USANDO OPENMP

Matrices, Monte Carlo Needles y Dartboard

Índice

1. Resumen	3
2. Introducción	4
3. Marco conceptual	5
3.1. Teoría de los algoritmos	
3.1.1. Monte Carlo Needles	5
3.1.2. Dartboard	5
3.1.3. Matrices	6
3.1.4 Open MP	6
3.2. Características de las máquinas	7
3.2.1 Máquina de Valentín	7
3.3. Desarrollo	8
3.3.1. Implementación con Hilos (Pthread)	8
4. Pruebas	9
4.1. Pruebas Valentin	9
4.1.1. Monte Carlo Needles	9
4.1.1.1 Secuencial	9
4.1.1.2. Hilos	9
4.1.1.2.1 Dos hilos	9
4.1.1.2.2 Cuatro hilos.	10
4.1.1.2.3. Ocho hilos.	10
4.1.1.2.4. Dieciséis hilos.	11
4.1.2. Dartboard	11
4.1.2.1. Secuencial	11
4.1.2.2. Hilos	12
4.1.2.2.1 Dos hilos.	12
4.1.2.2.2 Cuatro hilos.	12
4.1.2.2.3. Ocho hilos.	13
4.1.2.2.4. Dieciséis hilos.	13
4.1.3. Matrices	14
4.1.2.1. Secuencial	14
4.1.3.1 Hilos	14
4.1.3.1.1 Dos hilos	14
4.1.3.1.2 Cuatro hilos	15
4.1.3.1.3 Ocho hilos	15
4.1.3.1.4 Dieciséis hilos	16
5. Resultados (Comparación entre Hilos)	17
5.1. Máquina Valentin	17
5.1.1. Monte Carlo Needles	17
5.1.2. Dartboard	17
5.1.3. Matrices	18
5. Conclusiones	19
7. Bibliografía	20

1. Resumen

El presente informe aborda la implementación de la paralelización con la librería OpenMP para los algoritmos de Monte Carlo Needles y Dartboard, así como el caso de estudio inicial de las Matrices N. Se llevan a cabo implementaciones con dos, cuatro, ocho y dieciséis hilos y optimizados por compilación en un entorno Linux.

2. Introducción

En la era actual de la informática y la computación de alto rendimiento, la búsqueda constante de soluciones eficientes es esencial para abordar problemas computacionales complejos. La estimación del valor de π (pi) es un problema clásico en matemáticas y ciencias de la computación que ha sido abordado de diversas formas a lo largo de la historia. En este informe, se explora la aplicación de técnicas de paralelización en el contexto de dos algoritmos de estimación de π , Monte Carlo Needles y Dartboard.

El objetivo principal de este estudio es analizar y comparar cuatro enfoques diferentes para calcular π : una implementación secuencial estándar, una implementación basada en hilos (utilizando la librería Pthread), una implementación con forks (procesos) y una optimización por compilación en un entorno Linux. Estos algoritmos aprovechan la aleatoriedad y la estadística para obtener aproximaciones numéricas del valor de π .

A medida que los sistemas computacionales modernos incorporan múltiples núcleos de CPU y la paralelización se convierte en una estrategia clave para la mejora del rendimiento, es fundamental comprender cómo se pueden aplicar estas técnicas a problemas matemáticos complejos como la estimación de π . Este informe proporcionará una visión detallada de las implementaciones y resultados, permitiendo una evaluación crítica de los beneficios y desafíos asociados con cada enfoque.

3. Marco conceptual

3.1. Teoría de los algoritmos

3.1.1. Monte Carlo Needles

Durante la Guerra Civil Americana, el Capitán C.O. Fox se encontraba recuperándose de una herida en un hospital militar. Para pasar el tiempo, arrojó una serie de agujas idénticas de manera aleatoria sobre un tablero en el que previamente había dibujado una serie de líneas paralelas, separadas por la longitud de una aguja. Contó el número de lanzamientos y el número de aciertos, es decir, las instancias en las que una aguja tocó o intersectó una línea. Después de 1100 lanzamientos, el Capitán había determinado con dos decimales. ¿Cómo es posible? En primer lugar, parece que fue el Conde de Buffon (1707-1788) quien examinó este tipo de experimento y en cuyo honor ahora se conoce como el problema de la aguja de Buffon. En 1777, Buffon demostró que la relación entre los aciertos y los lanzamientos era de 2:pi, o dicho de otra manera, que la probabilidad de que una aguja lanzada al azar sobre el área terminara descansando sobre una de las líneas era de aproximadamente 2/pi ≈ 63.7%. Con este conocimiento, Fox pudo calcular pi al duplicar el número de lanzamientos y dividirlo por el número de aciertos.

