2023-2024
учеб. год

„Теоретическая механика"
2-й семестр
По лекциям Карпачева А.Ю.
и учебнику
Добронравова В.В.
Лекционные вопросы (бакалавры)

(У) - учебник

1. Аксиомы динамики. Инерциальная система отсчёта.

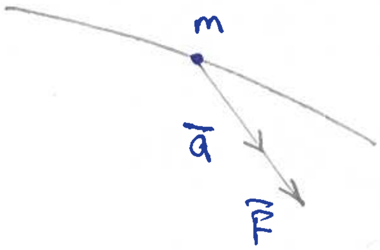
Аксиомы динамики

1. Аксиома инерции

Если на точку не действуют никакие силы, либо равновесная система сил, то точка либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно (движется по инерции)

• $\sum \overline{F}_K = \overline{R} = 0$

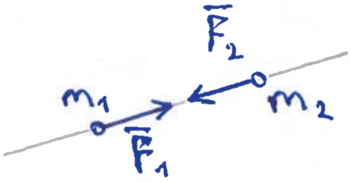
2. Основной закон динамики



$m\overline{a} = \overline{F}$ m - масса [КГ]

Ускорение материальной точки относительно инерциальной системе отсчёта пропорционально приложенной к точке силе и направлено по этой силе. (У)

3. О равенстве действия и противодействия

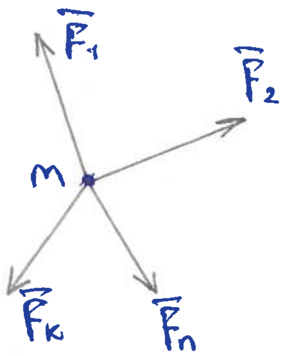


$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и противоположны по направлению. (У)

4. Аксиома о независимости действия сил (Принцип суперпозиции)

Каждая сила создаёт ускорение не зависящее от других ускорений



$\overline{F}_k \to \overline{a}$

$m\overline{a}_1 = \overline{F}_1 \qquad m\overline{a}_2 = \overline{F}_2$

$m\overline{a}_n = \overline{F}_n \qquad m\overline{a}_k = \overline{F}_k$

$m(\overline{a}_1+\overline{a}_2+\ldots+\overline{a}_n) = \overline{F}_1+\overline{F}_2+\ldots+\overline{F}_n$

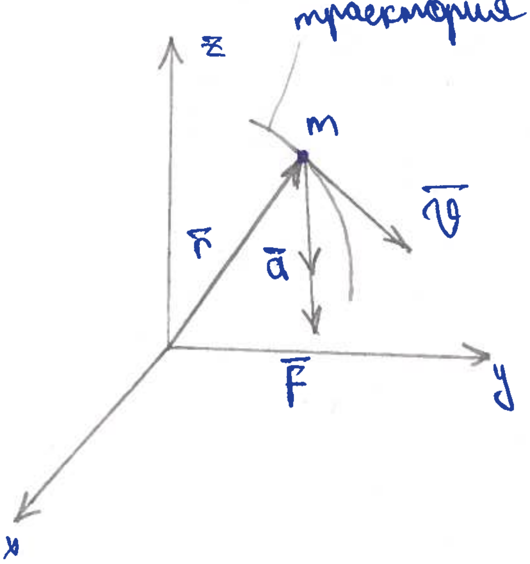
$\overline{a} = \overline{a}_1+\overline{a}_2+\ldots+\overline{a}_n$

$$\boxed{m\overline{a} = \sum \overline{F}_k}$$

ИСО (инерц. система отсчёта) - система отсчёта, в которой выполняется закон инерции (см. аксиома инерции)

---

2. Дифференциальные уравнения движения точки в векторной форме и в проекциях на декартовы и естественные оси координат.

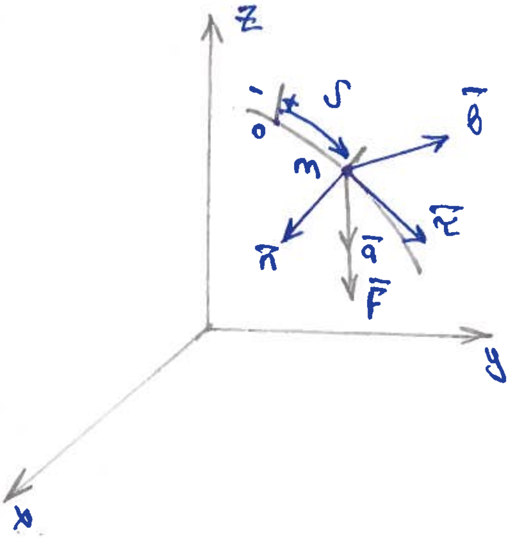


$$\overline{a} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \frac{d\overline{v}}{dt}$$

$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F}$ - основное уравнение динамики точки (вектор. форма)

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \\ m\frac{d^2x}{dt^2} = F_z \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \\ m\ddot{y} &= F_y \\ m\ddot{z} &= F_z \end{aligned} \right.$$

- в проекции на декартовы оси



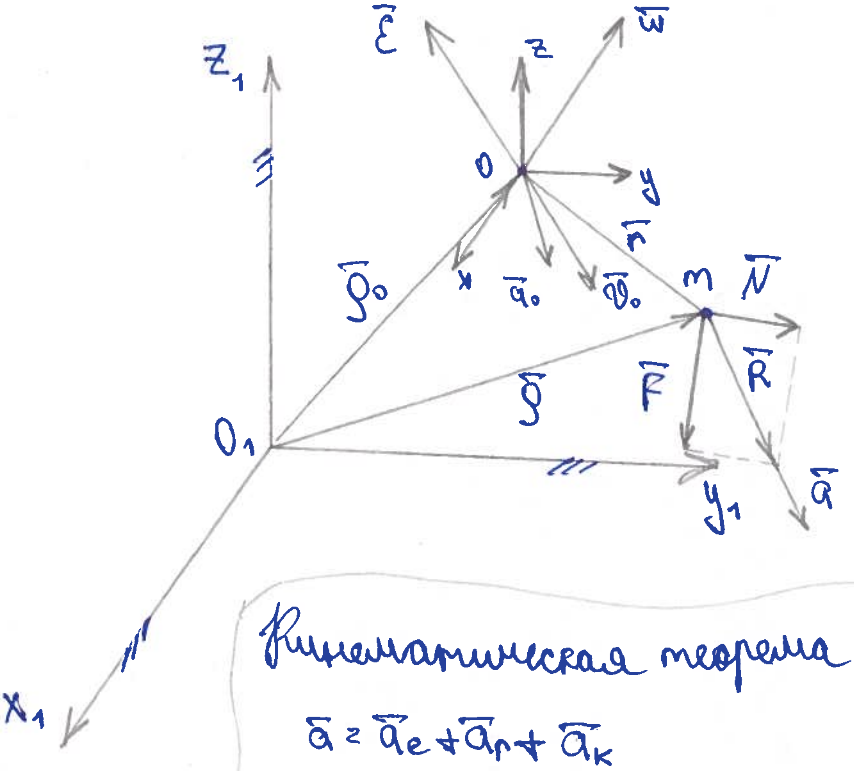
f(x,y,z)=0 (ур-ние траектории)

$$\begin{aligned} ma_\tau &= F_\tau \\ ma_n &= F_n \\ m\underset{0}{\cancel{a_b}} &= F_b \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} a_\tau &= \frac{d^2S}{dt^2} \\ a_n &= \frac{v_\tau^2}{\rho} \\ a_b &= 0 \end{aligned} \right. \quad \left| \quad \begin{aligned} a_\tau &= \frac{dv_\tau}{dt} \\ m\frac{\dot{S}^2}{\rho} &= F_n \\ m\ddot{S} &= F_\tau \\ 0 &= F_b \end{aligned} \right\}$$

- в проекции на естественные оси

3. Дифф. уравнения движения точки в неинерциальной системе отсчёта.

(по лекциям - динамика относительного движения)



$$m\bar a = \bar F + \bar N$$

Кинематическая теорема Кориолиса

$$\bar a = \bar a_e + \bar a_r + \bar a_k$$

$$\bar a_e = \bar a_0 + \bar\varepsilon \times \bar r + \bar\omega \times (\bar\omega \times \bar r)$$

$$\bar a_r = \frac{\tilde d \bar\vartheta_r}{dt} = \frac{\tilde d^2 \bar r}{dt^2}$$

$$a_k = 2 \cdot (\bar\omega \times \bar\vartheta_r)$$

$$m(\bar a_e + \bar a_r + \bar a_k) = \bar F + \bar N$$

$$m\bar a_r = \bar F + \bar N \underbrace{- m\bar a_e}_{} \underbrace{- m\bar a_k}_{}$$

$$\bar\Phi_e = -m\bar a_e \ ; \ \bar\Phi_k = -m\bar a_k$$

$$\boxed{m\bar a_r = \bar F + \bar N + \bar\Phi_e + \bar\Phi_k}$$ - динамическое уравнение Кориолиса

$$\begin{cases} m\ddot x = F_x + N_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx} \\ m\ddot y = F_y + N_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky} \\ m\ddot z = F_z + N_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz} \end{cases}$$ - в проекции на декарт. оси

Частные случаи

1. Относительное движение по инерции

$\bar{\vartheta}_r = const$; $\bar{a}_r = 0$

$$\boxed{0 = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k}$$ – уравнение движения по инерции

2. Относительный покой точки

$\bar{\vartheta}_r = 0$; $\bar{a}_r = 0$; $\bar{\Phi}_k = 0$

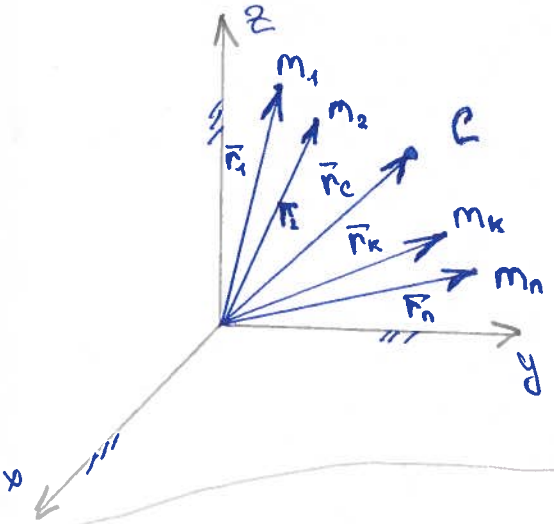
$$\boxed{0 = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e}$$ – уравнение относительного покоя

$\sum \bar{F}_k = 0$ для ИСО в абсолютном движении

---

4. Центр масс системы материальных точек. Теорема о движении центра масс.

Центр масс МС (мех. системы)



$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_k \cdot \bar{r}_k}{\sum m_k}$$ – центр масс системы

$$\sum m_k = m_\Sigma$$

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{m_\Sigma}$$

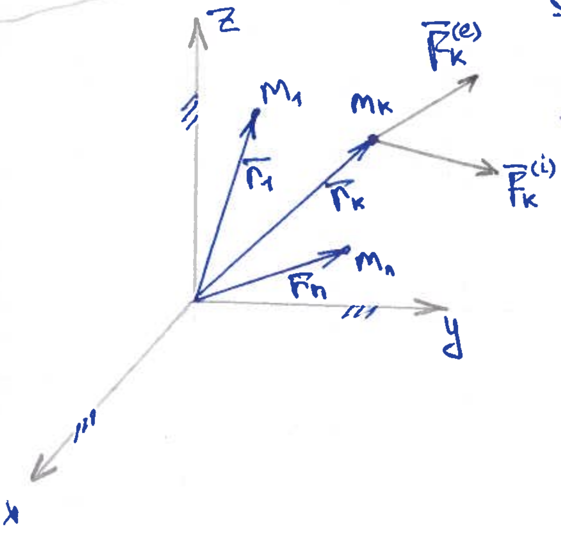
$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{m_\Sigma}$$

$$z_c = \frac{\sum m_k z_k}{m_\Sigma}$$

$$\bar{\vartheta}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_k \bar{\vartheta}_k}{m_\Sigma}$$

$$\bar{a}_c = \frac{d\bar{\vartheta}_c}{dt} = \frac{\sum m_k \bar{a}_k}{m_\Sigma}$$

Теорема о движении ЦМ системы



$m\bar{a}_k = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ $m_1, m_2, \dots, m_n$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^{(e)} + \cancelto{0}{\sum \bar{F}_k^{(i)}}$$

$$m_\Sigma \underbrace{\left(\frac{\sum m_k \bar{a}_k}{m_\Sigma}\right)}_{\bar{a}_c} = \sum \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\boxed{m_\Sigma \bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^{(e)}}$$

Частные случаи теоремы

1. $\sum \overline{F}_k^{(e)} = 0 \Rightarrow m_\Sigma \overline{a}_c = m \frac{d\overline{v}_c}{dt} = 0;$

$\overline{v}_c = \overline{const} = \overline{v}_c(0);$

Если при этом $\overline{v}_c(0) = 0$; $\frac{d\overline{r}_c}{dt} = \overline{v}_c = \overline{const}$

Никакими внутренними силами невозможно изменить положение центра масс при покое или равномерном движ.

2. $\sum F_{kx}^{(e)} = 0$; $m_\Sigma a_{cx} = m_\Sigma \frac{dv_{cx}}{dt} = 0$

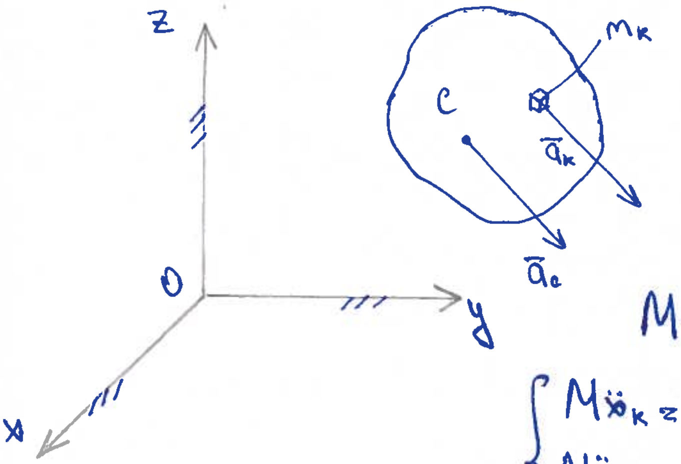
$v_{cx} = const = v_{cx}(0)$

Если $v_{cx}(0) = 0$, то $x_c = const$

---

5. Диф. уравнения поступательного движения механической системы

(по лекциям – диф. уравнения поступ. движ. тв. тела)



$m_\Sigma \overline{a}_{ц.м.} = \sum \overline{F}_k^{(e)}$

$\overline{a}_{ц.м.} = \overline{a}_c = \overline{a}_k$

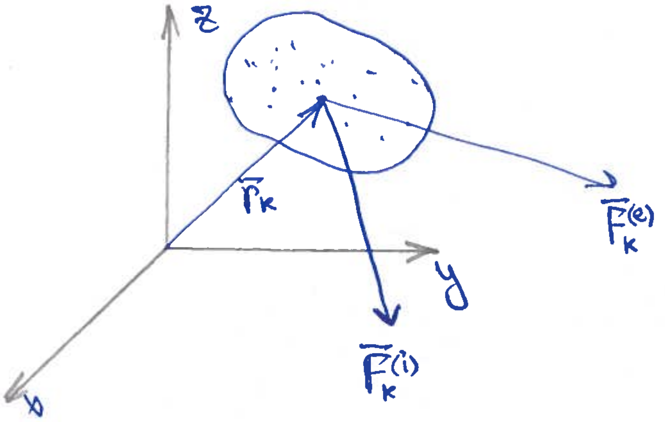
$m_\Sigma = M$

$M \cdot \overline{a}_k = \sum_{p=1}^{l} \overline{F}_p$; $M\overline{a}_c = \sum_{p=1}^{l} \overline{F}_p$

$$\begin{cases} M\ddot{x}_k = \sum F_{px} \\ M\ddot{y}_k = \sum F_{py} \\ M\ddot{z}_k = \sum F_{pz} \end{cases}$$

---

5. ———"——— (по лекциям – диф. ур-ния точек мех. системы)

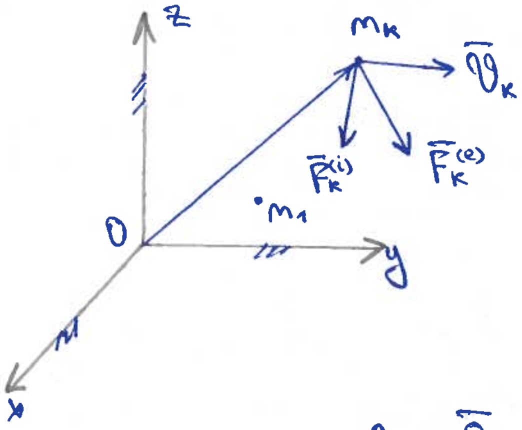


$m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^{(e)} + \overline{F}_k^{(i)}$

$m_k \ddot{\overline{r}}_k = \overline{F}_k^{(e)} + \overline{F}_k^{(i)}$

$k = 1, 2, \dots, n$

6. Теорема об изменении количества движения точки и системы материальных точек в дифференциальной и интегральной формах.



