

## Introducción al diseño de filtros digitales

La mayoría de los textos sobre procesamiento digital de señales dedican un espacio sustancial a la teoría de diseño de filtros –incluyendo especialmente los métodos de aproximación tipo Butterworth, Chebyshev, elíptico, Cauer, etc.– lo que refleja no sólo el formidable esfuerzo de investigación destinado a desarrollar métodos útiles para el cálculo de los coeficientes de los filtros, sino también los avances significativos que se han logrado en este campo. En la primera parte de este capítulo, basado en el texto Ifeachor y Jarvis (1993) se presenta un panorama global del proceso de diseño, postergando los aspectos teóricos a los capítulos siguientes. Se describe paso a paso el proceso de diseño de filtros desde las especificaciones hasta la implementación, y se detallan las opciones de que dispone el diseñador, y los factores que pueden influir en sus decisiones. En la segunda parte se trata el diseño de filtros digitales simples, por ubicación de polos y ceros.

### 7.1. Filtrado digital de señales

Un filtro es un sistema o una red que cambia selectivamente la forma de onda, o las características amplitud-frecuencia o fase-frecuencia de una manera deseada. Los objetivos comunes del proceso de filtrado son mejorar la calidad de la señal, por ejemplo removiendo o atenuando el nivel de ruido, extrayendo información de dos o más señales previamente combinadas para hacer uso eficiente de un canal de comunicación, etc.

Un filtro digital es un algoritmo implementado en hardware y/o software que opera sobre una señal de entrada digital (discreta en tiempo y cuantizada en amplitud) y genera una señal digital de salida, con la finalidad de efectuar un proceso de filtrado. El término “filtro digital” se refiere al hardware o software específico que ejecuta el algoritmo. Los filtros digitales trabajan sobre valores numéricos asociados a muestras de esas señales analógicas previamente digitalizadas por conversores A/D o simplemente sobre un conjunto de números almacenados en la memoria de una computadora o microprocesador.

En la Fig. 7.1 se muestra un diagrama bloque simplificado de un filtro digital que opera en tiempo real, con entradas y salidas analógicas. La señal de entrada, limitada en banda, se muestrea periódicamente y se convierte en una serie de muestras  $x[n]$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . El procesador digital convierte la sucesión de entrada  $x[n]$  en una sucesión de salida  $y[n]$ .



Fig. 7.1. Diagrama bloque simplificado de un filtro digital.

de acuerdo al algoritmo de cómputo. El conversor digital-analógico convierte la salida digital  $y[n]$  a valores continuos en tiempo que son procesados por un filtro analógico para suavizar la forma de onda y remover componentes no deseadas de alta frecuencia.

Los filtros digitales juegan un papel muy importante en el procesamiento digital de señales. En gran número de aplicaciones, como compresión de datos, procesamiento de señales biomédicas, procesamiento de señales de voz, procesamiento de imágenes, transmisión de datos, audio digital, cancelamiento de ecos telefónicos, se prefieren por sobre los filtros analógicos por uno o más de los siguientes motivos:

- Los filtros digitales pueden tener características que son imposibles de conseguir con filtros analógicos, como por ejemplo una respuesta de fase *exactamente* lineal.
- El desempeño de los filtros digitales no varía con las condiciones ambientales (temperatura, humedad, etc.) como sí ocurre con los filtros analógicos, lo que elimina la necesidad de calibrarlos periódicamente.
- Si el filtro se implementa utilizando un procesador programable la respuesta en frecuencia de un filtro digital puede ajustarse a voluntad (filtrado adaptivo).
- El mismo filtro puede procesar varias señales o canales de entrada sin necesidad de replicar el hardware.
- Las señales filtradas y sin filtrar pueden almacenarse para uso o análisis posterior.
- Los avances en las técnicas de integración VLSI hacen que sea posible fabricar filtros digitales pequeños, de bajo consumo, y de muy bajo costo.
- La precisión con que un filtro digital verifica las especificaciones de diseño está limitada solamente por la longitud de palabra (bits) utilizada para representar los coeficientes del filtro y ejecutar las operaciones aritméticas; con los filtros analógicos es difícil lograr atenuaciones que excedan los 60 o 70 dB en la banda de rechazo (utilizando componentes convencionales).
- El desempeño de los filtros digitales es repetible de unidad a unidad.
- Los filtros digitales pueden utilizarse a muy bajas frecuencias, como las que se encuentran en aplicaciones biomédicas, donde el empleo de filtros analógicos es poco práctico por los valores muy elevados de los componentes pasivos involucrados (capacitores, inductancias). Además, los filtros digitales pueden trabajar sobre un amplio rango de frecuencias simplemente cambiando la frecuencia de muestreo.

Sin embargo, los filtros digitales presentan algunas desventajas respecto a los analógicos:

- *Limitación de frecuencia.* La frecuencia de Nyquist –que fija el ancho de banda útil que el filtro puede procesar– queda definida por el proceso de conversión (tiempos

de conversión del conversor A/D y D/A), velocidad del procesador, cantidad de operaciones a ejecutar por unidad de tiempo, etc. Este último término se incrementa a medida que aumenta la exigencia de las características de respuesta del filtro (filtros muy abruptos).

- *Efectos de longitud finita de palabra.* En general, los coeficientes del filtro implementado serán distintos de los calculados teóricamente si la representación numérica que se utiliza para implementar el filtro no es de *precisión infinita* (punto flotante). No sólo influye la cuantización de los coeficientes del filtro, sino también el redondeo de las operaciones numéricas, la cuantización del conversor A/D y D/A, la truncación que ocurre al almacenar los contenidos del acumulador en memoria, etc. Estos efectos, que se modelan como fuentes de ruido de distribución uniforme, pueden limitar seriamente el desempeño de los filtros digitales: variaciones de ganancia en la banda de paso, menor atenuación en la banda de rechazo, y hasta pueden conducir a la inestabilidad en filtros recursivos de orden elevado.
- *Tiempos de diseño y desarrollo prolongados.* Los tiempos de diseño y desarrollo de un filtro digital, en especial el diseño del hardware puede ser muy superior al necesario para el diseño de un filtro analógico. Sin embargo, una vez que se dispone del hardware o el software necesario, la misma plataforma puede utilizarse para muchas otras tareas de filtrado o procesamiento digital de señales con poca o ninguna modificación. Además, el desarrollo de herramientas de CAD avanzadas hacen que el diseño de filtros sea una tarea agradable y sencilla, aunque aún así es necesaria cierta experiencia para aprovecharlas íntegramente.

## 7.2. Filtros FIR e IIR

Los filtros digitales lineales e invariantes en el tiempo pueden clasificarse de acuerdo a la longitud de su respuesta impulsiva  $h[n]$  como IIR, cuando la respuesta tiene duración infinita o FIR, si su duración es finita. Esta respuesta impulsiva  $h[n]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  caracteriza completamente el filtro, a punto tal que las señales de entrada y salida están relacionadas por la suma de convolución, que para filtros IIR toma la forma

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k], \quad (7.1)$$

y para filtros FIR es

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]. \quad (7.2)$$

Del análisis de estas dos ecuaciones es evidente que, mientras que la suma convolución puede ser una forma apropiada para implementar un filtro FIR, no es adecuada para los filtros IIR debido a que la respuesta impulsiva es muy larga (en teoría, infinitamente larga). Por ello, los filtros IIR se implementan con ecuaciones a diferencia que permiten calcular las muestras de salida en forma recursiva

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (7.3)$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $y[-1] = 0$ . El número  $N$  es el orden del filtro, y fija la cantidad de modos de la respuesta impulsiva. La relación entre los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  se obtiene aplicando la transformada  $\mathcal{Z}$  a (7.3) y antitransformando. En la ecuación (7.3) la salida  $y[n]$  es función de los valores actuales y pasados de la entrada, y de valores pasados de la salida (de ahí el nombre *recursivo*): el filtro IIR es sistema realimentado. En cambio, en el filtro FIR la salida  $y[n]$  sólo depende de los valores pasados de la entrada  $x[n]$ . Es evidente que, si en la ecuación (7.3) de los filtros IIR los coeficientes  $a_i$  son nulos, se obtiene la suma convolución (7.2) de los filtros FIR, pues hacer  $a_i = 0$  anula los efectos de realimentación de las salidas pasadas. Las ecuaciones (7.2) y (7.3) son las ecuaciones a diferencias que se utilizan para implementar filtros FIR e IIR, respectivamente. Estas ecuaciones, y en particular el valor de los coeficientes  $h[n]$  para los filtros FIR y  $a_i, b_i$  para los filtros IIR, son los objetivos del problema de diseño de filtros digitales.

Las funciones de sistema están dadas por

$$H_{\text{FIR}}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]z^{-k} \quad \text{y} \quad H_{\text{IIR}}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

para filtros FIR e IIR, respectivamente, y resultan convenientes para el análisis de estabilidad, respuesta en frecuencia, etc.

Los factores que influyen en la elección entre distintas alternativas en cada etapa del diseño de filtro tienen mucho que ver con que el filtro sea FIR o IIR. Por ello resulta importante apreciar las diferencias entre ambos tipos de filtros, las características peculiares de cada uno, y, lo más importante, cómo elegir entre uno y otro.

### 7.2.1. Comparación entre filtros FIR e IIR

La elección entre una implementación FIR e IIR depende de las ventajas relativas de cada uno de estos dos tipos de filtros.

1. Los filtros FIR se pueden diseñar para tener una respuesta de fase estrictamente lineal (distorsión de fase nula), lo que es importante en muchas aplicaciones, como transmisión de datos, audio digital y procesamiento de imágenes. La respuesta de fase de filtros IIR no es lineal, en especial en cercanías de la zona de transición.
2. Los filtros FIR implementados de forma no recursiva, por ejemplo aplicando (7.2), son inherentemente estables. En cambio, la estabilidad de los filtros IIR siempre debe comprobarse, ya que son sistemas realimentados.
3. Los efectos causados por la implementación con aritmética de punto fijo, tales como los errores de cuantización de los coeficientes y los errores por redondeo en las operaciones aritméticas, son mucho más severos en los filtros IIR que en los FIR.
4. Para satisfacer unas especificaciones dadas los filtros FIR necesitan un mayor número de coeficientes que los filtros IIR, sobre todo si las bandas de transición son estrechas. En consecuencia, los requerimientos de memoria, el número de operaciones y los tiempos de procesamiento son mayores para los FIR que para los IIR. Sin embargo, la posibilidad de implementar los FIR mediante la técnica de convolución rápida usando FFT y también el empleo de técnicas *multirate* permiten aumentar significativamente la eficiencia de las implementaciones.

5. Un filtro analógico convencional puede convertirse en un filtro digital IIR equivalente que satisfaga las especificaciones de diseño de manera sencilla. Esto no es posible con filtros FIR pues no tienen una contraparte analógica. Sin embargo es más sencillo sintetizar filtros con respuestas en frecuencia arbitrarias utilizando filtros FIR.

De las características detalladas arriba puede esbozarse una guía tentativa para elegir entre una implementación FIR o IIR:

- Si los únicos requerimientos importantes son bandas de transición estrechas (filtros con cortes muy abruptos) y eficiencia de cómputo, se prefieren filtros IIR pues necesitan un número de coeficientes mucho menor que un filtro FIR equivalente (especialmente si se eligen características frecuenciales elípticas o de Cauer).
- Si el número de coeficientes del filtro no es muy elevado (por ejemplo, si las bandas de transición no son muy abruptas), y en particular, si se desea muy poca o ninguna distorsión de fase, se suele elegir filtros FIR. Los procesadores digitales modernos (DSP) están optimizados para implementar este tipo de filtros, y algunos se han diseñado específicamente con esa finalidad (por ejemplo, el DSP56200 de Motorola, o el INMOS A100). Sin embargo, en un campo tan dinámico como éste la capacidad y el desempeño de los componentes varía rápidamente.

#### EJEMPLO 7.1. Comparación de las características de filtros FIR e IIR

Se desea diseñar un filtro que cumpla con las siguientes especificaciones:

banda de paso:	0 a $3\pi/5$ ,
banda de rechazo:	$4\pi/5$ a $\pi$ ,
ganancia en la banda de paso:	$1 \pm 0,06$ ,
ganancia en la banda de rechazo:	$< 0,2$ .

Los requisitos de diseño se pueden satisfacer tanto como un filtro IIR o FIR:

##### ■ Filtro 1 (IIR):

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (7.4)$$

con  $a_1 = -0,6744878$ ,  $a_2 = -0,3633482$ ,  $b_0 = 0,4981819$ ,  $b_1 = 0,9274777$ ,  $b_2 = 0,4981819$ . La Fig. 7.2 muestra el diagrama bloque de una posible implementación del filtro, cuyas ecuaciones a diferencia son

$$\begin{aligned} w[n] &= x[n] - a_1 w[n-1] - a_2 w[n-2], \\ y[n] &= b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2]. \end{aligned}$$

En la Fig. 7.3 se grafica la respuesta en frecuencia (en módulo y fase), y el retardo de grupo, comprobándose que se satisfacen las especificaciones de diseño.