Lo interesante del problema de la aguja es que establece una conexión entre el "pi geométrico" y el área muy diferente de las probabilidades. Existes otras relaciones similares entre π y la probabilidad, a partir de las cuales se derivan otros métodos para calcular pi. Estos métodos se conocen de manera informativa como métodos de Monte Carlo.

3.1.2. Dartboard

Consideremos el área del tablero de dardos circular. Tiene un radio de uno, por lo que su área es π . El área del trozo cuadrado de madera es 4 (2 x 2). La proporción del área del círculo al área del cuadrado es π /4. Si lanzamos un montón de dardos y los dejamos caer al azar sobre

el trozo cuadrado de madera, algunos también caerán en el tablero de dardos. La cantidad de dardos que caen en el tablero de dardos, dividida por la cantidad total que lanzamos, estará en la proporción descrita anteriormente ($\pi/4$). Multiplicamos por 4 y obtenemos π .

3.1.3. Matrices

La multiplicación de matrices, aunque aparentemente sencilla, plantea desafíos significativos cuando se trata de matrices de gran tamaño. La elección de la estrategia de programación adecuada es crucial para lograr la máxima eficiencia computacional. Este informe se propone analizar y comparar detenidamente estos dos enfoques, con el objetivo de brindar una comprensión profunda de sus ventajas, desventajas y aplicaciones ideales.

3.1.4 Open MP

OpenMP (Open Multi-Processing) es una interfaz de programación de aplicaciones (API) para la programación paralela en sistemas con memoria compartida. Su objetivo principal es facilitar la escritura de programas que puedan aprovechar eficazmente los múltiples núcleos de CPU en máquinas multiprocesadoras y en clústeres de cómputo.

- Programación paralela: OpenMP se utiliza para escribir programas paralelos que pueden descomponer tareas en subprocesos o hilos que se ejecutan simultáneamente en múltiples núcleos de CPU. Esto mejora el rendimiento y reduce el tiempo de ejecución de aplicaciones intensivas en cómputo.
- Memoria compartida: OpenMP se adapta mejor a sistemas con memoria compartida, donde múltiples hilos pueden acceder a la misma memoria. Esto facilita la comunicación y la sincronización entre los hilos, lo que es esencial para la programación paralela.
- Directivas y pragmas: OpenMP utiliza directivas y pragmas en el código fuente para identificar secciones que pueden ejecutarse en paralelo. Estas directivas proporcionan instrucciones al compilador sobre cómo dividir y asignar tareas a los hilos.

- Modelo de programación fácil de usar: OpenMP está diseñado para ser relativamente fácil de aprender y usar en comparación con otras técnicas de programación paralela, como la programación con hilos nativos o la programación de paso de mensajes. Esto hace que sea más accesible para programadores que desean paralelizar sus aplicaciones.
- Portabilidad: OpenMP es compatible con una variedad de lenguajes de programación, como C, C++, Fortran, y más. Esto permite a los desarrolladores escribir programas paralelos independientemente del lenguaje de programación y ejecutarlos en diferentes plataformas.
- Escalabilidad: OpenMP facilita la escalabilidad de las aplicaciones, lo que significa
 que los programas pueden ejecutarse de manera eficiente en sistemas con diferentes
 cantidades de núcleos de CPU, desde máquinas de un solo núcleo hasta clústeres de
 alto rendimiento.

En resumen, OpenMP es una API que simplifica la programación paralela en sistemas con memoria compartida, permitiendo a los desarrolladores escribir código que aproveche eficazmente el potencial de cómputo de múltiples núcleos de CPU. Facilita la creación de aplicaciones paralelas portátiles y escalables, lo que es especialmente útil en entornos de cómputo intensivo y científico.