$m_1, m_2, \dots, m_n$

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$m_k = const$

$$\frac{d(m_k \bar{v}_k)}{dt} = \underline{\frac{d\bar{Q}_k}{dt} = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\bar{Q}_k}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)} + \cancel{\sum \bar{F}_k^{(i)}} \rightarrow 0 \text{ (по св. внутр. сил)}$$

$$\frac{d\sum \bar{Q}_k}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)} \; ; \quad \sum \bar{Q}_k = \bar{Q}$$

$$\underline{\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}}$$ – <u>диф форма</u>

$$d\bar{Q} = \left(\sum \bar{F}_k^{(e)}\right) dt = \sum \bar{F}_k^{(e)} dt = \sum d\bar{S}_k^{(e)} = \sum d\bar{S}(\bar{F}_k^{(e)})$$

<u>Интегр. форма теоремы</u>

$$\int d\bar{Q} = \int \sum d\bar{S}_k^{(e)} = \sum \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_k^{(e)} dt = \sum \bar{S}_k^{(e)}$$

$$\underline{\Delta \bar{Q} = \bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \sum \bar{S}_k^{(e)}}$$

<u>Частные случаи</u>

1) $\sum \bar{F}_k^{(e)} = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{Q} = const = \bar{Q}(0)$

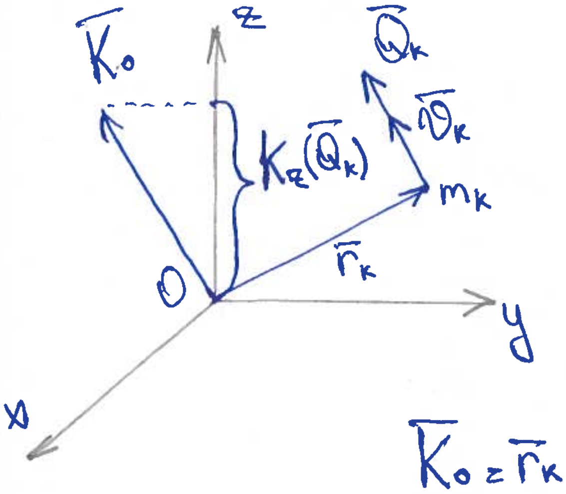
2) $\sum F_{kx}^{(e)} = 0 \Rightarrow \frac{dQ_x}{dt} = 0 \Rightarrow Q_x = const = Q_x(0)$

P.S. $d\bar{S} = \bar{F} dt$ – элементарный импульс силы

$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt$ – полный импульс силы за промежуток времени $t_1 - t_2$

Вектор $\bar{Q}$ кол-ва движения – свободный

7. Кинетический момент точки и системы материальных точек относительно центра и оси.



oxyz - инерц. сист. отсчёта
точка с массой m_k имеет скорость $\bar{\vartheta}_k$. Положение точки опред. $\bar{r}_k$.

$$\bar{Q}_k = m_k \bar{\vartheta}_k$$

Кинетический момент
(момент кол-ва движения (Y))

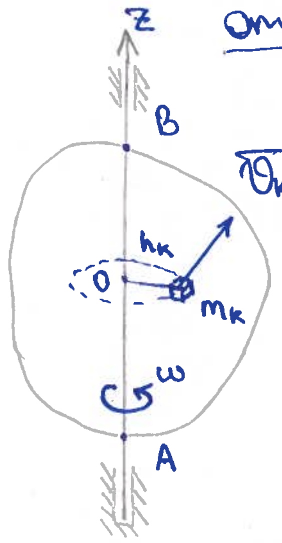
$$\bar{K}_0 = \bar{r}_k \times m_k \bar{\vartheta}_k = \bar{r}_k \times \bar{Q}_k$$

$$\bar{K}_0(m_k\bar{\vartheta}_k) = \bar{r}_k \times \bar{Q}_k$$

Кинетич. мом. приложен к точке, относительно которой он вычисляется.

Для сист. мат. точек: $K_0 = \sum \bar{r}_k \times \bar{Q}_k = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{\vartheta}_k$

Кинетич. мом. тв. тела относительно оси его вращения



$$Q_k = m_k \vartheta_k$$

$$K_z(m_k\bar{\vartheta}_k) = \pm h_k \cdot Q_k = m_k \vartheta_k h_k = m_k h_k^2 \omega$$

$$\vartheta_k = h_k \omega$$

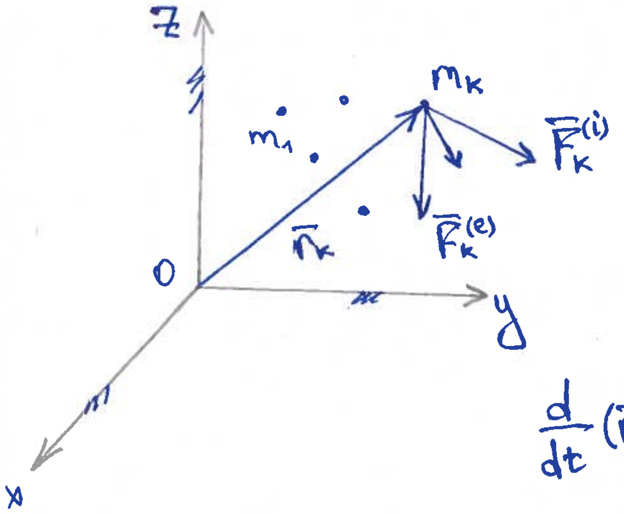
$K_{zk} = m_k h_k^2 \omega$; $J_{kz} = m_k h_k^2$ - момент инерции материальной точки отн. Oz

$$K_z = \sum K_{zk} = \underbrace{\left(\sum m_k h_k^2\right)}_{J_z}\omega$$

$$J_z = \sum m_k h_k^2 ; \quad J_z = \int_V h^2 \rho dV = \int_V (x^2+y^2)\rho dx dy dz$$

8. Теорема об изменении кинетического момента для точки и системы материальных точек

(по лекциям – Теоремы об изменении кин. момента относительно центра и относительно оси)



$m_1, m_2, \dots, m_n$

$$m_k\bar a_k = \bar F_k^{(e)} + \bar F_k^{(i)} \quad (k = 1, 2, \dots n) \quad (1)$$

векторно домножим (1) на $\bar r_k$ слева

$$\underbrace{\bar r_k \times m_k \bar a_k} = \bar r_k \times \bar F_k^{(e)} + \bar r_k \times \bar F_k^{(i)} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar r_k \times m_k \bar\vartheta_k) = \underbrace{\frac{d\bar r_k}{dt}}_{\bar\vartheta_k} \times m_k\bar\vartheta_k + \bar r_k \times \underbrace{\frac{d m_k\bar\vartheta_k}{dt}}_{m_k\bar a_k}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar r_k \times m_k \bar\vartheta_k) = \underset{0}{\cancel{\bar\vartheta_k \times m_k\bar\vartheta_k}} + \underbrace{\bar r_k \times m_k \bar a_k}$$

Перепишем (2): $$\frac{d}{dt}\underbrace{(\bar r_k \times m_k \bar\vartheta_k)}_{\bar K_o(m_k\bar\vartheta_k)} = \underbrace{\bar r_k \times \bar F_k^{(e)}}_{\bar M_o(\bar F_k^{(e)})} + \underbrace{\bar r_k \times \bar F_k^{(i)}}_{\bar M_o(\bar F_k^{(i)})}$$

$$\frac{d}{dt}[\bar K_o(m_k\bar\vartheta_k)] = \bar M_o(\bar F_k^{(e)}) + \bar M_o(\bar F_k^{(i)}) \quad (3)$$

Просуммируем (3); учтём $\sum M_o(\bar F_k^{(i)}) = 0$ по св. внутр. сил

$$\sum \bar K_o(m_k\bar\vartheta_k) = \bar K_o$$

$$\boxed{\frac{d\bar K_o}{dt} = \sum \bar M_o(\bar F_k^{(e)})} \quad (4)$$

Спроецируем (4) на Oz:

$$\boxed{\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\bar F_k^{(e)})} \quad (5)$$

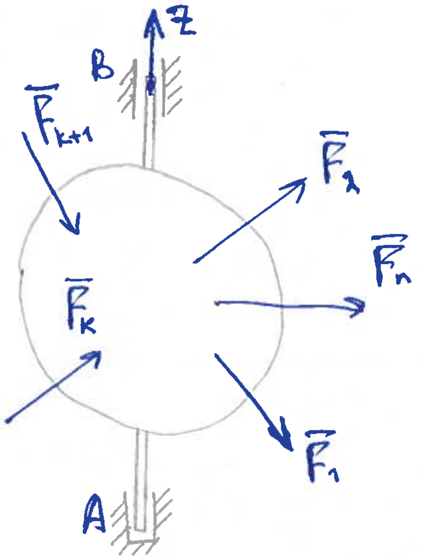
Законы (условия) сохранения кинетического момента

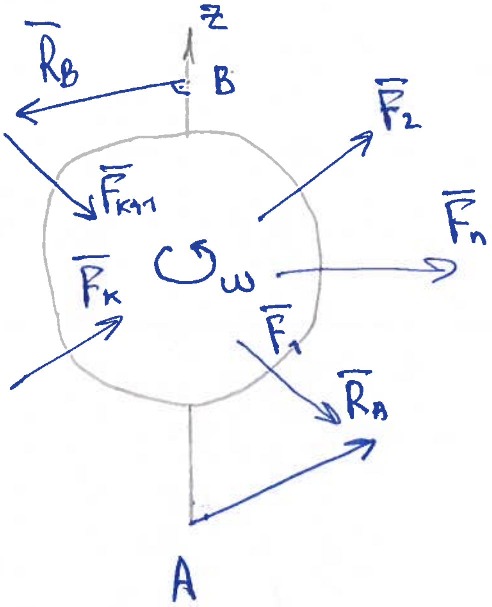
Пусть $\sum \bar M_o(\bar F_k^{(e)}) = 0$, тогда $\frac{d\bar K_o}{dt} = 0 \Rightarrow \bar K_o = \text{const}$ (6)

Спроец. (6) на оси координат:

$K_x = C_1$; $K_y = C_2$; $K_z = C_3$; $(C_i) = \text{const}$ (7)

9. Диф. уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси





$$\boxed{\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^{(e)})}$$

$K_z = J_z\omega$; $J_z = const$

$\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n$ - активные силы

$\overline{R}_A, \overline{R}_B$ - реакции опор

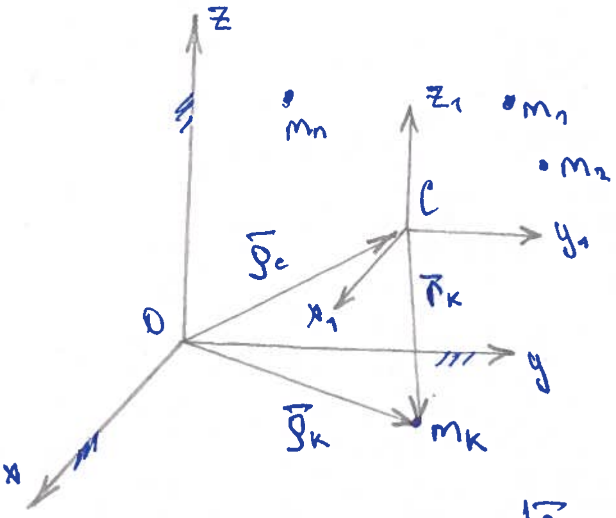
$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k) + \cancelto{0}{M_z(\overline{R}_A)} + \cancelto{0}{M_z(\overline{R}_B)}$$

$\omega_z = \dot{\varphi}$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = \sum M_z(F_k) \longrightarrow \boxed{J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\overline{F}_k)}$$

Зная нач. условия $\begin{cases} t = 0 \\ \varphi = \varphi^0 \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}^0 \end{cases}$ можно найти $\varphi = \varphi(t)$

10. Формула для кинетического момента мех. системы при сложном движении



$m_1, m_2, \dots, m_k, \dots m_n$

Oxyz - ИСО

$Cx_1y_1z_1$ - подвижная сист. отсч., движущаяся <u>поступательно</u>

C - центр МС

$$\bar\rho_k = \bar\rho_c + \bar r_k \quad (1)$$

дифф. (1) по t: $\frac{d\bar\rho_k}{dt} = \frac{d\bar\rho_c}{dt} + \frac{\tilde{d}\bar r_k}{dt} + \cancelto{0}{\bar\omega_e \times \bar r_k}$ $\quad \bar\omega_e \equiv 0$

$$\bar\vartheta_k = \bar\vartheta_c + \bar\vartheta_k^{(r)} \quad (2)$$

$$\bar K_o = \sum_{k=1}^{n} (\bar\rho_k \times m_k \bar\vartheta_k) = \sum (\bar\rho_c + \bar r_k) \times m_k (\bar\vartheta_c + \bar\vartheta_k^{(r)}) =$$

$$= \sum \bar\rho_c \times m_k \bar\vartheta_c + \sum \bar\rho_c \times m_k \bar\vartheta_k^{(r)} + \sum \bar r_k \times m_k \bar\vartheta_c + \sum \bar r_k \times m_k \bar\vartheta_k^{(r)} =$$

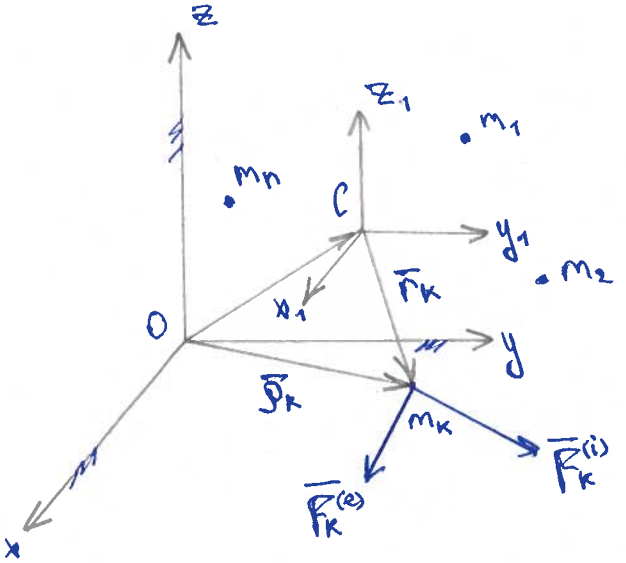
$$= \bar\rho_c \times \sum m_k \bar\vartheta_c + \cancelto{0}{\sum \bar\rho_c \times m_k \bar\vartheta_k^{(r)}} + \cancelto{0}{\sum m_k \bar r_k} \times \bar\vartheta_c + \sum \bar r_k \times m_k \bar\vartheta_k^{(r)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \bar r_c = \dfrac{\sum m_k \bar r_k}{\sum m_k} = 0 \longrightarrow \sum m_k \bar r_k \equiv 0 \ \text{(центр масс - начало координат подвижн. сис. отсч.)} \\ \dot{\bar r}_c = \dfrac{\sum m_k \bar\vartheta_k}{\sum m_k} \equiv 0 \longrightarrow \sum m_k \bar\vartheta_k^{(r)} = 0 \ \text{(производная от 0-вектора - 0-вектор)} \end{array} \right| =$$

$$= \bar\rho_c \times m_\Sigma \bar\vartheta_c + \sum \bar r_k \times m_k \bar\vartheta_k^{(r)}$$

$$\bar K_o = \underbrace{\bar\rho_c \times m_\Sigma \bar\vartheta_c}_{\bar K_o^{(c)}} + \underbrace{\sum \bar r_k \times m_k \bar\vartheta_k^{(r)}}_{\bar K_c^{(r)}} = \bar K_o^{(c)} + \bar K_c^{(r)} \quad (3)$$

11. Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс.