##### ■ Filtro 2 (FIR):

$$H(z) = \sum_{k=0}^{11} h[k] z^{-k}$$

con

$$\begin{aligned} h[0] &= h[11] = +0,5460328 \times 10^{-2}, \\ h[1] &= h[10] = -0,4506875 \times 10^{-1}, \\ h[2] &= h[9] = +0,6916942 \times 10^{-1}, \\ h[3] &= h[8] = -0,5538437 \times 10^{-1}, \\ h[4] &= h[7] = -0,6342841 \times 10^{-1}, \\ h[5] &= h[6] = +0,5789240 \times 10^0, \end{aligned}$$

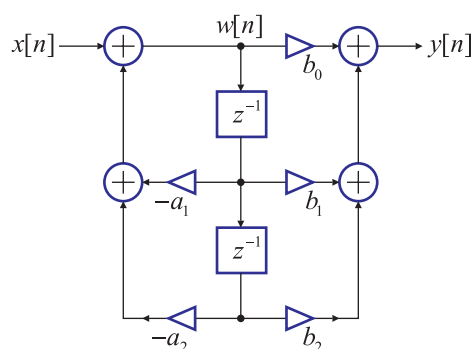


Fig. 7.2. Representación en diagrama bloque del filtro IIR del Ejemplo 7.1.

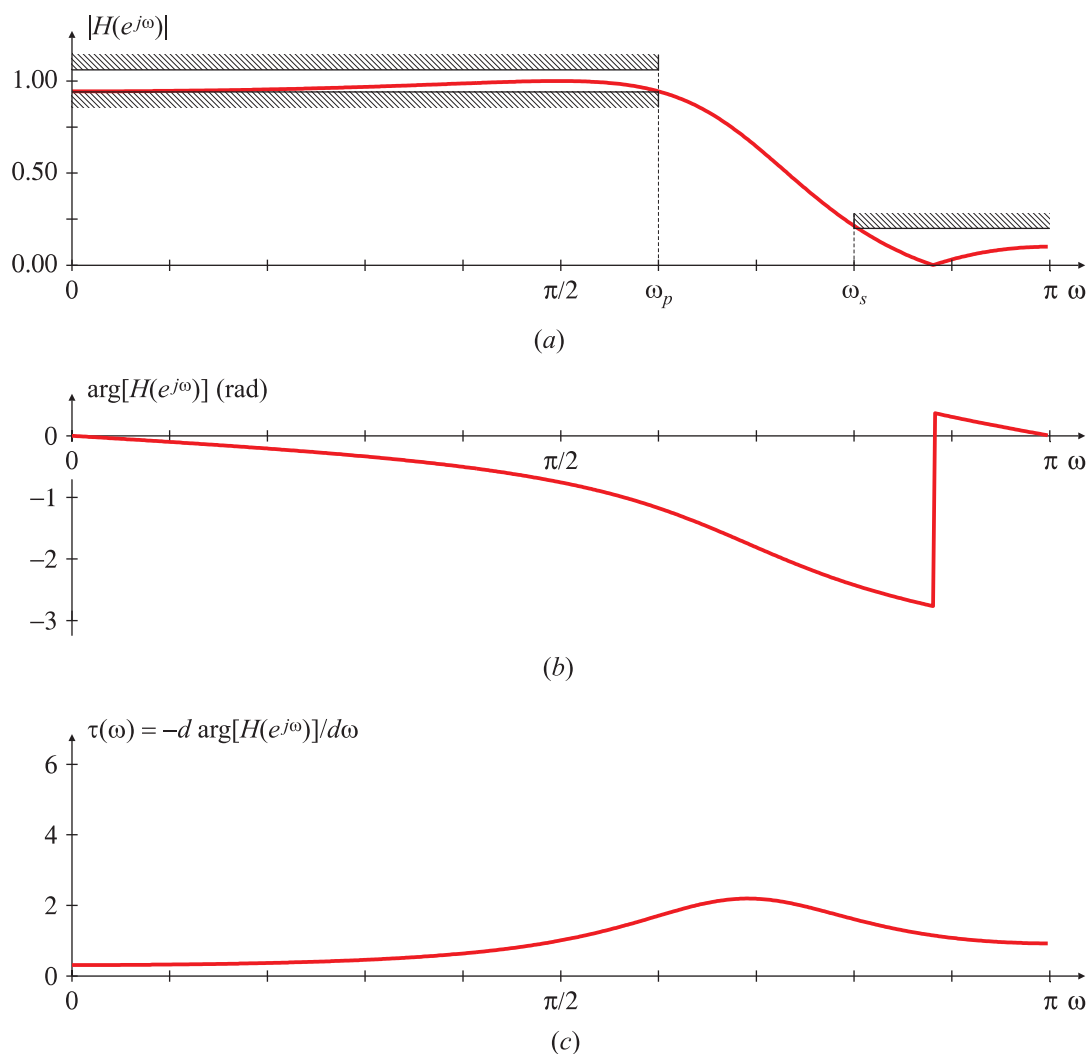


Fig. 7.3. Respuesta en frecuencia del filtro IIR (7.4): módulo (a), fase (b) y retardo de grupo (c).

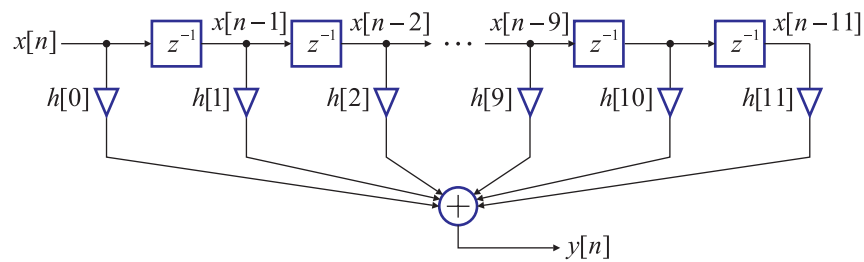


Fig. 7.4. Representación en diagrama bloque del filtro FIR del Ejemplo 7.1.

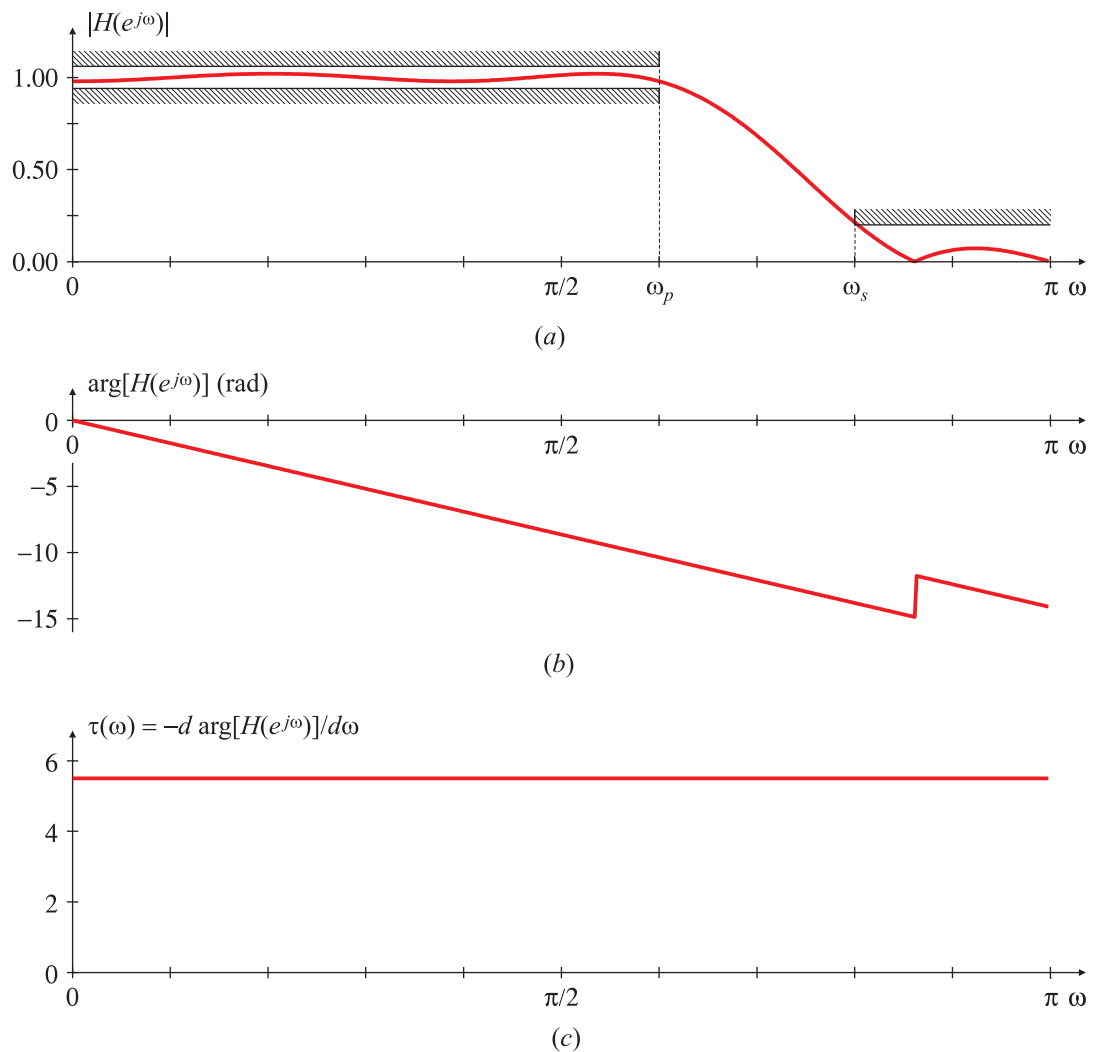


Fig. 7.5. Respuesta en frecuencia del filtro FIR (7.5): módulo (a), fase (b) y retardo de grupo (c).

La Fig. 7.4 muestra el esquema de una posible implementación, cuya ecuación a diferencias es

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \cdots + h[10]x[n-10] + h[11]x[n-11]. \quad (7.5)$$

La respuesta en frecuencia (módulo, fase y retardo de grupo) se ilustra en la Fig. 7.5.  $\square$

Del examen de ambas implementaciones se observa que los requerimientos de cómputo y de lugares de almacenamiento para los dos filtros son:

	FIR	IIR
Número de multiplicaciones:	12	5
Número de sumas:	11	4
Lugares de memoria (coeficientes y datos):	24	8

Es evidente que el filtro IIR es más “económico” en la cantidad de operaciones y de lugares de almacenamiento necesarios que el filtro FIR. Se podría haber explotado la simetría de los coeficientes del filtro FIR para reducir a la mitad la cantidad de memoria necesaria, a costa de dificultar ligeramente la implementación. En este caso el número de coeficientes del filtro FIR ( $N = 12$ ) es aproximadamente 6 veces el orden (la mayor potencia de  $z^{-1}$  en el denominador) de la función transferencia del IIR ( $N = 2$ ).

En los dos casos el módulo de la respuesta en frecuencia satisface las especificaciones, pero las respuestas de fase de los dos filtros son muy diferentes. Mientras que la respuesta de fase del filtro IIR no es lineal (Fig. 7.3), la del filtro FIR (Fig. 7.5) es perfectamente lineal, excepto por un salto de  $\pm\pi$  debido al cero en la banda de rechazo. El retardo de fase, que es la derivada negativa de la curva de fase ( $\phi = -d \arg [H(e^{j\omega})] / d\omega$ ), es constante para todo el rango de frecuencia en el caso del filtro FIR. Para el filtro IIR varía en función de la frecuencia de la señal: la respuesta de fase es razonablemente lineal para bajas frecuencias, pero se aparta de la linealidad para la frecuencias próximas a la de corte. El retardo del filtro IIR es mucho menor que el del FIR, como se observa en la Fig. 7.3 y en la Fig. 7.5 (1/2 muestra vs. 5.5 muestras, respectivamente).

### 7.2.2. La comparación FIR-IIR en el 2007

Las características generales de los filtros recursivos (IIR) y no recursivos (FIR) han variado desde la década del 70 hasta la actualidad, como muestra la Tabla 7.1. En 1970 la aplicación fundamental era el filtrado selectivo en frecuencia y los filtros IIR ofrecían mayores ventajas, sobre todo porque se habían obtenido métodos de diseño analíticos, óptimos, en forma cerrada.

Cuando la aplicación de los filtros digitales se extendió a otros campos (filtros acoplados y filtros adaptivos) el diseño óptimo de los IIR dejó de ser práctico, y los FIR se volvieron una elección natural, en especial porque la teoría y las técnicas de diseño de los filtros adaptivos están bien desarrolladas solamente para filtros FIR. También aparecieron nuevas aplicaciones en las que era necesario preservar la forma de onda de la señal de salida, lo que impone que el filtro tenga una respuesta de fase lineal. Este requisito se satisface más fácilmente usando filtros FIR. En general, los factores que contribuyeron a la mayor utilización de filtros no recursivos fueron:



**Tabla 7.1.** Comparación entre filtros recursivos (IIR) y no recursivos (FIR) a lo largo del tiempo. Las zonas grisadas indican las áreas donde una de las implementaciones es superior a la otra.