3.2. Características de las máquinas

3.2.1 Máquina de Valentín

Característica	Especificación
Procesador	Procesador Intel(R) Core(TM) i5-1035G1 CPU @ 1.00GHz, 1190 Mhz,
Sistema Operativo	ubuntu-22.04.3-live-server-amd64
Número de	4 procesadores principales,

3.3. Desarrollo

3.3.1. Implementación con Hilos (Pthread)

- Se diseñaron versiones paralelizadas de los algoritmos uteilizando la librería Pthread para gestionar hilos.
- Se analizó y se aplicó paralelismo en las partes adecuadas de los algoritmos para mejorar el rendimiento.
- Se llevaron a cabo pruebas para evaluar el impacto del paralelismo en el cálculo de π .

4. Pruebas

4.1. Pruebas Valentin

4.1.1. Monte Carlo Needles

4.1.1.1 Secuencial

Tamaño (N)	1000	20000	3000000	50000000	80000000
1	0,000232	0,004203	0,826938	13,810869	22,837602
2	0,000235	0,005992	0,882839	14,140601	23,161637
3	0,000342	0,005799	0,820258	14,089547	22,159448
4	0,000485	0,005318	0,843579	13,397275	22,346419
5	0,000331	0,005201	0,841217	14,046221	22,619379
6	0,000240	0,005159	0,837215	13,838018	22,431387
7	0,000234	0,004606	0,833834	13,719032	21,841383
8	0,000232	0,003865	0,862915	13,864778	22,231288
9	0,000340	0,004376	0,817767	14,129715	22,399374
10	0,000330	0,006505	0,830583	13,867679	21,611876
Promedio	0,0003001	0,0051024	0,8397145	13,8903735	22,363979

4.1.1.2. Hilos

4.1.1.2.1 Dos hilos

2 Hilos						
Tamaño (N)	1000	20000	3000000	50000000	80000000	
1	0,000266	0,001703	0,079998	1,288919	2,271989	
2	0,000249	0,001174	0,133277	1,385991	2,442158	
3	0,000248	0,002104	0,176023	1,555983	2,120614	
4	0,000746	0,000237	0,184532	1,665308	2,149375	
5	0,000255	0,001502	0,156002	1,286180	2,100736	
6	0,000341	0,002407	0,113166	1,339926	2,085131	
7	0,000460	0,001544	0,120193	1,330143	2,164840	
8	0,000249	0,001426	0,195992	1,368703	2,066505	
9	0,000245	0,001358	0,136466	1,289485	2,327995	

10	0,000253	0,002287	0,170917	1,402370	3,544507
Promedio	0,000331	0,001574	0,146657	1,391301	2,327385
Speedup	0,9060990338	3,241265405	5,725719129	9,983731412	9,609058793

4.1.1.2.2 Cuatro hilos.

	4 Hilos					
Tamaño (N)	1000	20000	3000000	50000000	80000000	
1	0,004428	0,001668	0,095984	1,751131	2,308445	
2	0,000187	0,000511	0,106388	1,431980	2,117799	
3	0,000492	0,001972	0,156274	1,396489	2,046184	
4	0,000492	0,000799	0,100211	1,400372	2,115997	
5	0,000493	0,001818	0,137388	1,336633	2,365804	
6	0,000493	0,001463	0,154295	1,312187	2,068203	
7	0,000503	0,001409	0,122917	1,356881	2,069060	
8	0,000474	0,000596	0,134481	1,416072	2,041281	
9	0,001090	0,002161	0,099415	1,317487	2,092324	
10	0,000857	0,001657	0,104319	1,372688	2,084508	
Promedio	0,000951	0,001405	0,121167	1,409192	2,130961	
Speedup	0,3155957514	3,63056781	6,930212962	9,856977261	10,49478829	

