y) = \Sigma, \quad E[r \mid \mu, y] = \mu$$

En substituant :

$$\text{Var}(r \mid y) = E[\Sigma] + \text{Var}(\mu \mid y) = \Sigma + \text{Var}(\mu \mid y) = \Sigma + M^{-1}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\Sigma_{BL} = \Sigma + \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P \right]^{-1}}$$

Annexe 3 : Univers des fonds considérés pour l'optimisation

La table ci-dessous récapitule la liste des fonds faisant partie du périmètre des 19 fonds ERES considérés pour l'optimisation, ainsi que leur code ISIN.

Nom du fonds	Code ISIN
ERES ALLOCATION ETF	990000119579
ERES MHCS DYNAMIQUE	990000117989
ERES MHCS MODERE	990000117999
ERES MHCS EQUILIBRE	990000118009
ERES NIM EQUILIBRE	990000120219
ERES NIM MODERE	990000120209
OTIS LONG TERME ACTIONS	990000022639
OTIS MODERE	990000115909
EPARGNE RETRAITE ACTIONS INTERNATIONALES	FR0013227956
ERES MULTI ISR COURT TERME	FR0014002Y67
ERES MULTI ISR MODERE	FR0014002YC6
ERES MULTI ISR MOYEN TERME	FR0014002YF9
ERES MULTI ISR LONG TERME	FR0014002Y91
ERES MULTIGESTION COURT TERME	FR0013447281
ERES MULTIGESTION MODERE	FR0011091719
ERES MULTIGESTION MOYEN TERME	FR0011091784
ERES MULTIGESTION LONG TERME	FR0011090893
ERES MULTIGESTION PARTAGE & SOLIDAIRE	FR0014002OW5
ERES MULTIGESTION PME	FR0013342045