$m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots m_n$

$Oxyz$ - ИСО

$Cx_1y_1z_1$ - подвижная система отсчёта, движущаяся поступательно вместе с центром масс C

$x \parallel x_1,\ y \parallel y_1,\ z \parallel z_1$

$$\frac{d\bar K_o}{dt} = \sum \bar M_o(\bar F_k^{(e)}) = \sum \bar\rho_k \times \bar F_k^{(e)}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar K_o) = \frac{d}{dt}(\bar K_o^c + \bar K_c^r) = \sum(\bar\rho_c + \bar r_k)\times \bar F_k^{(e)}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar K_o^c) + \frac{d}{dt}(\bar K_c^r) = \sum \bar\rho_c \times \bar F_k^{(e)} + \sum \bar r_k \times \bar F_k^{(e)}$$

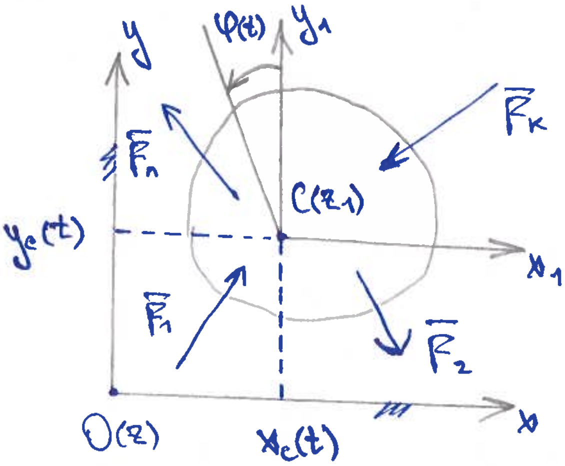
$$\frac{d}{dt}(\bar K_o^c) = \frac{d}{dt}(\bar\rho_c \times m_\Sigma \bar\vartheta_c) = \underbrace{\cancel{\frac{d\bar\rho_c}{dt}\times m_\Sigma \bar\vartheta_c}}_{0} + \bar\rho_c \times \frac{d m_\Sigma \bar\vartheta_c}{dt} = \bar\rho_c \times m_\Sigma \bar a_c$$

$$\bar\rho_c \times m_\Sigma \bar a_c + \frac{d\bar K_c^r}{dt} = \sum \bar\rho_c \times \bar F_k^{(e)} + \sum \bar r_k \times \bar F_k^{(e)}$$

$$\bar\rho_c \times \underbrace{\cancel{(m_\Sigma \bar a_c - \sum \bar F_k^{(e)})}}_{0} + \frac{d\bar K_c^r}{dt} = \sum \bar r_k \times \bar F_k^{(e)}$$

$$\frac{d\bar K_c^r}{dt} = \sum \bar r_k \times \bar F_k^{(e)} \longrightarrow \boxed{\frac{d\bar K_c^r}{dt} = \sum \bar M_c(\bar F_k^{(e)})}$$

12. Дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела



$x_c(t), y_c(t), \varphi(t)$

$\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n$

$$\underline{\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^{(e)}} \longrightarrow \frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^{(e)}$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^{(e)}$$

$\overline{Q} = m_\Sigma \overline{v}_c$; $m_\Sigma = m$

$$\underline{\begin{cases} m\dfrac{dv_{cx}}{dt} = \sum F_{kx} \\ m\dfrac{dv_{cy}}{dt} = \sum F_{ky} \end{cases}} \quad (1)$$

$$\underline{\underline{\frac{d\overline{K}_c^n}{dt} = \sum \overline{M}_c(\overline{F}_k^{(e)})}}$$

в проекции на ось cz_1: $\dfrac{dK_{cz_1}}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} M_{cz_1}(\overline{F}_k)$

$K_{cz_1} = J_{cz_1} \cdot \omega_{z_1}$; $J_{cz_1} = const$; $\omega_{z_1} = \dfrac{d\varphi}{dt}$

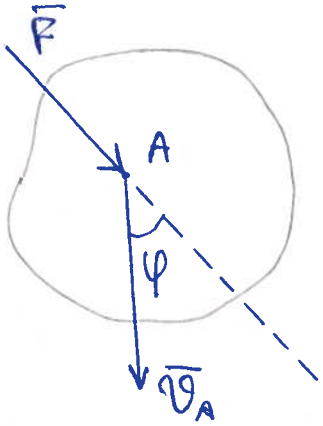
$$\underline{\underline{J_{cz_1} \cdot \frac{d\omega_{z_1}}{dt} = \sum M_{cz_1}(\overline{F}_k)}}$$

$\dfrac{d\omega_{z_1}}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$; $v_{cx} = \dfrac{dx}{dt}$; $v_{cy} = \dfrac{dy}{dt}$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} m\dfrac{d^2x_c}{dt^2} = \sum F_{kx} \\ m\dfrac{d^2y_c}{dt^2} = \sum F_{ky} \end{array}\right\} \text{поступ. движ. ц.м.} \\ J_{cz_1}\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_{cz_1}(\overline{F}_k) \text{ — вращ. движ. вокруг ц.м.} \end{cases}$$

13. Элементарная и полная работа силы. Мощность. Работа равнодействующей силы.

Мощность силы



$$W = \bar{F}\cdot\bar{v}_A$$

$$\boxed{W = \bar{F}\cdot\bar{v}}$$

Элементарная работа силы

$$dA = wdt = \bar{F}\cdot\bar{v}dt = \bar{F}d\bar{r} = F_\tau ds \quad (dS>0)$$

Полная работа силы за промежуток времени $t_1 - t_2$:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\bar{v}dt = \int_{t_1}^{t_2} wdt = \int_{t_1}^{t_2} w(\bar{F})dt$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\bar{v}dt = \int_{t_1}^{t_2} (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z)dt$$

$$v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (M_1 \text{ и } M_2 - \text{точки})$$

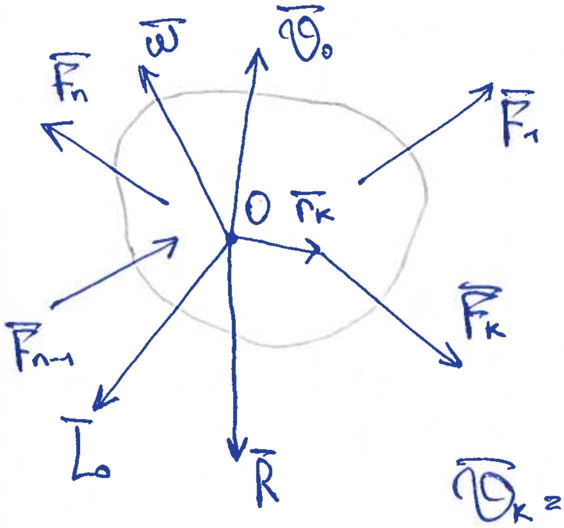
Работа равнодействующей силы

Пусть $\bar{R}^* = \sum \bar{F}_k$

$$dA = \bar{R}^* d\bar{r} = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \ldots + \bar{F}_n)d\bar{r} = \bar{F}_1 d\bar{r} + \bar{F}_2 d\bar{r} + \bar{F}_3 d\bar{r} + \ldots + \bar{F}_n d\bar{r}$$

14. Работа силы, приложенной к твёрдому телу, при его различных движениях.

Тело находится в общем случае движения под действием $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_k, \overline{F}_n$



$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n) \backsim (\overline{R}, \overline{L}_0)$$

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$$

$$\overline{L}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k$$

$$\overline{\upsilon}_k = \overline{\upsilon}_0 + \overline{\omega} \times \overline{r}_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} W(\overline{F}_k) = \sum \overline{F}_k \cdot \overline{\upsilon}_k = \sum \overline{F}_k (\overline{\upsilon}_0 + \overline{\omega} \times \overline{r}_k) =$$

$$= \underbrace{\sum \overline{F}_k}_{\overline{R}} \cdot \overline{\upsilon}_0 + \sum \overline{F}_k (\overline{\omega} \times \overline{r}_k) = \overline{R} \cdot \overline{\upsilon}_0 + \underbrace{\sum (\overline{r}_k \times \overline{F}_k)}_{\overline{L}_0} \overline{\omega} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} W(\overline{F}_k) = \overline{R} \cdot \overline{\upsilon}_0 + \overline{L}_0 \overline{\omega}$$

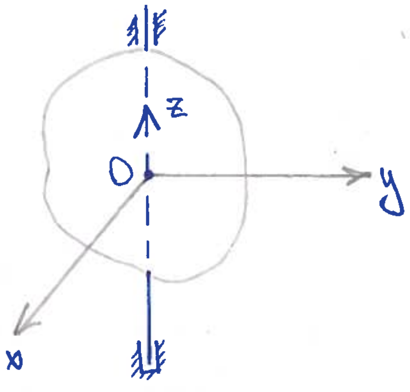
$$\boxed{\sum A(\overline{F}_k) = \int_{t_1}^{t_2} \overline{R} \cdot \overline{\upsilon}_0 \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \overline{L}_0 \cdot \overline{\omega} \, dt}$$

Частные случаи:

1. Поступ. движ. тв. тела

$\overline{\omega} \equiv 0 \qquad \sum W(\overline{F}_k) = \overline{R} \cdot \overline{\upsilon}_0 = \overline{R} \cdot \overline{\upsilon}_c = \sum \overline{F}_k \cdot \overline{\upsilon}_c$

2. Вращение тв. тела вокруг неподвижной оси

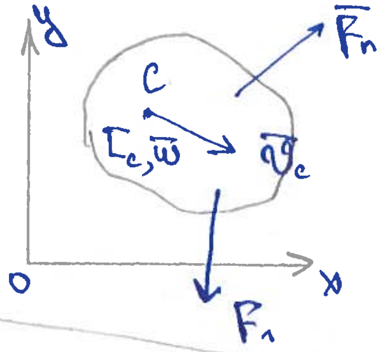


т. $O \in Oz \Rightarrow \overline{\upsilon}_0 = 0$

$$\sum W(\overline{F}_k) = \overline{L}_0 \overline{\omega} = \underbrace{\cancel{L_x \omega_x}}_{0} + \underbrace{\cancel{L_y \omega_y}}_{0} + L_z \omega_z = L_z \omega_z$$

$$\sum A(\overline{F}_k) = \int_{t_1}^{t_2} \sum (M_z(\overline{F}_k) \cdot \omega_z) dt$$

3. Плоское движение тв. тела

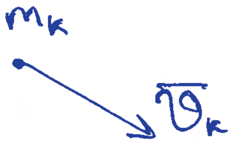


$$\sum w(\overline{F}_k) = \overline{R}\cdot\overline{\vartheta}_0 + \overline{L}_c\cdot\overline{\omega}$$

---

15. Кинетическая энергия точки и механической системы. Теорема Кёнига.

Кинетическая энергия

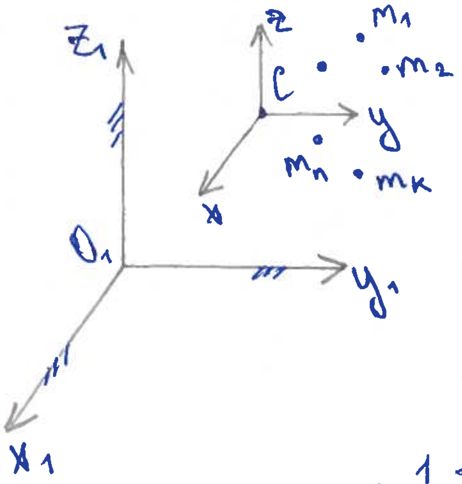


$$T_k = \frac{m_k \vartheta_k^2}{2}$$

$$T_k = \frac{m_k \overline{\vartheta}_k^2}{2} \quad (\overline{\vartheta}_k\cdot\overline{\vartheta}_k = \vartheta_k^2)$$

$$T = \sum T_k = \frac{\sum m_k \vartheta_k^2}{2}$$

Теорема Кёнига (о вычислении кинетич. энергии системы материальных точек в сложном движении)



C – ц.м. системы

Cxyz – движ. вместе с ц.м.

$O_1x_1y_1z_1$ – неподвижн. сист.

$$\overline{\vartheta}_k = \overline{\vartheta}_c + \overline{\vartheta}_k^r$$

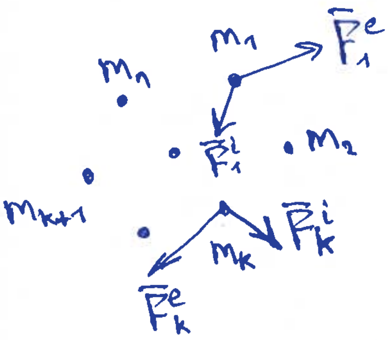
$$T = \sum \frac{m_k \vartheta_k^2}{2} = \sum \frac{m_k(\overline{\vartheta}_c + \overline{\vartheta}_k^r)^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_k \vartheta_c^2 + \cancel{\sum m_k \overline{\vartheta}_k^r\cdot\overline{\vartheta}_c} \to 0\ (\overline{r}_c = 0) + \frac{1}{2}\sum m_k (\vartheta_k^r)^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m_\Sigma \vartheta_c^2}_{T_c} + \underbrace{\sum \frac{m_k(\vartheta_k^r)^2}{2}}_{T_{отн}}$$

$$\boxed{T = T_c + T_{отн}}$$

16. Теорема об изменении кинетической энергии для точки и системы материальных точек



Система мат. точек

$m_k\bar a_k = \bar F_k^{(e)} + \bar F_k^{(i)}$ (1) ; $\bar a_k = \frac{d\bar\vartheta_k}{dt}$

$m_k \frac{d\bar\vartheta_k}{dt} = \bar F_k^{(e)} + \bar F_k^{(i)}$ $(k=1,2,\dots,n)$ (2)

Домножим (2) на $\bar\vartheta_k$ скалярно:

$$m_k\bar\vartheta_k\frac{d\bar\vartheta_k}{dt} = \bar F_k^{(e)}\cdot\bar\vartheta_k + \bar F_k^{(i)}\cdot\bar\vartheta_k$$

$$d\left(\frac{\bar\vartheta_k^2}{2}\right) = \bar\vartheta_k\, d\bar\vartheta_k$$

$$\underbrace{d\left(m_k\frac{\vartheta_k^2}{2}\right)}_{dT_k} = \underbrace{\bar F_k^{(e)}\bar\vartheta_k\, dt}_{dA_k^{(e)}} + \underbrace{\bar F_k^{(i)}\cdot\bar\vartheta_k\, dt}_{dA_k^{(i)}}$$

$dT_k = dA_k^{(e)} + dA_k^{(i)} = d\left(A_k^{(e)} + A_k^{(i)}\right)$ (3) – дифф. форма теоремы

$\underbrace{dT_k = dA_k}$ (4) $(k=1,2,3,\dots n)$

$$\sum dT_k = \sum dA_k$$

$d\big(\underbrace{\sum T_k}_{T}\big) = \sum dA_k^{(e)} + \sum dA_k^{(i)}$ (5)

Проинтегрируем (5) в пределах $t_0 - t_1$:

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n} \bar F_k^{(e)}\cdot\bar\vartheta_k\, dt + \int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}\bar F_k^{(i)}\cdot\bar\vartheta_k\, dt$$

