Análisis frecuencial de señales discretas

Gran parte del procesamiento de señales está vinculado a aplicaciones tales como detección y estimación. *Detección* es determinar si un conjunto específico de patrones o frecuencias están presentes o no en una señal, mientras que *estimación* es la tarea de obtener los valores de parámetros que la describan. Cuando la señal a analizar es complicada, o está contaminada por interferencia o ruido, para facilitar la detección y estimación se la descompone sobre una base que expande el espacio de señal. En muchos casos de interés en ingeniería la clase de señales a analizar son periódicas, lo que lleva naturalmente a una descomposición en senos y cosenos aplicando la transformada de Fourier.

Cada conjunto de mediciones de una señal tiene, necesariamente, una duración finita: en algún momento se comenzó a medir y en algún otro momento se concluyó el proceso. La duración de la experiencia puede ser variable, pero necesariamente es acotada. La señal discreta está formada entonces por un *número finito* de muestras significativas, lo que impone una serie de limitaciones al análisis armónico. Entre ellas se incluyen la detectabilidad de tonos de baja potencia en presencia de tonos próximos de alta potencia, la resolución de tonos de potencia semejante y de frecuencias próximas, la resolución de tonos que varíen en el tiempo, y los errores de estimación de los parámetros de cualquiera de las señales.

En este capítulo se tratará el análisis frecuencial de señales discretas. La hipótesis de trabajo es que se desea conocer el espectro de una señal periódica $\tilde{x}[n]$ de longitud infinita compuesta por una suma ponderada de sinusoides,

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=0}^{M} A_m \operatorname{sen}(\omega_m n + \phi_m), \quad -\infty < n < \infty.$$
(10.1)

Para el análisis se supondrá que se sólo se dispone de un conjunto finito de N muestras uniformemente espaciadas de la señal $\tilde{x}[n]$. En general N no tiene porqué coincidir con el período N_0 de la señal $\tilde{x}[n]$, aunque por conveniencia se elige que N sea un número altamente compuesto (es decir que tiene muchos factores), y par. La señal que se analiza no es entonces $\tilde{x}[n]$, sino v[n], donde

$$v[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & n_0 \le n \le n_0 + N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$
 (10.2)

siendo habitual elegir $n_0=0$. En consecuencia, las estimaciones armónicas V[k] que se obtienen aplicando la transformada discreta de Fourier (TDF) son N muestras uniformemente espaciadas del espectro periódico $V\left(e^{j\omega}\right)$, no del espectro $X(e^{j\omega})$ que es el que se pretende conocer. El propósito de este capítulo es vincular V[k] con $\tilde{X}[k]$, o bien $V(e^{j\omega})$ con $X(e^{j\omega})$. A tal fin se estudia en primer lugar cómo se modifica el espectro al truncar la señal original (10.1) para obtener (10.2). Se discuten luego distintas formas de truncar o ventanear la señal. Se presentan las características temporales y frecuenciales de las ventanas más comunes, y se estudian los parámetros distintivos de cada una. Se estudia también el error (sesgo) cometido al estimar la frecuencia de una señal con estos métodos, y finalmente se comentan los aspectos más importantes de analizadores espectrales basados en la TDF.

10.1. Análisis armónico de señales de longitud finita

Cuando se desea analizar una señal x[n] arbitraria, no necesariamente periódica, calculando su transformada discreta de Fourier (TDF), en forma consciente o no se efectúa sobre la misma un par de operaciones:

■ una truncación o ventaneo ("windowing") en el dominio temporal, que limita la longitud de la señal a un número de muestras N arbitrario, y por lo tanto impide el conocimiento de la señal completa. La TDF X[k] de la señal x[n] original no puede calcularse porque por definición, la TDF se calcula para señales de longitud finita N. Por ello x[n] se trunca o ventanea temporalmente, obteniéndose la señal v[n] dada por (10.2) que coincide con x[n] en las N muestras comprendidas entre $n_0 \le n \le n_0 + N - 1$. De aquí en más se supondrá que $n_0 = 0$. En principio, no interesa que N sea grande, lo que importa es que sea finito para poder efectuar la sumatoria indicada en la definición de la TFTD

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} v[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

o en la suma de la TDF,

$$V[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Como resultado de la truncación (disminución de la "duración efectiva" de la señal) el teorema del ancho de banda estudiado en el Capítulo 2 indica que el espectro calculado sobre esta señal queda menos concentrado, extendiéndose sobre un mayor rango de frecuencias. Esta dispersión o pérdida de la concentración del espectro también afecta la posibilidad de resolver (distinguir) señales sinusoidales de frecuencias próximas. En consecuencia, no se pueden conocer *exactamente* las frecuencias presentes en la señal.

• un *muestreo* en el dominio frecuencial, que hace que sólo se puedan conocer *muestras* V[k] del espectro de la señal $V\left(e^{j\omega}\right)$ en las frecuencias $\omega_k=(2\pi/N)k$, con $k=0,\ldots N-1$, pero no el espectro de la señal para *toda* frecuencia $\omega\in[0,2\pi)$. Este *muestreo espectral* ("spectral sampling") subyacente en la TDF puede dar lugar

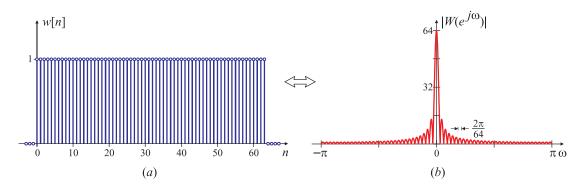


Fig. 10.1. Respuesta temporal w[n] (a) y transformada de Fourier $W(e^{j\omega})$ (b) de la ventana rectangular $w[n]=1,\ 0\leq n\leq 63.$

a una interpretación confusa o incorrecta del verdadero espectro de la señal, y puede impedir la determinación correcta de la relación de amplitud entre dos o más señales.

En principio la truncación de la señal temporal x[n] a una señal v[n] de N muestras de longitud también determina el número N de frecuencias donde se calcula la TDF V[k]. Como se estudiará más adelante, la longitud temporal de la señal no determina de manera única la cantidad de puntos en frecuencia donde se evalúa $V(e^{j\omega})$ para obtener V[k]. De todas maneras, ambas operaciones –truncación temporal y muestreo espectral– dan lugar a la aparición de fenómenos interesantes, no totalmente independientes entre sí.

10.1.1. Efecto de la truncación: fuga espectral

El problema de la fuga espectral es inherente al análisis de Fourier de cualquier conjunto finito de datos. La señal a analizar se obtiene estudiando la señal original $\tilde{x}[n]$ durante un cierto período de tiempo, y se ignora todo lo que haya sucedido antes o después de ese intervalo. El "tomar una parte" de la señal $\tilde{x}[n]$, por ejemplo las N muestras $0 \le n \le N-1$ permite definir una nueva señal que se notará como v[n]. Es natural pensar esta señal como el resultado de multiplicar la señal original por una $ventana \ w[n]$,

$$v[n] = \tilde{x}[n]w[n], \tag{10.3}$$

donde w[n] está definida (en este caso) como

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
 (10.4)

Otra interpretación usual es considerar que v[n] se obtiene "observando" $\tilde{x}[n]$ a través de una "ventana temporal" de N muestras de longitud.

La transformada de Fourier $W(e^{j\omega})$ de la ventana w[n] es

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n} w[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{e^{-j\omega N} - 1}{e^{-j\omega} - 1}$$
$$= e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\operatorname{sen}(N\omega/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}.. \tag{10.5}$$

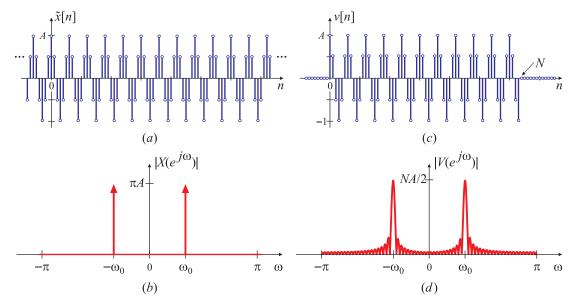


Fig. 10.2. Fuga espectral: Señal periódica x[n] (a). Espectro $X(e^{j\omega})$ (b) . Señal truncada v[n] (c). Espectro $V(e^{j\omega})$ (d).

La respuesta en frecuencia de la ventana rectangular no es otra cosa que el kernel o núcleo de Dirichlet escalado por N. La forma típica del espectro de $|W\left(e^{j\omega}\right)|$ se muestra en la Fig. 10.1(b) para N=64; el máximo del módulo de $|W\left(e^{j\omega}\right)|$ se alcanza cuando ω es múltiplo de 2π ,

$$|W(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi r}=N, \quad r\in\mathbb{Z}.$$

Para analizar el efecto de la truncación o ventaneo sobre el espectro de la señal, se estudia en primer lugar una señal $\tilde{x}[n]$ formada por un tono de frecuencia ω_0 ; por ejemplo, $\tilde{x}[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \phi\right)$, $-\infty < n < \infty$; una señal de este tipo se ilustra en la Fig. 10.2(a) con A=1 y $\phi=0$. La transformada de Fourier $X\left(e^{j\omega}\right)$ de esta señal es un par de impulsos ubicados en $+\omega_0$ y $-\omega_0$ de amplitud πA que se repiten periódicamente con período 2π :

$$X\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{A}{2} e^{j\phi} \delta\left(\omega - \omega_0 + 2\pi r\right) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \delta\left(\omega + \omega_0 + 2\pi r\right),\tag{10.6}$$

como se muestra en la Fig. 10.2(b), también para A=1 y $\phi=0$.

El proceso de truncación indicado o ventaneo temporal indicado en (10.3) equivale a la convolución de las transformadas $X(e^{j\omega})$ y $W(e^{j\omega})$ en el dominio frecuencia, de modo que

$$V\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \tag{10.7}$$

Reemplazando la expresión (10.5) en (10.7) y operando, se encuentra que

$$V\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \left[\frac{A}{2}e^{j\phi}\delta\left(\theta + \omega_{0}\right) + \frac{A}{2}e^{-j\phi}\delta\left(\theta - \omega_{0}\right)\right]W(e^{j(\omega - \theta)})d\theta \quad (10.8)$$

$$= \frac{A}{2}e^{j\phi}W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A}{2}e^{-j\phi}W(e^{j(\omega+\omega_0)}), \tag{10.9}$$

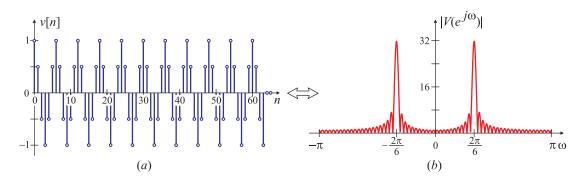


Fig. 10.3. Señal v[n] del Ejemplo10.1 y su TFTD $V(e^{j\omega})$.

resultado que se ilustra en la Fig. 10.2(d). Para la evaluación de (10.8) se ha considerado que en el intervalo $(-\pi,\pi]$ donde se calcula la integral sólo quedan comprendidos los términos del espectro $X(e^{j\omega})$ asociados a r=0 en (10.6). En definitiva, el espectro $V(e^{j\omega})$ de la señal truncada v[n] está formado por réplicas del espectro de la ventana $W(e^{j\omega})$ centradas en las frecuencias $\omega=+\omega_0$ y $\omega=-\omega_0$ y sus réplicas desplazadas $2\pi r,\,r\in\mathbb{Z}$. Como $W(e^{j\omega})$ también es 2π -periódico los "picos" de la ventana quedan centrados en todas las réplicas de las frecuencias $\pm\omega_0$. Estos máximos alcanzan "aproximadamente" el valor NA/2, como se observa en la Fig. 10.2(d).

En resumen, la truncación temporal ha transformado un espectro ideal formado por una serie de impulsos periódicos perfectamente localizados en frecuencia [Fig. 10.2(b)] a una función continua y periódica que cubre todo el rango de frecuencias, como revela la ecuación (10.9), con valores máximos en frecuencias cercanas¹ a $\omega = \pm \omega_0 + 2\pi r$, y una serie de picos espurios denominados *lóbulos laterales*, [Fig. 10.2(d)].

EJEMPLO 10.1. Efecto de la truncación o ventaneo

Sea $x[n] = \cos[(2\pi/6)n], -\infty < n < \infty$. La señal v[n] es el resultado de truncar x[n] con una ventana rectangular w[n] como (10.4) con N=64, de modo que

$$v[n] = \left\{ \begin{array}{ll} \cos[2\pi/6)n], & \quad 0 \le n \le 63, \\ 0, & \quad \text{en caso contrario}. \end{array} \right.$$

como se muestra en la Fig.10.3(a). El módulo del espectro $V(e^{j\omega})$ (la TFTD) de v[n] se representa en la Fig.10.3(b). Este espectro puede pensarse como la convolución del espectro $X(e^{j\omega})$ formado por un par de impulsos de área π centrados en $\pm (2\pi/6) + 2\pi r, \, r \in \mathbb{Z}$ con el espectro $W(e^{j\omega})$ de la ventana rectangular dado por (10.5) e ilustrado en la Fig.10.1(b). La amplitud de los máximos del espectro es NA/2 = 64/2 = 32, tal como se indica en la Fig.10.3(b).

Otros efectos interesantes ocurren al considerar que la señal discreta está compuesta por dos componentes sinusoidales,

$$x[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \phi_0) + A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1), \quad -\infty < n < \infty.$$

 $^{^1}$ Los máximos de $V(e^{j\omega})$ no necesariamente coinciden con $\pm\omega_0+2\pi r,\,r\in\mathbb{Z}$, pues el espectro $V(e^{j\omega})$ es la suma de los espectros desplazados de la ventana $W\left(e^{j\omega}\right)$ en módulo y fase, y los lóbulos laterales de las ventana pueden alterar la ubicación de los máximos. Este tema se trata en detalle en las Sección 10.7.

El espectro $X\left(e^{j\omega}\right)$ de esta señal está formado por cuatro impulsos, ubicados en $\omega=-\omega_1$, $\omega=-\omega_0,\,\omega=\omega_0,\,\omega=\omega_1$, que se repiten periódicamente cada 2π . Al truncar la señal x[n] con la ventana w[n] se obtiene

$$v[n] = x[n]w[n]$$

= $A_0 \cos(\omega_0 n + \phi_0) + A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1), \quad 0 \le n \le N - 1,$ (10.10)

y su espectro es la convolución periódica de los impulsos de $X\left(e^{j\omega}\right)$ con la transformada de Fourier $W\left(e^{j\omega}\right)$ de la ventana w[n]. Específicamente, reescribiendo v[n] utilizando exponenciales complejas,

$$v[n] = \frac{A_0}{2}e^{j\phi_0}e^{j\omega_0n} + \frac{A_0}{2}e^{-j\phi_0}e^{-j\omega_0n} + \frac{A_1}{2}e^{j\phi_1}e^{j\omega_1n} + \frac{A_1}{2}e^{-j\phi_1}e^{-j\omega_1n},$$
(10.11)

con $0 \le n \le N-1$, y aplicando la propiedad de desplazamiento frecuencial de la transformada de Fourier, es sencillo calcular la transformada de Fourier $V\left(e^{j\omega}\right)$ de la señal v[n] dada por (10.10) o (10.11)

$$V(e^{j\omega}) = \frac{A_0}{2}e^{j\phi_0}W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A_0}{2}e^{-j\phi_0}W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A_1}{2}e^{j\phi_1}W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2}e^{-j\phi_1}W(e^{j(\omega-\omega_1)}).$$
(10.12)

Esta expresión revela nuevamente que la transformada de Fourier de la señal truncada o "ventaneada" consta de la suma de réplicas de la transformada de Fourier de la ventana $W\left(e^{j\omega}\right)$ ubicadas en las frecuencias $\pm\omega_0,\,\pm\omega_1,\,$ y escaladas por las amplitudes de las distintas exponenciales complejas que componen la señal original x[n]. La forma del espectro puede alterarse aún más según sea la relación entre las frecuencias ω_0 y ω_1 haciendo que las distintas réplicas se sumen o no en fase, como se muestra en el siguiente Ejemplo.

EJEMPLO 10.2. Efecto de la truncación o ventaneo para una señal compuesta por dos tonos

Sea x[n] la señal de la ecuación (10.10), con $A_0=1, A_1=3/4, \phi_0=\phi_1=0$, de la que se toman N=64 muestras. Para mostrar las características esenciales se graficará solamente la magnitud de la transformada de Fourier.

En la Fig. 10.1 se muestra la transformada de Fourier $\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|$ de la ventana w[n], y en las Figs. 10.4(a)-(d) se grafica el espectro $\left|V\left(e^{j\omega}\right)\right|$ de la señal truncada v[n] para distintos valores de frecuencias ω_0 y ω_1 . En la Fig. 10.4(a), $\omega_0=2\pi/6$, y $\omega_1=2\pi/3$. En las Figs. 10.4(b), 10.4(c) y 10.4(d) la frecuencia $\omega_0=2\pi/14$ se mantiene constante, y la frecuencia ω_1 se decrementa, haciéndose cada vez más cercana a ω_0 .

En la Fig. 10.4(a) la frecuencia y la relación de amplitud de las distintas componentes individuales son evidentes. En particular, la expresión del espectro de la señal truncada (10.12) sugiere que, si no hay solapamiento entre las réplicas del espectro $W\left(e^{j\omega}\right)$ de la ventana a las frecuencias ω_0 y ω_1 , habrá un pico de amplitud $32A_0=32$ en ω_0 y de $32A_1=24$ en ω_1 , ya que $\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|$ tiene un pico de altura igual a 64 (véase la Fig. 10.1). Además, en la Fig. 10.4(a) se observa que los picos ocurren aproximadamente a frecuencias $\omega_0=2\pi/6$, y $\omega_1=2\pi/3$, con amplitudes pico en la proporción correcta (0.75 a 1).

En la Fig. 10.4(b), con $\omega_0=2\pi/14$ y $\omega_1=4\pi/15$, las frecuencias de la señal están más próximas y hay mayor solapamiento entre las réplicas de la transformada de Fourier $\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|$ de la ventana w[n]; aunque todavía es posible reconocer la presencia de dos picos distintivos, la amplitud del

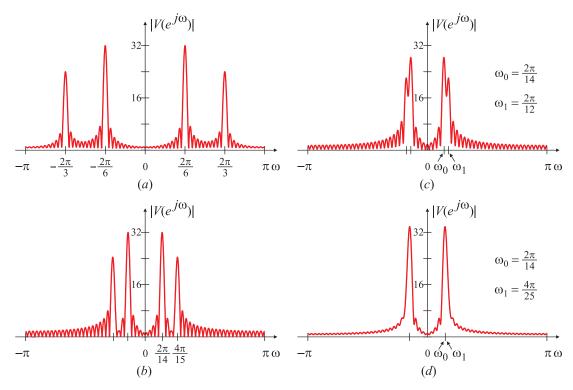


Fig. 10.4. Espectro $V(e^{j\omega})$ de una señal formada por dos cosenos de amplitudes $A_0=1$, $A_1=3/4$ y frecuencias $\omega_0=2\pi/6,\,\omega_1=2\pi/3$ $(a);\,\omega_0=2\pi/14,\,\omega_1=4\pi/15$ $(b);\,\omega_0=2\pi/14,\,\omega_1=2\pi/12$ (c) y $\omega_0=2\pi/14,\,\omega_1=4\pi/25$ (d), truncados por una ventana rectangular de largo N=64.

espectro a la frecuencia $\omega=\omega_0$ está afectada por la amplitud de la señal sinusoidal de frecuencia $\omega=\omega_1$, y viceversa. Esta interacción es consecuencia de la fuga espectral: las componentes frecuenciales de una señal no están ya concentradas en una única frecuencia, sino que se extienden en el rango $[0,2\pi)$ debido a la dispersión espectral introducida por la ventana. En la Fig. 10.4(c), donde $\omega_0=2\pi/14$ y $\omega_1=2\pi/12$, el nivel de fuga espectral es mayor debido a que la diferencia entre las componentes de frecuencias ω_0 y ω_1 de la señal x[n] se ha reducido aún más. Los lóbulos laterales pueden reducir la altura de los máximos si se suman fuera de fase.

Finalmente, en la Fig. 10.4(d), con $\omega_0=2\pi/14$ y $\omega_1=4\pi/25$, el solapamiento espectral es tan significativo que los picos distinguibles en las figuras anteriores se confunden en uno solo: las dos frecuencias presentes en la señales v[n] no podrán ser resueltas (distinguidas) en base a la observación del espectro. \Box

La ventana w[n] del Ejemplo aparece simplemente por el hecho de tomar un conjunto finito de muestras. Por razones obvias, esta ventana se denomina ventana rectangular (o boxcar). Como se verá en la Sección 10.2 se han propuesto otras manera de truncar la señal temporal, pesando la señal x[n] con funciones w[n] que tienden suavemente a cero cuando n tiende a 0 o a N-1.

10.1.2. Efecto del muestreo espectral: pérdidas por ondulación

Frecuentemente, en lugar de trabajar con la TFTD $V(e^{j\omega})$ de la señal v[n] es más conveniente utilizar la TDF V[k]. El motivo es que el mismo análisis puede efectuarse conociendo un conjunto de N valores discretos $\omega_k = (2\pi/N)k$, con $k=0,\ldots,N-1$ en vez de un continuo de frecuencias $0 \le \omega < 2\pi$. Como se estudió en el Capítulo 4, la TDF V[k] de la sucesión truncada v[n] se puede calcular tomando muestras de la transformada de Fourier $V\left(e^{j\omega}\right)$ en N frecuencias discretas uniformemente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k=0,\ldots N-1$. Para el caso en que $x[n] = A\cos\omega_0 n$, la TDFT $V(e^{j\omega})$ de la seña truncada v[n] está dada por (10.9), y por lo tanto la TDF V[k] es

$$V[k] = V(e^{j\omega})|_{\omega = \omega_k = \frac{2\pi}{N}k} = \frac{A}{2}W(e^{j(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)}) + \frac{A}{2}W(e^{j(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0)}).$$

En el caso en que w[n] es la ventana rectangular (10.4), $W(e^{j\omega})$ está dado por (10.5), y entonces,

$$V[k] = \frac{A}{2} e^{-j(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)(\frac{N-1}{2})} \frac{\sin\left[N(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)/2\right]}{\sin\left[(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)/2\right]} + \frac{A}{2} e^{-j(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0)(\frac{N-1}{2})} \frac{\sin\left[N(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0)/2\right]}{\sin\left[(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0)/2\right]}.$$
(10.13)

Si ω_0 coincide con alguna de las frecuencias ω_k donde se evalúa la TDF, por ejemplo si $\omega_0 = (2\pi/N)k_0$, se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen}\left[N(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)/2\right]}{\operatorname{sen}\left[(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)/2\right]} \bigg|_{\omega_0 = \frac{2\pi}{N}k_0} = \frac{\operatorname{sen}\left[N(\frac{2\pi}{N}k - \frac{2\pi}{N}k_0)/2\right]}{\operatorname{sen}\left[(\frac{2\pi}{N}k - \frac{2\pi}{N}k_0)/2\right]} \\
= \frac{\operatorname{sen}\left[\pi(k - k_0)\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{N}(k - k_0)\right]} = N \sum_{r} \delta[k - k_0 - rN]$$

y

$$\left. e^{-j(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)(\frac{N-1}{2})} \right|_{\omega_0 = \frac{2\pi}{N}k_0} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)(\frac{N-1}{2})} = 1 \quad \text{en } k = k_0 + rN.$$

Entonces, para valores de k comprendidos entre 0 y N-1, (10.13) se puede escribir como

$$V[k] = \frac{NA}{2}\delta[k - k_0] + \frac{NA}{2}\delta[k - (N - k_0)].$$
 (10.14)

En otras palabras, la TDF de la señal de frecuencia $\omega_0 = (2\pi/N)k_0$ es un par de impulsos (discretos) en las muestras $k = k_0$ y $k = N - k_0$, que se asocian a las frecuencias

$$\omega_{k_0} = (2\pi/N)k_0,$$

$$\omega_{N-k_0} = (2\pi/N)(N-k_0) = 2\pi - (2\pi/N)k_0 \equiv -\omega_0,$$

lo que se puede interpretar como que, para las señales senoidales $x[n] = A\cos\omega_0 n$ cuya frecuencia ω_0 coincida con algunas de las "frecuencias base" de la TDF ($\omega_0 = \omega_k = 2\pi k/N$), la forma del espectro $X\left(e^{j\omega}\right)$ de la señal $\tilde{x}[n]$ "coincide" con la TDF V[k] de la señal truncada v[n]. Esta "coincidencia" debe tomarse con cierto cuidado:

■ El espectro $X(e^{j\omega})$ está compuesto de impulsos continuos de la forma $\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$ mientras que V[k] está formado por impulsos discretos $\delta[k - k_0 + rN]$.

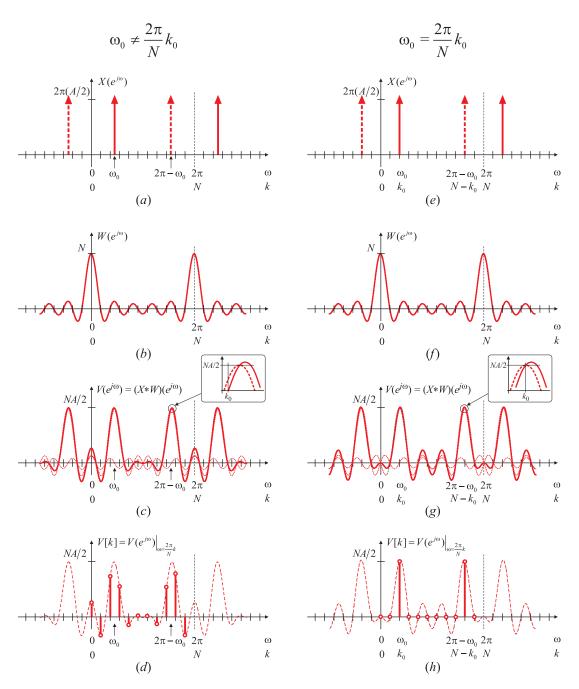


Fig. 10.5. El fenómeno de muestreo espectral, para una señal cuya frecuencia no es múltiplo de $2\pi/N$ (izquierda), y una señal de frecuencia $\omega_0=2\pi k_0/N$ (derecha). Espectro de la señal de longitud infinta (a) y (e); espectro de la ventana rectangular (b) y (f); espectro de la señal truncada (c) y (g); TDF de la señal truncada (d) y (h).

■ El espectro $X(e^{j\omega})$ calculado con la TFTD y el espectro V[k] calculado con la TDF son conceptualmente distintos: el primero es función de una variable *continua* ω , $0 \le \omega < 2\pi$; el segundo depende de una variable *discreta* k, $0 \le k \le N-1$.

La "coincidencia" radica solamente en la forma que tienen ambos espectros. De todos

modos esta es una situación muy particular, pues como la frecuencia ω_0 a determinar coincide con una de las frecuencias ω_k de la TDF, los máximos del espectro de la ventana rectangular $W\left(e^{j\omega}\right)$ quedan ubicados sobre las muestras k_0 y $N-k_0$; las otras frecuencias ω_k coinciden con los ceros de estos espectros.

Este fenómeno se puede interpretar mejor con el auxilio de la Fig. 10.5, en donde se muestra el caso en que la frecuencia ω_0 de la señal no es un múltiplo de $2\pi/N$ (columna de la izquierda) y el caso en que sí lo es (columna de la derecha).

En la Fig. 10.5(a) se muestra el espectro $X\left(e^{j\omega}\right)$ de la señal $\tilde{x}[n]$, que en el rango $[0,2\pi)$ está formado por dos impulsos de amplitud πA centrados en las frecuencias ω_0 y $2\pi-\omega_0$. En el caso de la Fig. 10.5(e) estas frecuencias coinciden con $2\pi k_0/N$ y $2\pi(N-k_0)/N$, respectivamente.

El espectro de la ventana temporal rectangular, que es el mismo en ambos casos, se ilustra en la Fig. 10.5(b) y (f). Como la ventana es de largo N, el espectro tiene N-1 ceros en el rango de frecuencias $[0,2\pi)$ que coinciden con las frecuencias $2\pi k/N$, para $k=1,\ldots,N-1$. Para $k=0,\pm N,\pm 2N,\ldots$ el módulo del espectro vale N.

La Fig. 10.5(c) muestra en línea llena el resultado de la convolución periódica de los espectros de las Figs. 10.5(a) y 10.5(b), cuando ω_0 no es múltiplo de $2\pi/N$. Las líneas de puntos muestran la convolución de la ventana con cada uno de los impulsos. El caso en que ω_0 es un múltiplo entero de $2\pi/N$ se representa en la Fig. 10.5(g). Merecen destacarse dos fenómenos:

- En el caso en que la frecuencia de la señal *no es* un múltiplo de $2\pi/N$ (columna de la izquierda) ni los ceros ni los extremos relativos de la convolución coinciden con las frecuencias $2\pi k/N$, como se observa en la Fig. 10.5(c).
- Si la frecuencia de la señal bajo análisis es un múltiplo de $2\pi/N$ los ceros coinciden con las frecuencias $2\pi k/N$, pero no los extremos relativos, debido al efecto de un kernel de Dirichlet sobre los demás. En particular, el máximo de un kernel comprende a un semiciclo positivo y otro negativo de la cola de otro kernel, como se aprecia en la Fig. 10.5(g). Cuanto más alejados queden entre sí los impulsos, por ejemplo en el caso de señales de frecuencia intermedia, o cuanto mayor sea la longitud de la ventana temporal, que hace que los lóbulos laterales del espectro de la ventana decaigan más rápidamente, tanto menor será el corrimiento de los máximos respecto a las frecuencias $2\pi k/N$.

