

## Capítulo 11

# Filtros IIR

### 11.1 Derivación de la transformación bilineal

La transformación bilineal puede derivarse a partir de la fórmula trapezoidal de integración numérica. El filtro continuo con función de sistema

$$H_c(s) = \frac{b}{s+a} \quad (11.1)$$

es una caracterización de la ecuación diferencial

$$y'(t) + ay(t) = bx(t) \quad (11.2)$$

cuya solución es

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau, \quad (11.3)$$

donde  $y'(t)$  indica la derivada de  $y(t)$  respecto de  $t$ . La integral en (11.3) se puede aproximar por la regla trapezoidal

$$y(t) - y(t_0) = \frac{[y'(t) + y'(t_0)]}{2} (t - t_0).$$

Teniendo en cuenta (11.2),

$$y(t) - y(t_0) = [-ay(t) + bx(t) - ay(t_0) + bx(t_0)] \frac{t - t_0}{2}.$$

Notando  $t = nT$ ,  $t_0 = nT - T$ , es  $t - t_0 = T$ . Además, si  $y(nT) \equiv y[n]$ ,  $x(nT) \equiv x[n]$ , se obtiene la ecuación a diferencias

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right) y[n] - \left(1 - \frac{aT}{2}\right) y[n-1] = \frac{bT}{2} (x[n] + x[n-1]).$$

Aplicando la transformada  $Z$ ,

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right) Y(z) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right) z^{-1}Y(z) = \frac{bT}{2} (1 + z^{-1}) X(z),$$

de modo que la ecuación de sistema del filtro discreto es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{bT}{2} (1 + z^{-1})}{1 + \frac{aT}{2} - (1 - \frac{aT}{2}) z^{-1}}$$

que se puede escribir como

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + a}. \quad (11.4)$$

Comparando (11.1) con (11.4) resulta que

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}},$$

o, en otras palabras, que se mapea el plano complejo  $s$  en el plano complejo  $z$  según la *transformación bilineal*

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Aunque la derivación se obtuvo para una ecuación diferencial de primer orden, es válida en general para una ecuación diferencial de orden  $N$ .

## 11.2 Ejemplos de diseño

### EJEMPLO 11.1 Diseño de un pasabajos por invariación al impulso

El siguiente es el listado de comandos en MATLAB para diseñar un filtro IIR tipo pasabajos, con las especificaciones que se listan a continuación:

```
% Especificaciones del filtro
% Característica                pasabajos
% Tipo                          Butterworth
% banda de paso:                [0 0.5*pi]
% banda de rechazo:            [0.8*pi pi]
% Atenuación en la banda de paso: 3 db
% Atenuación en la banda de rechazo: 20 db

wp = 0.5*pi;
ws = 0.8*pi;
Rp = 3;
Rs = 20;

% ‘Traducción’ de las especificaciones para el filtro continuo.
% Elijo T arbitrariamente (pruebe a elegir otros valores de T,
% y observe que obtiene el mismo filtro discreto);
T = 0.2;
Fs = 1/T;
Wp = wp/T;
Ws = ws/T;

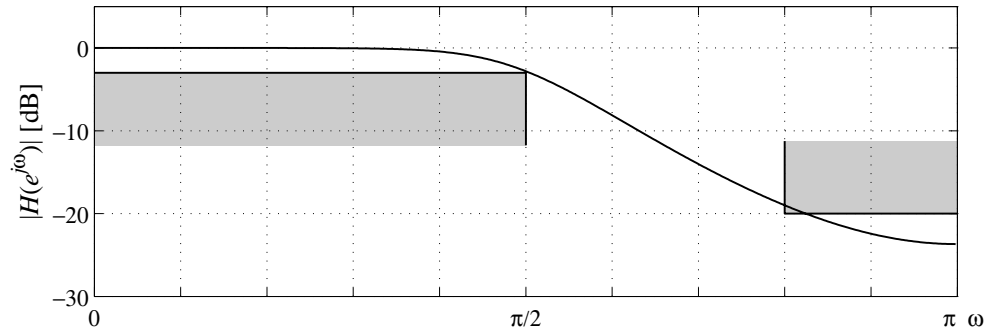
% Diseño del filtro analógico
% Estimo el orden del filtro
[N,Wn] = buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s');

% Diseño el filtro
[na,da] = butter(N,Wn,Fs);

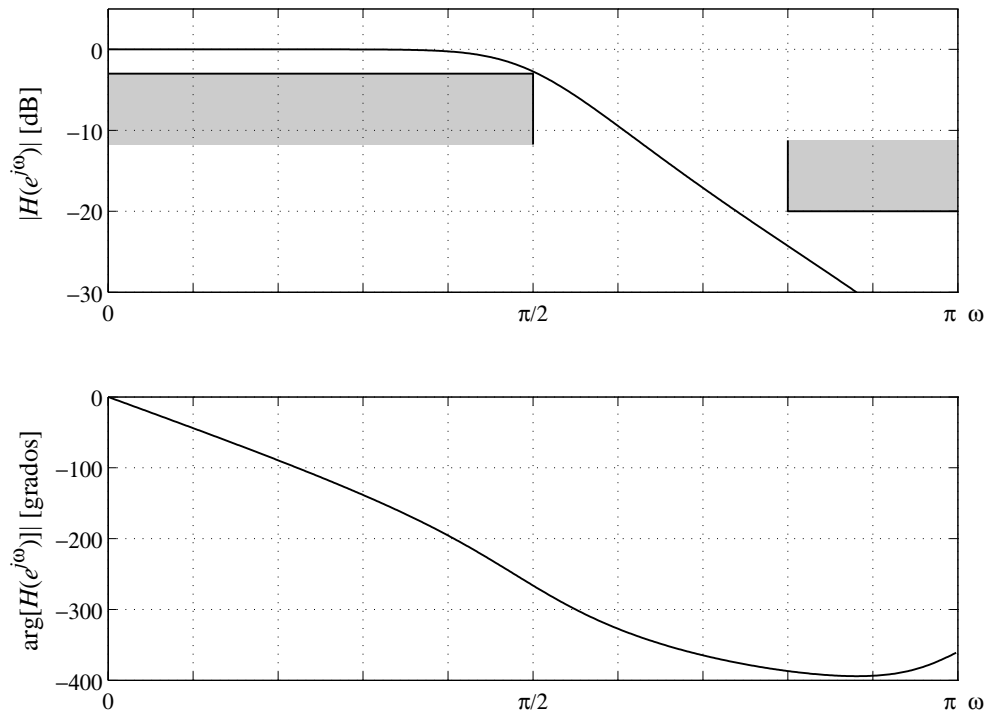
% Convierto el diseño a un filtro discreto
[nd,dd] =impinvar(na,da,Fs);

% Ploteo el filtro
freqz(nd,dd)
```