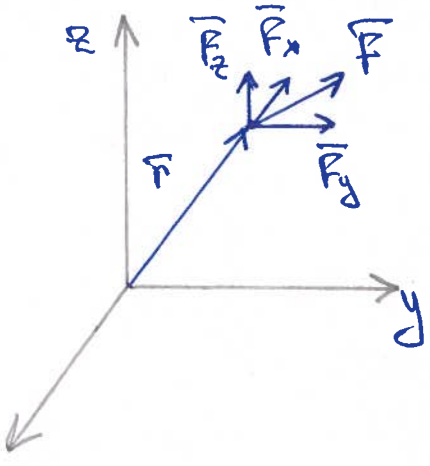
$$T_1 - T_0 = \Delta T = \sum A_k$$

$\boxed{\Delta T = \sum A_k}$ (6) – интегральная ф-ма теоремы

17. Потенциальное силовое поле. Силовая функция и потенциальная энергия поля

Силовым полем называют часть пространства, в каждой точке которого на материальную точку действует определённая сила, зависящая от координат точки и времени. (У)

Силовое поле считают стационарным, если действующие силы не изменяются с течением времени. (У)



$$\bar F = \bar F(\bar r)$$

$$\begin{cases} F_x = F_x(x,y,z) \\ F_y = F_y(x,y,z) \\ F_z = F_z(x,y,z) \end{cases}$$

Силовое поле называют потенциальным, если имеется силовая функция $V(x,y,z,t)$, такая, что:

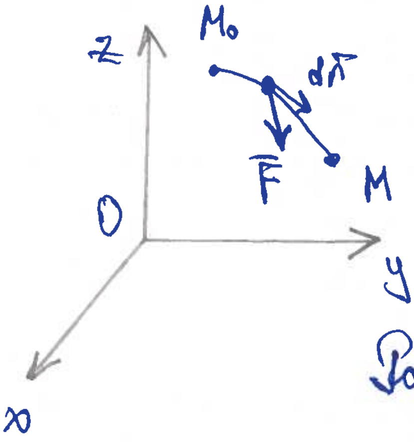
$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_x ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = F_y ; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = F_z$$

$$\bar F = \overline{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\bar i + \frac{\partial V}{\partial y}\bar j + \frac{\partial V}{\partial z}\bar k$$

Потенциальная энергия

$\bar F = \overline{\text{grad}}\, V$; Π – потенц. энергия

$\Pi = -V + \text{const}$; $d\Pi = -dV$



$$A = \int_{M_0}^{M} dV = \int_{M_0}^{M} (-d\Pi) = -\Pi\Big|_{M_0}^{M} = -(\Pi(M) - \Pi(M_0)) =$$

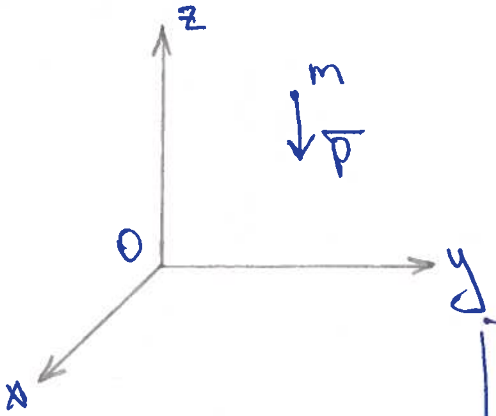
$$= -\Delta\Pi$$

$$\boxed{A = -\Delta\Pi}$$

Работа в потенциальном поле равна убыли потенциальной энергии.

18. Вычисление силовых функций однородного поля силы тяжести и линейной упругости.

1) Силов. ф-я и потенц. энергия однородного поля сил тяжести



$$m\bar g = \bar P \parallel z \Rightarrow P_x = 0,\ P_y = 0$$

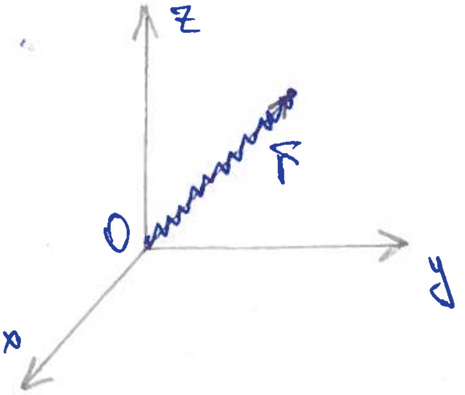
$$dA = \bar F d\bar r = P_x dx + P_y dy + P_z dz =$$

$$= -mg \cdot dz = d(-mgz)$$

$$A = -mg\Delta z + const \ ; \quad A = U + const$$

$$\boxed{\begin{aligned} U &= -mgz + const \\ \Pi &= mg\Delta z + const \end{aligned}} \ ; \quad \Pi = -U + const$$

2) Поле упругих сил



$$\bar F = -k\bar r \ ; \quad k - \text{коэф. упругости}$$

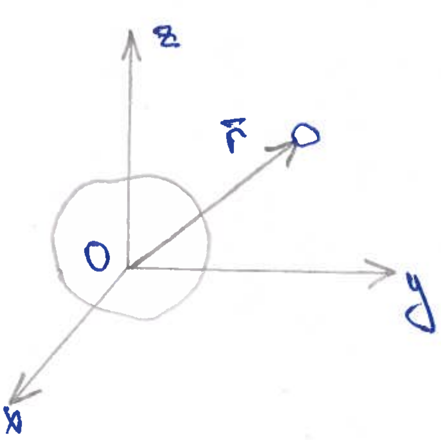
$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \bar F d\bar r = -k\bar r d\bar r =$$

$$= -k r dr = d\left(-\frac{kr^2}{2}\right)$$

$$A = -k\frac{r^2}{2} + const$$

$$\boxed{\begin{aligned} U &= -k\frac{r^2}{2} + const \\ \Pi &= k\frac{r^2}{2} + const \end{aligned}}$$

3) Поле гравитационных сил (притяжение по Ньютону)



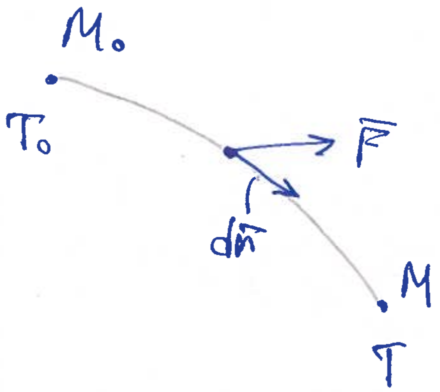
$$F = \gamma \frac{mM}{r^2} \ ; \quad C = \gamma mM$$

$$\bar F = -C\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\bar r}{|\bar r|}$$

$$dA = \bar F d\bar r = \frac{-C}{r^3}\bar r d\bar r = d\left(\frac{C}{r}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} U &= \frac{C}{r} + const \\ \Pi &= -\frac{C}{r} + const \end{aligned}}$$

19. Закон сохранения механической энергии



$U(x,y,z)$

точка перемещается под действием сил поля из M_0 в M

$$\Delta T = T - T_0 = A = -\Pi + const$$

$$T + \Pi = T_0 + const = \underbrace{T_0 + \Pi_0}_{const}$$

$$T + \Pi = \underbrace{E}_{\text{полная мех. энергия}} = const$$

$$\boxed{E = E_0}$$

Обобщая, сформулируем закон для системы М.Т.

$$T = \sum T_k \; ; \; \Pi = \sum \Pi_k$$

$$\Pi_k = \Pi_k(x_k, y_k, z_k)$$

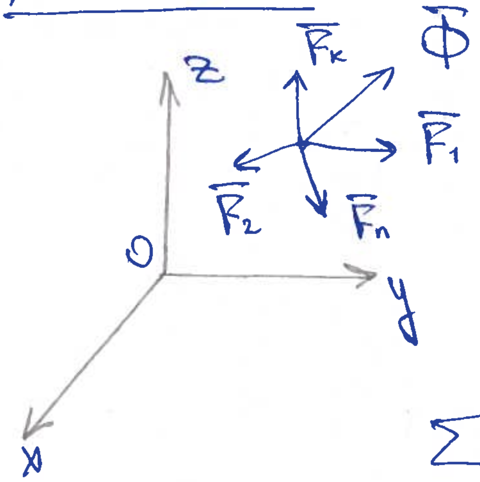
$$T_k + \Pi_k = const \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\boxed{E = \sum T_k + \sum \Pi_k = const}$$

Такие системы называются КОНСЕРВАТИВНЫМИ

20. Принцип Д'Аламбера для точки и системы материальных точек

Для м.т.



$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$

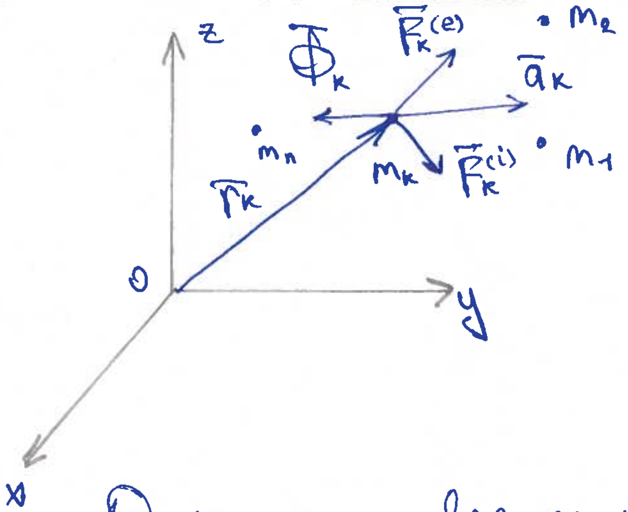
$\bar{\Phi} = -m\bar{a}$ - Д'Аламберова сила инерции

$\bar{a}$ - абсолютное ускорение

$$\sum \bar{F}_k + \bar{\Phi} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum F_{kx} + \Phi_x = 0 \\ \sum F_{ky} + \Phi_y = 0 \\ \sum F_{kz} + \Phi_z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Для системы м.т.



$m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots m_n$

$$\bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)} + \bar{\Phi}_k = 0 \quad (K=1,2,\ldots,n) \quad (1)$$

$$\cancelto{0}{\sum \bar{F}_k^{(i)}} + \sum \bar{F}_k^{(e)} + \sum \bar{\Phi}_k = 0$$

$$\sum \bar{\Phi}_k = \bar{R}^{\Phi}$$

$$\underline{\sum \bar{F}_k^{(e)} + \bar{R}^{\Phi} = 0}$$

Домножим векторно (1) слева на $\bar{r}_k$

$$\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_k^{(i)}) + \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)}) + \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0$$

$$\cancelto{0}{\sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(i)})} + \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0$$

$$\sum \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = \bar{L}_0^{\Phi}$$

$$\underline{\sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)}) + \bar{L}_0^{\Phi} = 0}$$

$$\boxed{\begin{cases} \sum \bar{F}_k^{(e)} + \bar{R}^{\Phi} = 0 \\ \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)}) + \bar{L}_0^{\Phi} = 0 \end{cases}} \nearrow \begin{cases} \sum F_{kx}^{(e)} + \sum \Phi_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky}^{(e)} + \sum \Phi_{ky} = 0 \\ \sum F_{kz}^{(e)} + \sum \Phi_{kz} = 0 \\ \sum M_{0x}(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum M_{0x}(\bar{\Phi}_k) = 0 \\ \sum M_{0y}(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum M_{0y}(\bar{\Phi}_k) = 0 \\ \sum M_{0z}(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum M_{0z}(\bar{\Phi}_k) = 0 \end{cases}$$

21. Главный вектор и главный момент сил инерции в общем и частном случаях движения твёрдого тела.

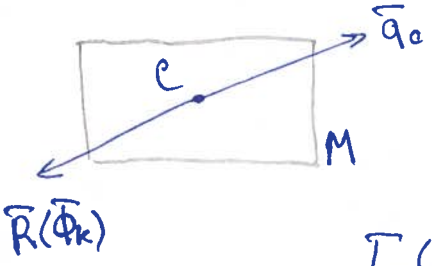
① $\begin{cases} \bar R(\bar\Phi_k) = -\sum \bar F_k^{(e)} \\ \bar L_o(\bar\Phi_k) = -\sum \bar M_o(\bar F_k^{(e)}) \end{cases}$

② $\begin{cases} \dfrac{d\bar Q}{dt} = \sum \bar F_k^{(e)} \\ \dfrac{d\bar K_o}{dt} = \sum \bar M_o(\bar F_k^{(e)}) \end{cases}$

Тогда ① и ②:

$$\begin{cases} \bar R(\bar\Phi_k) = -\dfrac{d\bar Q}{dt} \quad (3) \\ \bar L_o(\bar\Phi_k) = -\dfrac{d\bar K_o}{dt} \quad (4) \end{cases}$$

а) Поступ. движение твёрдого тела



$\bar Q = m_\Sigma \bar v_c = M\bar v_c$

$\bar R(\bar\Phi_k) = -\dfrac{d\bar Q}{dt} = -M\dfrac{d\bar v_c}{dt} = -M\bar a_c \quad (5)$

$\bar\omega = 0$

$\bar L_c(\bar\Phi_k) = -\dfrac{d\bar K_c^r}{dt} = 0; \ \bar K_c^r = 0$

$\bar R(\bar\Phi_k) = \bar R^*(\bar\Phi_k)$

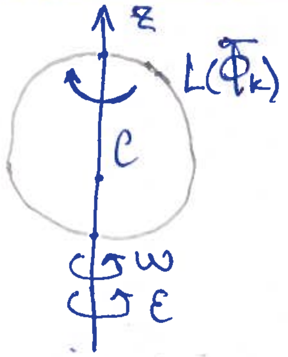
Замечание: (5) - справедлив всегда

(4) - справедлив при а) O - центр масс системы
б) O - неподвижная точка

$\bar R(\bar\Phi_k)$ - главный вектор сил инерции

$\bar L_o(\bar\Phi_k)$ - главный момент сил инерции

б) Вращение тв. тела вокруг неподвижной оси



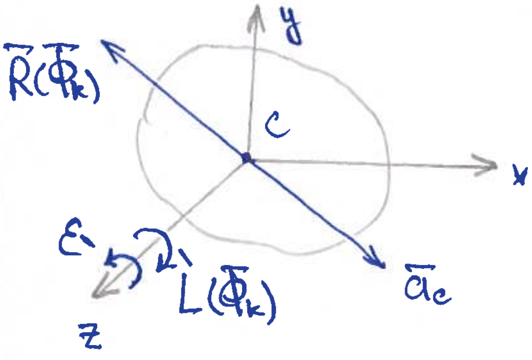
Пусть т. C - ц.м. на оси z

$L_{cz}(\bar\Phi_k) = -\dfrac{dK_{cz}}{dt}$ из (4)

$K_{cz} = J_z\omega_z$

$L_{cz}(\bar\Phi_k) = -\dfrac{d(J_z\omega_z)}{dt} = -J_z\dfrac{d\omega_z}{dt} = -J_z\varepsilon_z$

в) Плоское движение тв. тела



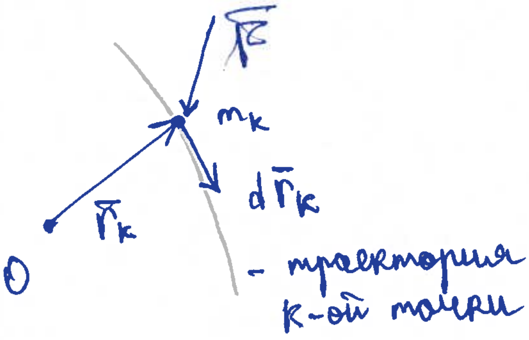
$\bar R(\bar\Phi_k) = -M\bar a_c$

$L_{cz}(\bar\Phi_k) = \underline{-J_{cz}\varepsilon_z} = -\dfrac{dK_{cz}^r}{dt} = -\dfrac{d(J_{cz}\omega_z)}{dt} = \underline{-J_{cz}\varepsilon_z}$

z ⊥ плоскости сечения

22. Возможные перемещения точки и механической системы. Принцип возможных перемещений

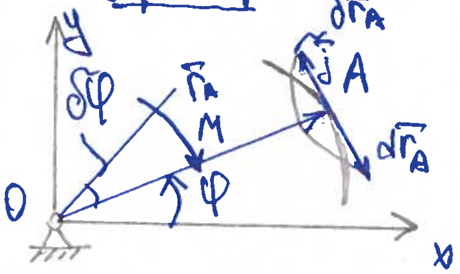
Действительными называют перемещения, бесконечно малые, которые происходят в действительности под действием сил за бесконечно малый промежуток времени.