4.1.1.2.3. Ocho hilos.

8 Hilos					
Tamaño (N)	1000	20000	3000000	50000000	80000000
1	0,001340	0,003005	0,089815	1,338378	2,028026
2	0,001623	0,002168	0,104504	1,585536	2,160177
3	0,000930	0,001121	0,103919	1,320762	2,000408
4	0,000931	0,002786	0,102116	1,424785	2,171325
5	0,001703	0,002899	0,116609	1,377235	2,072333
6	0,001110	0,000997	0,102316	1,346517	2,024968
7	0,000957	0,001152	0,108143	1,377248	2,030620
8	0,001849	0,003560	0,108588	1,349368	2,059700
9	0,001155	0,002928	0,104058	1,305446	2,097528
10	0,001547	0,002604	0,090602	1,309541	2,052912
Promedio	0,001315	0,002322	0,103067	1,373482	2,069800

Speedup	0,2282997337	2,197416021	8,147268282	10,1132578	10,80490025
	,	,	,	,	,

4.1.1.2.4. Dieciséis hilos.

	16 Hilos					
Tamaño (N)	1000	20000	3000000	5000000	80000000	
1	0,005131	0,013863	0,097919	1,732677	2,100099	
2	0,001861	0,003868	0,094956	1,417411	2,055992	
3	0,005577	0,003863	0,100352	1,300318	2,010630	
4	0,002539	0,003205	0,088929	1,281775	2,041573	
5	0,001933	0,003893	0,098568	1,302436	2,029247	
6	0,001888	0,007873	0,108410	1,336710	2,079356	
7	0,002895	0,002861	0,110434	1,583966	2,070649	
8	0,003085	0,001868	0,105318	1,330128	2,074157	
9	0,002576	0,003749	0,098719	1,339853	2,095991	
10	0,001875	0,004014	0,103562	1,336642	2,041646	
Promedio	0,002936	0,004906	0,100717	1,396192	2,059934	
Speedup	0,1022138965	1,040096215	8,337390919	9,948758824	10,85664847	

4.1.2. Dartboard

4.1.2.1. Secuencial

Tamaño (N)	1000	20000	3000000	50000000	80000000
1	0,00004	0,002176	0,451954	7,197088	11,573339
2	0,000116	0,002019	0,430674	7,28403	11,647116
3	0,000221	0,002332	0,432985	7,328805	11,619777
4	0,000116	0,002882	0,45411	7,235294	11,631635
5	0,000116	0,002238	0,446407	7,244616	11,608809
6	0,000125	0,00365	0,431842	7,245642	12,27856
7	0,000123	0,002214	0,414732	7,259655	12,101326
8	0,000126	0,002453	0,429893	7,265385	10,408419
9	0,000143	0,002767	0,483627	7,753275	11,75775
10	0,000135	0,002345	0,44983	7,290369	11,744993
Promedio	0,0001261	0,0025076	0,4426054	7,3104159	11,637172 4

4.1.2.2. Hilos

4.1.2.2.1 Dos hilos.

	2 Hilos					
Tamaño (N)	1000	20000	3000000	50000000	80000000	
1	0,000321	0,001923	0,044901	0,688288	1,594339	
2	0,000255	0,000879	0,043234	0,708623	1,131986	
3	0,000221	0,001791	0,041219	0,706661	1,123399	
4	0,000212	0,000564	0,041930	0,709444	1,192782	
5	0,001104	0,000204	0,040439	0,696126	1,122001	
6	0,001036	0,001638	0,044283	0,731993	1,141548	
7	0,000213	0,001196	0,042597	0,688154	1,114830	
8	0,000214	0,000857	0,040325	0,699197	1,101549	
9	0,000216	0,001606	0,040278	0,682012	1,094407	
10	0,000241	0,001570	0,048177	0,761687	1,125295	
Promedio	0,000403	0,001223	0,042738	0,707219	1,174214	
Speedup	0,3126704686	2,050703304	10,35617701	10,33685615	9,91060945	