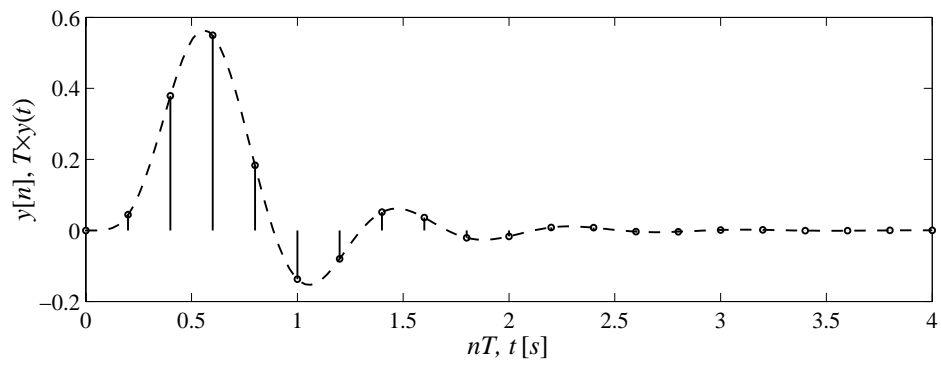
Los coeficientes de los polinomios numerador y denominador del filtro son



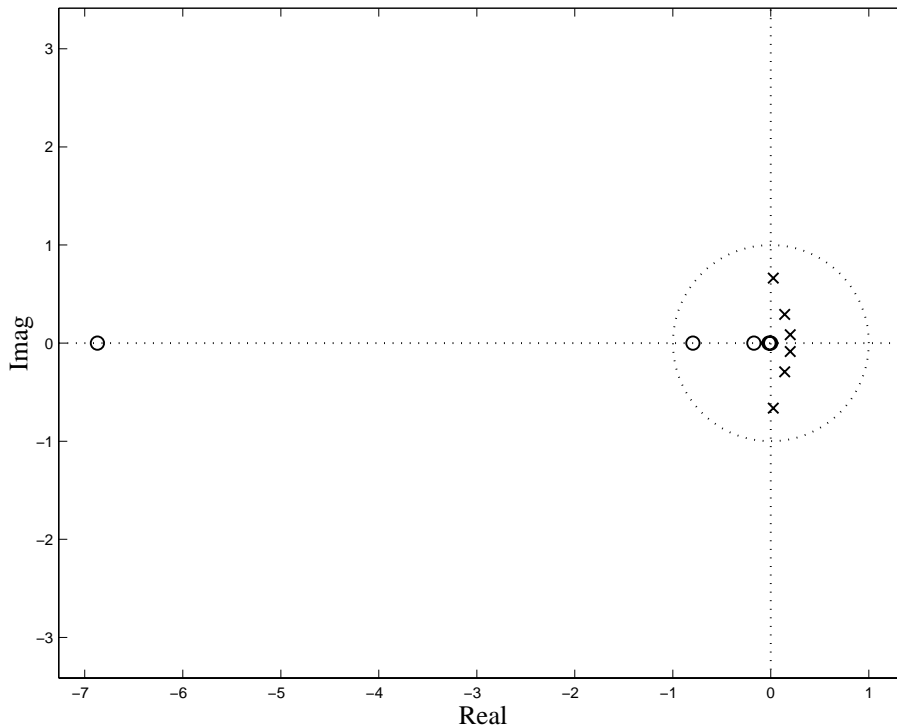
**Fig. 11.1:** Respuesta en frecuencia del filtro pasabajos (no se cumplen las especificaciones).



**Fig. 11.2:** Respuesta en frecuencia del diseño corregido.



**Fig. 11.3:** Respuesta impulsiva del filtro continuo (línea de trazos) y del filtro discreto.



**Fig. 11.4:** Diagrama de polos y ceros del sistema discreto.

```
nd = -0.0000  0.1362  0.4609  0.1703  0.0064  0.0000
dd =  1.0000 -0.6090  0.5589 -0.2267  0.0552 -0.0059
```

La gráfica de la respuesta en frecuencia en módulo y fase se observa en la Fig. 11.1. El diseño no cumple con las especificaciones en la banda de rechazo: en  $0.8\pi$  la atenuación es menor que 20 dB. (¿A qué se debe este fenómeno?) El problema se soluciona aumentando en una unidad el orden del filtro analógico. Los coeficientes del nuevo filtro son

```
nd = 0.0000  0.0442  0.3470  0.3060  0.0471  0.0008  0.0000
dd = 1.0000 -0.7277  0.7376 -0.3663  0.1238 -0.0245  0.0022
```

por lo que la función de sistema del filtro es

$$H(z) = \frac{z^{-1} (0.0442z^{-4} + 0.3470z^{-3} + 0.3060z^{-2} + 0.0471z^{-1} + 0.0008)}{z^{-6} - 0.7277z^{-5} + 0.7376z^{-4} - 0.3663z^{-3} + 0.1238z^{-2} - 0.0245z^{-1} + 0.0022}$$

La respuesta en frecuencia se muestra en la Fig. 11.2, cumpliéndose las especificaciones.