$d\bar r_k$ – беск. мал. перемещ. происходящие за dt под действием $\bar F$

Возможными (виртуальными) называют бесконечно малые мысленные перемещения, допускаемые связями.

Пример:



Для стационарной связи:

$d\bar r_A$ содержится во множестве $\delta\bar r_A$

$\varphi = q$ – обобщенная координата

δ – вариация соотв. величины

($\delta\varphi = \delta q$ – вариация обобщенной координаты)

$d\varphi = -\delta\varphi$

$d\bar r_A$ – действ. перемещение

$\delta\bar r_A$ – виртуальные перемещения

$\delta\bar r_A = OA\cdot\delta\varphi\cdot\bar j$; $\delta\varphi$ – любое

Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Для равновесия механической системы, подчинённой идеальным, стационарным и неосвобождающим связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы, если скорости точек в рассматриваемый момент времени равны нулю. (У)

$\dot{\bar{r}}_k = 0$, $\ddot{\bar{r}}_k = 0$

$$\sum_{k=1}^{N}\delta A(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^{N}\delta A(\bar{R}_k) = 0 \quad (1)$$

Для идеальных связей:

$$\sum_{k=1}^{N}\delta A(\bar{R}_k) = 0 \quad (2)$$

$$(1): \sum_{k=1}^{N}\delta A(\bar{F}_k) = 0 \rightarrow \boxed{\delta A = 0} \quad (3)$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0 \quad (4)$$

$\delta q_i \neq 0$

$$\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

Система уравнений в количестве, равном числу обобщенных координат выражает равновесие механической системы в аналитической форме.

23. Связи и их классификации

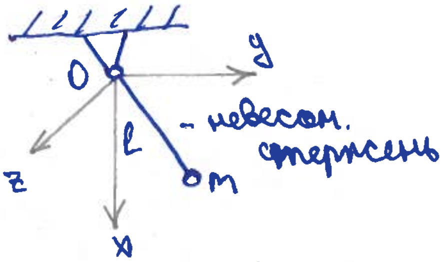
Условия, ограничивающие свободу перемещения точек механической системы, называются связями. (У)

Связи делятся на:

Стационарные
(СКЛЕРОНОМНЫЕ)

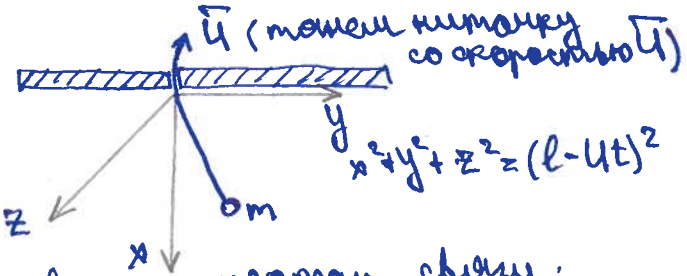
Время в уравнение явно не входит

$f(x,y,z)=0$



$x^2+y^2+z^2=l^2$

Нестационарные
(РЕОНОМНЫЕ)



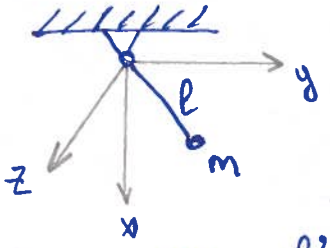
$x^2+y^2+z^2=(l-ut)^2$

уравнение нестац. связи:

$f(x,y,z,t)=0$

Двухсторонние
(неосвобождающие, удерживающие)

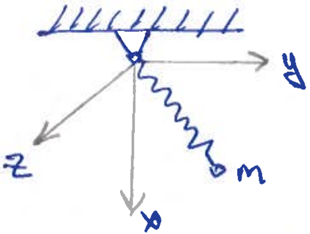
выражаются уравнениями



$x^2+y^2+z^2=const=l^2$

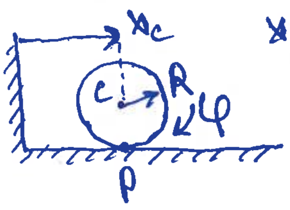
Односторонние
(освобождающие, неудерживающие)

выражаются неравенствами



$x^2+y^2+z^2\leq l^2$

Голономные
(Все геометрические и интегрируемые кинематические)



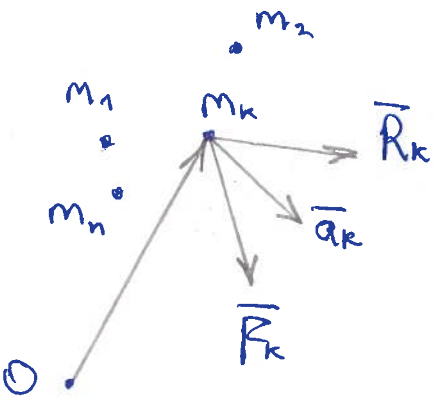
$x_c=R\varphi+const$

$\dot{x}_c=R\cdot\dot{\varphi}$

Неголономные

(Не рассм. в курсе)

24. Общее уравнение динамики (Принцип Д'Аламбера-Лагранжа)



$m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots, m_n$

$\bar F_k$ - активная сила

сила $\bar R_k$ - реакция связей

$\bar a_k$ - ускорение

$\bar\Phi_k = -m_k \bar a_k = -m_k \ddot{\bar r}_k$ (1) $k = 1, 2, \ldots, n$

Согласно принципу Д'Аламбера:

$\bar F_k + \bar R_k + \bar\Phi_k = 0$ (2)

Допустим, что у мех. системы n степеней свободы q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Дадим всем $q_i \to \delta q_i \to \bar r_k \to \delta \bar r_k$

(2) $\cdot\, \delta \bar r_k$

$(\bar F_k + \bar R_k + \bar\Phi_k)\delta \bar r_k = 0$ (3) $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$\sum(3)$: $\sum\limits_{k=1}^{N} (\bar F_k + \bar R_k + \bar\Phi_k)\delta \bar r_k = 0$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{N} \bar F_k \delta \bar r_k}_{\sum \delta A(\bar F_k)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \bar R_k \delta \bar r_k}_{\sum \delta A(\bar R_k)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \bar\Phi_k \delta \bar r_k}_{\sum \delta A(\bar\Phi_k)} = 0$$

$$\boxed{\sum \delta A(\bar F_k) + \sum \delta A(\bar R_k) + \sum \delta A(\bar\Phi_k) = 0} \quad (4)$$

Выражение (4) формулирует объединённый принцип Д'Аламбера-Лагранжа. Он утверждает, что при движении механической системы в каждый момент времени сумма работ всех сил системы, включая силы инерции, на любых возможных перемещениях, соответствующих данному моменту времени равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{N} \delta A^{(F,R,\Phi)} = 0$$

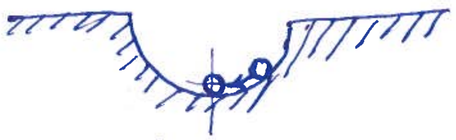
25. Теорема Лагранжа - Дирихле об устойчивости равновесия консервативной системы.

Понятие об устойчивости равновесия

Равновесие - состояние, в котором при отсутствии внешнего воздействия система может пребывать неограниченно долго.

Характер равновесия

а)



- устойчивое равновесие

б)

- неустойчивое равновесие

в)

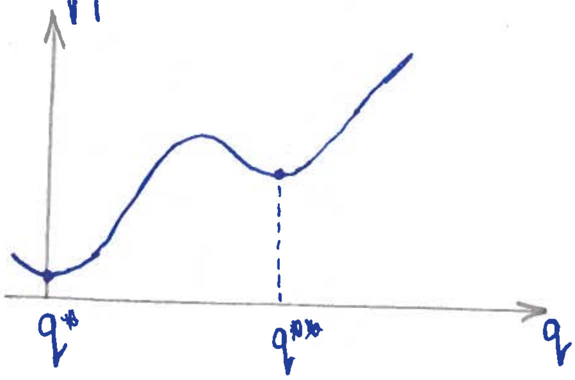
- безразличное равновесие

Для устойчивого положения равновесия консервативной системы достаточно, чтобы потенциальная энергия в этом положении имела локальный минимум (Теорема Лагранжа-Дирихле)

$$\Pi = \Pi(q)$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q^*} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q^*} > 0$$



Диссипативные силы не меняют характер устойчивости.

26. Обобщенные силы, способы вычисления обобщенных сил.

Обобщённая сила (для рассматриваемой механической системы) представляет коэффициент при вариации обобщённой координаты в выражении виртуальной работы.

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$$ - обобщ. сила

$$\delta A_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i \Rightarrow$$ $\bar{F}_k$ может быть любая, в том числе - реакция связи.

Способы вычисления обобщённых сил

а) по формуле $Q_i = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$ (1)

б) Если система консервативна:

$A(q_1, q_2, \dots, q_n)$ (2)

Проварьируем (2):

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial q_i} \delta q_i \quad (3)$$

$$Q_i = \frac{\partial A}{\partial q_i}$$

в) $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ $U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$

потенц. энергия силов. ф-я

$$A = -\Pi + const = U + const$$

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}; \quad Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

г) $$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$$

Для данной мех. системы $q_j \rightarrow \delta q_j \neq 0$

$\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + \dots + Q_i \cdot \delta q_i + Q_j \cdot \delta q_j + \dots +$ $q_i = 0$ $(i \neq j)$

$+ Q_n \delta q_n$

$Q_j = \frac{\delta A}{\delta q_j} = \frac{(\delta A)_j}{\delta q_j}$; $(j = 1, 2, \dots, n)$ Аналогично: $Q_i = \dots$

Алгоритм

1) Дать j-й обобщ. координате малые приращение δq_j

2) Определить соответствующие перемещения тех точек системы, где приложены силы и, соответственно угловых перемещений тех тел, к которым приложены пары сил.

3) Подсчитать $(\delta A)_j$

4) Получить Q_j

---

27. Условия равновесия системы, выраженные в обобщенных силах

Из принципа Лагранжа:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0 \quad (1)$$

$$\delta q_i \neq 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} F_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots n) \quad (2)$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \Rightarrow \boxed{Q_i = 0} \quad (i=1,2,\dots n) \quad (3)$$

Формула (3) выражает условие равновесия мех. системы через обобщённые силы.

28. Уравнения Лагранжа II рода. Методика применения.

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\bar r}_k}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}}$$ — I тождество Лагранжа

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \dot{\bar r}_k}{\partial q_i}}$$ — II тождество Лагранжа

Из общего уравнения механики:

$$\sum_{k=1}^{N}(\bar F_k+\bar R_k+\bar\Phi_k)\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}=0 \quad (1) \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$\sum_{k=1}^{N}(\bar F_k+\bar R_k)\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}+\sum_{k=1}^{N}\left(-m_k\bar a_k\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}\right)=0$$

для i-й строки (1) выглядит:

$$\sum m_k\bar a_k\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}=Q_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \quad (2)$$

$$\bar a_k=\frac{d\dot{\bar r}_k}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar r}_k\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}\right)=\underbrace{\frac{d\dot{\bar r}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}}_{\text{в (2) под знаком }\sum}+\bar r_k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}\right)$$

$$\bar a_k\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\Bigg(\dot{\bar r}_k\underbrace{\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}}_{\substack{\frac{\partial \dot{\bar r}_k}{\partial \dot q_i}\\ \text{по I тождеству}}}\Bigg)-\dot{\bar r}_k\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}\right)}_{\substack{\frac{\partial \dot{\bar r}_k}{\partial q_i}\\ \text{по II тождеству}}}$$

$$\bar a_k\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar r}_k\frac{\partial \dot{\bar r}_k}{\partial \dot q_i}\right)-\dot{\bar r}_k\frac{\partial \dot{\bar r}_k}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{\dot{\bar r}_k^2}{2}\right)}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial\left(\frac{\dot{\bar r}_k^2}{2}\right)}{\partial q_i}\quad\Big|\cdot m_k$$

$$m_k\cdot\bar a_k\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_k}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial T_k}{\partial q_i}$$

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\bar a_k\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\sum T_k\right)}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial\sum T_k}{\partial q_i} \quad (3)$$

$$\sum T_k=T$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i} \quad (4) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Методика применения (У)

При составлении уравнений Лагранжа можно рекомендовать следующий порядок действий:

1. Вычислить кинетическую энергию системы в её движении относительно инерциальной системы отсчёта.
2. Выбрав обобщённые координаты, число которых равно числу степеней свободы системы, преобразовать кинетическую систему к обобщённым координатам.
3. Выполнить операции дифференцирования кинетической энергии, предусмотренные уравнениями Лагранжа
4. Вычислить одним из способов обобщённые силы системы
5. Приравнять левые и правые части уравнения Лагранжа

29. Диф. уравнение малых колебаний механической системы с одной степенью в общем случае.

Понятие о колебательных системах

1. Инерционность
2. Присутствие восстанавливающих сил, стремящихся вернуть систему в состояние устойчивого равновесия
3. Наличие сил сопротивления

Различают: свободные колебания ↓ в условиях начальных возмущений

вынужденные колебания ↓ в условиях постоянно действующих возмущений

Для составления уравнений колебаний:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^{п} + Q_i^{д} + Q_i^{н.п.}$$

п - потенц.
д - диссип.
н.п. - непотенц.

Ограничимся $n=1$ - q обобщ.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{п} + Q^{д} + Q^{н.п.}$$

$$\underbrace{T, П, Ф}$$

Кинетич. энергия $T = \frac{1}{2}\sum m_k \vartheta_k^2$

$$\bar r_k = \bar r_k(q)$$

$$\bar\vartheta_k = \dot{\bar r}_k = \frac{d\bar r_k}{dt} = \frac{\partial \bar r_k}{\partial q}\cdot \dot q$$

$$T = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \bar r_k}{\partial q}\right)^2}_{A(q)}\cdot \dot q^2 = \frac{1}{2}A(q)\dot q^2$$

$q=0$

$$A(q) = A(0) + \cancel{\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 q + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2}\right)_0 \frac{q^2}{2} + \ldots} \rightarrow$$ беск. малые высок. порядка малости

$A(q) \approx A(0) = a$ - обобщённый коэффициент инерции $(a>0)$

$$T = \frac{1}{2}a\dot q^2$$

$$Q = Q^{\text{п}} + Q^{\text{д}} + Q(t)$$

$$Q^{\text{п}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} \qquad \Pi = \Pi(q)$$

q отсчит. от положения равновесия

$$\Pi(q) = \underset{0}{\cancel{\Pi(0)}} + \underset{0}{\cancel{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0}} q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 q^2 + \overset{\text{б.м.}}{\cancel{\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3}\right) q^3 + \ldots}}$$

$\Pi(0) = 0$

$$\Pi(q) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right) q^2 = \frac{1}{2} c q^2$$; c – квазиупругий коэффициент $(c > 0)$

Диссипативная ф-ция Φ:

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum \mu_k \upsilon_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \underbrace{\mu_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\right)^2}_{B(q)} \cdot \dot{q}^2 = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2$$

$$B(q) = B(0) + \cancel{\left(\frac{\partial B}{\partial q}\right) \cdot \frac{q}{2} + \ldots} \approx B(0) = в$$

в – обобщенный диссипативный коэффициент

$$\Phi = \frac{1}{2} в \dot{q}^2$$

$$Q^{\text{н.п.}} = Q(t) = \frac{\left(\sum \delta A(\bar{F}_k)\right)_q}{\delta q}$$

---

30. Свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \overset{0}{\cancel{\frac{\partial T}{\partial q}}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 \qquad \Pi = \frac{1}{2} c q^2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq \; ; \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = a\ddot{q}$$

$$a\ddot{q} + cq = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{q} + k^2 q = 0 \quad (2)$$

$$k^2 = \frac{c}{a} \quad (3)$$

$$q(t) = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt \quad (4)$$

Н.У. $t = 0; q = 0; \dot{q} = \dot{q}_0$

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = q_0 \\ -kc_1 + kc_2 = \dot{q}_0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} c_1 = q_0 \\ c_2 = \dfrac{\dot{q}_0}{k} \end{matrix}}$$