Propiedad	1970		1980		1990	
	FIR	IIR	FIR	IIR	FIR	IIR
métodos de diseño	subóptimo usando ventanas	óptimo, analítico, forma cerrada	Óptimo, métodos iterativos	óptimo, analítico, forma cerrada	Óptimo, métodos iterativos	óptimo, analítico, forma cerrada
lugares de memoria-multiplicaciones necesarias	muchos	pocos	más	menos	más	menos
pasatodos exactos	no	sí	no	sí	no	sí
inestables	no	si polos $p_i$ ( $ p_i  > 1$ )	no	si polos $p_i$ ( $ p_i  > 1$ )	no	no
zona muerta	no	sí	no	sí	no	no
fase lineal	sí	no	sí	no	sí	sí
transformador de Hilbert	poco eficiente	no causal	poco eficiente	no causal	poco eficiente	eficiente
adaptivo	sí	no	sí	difícil o imposible	sí	difícil o imposible
posibilidad de paralelismo			muchas	pocas	muchas	muchas

- nuevas aplicaciones de filtrado;
- requerimientos de fase lineal;
- la disponibilidad de los primeros métodos de optimización: los FIR seguían necesitando más operaciones por muestra que los IIR, pero la diferencia de eficiencia entre ambos era menor;
- aparición de técnicas para trabajar con filtros FIR con respuesta impulsiva de gran longitud (método de convolución rápida, propuesto por Stockham en 1966);
- la disminución del costo de la memoria y la disponibilidad de multiplicadores por hardware;
- la posibilidad de efectuar cálculos en paralelo: si bien ambos tipos de filtros se pueden adaptar para el cálculo en paralelo, el paralelismo es más limitado para los IIR si no se puede efectuar un producto en el intervalo de tiempo entre dos muestras.

Como resultado de esta evolución, para 1980 las preferencias se habían volcado hacia los filtros no recursivos (FIR). Pero como muestra la Tabla 7.1, algunas de las características que favorecieron a los FIR durante 1980 se neutralizaron en la década del 90. Lo que cambió para los IIR es que en la actualidad se pueden diseñar para ser siempre estables y también para tener una respuesta de fase lineal. Las implementaciones recientes son

más adecuadas para la paralelización. Según algunos autores (Rader, 2006) muchos de los “problemas” de los IIR en la actualidad están sobrestimados.

### 7.2.3. Los filtros recursivos en la actualidad

En alguna literatura se considera que los filtros IIR tienen problemas de inestabilidad, respuesta de fase no lineal, paralelismo limitado, y que no son adecuados para ciertas aplicaciones. Sin embargo, la mayoría de estas limitaciones pueden salvarse si se efectúa procesamiento por bloques, y se acepta el error despreciable de truncar la respuesta impulsiva. Un filtro recursivo puede aproximar una respuesta impulsiva deseada con error arbitrariamente pequeño. En teoría, la respuesta impulsiva de un filtro recursivo es infinitamente larga (de ahí el nombre IIR), pero en la práctica la respuesta decae a cero exponencialmente rápido y se la puede truncar después de algunos cientos de muestras cuando ha alcanzado valores insignificantes, manteniendo la cota de error. El comportamiento es equivalente a filtrar la señal con un filtro FIR de orden elevado, pero con muchas menos operaciones por muestra que las que necesitaría un filtro FIR de la misma longitud.

La señal de entrada se parte en bloques de longitud  $L$ , mucho mayor que la longitud  $P$  de la respuesta impulsiva (truncada) del filtro. Cada bloque de entrada se filtra usando la ecuación a diferencias recursiva, y el resultado se trunca a longitud  $L + P - 1$ . Los bloques de salida sucesivos se concatenan como en el método *overlap-add* solapando las primeras  $P - 1$  muestras de la etapa actual con las últimas  $P - 1$  muestras de la etapa anterior. La eficiencia computacional aumenta, pues mientras que el cálculo de cada muestra de salida necesita  $P$  operaciones en un FIR de longitud  $P$ , la aproximación de su respuesta impulsiva con un filtro IIR de orden  $N$  se consigue con  $N \ll P$ . De esta forma el cálculo de cada muestra de salida necesita a lo sumo  $2N \ll P$  operaciones.

El procesamiento por bloques permite además solucionar otro tipo de problemas:

1. **Estabilidad:** El procesamiento por bloques permite que los filtros no sean necesariamente causales. En los filtros causales, los polos fuera del círculo unitario representan inestabilidad, pero si cada bloque de salida se computa iterando la ecuación a diferencias hacia atrás en el tiempo, los polos que están fuera del círculo no implican inestabilidad. De esta forma se pueden tener filtros recursivos con polos en cualquier lugar del plano complejo, excepto sobre el círculo unitario.
2. **Fase lineal:** Si  $H(e^{j\omega})$  es la respuesta en frecuencia de un filtro cualquiera, se puede obtener un filtro de fase lineal (de hecho, de fase nula) con respuesta en frecuencia  $|H(e^{j\omega})|^2$  si el bloque de entrada se filtra dos veces, una de ellas hacia atrás en el tiempo, como se estudió en el Capítulo anterior. Esta idea fue propuesta por Powell y Chau en 1990, pero en su momento no recibió mucha atención.
3. **Paralelismo:** cada bloque puede procesarse en diferentes instancias de hardware.

El procesamiento por bloques permite implementar transformadores de Hilbert muy eficientes (Rader, 1984). Siguiendo la idea de los filtros de fase nula, se utiliza un par de filtros IIR cuya respuesta de fase difiere en  $\pi/2$  radianes. Esta implementación es mucho más eficiente que un diseño FIR óptimo, necesitando de 5 a 10 veces menos multiplicaciones para las mismas especificaciones. Otros filtros, como los adaptivos, todavía no se pueden implementar fácilmente como IIR aún usando el esquema de filtrado por bloques.

## 7.3. Etapas de diseño de filtros digitales

El diseño de un filtro digital involucra los siguientes pasos:

- especificación de los requerimientos del filtro;
- elección de una aproximación conveniente y cálculo de los coeficientes;
- representación del filtro utilizando una estructura adecuada (realización);
- análisis de los efectos de la longitud finita de palabra en el desempeño;
- implementación en hardware o software.

Estos cinco pasos no son necesariamente independientes, ni necesitan seguirse en el orden descrito; actualmente, las técnicas de diseño disponibles combinan el segundo y parte del tercero y cuarto. Para lograr un filtro eficiente es necesario iterar entre las distintas etapas, especialmente si, como es habitual, las especificaciones de diseño dejan cierto grado de libertad al diseñador, o si se desean explorar otras alternativas de diseño.

### 7.3.1. Especificaciones de diseño

Los requerimientos incluyen la especificación de

1. las características de las señales: tipo de fuente de señal, interfaz de entrada-salida, velocidad de procesamiento, ancho de palabra, la mayor frecuencia de interés;
2. las características del filtro: la respuesta en módulo y/o fase deseadas y sus tolerancias, la velocidad de operación, el modo de filtrado (en línea o fuera de línea);
3. la forma de implementación: como una rutina de alto nivel en una computadora, o un programa específico para un DSP;
4. otras restricciones al diseño, como por ejemplo el costo del filtro.

Es posible que inicialmente el diseñador no cuente con toda la información necesaria para especificar completamente el filtro, pero cuanto más detalles se conozcan más sencillo será el proceso de diseño.

Aunque algunos de los requerimientos discutidos arriba son dependientes de la aplicación, es necesario resaltar los aspectos referidos a las *características* del filtro. Frecuentemente, los requisitos del filtro digital se especifican en el dominio frecuencial, y para el caso de los filtros selectivos en frecuencia, estas especificaciones toman la forma de bandas de tolerancia, como muestra la Fig. 7.6 para el caso de un filtro pasabajos. Las zonas grisadas indican los límites de tolerancia. En la banda de paso, el módulo de la respuesta admite una variación máxima de  $\pm\delta_p$ , y en la banda de rechazo se pretende que la ganancia no exceda  $\delta_s$ . Es frecuente especificar estas cotas en dB.

El ancho de la zona de transición determina qué tan abrupto es el filtro. En esta región se espera que el módulo de la respuesta en frecuencia decrezca monótonamente desde la banda de paso a la banda de rechazo. Los principales parámetros de interés son:

- desviación en la banda de paso:  $\delta_p$ ,

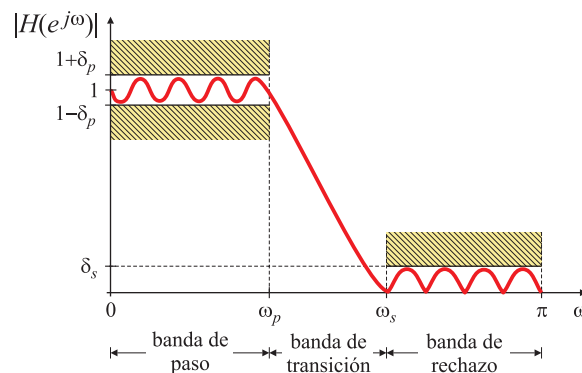


Fig. 7.6. Bandas de tolerancia para un filtro pasabajos.

- desviación en la banda de rechazo:  $\delta_s$ ,
- frecuencia de corte de la banda de paso:  $\omega_p$ ,
- frecuencia de corte de la banda de rechazo:  $\omega_s$ .

Las frecuencias esquina se suelen normalizar a la frecuencia de muestreo ( $\omega_i = 2\pi f_i/f_s$ ), pero también son frecuentes las especificaciones en unidades típicas como Hz, kHz, y a menudo son mucho más significativas. Las desviaciones con respecto a la respuesta deseada tanto en la banda de paso como en la banda de rechazo pueden expresarse en valores absolutos o en decibeles (dB), indicando la ondulación máxima (“ripple”) tolerada en la banda de paso, y la atenuación mínima exigida en la banda de rechazo:

- atenuación en la banda de rechazo:  $A_s = -20 \log_{10} \delta_s$ ,
- ondulación en la banda de paso:  $A_p = 20 \log_{10} (1 + \delta_p)$ .

En general, la respuesta de fase un filtro no se especifica tan detalladamente como el módulo de la respuesta en frecuencia. En muchos casos es suficiente indicar que importa la distorsión de fase, o que se pretende una respuesta de fase lineal. Sólo es necesario detallar la respuesta en fase deseada en aquellas aplicaciones donde los filtros se utilizan para compensar o ecualizar la respuesta en fase de un sistema.

#### EJEMPLO 7.2. Especificaciones de diseño de un filtro pasabanda

Se desea diseñar un filtro FIR pasabanda cuya respuesta en frecuencia satisfaga las siguientes especificaciones:

banda de paso:	$0,18 \times 2\pi$ a $0,33 \times 2\pi$ ,
ancho de la zona de transición:	$0,04 \times 2\pi$ ,
ganancia en la banda de paso:	$1 \pm 0,05$ ( $A_p = 0,42$ dB),
ganancia en la banda de rechazo:	$< 0,001$ ( $A_s = 60$ dB).

En la Fig. 7.7 se muestra el esquema de bandas de tolerancias del filtro. La atenuación en la banda de rechazo debe ser mayor que  $A_s = -20 \log_{10} \delta_s = 60$  dB, y la ondulación máxima tolerada en la banda de paso es de  $A_p = 20 \log_{10} (1 + \delta_p) = 0,42$  dB.  $\square$

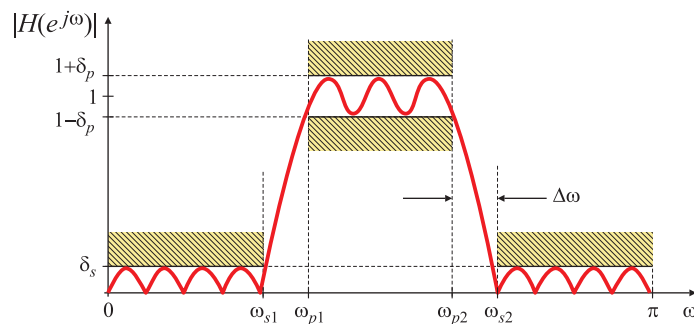


Fig. 7.7. Bandas de tolerancia para el filtro pasabanda del Ejemplo 7.2.

### 7.3.2. Elección de la aproximación y cálculo de los coeficientes

En esta etapa se elige alguno de los métodos de aproximación (Butterworth, Chebyshev, elíptico, etc. si el filtro es IIR, o equiripple, óptimo, con ventanas, etc. si es FIR) y se calculan los valores de los coeficientes  $h[n]$  del filtro FIR, o  $a_k$  y  $b_k$  del filtro IIR, de modo de satisfacer las especificaciones (Sección 7.3.1). El método empleado para determinar los coeficientes es distinto según el filtro sea IIR o FIR.