Finalmente, en la Fig. 10.5(d) se ilustra el resultado de "muestrear" el espectro $V(e^{j\omega})$ de la señal o, en otras palabras, de calcular la TDF V[k]. En el caso en que la frecuencia de la señal no es un múltiplo de $2\pi/N$ (columna izquierda) no se "muestrean" los máximos del espectro, y tampoco los ceros, ya que como se dijo anteriormente no coinciden con las frecuencias $2\pi k/N$.

En el caso en que la frecuencia de la señal es múltiplo de $2\pi/N$ (columna de la derecha) al muestrear el espectro de la señal se detectan *exactamente* los ceros del espectro ya que están ubicados en las frecuencias $2\pi k/N$ como se observa en la Fig. 10.5(h) pero no los máximos, que están ligeramente desplazados de estas frecuencias. Sin embargo, un análisis detallado de la 10.5(g) revela que en este caso el muestreo coincide con el máximo de la convolución del espectro de la ventana con *uno* de los impulsos, y que en ese punto la contribución de los demás kernels es nula. En consecuencia, el valor de la

TDF V[k] en el índice k es igual al que se obtendría al calcular el espectro $X\left(e^{j\omega}\right)$ de la señal a la frecuencia $\omega_k=(2\pi/N)k$:

$$X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = 2\pi \frac{A}{2} \sum_{r} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) + \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k_0}$$

$$= 2\pi \frac{A}{2} \sum_{r} \delta(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0 + 2\pi r) + \delta(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0 + 2\pi r)$$

$$= 2\pi \frac{A}{2} \sum_{r} \delta(\frac{2\pi}{N}k + \frac{2\pi}{N}k_0 + 2\pi r) + \delta(\frac{2\pi}{N}k - \frac{2\pi}{N}k_0 + 2\pi r)$$

$$= 2\pi \frac{A}{2} \sum_{r} \frac{N}{2\pi} \delta(k + k_0 + rN) + \frac{N}{2\pi} \delta(k - k_0 + rN)$$

$$= \frac{NA}{2} \sum_{r} \delta[k + k_0 + rN] + \delta[k - k_0 + rN] = V[k].$$

Este es el único caso en el cual la TDF V[k] es una "representación fiel" del espectro $X\left(e^{j\omega}\right)$. Esta situación tan particular, sin embargo, representa lo que sería deseable: poder estimar $X(e^{j\omega})$ a partir de V[k], independientemente de que las frecuencias de las señales que forman $\tilde{x}[n]$ sean o no múltiplos de $2\pi/N$. Muchas de las técnicas que se presentan en este Capítulo apuntan en esa dirección; sin embargo deben tomarse algunas precauciones, porque el muestreo espectral impuesto por la TDF puede producir resultados que se presen a confusión. El efecto se ilustra mejor con un Ejemplo.

EJEMPLO 10.3. Efecto del muestreo espectral

La Fig.10.6 muestra la transformada de Fourier (TFTD) $V(e^{j\omega})$ y la transformada discreta de Fourier (TDF) V[k] de una señal coseno truncado

$$v[n] = \cos \omega_0 n, \quad \text{con } 0 \le n \le 63 = N - 1$$

para una frecuencia $\omega_0=2\pi/6$, que no es múltiplo de $2\pi/64$ [Fig. 10.6(a)] y $\omega_0=20\pi/64$, que si es múltiplo [Fig. 10.6(d)]. La extensión periódica $\tilde{v}[n]=v[((n))_N]$ de la señal de la Fig. 10.6(a) no resulta en una señal coseno (faltan un par de muestras), mientras que la extensión periódica $\tilde{v}[n]$ de la señal de la Fig. 10.6(d) produce un coseno periódico perfecto. (La interpretación temporal de la fuga espectral se estudia en detalle en la Sección 10.1.3). La transformada de Fourier (TFTD) $V(e^{j\omega})$ de ambas señales es prácticamente idéntica, como se aprecia en las Figs. 10.6(b) y 10.6(e); la única diferencia (apenas observable) es un pequeño corrimiento entre los picos, pues $2\pi/6\cong 20\pi/64$: la diferencia es de un 6.5%. Sin embargo, las transformadas discretas de Fourier (TDF) V[k] de las dos señales son bastante distintas, como ilustran las Figs. 10.6(c) y 10.6(f). No sólo los espectros tienen un aspecto diferente, sino que también varían las amplitudes asociadas a cada una de las componentes espectrales. Para la señal de frecuencia $\omega_0=2\pi/6$ la amplitud es 26.96 [Fig. 10.6(c)], mientras que para la señal de frecuencia $\omega_0=(2\pi/64)10$ la amplitud es $1\times N/2=32$ [Fig. 10.6(f)]. En resumen, la TDF de la señal de frecuencia $\omega_0=2\pi/6$, que no es múltiplo de $(2\pi/64)$, no sólo tiene fuga espectral debida a la truncación temporal, sino que además los máximos del espectro tienen un valor diferente del esperado, como consecuencias del muestreo espectral.

El análisis previo revela que la amplitud del espectro estimada mediante la TDF depende de la frecuencia de la señal que se está analizando. La amplitud observada varía según qué

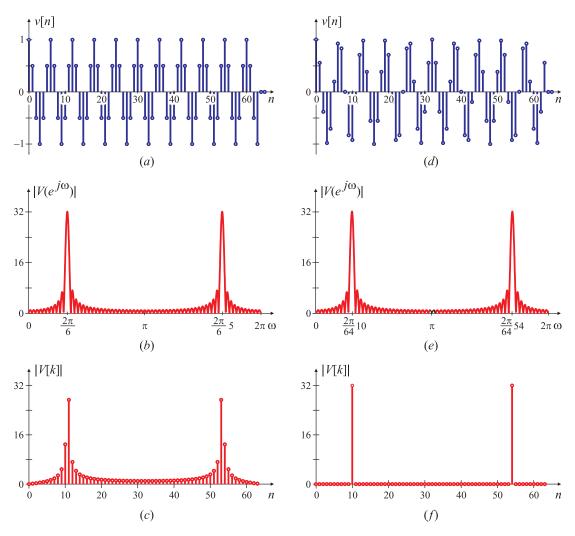


Fig. 10.6. Fuga espectral y pérdidas por ondulación por efecto de muestreo espectral para un tono de frecuencia $\omega_0=2\pi/6$ (izquierda) y $\omega_0=20\pi/64$ (derecha).

tan próxima sea la frecuencia ω_0 de la señal a alguna de las frecuencias $\omega_k=2\pi k/N$. Este efecto se denomina *pérdidas por ondulación* ("scalloping loss") o también efecto *picket-fence* (literalmente, "cerca de postes"), porque la amplitud observada en función de la frecuencia no es constante, sino que "ondula" con crestas que coinciden con las frecuencias ω_k y valles en las frecuencias $2\pi(k+1/2)/N$.

Una analogía gráfica es pensar que el espectro $V\left(e^{j\omega}\right)$ de la señal se observa a través de las rendijas de una cerca de madera (picket fence), que están ubicadas en las frecuencias ω_k . La Fig. 10.7 ilustra esta representación. La Fig. 10.7(a) muestra el caso en que los máximos del espectro no coinciden con ω_k : al observarlo a través de la "cerca" [Fig. 10.7(b)] el espectro toma el aspecto de la Fig. 10.7(c). Este es el caso estudiado en el Ejemplo 10.3, que se muestra en la Fig. 10.6(c). Si los máximos del espectro coinciden con las rendijas, tal como se observa en las Figs. 10.7(d) y 10.7(e) el espectro observado es similar al de la Fig. 10.7(f). Esta situación es la que se presenta en el Ejemplo 10.3 para la señal de frecuencia $\omega_0=(2\pi/64)10$, cuyo espectro se muestra en la Fig. 10.6(f).

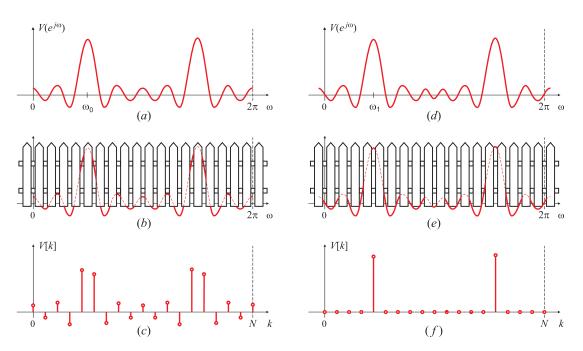


Fig. 10.7. Interpretación gráfica de las pérdidas por ondulación (efecto picket fence).

Si la señal está compuesta por más de un tono se producen otros efectos interesantes, como los que se discuten en el siguiente Ejemplo.

EJEMPLO 10.4. Muestreo espectral en señal multitonal con frecuencias $\omega_i \neq 2\pi k/N$ La sucesión

$$x[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \phi_0) + A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1), \quad -\infty < n < \infty.$$

con $A_0=1,~A_1=3/4,~\omega_0=2\pi/14,~\omega_1=4\pi/15,$ y $\phi_0=\phi_1=0,$ es una señal multitonal cuyas frecuencias componentes no son múltiplos de $2\pi/N.$ Si se trunca con una ventana rectangular w[n]

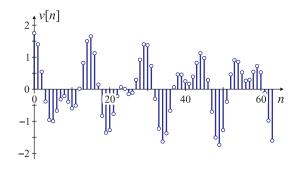
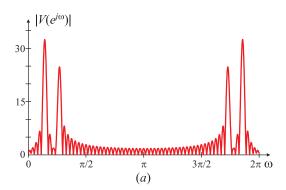


Fig. 10.8. Sucesión $v[n] = \cos[(2\pi/14)n] + (3/4)\cos[(4\pi/15)n], \ 0 \le n \le 63$ con $\omega_i \ne (2\pi/64)k_i$.



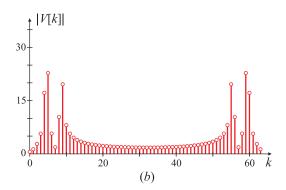


Fig. 10.9. Módulo de la transformada de Fourier $\left|V(e^{j\omega})\right|$ (a) y de la TDF $\left|V[k]\right|$ (b) de la señal v[n] de la Fig. 10.8.

de largo N=64, la señal truncada v[n] se puede escribir como

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + \frac{3}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right), & 0 \le n \le 63, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
 (10.15)

En la Fig. 10.8 se muestra la sucesión ventaneada v[n], y en la Fig. 10.9(a) el módulo de la transformada de Fourier $\left|V\left(e^{j\omega}\right)\right|$ graficado para $0\leq\omega<2\pi$ para comparar con la TDF V[k] de largo N=64 que se representa en Fig. 10.9(b). En esta figura el eje horizontal está en función del número de muestra k de la TDF; el valor k=32 corresponde a $\omega=\pi$. Siguiendo la convención usual para mostrar la TDF de una sucesión temporal, se grafican los valores de la TDF V[k] en el rango k=0 hasta k=N-1, que corresponden a graficar N muestras de la transformada de Fourier $V\left(e^{j\omega}\right)$ en el rango 0 a 2π .

El módulo |V[k]| de la TDF de la Fig. 10.9(b) corresponde a muestras del módulo del espectro $V\left(e^{j\omega}\right)$ que se grafica en la Fig. 10.9(a), donde se aprecia que la mayor magnitud corresponde aproximadamente a $\omega=2\pi/7,5$ y $\omega=2\pi/14$, las frecuencias de las dos componentes de la señal de entrada. Específicamente, la señal $\omega_1=4\pi/15=2\pi(8,5333...)/64$ yace entre las muestras k=8 y k=9 de la TDF, y la señal de frecuencia $\omega_0=2\pi/14=2\pi(4,5714...)/64$ cae entre las muestras k=4 y k=5. Las ubicaciones en frecuencia de los picos de la Fig. 10.9(a) no coinciden con las frecuencias $\omega_k=2\pi k/N$ de las muestras de la TDF. Esto es lo que ocurre habitualmente: la ubicación de las crestas de la TDF V[k] no coincide, en general, con la ubicación de los máximos de la transformada de Fourier $V\left(e^{j\omega}\right)$ ya que estos últimos pueden caer entre las muestras espectrales de la TDF. De aquí que la relación entre las amplitudes de los picos en la TDF V[k] no reflejan necesariamente la relación entre las amplitudes de los máximos espectrales de $V\left(e^{j\omega}\right)$, como se evidencia comparando la Fig. 10.9(a) y la Fig. 10.9(b). Ésta es la situación que se muestra en la columna de la izquierda de la Fig. 10.5.

EJEMPLO 10.5. Muestreo espectral en señal multitonal con frecuencias $\omega_i=2\pi k/N$) La sucesión

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + \frac{3}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right), \quad -\infty < n < \infty, \tag{10.16}$$

se trunca con una ventana rectangular w[n] de longitud N=64, obteniéndose la seña truncada v[n] que se grafica en la Fig. 10.10. Esta sucesión es muy similar a la señal multitonal del Ejemplo

anterior, pero en este caso las frecuencias de las componentes coinciden exactamente con dos de las frecuencias $\omega_k=2\pi k/N$ de la TDF. En particular, la frecuencia $\omega_1=2\pi/8=(2\pi/64)8$ coincide con la muestra k=8 de la TDF, y la frecuencia $\omega_0=2\pi/16=(2\pi/64)4$ con la muestra k=4 de la TDF.

En la Fig. 10.11(a) se muestra el gráfico del módulo del espectro $V\left(e^{j\omega}\right)$ de la sucesión v[n], y en la Fig. 10.11(b) el módulo de la TDF V[k], que son muestras separadas $2\pi/64$ de $V\left(e^{j\omega}\right)$. Aunque la sucesión (10.16) de este Ejemplo es muy similar a la sucesión (10.15) del Ejemplo 10.4, la forma de la TDF en ambos casos es muy diferente. En particular, en este caso la TDF muestra dos fuertes líneas espectrales únicamente a las frecuencias de las componentes sinusoidales de la señal, y el contenido espectral es nulo para el resto de las frecuencias ω_k .

En realidad, el aspecto "limpio" de la TDF de la Fig. 10.11(b) es una ilusión resultante de muestrear el espectro. Comparando la Fig. 10.11(a) con la Fig. 10.11(b), la justificación del aspecto de la Fig. 10.11(b) es que para esta elección de parámetros ω_0 , ω_1 , la transformada de Fourier $V\left(e^{j\omega}\right)$ es exactamente cero en los puntos muestreados por la TDF, salvo los correspondientes a k=4,8,56, y 60. Aunque la señal v[n] de la ecuación (10.16) tiene componentes de casi todas las frecuencias, porque es un coseno truncado como muestra el espectro $V(e^{j\omega})$ de la Fig. 10.11(a), esto no se nota en las muestras V[k] de la TDF debido a la ubicación de las muestras espectrales. Esta sucesión ejemplifica el desarrollo de la columna de la derecha de la Fig. 10.5.

10.1.3. Interpretación temporal de la fuga espectral en la TDF

En general, la truncación v[n] de largo N de una señal sinusoidal $\tilde{x}[n]$ de longitud arbitraria no comprende un número entero de períodos de la señal original, como se muestra en la Fig. 10.12(a); sólo en contados casos ocurre que la señal truncada abarca un número entero de períodos de $\tilde{x}[n]$, como indica la Fig. 10.12(d). En el primer caso la frecuencia de la señal no es un múltiplo entero de $2\pi/N$. En el segundo la frecuencia de la señal si es un múltiplo entero de $2\pi/N$. Sólo hay N de estas frecuencias, dadas por $\omega_k = 2\pi k/N$, con $k=0,\ldots,N-1$, pues valores de k>N resultan en sucesiones de frecuencia $2\pi((k))_N/N$.

Los coeficientes de la TDF de N puntos V[k] de una sucesión de longitud finita v[n] son iguales a los coeficientes de la serie discreta de Fourier $\tilde{V}[k]$ de una señal periódica $\tilde{v}[n]$ formada por la extensión periódica de v[n] (es decir, $\tilde{v}[n] = v[((n))_N]$). Si la sucesión de longitud finita v[n] no contiene un número entero de períodos de la señal sinusoidal $\tilde{x}[n]$ [la frecuencia de la señal no es múltiplo de $2\pi/N$, Fig. 10.12(b)], la extensión periódica de

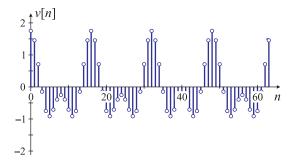


Fig. 10.10. Sucesión $v[n] = \cos[(2\pi/16)n] + (3/4)\cos[(2\pi/8)n], \ 0 \le n \le 63$ con $\omega_i = (2\pi/64)k_i$.

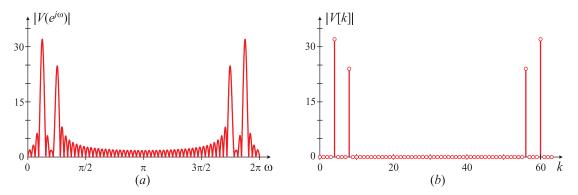


Fig. 10.11. Módulo de la transformada de Fourier $|V(e^{j\omega})|$ (a) y de la TDF |V[k]| (b) de la señal de la Fig.10.10.

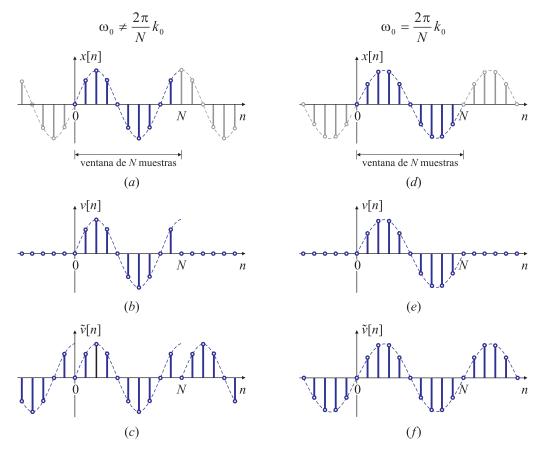


Fig. 10.12. Interpretacion temporal de la fuga espectral.

longitud infinita $\tilde{v}[n]$ presentará discontinuidades en la unión de segmentos adyacentes de la sucesión finita v[n], como muestra la Fig. 10.12(c). En consecuencia $\tilde{v}[n] \neq \tilde{x}[n]$, y por lo tanto $V[k] \neq X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N}$. Estas discontinuidades en el dominio tiempo son las responsables de la aparición de contribuciones en otras frecuencias además de la frecuencia propia de la señal, ya que se hace necesario el auxilio de componentes de alta frecuencia para representar correctamente los "saltos" que presenta la extensión periódica $\tilde{v}[n]$.

En cambio, si la señal truncada v[n] comprende un número entero de períodos de la señal sinusoidal original $\tilde{x}[n]$ [Fig. 10.12(e)], la extensión periódica $\tilde{v}[n]$ coincide con $\tilde{x}[n]$, como se observa en la Fig. 10.12(f). Por lo tanto, $V[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N}$, es decir que la TDF V[k] de la seña truncada v[n] tiene la misma forma que el espectro $X(e^{j\omega})$ de la señal periódica $\tilde{x}[n]$.

EJEMPLO 10.6. Interpretación temporal de la fuga espectral

Este punto de vista alternativo se puede comprobar en los Ejemplos 10.4 y 10.5. Para el Ejemplo 10.4 las componentes frecuenciales $\omega_0=2\pi/14$ y $\omega_1=(2\pi/15)\times 2$ de la señal $\tilde{x}[n]$ no son múltiplos de $2\pi/64$. El período de la señal es $N_0=420$ y la ventana rectangular de N=64 muestras no selecciona un número entero de períodos de $\tilde{x}[n]$. Por lo tanto, la extensión periódica $\tilde{v}[n]$ de v[n] no coincide con $\tilde{x}[n]$, como se muestra en la Fig. 10.12(d) y su espectro V[k] tiene fuga espectral.

En cambio en el Ejemplo 10.5 las componentes de frecuencia de la señal $\omega_0=2\pi/16=(2\pi/64)\times 4$ $(k_0=4)$ y $\omega_1=2\pi/8=(2\pi/64)\times 8$ $(k_1=8)$ son múltiplos de $2\pi/64$, de modo que la señal $\tilde{x}[n]$ es periódica con período $N_0=16$, como se desprende de una observación cuidadosa de la Fig. 10.10. La ventana rectangular de 64 puntos selecciona entonces un número entero de períodos de la señal (cuatro en este caso), y en consecuencia la extensión periódica $\tilde{v}[n]$ de v[n] coincide con $\tilde{x}[n]$. Por lo tanto el espectro V[k] parece no tener fuga espectral, y "se parece más" al espectro $X(e^{j\omega})$ de $\tilde{x}[n]$. Este es un ejemplo de cómo la periodicidad inherente de la TDF brinda una respuesta correcta al problema de calcular el espectro $X(e^{j\omega})$ de una señal periódica $\tilde{x}[n]$ conociendo sólo una porción v[n] de N muestras de longitud de ella.

10.1.4. La TDF como un banco de filtros

Otros enfoques interesantes para estudiar los fenómenos que ocurren en el análisis frecuencial de señales sinusoidales se obtienen al pensar en la TDF como un banco de filtros pasabanda, tal como muestra la Fig. 10.13(a). Idealmente, cada muestra de V[k] debería ser un filtro pasabanda ideal, con un ancho de banda infinitesimal a la frecuencia $\omega_k = 2\pi k/N$. Pero en realidad, debido a la longitud finita de la ventana de observación, la respuesta en frecuencia tiene la forma del kernel de Dirichlet. En efecto, la k-ésima muestra de la TDF V[k] de una señal v[n], expresada como

$$V[k] = \sum_{\ell=0}^{N-1} v[\ell] e^{-j\frac{2\pi}{N}k\ell}$$

$$= v[0] e^{-j\frac{2\pi}{N}0k} + v[1] e^{-j\frac{2\pi}{N}1k} + v[2] e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} + \dots + v[N-1] e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)k}$$

se puede pensar como la salida $y_k[n]$ de un filtro FIR con respuesta impulsiva

$$h_k[n] = \begin{cases} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, & \text{si } 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$
 (10.17)

cuando se lo excita con una entrada $\hat{v}[n]$ de longitud N+1 definida por

$$\hat{v}[n] = \begin{cases} v[n], & \text{si } 0 \le n \le N - 1, \\ 0, & \text{si } n = N, \end{cases}$$
 (10.18)

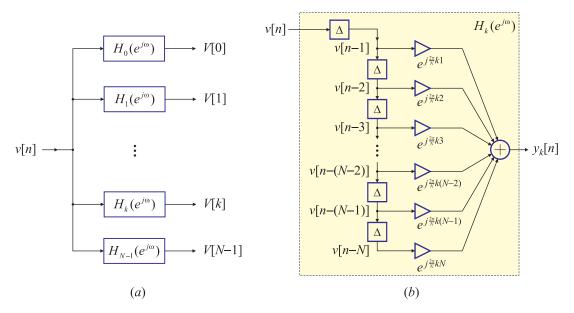


Fig. 10.13. La TDF V[k] como un banco de N filtros pasabanda (a). Realizacón FIR del filtro $H_k(e^{j\omega})$ (b).

evaluada en la muestra n = N. En efecto,

$$\begin{aligned} y_k[n] &= \hat{v}[n] * h_k[n] = \sum_{\ell=0}^N \hat{v}[n-\ell]h_k[\ell] = \sum_{\ell=0}^N \hat{v}[n-\ell]e^{j\frac{2\pi}{N}k\ell} \\ &= \hat{v}[n]e^{j\frac{2\pi}{N}k0} + \hat{v}[n-1]e^{j\frac{2\pi}{N}k1} + \hat{v}[n-2]e^{j\frac{2\pi}{N}k2} + \cdots \\ &+ \hat{v}[n-(N-1)]e^{j\frac{2\pi}{N}k(N-1)} + \hat{v}[n-N]e^{j\frac{2\pi}{N}kN}. \end{aligned}$$

Evaluando $y_k[n]$ en n=N se encuentra que

$$y_k[N] = \hat{v}[N]e^{j\frac{2\pi}{N}k0} + \hat{v}[N-1]e^{j\frac{2\pi}{N}k1} + \hat{v}[N-2]e^{j\frac{2\pi}{N}k2} + \cdots + \hat{v}[N-(N-1)]e^{j\frac{2\pi}{N}k(N-1)} + \hat{v}[0]e^{j\frac{2\pi}{N}kN}$$

y teniendo en cuenta que $e^{j\frac{2\pi}{N}kN}=1,\,e^{j\frac{2\pi}{N}k\ell}=e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-\ell)}$ se tiene

$$\begin{array}{rcl} y_k[N] & = & \hat{v}[N]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-0)} + \hat{v}[N-1]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-1)} + \hat{v}[N-2]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-2)} + \cdots \\ & & + \hat{v}[N-(N-1)]e^{-j\frac{2\pi}{N}k[N-(N-1)]} + \hat{v}[0]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-N)} \\ & = & \hat{v}[N]e^{-j\frac{2\pi}{N}kN} + \hat{v}[N-1]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-1)} + \hat{v}[N-2]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-1)} + \cdots \\ & & + \hat{v}[1]e^{-j\frac{2\pi}{N}k} + \hat{v}[0]. \end{array}$$

Finalmente, aplicando la definición (10.18) de $\hat{v}[n]$ se encuentra que

$$y_k[N] = v[N-1]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-1)} + v[N-2]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-1)} + \dots + v[1]e^{-j\frac{2\pi}{N}k} + v[0]$$
$$= \sum_{\ell=0}^{N-1} v[\ell]e^{-j\frac{2\pi}{N}k\ell} = V[k].$$

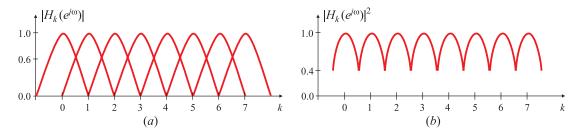


Fig. 10.14. Respuesta de la TDF como un conjunto de filtros pasabanda.

En consecuencia, otra manera de interpretar la TDF de orden N de una señal es como un proceso de filtrado por un banco de N filtros FIR, a razón de un filtro con respuesta impulsiva (10.17) para cada muestra k de la TDF. El valor de la transformada V[k] se obtiene en la N-ésima muestra de la salida de los filtros, como muestra la Fig. 10.13(b). Este esquema representa solo otra manera de interpretar la TDF, y no significa que sea una forma eficiente de implementarla.

La respuesta en frecuencia de cada filtro es

$$H_k(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{-j\omega n} = e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N-1}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{N}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\right]},$$
(10.19)

de modo que la respuesta en frecuencia del k-ésimo filtro tiene la forma del kernel de Dirichlet, con su lóbulo principal centrado en la frecuencia $\omega_k = 2\pi k/N$.

En la Fig. 10.14(a) se han graficado los lóbulos principales del conjunto de ventanas espectrales correspondientes a cada muestra de V[k] (en este caso es N=8) escalados por N, y no se muestran los lóbulos laterales. Como es natural, el ancho de cada lóbulo principal es inversamente proporcional a la longitud N de la sucesión. En las frecuencias $2\pi k/N$ donde se calcula las TDF, cada uno de estos filtros parece un filtro independiente; esto es si la señal de entrada es una exponencial compleja de amplitud unitaria $e^{j\omega n}$, donde ω es un múltiplo entero de $2\pi/N$, resultará en una respuesta que vale la unidad en la frecuencia armónica apropiada, y cero para el resto de las armónicas.

El efecto *picket-fence* se hace evidente si la frecuencia de la señal analizada no coincide con alguno de las armónicas de $2\pi/N$ donde se calcula la TDF. Por ejemplo, una señal que esté entre la tercera y la cuarta armónica, será vista por los filtros centrados en $\omega_3 = (2\pi/N) \times 3$ y en $\omega_4 = (2\pi/N) \times 4$ pero con un valor menor que la unidad. El peor caso es cuando la frecuencia de la señal yace en medio de dos muestras espectrales de la TDF, en cuyo caso la amplitud a la salida de cada uno de los dos filtros más próximos cae³ a

$$\frac{H_k(e^{j\omega})\big|_{\omega=\omega*}}{H_k(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi N}{N}}} = \frac{\{\operatorname{sen}[\pi/(2N)]\}^{-1}}{N}.$$

²Otra forma de calcular la respuesta en frecuencia del k-ésimo filtro de la TDF es observando que la respuesta impulsiva (10.17) es la respuesta impulsiva de la ventana rectangular (10.4) multiplicada por $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$. Por lo tanto, aplicando propiedades de la TFTD, $H_k(e^{j\omega})=W_k(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)})$, como se observa al comparar (10.5) con (10.19).

³Este valor resulta de calcular la magnitud de la respuesta en frecuencia $H_k(e^{j\omega})$ en $\omega^* = 2\pi(k+1/2)/N$. Entonces $\omega^* - 2\pi k/N = \pi/N$, y por lo tanto $H_k(e^{j\omega})\big|_{\omega=\omega^*} = \{ \sin[\pi/(2N)] \}^{-1}$. La relación entre la ganancia de la ventana en esta frecuencia y la ganancia máxima, que vale N y ocurre en $\omega = 2\pi k/N$ es

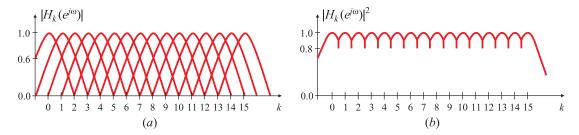


Fig. 10.15. Reducción de las pérdidas por ondulación agregando ceros a la sucesión temporal.