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt$$

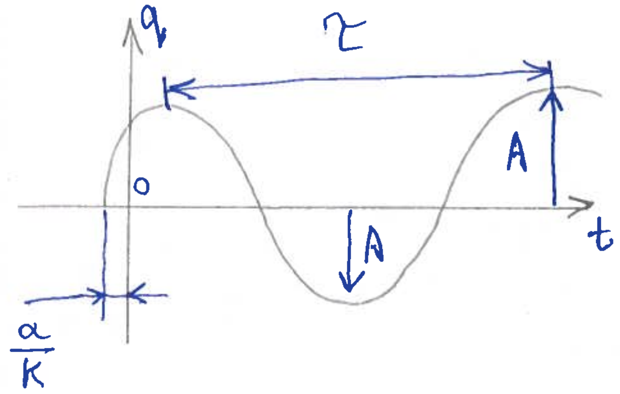
$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}}{k}\right)^2}$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \; ; \; \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{q_0}{\frac{\dot{q}_0}{k}}\right) = \operatorname{arctg}\frac{c_1}{c_2}$$

$$q = A\left(\underbrace{\frac{q_0}{A}}_{\sin\alpha} \cos kt + \underbrace{\frac{\left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)}{A}}_{\cos\alpha} \sin kt\right)$$

$$\boxed{q = A\sin(kt + \alpha)}$$

$q(t) = A\sin(kt+\alpha)$



A - амплитуда колеб. (характеристика наибольш. значения обобщённой координаты)

τ - период колебаний - наименьшее время, через которое колебание повторяется полностью

$k\tau = 2\pi$

$k = \frac{2\pi}{\tau}$ k - круговая (циклическая) частота [рад/с], [c^{-1}]

$f = \frac{1}{\tau}$ - число колебаний в единицу времени (частота в Гц)

$k = 2\pi f$

ψ - фаза колебаний; $\psi = kt + \alpha$

$\psi|_{t=0} = \alpha$ - нач. фаза колебаний

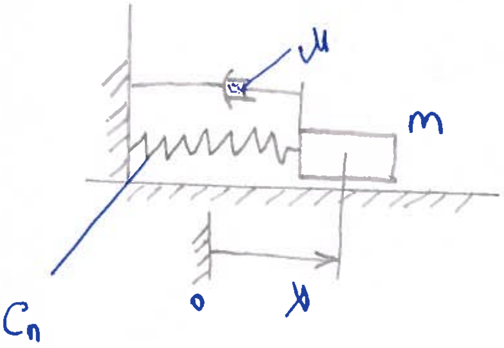
$\left[\begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \alpha < 0 \end{array}\right.$ $\alpha > 0$ - „процесс идёт с опережением"; $\alpha < 0$ - „процесс запаздывает"

Если движение записывается законом sin или cos, что колебания называют гармоническими

Основные св-ва свободн. колеб. консерв. сист.

1. Свободные линейные колебания - гармонические
2. Амплитуда этих колебаний - величина постоянная и определяется из начальных условий.
3. Период колебаний также величина постоянная и не зависит от амплитуды, т.е. не зависит от начальных условий и целиком определяется параметрами системы (a и c)

31. Затухающие колебания механической системы при наличии вязкого трения



m – масса груза

$C_п$ – коэфф. упругости пружины

μ – коэф. лин. сопротивления

x – координата, опред. положение груза

$x=0$ – для положения, когда пружина не деформирована

$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$; $П = \frac{C_п x^2}{2}$; $Ф = \frac{1}{2}[\bar{F}\cdot\bar{\vartheta}_{порш.}] = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2$

$q = x$; $c = C_п$; $b = \mu$; $a = m$

$T = a\frac{\dot{q}^2}{2}$; $П = c\frac{q^2}{2}$; $Ф = b\frac{\dot{q}^2}{2}$

демпфер (катаракт)

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)}_{a\ddot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = \underbrace{-\frac{\partial П}{\partial q}}_{-cq} \underbrace{-\frac{\partial Ф}{\partial \dot{q}}}_{-b\dot{q}}$$

$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0$ (1)

$k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ – частота св-ных колеб. системы в отсутствие сопротивления

$n = \frac{b}{2a}$ – коэфф. затухания или коэфф. диссипации

$\tau_0 = \frac{1}{n}$ – постоянная времени затухания

$q(t) = A\cdot e^{\lambda t} \rightarrow (1)$

$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ (5)

$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$

$$\begin{cases} n < k \\ n > k \\ n = 0 \end{cases}$$

Случай „малого" сопротивления $n < k$

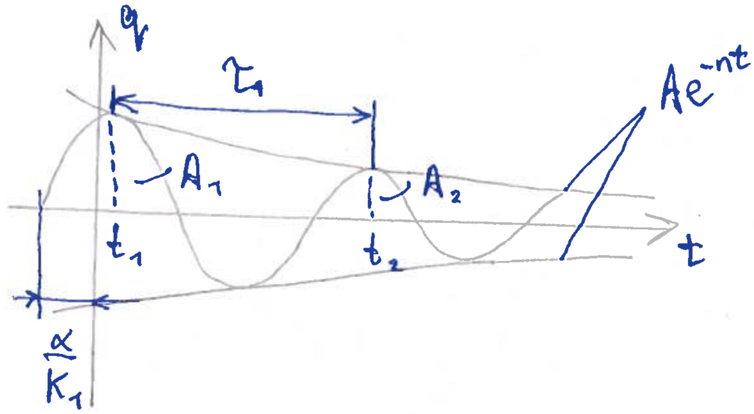
$b < 2ak = \sqrt{ac}$

$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$; $\lambda_{1,2} = -n \pm ik_1$

$q(t) = e^{-nt}(c_1\cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t)$

$q(t) \neq q(t+\tau)$

$q(t) = A\cdot e^{-nt}\sin(k_1 t+\alpha)$; $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$; $\alpha = arctg\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$



$2\pi = k_1\tau$

$\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1}$ - условный период

k_1 - условная частота, т.к. A не постоянная и убывает по закону экспоненты.

Отношение $\frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{A\cdot e^{-nt_i}}{A\cdot e^{-n(t_i+\tau_1)}} = e^{n\tau_1}$ - декремент колебаний

$\delta = \ln\frac{A_i}{A_{i+1}} = n\tau_1$ - логарифм. декремент колебаний

---

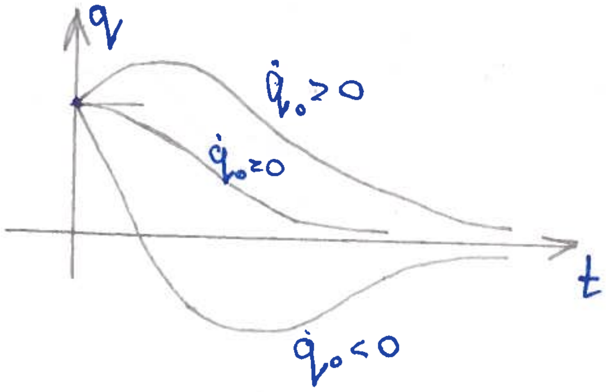
32. Апериодические затухающие колебания

$\lambda_1 = -n+\sqrt{n^2-k^2}$; $\lambda_2 = -n-\sqrt{n^2-k^2}$

2. Случай „большого" сопротивления $n>k$

$k_2 = \sqrt{n^2-k^2}$

$q(t) = c_1\cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-nt}(c_1\cdot e^{k_2 t} + c_2\cdot e^{-k_2 t})$



3. Случай „критического" сопротивления $n=k$

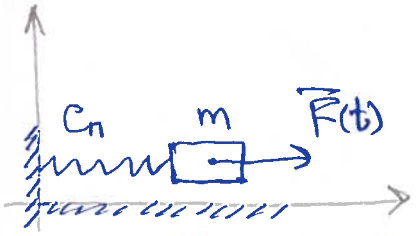
$q(t) = (c_1 t + c_2)\cdot e^{-nt}$

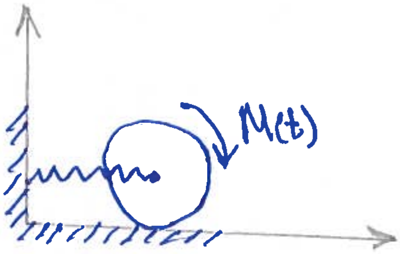
Случаи 2. и 3. не являются колебательным движением.

33. Вынужденные колебания. Интегрирование дифференциального. Собственные и вынужденные колебания.

По способам возбуждения колебаний

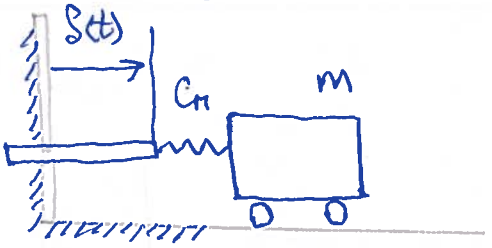
а) Силовой (динамический) способ возбуждения





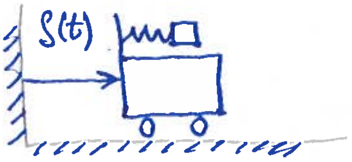
$F(t)=F_0\sin(pt+\beta)$ $M(t)=M_0\sin(pt+\beta)$

б) Кинематическое возбуждение посредством нестационарной связи



$S(t)=S_0\sin(pt+\beta)$

в) инерционный способ возбуждения



$S(t)=S_0\sin(pt+\beta)$

F_0, M_0 - амплитуды силового воздействия

S_0 - амплитуда перемещения

β - начальная фаза возмущения

p - частота внешнего возмущения

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)}_{a\ddot q}-\cancelto{0}{\frac{\partial T}{\partial q}}=\underbrace{-\frac{\partial \Pi}{\partial q}}_{-cq}+Q(t)\ ;$$

$Q(t)=Q_m\sin(pt+\beta)$

в случаях а) и б) Q_m не завис. от p

$$a\ddot q+cq=Q_m\sin(pt+\beta)$$

$$\ddot q+k^2q=h\sin(pt+\beta)$$

$$q=q_{о.о.}+q_{ч.н.}$$

$q_{ч.н.} = D\sin(pt+\beta)$

$\ddot{q}_{ч.н.} = -Dp^2\sin(pt+\beta)$

$-Dp^2\sin(pt+\beta)+k^2D\sin(pt+\beta) = h\sin(pt+\beta)$

$D = \frac{h}{k^2-p^2}$; $D = \frac{\frac{Q_m}{a}}{k^2-p^2} = \frac{Q_m}{a}\cdot\frac{1}{k^2(1-\frac{p^2}{k^2})} = \frac{Q_m}{a}\cdot\frac{a}{c}\,\frac{1}{1-\frac{p^2}{k^2}} =$

$= \frac{Q_m}{c}\cdot\frac{1}{1-\frac{p^2}{k^2}}$

$D_0 = \frac{Q_m}{a}\cdot\frac{a}{c}$ – статическое отклонение от положения равновесия

$z = \frac{p}{k}$ – коэффициент расстройки частот

$\lambda = \frac{D}{D_0} = \frac{1}{|1-z^2|}$ – коэффициент динамичности

$$\boxed{q(t) = A\sin(\omega t+\alpha) + D\sin(pt+\beta)}$$

✱↓

---

34. Основные свойства установившихся вынужденных колебаний. Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики.

Установившиеся вынужденные колебания – колебания, в уравнении которых с течением времени осталась только частная неоднородная часть.

1) Это незатухающие колебания, они длятся так долго, как долго действует возбуждающая сила
2) Эти колебания не зависят от начальных условий и имеют конечную амплитуду
3) При гармоническом возбуждении они происходят с частотой возбуждающей силы p
4) Эти колебания от возмущающей силы на величину $\varepsilon \in [0;\pi]$

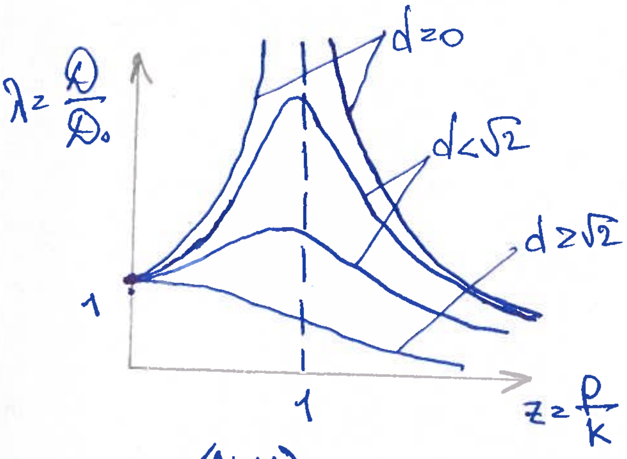
$D = D(p)$ - Амплитудно-частот. хар-ка (АЧХ)

$\varepsilon = \varepsilon(p)$ - Фазо-частотная хар-ка (ФЧХ)

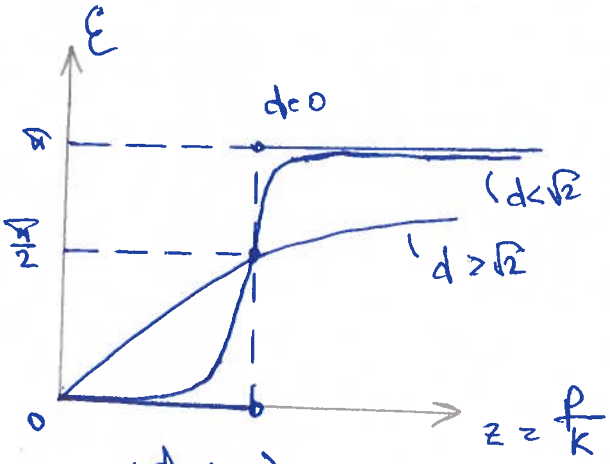
$d = \frac{2n}{k}$ - безразмерный коэффициент затухания

$D_0 = \frac{Q_m}{c}$ - статическое смещение

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+d^2z^2}}$ - коэфф. динамичности



(АЧХ)



(ФЧХ)

$z = 1$ - резонанс

---

33. Д при наличии вязкого трения

$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_m \sin(pt+\beta)$ $\qquad h = \frac{Q_m}{a}$

$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h\sin(pt+\beta)$ $\qquad k^2 = \frac{c}{a}$

$h = \frac{b}{2a}$

$$\boxed{q = q_{о.о.} + q_{ч.н.}}$$

$$q_{о.о.} = \begin{cases} A \cdot e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), & n<k \\ e^{-nt}(C_1 \cdot e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}, & n>k \\ e^{-nt}(C_1 t + C_2), & n=k \end{cases}$$

$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$

$k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$

$q_2 = q_{ч.н.} = D \sin(pt+\beta-\varepsilon)$

$\dot{q}_2 = Dp \cos(pt+\beta-\varepsilon)$

$\ddot{q}_2 = -Dp^2 \sin(pt+\beta-\varepsilon)$

$pt+\beta-\varepsilon = \psi$; $(pt+\beta) = \psi+\varepsilon$

$q_2, \dot{q}_2, \dot{q}_2 \rightarrow$ ①

$$-p^2 D\sin\psi + 2npD\cos\psi + k^2 D\sin\psi = h\sin(\psi+\varepsilon) = h\sin\psi\cos\varepsilon + h\cos\psi\sin\varepsilon$$

при $\sin\psi$: $k^2D - p^2D = h\cos\varepsilon$; $2npD = h\sin\varepsilon$

$$\left|\begin{aligned}&(k^2-p^2)D = h\cos\varepsilon\\&2npD = h\sin\varepsilon\end{aligned}\right.$$

$$D^2[(k^2-p^2)^2 + 4n^2p^2] = h^2$$

$$\boxed{D = \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)+4n^2p^2}}}$$

$$\text{tg}\,\varepsilon = \frac{2np}{k^2-p^2} \to \boxed{\varepsilon = \text{arctg}\left(\frac{2np}{k^2-p^2}\right)}$$

---

35. Резонанс при наличии и отсутствии вязкого трения

Резонанс - резкое увеличение амплитуды колебаний при совпадении собственной частоты и частоты возмущений.