Las respuestas impulsivas de los filtros continuo y discreto se comparan en la Fig. 11.3. Las respuestas pueden generarse a partir de los siguientes comandos:

```
Tf = 20*T;
N = 0:20;
[y,t] = impulse(tf(na,da),Tf); % respuesta impulsiva del sistema continuo;
[h,n] = impz(nd,dd,N);         % respuesta impulsiva del sistema discreto;
% gráficas
stem(n*T,h);
hold on;
plot(t,T*y,'k--'); % observe el escalado en T de la rta del sistema continuo
hold off;
```

En la Fig. 11.3 la respuesta (escalada por  $T$ ) del sistema continuo se grafica en línea de trazos, y la respuesta del sistema discreto con los impulsos discretos. Es evidente que la respuesta impulsiva del sistema discreto está formada por las muestras cada  $T$  segundos de la respuesta impulsiva del sistema continuo. En otras palabras, la respuesta impulsiva del sistema es *invariante* a la discretización temporal. Finalmente, la Fig. 11.4 muestra el diagrama de polos y ceros del filtro. □

**EJEMPLO 11.2 Diseño de un pasabanda por invariación al impulso y transformación bilineal**

Para comparar los métodos de diseño de filtros digitales a partir de prototipos analógicos se aplican los métodos de invariación al impulso y transformación bilineal para diseñar un filtro discreto que satisfaga las siguientes especificaciones:

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| banda de paso:                            | $0.5\pi$ a $0.7\pi$ ,               |
| banda de rechazo:                         | $0$ a $0.4\pi$ y $0.8\pi$ a $\pi$ , |
| atenuación máxima en la banda de paso:    | 3 dB,                               |
| atenuación mínima en la banda de rechazo: | 20 dB.                              |

El listado siguiente muestra las instrucciones necesarias para diseñar el filtro utilizando MATLAB, utilizando el método de la transformación bilineal. La función `prewarp(w,T)` no existe en MATLAB, pero puede definirse fácilmente. Para diseñar el filtro utilizando la técnica de invariación temporal debe obviarse la compensación por predistorsión y cambiarse la línea indicada por asteriscos.

```
% Especificaciones del filtro
% Característica                pasabanda
% Tipo                          Chebyshev
% banda de paso:                [0.5 0.7]*pi
% banda de rechazo:            [0 0.4*pi] [0.8*pi pi]
% Atenuación en la banda de paso: 3 db
% Atenuación en la banda de rechazo: 20 db

wp = [0.5 0.7]*pi;
ws = [0.4 0.8]*pi;
Rp = 3;
Rs = 20;

% ‘‘Prewarping’’ de las especificaciones para el filtro continuo.
T = 0.2;                % Elijo T arbitrariamente;
Fs = 1/T;
Wp = prewarp(wp,T); % frecuencias esquinas (analógicas) de la banda de paso
Ws = prewarp(ws,T); % frecuencias esquinas (analógicas) de la banda de rechazo

% Diseño del filtro analógico
% Estimo el orden del filtro
[N,Wn] = cheb1ord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s');

% Calculo los polinomios numerador y denominador del filtro
[na,da] = cheby1(N,Rp,Wn,'s');
% Convierto el diseño a un filtro discreto

[nd,dd]=bilinear(na,da,Fs); % *****
% (para la invariación al impulso: [nd,dd]=impinvar(na,da,Fs);)

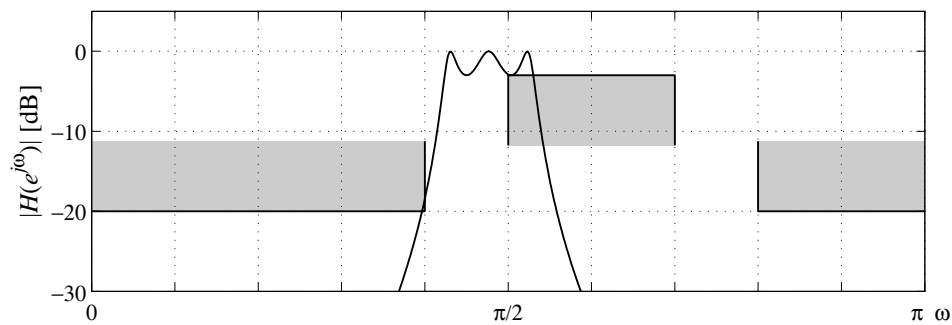
% plotea la respuesta en frecuencia
freqz(nd,dd)

% plotea las respuestas impulsivas
figure; subplot(211);
Tf = 50*T;
[y,t]=impz(tf(na,da),Tf); % respuesta impulsiva del sistema continuo
plot(t,y,'k-');
xlabel('t\itt' ['\its']);
ylabel('y\ity' ['\itt']);

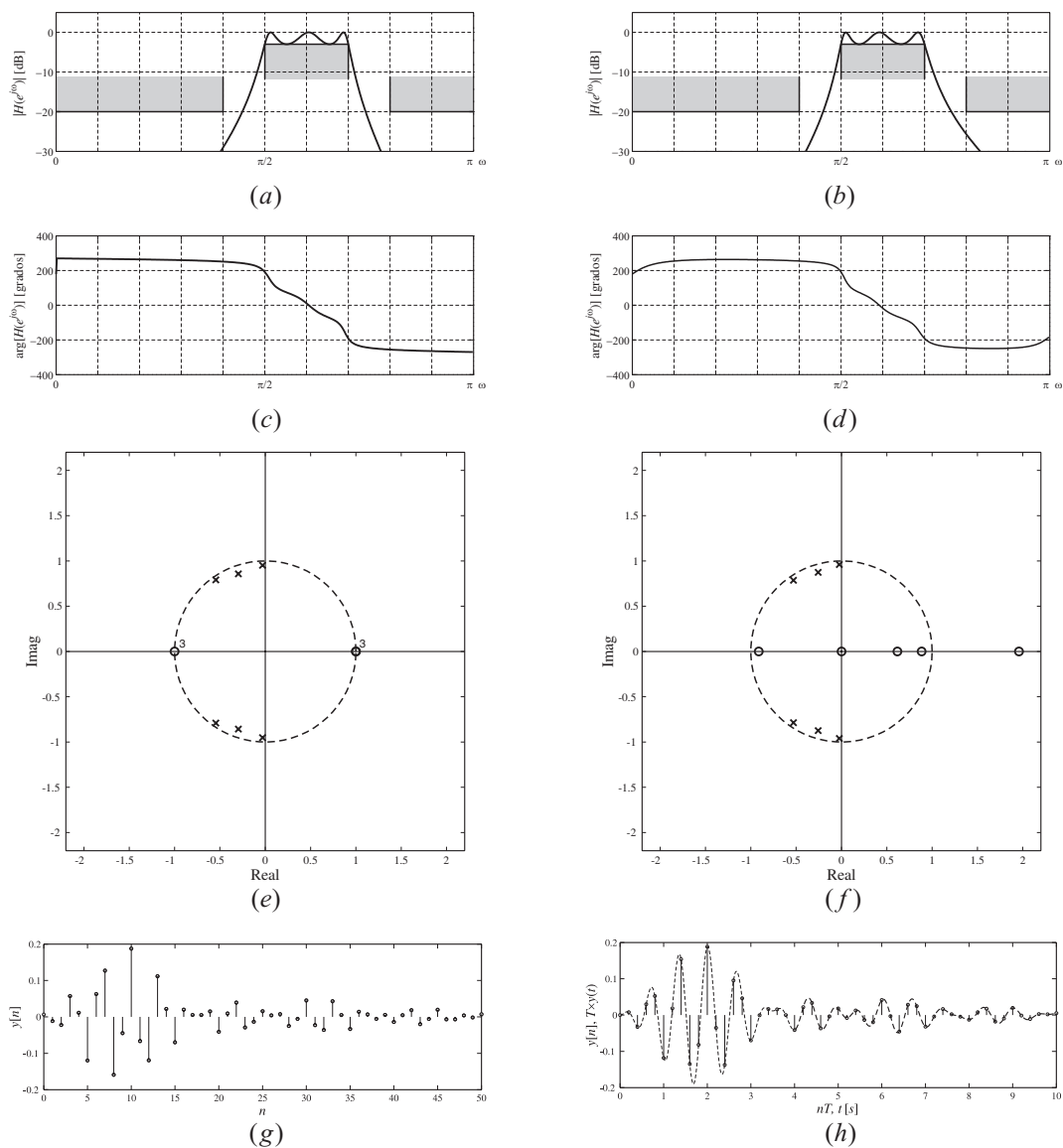
subplot(212);
N=0:50;
impz(nd,dd,N);                % respuesta impulsiva del sistema discreto;
xlabel('n\itn');
ylabel('y\ity' ['\itn']);
```