Tradicionalmente, el cálculo de los coeficientes de los filtros IIR se basa en la transformación de las funciones de sistema de filtros analógicos en filtros discretos. Los dos métodos clásicos son el de *invariación al impulso* y el de *transformación bilineal*. Con la técnica de la invariación al impulso la respuesta impulsiva del filtro digital está formada por las muestras de la respuesta impulsiva del filtro analógico. Sin embargo, el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro discreto es diferente, en general, de la del filtro continuo. Debido a fenómenos de aliasing, el método no es apropiado para el diseño de filtros pasabanda o filtros eliminabanda, o cualquier tipo de filtro cuya respuesta en frecuencia no sea aproximadamente nula por encima de cierta frecuencia  $f_H$ .

Por otra parte, el método de la transformada bilineal produce filtros muy eficientes, y es apropiado para el diseño de cualquier tipo de filtro con ganancia constante en la banda de paso. Permite el diseño de filtros con características frecuenciales clásicas como Butterworth, Chebyshev, elípticos, etc. Los filtros digitales calculados en base a la transformada bilineal preservan la característica de respuesta en frecuencia, pero no las propiedades temporales. En la actualidad se cuenta con programas de cálculo que permiten obtener los coeficientes del filtro digital directamente a partir de las especificaciones usando el método de la transformada bilineal o la técnica analítica desarrollada por Rader y Gold (1967) para filtros recursivos equiripple.

Los filtros con respuestas sencillas, como los resonadores, “notch”, filtros peine, osciladores digitales, etc., se pueden diseñar ubicando directamente los polos y los ceros en el plano complejo; sin embargo, si las especificaciones son exigentes, es conveniente utilizar las técnicas de diseño clásicas.

Los coeficientes de los filtros FIR pueden calcularse con varios métodos. Entre ellos merecen destacarse el diseño por ventanas, la técnica de suavizado de las bandas de transición, el método de muestreo en frecuencia, y los métodos óptimos (el algoritmo de Parks y McClellan o el algoritmo de Remez). El método de diseño utilizando ventanas es sencillo y

**Tabla 7.2.** Métodos típicos para el diseño de filtros IIR y FIR.

IIR	FIR
invariación al impulso	ventanas
transformada bilineal	bandas de transición suaves
ubicación directa de polos y ceros	muestreo en frecuencia
óptimos	óptimos

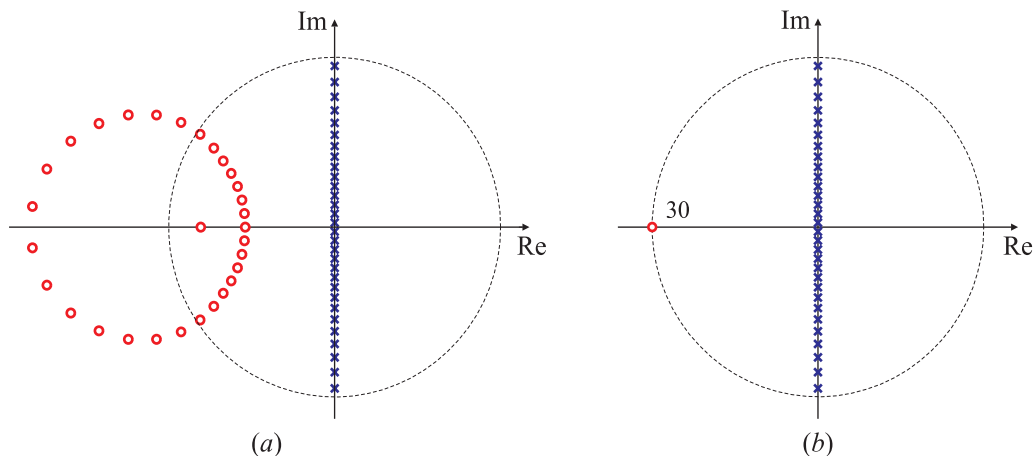
flexible pero no permite un control muy preciso sobre los parámetros del filtro. La técnica de las bandas de transición suaves permite atenuar el efecto Gibbs, a costa de una pequeña complejidad adicional. El método de muestreo en frecuencia permite una implementación particularmente eficiente (y recursiva) de filtros FIR, pero puede tener problemas cuando se usa aritmética de punto fijo. Con la disponibilidad de programas de diseño eficientes y con buena interfaz con el usuario, los métodos óptimos son ampliamente utilizados hoy en día, y para la mayoría de las aplicaciones permiten obtener rápidamente el filtro FIR deseado.

Los métodos típicos para el cálculo de los coeficientes de los filtros se resumen en la Tabla 7.2. El método de diseño se elige de acuerdo a la aplicación en particular. Si bien influyen varios factores, el más importante es qué tan críticas son las especificaciones. La decisión “difícil” es optar entre FIR o IIR. En aquellos casos en que las propiedades de los FIR (respuesta de fase estrictamente lineal, estabilidad inherente) son imprescindibles, la mejor elección puede ser el diseño por métodos óptimos, o usando ventanas (generalmente la de Kaiser). Si, en cambio, son deseables las características de los IIR (menor cantidad de coeficientes para especificaciones similares) el método de la transformada bilineal es apropiado para la mayoría de los casos.

### 7.3.3. Realización

Por *realización* se entiende convertir una función de sistema  $H(z)$  en un conjunto de ecuaciones a diferencias que se ejecutarán como un algoritmo en un procesador. El conjunto de ecuaciones también se conoce como la *estructura* del filtro. Existen infinitas formas de escribir la ecuación a diferencias, de modo que existen infinitos tipos de estructuras. Matemáticamente las distintas realizaciones producen el mismo resultado sobre la señal a filtrar; sin embargo en el momento de la implementación la sensibilidad a la variación de los coeficientes, propagación del ruido de redondeo o de truncación, organización y/o requerimientos de memoria en un procesador en particular, etc., suelen decidir la elección de una estructura particular. Cada realización se asocia a un diagrama bloque como los de las Figs. 7.2 y 7.4, que revela la cantidad de lugares de memoria necesarios para el almacenamiento de los datos y los coeficientes, número de operaciones requeridas, etc.

Es frecuente utilizar distintas estructuras para implementar filtros IIR o FIR. Para filtros IIR, las tres estructuras típicas son las *formas directa, cascada y paralelo*; el diagrama bloque de una *forma directa*, denominada de “tipo II” es la que se muestra en la Fig. 7.2 para un sistema de segundo orden. En este caso, la función transferencia (9.4) se implementa con el conjunto de ecuaciones a diferencia (9.5); la Fig. 7.2 muestra que se necesitan dos



**Fig. 7.8.** Comparación de los patrones de polos y ceros de una implementación en forma directa I (a) y en secciones de segundo orden, cada una de ellas en forma directa I (b).

lugares de memoria para almacenar la historia del filtro (los cuadrados señalados con  $z^{-1}$ ) y cinco lugares de memoria para almacenar los coeficientes ( $a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ ). Sin embargo, las estructuras cascada y paralelo, que se estudiarán en el Capítulo 13, son las más utilizadas para la implementación de filtros IIR pues son mucho más insensibles a los efectos de cuantización de coeficientes que la estructura directa. Ésta presenta una alta sensibilidad a la variación de los coeficientes, especialmente para filtros de alto orden, como se muestra en el siguiente Ejemplo.

#### EJEMPLO 7.3. Influencia de la estructura con coeficientes de precisión “infinita”

Aún cuando los coeficientes se implementen con muy alta precisión, como cuando se usa MATLAB, la estructura directa es inadecuada para realizar filtros de alto orden. Por ejemplo, un filtro tipo Butterworth discreto de orden  $N = 30$  con frecuencia de corte en  $\omega_c = \pi/2$  se caracteriza por tener 30 ceros en  $z = -1$ . La implementación en forma directa, utilizando los comandos

```
[n, d] = butter(30, 0.5);
zplane(n, d);
```

da resultados muy diferentes, como se puede ver en la Fig. 7.8(a). Por efecto de los (pequeños) errores numéricos, los 30 ceros que deberían estar ubicados en  $z = -1$ , se esparcen en un entorno, no necesariamente pequeño, de este punto. La implementación como secciones de segundo orden, que se diseña con los comandos

```
[z, p, k] = butter(30, 0.5);
[sos, g] = zp2sos(z, p, k);
hsos = dfilt.df1sos(sos, g);
zplane(hsos);
```

tiene la distribución de polos y ceros prevista por la teoría, como se observa en la Fig. 7.8(b). □

Para los filtros FIR (7.2) la forma más utilizada es la directa, Fig. 7.4, porque es sencilla de implementar y aprovecha al máximo la arquitectura del hardware de la mayoría de los procesadores digitales de señales (DSP). Esta estructura también se conoce como filtro transversal o “línea de retardo” (*tapered delay line*) pues almacena los valores pasados de

las muestras de la señal de entrada. Como se estudiará más adelante, esta implementación es mucho menos sensible a la cuantización de los coeficientes que la forma directa de los filtros IIR. Otras estructuras de uso frecuente son las de muestreo en frecuencia y la de convolución rápida, que se estudiarán en el Capítulo 13.

Sintetizando, para un filtro dado la elección de la estructura depende:

- del tipo de filtro (IIR o FIR);
- de la facilidad de implementación;
- de la sensibilidad de la estructura a los efectos de la longitud finita de palabra.

#### 7.3.4. Efectos de la longitud de palabra finita

Los pasos de diseño referidos a la aproximación y a la realización suponen que las operaciones que especifican los algoritmos se realizan con precisión infinita, o al menos muy alta. Sin embargo, en muchas aplicaciones donde el bajo costo es decisivo, es necesario representar los coeficientes del filtro utilizando un número finito de bits (típicamente 8, 16 o más), y realizar las operaciones indicadas por las ecuaciones a diferencia utilizando aritmética de precisión finita.

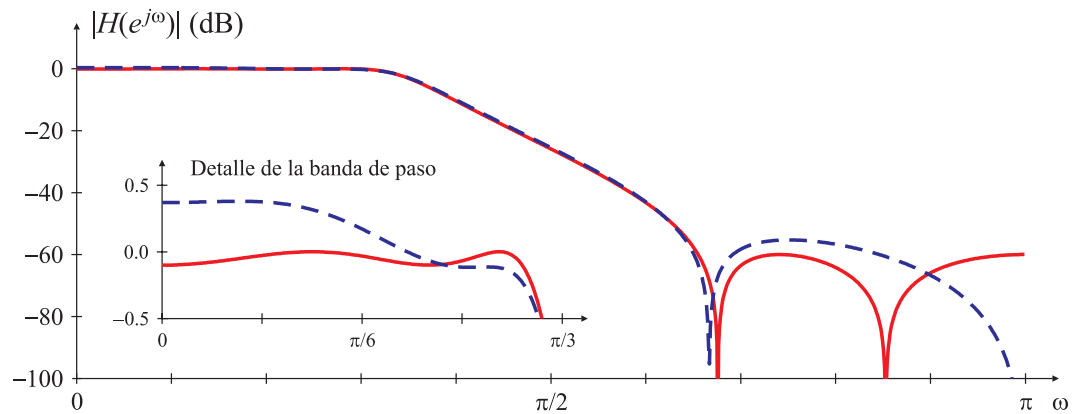
El uso de un número finito de bits degrada el desempeño del filtro, y en algunos casos puede inutilizarlo por completo. El diseñador debe tener en cuenta estos efectos, y elegir longitudes de palabra apropiados para los coeficientes del filtro, las variables de entrada y salida, y las operaciones aritméticas. En general, el ancho en bits de las palabras de entrada y salida (que se leen o se escriben en los conversores A/D y D/A, respectivamente) son mucho menores que la longitud de palabra utilizado para los coeficientes y los cálculos (10 o 16 bits, frente a 25 o 32 bits).

Las principales causas de la disminución del desempeño en los filtros digitales debido a la longitud finita de palabra son:

- *Cuantización de las señales de entrada y salida*, debido a la resolución finita de los conversores A/D y D/A. Este efecto se suele modelar como un fenómeno aleatorio (ruido), tal como se estudió en el Capítulo 7.
- *Cuantización de los coeficientes*, lo que conduce a variaciones de la respuesta en frecuencia de filtros FIR e IIR, y posiblemente a inestabilidades en los filtros IIR.
- *Errores aritméticos por redondeo*. Los procesadores con longitud de palabra finita tienen un acumulador con bits adicionales para mantener la precisión (por ejemplo, el resultado de la multiplicación de dos números de  $B$  bits es un número de  $2B$  bits). Cuando estos resultados se almacenan en memoria se truncan a la longitud de palabra adoptada. El error resultante, denominado *ruido de redondeo*, altera la respuesta del filtro. En los filtros IIR puede causar inestabilidad, y también dar lugar oscilaciones de pequeña amplitud de la salida aún con entrada nula.
- *Desborde (overflow)*, que ocurre cuando el resultado de una suma excede el ancho de palabra adoptado, resultando en errores de las muestras de salida, que pueden causar inestabilidad, u oscilaciones de gran amplitud en los filtros IIR.