0.637. Si se mide potencia, la amplitud observada es $(0,637)^2 \cong 0,406$. De manera que el espectro de potencia visto por este "conjunto de filtros" no pesa de igual manera señales de distinta frecuencia, y tiene una ondulación que varía en un factor de $1/0,406 \cong 2,5$ a 1. El módulo de la respuesta en frecuencia del *conjunto* de filtros recuerda el perfil de una cerca, Fig. $10.14(b)^4$.

El efecto *picket-fence* dificulta la interpretación del análisis espectral de una señal compuesta por una única componente frecuencial como revela la Fig. 10.7(a) o (c). Este inconveniente es más evidente si la señal que se analiza está formada por un *conjunto* de señales senoidales. Afortunadamente, el problema puede solucionarse de varias maneras:

- 1. modificando el cálculo de la TDF;
- 2. pesando las muestras temporales con una ventana distinta de la rectangular;
- 3. interpolando las muestras de la TDF X[k].

A continuación se estudiarán cada uno de ellos.

10.1.4.1. Disminución de la ondulación modificando el cálculo de la TDF

Extendiendo la longitud de la ventana de observación con un conjunto de *muestras nulas* (*padding* de ceros) se logra que la TDF de esta nueva sucesión tenga mayor resolución, o en otras palabras, se evalúen otras muestras de frecuencia que yacen entre las muestras de la TDF original. Por ejemplo, si se duplica la longitud de la TDF, las nuevas muestras espectrales se ubicarán en medio de las muestras originales.

Si la sucesión original es v[n], para $n=0,\ldots,N-1$, la sucesión "extendida" con el agregado de N ceros se notará como $\hat{v}[n]$, donde

$$\hat{v}[n] = \left\{ \begin{array}{ll} v[n], & \quad \text{si } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \quad \text{para } N \leq n \leq 2N-1. \end{array} \right.$$

Aunque la atenuación es función de N, puede obtenerse una aproximación independiente del largo de la ventana observando que cerca del máximo $H_k(e^{j\omega}) \approx N \operatorname{sinc}[\frac{N}{2\pi}(\omega - \frac{2\pi k}{N})]$. Entonces

$$\frac{H_k(e^{j\omega})\big|_{\omega=\omega*}}{H_k(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}} = \frac{N\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}\right)}{N\operatorname{sinc}\left(0\right)} = \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} = 0,636.$$

⁴Según la bibliografía, *picket fence* se refiere tanto al efecto de observar el espectro a través de las rendijas de una cerca como a la forma de la respuesta de la TDF vista como un conjunto de filtros.

La TDF $\hat{V}[k]$ de la sucesión $\hat{v}[n]$ de largo 2N muestras es

$$\hat{V}[k] = \sum_{\ell=0}^{2N-1} \hat{v}[\ell] e^{-j\frac{2\pi}{2N}k\ell} = \sum_{\ell=0}^{N-1} \underbrace{\hat{v}[\ell]}_{=v[n]} e^{-j\frac{2\pi}{2N}k\ell} + \sum_{\ell=N}^{2N-1} \underbrace{\hat{v}[\ell]}_{=0} e^{-j\frac{2\pi}{2N}k\ell}$$

es decir

$$\hat{V}[k] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{v}[\ell] e^{-j\frac{2\pi}{2N}k\ell}$$

donde se suma hasta N-1 ya que las últimas N muestras de $\hat{v}[n]$ son nulas. Este cálculo también puede pensarse como la acción de filtrar la señal $original\ v[n]$ por un banco de 2N filtros pasabanda, cada uno de ellos con respuesta impulsiva

$$\hat{h}_k[n] = \begin{cases} e^{j\frac{2\pi}{2N}kn}, & \text{si } 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad \text{y} \quad 0 \le k \le 2N-1, \tag{10.20}$$

es decir, un filtro cuya respuesta impulsiva tiene las últimas N muestras nulas. La diferencia entre la respuesta impulsiva (10.17) y la de (10.20) no solo está en la longitud de la respuesta (N versus 2N), sino también en el valor de las muestras ($e^{j(2\pi k/N)n}$ versus $e^{j[2\pi k/(2N)]n}$). La respuesta en frecuencia de cada uno de los filtros que componen el banco es

$$\hat{H}_k(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\omega - \frac{\pi}{N}k\right)\frac{N-1}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{N}{2}\left(\omega - \frac{\pi}{N}k\right)\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{\pi}{N}k\right)\right]}, \quad 0 \le k \le 2N - 1.$$
(10.21)

Comparando (10.21) con (10.19), se observa que el banco está compuesto por 2N filtros del mismo ancho de banda que en el caso anterior, pero separados π/N radianes entre sí (en lugar de $2\pi/N$ radianes). Esto significa las respuestas en frecuencia de este nuevo conjunto de filtros se solapan considerablemente, como ilustra la Fig. 10.15(a). De este modo la ondulación en el espectro de potencia se reduce de un 60% a un 20% [$\approx 1 - \mathrm{sinc}^2(1/4)$] como se observa en la Fig. 10.15(b). La ondulación puede reducirse aún más aumentando el número de ceros agregados a la sucesión v[n] original. Si la sucesión tiene largo N, el agregado de (M-1) bloques de N ceros, llevando la longitud de la sucesión a MN puntos, resulta en una ondulación en el espectro de potencia de

$$\delta \% = 100 \left[1 - \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{1}{2M} \right) \right].$$

El agregar ceros a la sucesión temporal original, si bien no aumenta la información disponible sobre la señal, permite muestrear más finamente $V(e^{j\omega})$, obteniendo un conocimiento más acabado del espectro. Mientras que V[k] especifica el espectro $V(e^{j\omega})$ en las N frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, $k=0,1,\ldots,N$, la TDF $\hat{V}[k]$ revela el valor de $V(e^{j\omega})$ en las MN frecuencias $\hat{\omega}_k = 2\pi k/(MN)$. La resolución frecuencial aumenta porque el agregado de (M-1) bloques de N ceros hace en que cada intervalo $[\omega_k,\omega_{k+1}]$ de las N frecuencias originales aparezcan (M-1) frecuencias intermedias $[\hat{\omega}_{kM+1},\hat{\omega}_{kM+2},\ldots,\hat{\omega}_{(k+1)M-1}]$ que antes no estaban disponibles. Como el ancho de banda del espectro $V(e^{j\omega})$ depende solamente de las N muestras significativas, al aumentar el número de frecuencias $\hat{\omega}_k$ donde se lo observa hace que disminuya la variación relativa de amplitud. En otras palabras, aumentan las posibilidades que la frecuencia (desconocida) ω_0 de una de las componentes tonales de la señal x[n] resulte próxima a algunas de las MN frecuencias $\hat{\omega}_k$.

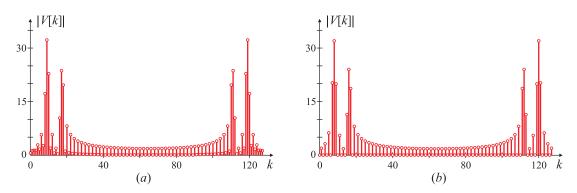


Fig. 10.16. Aumento de la resolución espectral por agregado de ceros a la sucesión temporal. Módulo de la TDF de la señal (a) de la Fig. 10.8 y (b) de la Fig. 10.10.

EJEMPLO 10.7. Disminución de las pérdidas por ondulación agregando ceros a la señal La resolución frecuencial de los Ejemplos 10.4 y 10.5 puede duplicarse agregando 64 ceros a la sucesión v[n] en las ecuaciones (10.15) y (10.16), respectivamente. La TDF V[k] de 128 puntos de la señal resultante se muestra en las Figs. 10.16(a) y 10.16(b). Estos espectros deben compararse con los de las Figs. 10.9(b) y 10.11(b), respectivamente. La mayor diferencia se aprecia en el espectro de la señal formada por tonos de frecuencias múltiplos de $2\pi/N$ [Fig. 10.11(b)] donde ha desaparecido la "similitud" entre V[k] y $X(e^{j\omega})$. Para el caso de la señal del Ejemplo 10.4 el resultado es más favorable, pues el espectro de la señal con ceros agregados [Figs. 10.16(a)] muestra una relación entre las amplitudes de los picos más próxima a la realidad. En cualquiera de los casos la TDF V[k] es más parecida al espectro $V\left(e^{j\omega}\right)$ que se ilustra en las Figs. 10.9(a) y 10.11(a), respectivamente. La mayor resolución frecuencial de las TDF de 128 puntos revela la presencia de otras componentes frecuenciales que no son observables en los espectros V[k] de la Fig. 10.9(b) y menos aún en el de la Fig. 10.11(b). El agregado de ceros impide que la extensión periódica $\hat{v}[n]$ de la señal ventaneada v[n] coincida con $\tilde{x}[n]$, lo que pone de manifiesto la fuga espectral.

10.1.4.2. Disminución de la ondulación usando ventanas temporales

La clave en la disminución de la ondulación es lograr que la respuesta de cada filtro sea lo más angosta posible, y que se solapen lo suficiente como para evitar variaciones importantes en la magnitud de la respuesta global para señales de diferentes frecuencias. En la sección previa este efecto se logró aumentando artificialmente la longitud de la señal a analizar agregándole ceros. Otra manera es pesar las muestras temporales por una ventana distinta a la rectangular, por ejemplo alguna cuya respuesta en frecuencia tenga un mayor ancho de banda, o un *lóbulo principal* más ancho. Aunque de esta forma se disminuye la ondulación, se empeora la resolución frecuencial que es inversamente proporcional al ancho de banda de la ventana.

Para disminuir el efecto de fuga espectral, se "pesan" las muestras de x[n] por valores muy pequeños (o nulos) en las cercanías de n=0 y n=N-1, y con valores cercanos a la unidad en un entorno de n=N/2, o (N-1)/2, según sea N par o impar, respectivamente. De esta manera se reduce la discontinuidad que aparece en la extensión periódica [Fig. 10.12(d)].

Usualmente la ventana temporal w[n] posee las siguientes características (aunque no es imprescindible):

- es real y semipositiva, es decir w[n] > 0;
- tiene longitud finita: w[n] = 0 para n < 0 y para n > N 1;
- tiende suavemente a cero para $n \to 0$ y $n \to N-1$;
- es simétrica⁵, en el sentido que w[n] = w[N-n], para $1 \le n \le N-1$.

La señal "ventaneada" v[n] se obtiene multiplicando muestra a muestra la señal x[n] a analizar por la ventana temporal w[n],

$$v[n] = \begin{cases} x[n]w[n], & \text{si } 0 \le n \le N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

y esta operación puede pensarse como una generalización de la truncación (10.2).

La TDF de la señal "ventaneada" también puede verse como una operación de filtrado por un banco de filtros. En efecto,

$$V[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w[N-n] e^{j\frac{2\pi}{N}k(N-n)}.$$

De manera análoga a los desarrollos de la Sección 10.1.4, esta última expresión puede interpretarse como la convolución de $\hat{v}[n]$ definida por (10.18) con un filtro FIR de respuesta impulsiva

$$h_k[n] = \begin{cases} w[n](e^{j\frac{2\pi}{N}k})^n, & \text{si } 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

evaluada en n=N. Cada muestra V[k] de la TDF puede pensarse como la salida del k-ésimo filtro de respuesta impulsiva $h_k[n]$ evaluada en el instante n=N, y cuya respuesta en frecuencia es

$$H_k(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w[n]e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)n}, \quad 0 \le k \le N-1$$

Si la respuesta en frecuencia de la ventana temporal w[n] es

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w[n]e^{-j\omega n}$$

⁵En realidad la simetría de la ventana es distinta según la aplicación. Si el propósito es el análisis frecuencial se prefiere que la extensión periódica de la ventana tenga período N; de esta forma primera muestra de la ventana concide con la primera muestra de su extensión periódica: w[0] = w[N]. En cambio, para el diseño de filtros FIR se prioriza la simetría respecto al punto medio de la ventana, esto es w[n] = w[N-1-n]; en otras palabras, la primera y la última muestra de la ventana son iguales: w[0] = w[N-1]. En Matlab el primer caso se indica como *muestreo periódico* ("periodic sampling"); el algoritmo genera una ventana de largo N+1 y devuelve las primeras N muestras. El segundo caso se denomina *muestreo simétrico* ("simmetric sampling"), y calcula una ventana de largo N.

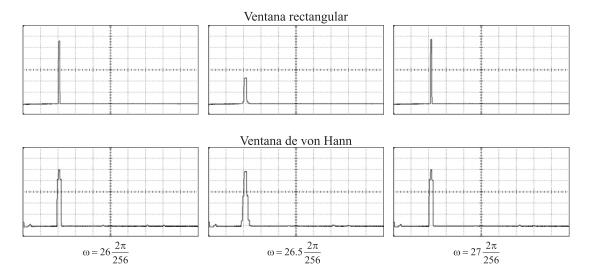


Fig. 10.17. Efecto *picket-fence*: una ventana de variación suave como la de von Hann (abajo) presenta una menor variación de la amplitud de la TDF X[k] en función de la frecuencia de la señal de entrada que la ventana rectangular (arriba).

la respuesta en frecuencia de los filtros $H_k(e^{j\omega})$ del banco de análisis son réplicas de $W(e^{j\omega})$ desplazados $2\pi k/N$ unidades en frecuencia

$$H_k(e^{j\omega}) = W(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)}), \quad 0 \le k \le N - 1.$$

Eligiendo apropiadamente el valor de las muestras temporales w[n], como se estudia en la Sección 10.2 se puede alterar la respuesta en frecuencia de los filtros que forman el banco de análisis, intentando aumentar el ancho del lóbulo principal y la atenuación de los lóbulos laterales. En general, la respuesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ de la ventana w[n] satisface las siguientes propiedades:

- $|W(e^{j\omega})|$ tiene un lóbulo principal en $\omega=0$, y lóbulos laterales a ambos lados.
- Si la m-ésima derivada de la envolvente de w[n] es impulsiva, los lóbulos laterales de $|W\left(e^{j\omega}\right)|$ decaen asintóticamente a razón de 6m dB/octava. Esta característica puede derivarse a partir de la propiedad de la derivación en frecuencia de la TFTD.

Aunque las principales propiedades y características de las ventanas se discuten en la Sección 10.2, la Fig. 10.17 permite apreciar el efecto de usar una ventana para mitigar la ondulación. En dicha figura se muestra el cuadrado del módulo de la TDF X[k] de 256 puntos calculada con un DSP, utilizando dos ventanas distintas; cada pantalla en la figura representa las primeras 128 muestras de la TDF. En la fila superior se ilustran los resultados obtenidos al truncar las muestras de la señal de entrada con una ventana rectangular. Se observa en la columna central que si la frecuencia de la señal no coincide con alguna de las frecuencias de la TDF (en este caso $\omega_k = 2\pi k/256$) la amplitud de la TDF es mucho menor que cuando la frecuencia de la señal coincide con alguna de las ω_k (columnas de la izquierda o derecha). Note que para $\omega = 26,5 (2\pi/256)$ la amplitud es de 2.4 divisiones, mientras que para $\omega = 26 (2\pi/256)$ o $\omega = 27 (2\pi/256)$ la amplitud es de 5.5 divisiones: la variación es del 56 %, aproximadamente.

En la fila inferior se muestran las respuestas obtenidas al aplicar una ventana de von Hann (que se estudia en la Sección 10.4.3). La variación del cuadrado del módulo de X[k] en función de la frecuencia de la señal de entrada es mucho menor: el efecto *picket fence* es menos notorio pues la ventana de von Hann tiene un lóbulo cuyo ancho es aproximadamente el doble que el de la ventana rectangular.

En la figura también se pone de manifiesto que la ventana causa una disminución de resolución frecuencial. Mientras que en la fila superior de la Fig. 10.17 el ancho de cada "impulso" correspondiente a una frecuencia $\omega_k=2\pi k/N$ es de una muestra, en la fila inferior de la figura se nota que este ancho se ha ampliado al menos a *tres* muestras, por lo que la incerteza en la determinación de la frecuencia de la señal es mayor.

10.1.4.3. Disminución de la ondulación por interpolación de las muestras de la TDF

Como se verá en la Sección 10.4.3, el mismo efecto de aplicar una ventana sobre la señal temporal, multiplicando punto a punto cada muestra de la señal por cada uno de los valores de la ventana, puede obtenerse efectuando una suma ponderada de las muestras desplazadas de la TDF. La ventaja de esta aproximación es que en general requiere menos operaciones (sumas y productos) que la aplicación de la ventana a las muestras temporales.

10.2. Ventanas para el análisis frecuencial de señales

Para disminuir los efectos de fuga espectral comentados en la sección 10.1.1 se trata de evitar las discontinuidades en la extensión periódica de las señales (Fig. 10.12). Para ello las muestras temporales los extremos del conjunto de datos se pesan con factores próximos a cero, y los datos centrales del conjunto con factores próximos a la unidad. Esta función ponderadora recibe el nombre genérico de "ventana". En la literatura se han propuesto un gran número de ventanas diferentes, cada una diseñada con alguna finalidad o aplicación determinada.

Tan importante como la "forma temporal" w[n] de la ventana es la forma de su respuesta en frecuencia, $W\left(e^{j\omega}\right)$. Si la señal x[n] se "pesa" temporalmente con una ventana w[n], el espectro de la señal resultante v[n]=x[n]w[n] es la convolución (periódica) del espectro de la señal $X\left(e^{j\omega}\right)$ con el de la propia ventana $W\left(e^{j\omega}\right)$. De allí que para alterar lo menos posible el espectro de la señal el espectro de la ventana debería ser similar a un impulso. Pero por otra parte, esto se traduciría en que la ventana temporal sería infinitamente larga, y por lo tanto no cumpliría con el objetivo de seleccionar un conjunto finito de datos.

La "mejor ventana" es aquella que tiene la menor duración temporal y el menor ancho de banda. Estos son criterios contrapuestos, como queda determinado por el teorema del ancho de banda estudiado en el Capítulo 2, y es precisamente esta situación de compromiso entre longitud y ancho de banda lo que ha dado lugar al desarrollo de un gran número de ventanas con diferentes características, como se verá en la Sección 10.4.

Aunque se han definido varios índices que permiten caracterizar el desempeño de una ventana, como se verá en la Sección 10.3, hay dos que sobresalen sobre el resto, y son el ancho de banda de la ventana, y la atenuación de sus lóbulos laterales. Estos dos parámetros son fácilmente determinados a partir del gráfico de su respuesta en frecuencia

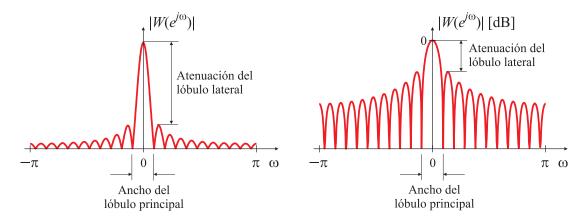


Fig. 10.18. Ancho del lóbulo principal y atenuación de los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia de una ventana genérica, en escala lineal (izquierda) y en dB (derecha).

(Fig. 10.18). El objetivo de una ventana es concentrar la contribución a una frecuencia dada tratando de reducir el cantidad de "fuga" a través de los lóbulos laterales.

La aplicación de una ventana a una señal –ya sea de forma intencional o no, pues el sólo hecho de *truncar* una señal es equivalente a pesar la señal con la ventana rectangular dada por (10.4)– ocasiona pérdida de resolución y fuga espectral:

- la disminución de la resolución, es decir la imposibilidad de distinguir dos componentes de frecuencia muy próximas entre sí, se debe principalmente al ancho del lóbulo principal de $W(e^{j\omega})$;
- el grado de fuga espectral que se manifiesta por la influencia de una de las componentes frecuenciales sobre las demás, depende de la amplitud relativa del lóbulo principal y respecto a los lóbulos laterales de $W\left(e^{j\omega}\right)$.

En general, el ancho del lóbulo principal es inversamente proporcional a la $longitud\ N$ de la ventana mientras que la amplitud de los lóbulos laterales es función de la forma de la ventana; por ello se puede disminuir la fuga espectral utilizando una ventana de forma temporal distinta a la rectangular.

Como se verá más adelante, estas mismas ventanas se utilizan en uno de los métodos de diseño de filtros FIR de fase lineal (con la pequeña diferencia que se indica en la nota al pie de la pág. 23). Para esta aplicación, los parámetros relevantes son, nuevamente, el ancho de banda (ancho del lóbulo principal), la atenuación relativa de los lóbulos laterales respecto al principal, y la pendiente de decaimiento de la atenuación de los lóbulos laterales. Las ventanas típicas para este caso son la rectangular, que se estudia en la Sección 10.4.1, la de von Hann (Sección 10.4.3), la de Hamming (Sección 10.4.4), y la de Kaiser-Bessel (Sección 10.4.8). Esta última es la más popular porque con la variación de un parámetro (β) puede controlarse la relación entre el ancho del lóbulo principal y la atenuación de los lóbulos laterales.

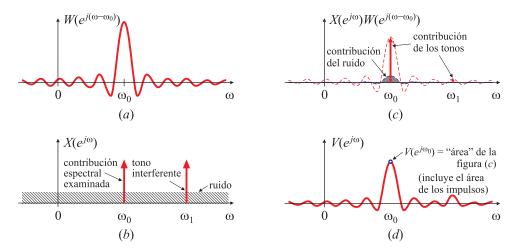


Fig. 10.19. La ventana vista como un filtro espectral.

10.3. Índice de desempeño de las ventanas

En la literatura se han propuesto diferentes tipos de ventanas cuyo propósito es optimizar alguna característica particular. Las ventanas influyen en varios aspectos del análisis de señales, incluyendo la detectabilidad, resolución, rango dinámico, precisión en la detección de tonos, y facilidad de implementación.

Ninguna ventana es "la mejor" en todos los aspectos, y la ventana "correcta" depende de los requerimientos de la aplicación particular. Sin embargo, es útil determinar una serie de parámetros que permitan una comparación objetiva de su desempeño. Los más relevantes son:

- 1. el ancho de banda de ruido equivalente (ABRE);
- 2. la ganancia de procesamiento (GP);
- 3. la correlación por solapamiento (CS);
- 4. las pérdidas por ondulación ("scalloping loss", PO);
- 5. la pérdida de procesamiento de peor caso (PP);
- 6. la fuga espectral (nivel de los lóbulos laterales);
- 7. el mínimo ancho de banda de resolución (AB 6dB).

Seguidamente se analizarán cada uno de estos parámetros. Sin duda, los más importantes son los indicados en los ítem 6 y 7, aunque el ítem 5 es relevante porque agrupa un conjunto de pérdidas inevitables en el análisis frecuencial de señales utilizando la TDF.

10.3.1. Ancho de banda de ruido equivalente (ABRE)

Como mostró el Ejemplo 10.2, la estimación de la amplitud de un tono de una frecuencia está alterada por la contribución de componentes tonales en otras frecuencias. La magnitud de esta contribución depende de qué tan amplio sea el ancho de banda de la ventana,

y también de la atenuación de sus lóbulos laterales. En situaciones reales también influye en la estimación el ruido de banda ancha: la ventana se comporta como un filtro aportando contribuciones de todas las frecuencias (Fig. 10.19). Para mejorar la estimación de la amplitud de un tono específico debe minimizarse el ruido captado, reduciendo el ancho de banda de la ventana. El *ancho de banda de ruido equivalente (ABRE)* de la ventana se define como el ancho de banda de un filtro ideal que tenga la misma ganancia de potencia de pico máxima que la ventana, y que acumule la misma potencia de ruido (Fig. 10.20). Si σ_0 es la potencia de ruido por ancho de banda unitario, la potencia de ruido acumulada por la ventana es

$$P_r = \frac{\sigma_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sigma_0 \sum_{n=0}^{N-1} (w[n])^2,$$

donde la segunda igualdad surge de aplicar la relación de Parseval. El máximo de la ganancia de potencia de la ventana ocurre en $\omega=0$, y está dado por $P_p=\left[W\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=0}\right]^2=\left(\sum_{n=0}^{N-1}w[n]\right)^2$. El ancho de banda de ruido equivalente (ABRE) normalizado por la potencia de ruido por ancho de banda unitario y por el largo N de la ventana es

$$ABRE = \frac{N \sum_{n=0}^{N-1} (w[n])^2}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right)^2}.$$

Cuanto mayor sea el ABRE, peor será el desempeño de la ventana para la estimación de la amplitud.

10.3.2. Ganancia de procesamiento (GP)

Un concepto muy relacionado al ancho de banda de ruido equivalente (ABRE) es la Ganancia de Procesamiento GP (o su inversa, la Pérdida de Procesamiento PP). La GP de la ventana tiene en cuenta la reducción de los valores de las muestras temporales x[n] próximas a los extremos de la ventana, y se define como la relación entre la relación señal a ruido a la salida del filtro y la relación señal a ruido a la entrada del filtro, normalizada por el largo de la ventana.

Para interpretar este concepto es conveniente pensar la TDF como el banco de filtros de la Fig. 10.13. Si la señal de entrada es una exponencial compleja de frecuencia $\omega_k=2\pi k/N$ contaminada por ruido, $x[n]=Ae^{j\omega_k n}+q[n]$, donde q[n] es una sucesión de ruido blanco con varianza σ_q^2 , la salida del k-ésimo filtro debida a la señal será

$$V[k]_{\text{señal}} = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n]w[n])e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} (Ae^{j\omega_k n}w[n])e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$
$$= A\sum_{n=0}^{N-1} w[n] = A W(e^{j\omega})|_{\omega=0}.$$
(10.22)

La salida del filtro depende de la ganancia de continua de la ventana, que vale N para una ventana rectangular, y es menor que N para otros tipos de ventana, ya que las muestras tienden suavemente a cero cerca de los extremos. Esta reducción en el factor de proporcionalidad, que altera la estimación de las amplitudes del espectro, se denomina ganancia

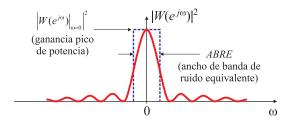


Fig. 10.20. Ancho de banda de ruido equivalente de una ventana.

coherente (GC), y su valor normalizado por el largo del filtro es

$$GC = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n].$$
 (10.23)

La ganancia coherente de potencia es GC^2 .

Por otra parte, la salida del filtro k-ésimo debida al ruido es

$$V[k]_{\text{ruido}} = \sum_{n=0}^{N-1} (q[n]w[n])e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

y la potencia de ruido a la salida del filtro k-ésimo es el valor medio cuadrático de este valor, dado por

$$E\left\{|V[k]_{\text{ruido}}|^{2}\right\} = \sum_{n} \sum_{m} w[n]w[m]q[n]\overline{q[m]}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}e^{j\frac{2\pi}{N}km} = \sigma_{q}^{2} \sum_{n=0}^{N-1} w^{2}[n] \qquad (10.24)$$

donde $E\{\cdot\}$ es el operador esperanza. La ganancia de potencia de ruido (10.24) es la *suma* de los cuadrados de los elementos de la ventana, mientras que la ganancia de potencia de señal [el cuadrado de (10.23)] es el *cuadrado de la suma* de los elementos de la ventana.

Finalmente

$$GP = \frac{1}{N} \frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{1}{N} \frac{A^2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right)^2 / \left(\sigma_q^2 \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]\right)}{A^2/\sigma_q^2} = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right)^2}{N \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]} = \frac{1}{ABRE}.$$

La GP es la recíproca del ABRE, i.e., un gran ABRE significa que la ganancia de procesamiento es reducida. Esto es razonable, ya que la potencia de ruido que afecta la estimación espectral crece cuanto mayor sea el ancho de banda. En la literatura se suele utilizar también la ganancia coherente de potencia, el cuadrado de la GP. La pérdida de procesamiento (PP) es la inversa de la GP, y por lo tanto, coincide con el ancho de banda de ruido equivalente.

10.3.3. Correlación por solapamiento (CS)

Cuando se efectúa el análisis frecuencial de una sucesión extremadamente larga, es frecuente particionarla en subsucesiones de longitud N, donde N se elige de acuerdo a la resolución frecuencial deseada,

$$\Delta f = \beta \, \frac{2\pi}{N}.$$

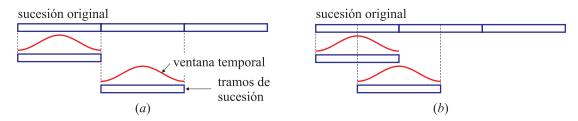


Fig. 10.21. Partición para procesamiento sin solapamiento (a) y con solapamiento (b).

El coeficiente β refleja el incremento en el ancho de banda debido a la ventana adoptada. El cociente $2\pi/N$ es la mínima resolución obtenible con una TDF de orden N (utilizando una ventana rectangular) y suele denominarse *resolución de la TDF*. El coeficiente β suele elegirse como el ancho de banda de ruido equivalente (*ABRE*), expresado en número de muestras.

Si el procesamiento (ventaneado + TDF) se aplica a tramos que no se solapan entre s í [Fig. 10.21(a)], se ignora una parte importante de la sucesión original, ya que la ventana tiende a cero en las muestras cercanas a los extremos. Si la transformada se utiliza para detectar tonos de corta duración, el análisis efectuado con segmentos de la señal que no se solapan puede omitir algún evento, sobre todo si este ocurre cerca de los extremos de la ventana. Para evitar la pérdida de datos es frecuente calcular las TDF de tramos de la sucesión original que contengan elementos comunes, como se observa en la Fig. 10.21(b). Es habitual que el solapamiento sea de un 50% o un 75%. Aunque se incrementa el volumen de cálculo requerido, pues para analizar la sucesión deben calcularse un número mayor de TDFs, las ventajas obtenidas justifican el esfuerzo adicional.