□

En la Fig. 11.5 se muestra la respuesta en frecuencia del filtro calculado sin predistorsionar las frecuencias esquina. Debido a la distorsión en el eje de frecuencias introducida por la transformación bilineal, el filtro no cumple con las especificaciones pedidas. En la Fig. 11.6(a) se observa la respuesta en frecuencia del filtro diseñado aplicando predistorsión (“prewarping”); este filtro *si* satisface las especificaciones.



**Fig. 11.5:** Filtro diseñado sin predistorsionar las frecuencias esquina.



**Fig. 11.6:** Comparación de diseños de un filtro pasabanda utilizando el método de la transformación bilineal (columna izquierda) y de la invariación al impulso (columna derecha). (a, b) Módulo de la respuesta en frecuencia; (c, d) respuesta de fase; (e, f) diagramas de polos y ceros; (g, h) respuestas impulsivas.

La Fig. 11.6 permite comparar los diseños utilizando la transformación bilineal (columna de la izquierda) con la técnica de diseño por invariación al impulso (columna de la derecha). Una observación cuidadosa de la Fig. 11.6(a) y Fig. 11.6(b) permite apreciar las diferencias entre ambos métodos de diseño. El módulo de la respuesta en frecuencia revela la compresión en el eje de frecuencias introducido por la transformación bilineal, sobre todo para frecuencias discretas próximas a  $\pi$ . Aunque las especificaciones son las de un filtro pasabanda con zonas de transición de igual ancho de banda, el filtro diseñado por la transformación bilineal corta más abruptamente en la banda de transición próxima a  $\pi$ . En cambio, el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro diseñado por la técnica de invariación al impulso tiene una banda de transición más amplia en esta zona. Como el filtro se basa en muestrear la respuesta impulsiva de un sistema continuo, *que no es estrictamente limitado en banda*, siempre existe algo de “aliasing” que altera la respuesta en frecuencia. Este efecto es más notorio a altas frecuencias ya que ésta es la zona que se encuentra más próxima a la réplica centrada en  $2\pi$ .

Otra observación interesante surge al comparar las respuestas de fase de ambos diseños, Fig. 11.6(c) y Fig. 11.6(d), respectivamente. La variación total de fase del filtro diseñado por la transformación bilineal [Fig. 11.6(c)] es *menor* que la variación de fase del filtro diseñado por la técnica de invariación al impulso [Fig. 11.6(d)]. Lo que sucede es que este último *no es de fase mínima*, como revelan los diagramas de polos y ceros respectivos, Fig. 11.6(e) y Fig. 11.6(f). Este es un resultado habitual. La transformación bilineal garantiza que un filtro (continuo) de fase mínima se transforma en un filtro discreto de fase mínima, ya que la transformación es un mapeo conforme que transforma el semiplano izquierdo del plano complejo  $\mathcal{S}$  en el interior del círculo unitario en el plano  $\mathcal{Z}$ . El método de la invariación al impulso *no es* una transformación conforme, y lo único que se conoce es cómo mapea los polos, pero no se puede decir nada acerca de cómo se transforman los ceros del sistema continuo en los ceros del sistema discreto.