4.1.2.2.2 Cuatro hilos.

	4 Hilos						
Tamaño (N)	1000	20000	3000000	5000000	80000000		
1	0,000708	0,009583	0,054524	0,913528	1,387997		
2	0,000540	0,001074	0,052753	0,736376	1,177565		
3	0,000564	0,000648	0,046453	0,763972	1,160481		
4	0,000451	0,001551	0,056531	0,800941	1,116238		
5	0,000474	0,000930	0,036408	0,696028	1,116024		
6	0,000476	0,001821	0,036581	0,725513	1,116648		
7	0,001325	0,001828	0,044117	0,708713	1,096550		
8	0,000455	0,001215	0,056552	0,915988	1,140984		
9	0,000457	0,000590	0,037433	0,890304	1,152399		
10	0,001449	0,000560	0,044659	0,705622	1,139295		
Promedio	0,000690	0,001980	0,046601	0,785699	1,160418		
Speedup	0,1827801131	1,266464646	9,497745761	9,304352624	10,02843061		

4.1.2.2.3. Ocho hilos.

	8 Hilos						
Tamaño (N)	1000	20000	3000000	50000000	80000000		
1	0,000648	0,003957	0,041521	0,658377	1,384502		
2	0,000883	0,001646	0,057648	0,706609	1,057682		
3	0,001651	0,001485	0,044149	0,701623	1,099660		
4	0,000955	0,001747	0,043699	0,716518	1,106665		
5	0,001013	0,002214	0,042449	0,788380	1,248308		
6	0,000906	0,001739	0,037461	0,760023	1,172379		
7	0,001230	0,001369	0,047085	0,787779	1,141774		
8	0,000881	0,001316	0,041496	0,722599	1,068200		
9	0,000882	0,001521	0,038207	0,700385	1,069354		
10	0,000893	0,002150	0,048505	0,718410	1,067980		
Promedio	0,000994	0,001914	0,044222	0,726070	1,141650		
Speedup	0,1268356468	1,309862098	10,00871512	10,06846844	10,19328894		

4.1.2.2.4. Dieciséis hilos.

	16 Hilos						
Tamaño (N)	1000	20000	3000000	50000000	80000000		
1	0,003992	0,006947	0,056213	0,902684	1,243274		
2	0,001839	0,003213	0,057516	0,720373	1,090798		
3	0,002482	0,002473	0,072851	0,717737	1,137844		
4	0,019645	0,039890	0,087408	0,731995	1,099870		
5	0,001800	0,003062	0,039848	0,683130	1,088749		
6	0,003731	0,002080	0,036694	0,769585	1,090126		
7	0,002419	0,003157	0,038091	0,876820	1,152182		
8	0,006454	0,003186	0,065743	0,713733	1,111332		
9	0,002655	0,002431	0,068148	0,714274	1,113312		
10	0,001810	0,003289	0,061506	0,855921	1,429291		
Promedio	0,004683	0,006973	0,058402	0,768625	1,155678		
Speedup	0,02692890854	0,3596259752	7,578626001	9,511028132	10,06956472		

4.1.3. Matrices

4.1.2.1. Secuencial

Tamaño (N)	100	500	800	900	1000
1	0,014757	0,554282	3,155554	4,781991	7,394309
2	0,003828	0,659580	3,454550	4,362846	6,212509
3	0,004184	0,708793	2,793107	4,284970	6,724569
4	0,004727	0,730302	3,473376	4,420838	6,889278
5	0,005037	0,699917	3,042622	4,323811	5,963884
6	0,003428	0,650663	2,894060	4,277415	5,822118
7	0,004258	0,615590	2,908209	4,104324	6,159533
8	0,003581	0,653073	2,971956	4,221505	6,444328
9	0,003416	0,633322	3,106084	4,347475	6,510886
10	0,003429	0,668069	3,154142	4,245528	5,915940
Promedio	0,005065	0,657359	3,095366	4,337070	6,403735

4.1.3.1 Hilos

4.1.3.1.1 Dos hilos

2 Hilos						
Tamaño (N)	100	500	800	900	1000	
1	0,030526	1,135273	4,765581	8,258104	10,376643	
2	0,004993	0,335946	1,039995	1,359996	2,039452	
3	0,003326	0,269405	1,012001	1,443999	2,142723	
4	0,000543	0,257108	1,023997	1,429964	1,952022	
5	0,004011	0,264000	1,083620	1,380033	2,133580	
6	0,004955	0,235374	0,992036	1,387982	2,503981	
7	0,003999	0,268917	1,083986	1,395974	2,016001	
8	0,003993	0,260964	1,029898	1,430173	2,027358	
9	0,003995	0,295084	1,049586	1,467982	2,120002	
10	0,004000	0,279989	1,035972	1,395999	2,011906	
Promedio	0,006434	0,360206	1,411667	2,095021	2,932367	