Para reducir la varianza de las mediciones se promedia el cuadrado del módulo de TDF sucesivas. Si se promedian K mediciones independientes, con idéntica distribución, la varianza del promedio de las K medidas σ^2_{PROM} es 1/K de la varianza individual σ^2_{MED} de cada medición,

$$\frac{\sigma_{\text{PROM}}^2}{\sigma_{\text{MED}}^2} = \frac{1}{K}.$$
 (10.25)

Al solapar las subsucesiones se pierde la propiedad de independencia, de modo que la reducción en la varianza no sigue la ley (10.25). El grado de correlación entre las componentes aleatorias en transformaciones sucesivas en función del solapamiento r, es

$$c(r) = \frac{\sum_{k=0}^{rN-1} W[k]W[k+(1-r)N]}{\sum_{k=0}^{rN-1} W^{2}[k]}$$
(10.26)

donde rN es la cantidad de muestras que se solapan entre cada subsucesión. La variación de la varianza en función del coeficiente de correlación (10.26) se calcula como:

$$\frac{\sigma_{\text{PROM}}^2}{\sigma_{\text{MED}}^2} = \begin{cases} \frac{1}{K} \left[1 + 2c^2(\frac{1}{2}) \right] - \frac{2}{K^2}c^2(\frac{1}{2}), & \text{para un solapamiento del 50 \%,} \\ \frac{1}{K} \left[1 + 2c^2(\frac{3}{4}) + 2c^2(\frac{1}{2}) + 2c^2(\frac{1}{4}) \right] \\ - \frac{2}{K^2} \left[c^2(\frac{3}{4}) + 2c^2(\frac{1}{2}) + 3c^2(\frac{1}{4}) \right], & \text{para un solapamiento del 75 \%.} \end{cases}$$

Los términos negativos en (10.27) pueden despreciarse si el número de secciones K es mayor que 10. Además, para ventanas "buenas" (Sección 10.3.8), c^2 (1/4) \ll 1, y también

puede omitirse este término con error despreciable. En general, para buenas ventanas, la transformadas calculadas con un solapamiento del 50 % son prácticamente independientes.

10.3.4. Pérdida por ondulación (PO)

La ganancia de procesamiento GP mide la ganancia de la ventana cuando la frecuencia de la señal a analizar coincide con alguna de las frecuencias ω_k de la TDF. La *pérdida por ondulación*, o efecto *picket-fence*, mide la pérdida adicional en la ganancia que sufre una señal sinusoidal cuya frecuencia esté en medio de dos frecuencias de la TDF. La ganancia de una señal de frecuencia $\omega_{k+1/2} = 2\pi(k+1/2)/N$ es

$$\begin{split} V\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=\omega_{k+1/2}} &= \sum_{n=0}^{N-1} (x[n]w[n])e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} w[n]e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})n}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} w[n]e^{j\frac{\pi}{N}n} = W\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=\pi/N} \end{split}$$

mientras que la ganancia de una señal de frecuencia ω_k es (10.22)

$$V\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=\omega_k} = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] = W\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=0}$$
.

La pérdida por ondulación es el cociente entre estas dos ganancias,

$$PO = \frac{V\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega = \omega_{k+1/2}}}{V\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega = \omega_{k}}} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w[n] e^{j\frac{\pi}{N}n}}{\sum_{m=0}^{N-1} w[n]} = \frac{\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|\big|_{\omega = \pi/N}}{\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|\big|_{\omega = 0}}$$

es decir que la relación entre las ganancias de dos señales de frecuencia ω_k y $\omega_{k+1/2}$ es igual a la relación de ganancias de la ventana a frecuencia cero y a frecuencia $(1/2)(2\pi/N)$. Las pérdidas por ondulación representan la máxima atenuación de la ganancia de procesamiento GP debida a la frecuencia de la señal⁶.

10.3.5. Pérdida de procesamiento de peor caso (PP)

La pérdida de procesamiento de peor caso está relacionada con la mínima amplitud de un tono inmerso en ruido que es posible detectar, y se define como la suma de la máxima pérdida por ondulación PO, y de la pérdida de procesamiento PP=1/GP=ABRE. Este número indica la reducción en la relación señal a ruido de la salida como resultado del ventaneo y la "peor ubicación" de la frecuencia de la señal.

La pérdida de procesamiento de peor caso está comprendida entre 3.0 dB y 4.3 dB; una ventana es "mala" si su pérdida de procesamiento de peor caso excede 3.8 dB (Sección 10.3.8).

 $^{^6}$ Para el caso de la ventana rectangular, la pérdida por ondulación es de 0,636 o 3,92 dB, como se calculó en la nota 3 de la página 19.

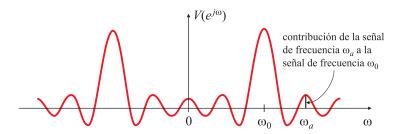


Fig. 10.22. Efecto de la fuga espectral de una ventana.

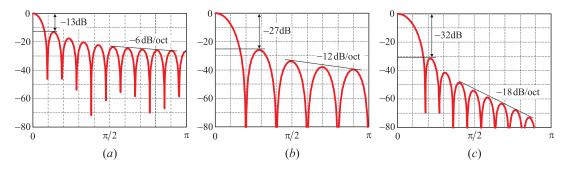


Fig. 10.23. Atenuación y pendiente de decrecimiento de los lóbulos laterales de distintas ventanas: rectangular (a); triangular (b) y von Hann (c).

10.3.6. Fuga espectral

La estimación de la amplitud de un tono no sólo se ve influida por el espectro del ruido de banda ancha, como se muestra en la Fig. 10.19, sino también por las señales de banda angosta que quedan comprendidas dentro del ancho de banda de la ventana. Como ilustra la Fig. 10.22, un tono de frecuencia ω_a también contribuye a la estimación de la amplitud del tono de frecuencia ω_0 ; de aquí el nombre de "fuga" espectral. Esta contribución depende de la ganancia en la frecuencia ω_a de la función transferencia de una ventana centrada en ω_0 o, en otras palabras, del nivel de atenuación de los lóbulos laterales.

Los tonos interferentes contribuyen con distintos módulos y fases, por lo que el máximo del espectro puede desplazarse respecto a la frecuencia verdadera de la señal (Fig. 10.5), lo que dificulta detectar señales de pequeña amplitud próximas en frecuencia a señales de amplitud mucho mayor. Estos errores se incrementan a medida que disminuye el nivel de atenuación de los lóbulos laterales. Si los lóbulos laterales no decaen rápidamente, aún frecuencias "lejanas" podrían interferir en la estimación de amplitud. Por ello, es deseable que la ventana no sólo exhiba lóbulos laterales de pequeña amplitud sino también que la transición del lóbulo principal a los lóbulos laterales sea rápida. De aquí que el comportamiento de una ventana respecto a la fuga espectral se caracterice con el nivel de atenuación de los lóbulos laterales más cercanos al lóbulo principal, y la pendiente de decrecimiento asintótico de la envolvente de dichos lóbulos, como se muestra en la Fig. 10.23.

10.3.7. Mínimo ancho de banda de resolución

El mínimo ancho de banda de resolución mide cuál es la diferencia en frecuencia necesaria para que con una dada ventana puedan resolverse un par de componentes tonales de igual intensidad a partir de la observación de los lóbulos principales, independientemente de su ubicación frecuencial. Normalmente, la superposición de dos picos espectrales idénticos se puede resolver si no se solapan menos que el ancho de banda de 3 dB [Fig. 10.24(a)]. Sin embargo, las componentes espectrales adyacentes están pesadas por la ventana y sus espectros se suman coherentemente, por lo que la ganancia de potencia en el punto de cruce debe ser menor que 0.5, o, en otras palabras, los cruces de las respuestas en frecuencia de la ventana deben ocurrir más allá del ancho de banda de 6 dB, como se muestra en la Fig. 10.24(b). El ancho de banda de 6 dB indica entonces el mínimo ancho de banda de resolución.

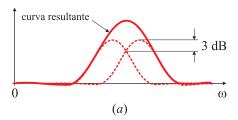
10.3.8. Comparación de los índices de desempeño de distintas ventanas

La Tabla 10.1 condensa la información de los parámetros⁷ comentados en las sección anterior para un conjunto de ventanas que serán analizadas en la Sección 10.4.

De la Tabla 10.1 se observa que, como el ancho de banda de ruido equivalente (*ABRE*) siempre excede el ancho de banda de 3 dB, la diferencia entre estos dos índices es un buen indicador del comportamiento global de la ventana. Se ha determinado empíricamente que este índice oscila entre un 4.0 % a 5.5 % para las "buenas" ventanas. Aquellas que superan este valor tienen un lóbulo principal muy ancho, o la estructura de sus lóbulos laterales presenta poca atenuación, y por lo tanto tienen gran pérdida de procesamiento (*PP*) o pobres capacidades de detección de señales compuestas por un par de tonos próximos.

Aunque la Tabla 10.1 permite comparar los parámetros de distintos tipos de ventanas, no evidencia cuáles son los parámetros más relevantes, que probablemente son el nivel de amplitud de los lóbulos laterales, vinculado a la fuga espectral, y las pérdidas de procesamiento de peor caso. La Fig. 10.25 muestra la posición relativa de las ventanas con respecto a estos dos parámetros. Las ventanas ubicadas en el extremo inferior izquierdo de la figura son ventanas con buen desempeño, ya que tienen bajos lóbulos laterales y ba-

 $^{^{7}}$ Los valores de algunos parámetros pueden diferir de los que se observan en los gráficos de la Sección 10.4 pues fueron calculados promediando los parámetros de ventanas de longitud $N=400,\,500,\,600,\,700,\,800,\,900,\,1000.$



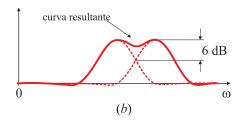


Fig. 10.24. Resolución espectral de frecuencias próximas: resolución insuficiente (a); resolución crítica (b).

Tabla 10.1. Ventanas y figuras de mérito. GC: Ganancia coherente. ABRE: ancho de banda de ruido equivalente. AB 3 dB: ancho de banda de 3 dB. PO: pérdidas por ondulación. PP: pérdidas de procesamiento de peor caso. AB 6 dB: ancho de banda de 6 dB. CS: corrección por solapamiento. Los nombres resaltados indican las ventanas más usadas.

VENTANA		Nivel lóbulos laterales	Pendiente lóbulos laterales	GC	ABRE	AB 3dB	PO	PP	AB 6dB	CS	
		(dB)	(dB/octava)		(muestras)	(muestras)	(dB)	(dB)	(muestras)	75%	50%
Rectangular		-13	-6	1.00	1.00	0.89	3.92	3.92	1.21	75.0	50.0
Bartlett		-27	-12	0.50	1.34	1.28	1.82	3.07	1.77	72.1	24.9
Hamming		-43	-6	0.54	1.36	1.30	1.75	3.10	1.82	70.9	23.3
Riesz		-21	-12	0.67	1.20	1.16	2.22	3.02	1.59	76.7	34.2
Riemann		-26	-12	0.59	1.30	1.25	1.88	3.03	1.73	73.6	27.2
de la Valle-Poussin		-53	-24	0.37	1.92	1.82	0.89	3.73	2.56	49.7	4.9
Bohman		-46	-24	0.40	1.79	1.70	1.02	3.55	2.38	54.9	7.3
Blackman E	xacta	-68	-6	0.46	1.57	1.52	1.33	3.29	2.13	62.7	14.0
Blackman		-58	-18	0.42	1.73	1.65	1.09	3.48	2.30	57.0	9.0
Flat top		-42	0	0.28	2.97	2.94	0.00	4.73	3.57	25.5	-7.9
Blackman-	máx At3T	-70	-6	0.42	1.71	1.66	1.13	3.45	1.81	57.2	9.6
Harris	mín AB-3T	-62	-6	0.45	1.61	1.56	1.27	3.34	2.19	61.0	12.6
	máx At4T	-92	-6	0.36	2.01	1.90	0.82	3.85	2.67	46.4	3.7
	mín AB-4T	-74	-6	0.40	1.79	1.74	1.03	3.56	2.44	53.9	7.4
	Nuttall	-92	-6	0.36	1.98	1.88	0.85	3.81	2.63	47.4	4.1
cos ^α (x)	α = 1.0	-23	-12	0.64	1.24	1.19	2.09	3.01	1.64	75.8	31.7
(von Hann)	$\alpha = 2.0$	-32	-18	0.50	1.50	1.44	1.42	3.19	2.00	66.2	15.6
	α = 3.0	-39	-24	0.42	1.74	1.66	1.07	3.47	2.32	57.0	8.4
	α = 4.0	-47	-30	0.37	1.95	1.86	0.86	3.76	2.59	48.9	4.2
Gauss	α = 2.5	-42	-6	0.50	1.45	1.37	1.58	3.18	1.92	67.5	19.3
	α = 3.0	-55	-6	0.42	1.70	1.60	1.16	3.47	2.26	57.3	10.2
	α = 3.5	-69	-6	0.36	1.98	1.86	0.87	3.83	2.62	47.0	4.6
Dolph-	α = 2.5	-50	0	0.52	1.40	1.33	1.68	3.13	1.85	69.6	21.7
Chebyshev	α = 3.0	-60	0	0.48	1.52	1.45	1.42	3.24	2.02	64.9	16.0
	α = 3.5	-70	0	0.44	1.64	1.55	1.23	3.37	2.18	60.5	11.7
	α = 4.0	-80	0	0.41	1.74	1.66	1.09	3.50	2.32	56.3	8.6
Kaiser-	$\beta = 2.0\pi$	-46	-6	0.49	1.50	1.43	1.45	3.21	2.00	66.0	16.8
Bessel	β = 2.5 π	-57	-6	0.44	1.65	1.58	1.20	3.38	2.20	59.9	11.1
	$\beta = 3.0\pi$	-69	-6	0.40	1.80	1.71	1.02	3.57	2.39	54.3	7.3
	$\beta = 3.5\pi$	-82	-6	0.37	1.93	1.83	0.89	3.75	2.57	49.2	4.5
Tukey	α = 0.25	-14	-18	0.87	1.10	1.01	2.95	3.38	1.38	74.2	44.3
	α = 0.50	-15	-18	0.75	1.22	1.15	2.23	3.11	1.58	72.9	36.2
	α = 0.75	-19	-18	0.62	1.36	1.31	1.72	3.07	1.80	70.7	24.9
Poisson	α = 2.0	-19	-6	0.43	1.31	1.21	2.03	3.22	1.70	70.1	27.5
	α = 3.0	-24	-6	0.32	1.66	1.46	1.43	3.63	2.09	55.1	14.9
	α = 4.0	-31	-6	0.25	2.08	1.75	1.02	4.20	2.59	40.6	7.3
Cauchy	α = 3.0	-31	-6	0.42	1.49	1.34	1.67	3.40	1.91	61.8	19.9
	α = 4.0	-35	-6	0.33	1.78	1.52	1.33	3.83	2.22	49.0	12.9
	α = 5.0	-30	-6	0.27	2.08	1.69	1.10	4.28	2.55	38.6	8.8

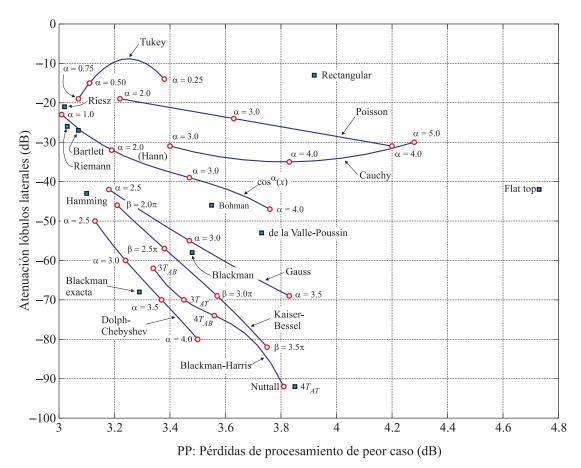


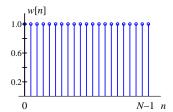
Fig. 10.25. Comparación de ventanas en función de la atenuación de los lóbulos laterales y las pérdidas de procesamiento de peor caso. Las "mejores ventanas" se ubican en el margen inferior izquierdo.

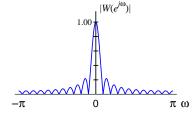
jas pérdidas de procesamiento de peor caso. Las diferencias de las *PP* entre varias ventanas es menor que 1.0 dB, y para buenas ventanas es menor que 0.7 dB.

10.4. Algunas ventanas típicas

A continuación se describen algunas de las ventanas de uso más frecuente. La primera ventana que se presenta es la ventana rectangular, que ya fue tratada en la Sección 10.1.1. Evidentemente, ésta es una ventana de aplicación muy sencilla en el dominio tiempo, y muy fácil de analizar en el dominio frecuencial. Sin embargo la baja atenuación de los lóbulos laterales hace que la fuga espectral sea importante. Para aliviar estos efectos se han desarrollado muchos tipos de ventanas diferentes, que en general llevan el nombre de quienes las propusieron por primera vez. Como característica común presentan una variación suave desde su valor mínimo (usualmente cero) hasta su valor máximo, lo que disminuye la amplitud de los lóbulos laterales (minimizando a su vez la fuga espectral) a costa de aumentar el ancho del lóbulo principal (perdiendo resolución).

Para cada una de las ventanas que se presentan se adjuntan tres gráficos que permiten





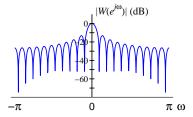


Fig. 10.26. Ventana rectangular.

una comparación visual entre los distintos tipos (vea por ejemplo la Fig. 10.26). El gráfico de la izquierda muestra la forma de la ventana en el dominio temporal (su respuesta impulsiva). El gráfico central ilustra el módulo de la respuesta en frecuencia de la ventana normalizado por la longitud N de la ventana,

$$\left|W_N\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{1}{N} \left|\sum_{n=0}^{N-1} w[n]e^{-j\omega n}\right|,$$

de modo que la ganancia coherente es el valor de $\left|W_N\left(e^{j\omega}\right)\right|$ en $\omega=0$. Finalmente, a la derecha de la figura se observa la respuesta en frecuencia de la ventana en dB, normalizado al valor de frecuencia cero,

$$|W_{dB}(e^{j\omega})| = 20 \log_{10} \left| \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w[n] e^{-j\omega n}}{\sum_{n=0}^{N-1} w[n]} \right|,$$

que permite observar con mejor detalle la relación entre el lóbulo principal y los lóbulos laterales, como así también la estructura de los mismos. En todos los casos se ha adoptado una longitud N=20.

10.4.1. Ventana Rectangular

La ventana rectangular (10.4) "pesa" igualmente N muestras de la señal x[n],

$$w[n] = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \quad \text{en caso contrario.} \end{array} \right.$$

La respuesta en frecuencia $W\left(e^{j\omega}\right)$ fue calculada en (10.5), y se repite aquí por conveniencia:

$$W_R\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\operatorname{sen}\left(N\omega/2\right)}{\operatorname{sen}\left(\omega/2\right)}.$$
(10.28)

El primer cero de la respuesta en frecuencia ocurre cuando $N\omega_1/2=\pi$, por lo que el ancho del lóbulo principal es $2\omega_1=4\pi/N$. El primer lóbulo lateral (que también es el mayor de los lóbulos laterales) ocurre aproximadamente a $\omega=3\pi/N$, y su magnitud es

$$W\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=\frac{3\pi}{N}} = \left|\frac{\operatorname{sen}(3\pi/2)}{\operatorname{sen}[3\pi/(2N)]}\right| \cong \frac{2N}{3\pi} \quad \text{si } N \gg 1.$$

Comparando la amplitud de este lóbulo con la amplitud del lóbulo principal, que es igual a N, la magnitud del primer lóbulo lateral respecto al lóbulo principal es $2/(3\pi)=21{,}22\,\%$ $\equiv 13$ dB.

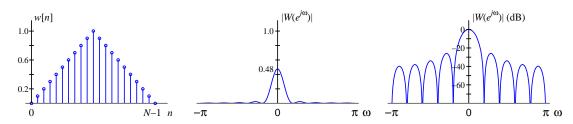


Fig. 10.27. Ventana triangular o de Bartlett.

10.4.2. Ventana Triangular o de Bartlett

Como el efecto Gibbs ocurre por la brusca variación de la amplitud de la ventana de 0 a 1 (y viceversa), Bartlett sugirió una transición más gradual en la forma de una ventana triangular, cuya respuesta impulsiva es

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N}, & 0 \le n \le \frac{N}{2}, \\ 2 - \frac{2n}{N}, & \frac{N}{2} \le n \le N - 1, \end{cases}$$

si N es par⁸. La respuesta en frecuencia está dada por

$$W_T(e^{j\omega}) = \frac{2}{N} e^{-j(\frac{N}{2}-1)\omega} \left[\frac{\operatorname{sen}(N\omega/4)}{\operatorname{sen}(\omega/2)} \right]^2,$$

que es el cuadrado de la respuesta en frecuencia de una ventana rectangular de ancho N/2 (la ventana triangular se puede pensar como la convolución temporal de dos ventanas rectangulares de longitud N/2). La atenuación de los lóbulos laterales es el doble que para una ventana rectangular, y la amplitud del primer lóbulo lateral es aproximadamente 26 dB menor que la amplitud del lóbulo principal. Los lóbulos laterales decaen a razón de 12 dB/octava. Harris (1978) demostró que la ventana triangular es la ventana más simple cuya transformada de Fourier es positiva.

10.4.3. Ventana $\cos^{\alpha}(n\pi/N)$, $\sin^{\alpha}(n\pi/N)$ (de von Hann para $\alpha=2$)

Esta es una familia de ventanas que dependen de un parámetro α , usualmente entero. La expresión general es $w[n]=\cos^{\alpha}\left(\frac{n}{N}\pi\right)$, si $-(N-1)/2\leq n\leq (N-1)/2$, para ventanas no causales, de aplicación en filtros, y

$$w[n] = \mathrm{sen}^{\alpha}\left(\frac{n}{N}\pi\right)$$
, si $0 \le n \le N-1$,

 $^{^8}$ En general hay ligeras variaciones en la definición adoptada según los diferentes autores. La definición debe cambiarse ligeramente según sea N impar o par. Pero no son éstas las únicas diferencias; por ejemplo en este caso, aunque la ventana es simétrica respecto a N/2, "falta" la última muestra que no vale 0, sino 1/(N-1) o 1/N. Otros autores no incluyen las muestras con valor nulo como parte de la ventana. En MATLAB la ventana es perfectamente simétrica para N par o impar, y w[0] = w[N-1] = 0, aunque no siempre es así. Por ejemplo, las funciones w=hann(N) y w=hanning(N) calculan la ventana de von Han, pero en la primera w[0] = w[N-1] = 0, y en la segunda $w[0] = w[N-1] \neq 0$. En la práctica estas diferencias son menores y no afectan fundamentalmente la calidad de la ventana o el resultado de los análisis que se efectúen con ella.

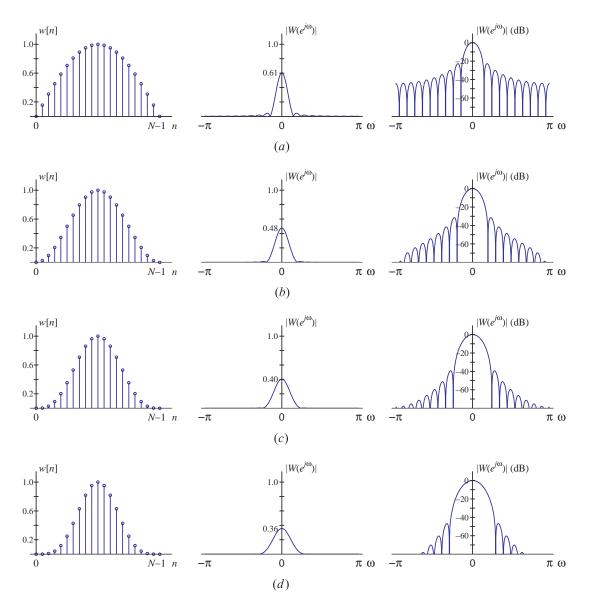


Fig. 10.28. Familia de ventanas $\cos^{\alpha}(x)$. $\alpha=1$ (a); $\alpha=2$ (von Hann) (b); $\alpha=3$ (c); $\alpha=4$ (d).

para ventanas causales que se usan en el cálculo de la TDF. En cualquiera de los dos casos, se las suele identificar como "ventanas coseno".

La ventana de Hann (también es conocida como Hanning) debe su nombre al meteorólogo austríaco Julius von Hann. Es el miembro de la familia de ventanas senoidales para $\alpha=2$, y se define como

$$w_{Hann}[n] = \operatorname{sen}^2\left(\frac{n}{N}\pi\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right], \quad 0 \le n \le N - 1.$$

La respuesta en frecuencia puede calcularse reemplazando el coseno por su forma expo-

nencial compleja,

$$W_{Hann}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w[n]e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n} \right) e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2} W_R(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} W_R(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N})}) - \frac{1}{4} W_R(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{N})})$$
(10.29)

donde $W_R(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular (10.28). La relación (10.29) muestra que pesar las muestras v[n] de la señal temporal por la ventana de Hann es equivalente a efectuar un promedio ponderado del espectro V[k] de la señal v[n] sin ventanear corrido en $\pm 2\pi/N$. La TDF de $W_{Hann}(e^{j\omega})$ es

$$W_{Hann}[k] = W_{Hann}(e^{j\omega})\big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = \frac{1}{2}W_R[k] - \frac{1}{4}W_R[((k-1))_N] - \frac{1}{4}W_R[((k+1))_N],$$

donde $W_R[k]$ es la TDF de la ventana rectangular. El primer lóbulo lateral de la ventana de Hann tiene una amplitud 32 dB menor que la del lóbulo principal, y los lóbulos laterales decaen a razón de 18 dB/octava.

10.4.4. Ventana de Hamming

La ventana de Hamming es similar a la de von Hann:

$$w_{Hamm}[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right), \quad 0 \le n \le N - 1.$$

La derivación de la respuesta en frecuencia es similar a la de la ventana de Hann, y resulta

$$W_{Hamm}(e^{j\omega}) = 0.54W_R(e^{j\omega}) - 0.23W_R(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N})}) - 0.23W_R(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{N})}),$$

0

$$W_{Hamm}[k] = 0.54W_R[k] - 0.23W_R[((k-1))_N] - 0.23W_R[((k+1))_N].$$

Los factores de peso fueron elegidos para minimizar la contribución al primer lóbulo lateral, que está atenuado casi -43 dB respecto del lóbulo principal. El resto de los lóbulos laterales decaen más lentamente que los de la ventana de Hann, a razón de -6 dB/octava, pues las muestras 0 y N-1 no son nulas (en particular, $w_{Hamm}[0] = w_{Hamm}[N-1] = 0.08$).

10.4.5. Ventanas de Blackman, Flat-top, Blackman-Harris y Nuttall

Las ventanas de Hann y Hamming son ejemplos de funciones temporales tipo "coseno elevado" (es decir, la suma de un término coseno más una constante) que resultan en respuestas frecuenciales que pueden escribirse como la suma ponderada de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular desplazada en $\pm 2\pi/N$. Esta idea puede generalizarse expandiendo las funciones de peso temporales como una sumatoria de términos coseno,

$$w_{BH}[n] = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m b_m \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right), \quad 0 \le n \le N - 1,$$
 (10.30)

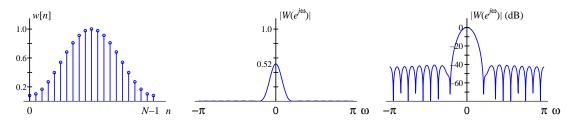


Fig. 10.29. Ventana de Hamming.

donde $\sum_{m=0}^{M} b_m = 1, b_i \ge 0$. De este modo, la respuesta en frecuencia es

$$W_{BH}(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{b_m}{2} \left[W_R(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N}m)}) + W_R(e^{(j\omega + \frac{2\pi}{N}m)}) \right].$$

La ventana de Blackman es una expansión de tres términos, con $b_0=0.42$, $b_1=0.50$, $b_2=0.08$; ésta es una aproximación de la ventana "exacta" de Blackman, cuyos coeficientes son $b_0=3969/9304$, $b_1=1155/2326$, $b_2=715/9304$. Otra ventana de esta familia es la Flat-top que tiene una ondulación ("ripple") muy baja en la banda de paso. El *ABRE* es elevado (3.8 muestras), por lo que no tiene una buena resolución espectral, y suele utilizarse únicamente para calibración. Es la única ventana de este apunte cuya respuesta impulsiva tiene muestras temporales positivas y negativas. Utilizando un algoritmo de minimización, Harris (1978) derivó un conjunto de ventanas de la forma (10.30) con M+1=3 o M+1=4 términos no nulos, que presentan máxima atenuación de los lóbulos laterales (que se indican "max At."), o minimizan el ancho del lóbulo principal (notadas como "mín AB"). La ventana de Nuttall (1981) corrige un error en los coeficientes de la ventana de Harris de 4 términos con mínimo ancho de banda. En la Tabla 10.2 se detallan los coeficientes para cada una de las ventanas citadas, mientras que las respuestas de la ventana de Blackman, Flat-top, la de 4 términos de máxima atenuación de Blackman-Harris, y la de Nuttall se muestran en las Figs. 10.30(a)-(d), respectivamente.