Finalmente, la Fig. 11.6(g) y la Fig. 11.6(h) muestran las respuestas al impulso de ambos filtros. La respuesta impulsiva del filtro diseñado por el método de la invariación al impulso coincide con muestras de la respuesta impulsiva del sistema continuo, mientras que la respuesta impulsiva del filtro diseñado por la transformación bilineal guarda poca relación con las anteriores.





## 11.3 Tablas de conversiones de filtros

## 11.3.1 Filtros continuos

| Especificaciones de un filtro $H_D(j\Omega)$ tipo ... | Pasa Bajos Normalizado(PBN) $H_{PBN}(j\Omega)$ | las frecuencias<br>esquina de<br>$H_D(j\Omega)$   | se transforman<br>en  | $H_D(\tilde{s}) = H_{PBN}(\tilde{s}) \Big _{s=j\tilde{s}}$                            |
|---|--|---|---|---|
| <b>Pasa Altos</b>                                     |  | $\pm\Omega_p$<br>$\pm\Omega_s$<br>0<br>$\infty$   | $\pm 1$<br>$\pm\Omega_p/\Omega_s$<br>$\infty$<br>0  | $s \rightarrow \frac{\Omega_p}{\tilde{s}}$  |
| <b>Pasa Banda</b>                                     |  | $\Omega_0 \doteq \sqrt{\Omega_1\Omega_2}$<br>$\Omega_1$<br>$\Omega_2$<br>$\Omega_4$<br>$\Omega_3$ | 0<br>-1<br>+1<br>$\Omega_s = \frac{\Omega_4 - \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1}$<br>$-\Omega_s$        | $s \rightarrow \frac{\tilde{s}^2 + \Omega_1\Omega_2}{\tilde{s}(\Omega_2 - \Omega_1)}$ |
| <b>Elimina Banda</b>                                  |  | $\Omega_0 \doteq \sqrt{\Omega_1\Omega_2}$<br>$\Omega_1$<br>$\Omega_2$<br>$\Omega_3$<br>$\Omega_4$ | $\infty$<br>+1<br>-1<br>$\Omega_s = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_4 - \Omega_3}$<br>$-\Omega_s$ | $s \rightarrow \frac{\tilde{s}(\Omega_2 - \Omega_1)}{\tilde{s}^2 + \Omega_1\Omega_2}$ |

## 11.3.2 Filtros discretos

Prototipo: filtro pasabajos  $H_{PB}(z)$  con frecuencia de corte  $\theta_c$ 

| Filtro $H_D(z)$ tipo   | $H_D(\tilde{z}) = H_{PB}(z) _{z=f(\tilde{z})}$   | Parámetros   |
|--|--|--|
| Pasabajos con frecuencia de corte $\omega_c$                 | $z \rightarrow \frac{\tilde{z} - \alpha}{1 - \alpha\tilde{z}}$   | $\alpha = \frac{\sin[(\theta_c - \omega_c)/2]}{\sin[(\theta_c + \omega_c)/2]}$   |
| Pasaaltos con frecuencia de corte $\omega_c$                 | $z \rightarrow -\left(\frac{\tilde{z} - \alpha}{1 - \alpha\tilde{z}}\right)$   | $\alpha = \frac{\cos[(\theta_c + \omega_c)/2]}{\cos[(\theta_c - \omega_c)/2]}$   |
| Pasabanda con frecuencia de corte $\omega_1$ y $\omega_2$    | $z \rightarrow -\left(\frac{\tilde{z}^2 + \beta_1\tilde{z} + \beta_2}{1 + \beta_1\tilde{z} + \beta_2\tilde{z}^2}\right)$ | $\beta_2 = \frac{K-1}{K+1}, \quad \beta_1 = \frac{-2\alpha K}{K+1},$<br>$K = \cot[(\omega_2 - \omega_1)/2] \tan(\theta_c/2)$<br>$\alpha = \frac{\cos[(\omega_2 + \omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]}$ |
| Eliminabanda con frecuencia de corte $\omega_1$ y $\omega_2$ | $z \rightarrow \frac{\tilde{z}^2 + \beta_1\tilde{z} + \beta_2}{1 + \beta_1\tilde{z} + \beta_2\tilde{z}^2}$               | $\beta_2 = \frac{K-1}{K+1}, \quad \beta_1 = \frac{-2\alpha K}{K+1},$<br>$K = \cot[(\omega_2 - \omega_1)/2] \tan(\theta_c/2)$<br>$\alpha = \frac{\cos[(\omega_2 + \omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]}$ |

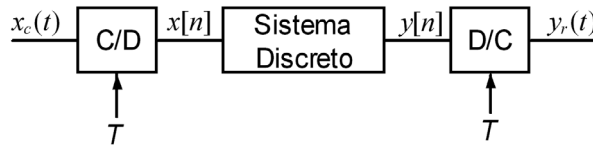
## 11.4 Ejercicios

**Ejercicio 1** Se diseñó un filtro discreto pasabajos utilizando un filtro continuo pasabajos como prototipo, con frecuencia de corte  $\Omega_c = 2\pi 1000$  rad/s. Especifique cuál es la frecuencia de corte del filtro digital si el diseño se hizo en base al método de:

1. invariación al impulso con  $T_d = 0.2 \times 10^{-3}$ s;
2. la transformación bilineal con  $T_d = 0.4 \times 10^{-3}$ s.