La degradación del desempeño depende de:





**Fig. 7.9.** Respuesta en frecuencia del filtro del EJEMPLO 7.4 implementado con una estructura tipo forma directa II. (—) filtro prototipo; (- -) filtro con coeficientes cuantizados.

- la longitud de palabra y tipo de aritmética utilizada para efectuar los cálculos;
- el método adoptado para cuantizar las variables y los coeficientes del filtro a la longitud de palabra elegida;
- la estructura del filtro.

Conociendo estos factores, el diseñador puede analizar los efectos de la longitud de palabra finita en el desempeño del filtro, y efectuar las correcciones que sean necesarias.

#### EJEMPLO 7.4. Efectos de cuantización en un filtro IIR

Un filtro IIR elíptico de cuarto orden con frecuencia de corte en  $\omega_c = 0,3\pi$ , 0,1 dB de ondulación en la banda de paso, y 60 dB de atenuación en la banda de rechazo está caracterizado por la función de sistema

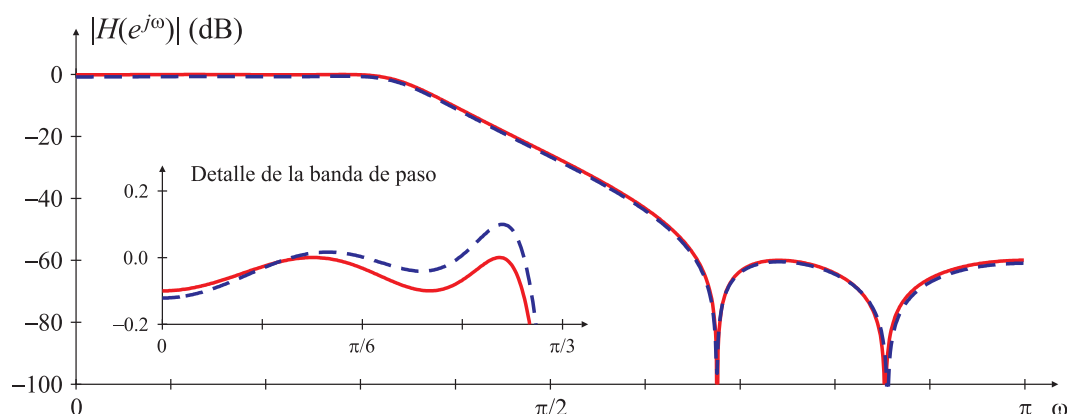
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}},$$

donde

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,01588232577583, & a_0 &= 0,57816706294199, \\ b_1 &= 0,04509870267465, & a_1 &= -1,00000000000000, \\ b_2 &= 0,06160127928264, & a_2 &= 0,98785160189871, \\ b_3 &= 0,04509870267465, & a_3 &= -0,49030269551500, \\ b_4 &= 0,01588232577583, & a_4 &= 0,10997293011303. \end{aligned}$$

El módulo de la respuesta en frecuencia del filtro se muestra con línea de trazo continuo en la Fig. 7.9. Si el filtro se implementa en un procesador de 8 bits, utilizando una estructura tipo forma directa II se deben truncar los coeficientes, que resultan

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,0156250, & a_0 &= 0,5781250, \\ b_1 &= 0,0468750, & a_1 &= -1,0000000, \\ b_2 &= 0,0625000, & a_2 &= 0,9843750, \\ b_3 &= 0,0468750, & a_3 &= -0,4921875, \\ b_4 &= 0,0156250, & a_4 &= 0,1093750. \end{aligned}$$



**Fig. 7.10.** Respuesta en frecuencia del filtro del EJEMPLO 7.4 implementado con una cascada de dos bloques de segundo orden. (—) filtro prototipo; (- -) filtro con coeficientes cuantizados.

El módulo de la respuesta en frecuencia del filtro con los coeficientes cuantizados, graficada con línea de trazos en Fig. 7.9, revela que se violan las especificaciones de diseño. Sin embargo, la elección de una estructura diferente puede solucionar el problema. En la Fig. 7.10 se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia del mismo filtro, implementado como una cascada de dos secciones de segundo orden, con ganancia  $C = 0,0274701$ , y cuyos coeficientes cuantizados a 8 bits son

$$\begin{aligned} b_{01} &= 0,5000000, & a_{01} &= 0,5000000, \\ b_{11} &= 0,8984375, & a_{11} &= -0,4531250, \\ b_{21} &= 0,5000000, & a_{21} &= 0,1406250, \\ b_{02} &= 0,5000000, & a_{02} &= 0,5000000, \\ b_{12} &= 0,5234375, & a_{12} &= -0,4140625, \\ b_{22} &= 0,5000000, & b_{22} &= 0,3437500. \end{aligned}$$

La figura revela que los requisitos de diseño se satisfacen sin necesidad de cambiar la resolución en bits de los coeficientes.  $\square$

El ejemplo anterior muestra que los efectos de la cuantización de los coeficientes pueden atenuarse cambiando la estructura del filtro. Dependiendo de la implementación, algunos de los errores mencionados pueden ser insignificantes. Por ejemplo, si el filtro se calcula en un lenguaje de alto nivel que se ejecuta en computadoras más o menos modernas, por ejemplo con MATLAB en una PC, los errores de cuantización de coeficientes y redondeo no siempre son importantes. En aplicaciones de tiempo real las señales de entrada y salida se cuantizan a 8, 12 o 16 bits, según el tipo de conversor A/D y D/A utilizado. Si el ancho de palabra elegido para efectuar la operaciones y el redondeo es de esta magnitud, es casi obligatorio analizar los efectos de la cuantización en las características del filtro.

### 7.3.5. Implementación

Una vez que se han calculado los coeficientes del filtro, elegido una estructura adecuada, y verificado que las especificaciones se satisfacen después de considerar la degradación causada por la cuantización de coeficientes y de las variables a la longitud de palabra

elegida, la ecuación a diferencias debe implementarse como una rutina de software o en hardware. Cualquiera sea el método de implementación, cada muestra de la salida  $y[n]$  del filtro debe calcularse de acuerdo a la ecuación a diferencias que involucra multiplicaciones, sumas y restas, y retardos. De modo que para implementar un filtro se necesitan los siguientes bloques básicos:

- memoria (ROM o RAM) para almacenar los coeficientes del filtro;
- memoria RAM para almacenar las muestras actuales y pasadas de la entrada  $x[n]$ ,  $x[n-1]$ , ...,  $x[n-M]$ , y la salida  $y[n]$ ,  $y[n-1]$ , ...,  $y[n-N]$ ;
- multiplicadores en hardware o rutinas de multiplicación (bibliotecas de software);
- sumador o unidad aritmético-lógica.

La manera en que se configuran estos bloques depende fuertemente según el procesamiento sea en tiempo real o fuera de línea. Cuando se procesa fuera de línea, los datos o señal de entrada están disponibles en algún medio de almacenamiento (cinta, CD, memoria, etc.) Tal es el caso del registro de datos experimentales para el análisis posterior. En estos casos el filtro se implementa utilizando un lenguaje de alto nivel, y se ejecuta en una computadora de propósito general. Por ello las implementaciones fuera de línea suelen ser programas. En algunas aplicaciones, por ejemplo el procesamiento de imágenes, se agrega hardware adicional dedicado para acelerar la velocidad de procesamiento.

En el procesamiento en tiempo real se requiere que el filtro genere una muestra de la señal de salida ante cada muestra de la señal de entrada, lo que implica que el cómputo completo de la ecuación a diferencias debe completarse en el intervalo de tiempo entre una y otra muestra de la señal de entrada, o bien operar sobre *bloques* de datos utilizando las técnicas tipo *overlap-add* u *overlap-save*. El procesamiento en tiempo real necesita de hardware dedicado cuando la frecuencia de muestreo es muy alta, o cuando el filtro es de alto orden. Este hardware se nuclea alrededor de un procesador digital de señales, o DSP, que en la actualidad es producido por varios fabricantes, como Motorola, Texas Instruments, Analog Devices, Burr Brown, etc. Cada DSP incluye memoria RAM y ROM o FLASH, multiplicadores rápidos, unidades aritmético lógicas flexibles, métodos de direccionamiento poderosos, etc. y algunas unidades incluyen los conversores A/D y D/A necesarios para procesar señales del mundo exterior.

## 7.4. Diseño de filtros sencillos

Si bien es posible diseñar filtros que satisfagan casi cualquier especificación de diseño, en muchas aplicaciones basta con una acción de filtrado sencilla, que insuma pocas operaciones por cada muestra de salida, y que no requiera de gran cuidado en su implementación. Con secciones FIR o IIR de segundo orden se pueden implementar una gran variedad de filtros que satisfacen estas condiciones.

### 7.4.1. Filtros Pasatodo

Un filtro pasatodo tiene una respuesta en frecuencia de magnitud constante para todas las frecuencias,

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad 0 \leq \omega \leq \pi.$$

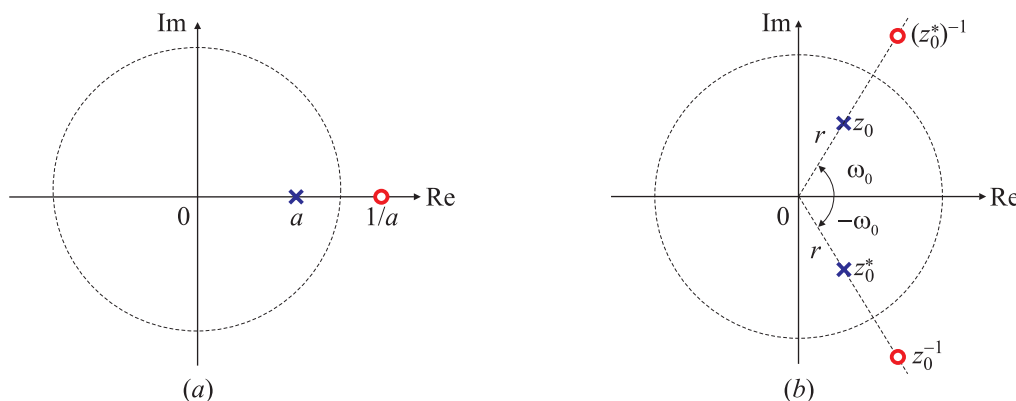


Fig. 7.11. Diagrama de polos y ceros de pasatodos de primer (a) y segundo (b) orden.

El filtro pasatodo más sencillo es un retardo puro de  $n_0$  muestras,  $n_0 \in \mathbb{Z}$ , cuya función de sistema

$$H(z) = z^{-n_0}$$

se caracteriza por tener  $n_0$  polos en el origen si  $n_0 > 0$  (que es la situación usual). Este sistema deja pasar todas las señales sin atenuación, salvo por un retardo de  $n_0$  muestras  $y[n] = x[n - n_0]$ : es un pasatodo trivial con una respuesta de fase lineal  $\arg[H(e^{j\omega})] = -n_0\omega$ .

Un filtro pasatodo más interesante es el que tiene como función de sistema

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{N-1}z^{-N+1} + a_Nz^{-N}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $a_k$ ,  $0 \leq k \leq N$ , son reales, y frecuentemente  $a_0 = 1$ . Si se define el polinomio  $A(z)$  como

$$A(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k},$$

la función de sistema puede expresarse como<sup>1</sup>

$$H(z) = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)}. \quad (7.6)$$

Como  $|H(e^{j\omega})|^2 = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} = 1$ , el sistema (7.6) es un pasatodo. Mas aún, si  $p_0$  es un polo de  $H(z)$ , entonces  $c_0 = 1/p_0$  es un cero de  $H(z)$ : los ceros del sistema son los recíprocos de los polos. El diagrama de polos y ceros típicos de filtros pasatodo de primer y segundo orden se muestran en la Fig. 7.11(a)-(b), respectivamente.

La forma general de la función de sistema del filtro pasatodo (7.6) con coeficientes  $a_k$  reales es

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_R} \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_c} \frac{(z^{-1} - \beta_k^*)}{(1 - \beta_k^* z^{-1})} \frac{(z^{-1} - \beta_k)}{(1 - \beta_k z^{-1})}, \quad (7.7)$$

<sup>1</sup> $H(z)$  también puede escribirse como  $H(z) = z^{-N} A^*(1/z^*)/A(z)$  si se permite que  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq k \leq N$ .

con  $N_R$  polos y ceros reales ( $p_k = \alpha_k$ ,  $c_k = \alpha_k^{-1}$ ) y  $N_C$  pares de polos y ceros complejos conjugados [ $p_k = \beta_k$ ,  $c_k = (\beta_k^*)^{-1}$ ]. Para que el sistema sea causal y estable es necesario que  $|\alpha_k| < 1$ ,  $|\beta_k| < 1$ .