10.4.6. Ventana de Gauss-Weierstrass

De acuerdo al principio de incertidumbre (teorema del ancho del banda del Capítulo 2), no es posible construir ventanas que sean temporalmente "cortas" y que tengan un lóbulo principal angosto. El pulso gaussiano, al presentar el menor producto (duración)×(ancho de banda) es un candidato razonable para una ventana previa truncación o descarte de las colas del pulso. La ventana de Gauss se define como

$$w[n] = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{|n-N/2|}{N/2}\right)^2}, \quad 0 \le n \le N-1.$$

Su transformada de Fourier es la convolución de la transformada del pulso gaussiano con el kernel de Dirichlet,

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha}\omega\right)^2} \circledast W_R(e^{j\omega}) \cong \frac{N}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha}\omega\right)^2},$$

si $\alpha>2.5$ y ω es pequeña. Esta ventana está parametrizada por α (la inversa del desvío típico) que está en relación directa con el ancho del lóbulo principal de su transformada de

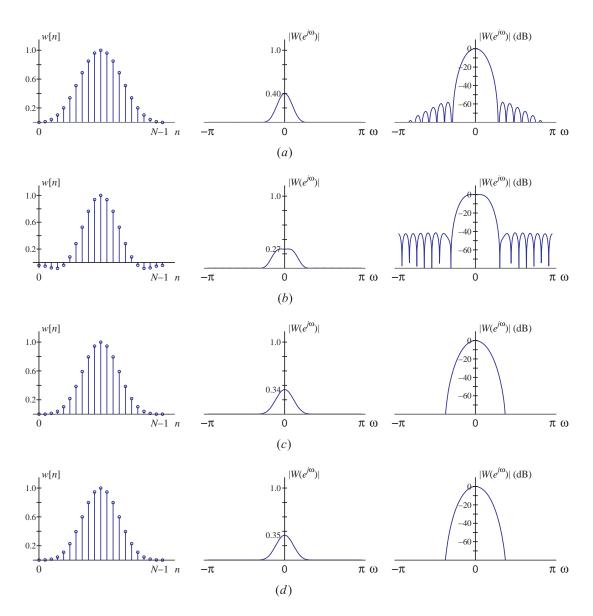


Fig. 10.30. Familia de ventanas de Blackman: Blackman (a); Flat-top (b); Blackman-Harris de 4 términos y máxima atenuación de lóbulos laterales (-92 dB) (c); Nuttall (d).

Tabla 10.2. Coeficientes de familia de ventanas de Blackman.

	3 términos				4 términos			
b_i	Blackman exacta	Blackman	Flat top	B-H máx At.	B-H mín AB	B-H máx At.	B-H mín AB	Nuttall
b_0	3969/9304	0.42	0.2810638602	0.42323	0.44959	0.35875	0.40217	0.40217
b_1	1155/2326	0.50	0.5208971735	0.49755	0.49364	0.48829	0.49703	0.49703
b_2	715/9304	0.08	0.1980389663	0.07922	0.05677	0.14128	0.09392	0.09892
b_3	· -	_	-	-	-	0.01168	0.00183	0.00188

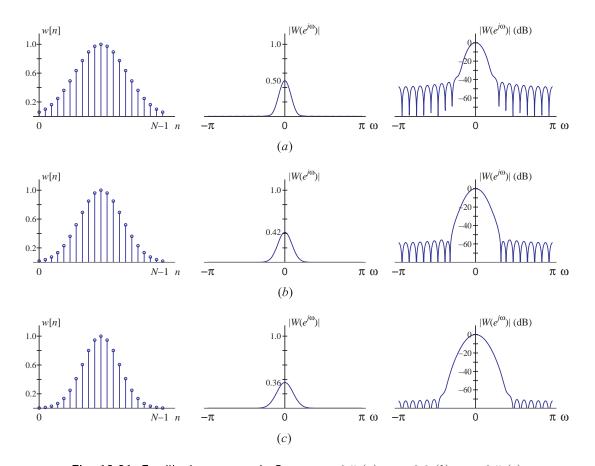


Fig. 10.31. Familia de ventanas de Gauss: $\alpha = 2.5$ (a); $\alpha = 3.0$ (b); $\alpha = 3.5$ (c).

Fourier. En general, el incremento de α hace que la exponencial decaiga más rápidamente, y en consecuencia sea menos severa la discontinuidad en los extremos, lo que incrementa el ancho del lóbulo principal y decrementa la amplitud de los lóbulos laterales.

10.4.7. Ventana de Dolph-Chebyshev

Esta ventana minimiza el ancho de lóbulo principal para una longitud N y una atenuación de los lóbulos laterales prefijadas. Este tipo de problemas han sido estudiados por los diseñadores de antenas, que buscan incrementar la sensitividad en una dirección restringiendo simultáneamente los lóbulos laterales de captación. Su expresión temporal es relativamente complicada, pero puede obtenerse calculando la TDF inversa de X[k]: las N muestras de su transformada de Fourier son

$$W[k] = (-1)^k \frac{\cos\left\{N\cos^{-1}\left[\beta\cos(\frac{\pi}{N}k)\right]\right\}}{\cosh\left(N\cosh^{-1}\beta\right)}, \quad 0 \le k \le N-1,$$
 donde $\beta = \cosh\left[N^{-1}\cosh^{-1}(10^\alpha)\right], \mathbf{y}$
$$\cos^{-1}\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}, & |\theta| \le 1,\\ \ln\left(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}\right), & |\theta| > 1. \end{cases}$$

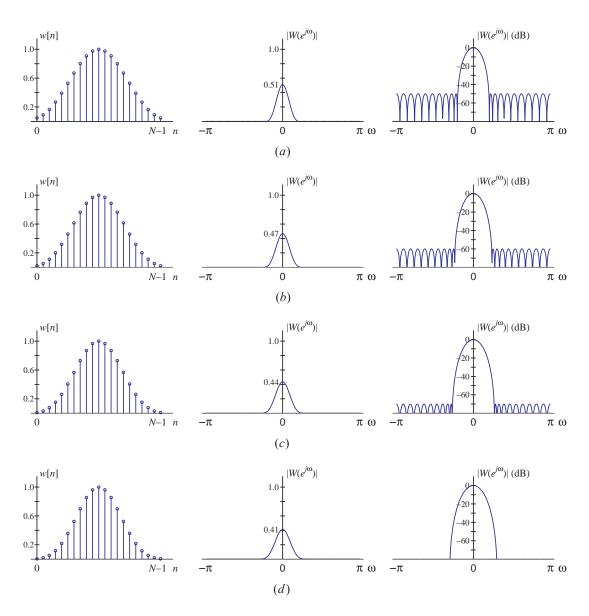


Fig. 10.32. Ventanas de Dolph-Chebyshev: $\alpha=2,5$ (a); $\alpha=3,0$ (b); $\alpha=3,5$ (c); $\alpha=4,0$ (d).

Para obtener las muestras temporales w[n] se calcula la TDF inversa de W[k] y se escala para tener amplitud pico unitaria. El parámetro α representa el logaritmo de la relación entre el nivel de lóbulo principal y el mayor lóbulo lateral; un valor de $\alpha=3$ representa lóbulos laterales que son 10^3 veces (-60 dB) menores que el lóbulo principal. La estructura de lóbulos laterales es uniforme y casi sinusoidal.

10.4.8. Ventana de Kaiser-Bessel

Mientras que la ventana de Gauss es la que tiene menor producto (duración)×(ancho de banda), y la ventana de Dolph-Chebyshev es la que presenta el lóbulo lateral más angosto para un determinado nivel de atenuación de los lóbulos laterales, la ventana de

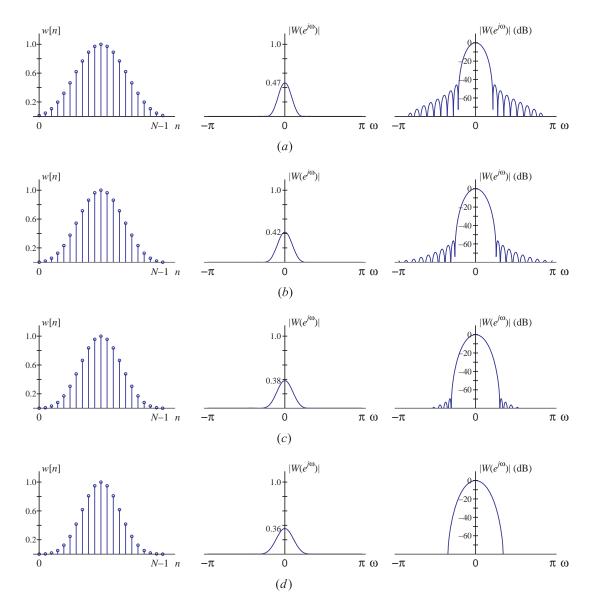


Fig. 10.33. Ventanas de Kaiser-Bessel: $\beta = 2\pi$ (a); $\beta = 2.5\pi$ (b); $\beta = 3\pi$ (c); $\beta = 3.5\pi$ (d).

Kaiser-Bessel minimiza el ancho del lóbulo principal para que la energía de los lóbulos laterales no supere un porcentaje dado de la energía total. Aunque las ventanas de Kaiser y de Dolph-Chebyshev son similares, la primera es más popular, y probablemente sea la ventana más utilizada en el procesamiento de señales moderno. Se define como

$$w[n] = \frac{1}{I_0(\beta)} I_0 \left[\beta \sqrt{1 - \left(\frac{n - N/2}{N/2}\right)^2} \right], \quad 0 \le n \le N - 1,$$
 (10.31)

donde $I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(1/k!) (x/2)^k]^2$ es la función de Bessel modificada de primer tipo. El parámetro β es la mitad del producto (duración)×(ancho de banda). La transformada de Fourier es aproximadamente $W(e^{j\omega}) = N \sinh \phi/[\phi I_0(\beta)]$, donde $\phi = [\beta^2 - (N\omega/2)^2]^{1/2}$.

Estas ventanas fueron propuestas para el diseño de filtros FIR. Kaiser obtuvo un par de fórmulas empíricas que relacionan el orden N de la ventana y el parámetro β con los criterios de diseño de filtros. Si $\Delta\omega$ representa el ancho de la zona de transición del filtro, y δ la ondulación tolerada en la banda de paso y en la banda de rechazo, el valor empírico de β de una ventana que cumpla estos requerimientos es

$$\beta = \begin{cases} 0.1102 (A - 8.7), & \text{si } A > 50, \\ 0.5842 (A - 21)^{0.4} + 0.07886 (A - 21), & \text{si } 21 \le A \le 50, \\ 0, & \text{si } A < 21, \end{cases}$$
(10.32)

donde $A = -20 \log_{10} \delta$. El orden N de la ventana está dado por

$$N = \frac{A - 8}{2,285\Delta\omega} + 1,\tag{10.33}$$

con un error de a lo sumo ± 2 muestras sobre N, para un amplio rango de valores de $\Delta \omega$ y A. Como se verá más adelante, las ecuaciones (10.32) y (10.33) simplifican el gran medida el diseño de filtros FIR.

Para utilizar la ventana de Kaiser en el análisis frecuencial de señales, conviene adaptar estas ecuaciones en función de A_{sl} , la relación en dB entre el nivel del lóbulo principal y el nivel del mayor lóbulo lateral. Kaiser y Schafer (1980) encontraron que la relación A_{sl} es relativamente independiente del tamaño de la ventana, y por experimentación numérica relacionaron β con la atenuación deseada para los lóbulos laterales:

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{si } A_{sl} < 13,26, \\ 0,76609 \left(A_{sl} - 13,26 \right)^{0,4} + 0,09834 \left(A_{sl} - 13,26 \right), & \text{si } 13,26 \le A_{sl} \le 60, \\ 0,12438 \left(A_{sl} + 6,3 \right), & \text{si } 60 < A_{sl} < 120. \end{cases}$$

$$(10.34)$$

Utilizando los valores de β obtenidos de esta ecuación se obtienen ventanas cuyos lóbulos laterales difieren menos del 0.36 % del valor deseado para el rango $13,26 < A_{sl} < 120$. Si se toma $\beta = 0$, la ventana de Kaiser coincide con la ventana rectangular y $A_{sl} = 13,26$.

En este caso, los citados autores encontraron que la longitud N en función del ancho del lóbulo principal y la atenuación deseada para los lóbulos laterales satisface la relación empírica

$$N \simeq \frac{24\pi \left(A_{sl} + 12\right)}{155\Delta_{ml}} + 1,\tag{10.35}$$

donde Δ_{ml} es el ancho del lóbulo principal. Para diseñar una ventana con un lóbulo principal de ancho Δ_{ml} y una atenuación de lóbulos laterales A_{sl} , se calcula β de (10.34) y se encuentra N con (10.35); con β y A_{sl} se computa la ventana temporal con (10.31).

10.4.9. Otras ventanas

Muchos investigadores han construido, con alguna finalidad particular, ventanas que son productos, sumas, secciones o convoluciones de funciones simples: la ventana triangular es la convolución de dos ventanas rectangulares; la de Hamming es la suma de una ventana rectangular y una de von Hann, etc. A continuación se listan algunas de las más conocidas.

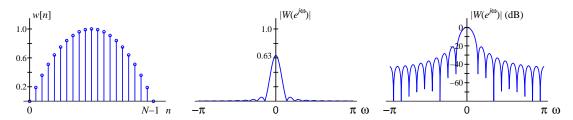


Fig. 10.34. Ventana de Riesz (Bochner, Parzen-I).

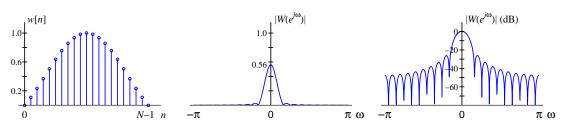


Fig. 10.35. Ventana de Riemann.

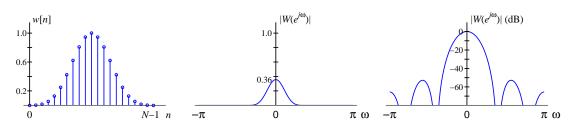


Fig. 10.36. Ventana de de la Vallée-Poussin (Jackson, Parzen-II).

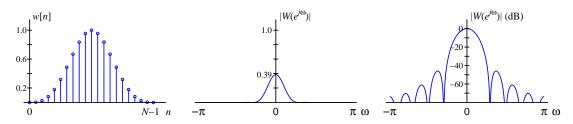


Fig. 10.37. Ventana de Bohman.

10.4.9.1. Ventana de Riesz (Bochner, Parzen-I)

Es la ventana polinomial más sencilla (Fig. 10.34), y su expresión temporal es

$$w[n] = 1 - \left| \frac{2n}{N} - 1 \right|^2, \quad 0 \le n \le N - 1.$$

Los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia decaen a razón de 12 dB/octava porque la primera derivada temporal es discontinua en los extremos de la ventana. El primer lóbulo lateral está -22 dB por debajo del lóbulo principal.

10.4.9.2. Ventana de Riemann

Está formada por el lóbulo principal de una sinc (Fig. 10.35),

$$w[n] = \text{sinc}(2n/N - 1), \quad 0 \le n \le N - 1.$$

10.4.9.3. Ventana de de la Vallée-Poussin (Jackson, Parzen-II)

Esta ventana, convolución de dos ventanas triangulares o cuatro rectangulares, es continua hasta la tercera derivada, y por ello los lóbulos laterales decaen a 24 dB/octava (Fig. 10.36). La expresión temporal es

$$w[n] = \begin{cases} 1 - 6\left(\left|\frac{2n}{N} - 1\right|\right)^2 \left(1 - \left|\frac{2n}{N} - 1\right|\right), & \left|n - \frac{N}{2}\right| \le \frac{N}{4}, \\ 2\left(1 - \left|\frac{2n}{N} - 1\right|\right)^3, & \frac{N}{4} < \left|n - \frac{N}{2}\right| < \frac{N}{2}. \end{cases}$$

10.4.9.4. Ventana de Bohman

Esta ventana (Fig. 10.37) es la convolución de una ventana triangular con un coseno del mismo período, más un término de corrección para que la derivada se anule en los extremos. Así, la segunda derivada es continua y los lóbulos laterales decaen a razón de 12 dB/octava. La expresión de la ventana es

$$w[n] = \left(1 - \left|\frac{2n}{N} - 1\right|\right)\cos\left(\pi \left|\frac{2n}{N} - 1\right|\right) + \frac{1}{\pi}\sin\left(\pi \left|\frac{2n}{N} - 1\right|\right), \quad 0 \le n \le N - 1.$$

10.4.9.5. Ventana de Tukey

Esta ventana resulta de convolucionar el lóbulo de un coseno de ancho $\alpha N/2$ con una ventana rectangular de ancho $(1-\alpha/2)N$, e intenta suavizar la transición cerca de los extremos, sin reducir significativamente la ganancia de procesamiento. A medida que el parámetro α varía desde 0 hasta 1, la ventana pasa de la ventana rectangular a la ventana de von Hann. Exhibe un confuso conjunto de lóbulos laterales que surge por el producto de las transformadas de las dos componentes. La ventana se define como

$$w[n] = \begin{cases} 1, & |n - \frac{N}{2}| \le (1 - \alpha) \frac{N}{2}, \\ \frac{1}{2} (1 - \cos \pi \left| \frac{2n}{\alpha N} - 1 \right|), & (1 - \alpha) \frac{N}{2} < |n - \frac{N}{2}| \le \frac{N}{2}. \end{cases}$$

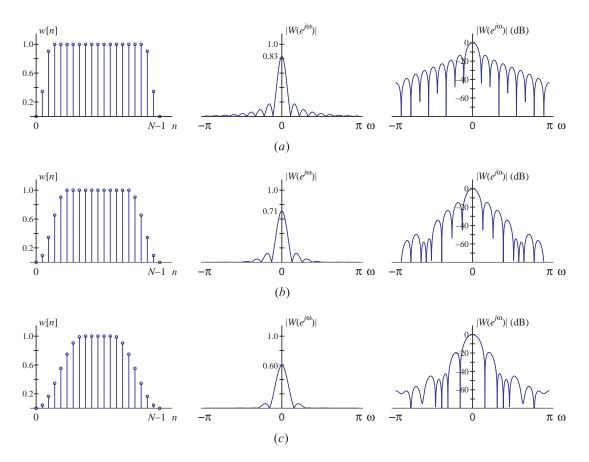


Fig. 10.38. Ventanas de Tukey: $\alpha = 25 \% \ (a)$; $\alpha = 50 \% \ (b)$; $\alpha = 75 \% \ (c)$.

10.4.9.6. Ventana de Poisson

La familia de ventanas de Poisson son exponenciales dobles dependientes de un parámetro α , cuya expresión temporal es

$$w[n] = e^{-\alpha \left| \frac{2n}{N} - 1 \right|}, \quad 0 \le n \le N - 1.$$

Como es discontinua en los extremos, no decae más rápido que 6 dB/octava. A medida que α crece, la discontinuidad en los bordes es más pequeña y la estructura de los lóbulos laterales se confunde con las asíntotas. El lóbulo principal es relativamente ancho por lo que el ancho de banda de ruido equivalente (*ABRE*) es elevado. También presenta una elevada pérdida de procesamiento de peor caso.

10.4.9.7. Ventana de Cauchy

Esta es una familia de ventanas dependientes de un parámetro α , que se definen como

$$w[n] = \left[1 + \left(\alpha \left| \frac{2n}{N} - 1 \right|\right)^2\right]^{-1}, \quad 0 \le n \le N - 1.$$

Esta ventana es la dual de la ventana de Poisson, por lo que su transformada de Fourier es una doble exponencial. El lóbulo principal es relativamente ancho, y el espectro se asemeja

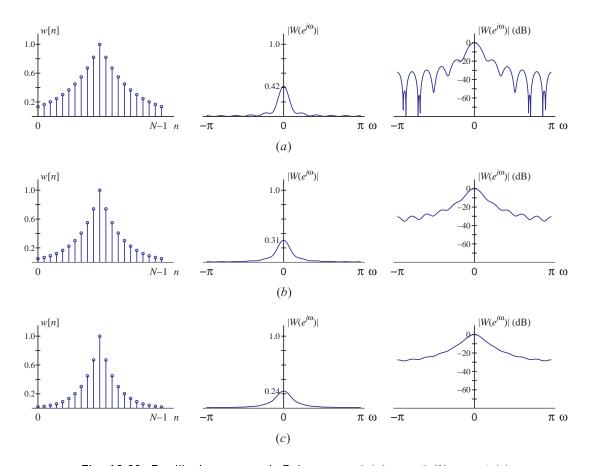


Fig. 10.39. Familia de ventanas de Poisson: $\alpha = 2$ (a); $\alpha = 3$ (b); $\alpha = 4$ (c).

a un triángulo isósceles cuando se grafica en dB. El ancho de banda de ruido equivalente (*ABRE*) es elevado.

10.4.9.8. Ventana Exponencial

Esta ventana se utiliza en el análisis de fenómenos transitorios, en especial cuando la longitud de la experiencia es mayor que la cantidad de memoria disponible para almacenar las muestras de la señal. De esta forma se puede hacer muy pequeña la amplitud de la señal en el extremo de la ventana, disminuyendo los efectos de fuga espectral. La constante de tiempo de la ventana exponencial determina su longitud, y también el ancho de banda y el *ABRE*. Al igual que con la ventana transitoria, es frecuente especificar las muestras donde comienza y termina la ventana, y suavizar el principio de la ventana pesándola por un medio coseno como en la ventana de Tukey.

10.4.9.9. Ventana Transitoria

Esta ventana suele utilizarse para mejorar la relación señal a ruido en la medición de fenómenos transitorios. La ventana es rectangular, pero pueden elegirse los números de muestras donde comienza y termina la ventana. Puede basarse en una ventana de Tukey,

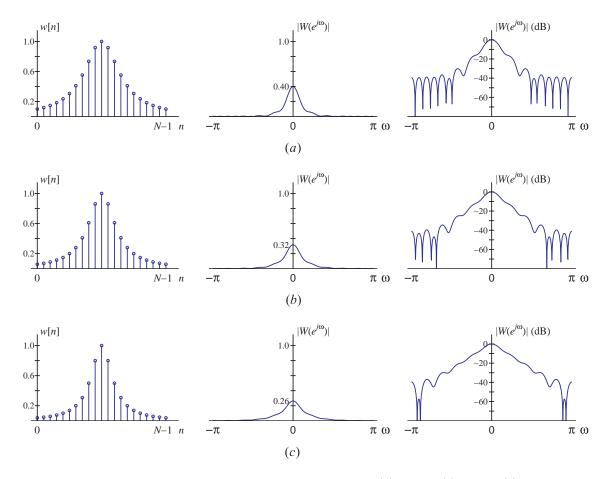


Fig. 10.40. Familia de ventanas de Cauchy: $\alpha = 3$ (a); $\alpha = 4$ (b); $\alpha = 5$ (c).

especificando también las muestras de principio y fin de la misma. La finalidad de este tipo de ventanas es eliminar de la sucesión los tramos que no tienen que ver con el experimento que se analiza. Es común en el análisis de vibraciones: por ejemplo, cuando se efectúa una medición de respuesta en frecuencia de un sistema mecánico con un martillo de impacto, la única señal de interés es la que se genera durante e inmediatamente después del impacto. Cualquier otro tipo de señal medida debe eliminarse pues no tiene que ver con la experiencia bajo estudio. La ventana transitoria permite eliminar estas muestras no deseadas haciendo coincidir el comienzo de la misma con el momento del impacto.

10.5. Criterios de selección de ventanas

No hay un criterio absoluto que permita indicar cuál es la ventana óptima para cada aplicación, aunque sí pueden darse algunos lineamientos básicos.

Debido a la poca potencia computacional de los primeros procesadores, en un principio se prefirieron ventanas que implicaran pocas operaciones en el dominio tiempo, como por ejemplo la ventana de Tukey (Fig. 10.38) que pesa el primer y último 25 % de las muestras por un coseno elevado, y deja intactas el 50 % de las muestras restantes. Sin embargo, no

es una ventana muy "eficiente", según los índices de desempeño discutidos en la Sección 10.3. Otra ventana conveniente desde este punto de vista es la ventana de von Hann, cuyo efecto sobre los datos temporales se puede reproducir convolucionando la TDF con los pesos -1/4, 1/2 y -1/4, como se analiza en la Sección 10.4.3. Si el volumen de cálculo no es un factor decisivo se pueden definir un gran número de ventanas con lóbulos laterales de menor amplitud que los de la ventana rectangular.

Los instrumentos que calculan el espectro de una señal en base a la FFT no suelen contar con una variedad muy amplia de ventanas. Por ejemplo, la serie Infiniium de Agilent sólo cuenta con 3 tipos de ventanas: rectangular, de Hann y flat-top; los analizadores de Bruel & Kjaer tienen 7 ventanas: cuatro con características predefinidas, como la rectangular, Hann, Kaiser-Bessel, flat-top, y tres con parámetros ajustables por el usuario: transitoria, exponencial, y una arbitraria, definida por el usuario.

Cualquiera sea la ventana elegida, debe tenerse presente que el procedimiento correcto es aplicar la ventana solamente a los datos reales, y no a los datos "artificiales" generados por el agregado de ceros a la sucesión original. Estas muestras adicionales nulas sólo sirven para obtener una representación más suave del espectro de la señal, como muestran las Figs. 10.9(a) y 10.11(a).

Cuando se analizan señales transitorias, la ventana rectangular es la de uso más frecuente, aunque el empleo de la ventana transitoria permite mejorar la relación señal a ruido eliminando las partes de la señal que no son relevantes para la experiencia. La ventana exponencial permite ajustar la duración de la experiencia a la capacidad de memoria o al tamaño de la TDF.

Para el caso de señales no transitorias suelen preferirse ventanas con lóbulos principales más anchos para determinaciones precisas de relaciones de amplitud, donde es necesario minimizar las pérdidas por ondulación (efecto "picket-fence"). En cambio, para estimar con precisión las frecuencias de señales desconocidas suelen preferirse ventanas con gran atenuación de sus lóbulos laterales, y un lóbulo principal angosto. Aunque la ventana rectangular es la que tiene el lóbulo principal más angosto, no suele utilizarse pues los lóbulos laterales son importantes y decaen lentamente, alterando el espectro. La ventana de Hann es la más utilizada para analizar el contenido espectral de una señal; aunque el lóbulo principal tiene un ancho que es el doble del de la ventana rectangular, la rápida caída de los lóbulos laterales permite resolver componentes frecuenciales cercanas.

La ventana flat-top es la más conveniente para efectuar mediciones de amplitud, ya que debido al amplio lóbulo principal, la amplitud del pico espectral es muy precisa. El máximo error de amplitud debido a la fuga espectral (pérdidas por ondulación) es de 0.1 dB, mucho mejor que el error que presenta la ventana de Hanning (1.5 dB). Sin embargo, la ventana flat-top no es tan buena cuando se intenta resolver componentes espectrales próximas. Su gran *ABRE* (3.43 muestras) hace que su uso sea desaconsejable si la señal que se pretende analizar está contaminada por ruido. Además como sus lóbulos laterales no decrecen con la frecuencia, es más sensible al ruido de banda ancha, lo que dificulta la detección de tonos enmascarados por ruido o por tonos próximos de mayor amplitud.

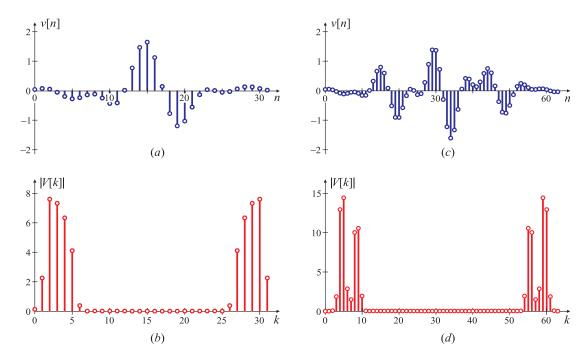


Fig. 10.41. Análisis de señales con la ventana de Kaiser. (a) Señal "ventaneada" de longitud N=32. (b) Módulo de la TDF, N=32. (c) Señal "ventaneada" de longitud N=64. (d) Módulo de la TDF, N=64.

10.6. Análisis frecuencial

Una de las aplicaciones de la TDF es reconocer o detectar las componentes frecuenciales de señales periódicas arbitrarias. El problema de estimar la frecuencia de un tono, en general contaminado con ruido, aparece en campos tan disímiles como audio, comunicaciones, medicina, instrumentación, etc. La herramienta fundamental para resolver este problema es la TDFT o la TDF. Al utilizar cualquiera de ellas, se presentan una serie de compromisos entre la cantidad de tiempo necesario para medir la señal, la cantidad de muestras, el tipo de ventana temporal empleada, y la resolución obtenible en el dominio frecuencia. El procedimiento típico consiste en tomar un conjunto de muestras representativas, pesarlas por alguna ventana, y calcular la TDF de esas muestras ponderadas. Los máximos relativos del espectro indican la amplitud relativa de las componentes, y las ubicaciones de los mismos se asocian a la frecuencia de cada una.

En esta sección se presentará la metodología usual de análisis espectral de señales discretas usando la TDF a través de ejemplos tomados de Harris (1978), Porat (1997) y Oppenheim (1998).