**Ejercicio 2** Se desea implementar un filtro pasabajos  $H(j\Omega)$  de tiempo continuo, lineal e invariante en el tiempo, utilizando el sistema que se muestra en la figura. El sistema discreto tiene respuesta en frecuencia  $H_d(e^{j\omega})$ , el tiempo de muestreo es  $T_s = 10^{-4}$  segundos, y la señal de entrada  $x_c(t)$  es de ancho de banda limitado,  $X(j\Omega) = 0$  para  $|\Omega| \geq 2\pi 5000$  rad/s. Determine las especificaciones adecuadas para el filtro discreto  $H_d(e^{j\omega})$  si las especificaciones de  $|H(j\Omega)|$  son

$$\begin{aligned} 0.99 &\leq |H(j\Omega)| \leq 1.01, & |\Omega| &\leq 2\pi 1000, \\ |H(j\Omega)| &\leq 0.01, & |\Omega| &\geq 2\pi 1100. \end{aligned}$$



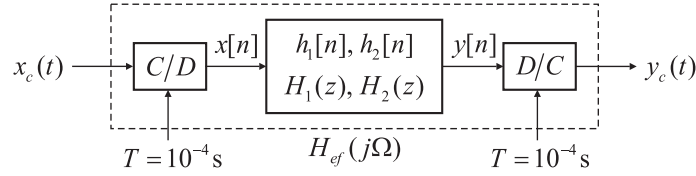
- ① **Ejercicio 3** El filtro  $C$  es un filtro IIR estable, *continuo*, con función de sistema  $H_c(s)$ , y respuesta impulsiva  $h_c(t)$ . El filtro  $B$  es un filtro discreto, con función de sistema  $H_b(z)$  y respuesta impulsiva  $h_b[n]$ , obtenido a partir de  $H_c(s)$  usando la transformada bilineal. ¿Es cierto que el filtro  $B$  no puede ser un filtro FIR? Justifique su respuesta (si es falsa puede dar un contraejemplo).

**Ejercicio 4** Un filtro de tiempo continuo con respuesta impulsiva  $h_c(t)$  y cuya respuesta en frecuencia tiene módulo

$$|H_c(j\Omega)| = \begin{cases} |\Omega|, & |\Omega| < 10\pi, \\ 0, & |\Omega| > 10\pi, \end{cases}$$

se utiliza como prototipo para el diseño de un filtro discreto, el que se utiliza en la configuración de la figura para filtrar la señal continua  $x_c(t)$ . Grafique la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema completo  $H_{ef}(j\Omega) = Y_c(j\Omega)/X_c(j\Omega)$  si se aplica:

1. el método de la invariación al impulso con  $T_d = 0.01$  [i.e.,  $h_1[n] = 0.01h_c(0.01n)$ ] para obtener un sistema discreto con repuesta impulsiva  $h_1[n]$  y función de sistema  $H_1(z)$ .
2. la transformación bilineal con  $T_d = 2$  para obtener el sistema discreto con respuesta impulsiva  $h_2[n]$  y función de sistema  $H_2(z) = H_c(s)|_{s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})}$ .



**Ejercicio 5** Un filtro analógico de primer orden con función de sistema  $H_c(s)$  tiene un cero en  $s = -2$ , un polo en  $s = -2/3$ , y una ganancia de continua  $H_c(s)|_{s=0} = 1$ . La aplicación de la transformación bilineal a  $H_c(s)$  resulta en el filtro digital  $H(z) = K/(1 - az^{-1})$ . Determine los valores de  $K$ ,  $a$  y del período de muestreo  $T_d$ .

**Ejercicio 6** El filtro discreto

$$H(z) = \frac{2\omega_0^2(1+z)^2}{(z-1)^2 + 2\omega_0(z^2-1) + \omega_0^2(z+1)^2}$$

donde  $\omega_0$  es un parámetro positivo, se obtuvo a partir de un filtro analógico  $H_c(s)$  por el método de la transformación bilineal con  $T_d = 2$ .

1. ¿Qué tipo de filtro es  $H(z)$ ? (pasabajos, pasaaltos, pasabanda, o eliminabanda) Justifique.
2. Calcule la función de sistema y los polos y los ceros del filtro analógico  $H_c(s)$ , y determine qué tipo de filtro es (Butterworth, Chebyshev-I, Chebyshev-II o elíptico).
3. ¿A qué frecuencia(s) el filtro analógico presenta una atenuación de 3 dB?
4. ¿A qué frecuencia(s) el filtro discreto presenta una atenuación de 3 dB?

**Ejercicio 7** El filtro digital  $H(z)$  tiene un cero doble en  $z = -1$  y un par de polos en  $z = \pm ja$ , donde  $a$  es real y positivo,  $0 < a < 1$ . El filtro se obtuvo a partir de un filtro analógico  $H_c(s)$  utilizando la transformación bilineal.

1. Dibuje aproximadamente la respuesta en frecuencia (módulo y fase) de  $H(e^{j\omega})$ , en el rango  $0 < \omega < 2\pi$ .
2. Calcule  $H_c(s)$  y exprese la como el cociente de dos polinomios, con  $a$  y  $T_d$  como parámetros.
3. Si  $\alpha = 1/\sqrt{2}$  y  $T = 1$ , determine qué tipo de filtro es  $H_c(s)$  (Butterworth, Chebyshev-I, Chebyshev-II o elíptico).

**Ejercicio 8** Calcule la función de sistema de un filtro discreto IIR que satisfaga los siguientes requerimientos:

- Los grados  $p$  y  $q$  de los polinomios numerador y denominador, respectivamente, deben ser iguales.
- Debe tener una atenuación infinita en la frecuencia  $\omega = \pi/3$ .