Es interesante estudiar la respuesta de fase y el retardo de grupo de estos filtros. Un examen de (7.7) revela que

$$\begin{aligned} \arg[H(z)]|_{z=1} &= \arg[H(e^{j\omega})]|_{\omega=0} = 0, \\ \arg[H(z)]|_{z=-1} &= \arg[H(e^{j\omega})]|_{\omega=\pi} = -(N_R + 2N_C)\pi, \end{aligned}$$

de modo que cada sección de primer orden contribuye con un desfase total de  $\pi$  rad, y cada sección de segundo orden con un desfase total de  $2\pi$  rad. El retardo de grupo se puede estudiar analizando la función de sistema de cada una de las unidades de primer orden que forman el filtro pasatodos (7.7),

$$H_k(z) = \frac{z^{-1} - \beta_k^*}{1 - \beta_k z^{-1}} = \frac{z^{-1} - r_k e^{-j\omega_k}}{1 - r_k e^{j\omega_k} z^{-1}}, \quad (7.8)$$

donde  $\beta_k = r_k e^{j\omega_k}$ , y  $r_k$ ,  $\omega_k$  son el módulo y la fase de los polos, respectivamente (Fig. 7.11). La respuesta en fase y el retardo de cada unidad están dadas por

$$\begin{aligned} \arg[H(e^{j\omega})] &= -\omega - 2 \tan^{-1} \frac{r_k \sin(\omega - \omega_k)}{1 - r_k \cos(\omega - \omega_k)}, \\ \tau_k(\omega) &= -\frac{d \arg[H(e^{j\omega})]}{d\omega} = \frac{1 - r_k^2}{1 + r_k^2 - 2r_k \cos(\omega - \omega_k)}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

y como  $r_k < 1$  para asegurar la estabilidad del sistema, resulta

$$\tau_k(\omega) \geq 0, \quad 0 \leq \omega < \pi.$$

Por lo tanto, el retardo de grupo del filtro pasatodo (7.7), formado por la suma de los retardos de grupo de secciones como (7.8), siempre es positivo.

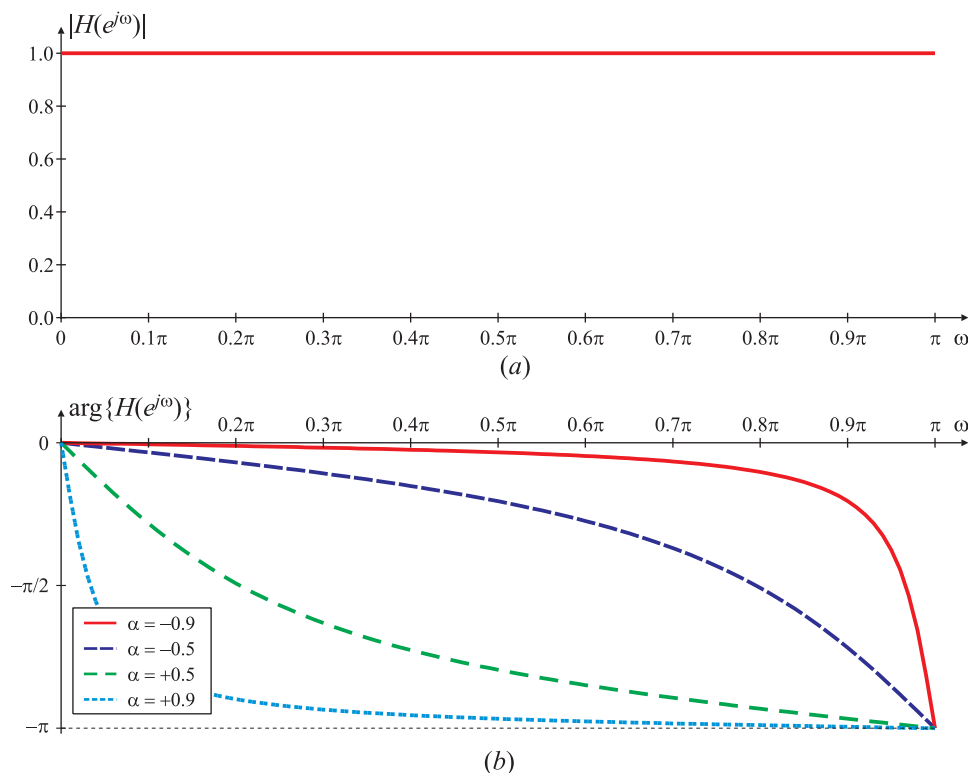
#### EJEMPLO 7.5. Respuesta en frecuencia de pasatodos de primer orden

La Fig. 7.12 muestran las respuesta de fase de filtros pasatodos de primer orden

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \alpha_0}{1 - \alpha_0 z^{-1}}$$

para distintos valores de  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ . Si bien el módulo de la respuesta en frecuencia es constante e igual a la unidad, la fase, en cambio, varía según el parámetro  $\alpha_0$ . En particular la figura muestra que la fase tiende más rápidamente a  $\pi$  cuando  $\alpha_0 > 0$  que cuando  $\alpha_0 < 0$ .  $\square$

Un filtro pasatodo de orden  $N = N_R + 2N_C$  permite especificar la fase o el retardo deseados en  $N$  frecuencias de interés. El cálculo es sencillo si el orden  $N$  es bajo pero el diseño se complica para órdenes superiores. En estos casos es conveniente utilizar herramientas de diseño de filtros más avanzadas, como las que se estudiarán en los Capítulos 11 y 12.



**Fig. 7.12.** Respuesta en módulo y fase de distintos filtros pasatodos de primer orden.

#### 7.4.1.1. Especificación de fase/retardo en un pasatodos de primer orden

En un pasatodos de primer orden la especificación de la fase deseada  $\phi_0 = \arg[H(e^{j\omega})]$ ,  $-\pi < \phi_0 < 0$ , a una frecuencia  $\omega = \omega_0$  determina de manera única la ubicación del polo:

$$\alpha_0 = \frac{\sin[(\phi_0 + \omega_0)/2]}{\sin[(\phi_0 - \omega_0)/2]}.$$

Sin embargo, si se especifica el retardo  $\tau_0$  deseado a una frecuencia  $\omega = \omega_0$ , puede haber más de un polo que satisfaga estos requisitos.. De acuerdo con (7.9) el retardo de un pasatodo de primer orden es

$$\tau(\omega) = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega}. \quad (7.10)$$

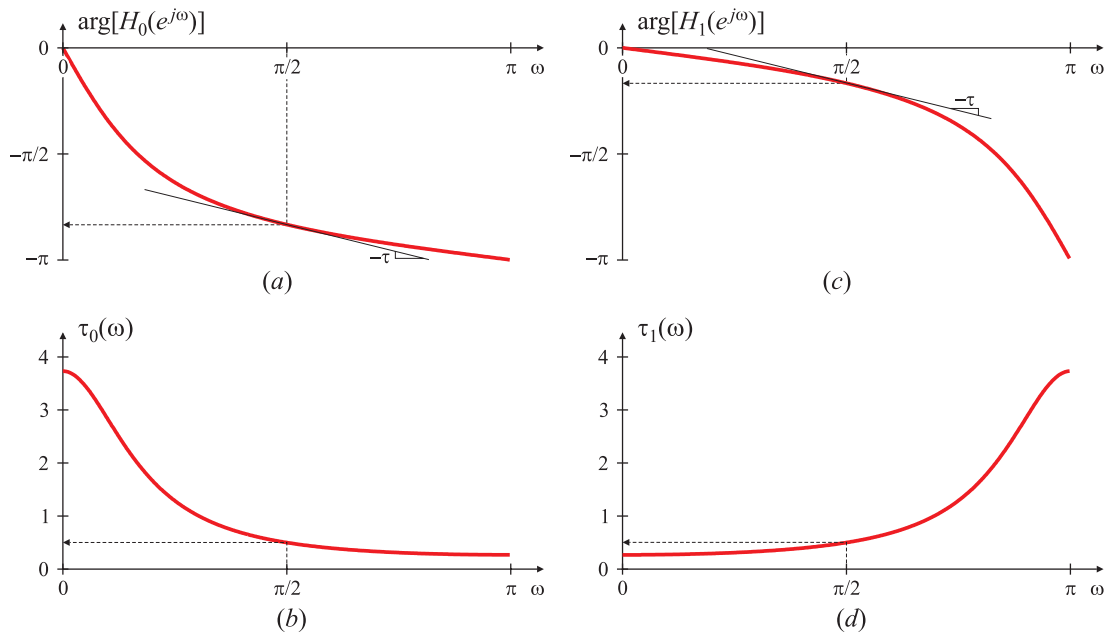
El máximo retardo se alcanza en  $\omega = 0$  si  $\alpha > 0$  o en  $\omega = \pi$  si  $\alpha < 0$ , y su valor es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1 + |\alpha|}{1 - |\alpha|}.$$

De modo que para tener un retardo  $\tau_0 < \tau_{\text{máx}}$  en una frecuencia  $\omega = \omega_0$  el polo  $\alpha$  debe estar ubicado en

$$\alpha_{0,1} = \frac{\tau_0 \cos \omega_0}{1 + \tau_0} \pm \frac{\sqrt{1 - \tau_0^2 (\sin \omega_0)^2}}{1 + \tau_0}. \quad (7.11)$$

Las dos posibles soluciones corresponden a polos con parte real positiva o negativa que resultan en respuestas de fase como las ilustradas en la Fig.7.12; la especificación de



**Fig. 7.13.** Respuestas de filtros pasatodo con retardo  $\tau(\omega) = 1/2$  en  $\omega = \pi/2$ . Respuesta de fase (a) y retardo de grupo (b) para el pasatodos con polo en  $\alpha_0 = 1/\sqrt{3}$ . Respuesta de fase (c) y retardo de grupo (d) para el pasatodo con polo en  $\alpha_0 = -1/\sqrt{3}$ .

la pendiente (el retardo) no determina unívocamente la curva de fase, como revela el siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 7.6. Especificación de retardo en un pasatodos de primer orden

Se desea que el filtro pasatodo tenga un retardo  $\tau_0 = 1/2$  en  $\omega = \pi/2$ . Aplicando (7.11) se encuentra que

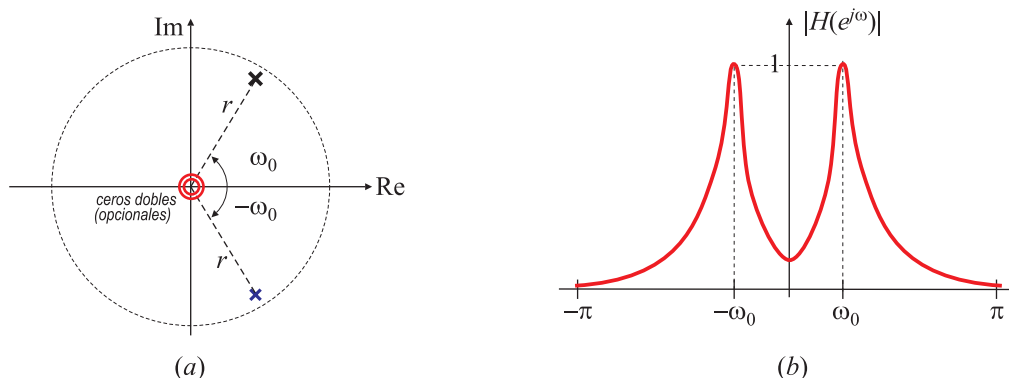
$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong +0,5774, \quad \alpha_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \cong -0,5774$$

En este caso el retardo máximo es el mismo para cualquiera de los polos:  $\tau_{\text{máx}} = (\sqrt{3}+1)/(\sqrt{3}-1) \cong 3,73$ . La Fig. 7.13(a) muestra la fase y la Fig. 7.13(b) el retardo de grupo del pasatodos con polo en  $\alpha_0$ , mientras que las Figs. 7.13(c) y 7.13(d) las mismas curvas para el pasatodo con polo en  $\alpha_1$ . Ambos pasatodos satisfacen las especificaciones de retardo, pero el desfase introducido a la frecuencia de interés es mucho mayor para el pasatodos con polo en  $\alpha_0 > 0$  que para el que tiene el polo en  $\alpha_1 < 0$ .  $\square$

Los filtros pasatodos encuentran aplicación como ecualizadores de fase. Al conectarse en cascada con otros filtros cuya respuesta de fase es pobre, los filtros pasatodo se diseñan para compensar la característica de fase del filtro, y producir un sistema con una respuesta de fase globalmente lineal.

### 7.4.2. Resonadores Digitales

Un resonador digital es un filtro pasabanda especial, con un par de polos complejos conjugados ubicados en la vecindad del círculo unitario, como se muestra en la Fig. 7.14(a); la



**Fig. 7.14.** Diagrama de polos y ceros (a) y respuesta en frecuencia (b) de un resonador.

magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro se ilustra en la Fig. 7.14(b). La posición angular de los polos determina la frecuencia de resonancia del filtro. El nombre *resonador* se debe al hecho que el filtro tiene una gran ganancia (“resuena”) para señales sinusoidales de frecuencia cercana a la de los polos. Los resonadores digitales son útiles en varias aplicaciones, incluyendo síntesis de voz y filtrado pasabanda sencillo.