EJEMPLO 10.8. Análisis de señales sinusoidales utilizando una ventana de Kaiser

La señal del Ejemplo 10.4 se pondera con una ventana de Kaiser, resultando

$$v[n] = \begin{cases} w_K[n] \cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + \frac{3}{4}w_K[n] \cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right), & 0 \le n \le 63, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
(10.36)

La ventana de Kaiser $w_K[n]$ está dada por (10.31). El factor β se elige de modo de que la máxima amplitud de los lóbulos laterales esté 40 dB por debajo del lóbulo principal. De acuerdo con (10.34), para $A_{sl}=40$ se obtiene $\beta=5,48$.

En la Fig. 10.41(a) se muestra la sucesión ventaneada v[n] con una ventana de largo N=32, y en la Fig. 10.41(b) la TDF. La diferencia entre las frecuencias de los tonos es $\Delta\omega=\omega_1-\omega_0=4\pi/15-2\pi/14=0,389$. Según la fórmula aproximada (10.35), para el largo de la ventana elegido (N=32) y $\beta=5,48$, la ventana tiene un lóbulo principal $\Delta_{ml}=0,815$, que es más del doble de ancho que la diferencia entre las frecuencias de la señal. Por lo tanto, los lóbulos principales de las réplicas de $W_K\left(e^{j\omega}\right)$ centradas en ω_0 y en ω_1 se solapan severamente y no es posible distinguir dos picos, o "resolver" las componentes frecuenciales de la señal, como se observa en la Fig. 10.41(b).

En la Fig. 10.41(c) se muestra la misma señal, pero pesada con una ventana de largo N=64. Como la ventana tiene el doble de longitud que en el caso anterior, el lóbulo principal tiene aproximadamente la mitad de ancho. Las ecuaciones de diseño de la ventana de Kaiser (10.34) y (10.35) permiten calcular que para N=64 y $\beta=5,48$ el ancho del lóbulo principal es $\Delta_{ml}=0,401$, apenas superior a la diferencia de frecuencia entre los tonos. Como ahora las copias de la transformada de Fourier de la ventana se solapan sólo ligeramente, se pueden resolver perfectamente las dos componentes frecuenciales de la señal, como muestra la Fig. 10.41(d).

En los ejemplos anteriores el orden de la TDF coincide con la longitud de la sucesión temporal v[n], con la excepción de la Fig. 10.16 del Ejemplo 10.5, donde se efectuó un padding de ceros antes de calcular la TDF para obtener un eje de frecuencias con una grilla más fina. El agregado de muestras nulas a la señal original no mejora la resolución, que depende de la forma y el largo de la ventana, como se muestra en el siguiente Ejemplo.

EJEMPLO 10.9. Análisis de señales sinusoidales agregando muestras nulas

A la señal (10.36) del Ejemplo 10.8, pesada por una ventana de Kaiser con $\beta=5,48$ y N=32, se le agregan ceros para calcular TDFs de mayor orden que el tamaño de la sucesión original. En la Fig. 10.42(a) se muestra el módulo de la TDF de 32 puntos, que es una repetición de la Fig. 10.41(b). Las Figs. 10.42(b), (c) y (d) muestran el módulo de la TDF de 64, 128 y 1024 puntos, respectivamente. El agregado de ceros a la sucesión de 32 puntos hace que la transformada de Fourier $V\left(e^{j\omega}\right)$ quede muestreada más finamente, pero no cambia la envolvente del módulo de la TDF, como se aprecia en la figura. En consecuencia, el aumento del tamaño de la TDF agregando ceros a la sucesión original no mejora la habilidad para resolver dos componentes frecuenciales próximas; lo único que hace es cambiar el espaciado de las muestras espectrales, suavizando la presentación de V[k] y haciéndola más parecida a $V(e^{j\omega})$.

Para representar completamente una sucesión v[n] de longitud N basta con efectuar una TDF V[k] de N puntos, ya que la sucesión original puede recuperarse exactamente a partir de la TDF inversa de V[k]. Sin embargo, el agregado de muestras nulas a la sucesión original y el cálculo de una TDF de orden mayor hace que el espectro de $V\left(e^{j\omega}\right)$ quede muestreado más finamente. Una interpolación lineal de las muestras de la TDF V[k] de $L\gg N$ puntos permite una interpretación más sencilla que la TDF de N puntos, como se aprecia comparando las Figs. 10.42(a) y 10.42(d). Se obtiene así una imagen razonablemente precisa del $espectro\ V\left(e^{j\omega}\right)$, que puede utilizarse para estimar las ubicaciones y amplitudes de los picos espectrales, como se muestra en el siguiente Ejemplo.

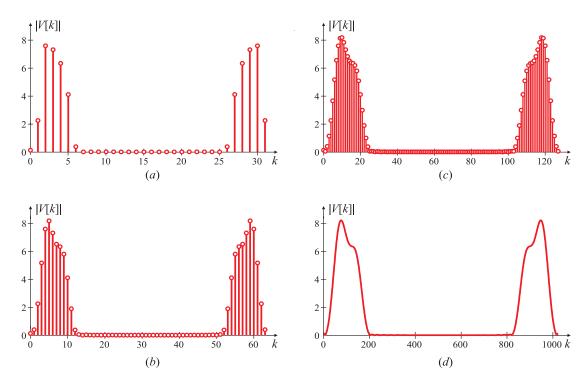


Fig. 10.42. Efecto del tamaño de la TDF de una sucesión de longitud N=32 ponderada con una ventana de Kaiser. (a) Módulo de la TDF de 32 puntos. (b) Módulo de la TDF de 64 puntos. (c) Módulo de la TDF de 128 puntos. (d) Módulo de la TDF de 1024 puntos.

EJEMPLO 10.10. Estimación frecuencial con muestras nulas e interpolación lineal

La Fig. 10.43 muestra cómo el aumento del largo N de la ventana permite resolver componentes de frecuencia relativamente próximas entre sí, dejando constante el orden $L\gg N$ de la TDF utilizada para evaluar la transformada de Fourier $V\left(e^{j\omega}\right)$ de una señal ventaneada v[n]. La señal del Ejemplo 10.8 fue pesada por ventanas de Kaiser $(\beta=5,48)$ de longitudes $N=32,\,42,\,54$ y 64. En todos los casos se calculó una TDF de L=1000 puntos, que permite una representación suave del espectro cuando las muestras consecutivas de la TDF se unen con segmentos de recta (Fig. 10.43).

En la Fig. 10.43(a) la longitud de la ventana es N=32, y no se alcanzan a resolver las dos componentes sinusoidales. A medida que se incrementa N, se nota una sensible mejora de la discriminación; con una ventana de longitud apenas un $30\,\%$ superior $[N=42,\,{\rm Fig.}\,10.43(b)]$ ya es posible distinguir la presencia de dos componentes espectrales. Una ventana de longitud un poco mayor (N=54) aumenta la diferencia entre las crestas y los valles del espectro.

La TDF de 1024 puntos de la Fig. 10.43(d) permite ubicar los picos espectrales con mas precisión que la TDF de 64 puntos de la Fig. 10.41(d) del Ejemplo 10.8, a pesar que ambas TDF se han aplicado a la misma sucesión de largo N=64 ponderada con la misma ventana. La amplitud de los picos espectrales de la Fig. 10.43(c) y (d) están muy próximos a la relación correcta de 0.75 a 1. \square

EJEMPLO 10.11. Análisis con diferentes ventanas

La señal discreta $v[n] = \sin\left[\left(25,48/128\right)2\pi n\right] + 0,005\sin\left[\left(32/128\right)2\pi n\right]$, con $0 \le n \le 127$, está formada por dos sinusoides cuya frecuencias se han elegido de manera que el tono de mayor

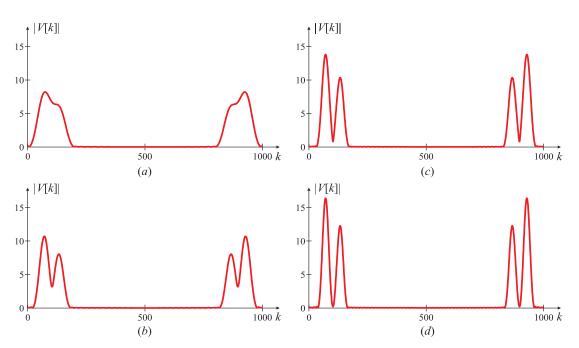


Fig. 10.43. Cálculo de la TDF de orden mucho mayor (1000 puntos) que el largo N de la sucesión temporal, con interpolación lineal entre las muestras para obtener una curva continua. (a) Largo de la sucesión N=32. (b) N=42. (c) N=54. (d) N=64.

potencia cae entre las muestras 25 y 26 de una TDF de 128 puntos, mientras que el de menor amplitud coincide con la muestra 32. La diferencia de amplitud entre los tonos es de 46 dB.

La Fig. 10.44 muestra el módulo (en dB) de la TDF de L=1024 puntos de la sucesión de N=128puntos completada con ceros, de modo que la TDF V[k] es una aproximación muy buena del espectro $V\left(e^{j\omega}\right)$ de la señal. En cada caso, la sucesión temporal se pesó con diferentes ventanas: rectangular, triangular, von Hann, Hamming, Blackman y Kaiser con $\beta = 10/\pi$ [Figs. 10.44(a)–(f), respectivamente]. Como se puede observar en las Fig. 10.44(a) y (b), los altos lóbulos laterales de las ventanas rectangular y triangular enmascaran la componente más débil, y salvo por una ligera irregularidad en los lóbulos laterales, no se puede reconocer ninguna contribución. El empleo de una ventana de Hann $[\mathsf{Fig.10.44}(c)]$ permite detectar ambas componentes, pues a una distancia de 6.5 unidades de $2\pi/N$ sus lóbulos laterales son suficientemente pequeños. La ventana de Hamming [Fig. 10.44(d)] no tiene un buen desempeño, debido a que sus lóbulos laterales decrecen lentamente en función de la frecuencia (a razón de -6 dB/octava, Fig. 10.29) mientras que los lóbulos laterales de la ventana de von Hann decaen a razón de -18 dB/octava [Fig. 10.28(b)]. Las ventanas de Blackman [Fig. 10.44(e)] y la de Kaiser [Fig. 10.44(f)] tienen un buen comportamiento, ya que permiten distinguir fácilmente la señal de pequeña amplitud; sin embargo, con la ventana de Kaiser las dos componentes frecuenciales tienen mejor separación que con la ventana de Blackman, debido a que la primera tiene un lóbulo principal más angosto que la segunda.

10.7. Sesgo en la estimación espectral

Es habitual identificar las frecuencias componentes de una señal dada en base a la ubicación de los máximos relativos de su espectro. Sin embargo, salvo para el caso de una señal

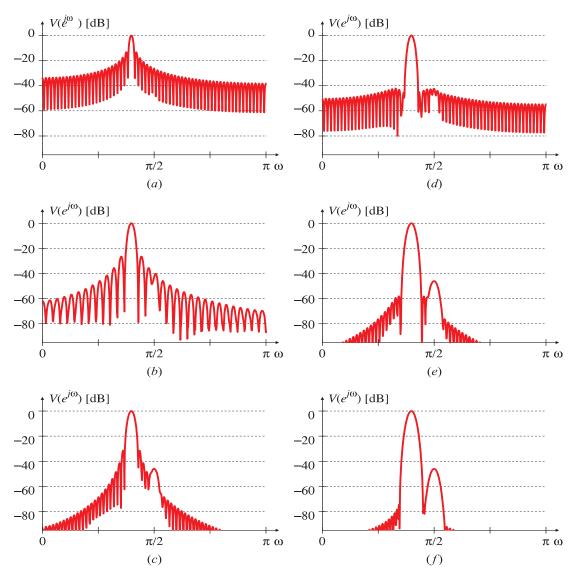


Fig. 10.44. Determinación de frecuencia con diferentes ventanas: (a) rectangular; (b) Bartlett o triangular; (c) von Hann; (d) Hamming; (e)Blackman; (f) Kaiser, $\beta = 10/\pi$.

con única componente frecuencial compleja, de la forma $\tilde{x}_0[n] = e^{j\omega_0 n}$ con $-\infty < n < \infty$, los máximos del espectro de cualquier otra señal formada por dos o más tonos quedan desplazados respecto a las frecuencias de las componentes, debido a la interacción de las respuesta en frecuencia de las ventanas utilizadas la truncación.

Existen numerosas aproximaciones para resolver este inconveniente, y el método basado en el empleo de la TDF y las ventanas puede no ser el mejor, sobre todo cuando las señales están contaminadas por ruido. Sin embargo, los fundamentos pueden descubrirse estudiando el sesgo causado por las ventanas. En estos casos, se puede plantear una manera de disminuirlo utilizando estimadores sencillos.

10.7.1. Efectos de la ventana en el error de la estimación de frecuencia

Como se comentó brevemente en la Sección 10.1.1, los máximos del espectro no ocurren necesariamente en las frecuencias de las componentes armónicas que forman la señal, debido al solapamiento de las distintas réplicas del espectro de la ventana de truncación. Para explicar este fenómeno es conveniente comenzar con una señal periódica exponencial compleja,

$$\tilde{x}_0[n] = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}, \quad -\infty < n < \infty.$$

Por simplicidad se considera que esta señal se trunca con una ventana rectangular w[n] de N muestras de longitud dada por

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N - 1, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

obteniéndose la señal

$$v_0[n] = \tilde{x}_0[n] \, w[n] = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{array} \right.$$

El espectro de la señal $\tilde{x}_0[n]$ está formado por un tren de impulsos de área π , ubicados en la frecuencia ω_0 y sus réplicas cada 2π ,

$$X_0(e^{j\omega}) = \sum_r \pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r).$$

Si $W(e^{j\omega})$ representa el espectro de la ventana w[n], el espectro $V_0(e^{j\omega})$, que resulta de la convolución periódica entre $W(e^{j\omega})$ y el espectro $X_0(e^{j\omega})$ de la señal periódica $\tilde{x}_0[n]$, es

$$V_0(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \delta\left(\theta - \omega_0\right) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$
$$= \frac{1}{2} W(e^{j(\omega-\omega_0)}).$$

Para el caso en que w[n] es la ventana rectangular, el espectro $W(e^{j\omega})$, calculado en (10.5), está dado por

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\operatorname{sen}(N\omega/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)},$$

y por lo tanto,

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}e^{-j(\omega-\omega_0)\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\operatorname{sen}[N(\omega-\omega_0)/2]}{\operatorname{sen}[(\omega-\omega_0)/2]}.$$

Es sencillo encontrar que el módulo de este espectro, que se representa en la Fig. 10.45(a), tiene un máximo en $\omega = \omega_0$. En este caso el máximo del espectro ocurre exactamente a la frecuencia de la señal periódica $\tilde{x}_0[n]$, en $\omega = \omega_0$.

Para una señal periódica $\tilde{x}[n] = \cos \omega_0 n = (1/2)e^{j\omega_0 n} + (1/2)e^{-j\omega_0 n}$ el análisis resulta similar. Como se discutió en la Sección 10.1.1, el espectro de $X(e^{j\omega})$ es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r} \pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) + \pi \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r),$$

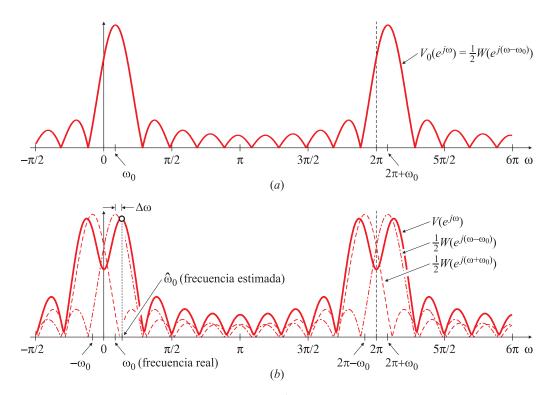


Fig. 10.45. Espectro de la señal $x_0[n]=(1/2)e^{j\omega_0n}$ para $0\leq n\leq N-1$ (a) . Espectro de la señal $x[n]=\cos\omega_0n$ para $0\leq n\leq N-1$ (b) .

y por lo tanto el espectro de la señal $v[n]=\tilde{x}[n]$ para $0\leq n\leq N-1$ (i.e., $\tilde{x}[n]$ truncada a N muestras) es

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{1}{2}W(e^{j(\omega+\omega_0)}),$$

que muestra que el espectro de esta señal es la suma de réplicas del espectro $W(e^{j\omega})$ de la ventana desplazadas a $\pm \omega_0$. Como $W(e^{j\omega})$ es complejo, esta suma debe tener en cuenta las fases relativas de las réplicas: el máximo de una de las réplicas de $W(e^{j\omega})$ debe sumarse a las contribuciones de las "colas" de las demás réplicas. Por lo tanto, las ubicaciones de los extremos relativos de $V(e^{j\omega})$ no coinciden, en general, con la ubicación de los impulsos de $X(e^{j\omega})$, que están localizados en $\pm \omega_0 + 2\pi r, r \in \mathbb{Z}$. Esta situación es la que se representa en la Fig. 10.45(b).

La diferencia entre la ubicación del máximo del espectro, indicado como $\hat{\omega}_0$ en la Fig. 10.45(b), y la frecuencia ω_0 de la señal real sigue ocurriendo aunque la truncación de la señal temporal se efectúe con otra ventana distinta de la rectangular, ya la ubicación del máximo tiene que ver con la suma algebraica de las distintas réplicas del espectro, y no con la forma del espectro en sí. Esta interpretación también muestra que la diferencia entre la ubicación de los máximos de $V(e^{j\omega})$ (en las frecuencias $\pm\hat{\omega}_0+2\pi r$) y de los impulsos de $X(e^{j\omega})$ (en las frecuencias $\pm\omega_0+2\pi r$) es tanto mayor cuanto más próximas estén las réplicas del espectro. Para el caso de la Fig. 10.45(b), las réplicas están bastante próximas, y por eso la diferencia entre la frecuencia detectada, dada por la ubicación del máximo de $V(e^{j\omega})$ y la frecuencia real ω_0 es bastante importante. Como los espectros son periódicos de período 2π , para el caso de señales reales formadas por componentes de una única

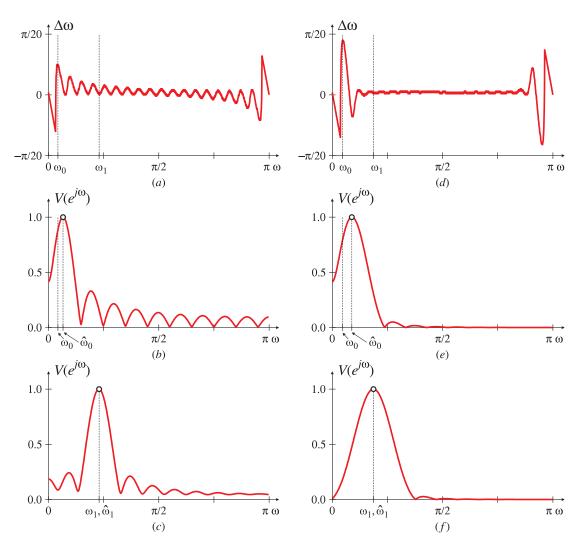


Fig. 10.46. Detección de frecuencia usando la TDF. Error de estimación en función del espectro de la señal, y espectro de las señales con mayor y menor error de estimación, para una ventana rectangular (a)-(c), y de von Hann (d)-(f).

frecuencia ω_0 (con réplicas que aparecen en $-\omega_0$ y $2\pi-\omega_0$, entre otras frecuencias), la distancia entre las réplicas es el mínimo entre $2\omega_0$ y $2\pi-2\omega_0$. Como el rango de frecuencia es $[0,\pi)$, el máximo solapamiento se produce para frecuencias ω cercanas a 0 o a π , y el mínimo para frecuencias ω próximas a $\pi/2$

El ancho del lóbulo principal y la amplitud de los lóbulos laterales también influye en el error de estimación. Los lóbulos principales anchos afectan la estimación de frecuencias próximas, mientras que lóbulos laterales de gran amplitud y la manera en que decaen en función de la frecuencia influyen sobre las componentes frecuenciales más alejadas pero de menor intensidad.

EJEMPLO 10.12. Error de estimación frecuencial para distintas ventanas

ventana	ω	$\hat{\omega}$	$\Delta\omega$
rectangular von Hann Hamming Blackman-Harris 3T-AB	$0.098\pi \ 0.098\pi$	0.130π 0.174π 0.176π 0.216π	$\begin{array}{c} 0.076\pi \\ 0.078\pi \end{array}$

Tabla 10.3. Máximos errores de estimación para distintas ventanas.

En este ejemplo se estudia el error de estimación de la frecuencia de la señal

$$v[n] = \left\{ \begin{array}{ll} \cos \omega n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{caso contrario}. \end{array} \right.$$

para N=20, y para distintos valores de ω comprendidos entre 0 y π . La señal se pondera con distintas ventanas temporales, y la frecuencia $\hat{\omega}$ se detecta ubicando la posición del máximo de una TDF de $N_{TDF}=1000$ puntos, agregando 980 ceros a v[n]. Como V[k] se calcula en muchos puntos, la resolución frecuencial $2\pi/N_{TDF}$ es elevada, y $V(e^{j\omega})$ puede aproximarse por V[k]. En la Fig. 10.46(a) se grafica el error de estimación $\Delta\omega=\hat{\omega}-\omega$ para una ventana rectangular. Como se mencionó anteriormente, el error disminuye a media que ω se acerca a $\pi/2$. El error para ω próximo a cero (o a 2π) también es pequeño porque los lóbulos principales están tan solapados que el máximo ocurre en una frecuencia $\hat{\omega}$ próxima a $\omega=0$ (o a π). En la figura se indican dos frecuencias, $\omega=\omega_0$, para la cual el error de estimación es elevado, y $\omega=\omega_1$ donde el error es pequeño. Para esta ventana, el máximo error ocurre para una señal de frecuencia $\omega_0=0.084\pi,$ mientras que la frecuencia detectada es $\hat{\omega}_0=0.13\pi$; el error es $\Delta\omega=0.046\pi$, que es más del $50\,\%$ de la frecuencia real de la señal. El espectro $V(e^{j\omega})$ para esta frecuencia se muestra en la Fig. 10.46(b); la frecuencia real se indica con línea de trazos, y se aprecia la diferencia entre esta frecuencia y la ubicación del máximo del espectro en $\omega=\hat{\omega}_0$. En la Fig. 10.46(c) se muestra el espectro $V(e^{j\omega})$ para $\omega=\omega_1,$ frecuencia para la cual el error de estimación es pequeño. En este caso la ubicación del máximo del espectro en $\omega = \hat{\omega}_1$ y la frecuencia real ω_1 , indicada por línea de trazos, es prácticamente indistinguible.

En las Fig. 10.46(d)-(f) se repiten los resultados para una ventana de von Hann. La Fig. 10.46(d) muestra que el error decrece más rápidamente a medida que ω tiende a $\pi/2$. Por otra parte, como el lóbulo principal de la ventana es más ancho que el de la ventana rectangular, el error para frecuencias cercanas a cero (o a π) es mayor.

El análisis se repite en la Fig. 10.47(a)-(c) para una ventana de Hamming, y en la Fig. 10.47(d)-(f) para una ventana de Blackman-Harris de 3 términos con máxima atenuación. El efecto más interesante es la magnitud y la variación del error de estimación en función de la frecuencia de la señal a detectar. Nuevamente se observa que el error disminuye para mayores distancias entre las réplicas del espectro de la ventana (es decir, cuando ω tiende a $\pi/2$). Además, el error en frecuencias próximas a cero o a π es mayor para ventanas con lóbulo principal más ancho (como la de Blackman-Harris).

La Tabla 10.3 muestra las frecuencias para las cuales ocurre el mayor error de estimación para cada una de las ventanas consideradas en este ejemplo. En la Tabla se lista la frecuencia ω de la señal, la frecuencia estimada $\hat{\omega}$, y la diferencia $\Delta \omega = \hat{\omega} - \omega$.

Si la señal x[n] está formada por mayor número de componentes armónicas de similar amplitud, el error de estimación de las frecuencias aumentará, en general, porque habrá

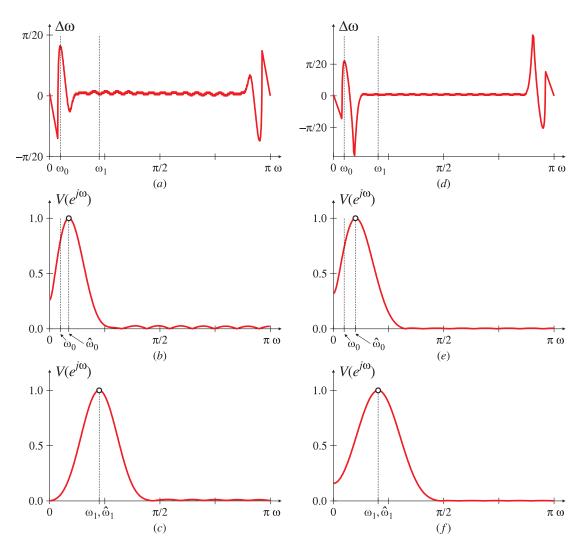


Fig. 10.47. Detección de frecuencia usando la TDF. Error de estimación en función del espectro de la señal, y espectro de las señales con mayor y menor error de estimación, para una ventana de Hamming (a)-(c), y de Blackman-Harris de 3 términos con máxima atenuación (d)-(f).

mayor cantidad de réplicas del espectro de la ventana interfiriéndose mutuamente. En caso que las componentes espectrales tengan amplitudes muy diferentes, la detección de las frecuencias con menor amplitud se verá afectada por el efecto de las "colas" de las componentes de mayor amplitud.

Este problema no puede *corregirse* de ninguna manera. Sus efectos pueden *atenuarse* aumentando la longitud de la ventana temporal, porque así se reduce el ancho del lóbulo principal, y eligiendo una ventana con lóbulos laterales de pequeña amplitud. Pero si no puede aumentarse el número de muestras de la señal discreta, no hay forma de compensar el error de medición (aunque puede establecerse una cota sobre el error). Por ello es que existen numerosos métodos de estimación espectral, orientados a casos específicos como señales senoidales, señales multitonales, señales contaminadas con ruido, etc., que en general son bastante más complicados que los métodos basados en la TDF, y obtienen

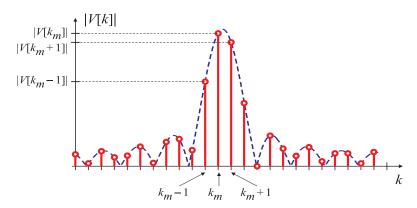


Fig. 10.48. Módulo de las muestras de la TDF de un tono espectral.

resultados más ajustados. Sin embargo, las técnicas basadas en la TDF comentadas en este Capítulo son útiles en los casos más generales, donde no es necesario conocer con absoluta precisión las frecuencias de las componentes armónicas que intervienen en una señal, y donde interesa más conocer la amplitud relativa de las distintas componentes.

10.7.2. Estimadores rápidos y precisos

Los resultados de la Sección previa muestran que al efectuar el análisis espectral de una señal dada, el aumentar el tamaño de la TDF (mediante el agregado de ceros a la cola de la sucesión original) permite obtener espectros más suaves lo que facilita el reconocimiento visual de sus máximos, pero no necesariamente aumenta la precisión de la medida. En los casos en que los máximos del espectro y sus ubicaciones deben detectarse sin intervención humana, usualmente es conveniente trabajar con conjuntos de datos más reducidos. En esta sección se estudia la estimación de la posición del máximo del espectro a partir de una TDF de N puntos, tratando de conseguir una resolución mayor a $2\pi/N$ sin necesidad de calcular una TDF mayor longitud. La presentación sigue los lineamientos de Jacobsen y Kootsookos (2007).

Estos métodos se basan en estimar el pico del espectro $V(e^{j\omega})$ a partir de tres muestras de la TDF V[k] de la señal truncada v[n], como se muestra en la Fig. 10.48.

Si por simplicidad se ubica el máximo del espectro $V(e^{j\omega})$ en la posición k_m de la máxima muestra de |V[k]|, el máximo error de estimación será a lo sumo de 1/2 muestra, o π/N . Sin embargo, se puede mejorar la estimación de la ubicación del pico utilizando algoritmos (exactos o aproximados) que ajusten una curva que pase por el máximo de |V[k]| y sus dos muestras adyacentes, y detectando dónde ocurre el máximo de la curva. La idea es obtener un factor de corrección fraccionario δ tal que, sumando al índice k_m donde ocurre el máximo de |V[k]| permita obtener una estimación más precisa de la ubicación del pico espectral. De este modo, la frecuencia del tono puede estimarse como

$$\hat{\omega} = (k_m + \delta) \frac{2\pi}{N},\tag{10.37}$$

donde N es el tamaño de la TDF. El factor de corrección δ puede ser positivo o negativo, y $k_m + \delta$ no necesariamente es un entero (aunque k_m sí lo es). Este refinamiento puede ser sorprendentemente preciso aún cuando el tono esté contaminado por ruido.

En la literatura se citan numerosas soluciones a este problema, con diferentes grados de complejidad computacional (Quinn, 1994, 1997; Macleod, 1998; Grandke, 1983; Jain et al., 1979; Rife y Boorstyn, 1974). Aquí se citarán las más sencillas, pero que conservan un grado de precisión razonable. Un estimador simple (Voglewede, 2004) utiliza el término de corrección

$$\delta = \frac{|V[k_m+1]| - |V[k_m-1]|}{-2|V[k_m-1]| + 4|V[k_m]| - 2|V[k_m+1]|},$$
(10.38)

que resulta de ajustar una parábola a las tres muestras del módulo de V[k]. Aunque la expresión es simple, tiene sesgo estadístico, y su desempeño es pobre en presencia de ruido. Algunos cambios sencillos a (10.38), utilizando los valores complejos de la TDF en lugar de su módulo mejoran dramáticamente su comportamiento (Jacobsen, 2004). El factor de corrección es

$$\delta = -\operatorname{Re}\left\{\frac{V[k_m+1] - V[k_m-1]}{-V[k_m-1] + 2V[k_m] - V[k_m+1]}\right\}.$$
 (10.39)

Este estimador es más preciso que (10.38) y no tiene sesgo estadístico para señales contaminadas por ruido. Además tiene menor complejidad computacional porque no utiliza el módulo del espectro, que es de cálculo no trivial en sistemas de cómputo de pequeña a mediana capacidad.