- Sus polos deben ser iguales a los de un filtro Butterworth normalizado transformado al dominio discreto con la transformación bilineal con  $T_d = \sqrt{2}$ .
- La ganancia de continua debe ser unitaria.
- Debe tener orden mínimo.

**Ejercicio 9** Verifique que la función de sistema de tiempo continuo

$$H_A(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{s^2 + 3s + 3}$$

es una aproximación a un retardo de grupo constante. ¿Puede diseñar un filtro digital equivalente utilizando el método de invariación al impulso? Si la respuesta es afirmativa, diseñe el filtro discreto correspondiente utilizando una frecuencia de diseño  $\Omega_s = 2\pi/T_d = 10$  rad/s. Si la respuesta es negativa explique las causas por las cuales el método no es aplicable.

**Ejercicio 10** Un filtro discreto se obtiene a partir de un filtro continuo usando la transformada bilineal. Si el filtro de tiempo continuo tiene retardo de grupo constante, *i.e.*  $H_c(j\Omega) = A(\Omega)e^{-j\Omega\alpha}$ , donde  $A(\Omega)$  y  $\alpha$  son reales, ¿el filtro discreto conserva esta propiedad? Justifique su respuesta.

**Ejercicio 11** Para la función de sistema discreta

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{0.2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{0.4}z^{-1}}$$

encuentre la función de sistema  $H_c(s)$  de un sistema continuo que podría haber sido la base del diseño si  $H(z)$  se obtuvo por el método de:

1. la invariación al impulso, con  $T_d = 2$  [ $h[n] = T_d h_c(nT_d)$ , donde  $h(t)$  es real];
2. la transformación bilineal, con  $T_d = 2$ .

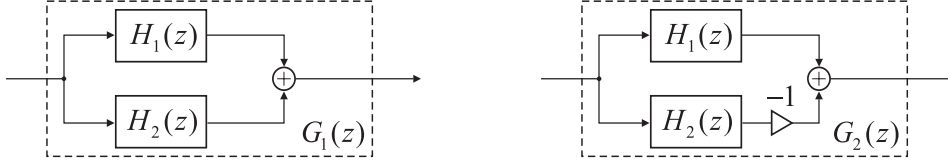
En cada caso, determine si la respuesta es única, y si no lo fuera encuentre otra función de sistema  $H_c(s)$  de la que pueda obtenerse la misma  $H(z)$ .

**Ejercicio 12** La respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos analógico ideal y causal con respuesta impulsiva  $h[n]$  es

$$H_c(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_c, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Las funciones transferencias discretas  $H_1(e^{j\omega})$  y  $H_2(e^{j\omega})$  se obtienen al muestrear  $h_c(t)$  en  $t = nT_i$ , con  $T_1 = 3/(4f_c)$  y  $T_2 = 1/(2f_c)$ , respectivamente. La ganancia se normalizan de modo que  $H_1(e^{j0}) = H_2(e^{j0}) = 1$ .

1. Grafique la respuesta en frecuencia  $G_1(e^{j\omega})$  y  $G_2(e^{j\omega})$  de los dos sistemas que se muestran en la figura.
2. Determine qué tipo de filtros son (pasabajos, pasaaltos, etc.).



**I Ejercicio 13** Responda y justifique las siguientes preguntas sobre los métodos de invariación al impulso y transformación bilineal:

1. Si el sistema continuo  $H_c(j\Omega)$  es un pasatodo estable, sus polos  $s_k$  estarán ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo ( $s_k < 0$ ), y sus ceros ( $-s_k$ ) en el semiplano derecho ( $-s_k > 0$ ). ¿Qué método permite obtener un pasatodo discreto?
2. Si el sistema continuo  $H_c(j\Omega)$  es causal y de fase mínima (con polos y ceros en el semiplano izquierdo), ¿qué método permite obtener un sistema discreto causal de fase mínima (con polos y ceros dentro del círculo unitario)?
3. Se desea que el valor de la respuesta en continua (a frecuencia cero) de un filtro discreto sea la misma que la del filtro analógico, es decir,  $H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = H_c(j\Omega)|_{\Omega=0}$ , ¿Se puede cumplir este requisito con un filtro diseñado por el método de invariación al impulso? Si la respuesta es afirmativa, especifique qué condiciones debe cumplir  $H_c(j\Omega)$ .
4. ¿Se puede cumplir el requisito del inciso anterior con un filtro  $H(e^{j\omega})$  diseñado en base a la transformación bilineal? Si la respuesta es afirmativa, especifique qué condiciones debe cumplir  $H_c(j\Omega)$ .
5. Suponga que  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$  y  $H(z)$ , son las versiones discretas de  $H_{c1}(s)$ ,  $H_{c2}(s)$  y  $H_c(s)$ , respectivamente. Justifique cuál de los métodos de diseño permite asegurar que
  - (a)  $H(z) = H_1(z) H_2(z)$  cuando  $H_c(s) = H_{c1}(s) H_{c2}(s)$ ;
  - (b)  $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$  cuando  $H_c(s) = H_{c1}(s) + H_{c2}(s)$ .
6. Suponga que dos sistemas continuos satisfacen la condición

$$\frac{H_{c1}(j\Omega)}{H_{c2}(j\Omega)} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & 0 < \omega < \pi, \\ e^{j\pi/2}, & -\pi < \omega < 0. \end{cases}$$

Si  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$  son las versiones transformadas de  $H_{c1}(s)$  y  $H_{c2}(s)$ , respectivamente, determine cuál de los dos métodos permite asegurar que

$$\frac{H_1(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & 0 < \omega < \pi, \\ e^{j\pi/2}, & -\pi < \omega < 0. \end{cases}$$

**M Ejercicio 14 Transformación bilineal:** Se debe diseñar un filtro pasabajos discreto tipo Butterworth de cuarto orden, por el método de la transformada bilineal. La frecuencia de muestreo  $f_s$  es de 40 kHz. El filtro debe tener una frecuencia de corte de 8 kHz (punto de  $\pm 3$  dB), y debe atenuar más de 20 dB a 12 kHz.