Para el diseño de un resonador digital con un pico de resonancia en  $\omega = \omega_0$ , los polos complejos conjugados se ubican en

$$p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}, \quad 0 < r < 1.$$

Además, se pueden colocar hasta dos ceros. Aunque la ubicación de éstos es arbitraria, existen dos casos de interés. Una elección posible es ubicar los ceros en el origen. La otra es ubicar un cero en  $z = 1$ , y el otro en  $z = -1$ . Esta elección elimina completamente la respuesta del filtro a las frecuencias  $\omega = 0$  y  $\omega = \pi$ , y es útil en muchas aplicaciones.

La función de sistema del resonador digital con ceros en el origen es

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0}z^{-1})} \\ &= \frac{b_0}{1 - (2r \cos \omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

La respuesta en frecuencia alcanza su máximo en

$$\omega_r = \cos^{-1} \left( \frac{1 + r^2}{2r} \cos \omega_0 \right),$$

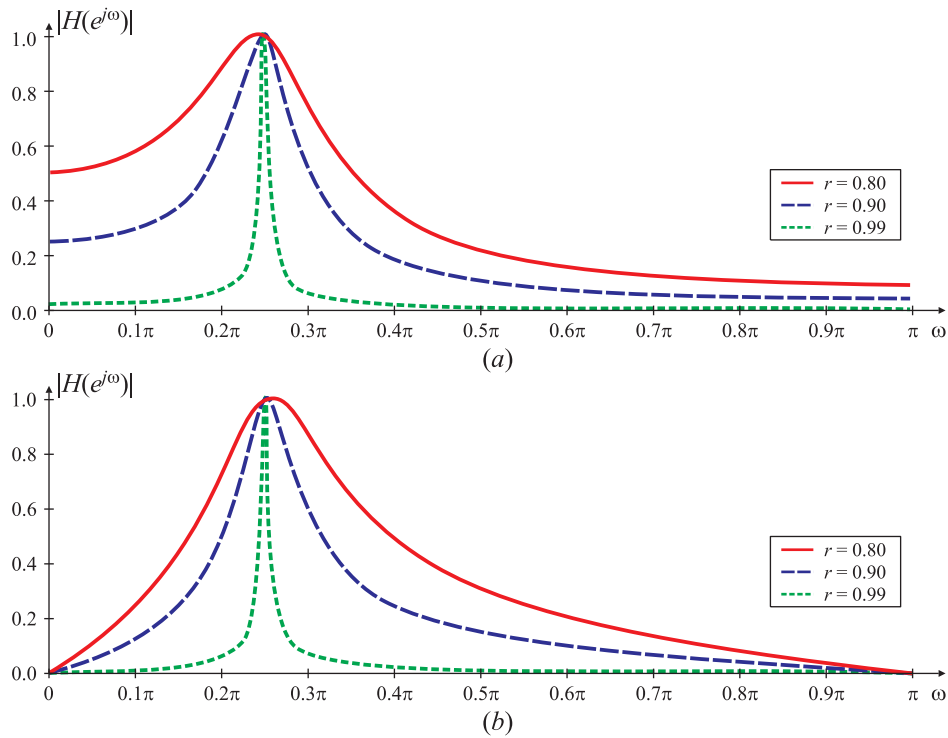
que para valores de  $r$  próximos a la unidad se puede aproximar por

$$\omega_r = \omega_0 - \frac{(1-r)^2}{2 \tan \omega_0} + \frac{(1-r)^3}{2 \tan \omega_0} + \dots$$

Si  $r \cong 1$  resulta  $\omega_r \cong \omega_0$ , y como  $|H(e^{j\omega})|$  alcanza su máximo cerca de  $\omega_0$ , se elige el factor de ganancia  $b_0$  de manera que  $|H(e^{j\omega_0})| = 1$ . Para este caso,

$$b_0 = (1-r) \sqrt{1 - 2r \cos 2\omega_0 + r^2}.$$





**Fig. 7.15.** Respuesta en frecuencia de un resonador con ceros en el origen (a); con ceros en  $\omega = 0, \omega = \pi$  (b).

El ancho de banda del filtro es el intervalo de frecuencias donde la magnitud de la respuesta en frecuencia queda comprendida dentro de los  $\pm 3$  dB respecto del valor máximo. Cuando  $r$  es próximo a la unidad, el ancho de banda del resonador es aproximadamente

$$\Delta\omega \approx 2(1 - r). \quad (7.13)$$

**EJEMPLO 7.7. Resonador con ceros en el origen con resonancia en  $\omega_0 = \pi/4$**

En este ejemplo los polos se ubican en  $z_0 = re^{\pm j(\pi/4)}$ . La Fig. 7.15(a) muestra el módulo de la respuesta en frecuencia del resonador (7.12) para diferentes valores de  $r$ . A medida que  $r$  disminuye la frecuencia de resonancia del filtro se desplaza ligeramente hacia la izquierda de  $\omega_0$ ; además, el máximo del módulo de la respuesta en frecuencia es ligeramente mayor que la unidad. Esto se debe a que la frecuencia de resonancia real  $\omega_r$  no es *exactamente*  $\omega_0$ ; sin embargo, el error es despreciable si  $r \cong 1$ .  $\square$

Si los ceros del resonador se ubican en  $z = 1$  y  $z = -1$ , la función de sistema es

$$H(z) = \frac{b_0(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0}z^{-1})} = \frac{b_0(1 - z^{-2})}{1 - (2r \cos \omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}. \quad (7.14)$$

Nuevamente, el valor de  $b_0$  se elige de manera que  $|H(e^{j\omega_0})| = 1$ ,

$$b_0 = \frac{1 - r}{2 \sin \omega_0} \sqrt{1 - 2r \cos 2\omega_0 + r^2}.$$

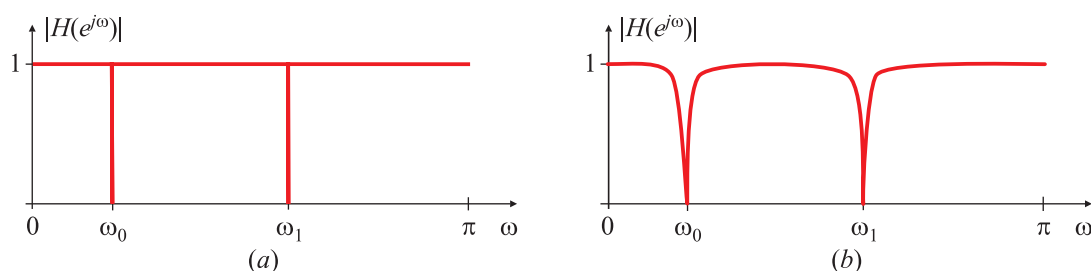


Fig. 7.16. Respuesta en frecuencia típica de un filtro notch ideal (a) y real (b).

Los ceros en  $z = \pm 1$  modifican la respuesta del resonador. Valores de  $r$  próximos a 1 permiten obtener filtros más selectivos; a medida que los polos se alejan del círculo unitario aumenta el ancho de banda del filtro y se desplaza ligeramente la frecuencia de resonancia  $\omega_r$  respecto a la frecuencia de diseño  $\omega_0$ , como se muestra en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 7.8. Resonador con ceros en  $z = \pm 1$  con resonancia en  $\omega_0 = \pi/4$**

En la Fig. 7.15(b) se muestra un diseño con especificaciones idénticas a las del ejemplo anterior, pero implementado con ceros en  $\omega = 0$  y en  $\omega = \pi$ . La función de sistema es

$$H(z) = \frac{(1-r)\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{2}} \frac{(1-z^{-2})}{1-r\sqrt{2}z^{-1}+r^2z^{-2}}.$$

A medida que  $r$  se aleja del círculo unitario la frecuencia de resonancia es mayor que  $\omega_0$ , y aumenta el ancho de banda.  $\square$

### 7.4.3. Filtros Notch

Un filtro notch ideal elimina completamente un pequeño rango de frecuencias dejando inalterado el resto de la banda, como se muestra en la Fig. 7.16(a). En la práctica su respuesta en frecuencia presenta uno o más valles profundos (idealmente, ceros perfectos). En la Fig. 7.16(b) se observa una respuesta típica de un filtro notch con ceros en  $\omega_0$  y  $\omega_1$ . Los filtros notch son útiles en muchas aplicaciones donde deben eliminarse algunas frecuencias específicas, por ejemplo, las componentes de 50 ciclos (inducción de la frecuencia de línea) que contaminan señales de muy baja amplitud.

Para crear un cero en la respuesta a la frecuencia  $\pm\omega_0$  basta con ubicar un par de ceros complejos conjugados sobre el círculo unitario cuya fase sea  $\omega_0$ :

$$z_{0,1} = e^{\pm j\omega_0}.$$

Por lo tanto, la función de sistema para el filtro notch es

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0 (1 - e^{j\omega_0} z^{-1}) (1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}) \\ &= b_0 (1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}). \end{aligned} \quad (7.15)$$

El inconveniente con este filtro notch (tipo FIR) es que tiene un ancho de banda relativamente grande, lo que significa que no sólo se elimina la frecuencia de interés, sino que

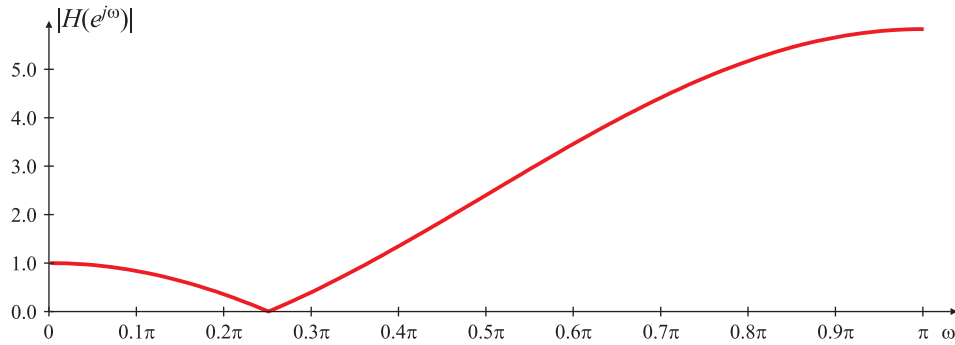


Fig. 7.17. Respuesta en frecuencia del filtro notch tipo FIR.

también se atenúan (severamente) otras componentes de frecuencias vecinas. Además la ganancia para  $\omega = 0$  ( $z = 1$ ) es diferente de la ganancia en  $\omega = \pi$  ( $z = -1$ ):

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|_{\omega=0} &= 2b_0(1 - \cos \omega_0), \\ |H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} &= 2b_0(1 + \cos \omega_0). \end{aligned}$$

La diferencia entre ambas puede ser muy grande si la frecuencia que se desea eliminar está cerca de  $\omega = 0$  o de  $\omega = \pi$ . De todas maneras, usualmente el coeficiente  $b_0$  se calcula para que la ganancia de continua sea unitaria,  $|H(z)|_{z=1} = |H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1$ , de donde resulta que  $b_0 = [2(1 - \cos \omega_0)]^{-1}$ .