El estimador (10.39) funciona adecuadamente cuando la señal temporal ha sido ponderada por una ventana rectangular. Sin embargo, debe modificarse cuando las muestran han sido pesadas por otra ventana. En este caso, la versión del estimador (10.38) resulta

$$\delta = \frac{P(|V[k_m+1]| - |V[k_m-1]|)}{|V[k_m-1]| + |V[k_m]| + |V[k_m+1]|},$$
(10.40)

donde la constante P toma diferentes valores según la ventana utilizada (Hawkes, 1990). Basado en (10.39) y (10.40) puede diseñarse un cuarto estimador que no utiliza el módulo del espectro, pero que puede aplicarse a señales ventaneadas. Este estimador está dado por

$$\delta = \text{Re}\left\{\frac{Q(V[k_m+1] - V[k_m-1])}{V[k_m-1] + 2V[k_m] + V[k_m+1]}\right\},\tag{10.41}$$

donde Q es un factor de escala que depende de la ventana. En la Tabla 10.4 se muestran los factores de escala P y Q para algunas ventanas comunes.

EJEMPLO 10.13. Desempeño de los estimadores rápidos

En la Fig. 10.49 se muestra el desempeño de los distintos estimadores (10.38) a (10.41) para una señal $v[n]=\cos\omega n$, con $0\leq n\leq N$, para N=20, y ω variando entre 0 y π . La columna de la izquierda muestra el sesgo $\Delta\omega=\hat{\omega}-\omega$, donde $\hat{\omega}$ se calcula con la ecuación (10.37), para los estimadores que utilizan el módulo (10.38) y (10.40), mientras que la columna de la derecha corresponde a los resultados de los estimadores que usan los valores complejos de la TDF, dados por (10.39) y (10.41). En general, los estimadores basados en módulo tienen un mejor desempeño para las señales ventaneadas [Fig. 10.49(b)-(d)] que para las señales sin ventanear [Fig. 10.49(f)-(h)]; una excepción notable es el estimador (10.39) para los datos pesados por una ventana rectangular [Fig. 10.49(e)].

En comparación con los resultados de estimar la frecuencia del tono espectral con una TDF de mayor longitud que se reportan en el Ejemplo 10.12 de la sección anterior, se observa que en general

Tabla 10.4. Factores de escalado P y Q para algunas ventanas comunes.

ventana	Р	Q
von Hann Hamming	1.36 1.22	0.00
Blackman-Harris 3T-AB	1.72	0.56

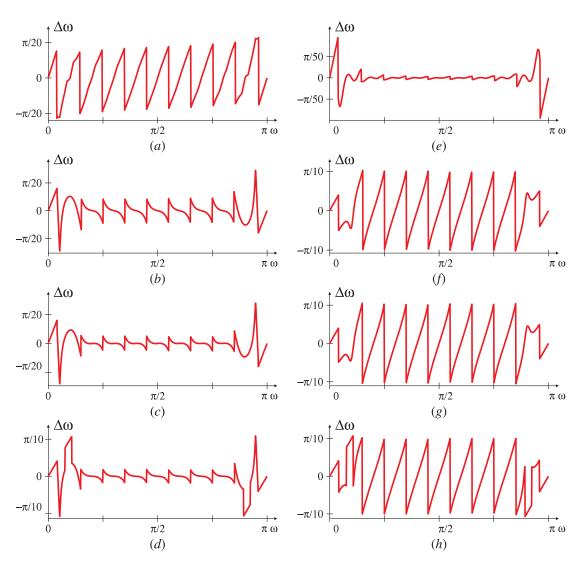


Fig. 10.49. Error de estimación para los estimadores basados en el módulo de la TDF (10.38) y (10.40) (a)-(d) y calculados con los valores complejos de la TDF (e)-(h), para distintas ventanas: rectangular (a), (e); von Hann (b), (f); Hamming (c), (g); Blackman-Harris de 3 términos con máxima atenuación de los lóbulos laterales (d), (h).

el error de estimación es mayor para los métodos de esta sección; las figuras relevantes son la Fig. 10.46(a), Fig. 10.49(a) y Fig. 10.49(e) para la ventana rectangular; la Fig. 10.46(d), Fig. 10.49(b) y Fig. 10.49(f) para la ventana de von Han; la Fig. 10.47(a), Fig. 10.49(c) y Fig. 10.49(g) para la ventana Hamming, y la Fig. 10.47(c), Fig. 10.49(d) y Fig. 10.49(h) para la ventana de Blackman-Harris de 3 términos con máxima atenuación de los lóbulos laterales. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que los estimadores de esta sección calculan una TDF de longitud N=20, mientras que en los de la sección anterior se utilizaron TDF de 1000 puntos. El único estimador de esta sección que tiene un comportamiento mejor es el estimador basado en la muestras complejas de la TDF para una ventana rectangular Fig. 10.49(e). Sin embargo, si este estimador se aplica a un conjunto de datos que han sido ponderado por una ventana que no sea la rectangular, su desempeño empeora drásticamente (Jacobsen y Kootsookos, 2007). De todas maneras, los estimadores de esta Sección tienen una distribución más uniforme del error, mientras que con la técnica detallada en la Sección previa los errores mayores se concentran en cercanías de 0 y de π .

En síntesis, el estimador (10.39) es una excelente elección para el caso de datos sin ventanear, mientras que los estimadores (10.40) y (10.41) son mejores cuando los datos están pesados por alguna ventana. Entre estos dos estimadores el (10.41) resulta de implementación más sencilla porque su cálculo no necesita el cómputo de la función módulo, que es costosa desde el punto de vista de complejidad computacional.

10.8. Analizadores espectrales de barrido y de FFT

Tal como fue tratado en el Capítulo 2, la medición del espectro de una señal involucra compromisos entre precisión, velocidad y rango dinámico. En la mayoría de los casos, el énfasis en uno de estos parámetros impacta adversamente sobre los otros dos. Por ejemplo, el ancho de banda de resolución (*ABR*) que se emplea para conseguir mediciones rápidas trae aparejado mayores niveles de ruido y una reducción potencial del rango dinámico. El aumento de la velocidad de barrido mejora la velocidad de medición para un ancho de banda de resolución determinado, pero reduce la exactitud debido a que el filtro de análisis no tiene tiempo de establecerse. El rango dinámico puede mejorarse utilizando filtros con un *ABR* angosto, y hasta promediando una serie de barridos para disminuir la varianza del ruido, a cambio de reducir la velocidad de medición.

Aún los analizadores espectrales de alta calidad está sujetos a estas restricciones, ya que algunas de ellas tienen su origen en limitaciones físicas. Sin embargo, la implementación discreta de la sección de barrido y el empleo de herramientas de análisis basadas en la TDF permiten reducir notoriamente el efecto de los inconvenientes mencionados.

10.8.1. Error de amplitud

Los errores en la medición de amplitud de las señales están presentes tanto en los analizadores de barrido como en los basados en la TDF, pero es más sencillo corregirlos en los primeros. En un analizador de barrido la precisión de la medida de la amplitud puede ser muy alta, ya que todos los filtros trabajan a una frecuencia única. En los analizadores por TDF la ganancia de los filtros que preceden la etapa de conversión analógica-digital debe ser plana en toda una banda de frecuencias (Fig. 10.50). Si bien cualquier desviación respecto a la respuesta ideal puede medirse y corregirse (en fábrica o en un laboratorio de

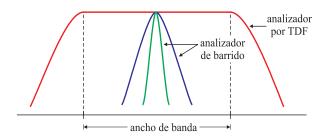


Fig. 10.50. Los filtros de los analizadores espectrales de barrido se calibran a una única frecuencia, mientras que el filtro del analizador por TDF debe calibrarse en una *banda* de frecuencias.

calibración), el procedimiento es imperfecto, y no son infrecuentes errores residuales del orden de ± 0.25 dB.

La medición de amplitud se ve afectada por otras fuentes de error que son del mismo orden en ambos tipos de instrumentos, y en general pueden disminuirse con un diseño cuidadoso e incorporando la capacidad de autocalibración. El empleo de una sección de frecuencia intermedia completamente digital en lugar de una analógica, y el procesamiento digital de la señal —en lugar de hacerlo con una cadena de amplificadores y filtros analógicos—elimina o reduce sensiblemente gran cantidad de fuentes de error, incluyendo la incerteza de la ganancia del canal de frecuencia intermedia, del ancho de banda del filtro de análisis, etc.

10.8.2. Rango dinámico

La mayoría de los analizadores espectrales modernos utilizan técnicas de conversión analógica-digital y procesamiento digital de señales, sobre todo para la presentación de resultados. Gradualmente estas herramientas se han ido desplazando hacia la entrada del instrumento, y en la actualidad las últimas secciones del filtro de frecuencia intermedia y el amplificador logarítmico se implementan con esta tecnología en lugar de hacerlo con electrónica analógica. En general, se digitaliza la señal de la última etapa de frecuencia intermedia, y el filtro de análisis se implementa por técnicas de TDF o de filtrado discreto. El desplazar la etapa de conversión A/D hacia esta etapa puede afectar el rango dinámico del analizador.

El conversor A/D debe medir muestras de la señal de frecuencia intermedia con un gran ancho de banda y niveles muy bajos de ruido. Sin embargo, el ruido de cuantización del conversor A/D es mayor el ruido térmico de la electrónica de las etapas de entrada. En todos los conversores A/D el ancho de banda de ruido del proceso de muestreo es mucho mayor que la frecuencia de muestreo (hasta 40 veces!), por lo que es muy difícil mantener la relación señal a ruido (SNR) del instrumento sin utilizar procesamiento o filtrado adicional.

Si se puede efectuar un análisis espectral por técnicas de barrido o por técnicas de FFT en un mismo instrumento (lo que cada vez es más frecuente gracias a la conversión A/D próxima a la entrada), la primera opción permite un mejor rango dinámico que la segunda, debido a los distintos anchos de banda de los filtros de análisis en una u otra configura-

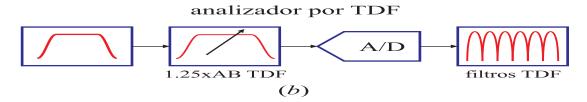


Fig. 10.51. Ancho de banda de la conversión A/D en analizadores de barrido (a) o por TDF (b).

ción. Los anchos de banda relativos de un analizador espectral por barrido o por TDF se muestran en la Fig. 10.51.

La relación señal a ruido del conversor A/D puede mejorarse sustancialmente limitando su ancho de banda. En el caso de un analizador de barrido, un filtro analógico a la entrada del conversor limita el ancho de banda a aproximadamente 2.5 veces el ancho de banda de resolución [Fig. 10.51(a)]. En el analizador por TDF también se coloca un prefiltro analógico, pero en este caso no se obtienen mejoras sustanciales en el rango dinámico porque este filtro debe tener necesariamente un mayor ancho de banda, aproximadamente 1.25 veces el rango de frecuencia bajo análisis [Fig. 10.51(b)]. De acuerdo a los valores típicos de ABR y del rango de frecuencias analizado con la TDF, el ancho de banda del prefiltro utilizado en el analizador por TDF puede ser hasta 60 veces mayor que el del prefiltro del analizador de barrido.

10.8.3. Velocidad de barrido con filtros digitales

Las mediciones de espectro con buena resolución y gran ancho de banda demandan mucho tiempo. Esta situación es típica para anchos de banda del orden de los 100 kHz, y también en mediciones donde se buscan tonos espurios de bajo nivel, donde debe utilizarse un filtro con un *ABR* angosto para disminuir el ruido.

En estas condiciones el factor limitante de la velocidad de medición es el tiempo de establecimiento del filtro de análisis ante las variaciones de amplitud que ocurren por el barrido. El transitorio del filtro de análisis se traduce en errores de amplitud y de frecuencia, asimetrías en la respuesta espectral, etc. Para un ancho de banda determinado, estos errores se incrementan con la velocidad de barrido.

En los analizadores espectrales de barrido tradicionales estos errores se mantienen acotados limitando la velocidad de barrido según el ancho de banda seleccionado para el filtro de análisis. Los errores de respuesta de este filtro varían con el cuadrado del *ABR*, y en consecuencia son muy bajos para *ABR* pequeños. La respuesta en frecuencia del filtro de análisis es de tipo gaussiana, pues tiene buena selectividad para señales de niveles similares, y admite tiempos de barrido comparativamente rápidos. Tal como se estudió en el Capítulo 2, un filtro cuya respuesta en frecuencia es de forma gaussiana, tiene una respuesta impulsiva también gaussiana, y tal característica permite alcanzar la cota mínima del teorema del ancho de banda; es decir, que para un dado ancho de banda, el filtro con respuesta en frecuencia gaussiana es el que tiene la respuesta impulsiva de menor duración.

Rango de frecuencia	ABR	Velocidad de barrido	Tiempo de barrido
100 kHz	1 kHz	500 kHz/s	0.2 s
10 kHz	100 Hz	5 kHz/s	2 s
1 kHz	10 Hz	50 Hz/s	20 s

Tabla 10.5. Tiempos de barrido típicos para pequeños rangos de frecuencia.

Empíricamente se ha determinado una relación de compromiso entre la velocidad de barrido y los errores inducidos por ella

$$v_{barrido} = 0.5 \times ABR^2$$
 [Hz/s].

Como es frecuente que el rango de frecuencias y el ABR guarden la relación rango/ABR = 100, combinando estas dos ecuaciones se puede calcular la velocidad de barrido sugerida para un ABR deseado. La Tabla 10.5 muestra que se necesitan tiempos de medición relativamente prolongados aún para pequeños rangos de frecuencia; la búsqueda de una señal espuria en un rango de 100 MHz utilizando un filtro con un ABR de 100 Hz (para tener un bajo ruido de medición) necesita un tiempo de barrido del orden de los 200 segundos.

Estas limitaciones se pueden evitar utilizando filtros digitales en lugar de analógicos. Aunque los efectos del barrido son similares para ambos, la ventaja de los primeros es que permiten obtener características y respuestas que serían muy difíciles (o costosas) de conseguir con filtros analógicos. Otras ventajas que ofrecen los filtros digitales de análisis son:

- mejor curva de respuesta en frecuencia, que permite una mejora en la selectividad para cada *ABR* seleccionado;
- incrementos más finos del *ABR*, lo que permite optimizar el compromiso *ABR*/tiempo de barrido:
- características dinámicas predecibles (tiempo de respuesta ante variaciones de amplitud) que permiten corregir precisamente los errores de amplitud y frecuencia causados por el barrido.

Por ejemplo, los filtros digitales con respuesta en frecuencia tipo gaussiana tienen mejor "factor de forma" (cociente entre el ancho de banda de 60 dB y el ancho de banda de 3 dB), que suele ser de 4.1:1 comparado a 11:1 para los filtros analógicos, como se muestra en la Fig. 10.52. Los filtros con factor de forma pequeño aceleran la medición de señales de amplitudes muy diferentes, ya que se puede utilizar un *ABR* más ancho (y por lo tanto, una mayor velocidad de barrido) para la misma selectividad.

El compromiso entre el *ABR* y el tiempo de barrido también se optimiza con el uso de filtros digitales, ya que es sencillo cambiar el *ABR*. En los analizadores analógicos, el filtro de análisis tiene anchos de banda seleccionables en la sucesión típica 1-3-10. Con filtros digitales se puede controlar el *ABR* en pasos del 10 %, lo que permite al usuario seleccionar un *ABR* adecuado para la resolución y la velocidad de barrido deseadas.

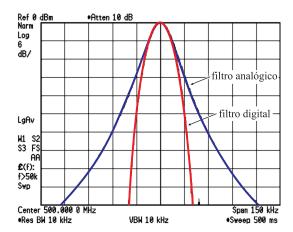


Fig. 10.52. Comparación del factor de forma de filtros de análisis analógicos y digitales.

Las técnicas de procesamiento digital de señales permiten construir filtros con respuesta de fase lineal y características dinámicas predecibles, estables, y repetibles, lo que permite incrementar la velocidad de barrido a

$$v_{barrido} = 0.8 \times ABR^2$$
 [Hz/s],

que asegura que el error de amplitud es de 0.5 dB, aproximadamente. Al contrario de lo que sucede con los filtros analógicos, los errores de los filtros digitales de análisis son conocidos y pueden corregirse o compensarse precisamente, de modo que aún con velocidades de barrido más elevadas el error total de medición es menor.

Sin embargo, hay algunas restricciones que son independientes del tipo de filtro (digital o analógico): los tiempos de medición para anchos de banda particularmente amplios (mayores de 3 GHz) dependen de qué tan rápidamente pueda barrerse o conmutarse el oscilador local.

10.8.4. Velocidad de medición de los analizadores de barrido y por TDF

Los analizadores basados en la TDF son más veloces en las mediciones de gran ancho de banda y pequeño *ABR*, ya que analizan simultáneamente varias frecuencias. Actúan como un conjunto de filtros trabajando en paralelo (Sección 10.1.2), en lugar de un único filtro que se "barre". Aún cuando el tiempo de establecimiento de cada filtro sea similar al del filtro de análisis de un analizador de barrido con el mismo *ABR*, todos los filtros se establecen simultáneamente, lo que permite una medición más rápida (Tabla 10.6). Para los analizadores de espectro por TDF los tiempos de barrido se incrementan *linealmente* con la inversa del *ABR*, mientras que para los analógicos varían según el *cuadrado* de la inversa del *ABR*.

Para anchos de banda más extensos, la carga computacional de los analizadores por TDF se vuelve significativa y el tiempo de cálculo reduce las ventajas del procesamiento en paralelo; para efectuar una medición pueden demorar mucho más que un analizador de barrido, como muestra la Fig. 10.53.

Tabla 10.6. Tiempos de medición típicos de analizadores por TDF y de barrido.

Rango de	ABR	Tiempo de medición	
frecuencia		TDF	barrido
100 kHz	1 kHz	15 ms	0.2 s
10 kHz	100 Hz	31 ms	2 s
1 kHz	10 Hz	196 ms	20 s

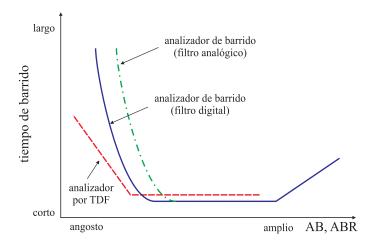


Fig. 10.53. Velocidades de medición relativas para analizadores por TDF, y de barrido con filtros de análisis analógicos y digitales.

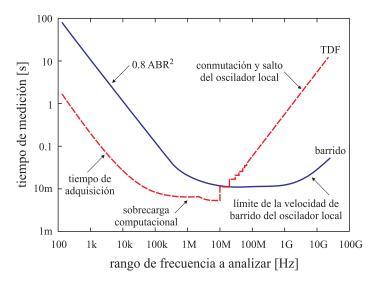


Fig. 10.54. Tiempos de medición para analizadores de barrido y por TDF.

10.9. Conclusiones 71

Una ventaja adicional de los analizadores por TDF es que evalúan el contenido espectral de la señal en un determinado instante de tiempo, lo que permite analizar señales que cambian su contenido espectral en el tiempo, tarea muy difícil para un analizador analógico de barrido.

Para acelerar el procesamiento de la TDF cuando el ancho de banda de análisis es amplio se calculan múltiples TDF donde cada una de ellas cubre un rango de frecuencias menor, y se concatenan los resultados. Se consigue así el rango dinámico de la técnica de barrido con la velocidad del análisis por TDF. Este diseño requiere variar la frecuencia central de cada TDF para analizar bandas adyacentes hasta cubrir el ancho de banda deseado. El proceso se denomina "hopping" (salto), y es un barrido con saltos discretos de frecuencia. Los tiempos de medición se incrementan pues es necesario asegurarse que el oscilador local se haya estabilizado en la frecuencia correcta (después de haber "saltado") antes de calcular la TDF.

La Fig. 10.54 compara los tiempos de medida de las distintas técnicas. Para los analizadores basados en TDF los tiempos de adquisición y de cómputo son dominantes para pequeños rangos de frecuencia, aunque aún así esta técnica es más eficiente que la de barrido. Para mayores anchos de banda el tiempo de establecimiento del oscilador local es el que determina el tiempo de medición, que demora más que si se utiliza un instrumento de barrido. Los analizadores espectrales de buena calidad combinan ambos procedimientos para optimizar las prestaciones.

10.9. Conclusiones

En este Capítulo se ha estudiado el problema de detectar componentes tonales, tanto en forma aislada como en presencia de otros tonos interferentes. Se ha visto que al usar la TDF como detector las pérdidas de peor caso ocasionadas por las ventanas parecen estar acotadas entre 3 dB y 3.75 dB para "buenas ventanas", lo que indica que la elección de la ventana tiene muy poca influencia en el desempeño de peor caso. Se ha encontrado que un buen índice de desempeño es la diferencia entre el ancho de banda de ruido equivalente (*ABRE*) y el ancho de banda de 3 dB (AB 3 dB), normalizada por el AB 3 dB. Para las "buenas ventanas" –que se ubican en el margen inferior izquierdo de la Fig. 10.25– esta relación oscila entre 4 % y 5.5 %.

La elección de la ventana es crítica, en cambio, en la detección de señales multitonales, y para obtener el mayor rango dinámico posible es necesario que el espectro de la ventana $W\left(e^{j\omega}\right)$ exhiba un lóbulo principal muy concentrado, con lóbulos laterales de muy baja amplitud. En general, las ventanas óptimas, como la de Kaiser-Bessel, Dolph-Chebysev, y la de Blackman-Harris son muy buenas para detectar tonos cercanos de amplitudes diferentes. Todas son muy similares entre sí; comparada con la de Dolph-Chebyshev, la ventana de Kaiser-Bessel presenta la ventaja adicional del decaimiento de los lóbulos laterales a razón de -6 dB/octava. Este hecho, junto con la posibilidad de ajustar la interacción entre el ancho del lóbulo principal y la atenuación de los lóbulos laterales [ecuaciones (10.34) y (10.35)] hace que la ventana de Kaiser-Bessel sea probablemente la ventana más popular para el análisis de señales.

Finalmente, se discutieron algunos aspectos del análisis de señales con TDF y sus ventajas y desventajas frente al análisis espectral por barrido presentado en el Capítulo 2.

10.10. Bibliografía

- 1. Adam, J. W., "A new optimal window", *IEEE Trans. Signal Proc.*, Vol. 39, 8, Aug. 1991, pp. 1753-1769.
- 2. Agilent Technologies, "Swept and FFT analysis", Agilent PSA Performance Spectrum Analyzer Series, Product Note AN 5980-3081EN.
- 3. Agilent Technologies, "Spectral analysis using a deep-memory oscilloscope fast Fourier transform (FFT)", Application Note 1383-1.
- 4. DeFatta, D. J., Lucas, J. G., Hodgkiss, W. S., *Digital Signal Processing: A System Design Approach*, John Wiley and Sons, New York, 1988, Capítulo 6.
- 5. Faber, M., "Teaching math on an oscilloscope, Part III: FFT Leakage", Agilent Technologies, Educator's Corner, MLF 5/97.
- 6. Gade, S., Thrane, N., Konstantin-Hansen, H., Wismer, J., *Time Windows*, Application Note, Brüel & Kjaer, Denmark, BO 0436-11.
- 7. Geçkinli, N., Yavuz, D., "Some windows and a concise tutorial comparison of window families", *IEEE Trans. Acous., Speech Signal Proc.*, ASSP-26, 6, Dec. 1978, pp. 501-507.
- 8. Grandke, T. "Interpolation algorithms for discrete Fourier transforms of weighted signals", *IEEE Tras. Instrum. Meas.*, Vol. IM-32, June 1983, pp.350-355.
- 9. Hamming, R. W., Digital Filters, 3ra Ed., Dover, Minneola, NY, 1998.
- 10. Hanna, M. T., "Windows with rapidly decaying sidelobes and steerable sidelobe dips", *IEEE Trans. Signal Proc.*, Vol. 42, 8, Aug. 1994, pp. 2037-2044.
- 11. Harris, F., "On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform", *Proc. IEEE*, Vol. 66, 1, Jan. 1978, pp. 51-83.
- 12. Ho Ha, Y., Pearce, J., "A new window and comparisson with standard windows", *IEEE Trans. Acous., Speech Signal Proc.*, ASSP-37, 2, Feb. 1989, pp. 298-301.
- 13. Ifeachor, E. C., Jervis, B. W., *Digital Signal Processing: A Practical Approach*, Addison-Wesley, 1993, Capítulo 10.
- 14. Jacobsen, E. "On local interpolation of DFT outputs" [online]. Disponible: http://www.ericjacobsen.org/FTinterp.pdf (2004).
- 15. Jacobsen, E., Kootsookos, P. "Fast, accurate frequency estimators", *IEEE Signal Processing Mag.*, Vol. 24, 3, May 2007, pp. 123-125.
- 16. Jain, V., Collins, W., Davies, D. "High-accuracy analog measurement via interpolated FFT", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-28, June 1979, pp. 113-122.
- 17. Macleod, M. "Fast nearly ML estimation of the parameters of real or complex single tones or resolved multiple tones", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 46, 1, Jan 1998, pp. 141-148.

10.10. Bibliografía 73

18. Nuttall, A. H., "Some windows with very good sidelobe behavior", *IEEE Trans. Acous. Speech Signal Proc.*, ASSP-29, 1, Feb. 1981, pp. 84-91.

- 19. Oppenheim, A. V., Schafer, R., Buck, J., *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, 1998, Capítulo 10.
- 20. Porat, B., "A course in Digital Signal Processing", John Wiley and Sons, New York, 1997, Capítulo 6.
- 21. Prabhu, K., Renganathan, H., "Optimum binary windows for discrete Fourier transforms", *IEEE Trans. Acous., Speech Signal Proc.*, ASSP-34, 1, Feb. 1986, pp. 216-220.
- 22. Quinn, B. G. "Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 45, 3, March 1997, pp. 814-817.
- 23. Quinn, B. G. "Estimation of frequency, amplitude and phase from the DFT of a time series", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, 5, May 1994, pp. 1264-1268.
- 24. Rife, D. Boorstyn, R. "Single-tone parameter estimation from discrete-time observations", *IEEE Trans. Inform. theory*, Vol. IT-20, September 1974, pp. 591-598.
- 25. Thompson, M. W., "FFT Laboratory Experiment 5: A comparison of FFT window functions", Agilent Technologies, Educator's Corner (sin identificación).
- 26. Tseng, F. I., Sarkar, T. K., Weiner, D. D. "A novel window for harmonic analysis", *IEEE Trans. Acous., Speech Signal Proc.*, ASSP-29, 2, April 1981, pp. 177-184.
- 27. Voglewede, P. "Parabola approximation for peak determination", *Global DSP Mag.*, Vol. 3, 5, May 2004, pp. 13-17.

Ejercicio 1. La sucesión

$$x[n] = A\cos(\omega_{\ell}n) r_N[n] = \begin{cases} A\cos(\omega_{\ell}n), & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $r_N[n] = u[n] - u[n-N]$, $\omega_\ell = 2\pi\ell/N$ y ℓ es un entero, está formada por exactamente ℓ períodos de la función coseno en un rango de N muestras.

1. Muestre que la TDF X[k] de x[n] es una sucesión real dada por

$$X[k] = \frac{AN}{2}\delta[k - \ell] + \frac{AN}{2}\delta[k - (N - \ell)], \quad 0 \le k \le N - 1, \quad 0 < \ell < N.$$

- 2. Muestre que si $\ell=0$, la TDF X[k] de x[n] es X[k]=AN $\delta[k], \quad 0 \leq k \leq N-1.$
- 3. Explique cómo deben modificarse los resultados anteriores si $\ell < 0$ o $\ell > N$.
- 4. Verifique los resultados de los incisos previos para las siguientes sucesiones usando Matlab, y grafique X[k] empleando la función ${\tt stem}.$
 - a) $x_1[n] = 3\cos(0.04\pi n) r_{200}[n]$.
 - b) $x_2[n] = 5r_{50}[n]$.
 - c) $x_3[n] = [1 + 2\cos(0.5\pi n) + \cos(\pi n)] r_{100}[n].$
 - d) $x_4[n] = \cos(25\pi n/16) r_{64}[n]$.
 - e) $x_5[n] = [4\cos(0.1\pi n) 3\cos(1.9\pi n)] r_{20}[n]$.

Ejercicio 2. Considere la sucesión $x[n] = A\cos(\omega_0 n) r_N[n]$, donde $\omega_0 = 2\pi f_0$ es real.