Speedup 0,7871341757 1,824953221 2,192702359 2,070180265 2,183811179	Speedup	0,7871341757	1,824953221	2,192702359	2,070180265	2,183811179
--	---------	--------------	-------------	-------------	-------------	-------------

4.1.3.1.2 Cuatro hilos

	4 Hilos						
Tamaño (N)	100	500	800	900	1000		
1	0,003893	0,203990	1,533671	1,400882	2,171527		
2	0,001217	0,248002	1,020309	1,399575	2,056002		
3	0,004047	0,268441	1,062204	1,400905	2,001002		
4	0,002532	0,274292	1,010772	1,436825	2,021420		
5	0,002468	0,276667	1,164497	1,624008	2,289941		
6	0,004372	0,269203	1,088213	1,528012	1,986944		
7	0,001489	0,235996	1,034954	1,398998	2,015982		
8	0,001184	0,259982	1,119980	1,403999	2,052010		
9	0,004133	0,297795	1,017423	1,390499	1,947945		
10	0,004373	0,251994	1,087981	1,464030	2,067761		
Promedio	0,002971	0,258636	1,114000	1,444773	2,061053		
Speedup	1,704759661	2,54163609	2,778604029	3,00190369	3,107020614		

4.1.3.1.3 Ocho hilos

8 Hilos							
Tamaño (N)	100	500	800	900	1000		
1	0,294030	1,020001	1,516004	2,178184	20,995205		
2	0,005057	0,263862	1,092005	1,394064	2,120825		
3	21,343988	0,001671	0,283263	1,017297	1,489749		
4	2,172001	21,066142	0,005826	0,235998	0,954305		
5	1,348001	2,000008	20,176032	0,001260	0,260767		
6	1,031998	1,400022	2,051095	20,917965	0,002331		
7	0,271976	1,008002	1,448005	2,068111	20,452834		
8	0,003995	0,259999	1,020000	1,412012	2,021312		
9	20,636975	0,004924	0,268063	1,052021	1,432020		
10	2,014385	20,552055	0,000937	0,256001	1,028000		

Promedio	4,912241	4,757669	2,786123	3,053291	5,075735
	0,00103099591				
Speedup	7	0,1381683247	1,110994023	1,420457426	1,261637113

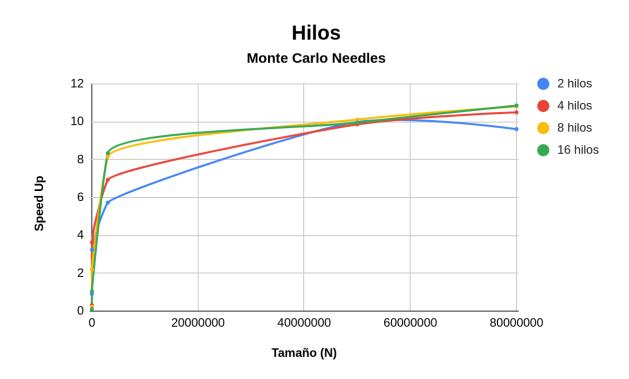
4.1.3.1.4 Dieciséis hilos

	16 Hilos						
Tamaño (N)	100	500	800	900	1000		
1	0,005007	0,231355	1,294789	1,658729	2,121667		
2	0,006815	0,294654	1,034995	1,456000	2,116008		
3	0,004572	0,254585	1,244003	1,555986	2,161926		
4	0,007953	0,271200	1,044063	1,501217	2,112009		
5	0,003996	0,345305	1,054372	1,455463	2,177379		
6	0,004250	0,279594	1,015445	1,429667	2,014133		
7	0,004671	0,291840	1,068004	1,448001	2,035998		
8	0,005522	0,278212	1,103916	1,916784	2,155976		
9	0,008027	0,269085	1,068004	1,512006	1,999997		
10	0,005120	0,280714	1,371998	1,996020	2,604001		
Promedio	0,005593	0,279654	1,129959	1,592987	2,149909		
Speedup	0,9054583162	2,350612399	2,739361582	2,722601932	2,978607099		