Рассмотрим систему в отсутствии вязкого сопротивления:

Н.у. $t=0;\ q=0;\ \dot q=0;\ \beta=\frac{\pi}{2}$

$$Q(t) = Q_m\sin(pt+\beta) = Q_m\cos pt$$

$$q(t) = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{h}{k^2-p^2}\cos pt$$

$$\dot q(t) = -C_1 k\sin kt + kC_2\cos kt - \frac{h}{k^2-p^2}p\sin pt$$

$$\begin{cases} 0 = C_1\cdot 1 + C_2\cdot 0 + \frac{h}{k^2-p^2}\cdot 1\\ 0 = -C_1k\cdot 0 + C_2k\cdot 1 - \frac{h}{k^2-p^2}p\cdot 0\end{cases}$$

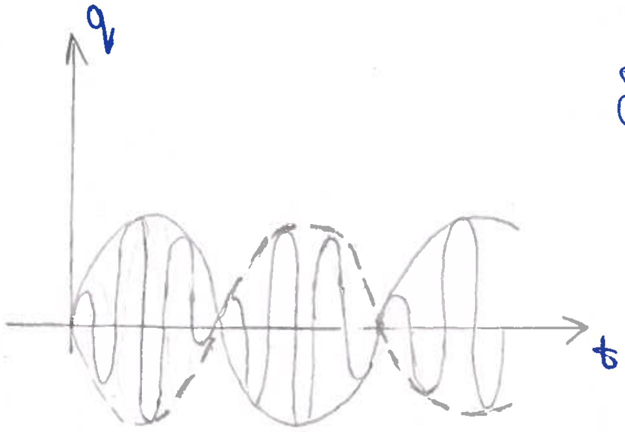
$$C_1 = -\frac{h}{k^2-p^2};\quad C_2 = 0$$

$q(t) = \frac{h}{k^2-p^2}(\cos pt - \cos kt)$ p-частота возмущений

1. Случай $k\approx p$ $(k\neq p)$ - биения

$$q(t) = -\frac{h}{k^2-p^2}2\sin\left[\frac{p-k}{2}t\right]\cdot\sin\left[\frac{p+k}{2}t\right] = \underbrace{\left[\frac{2h}{k^2-p^2}\sin\Omega t\right]}_{D(t)}\sin pt$$

$$\Omega = \frac{k-p}{2} \ll p$$

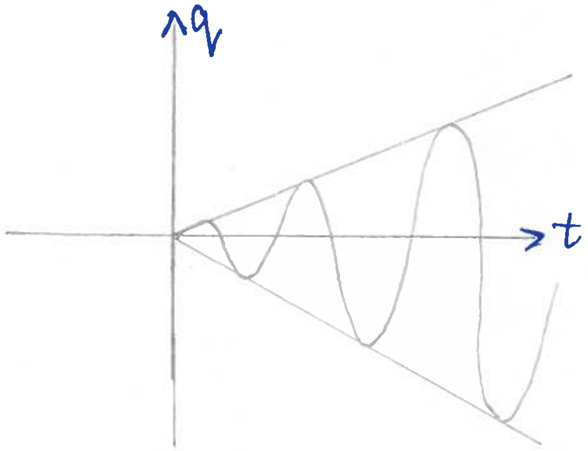


Биения

2. случай $k = p$

$$q(t) = \lim_{p\to k}\left\{\frac{2h}{k^2-p^2}\sin\left[\frac{k-p}{2}t\right]\sin\left[\frac{p+k}{2}t\right]\right\} = \lim_{p\to k}\left\{\frac{2ht}{t(k-p)(k+p)}\cdot\right.$$

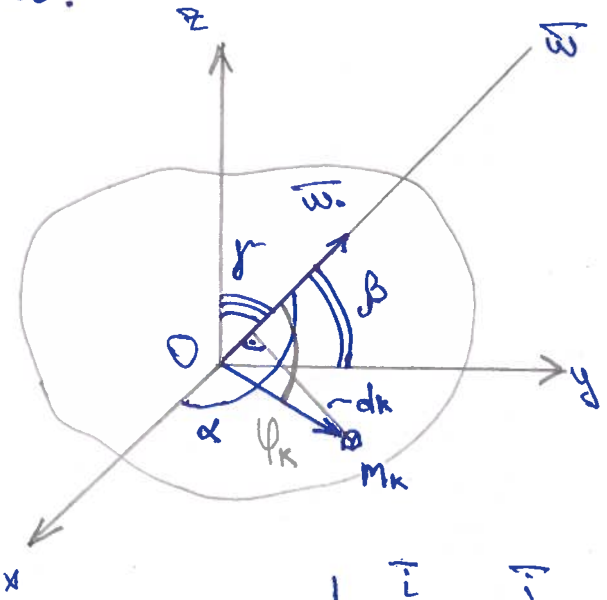
$$\left.\cdot\sin\left[\frac{k-p}{2}t\right]\cdot\sin\left[\frac{p+k}{2}t\right]\right\} = \frac{h}{2p}t\sin pt = \frac{h}{2p}t\cos\left(pt-\frac{\pi}{2}\right)$$



При совпадении частот.

Резонанс при вязком трении (см. 34: АЧХ и ФЧХ при $d \neq 0$).

36. Момент инерции твёрдого тела относительно оси, проходящей через заданную точку в заданном направлении.



$$J_\omega = \sum m_k d_k^2$$

$$d_k = r_k \sin\varphi_k = |\overline{r}_k|\cdot|\overline{\omega}_0|\cdot\sin\varphi_k =$$

$$= |\overline{r}_k \times \overline{\omega}_0| = |\overline{\omega}_0 \times \overline{r}_k|$$

$$\overline{\omega}_0 = \cos\alpha\,\overline{i} + \cos\beta\,\overline{j} + \cos\gamma\,\overline{k}$$

$$\overline{r}_k = x_k\overline{i} + y_k\overline{j} + z_k\overline{k}$$

$$|\overline{\omega}_0 \times \overline{r}_k| = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}^2 = (z_k\cos\beta - y_k\cos\gamma)^2 +$$

$$+ (x_k\cos\gamma - z_k\cos\alpha)^2 + (y_k\cos\alpha - x_k\cos\beta)^2$$

$$J_\omega = \sum m_k\cos^2\alpha\cdot(z_k^2+y_k^2) + \sum m_k\cos^2\beta(z_k^2+x_k^2) + \sum m_k\cos^2\gamma(x_k^2+y_k^2) -$$

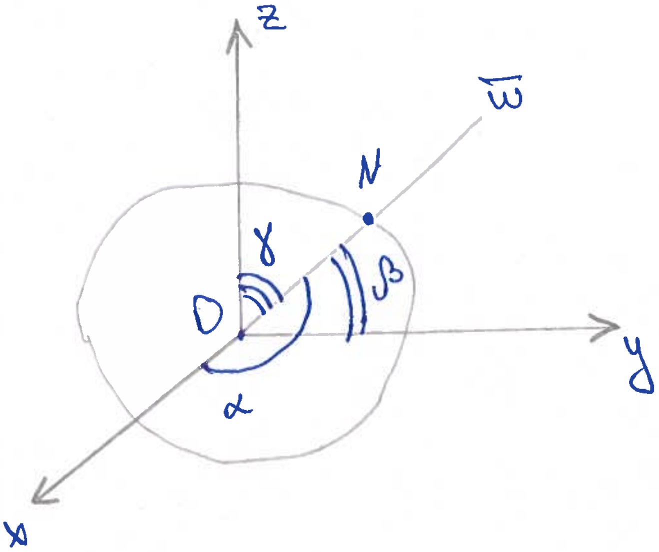
$$- 2\sum m_k\cos\alpha\cos\beta\, x_k y_k - 2\sum\cos\beta\cos\gamma\, y_k z_k - 2\sum m_k\cdot\cos\gamma\cos\alpha\, z_k x_k$$

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \sum m_k(y_k^2+z_k^2) \\ J_y &= \sum m_k(x_k^2+z_k^2) \\ J_z &= \sum m_k(y_k^2+x_k^2) \end{aligned}\right\} \text{осевые моменты инерции}$$

$$\left.\begin{aligned} J_{xy} &= \sum m_k x_k y_k \\ J_{yz} &= \sum m_k y_k z_k \\ J_{zx} &= \sum m_k z_k x_k \end{aligned}\right\} \text{центробежные моменты инерции}$$

$$\boxed{J_\omega = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha}$$

37. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции однородных симметричных тел



$$ON = \frac{1}{\sqrt{J_\omega}}$$

Определим уравнение поверхности

$$\cos\alpha = \frac{x}{ON}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{ON}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{ON}$$

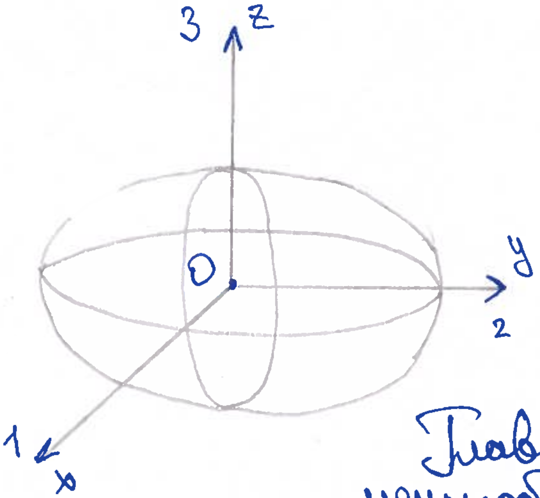
$$\cos^2\alpha = x^2 J_\omega$$

$$\cos^2\beta = y^2 J_\omega$$

$$\cos^2\gamma = z^2 J_\omega$$

$$J_\omega = J_x x^2 J_\omega + J_y y^2 J_\omega + J_z z^2 J_\omega - 2J_{xy} xy J_\omega - 2J_{yz} yz J_\omega - 2J_{xz} xz J_\omega$$

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{xz} xz = 1$$ (эллипсоид)



$$J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$$

1,2,3 – главные оси (x,y,z)

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1$$

Главные оси – оси, относительно которых центробежный момент равен нулю, а осевые моменты экстремальны.

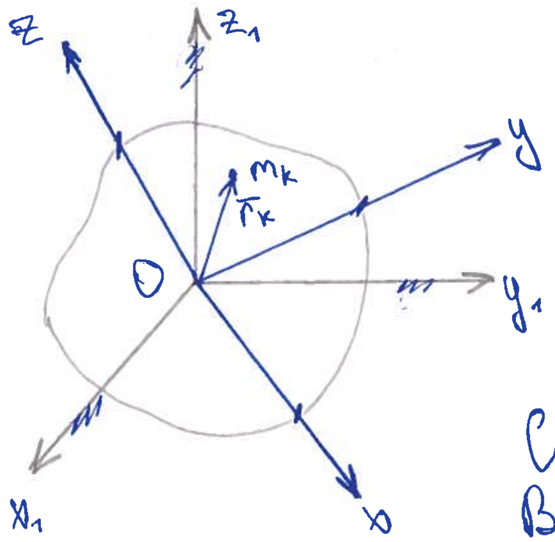
Если т. O – совпадает с центром масс (т. C), то оси Cx, Cy, Cz – главные центральные оси.

Главные оси инерции симм. тел

Тh1. Ось симметрии является главной осью инерции во всех своих точках

Тh2. Если тело имеет плоскость симметрии, то в каждой точке этой плоскости одна из главных осей перпендикулярна этой плоскости.

38. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.



$Ox_1y_1z_1$ – неподвиж. сист. коорд.

$Oxyz$ – подвиж. сист. коорд. связ. с телом

$$\overline{K_0} = \sum_{k=1}^{N} (\overline{r_k} \times m_k \overline{\vartheta_k}) = \sum m_k (\overline{r_k} \times \overline{\vartheta_k}) \quad (1)$$

Спроецируем (1) на подвижные оси

Выберем ось x.

$$K_x = \sum m_k (y_k \vartheta_{kz} - z_k \vartheta_{ky})$$

Напомним:

$$\overline{r_k} \times \overline{\vartheta_k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ \vartheta_{kx} & \vartheta_{ky} & \vartheta_{kz} \end{vmatrix} \qquad \overline{\vartheta_k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \bar{\omega} \times \overline{r_k}$$

$$\vartheta_{kz} = \omega_x y_k - x_k \omega_y$$

$$\vartheta_{ky} = \omega_z x_k - \omega_x z_k$$

$$K_x = \sum m_k [y_k(\omega_x y_k - x_k \omega_y) - z_k(\omega_z x_k - \omega_x z_k)] =$$

$$= \underbrace{\sum m_k (y_k^2 + z_k^2)}_{J_x} \omega_x - \underbrace{\sum m_k y_k x_k}_{J_{xy}} \omega_y - \underbrace{\sum m_k x_k z_k}_{J_{xz}} \omega_z$$

$$\begin{cases} K_x = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ K_y = -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z \\ K_z = -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z \end{cases}$$

В дальнейшем будем полагать, что xyz – главные оси

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$$

$$K_x = J_x \omega_x \; ; \; K_y = J_y \omega_y \; ; \; K_z = J_z \omega_z$$

39. Динамические и кинематические уравнения Эйлера

Для описания сферического движения твёрдого тела используем теорему об изменении кинетического момента в абсолютном движении.

$$\frac{d\bar K_0}{dt} = \bar L_0^{(e)} \quad (1)$$

используем ф-лу Бура:

$$\frac{d\bar K_0}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar K_0}{dt} + \bar\omega \times \bar K_0$$

$$\bar L_0^{(e)} = \sum M(\bar F_k^{(e)}) = \bar L_0 \quad (2)$$

$$\frac{\tilde{d}\bar K_0}{dt} + \bar\omega \times \bar K_0 = \bar L_0 \quad (3)$$

если x, y, z - подвижные оси являются главными

$$K_x = J_x \omega_x \ ; \ K_y = J_y \omega_y \ ; \ K_z = J_z \omega_z$$

$$\bar\omega \times \bar K_0 = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x\omega_x & J_y\omega_y & J_z\omega_z \end{vmatrix}$$

Спроецируем (3) на ось x:

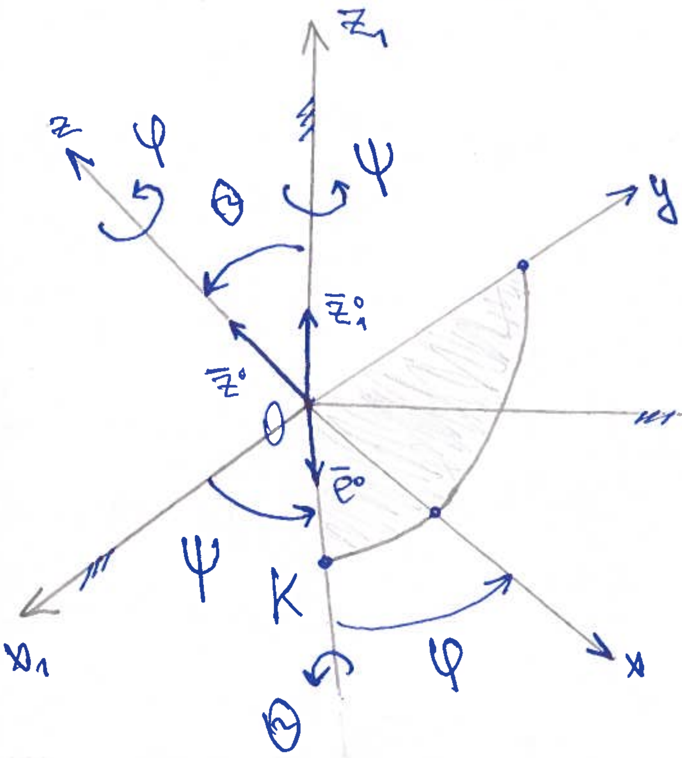
$$\frac{d}{dt}(J_x\omega_x) + J_z\omega_y\omega_z - J_y\omega_y\omega_z = L_x$$

$$J_x = const$$

$$\begin{cases} J_x \dfrac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = L_x \\ J_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z = L_y \\ J_z \dfrac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = L_z \end{cases} \quad (4)$$