1. Usando las propiedades de la TDF muestre que las partes real e imaginaria de X[k] están dadas por

$$\begin{split} X[k] &= X_R[k] + j X_I[k], \\ X_R[k] &= \frac{A}{2} \cos \left[\frac{N-1}{N} \left(k - f_0 N \right) \pi \right] \frac{\sin \left[\pi \left(k - f_0 N \right) \right]}{\sin \left[\pi \left(k - f_0 N \right) / N \right]} \\ &+ \frac{A}{2} \cos \left[\frac{N-1}{N} \left(k + f_0 N \right) \pi \right] \frac{\sin \left[\pi \left(k - N + f_0 N \right) \right]}{\sin \left[\pi \left(k - N + f_0 N \right) / N \right]}, \\ X_I[k] &= -\frac{A}{2} \sin \left[\frac{N-1}{N} \left(k - f_0 N \right) \pi \right] \frac{\sin \left[\pi \left(k - f_0 N \right) \right]}{\sin \left[\pi \left(k - f_0 N \right) / N \right]} \\ &+ \frac{A}{2} \sin \left[\frac{N-1}{N} \left(k + f_0 N \right) \pi \right] \frac{\sin \left[\pi \left(k - N + f_0 N \right) \right]}{\sin \left[\pi \left(k - N + f_0 N \right) / N \right]}, \end{split}$$

2. El resultado previo implica que la frecuencia original ω_0 de la señal coseno se ha difundido a otras frecuencias que forman las armónicas de la sucesión temporal de duración finita. Este efecto se conoce como *fuga espectral* (o *leakage*, en inglés), y es el resultado natural de muestrear cosenos periódicos sobre un número no entero de períodos. Justifique el resultado a partir de la extensión periódica $\tilde{x}[n]$ de x[n], y el resultado del inciso 1 del Ejercicio 1.

3. Verifique la propiedad de fuga espectral con la sucesión $x[n]=\cos\left(5\pi n/99\right)r_{200}[n]$ usando MATLAB. Grafique la parte real e imaginaria de X[k] usando la función stem.

- **C** Ejercicio 3. La sucesión $x[n] = A \operatorname{sen}(\omega_{\ell} n) r_N[n]$, donde $r_N[n] = u[n] u[n-N]$, $\omega_{\ell} = 2\pi \ell/N$, y ℓ es un entero, está formada por exactamente ℓ períodos (o ciclos) de la función seno en un rango de N muestras.
 - 1. Muestre que la TDF X[k] de x[n] es una sucesión imaginaria pura dada por

$$X[k] = -j\frac{AN}{2}\delta\left[k-\ell\right] + j\frac{AN}{2}\delta\left[k-(N-\ell)\right], \quad 0 \le k \le N-1, \quad 0 < \ell < N.$$

- 2. Muestre que si $\ell = 0$, la TDF X[k] de x[n] es X[k] = 0, $0 \le k \le N 1$.
- 3. Explique cómo deben modificarse los resultados anteriores si $\ell < 0$ o $\ell > N$.
- 4. Verifique, usando MATLAB, los resultados de los incisos previos para las siguientes sucesiones, y grafique la parte imaginaria de X[k] empleando la función stem.
 - a) $x_1[n] = 3 \operatorname{sen}(0.04\pi n) r_{200}[n].$
 - b) $x_2[n] = 5 \operatorname{sen}(10\pi n) r_{50}[n].$
 - c) $x_3[n] = [2 \operatorname{sen}(0.5\pi n) + \operatorname{sen}(\pi n)] r_{100}[n].$
 - d) $x_4[n] = \operatorname{sen}(25\pi n/16) r_{64}[n]$.
 - e) $x_5[n] = [4 \operatorname{sen} (0.1\pi n) 3 \operatorname{sen} (1.9\pi n)] r_{20}[n].$
- **(C)** Ejercicio 4. Considere la sucesión $x[n] = A \operatorname{sen}(\omega_0 n) r_N[n]$, donde $\omega_0 = 2\pi f_0$ es real.
 - 1. Usando las propiedades de la TDF, muestre que las partes real e imaginaria de X[k] están dadas por

$$\begin{split} X[k] &= X_R[k] + jX_I[k], \\ X_R[k] &= \frac{A}{2} \operatorname{sen} \left[\frac{N-1}{N} \left(k - f_0 N \right) \pi \right] \frac{\operatorname{sen} \left[\pi \left(k - f_0 N \right) \right]}{\operatorname{sen} \left[\pi \left(k - f_0 N \right) / N \right]} \\ &- \frac{A}{2} \operatorname{sen} \left[\frac{N-1}{N} \left(k + f_0 N \right) \pi \right] \frac{\operatorname{sen} \left[\pi \left(k - N + f_0 N \right) \right]}{\operatorname{sen} \left[\pi \left(k - N + f_0 N \right) / N \right]}, \\ X_I[k] &= - \frac{A}{2} \operatorname{cos} \left[\frac{N-1}{N} \left(k - f_0 N \right) \pi \right] \frac{\operatorname{sen} \left[\pi \left(k - f_0 N \right) / N \right]}{\operatorname{sen} \left[\pi \left(k - N + f_0 N \right) \right]} \\ &+ \frac{A}{2} \operatorname{cos} \left[\frac{N-1}{N} \left(k + f_0 N \right) \pi \right] \frac{\operatorname{sen} \left[\pi \left(k - N + f_0 N \right) \right]}{\operatorname{sen} \left[\pi \left(k - N + f_0 N \right) \right]}, \end{split}$$

- 2. Justifique el resultado a partir de la extensión periódica $\tilde{x}[n]$ de x[n], y el resultado del inciso 1 del Ejercicio 3.
- 3. Verifique la propiedad de fuga espectral con la sucesión $x[n] = \sin(5\pi n/99) \, r_{200}[n]$ usando MATLAB. Grafique la parte real e imaginaria de X[k] usando la función stem.

- **Ejercicio 5.** Una señal analógica $x_a(t) = 2 \sin 4\pi t + 5 \cos 8\pi t$ se muestrea a t = 0.01n para $n = 0, 1, \ldots, N-1$ para obtener una sucesión de N puntos $x[n] = 2 \sin \frac{4\pi}{100} n + 5 \cos \frac{8\pi}{100} n$. Para obtener una estimación de la magnitud del espectro de $x_a(t)$ se calcula la TDF de N puntos de x[n].
 - 1. Elija cuál de los siguientes valores de N permite obtener la estimación más precisa del espectro de $x_a(t)$, y grafique las partes real e imaginaria de X[k]: (a) N=40, (b) N=50, (c) N=60.
 - 2. Determine para cuál de los siguientes valores de N se obtiene la menor cantidad de fuga espectral en el espectro de $x_a(t)$, y grafique las partes real e imaginaria de X[k]: (a) N = 90, (b) N = 95, (c) N = 99.
- **I Ejercicio 6.** La señal $x(t) = \cos(2\pi t)$ se muestrea cada T = 0.01 segundos, dando lugar a la señal discreta $x[n] = \cos(2\pi T n) = \cos(\frac{2\pi}{100}n)$. La frecuencia de la señal se determina a partir de una TDF de N = 100 muestras de la señal x[n]. ¿Cuáles ventanas mostrarán que la señal tiene valor medio distinto de cero $(X[k]|_{k=0} \neq 0)$? ¿cuál induce a creer que la frecuencia de la señal es cero? Evalúe las alternativas, y verifique sus resultados usando MATLAB. Repita la experiencia eligiendo N = 20.

Ejercicio 7. La ventana triangular o de Bartlett puede generarse convolucionando una ventana rectangular con sí misma. Describa las propiedades de una ventana generada por convolucionar k veces una ventana rectangular.

Ejercicio 8. Analice si es necesario utilizar ventanas para medir la frecuencia de una señal que se sabe compuesta por una única componente frecuencial.

Ejercicio 9. Sea x[n] una señal discreta definida para $0 \le n \le N-1$, y X[k] su TDF.

1. Si

$$Y_1[k] = \frac{1}{2}X[k] - \frac{1}{4}X[((k-1))_N] - \frac{1}{4}X[((k+1))_N],$$

muestre que $Y_1[k]$ representa multiplicar punto a punto x[n] por una ventana temporal. Encuentre la relación entre esta ventana y la ventana de Hann.

2. Si se define $Y_2[k]$ como

$$Y_2[k] = 0,42X[k] - \tfrac{1}{4}X[((k-1))_N] - \tfrac{1}{4}X[((k+1))_N] + \tfrac{1}{25}X[((k-2))_N] + \tfrac{1}{25}X[((k+2))_N],$$

demuestre que $Y_2[k]$ también puede aplicando una ventana temporal a la sucesión x[n]. ¿Cuál?

3. Discuta las ventajas de implementar el ventaneo como se propone en este ejercicio.

Ejercicio 10. Estudie las principales propiedades de la ventana $w[n] = \sin^4[\pi n/(N-1)]$ (ancho del lóbulo principal, nivel de los lóbulos laterales). ¿Cuál es la relación de esta ventana con la ventana de von Hann?

Ejercicio 11. Se conocen 128 muestras de la señal

$$x[n] = \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{6.3}{128}n\right) + 0.001\operatorname{sen}\left(2\pi \frac{56}{128}n\right).$$

- 1. Explique porqué una ventana rectangular no es adecuada para detectar la segunda componente frecuencial de la señal.
- 2. ¿Qué ventana (de von Hann o Hamming) permite detectar mejor la segunda componente? ¿Porqué? Verifique sus resultados usando MATLAB.
- Ejercicio 12. Cuando se aplican ventanas y se agregan ceros (*zero padding*) a una sucesión x[n] de largo N, ¿cuál de los siguientes es el procedimiento correcto? Justifique. En caso de duda, experimente con MATLAB.
 - 1. Hacer un padding de ceros para llevar la sucesión x[n] a un largo M, y utilizar luego una ventana de largo M;
 - 2. Aplicar a x[n] una ventana de largo N, y hacer un padding de ceros para llevar la longitud de la sucesión ventaneada al largo M.

Ejercicio 13. Un sistema de comunicaciones recibe 2000 muestras de la señal $\cos(\omega_0 n + \phi)$. Debido a interferencias en el canal, la señal recibida es tal que cada 80 valores de la señal aparecen 20 valores nulos. En MATLAB, esta señal puede generarse con el comando

```
x = cos(w0*(0:1999)+fi).*kron(ones(1,20),[ones(1,80), zeros(1,20)]);
```

Se debe determinar la frecuencia ω_0 , utilizando TDF y ventanas. Considere las siguientes opciones:

- 1. una única ventana de longitud $N_1 = 2000$ aplicada a toda la sucesión de datos;
- 2. 20 ventanas de longitud $N_2 = 80$, aplicada a cada segmento de la señal;
- 3. ambos métodos.

Explore las tres opciones con MATLAB. Decida cuál es la más conveniente, y justifique.

Ejercicio 14. Una medida de desempeño de los distintos tipos de ventana es la pendiente de decrecimiento de los lóbulos laterales (roll-off rate). Esta medida indica que tan rápidamente decrece la amplitud de los lóbulos laterales a medida que aumenta la frecuencia ω . Se puede demostrar que, para valores grandes de N, los picos del módulo de la respuesta en frecuencia $|W\left(e^{j\omega}\right)|$ de una ventana w[n] son aproximadamente tangentes a una curva $A\left(\omega\right)$ de la forma

$$A\left(\omega\right) = \frac{K}{\left|\omega\right|^r},$$

donde r es un entero. Cuanto mayor sea r, tanto más rápido disminuirá la amplitud de los lóbulos laterales a medida que aumenta la frecuencia ω . La cantidad 6r define el roll-off $rate \ \rho$, es decir, $\rho = 6r$, y se mide en dB/octava. El motivo de esta definición es que

$$20\log_{10} A(\omega) = 20\log_{10} K - 20r\log_{10} |\omega|,$$

de modo que $20\log_{10} A\left(\omega\right)$ decrece 6r dB cada vez que se duplica la frecuencia ω . (Una frecuencia ω_1 es *un octavo* mayor que ω_0 si $\omega_1=2\omega_0$; esta terminología proviene de la música, donde el intervalo entre dos notas del mismo nombre es un número entero de octavas. La relación de frecuencias es una potencia entera de 2.)

Una forma conveniente de visualizar la pendiente de decrecimiento ρ es graficando $\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|$ y $A\left(\omega\right)$ en un gráfico log-log, de manera que $A\left(\omega\right)$ es una línea recta tangente a los picos de $\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|$. En los ejercicios siguientes, utilice ventanas de largo N=128, con "padding" de ceros hasta completar una longitud M=1024 para que los gráficos sean suaves, y utilice el comando de Matlab loglog para graficar.

- 1. En una ventana rectangular, K=2 y r=1, por lo que la pendiente de decrecimiento es de 6 dB/octava. Verifíquelo graficando $|W(e^{j\omega})|$ y $A(\omega)$.
- 2. Usando los resultados del inciso anterior estime el roll-off rate ρ de la ventana triangular y verifíquelo mediante los gráficos.
- 3. Demuestre que el roll-off rate ρ de la ventana de von Hann es de 18 dB/octava. Encuentre el valor de K por prueba y error.
- 4. Determine el roll-off rate ρ de las ventanas de Hamming y de Blackman.

Ejercicio 15. Cálculo de la TDF. Utilice el comando fft para calcular las TDF de las siguientes sucesiones, y grafique la magnitud |X[k]| y la fase $\angle X[k]$ de cada una. Compare los resultados obtenidos con los que se obtendrían del cálculo analítico de la TDF.

1. La TDF de 64 puntos de la sucesión de longitud N=16

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, ..., 15 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2. La TDF de 64 puntos de la sucesión de longitud N=8

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, ..., 7 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

3. La TDF de 64 puntos de la sucesión de longitud N=8

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } -3 \le n \le 4, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- 4. La TDF de 128 puntos de la sucesión (1).
- 5. La TDF de 64 puntos de la sucesión de longitud N=8

$$x[n] = \begin{cases} 10e^{j(\pi/8)n}, & -3 \le n \le 4, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

6. ¿Cuál es el intervalo de frecuencias entre dos muestras sucesivas en las gráficas de los incisos (1)–(4)?

7. ¿Cuál es el valor del espectro para la frecuencia cero (continua) obtenida de los gráficos en (1)–(4)? Calcule el valor del espectro a frecuencia cero aplicando la definición.

- 8. En los gráficos (1)–(3), ¿cuál es el intervalo de frecuencia entre ceros del espectro? ¿Cuál es la relación entre la longitud N de las distintas sucesiones y el intervalo entre los ceros?
- 9. Analice las diferencias entre las gráficas obtenidas en los incisos (1) y (4).

Ejercicio 16. Verifique que la muestra N-1 de la señal $y_k[n]=x[n]*h_k[n]$, donde x[n] es una señal de longitud finita $(0 \le n \le N-1)$ y $h_k[n]$ es el filtro FIR con respuesta impulsiva

$$h_k[n] = \left\{ \begin{array}{ll} w[n] \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)^{n+1}, & \text{si } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{array} \right.$$

coincide con el valor de la muestra k-ésima de V[k], la TDF de v[n] = x[n]w[n]. En otras palabras, $y_k[n]|_{n=N-1} = V[k]$. Suponga que w[n] es la respuesta impulsiva de una ventana cualquiera, tal que w[n] = w[N-1-n].

Ejercicio 17. Análisis frecuencial de señales usando la TDF: pérdidas por ondulación (efecto "picket-fence"). Considere una sucesión de 64 puntos de longitud, $x[n] = \cos \omega_0 n$, n = 0, ..., 63.

- 1. Calcule y grafique el módulo de la TDF de 64 puntos de x[n], para valores de la frecuencia $\omega_0^{(k)}$ dados por $\omega_0^{(k)} = 2\pi (1/8 + k\Delta)$, k = 0, 1, 2, 3, 4, con $\Delta = 1/256$. Observe el fenómeno de fuga espectral en el caso en que $k \notin \{0, 4\}$. ¿Cuál es la amplitud máxima del módulo de la TDF en cada caso? ¿Cuál sería el valor esperado?
- 2. Además de la fuga espectral, en el inciso previo se pone de manifiesto otro efecto: la variación de la amplitud del espectro en función de la frecuencia de la señal. Este fenómeno se conoce como pérdidas por ondulación (*scalloping loss*, por el borde ondulado típico de los moluscos marinos) o efecto "*picket fence*". Considere estas tres alternativas para minimizar este inconveniente:
 - a) Calcular la TDF de 256 puntos de las sucesiones del inciso (1) (de largo N=64 muestras) completándolas con 256-64=192 ceros.
 - b) Aplicar una ventana de von Hann de largo N=64 a las muestras de la sucesión x[n], y calcular la TDF de largo N=64.
 - c) Calcular la TDF de 256 puntos de las sucesiones del inciso (1) de largo N=256 muestras.
- 3. Compare las TDF obtenidas en los incisos (1)–(2). ¿Qué observa en cada caso? ¿Cuál de los métodos propuestos en el inciso (2) es más apropiado parar obtener el espectro de una señal "real" periódica pero de frecuencia fundamental desconocida? ¿Cuál es el inconveniente de cada una de las alternativas propuestas?

- Ejercicio 18. Análisis frecuencial de señales usando la TDF: resolución. Considere la señal de longitud finita $x[n] = \cos \omega_0 n + \cos \omega_1 n + \cos \omega_2 n$, $0 \le n \le L$, con $\omega_0 = 0.2\pi$, $\omega_1 = 0.22\pi$, $\omega_2 = 0.6\pi$.
 - 1. Calcule el módulo de la TDF de N puntos |X[k]| para $L=25,50,75,100,\,N=2048.$ Comente sobre los resultados.
 - 2. La señal x[n] se pesa con ventana de von Hann, obteniéndose la señal v[n] = x[n]w[n]. Calcule |V[k]| para los valores de L y N propuestos en el inciso (1).
 - 3. De la tabla de ventanas, elija aquella que permita obtener la mejor discriminación y minimizar las fugas para una longitud L dada. Repita el inciso (2) usando la ventana elegida, y evalúe las mejoras obtenidas.

Ejercicio 19. Análisis de señales inmersas en ruido. Las señales reales están frecuentemente contaminadas por ruido. El propósito de este ejercicio es analizar la influencia del ruido en el análisis espectral de señales usando la TDF. Considere una señal x[n] formada por una senoidal s[n] y contaminada por ruido r[n]:

$$x[n] = s[n] + r[n] = \cos(0.1\pi n) + 6v[n], \quad 0 \le n \le N - 1.$$

donde v[n] es un ruido aleatorio de distribución uniforme y con amplitud acotada, $|v[n]| \le 1$. Una forma de analizar el grado de contaminación de la señal es con la *relación señal a ruido*, (SNR) definida por

$$SNR (dB) = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} s^{2} [n]}{\sum_{n=0}^{N-1} r^{2} [n]}$$

- 1. Grafique la señal s[n] y la señal x[n] para N=256. Observe que es muy difícil detectar visualmente la señal sinusoidal en el gráfico de x[n].
- 2. Calcule la SNR para esta señal.
- 3. Calcule la TDF de 256 puntos X[k] de x[n]. Determine para qué valores de $k=k^*$ se producen los picos de |X[k]|. Determine las frecuencias asociadas ($\omega_{k^*}=2\pi k^*/N$), y compárelas con la frecuencia de la señal s[n].

Ayuda:

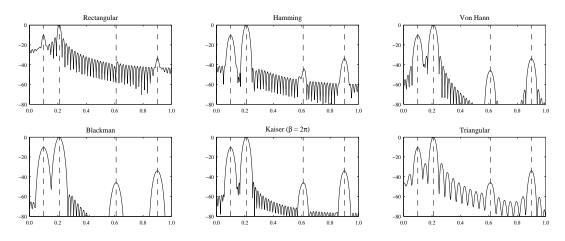
- Observe que si el vector fila s representa la señal s[n], la suma $\sum_{n=0}^{N-1} s^2[n]$ se puede calcular haciendo el producto de s*s'.
- Las señales r[n] y v[n] pueden generarse con las siguientes instrucciones:

$$d = rand(1, N); v = 2*(d-sum(d)/N); r = 6*v;$$

Ejercicio 20. Análisis espectral de señales discretas Fecha de entrega: 31/10/2011

Dada una señal discreta x[n] compuesta por un conjunto de tonos sinusoidales se debe estimar la cantidad, frecuencias y amplitudes relativas de los mismos utilizando las herramientas del Capítulo 10. A tal fin se provee un archivo \star .mat con tres versiones (una de 75 muestras y dos de 150 muestras) de x[n].

1. Escribir un programa en MATLAB que calcule una aproximación del espectro $X(e^{j\omega})$ de x[n], usando la función fft. La rutina debe graficar la amplitud en dB para el rango de frecuencias comprendido entre $\omega=0$ y $\omega=\pi$. Para facilitar la comparación de las respuestas es conveniente normalizar la amplitud del espectro a la del pico máximo, escalando las amplitudes entre -80 dB y 0 dB y normalizar el eje de frecuencias entre 0 y 1 (correspondientes a $\omega=0$ y $\omega=\pi$, respectivamente) como se muestra en la figura.



- 2. Aproximar el módulo del espectro $|X(e^{j\omega})|$ de la señal $x_1[n]$ de 75 muestras con una TDF $X_{75}[k]$ de 75 puntos, utilizando el programa desarrollado en el inciso anterior y aplicando las siguientes ventanas:
 - (a) Rectangular (boxcar (N))
- (d) Blackman (blackman (N))
- (b) Hamming (hamming (N))
- (e) Kaiser (kaiser (N, beta))
- (c) von Hann (hanning (N))
- (f) Triangular (triang(N))

Graficar los espectros calculados en la misma escala (por ejemplo, con ω entre 0 y π , y $|X(e^{j\omega})|$ entre -80 dB y 0 dB) usando los comandos axis y subplot.

3. Repetir el inciso anterior usando una TDF $X_{2048}[k]$ de 2048 puntos, agregando 2048 – 75 ceros a $x_1[n]$.

Nota: el comando fft (x, N) de MATLAB se encarga de agregar el número ceros necesarios "a la cola" de x[n] si N es mayor que la longitud de x[n] (es decir, efectúa automáticamente un "padding" de ceros). En caso contrario (si N es menor que el largo de x[n]), el comando toma sólo las primeras N muestras de x[n], y descarta el resto. Este comportamiento es distinto al estudiado en la teoría, donde se presenta la TDF X[k] de orden N como N muestras equiespaciadas del espectro $X(e^{j\omega})$, es decir, $X[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N}$.

4. Comentar los resultados de los incisos anteriores y analizarlos de acuerdo a las características de cada ventana. Prestar atención a la cantidad de tonos y las amplitudes

relativas detectadas. ¿Alguna de las ventanas tiene un desempeño notoriamente superior a las demás? ¿Cuál es la mejora que se obtiene al efectuar una TDF de mayor longitud?

- 5. Repetir los incisos 2 a 4 para la señal $x_2[n]$ de 150 muestras de longitud. Analizar los resultados obtenidos comparándolos con la señal de 75 muestras.
- 6. En base a la información obtenida en todos los incisos anteriores, resumir en una *única* tabla las frecuencias (normalizadas a π) y amplitudes relativas (en dB) de los tonos que, según su criterio, están presentes en x[n].
- 7. La segunda señal $x_3[n]$ de 150 muestras de longitud es la misma señal $x_2[n]$ de 150 muestras de los incisos anteriores, pero contaminada con ruido gaussiano de media nula.
 - a) Estimar el espectro $X_3(e^{j\omega})$ de $x_3[n]$, repitiendo los incisos 2 y 3 para esta señal.
 - b) Estimar la cantidad de tonos presentes y la frecuencia y amplitud relativa de los mismos. Comentar sobre la diferencia con las estimaciones del inciso 6.
 - c) Como en este ejemplo la señal original (sin ruido) x[n] está disponible, se puede calcular la *relación señal a ruido* (notada SNR y expresada usualmente en dB) como

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{\int_{0}^{2\pi} \left| X_{3} \left(e^{j\omega} \right) - X_{2} \left(e^{j\omega} \right) \right|^{2} d\omega}{\int_{0}^{2\pi} \left| X_{2} \left(e^{j\omega} \right) \right|^{2} d\omega}.$$

Aplique la relación de Parseval para simplificar el cálculo de la relación señal a ruido.

8. Usando los resultados del inciso 6, y conociendo la ganancia de procesamiento de las ventanas, sintetizar una señal $x_e[n]$ compuesta por señales sinusoidales de la frecuencia, amplitud y fase estimadas:

$$x_e[n] = \sum_{k=0}^{4} \hat{A}_k \cos(\hat{\omega}_k n + \hat{\phi}_k),$$
 (10.42)

donde el superíndice " $\hat{}$ " indica las variables estimadas. Para ello es necesario encontrar la relación entre el módulo a_k y la fase θ_k del pico en la muestra k-ésima del espectro $X[k], X[k] = a_k e^{j\theta_k}$, con las frecuencias $\hat{\omega}_k$, amplitudes \hat{A}_k y fases $\hat{\phi}_k$ de la ecuación de síntesis (10.42).

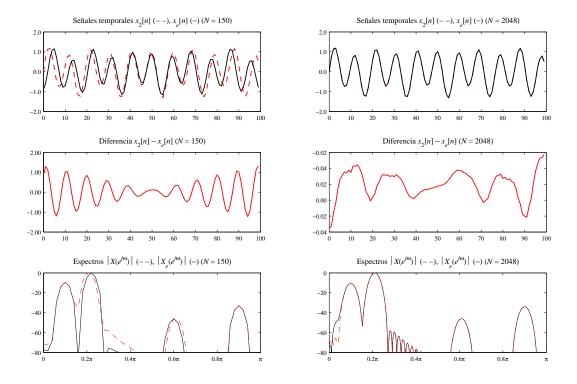
- a) Revise los resultados de sus estimaciones comparando en un gráfico las sucesiones $x_2[n]$ y $x_e[n]$.
- b) Calcule el error máximo

$$\Delta x_{\text{máx}} = \max_{0 \le n \le N-1} |x_2[n] - x_e[n]|,$$

y el error medio cuadrático relativo

$$e_{MC} = \left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} (x_2[n] - x_e[n])^2}{\sum_{n=0}^{N-1} x_2[n]^2}\right)^{1/2}$$

entre las señales temporales $x_2[n]$ y $x_e[n]$.



- c) Utilizando la ventana que haya mostrado mejor desempeño, calcular una aproximación del espectro $X_e(e^{j\omega})$ de $x_e[n]$. Comparar en un gráfico el módulo de $X_e(e^{j\omega})$ con el módulo de $X(e^{j\omega})$, el espectro de la señal x[n] original.
- d) Calcular el error medio cudrático relativo $e_{MC,e}$ entre los espectros original y estimado, que es la diferencia entre las "areas" de los espectros, normalizada por el área del espectro de la señal original:

$$e_{MC,e} = \left(\frac{\int_0^{2\pi} \left| X_e(e^{j\omega}) - X_2(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega}{\int_0^{2\pi} \left| X_2(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega}\right)^{1/2}.$$

Compare este error medio cuadrático relativo $e_{MC,e}$ con el error e_{MC} calculado en el inciso (8*b*).

Observaciones

- Escribir un informe *manuscrito* detallando sus resultados, y adjuntar una *copia im- presa* de los gráficos del espectro calculado con cada ventana.
- Incluir el código utilizado para analizar la señal.
- La evaluación tendrá en cuenta la elaboración de los resultados y en menor medida la calidad del código desarrollado.
- La presentación del ejercicio fuera del plazo previsto será penada con una quita de puntos proporcional a la demora.

Nombre	Sucesión temporal $h[n], \ 0 \le n \le N-1$	Ancho del Ióbulo principal	Amplitud Ióbulo Iateral (dB)	Pendiente Ióbulos (dB/oct)	Ganancia	AB ruido Pérdida de equivalente ondulación (muestras) (dB)	Pérdida de ondulación (dB)	Respuesta (Respuesta Temporal - Respuesta en frecuencia (relativo y dB normalizado)	ı frecuencia)
Boxcar Rectangular	-	$4\pi/N$	-13	9	-	-	3.92	0	$= \frac{ W(e^{i0}) }{0}$ $= \frac{1}{\pi}$ 0 $= \frac{1}{\pi}$ $= \frac{1}{\pi}$ $= \frac{1}{\pi}$ $= \frac{1}{\pi}$ $= \frac{1}{\pi}$	$ W(e^{i\phi}) (\mathrm{dB})$
Bartlett (triangular)	$1 - \frac{2 n - (N-1)/2 }{N-1}$	$8\pi/N$	-27	-12	0.5	1.33	1.82	$\begin{bmatrix} n \\ [n] \end{bmatrix}$	$ W(e^{i\omega}) $ 0 π	$ W(e^{i\phi}) (\mathrm{dB})$
Blackman	Blackman $0.42 - 0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1} + 0.08\cos\frac{4\pi n}{N-1}$	$12\pi/N$	-58	-18	0.42	1.73	1.10		$ W(e^{i\phi}) $ $= \frac{1}{\pi}$	$ W(e^{i\phi}) (\mathrm{dB})$
Hamming	$0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}$	$8\pi/N$	-43	9-	0.54	1.36	1.78		$\frac{ W(e^{i\phi}) }{0}$	$ W(e^{i\phi}) (\mathrm{dB})$
von Hann	$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{N-1} n \right)$	$8\pi/N$	-32	-18	0.5	1.5	1.42	$\begin{bmatrix} V^{1} \\ V \end{bmatrix}$	$ W(e^{i\phi}) $ $= \frac{1}{\pi}$ 0	$ W(e^{i\phi}) (\mathrm{dB})$
Kaiser	$\frac{I_0\left[\frac{\beta}{2}\sqrt{(N-1)^2-(2n-N+1)^2}\right]}{I_0\left[\beta\left((M-1)/2\right)\right]}$	Depende de β	Depende de β	Depende de β	Depende de β	Depende de β	Depende de β		$ W(e^{i0}) $ $-\pi$	$\left \frac{ W(e^{i\omega}) \mathrm{(dB)}}{n}\right $