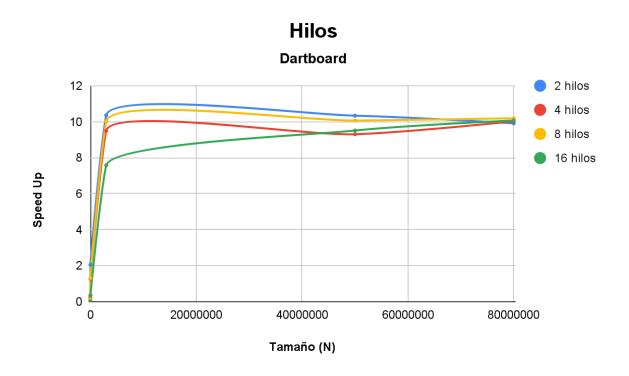
5. Resultados (Comparación entre Hilos)

5.1. Máquina Valentin

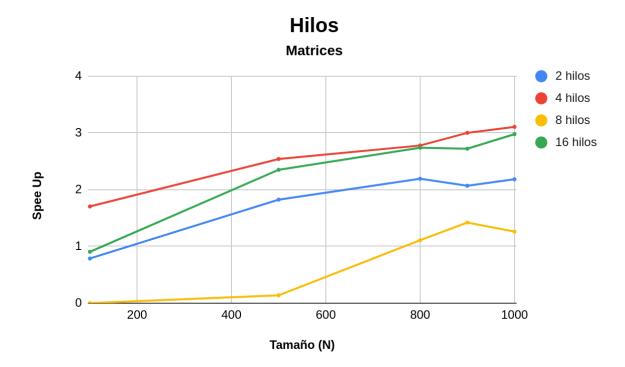
5.1.1. Monte Carlo Needles



5.1.2. Dartboard



5.1.3. Matrices



5. Conclusiones

- El tiempo de ejecución mayor está dado por la programación secuencial.
- El rendimiento del caso de estudio y los algoritmos no sigue un orden estricto sobre si la misma cantidad de hilos les funciona igual.
- Para el caso de estudio (matrices), el mejor Speed Up lo tuvo con 4 hilos.
- Para el algoritmo Dartboard, el mejor Speed Up lo tuvo con 8 hilos.
- Para el algoritmo Monte Carlo Needles, el mejor Speed Up lo tuvo con 16 hilos.

7. Bibliografía

[1] Cortéz, A. (2004). TEORÍA DE LA COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL Y TEORÍA DE.

Revista De Investigación De Sistemas E Informática, 1(1), 102-105. Recuperado de: https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/sistem/article/view/3216

[2] Montero, L. H., & Antunez, R. R. (2011, 07). Parallel programming: definitions, mechanisms

and trouble. From

https://www.researchgate.net/publication/274960405_Parallel_programming_definitions_mechanisms_and_trouble

[3] Qaz Wiki. (2020). Qaz Wiki. From

https://es.qaz.wiki/wiki/Matrix multiplication algorithm

- [4] Arm. (2023). Arm Compiler for embedded User Guide. *developer.arm.com*.

 https://developer.arm.com/documentation/100748/0620/Using-Common-Compiler-Options/Selecting-optimization-options
- [5] Wikipedia contributors. (2023). Inline expansion. *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Inline expansion
- [6] PI unleashed. (n.d.). Google Books.

https://books.google.com.co/books?id=JIG5rFH7Ge0C&pg=PA39&lpg=PA39&dq=D artboard+Method+algorithm&source=bl&ots=t76R30Q342&sig=NjguOYMc0ILqZs8 Bcz6uIpfejdc&hl=en&ei=-YzTSuutFMefkQXj9_H7Aw&sa=X&oi=book_result&ct= result&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false