1. ¿Cuál es la frecuencia de corte del prototipo analógico?
2. ¿Cuál es el orden necesario para cumplir con las especificaciones?

3. Calcule la función transferencia (“analógica”) del filtro prototipo.
4. Diseñe el filtro discreto a partir del filtro analógico del inciso 3, aplicando la transformada bilineal.
5. Grafique la respuesta en frecuencia (módulo y fase). Verifique que se cumplan las especificaciones.
6. Grafique los polos y ceros del filtro diseñado en el inciso 4.
7. Compare su diseño (inciso 4) con un filtro pasabajos calculado con `butter`, que utiliza transformaciones frecuenciales discretas.

**Nota:** Tradicionalmente, cuando el cálculo era manual, el filtro analógico prototipo se calculaba en base a un filtro analógico normalizado (con frecuencia de corte igual a la unidad), efectuando luego una transformación en frecuencia de manera que alguna frecuencia de interés (usualmente la frecuencia de corte del filtro) coincidiese con la frecuencia predistorsionada. En base a este diseño “trasladado” se efectuaba el diseño digital aplicando la transformada bilineal. En MATLAB la predistorsión en frecuencia (“prewarping”) se aplica simultáneamente con la transformada bilineal (comando `bilinear`), de manera que como filtro analógico prototipo puede utilizarse el filtro analógico normalizado.

**(M) Ejercicio 15 Invariación al impulso:** Se desea diseñar un filtro pasabajos discreto con respuesta máximamente plana en la banda de paso, que satisfaga las siguientes especificaciones:

|   |                  |
|---|------------------|
| Banda de paso:                            | 0 a $0.2\pi$     |
| Banda de rechazo:                         | $0.3\pi$ a $\pi$ |
| Atenuación máxima en la banda de paso:    | 1 dB             |
| Atenuación mínima en la banda de rechazo: | 45 dB            |

1. Convierta las especificaciones al “dominio analógico”, y diseñe un filtro de tiempo continuo que las verifique. ¿Cuál es la frecuencia de muestreo  $f_d$  utilizada para el diseño? (comando `butter`).
2. Calcule el filtro discreto que cumple con las especificaciones aplicando el método de invariación al impulso (función `impinvar`).
3. Repita los incisos 1 y 2 para una frecuencia de muestreo de diseño  $f_{d2} = 1000f_d$ . Compare los filtros discretos obtenidos.
4. Grafique la respuesta en frecuencia (módulo y fase) utilizando el comando `freqz`. Verifique que se cumplan las especificaciones.
5. Grafique los polos y ceros del filtro diseñado en el inciso 2 (comando `zplane`).
6. Calcule la respuesta impulsiva del filtro analógico calculado en el inciso 1 con la del filtro discreto calculado en el inciso 2 (comandos `impz` e `impz`, para el caso continuo y discreto, respectivamente).
7. Compare su diseño con un filtro pasabajos calculado con `butter` (que utiliza transformaciones frecuenciales discretas).
8. ¿Qué problemas tendría al diseñar un filtro pasaaltos utilizando este procedimiento?

**Nota:** Este problema está resuelto en *Discrete-time Signal Processing*, de Oppenheim y Schaffer, utilizando técnicas “clásicas”. Se sugiere recalcularlo utilizando MATLAB, y comparar los resultados obtenidos, o bien adoptar otro tipo de aproximación para diseñar el filtro de tiempo continuo (Chebyshev, elíptico, etc.).

**(M) Ejercicio 16 Filtro Pasaaltos:** Diseñe un filtro pasaalto que cumpla las siguientes especificaciones:

|   |                   |
|---|-------------------|
| Banda de paso:                            | 0.3 Hz a $f_s$ Hz |
| Banda de rechazo:                         | 0 a 0.25 Hz       |
| Atenuación máxima en la banda de paso:    | 1 dB              |
| Atenuación mínima en la banda de rechazo: | 40 dB             |
| Frecuencia de muestreo:                   | $f_s = 2$ Hz      |

1. Diseñe el filtro adoptando una aproximación conveniente (comandos `butter`, `cheby1`, `cheby2`, `ellip`; el orden de los filtros se puede estimar con los comandos `buttord`, `cheb1ord`, `cheb2ord`, `ellipord`, respectivamente).
2. Grafique la magnitud y la fase utilizando `freqz`.
3. Dibuje el diagrama de polos y ceros, utilizando `zplane`.
4. Dibuje la parte significativa de la respuesta impulsiva  $h[n]$ , utilizando `impz` para obtener aproximadamente 20 valores.

**(M) Ejercicio 17 Filtros pasabanda:** Diseñe un filtro pasabanda que cumpla las siguientes especificaciones:

|   |                                 |
|---|---------------------------------|
| Banda de paso:                            | 0.5 a 0.8 Hz                    |
| Banda de rechazo:                         | 0 a 0.4 Hz y 0.85 Hz a $f_s$ Hz |
| Atenuación máxima en la banda de paso:    | 1 dB                            |
| Atenuación mínima en la banda de rechazo: | 40 dB                           |
| Frecuencia de muestreo:                   | $f_s = 2$ Hz                    |

1. Diseñe el filtro adoptando una aproximación conveniente.
2. Grafique la magnitud y la fase utilizando `freqz`.
3. Dibuje el diagrama de polos y ceros, utilizando `zplane`.
4. Dibuje la parte significativa de la respuesta impulsiva, utilizando `impz` para obtener aproximadamente 20 valores.
5. Rediseñe el filtro efectuando explícitamente cada paso de la transformación, utilizando los comandos `lp2bp`, `bilinear`, y `butter`, `cheby1`, o `ellip`, según prefiera.