(4) - динамические уравнения Эйлера

Кинематические уравнения Эйлера



ОК - линия узлов

ψ - угол прецессии

φ - угол собственного вращения

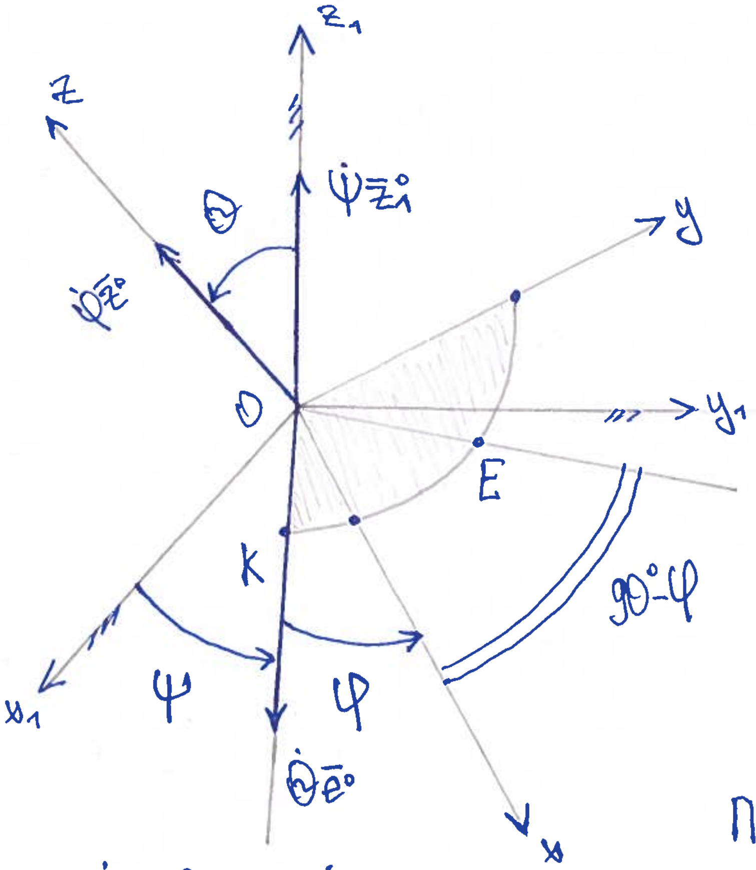
θ - угол нутации

$$\bar\omega = \dot\psi \bar z_1^\circ + \dot\theta \bar e^\circ + \dot\varphi \cdot \bar z^\circ$$

Определим

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$

$OE \perp OK$



$\text{Пр}_x(\dot\psi \bar z_1^\circ) = \dot\psi \sin\theta \cos(90^\circ - \varphi) =$

$= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi$

$\text{Пр}_x(\dot\theta \bar e^\circ) = \dot\theta \cos\varphi$

$\text{Пр}_x(\dot\varphi \bar z^\circ) = 0$

$\underline{\omega_x = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi}$

$\text{Пр}_y(\dot\psi \bar z_1^\circ) = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi$

$\text{Пр}_y(\dot\theta \bar e^\circ) = -\dot\theta \sin\varphi$

$\text{Пр}_y(\dot\varphi \bar z^\circ) = 0$

$\underline{\omega_y = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi}$

$\text{Пр}_z(\dot\psi \bar z_1^\circ) = \dot\psi \cos\theta$

$\text{Пр}_z(\dot\theta \bar e^\circ) = 0$

$\text{Пр}_z(\dot\varphi \bar z^\circ) = \dot\varphi$

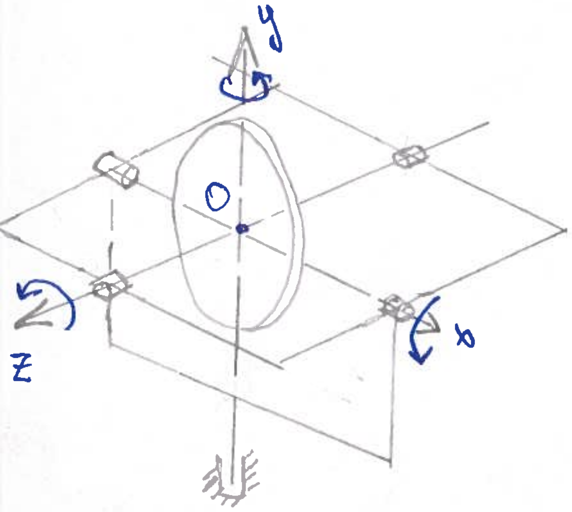
$\underline{\omega_z = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi}$

$$\begin{cases} \omega_x = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi \\ \omega_y = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi \quad (5) \\ \omega_z = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi \end{cases}$$

(5) - Кинематические ур-ния Эйлера

40. Основные допущения приближенной теории гироскопа

Гироскоп - симметричное твёрдое тело, совершающее движение вокруг неподвижной точки, расположенной на оси симметрии.



3-х степенной гироскоп
20 000 - 50000 об./мин

$$\dot{\varphi} \gg \dot{\Theta}$$

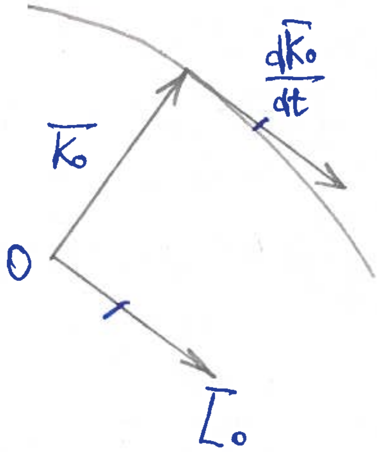
$$\dot{\varphi} \gg \dot{\psi}$$

$$\overline{\omega} = \underbrace{\cancel{\dot{\psi}}}_{\sim 0}\overline{K}_1 + \underbrace{\cancel{\dot{\Theta}}}_{\sim 0}\overline{e} + \dot{\varphi}\overline{k} = \dot{\varphi}\overline{k}$$

$$\omega = \omega_z = \dot{\varphi} \quad \omega_x = \omega_y = 0$$

$\overline{K}_0 = \overline{K}_z = J_z \omega_z \overline{k}$; $\overline{K}_z = \overline{H}$ - собственный кинетический момент

41. Особенности движения оси гироскопа. Теорема Резаля. Правило прецессий



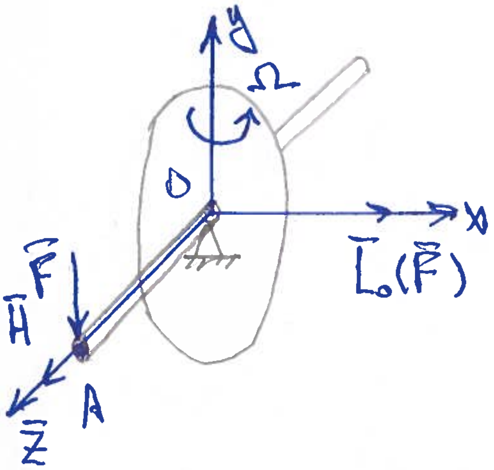
Теорема Резаля

$$\overline{K}_0 = \overline{H}$$

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \frac{d\overline{H}}{dt} = \overline{U}_H = \overline{L}_0$$

(Скорость конца вектора кинетического момента равна главному моменту внешних сил)

Особенности движения оси гироскопа



1) Нет внеш. воздействия

$\bar{L}_o = 0$, то $\bar{\vartheta}_H = 0$ (по Тh. Резаля)

$\bar{H} = const$

2) Есть внеш. воздействие.

Момент лежит на оси z

$\bar{L}_o \neq 0$ $\bar{L}_o \uparrow\uparrow z$

$\bar{H}$ изменяется только по модулю

3) Гироскоп не вращ. вокруг оси z

$\omega_z = 0$ $\bar{H} = 0$

под действием силы $\bar{F}$ начнется вращение вокруг Ox.

4) Гироскоп вращ. вокруг Oz, есть внеш. возд.

$\omega_z \neq 0$ $\bar{H} \neq 0$

$|\bar{L}_o| = OA \cdot F \to \Omega$ углов. скорость вокруг оси y

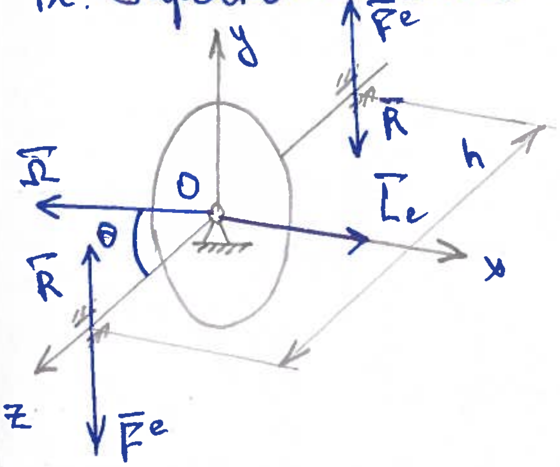
$\bar{U}_H = \bar{L}_o(\bar{F})$

$$\boxed{\bar{\Omega} \times \bar{H} = \bar{L}_o}$$

Правило прецессии (Ж):

Если к вращающемуся вокруг оси гироскопу приложить внешние силы, создающие момент сил относительно его неподвижной точки, то та часть оси гироскопа, по которой направлен кинетический момент, начнет прецессировать в направлении векторного момента этих сил.

42. Гироскопический момент. Правило Жуковского.



Вынужденная прецессия гироскопа

$$\bar{\Omega} \times \bar{H} = \bar{U}_H = \bar{L}_0^{(e)}$$

$$F^e = \frac{L_0^e}{h}$$

$$L = Rh$$

$$\bar{L} = -\bar{L}_e$$

При создании вынужденной прецессии гироскопа возникает гироскопический момент

$$\bar{L}^{(e)} + \bar{L}^{ин.} = 0$$

$$\bar{L}^{ин} = -\bar{L}^{(e)}$$

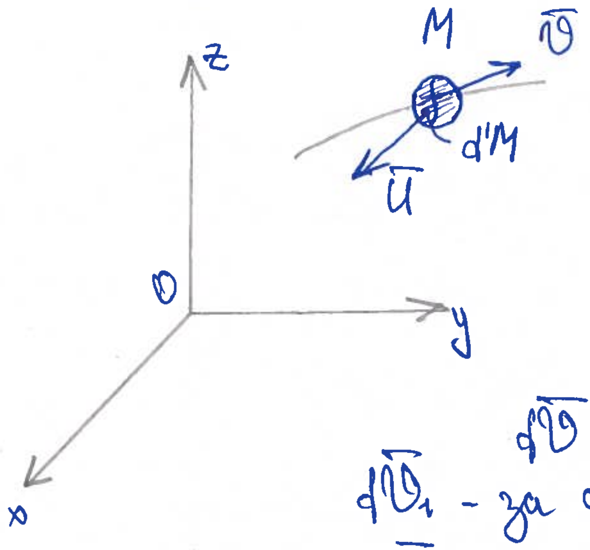
$$\bar{L}_r = -\bar{L}^{(e)} = -(\bar{\Omega} \times \bar{H}) = \bar{H} \times \bar{\Omega} = J_z \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\Omega})$$

$\boxed{L_r = J_z \cdot \omega \cdot \Omega \sin \Theta}$ – ф-ла Жуковского

Правило Жуковского

Если гироскоп вынужденно прецессирует возникает гироскопическая пара сил, которая стремится совместить ось вращения с осью прецессии так, что при мысленном совмещении вращение происходит в одну сторону

43. Движение точки переменной массы. Уравнение Мещерского. 1-я задача Циолковского.



$\bar{V}$ изменяется под действием силы $\bar{F}$ ($M = const$)

и изменяется за счет отделения $d'M$ при условии ($\bar{F} = 0$)

$$d\bar{V} = d\bar{V}_1 + d\bar{V}_2 \quad (1)$$

$d\bar{V}_1$ - за счёт $\bar{F}$ ($M = const$)

$d\bar{V}_2$ - за счёт $d'M$ ($\bar{F} = 0$)

$$d\bar{V}_1 = \frac{\bar{F}}{M} dt \quad (2)$$

Рассм. 2 мом. времени t и $t + \Delta t$:

$$\bar{Q}_t = \bar{Q}_{t+\Delta t} \quad (3)$$

в мом. t : $\bar{Q}_t = M \cdot \bar{V}$

в мом $t + \Delta t$: $(M - d'M) \to \bar{V} + d\bar{V}_2$

$d'M \to \bar{U}$

$$\bar{Q}_{t+\Delta t} = (M - d'M)(\bar{V} + d\bar{V}_2) + d'M \cdot \bar{U}$$

$$M\bar{V} = (M - d'M)(\bar{V} + d\bar{V}_2) + d'M\bar{U}$$

$$M\bar{V} = M\bar{V} - d'M\bar{V} - d'M\bar{V}_2 + M\bar{V}_2 + d'M\bar{U}$$

$$d\bar{V}_2 = -\frac{d'M}{M}(\bar{U} - \bar{V})$$

$$dM < 0$$

$$d\bar{V}_2 = \frac{dM}{M}(\bar{U} - \bar{V}) \quad (4)$$

$$d\bar{V} = \frac{\bar{F}}{M} dt + \frac{dM}{M}(\bar{U} - \bar{V})$$

$$\boxed{M\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} + \frac{dM}{dt}(\bar{U} - \bar{V})} \quad (5)$$

(5) - уравнение Мещерского

$U = \overline{\vartheta}_e + \overline{\vartheta}_r$; $\overline{\vartheta}_e = \overline{\vartheta}$

$\overline{\vartheta}_r = \overline{U} - \overline{\vartheta}$

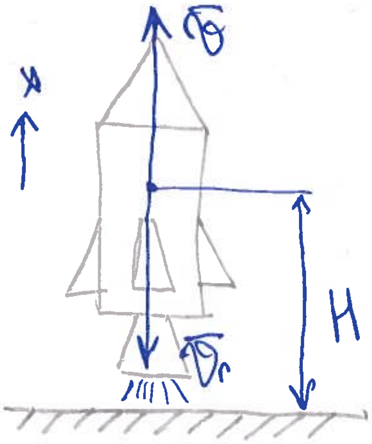
$$M\frac{d\overline{\vartheta}}{dt} = \overline{F} + \underbrace{\frac{dM}{dt}\overline{\vartheta}_r}_{\overline{\Phi}_r}$$

$\overline{\Phi}_r$ – реактивная сила

$\frac{dM}{dt}$ – скорость изменения массы

$$M\frac{d\overline{\vartheta}}{dt} = \overline{F} + \overline{\Phi}_r \quad (6)$$

I задача К.Э. Циолковского



$\overline{F} = 0$ – безвоздушное пространство

считаем, что $\overline{\vartheta}_r = const$ и противоположна $\overline{\vartheta}$

$Пр_x(6)$: $M\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{dM}{dt}\vartheta_r$

$$\frac{1}{\vartheta_r}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta = -\int_{M_н}^{M_к}\frac{dM}{M}$$; ϑ_0 – нач. скорость

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_r \ln\frac{M_н}{M_к}$$

$$M_н = M_к + m$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 + \vartheta_r \ln\left(1 + \frac{m}{M_к}\right) = \underline{\vartheta_0 + \vartheta_r \ln(1 + z)} \quad (7)$$

(7) – формула Циолковского; z – число Циолковского

$$\vartheta_1 = \frac{dx}{dt} = \vartheta_0 + \vartheta_r \ln\frac{M_н}{M_к}$$

$$x = \vartheta_0 t + \vartheta_r \int_0^t \ln\frac{M_н}{M}dt$$

$$\begin{cases} M = M_н(1 - \alpha t) \\ M = M_н \cdot e^{-\beta t} \end{cases}$$ – различные законы расхода топлива

Работу выполнил: Скареднов М.А.
РК5-33Б

Отдельная благодарность Цымбалистому Н.И.
РК5-33Б
за содействие в составлении работы

Всем успешной
сессии!