#### EJEMPLO 7.9. Filtro notch tipo FIR

La función de sistema de un filtro notch diseñado para cancelar la frecuencia  $\omega_0 = \pi/4$ , con ganancia unitaria en  $\omega = 0$  es

$$H(z) = \frac{1}{(2 - \sqrt{2})} (1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}).$$

La respuesta en frecuencia del filtro se representa en la Fig. 7.17. Si bien la ganancia es unitaria en  $\omega = 0$ , este valor crece hasta  $(2 + \sqrt{2})/(2 - \sqrt{2}) \cong 5,82$  para  $\omega = \pi$ ; la respuesta del filtro es muy diferente de la indicada en la Fig. 7.16.  $\square$

Para reducir el ancho de banda del notch se pueden incorporar polos complejos conjugados. El efecto ubicar un par de polos en  $p_{0,1} = re^{\pm j\omega_0}$ , como se muestra en la Fig. 7.18(a) es introducir resonancia en la vecindad de los ceros. La función de sistema para el filtro resultante (de tipo IIR) es

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}. \quad (7.16)$$

Nuevamente, el filtro no tiene el mismo valor de ganancia en  $\omega = 0$  y en  $\omega = \pi$ ,

$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = b_0 \frac{2(1 - \cos \omega_0)}{1 + r^2 - 2r \cos \omega_0}, \quad |H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = b_0 \frac{2(1 + \cos \omega_0)}{1 + r^2 + 2r \cos \omega_0},$$

pero son similares si  $r$  (el módulo de los polos) es cercano a la unidad. Esta propiedad puede corroborarse evaluando el módulo de la respuesta en frecuencia con el método del

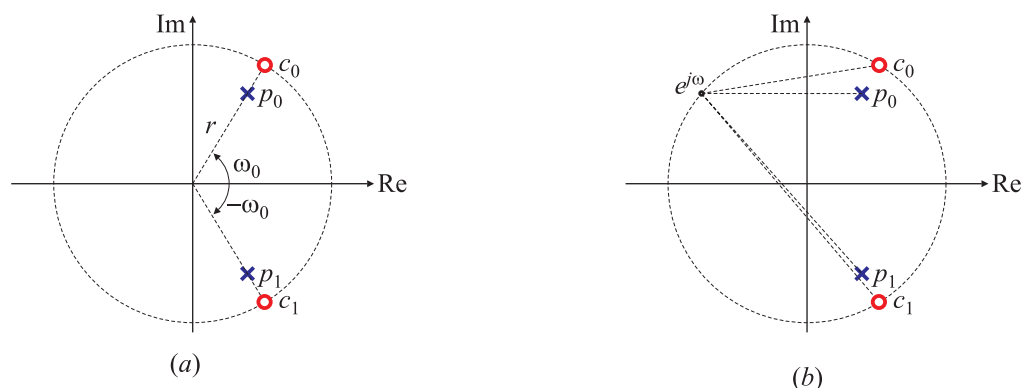


Fig. 7.18. Diagrama de polos y ceros del filtro notch IIR (a) . Método del punto explorador (b) .

punto explorador como se ilustra en la Fig.7.18(b) . Para frecuencias  $\omega$  alejadas de  $\omega_0$ ,  $|e^{j\omega_0} - c_0| \approx |e^{j\omega_0} - p_0|$ , y  $|e^{j\omega_0} - c_1| \approx |e^{j\omega_0} - p_1|$ , y entonces

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega_0} - c_0| |e^{j\omega_0} - c_1|}{|e^{j\omega_0} - p_0| |e^{j\omega_0} - p_1|} \approx 1.$$

También es usual elegir  $b_0$  para que la ganancia de continua sea unitaria, lo que resulta en

$$b_0 = \frac{1 - 2r \cos \omega_0 + r^2}{2(1 - \cos \omega_0)}.$$

La presencia de los polos puede introducir una pequeña ondulación en la banda de paso del filtro, debida a fenómenos de resonancia. Este efecto se puede reducir agregando polos y ceros adicionales. El problema con esta solución es que no existe una regla general para eliminar la ondulación, y el método se convierte en uno de prueba y error.

#### EJEMPLO 7.10. Filtro notch tipo IIR

La función de sistema de un filtro notch tipo IIR (7.16) diseñado para bloquear componentes de frecuencia  $\omega_0 = \pi/4$  es

$$H(z) = \frac{1 + r^2 - \sqrt{2}r}{2 - \sqrt{2}} \frac{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{1 - r\sqrt{2}z^{-1} + r^2z^{-2}}.$$

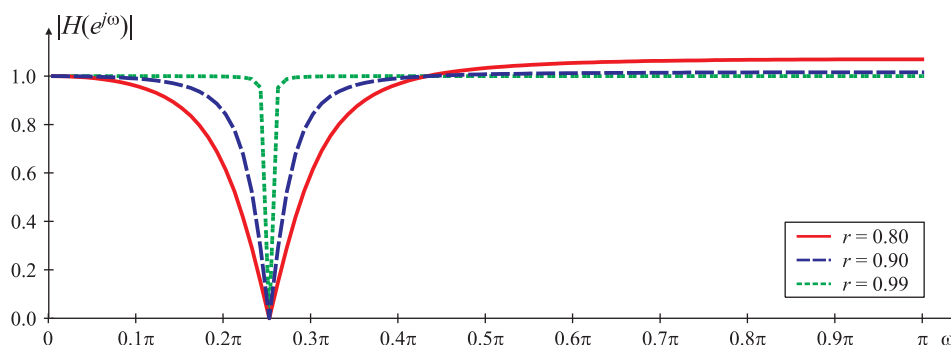


Fig. 7.19. Respuesta en frecuencia del filtro notch tipo IIR.

El par de polos complejos conjugados están ubicados en  $p_{0,1} = re^{\pm j\omega_0}$ . En la Fig. 7.19 se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia para distintos valores de  $r$ . La selectividad del filtro mejora a medida que  $r \rightarrow 1$ , y su comportamiento similar al del prototipo ideal de la Fig. 7.16(a).  $\square$

#### 7.4.3.1. Filtros notch basados en pasatodos

Una manera de obtener muy buenos filtros notch es utilizando filtros pasatodos. Como la fase de un pasatodo de segundo orden varía desde 0 hasta  $-2\pi$  a medida que la frecuencia  $\omega$  varía desde  $\omega = 0$  hasta  $\omega = \pi$ , el filtro

$$H(z) = \frac{1}{2} [1 + H_{PT}(z)], \quad (7.17)$$

donde  $H_{PT}(z)$  es un pasatodos de segundo orden, tiene un cero dentro de la banda de paso; precisamente, en la frecuencia  $\omega_0$  donde  $H_{PT}(e^{j\omega_0}) = -1$ , cuando la fase es de  $(-\pi)$  radianes. Además, de (7.17) es evidente que

$$H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 1, \quad H(e^{j\omega_0}) = 0,$$

Los filtros notch generados a partir de pasatodos tienen la ventaja que la ganancia es uniforme a cada lado de la frecuencia del cero, que es una mejora importante frente a la respuesta de los notch generados por ubicación directa de polos y ceros de la Sección 7.4.3. Si  $H_{PT}(z) = (a_2 + a_1 z^{-1} + z^{-2}) / (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$ ,  $H(z)$  se puede expresar como

$$H(z) = \frac{1}{2} \frac{(1 + a_2) + 2a_1 z^{-1} + (1 + a_2)z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

que bajo la sustitución  $a_2 = k_2$ ,  $a_1 = k_1(1 + k_2)$  resulta

$$H(z) = \frac{(1 + k_2)}{2} \frac{1 + 2k_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + k_1(1 + k_2)z^{-1} + k_2 z^{-2}}. \quad (7.18)$$

Los coeficientes  $k_1$  y  $k_2$  se pueden relacionar directamente con parámetros frecuenciales significativos. Si  $\omega_0$  es la frecuencia del cero y  $\Delta\omega_0$  el ancho de banda de  $-3$  dB, se puede encontrar que

$$k_1 = -\cos \omega_0, \quad k_2 = \frac{1 - \tan(\Delta\omega_0/2)}{1 + \tan(\Delta\omega_0/2)}. \quad (7.19)$$

Los ceros de (7.18) son  $c_{0,1} = e^{\pm j\omega_0}$ , bloqueando efectivamente las frecuencias indeseadas. Los polos de (7.18) se pueden expresar como  $p_{0,1} = re^{\pm j\omega_p}$ , con

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{k_2} = \sqrt{a_2}, \\ \omega_p &= \cos^{-1} \left( \frac{1 + r^2}{2r} \cos \omega_0 \right) \cong \cos \omega_0 - \frac{(1 - r)^2}{2 \tan \omega_0} + \frac{(1 - r)^3}{2 \tan \omega_0} + \dots \end{aligned}$$

donde la última aproximación es válida para  $r \cong 1$ . Esta última expresión revela que los polos no tienen la misma fase que los ceros, sino que se encuentran ligeramente desplazados (Fig. 7.20).

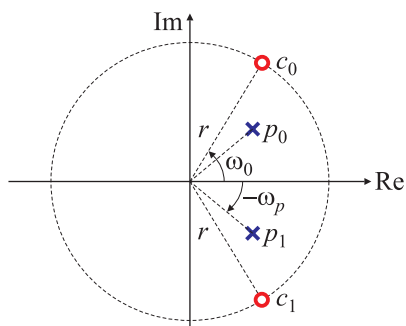


Fig. 7.20. Diagrama de polos y ceros del filtro notch basado en pasatodos.

#### EJEMPLO 7.11. Filtro notch basado en pasatodos

Los parámetros de un filtro notch que bloquee completamente la frecuencia  $\omega_0 = \pi/3$ , y que tenga un ancho de banda de  $-3$  dB de  $\Delta\omega = 0,1\pi$  se derivan de (7.19):

$$k_1 = \cos(\pi/3) = 1/2, \quad k_2 = \frac{1 - \tan(0,05\pi)}{1 + \tan(0,05\pi)} \cong 0,726543.$$

La función de sistema es

$$H(z) = 0,8633 \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,8633z^{-1} + 0,7265z^{-2}},$$

que tiene ceros en  $c_{0,1} = e^{\pm j\pi/3}$ , y polos en  $p_{0,1} = 0,8524e^{\pm j0,3310\pi}$ . Los ceros yacen sobre el círculo unitario, con fase  $\pi/3$ , bloqueando efectivamente la componente de frecuencia deseada. Los polos están dentro del círculo unitario, pero no tienen la misma fase de los ceros (es apenas menor que  $\pi/3$ ). La Fig. 7.21 muestra la respuesta en frecuencia de este filtro y también la de otros con la misma frecuencia de rechazo  $\omega_0 = \pi/3$  pero distintos anchos de banda ( $\Delta\omega_0 = 0,2\pi$  y  $\Delta\omega_0 = 0,3\pi$ ). La respuesta es mucho más parecida a la ideal de la Fig. 7.16(a). □

#### 7.4.4. Filtros Peine

Tradicionalmente, el “filtro peine” definía un filtro tipo notch en el cual los ceros se repetían periódicamente en la banda de frecuencias; de esta forma se podía cancelar una

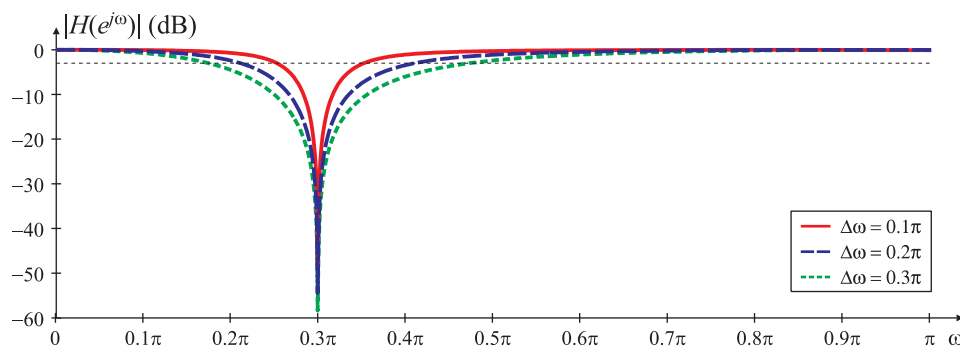


Fig. 7.21. Respuesta en frecuencia de filtros notch basados en pasatodos que bloquean la frecuencia  $\omega_0 = 0,3\pi$  con diferentes anchos de banda:  $\Delta\omega = 0,1\pi$ ,  $0,2\pi$ ,  $0,3\pi$ .

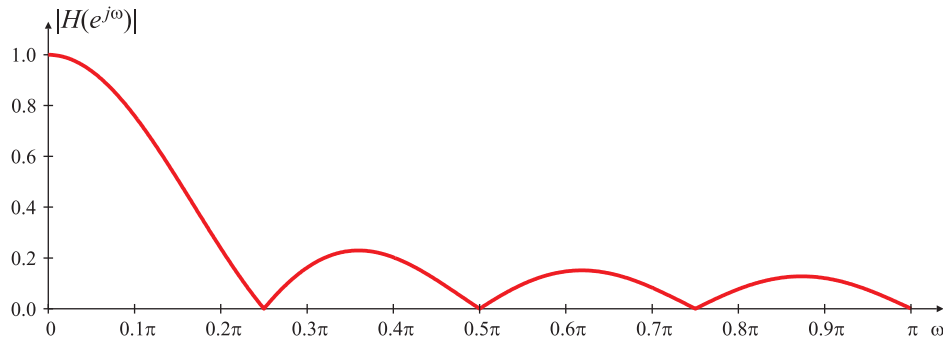


Fig. 7.22. Filtro peine: promediador con  $N = 8$ .

frecuencia no deseada y todas sus armónicas, dejando inalterada el resto de la banda. En la actualidad se denomina “filtro peine” a aquel cuya respuesta en frecuencia (no necesariamente un notch) se repite un número determinado de veces en el intervalo  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Los filtros peine se utilizan en gran cantidad de aplicaciones, como por ejemplo para eliminar armónicas de la frecuencia de línea, separar las componentes lunares y solares en las mediciones de concentración de electrones en la ionosfera, eliminar armónicas de la frecuencia de barrido horizontal en televisión, etc.

Un ejemplo de un filtro peine sencillo es el filtro FIR promediador

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k],$$

cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{N} \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - 1}{z - 1}, \quad (7.20)$$

y la respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N-1)/2} \text{sen}(N\omega/2)}{N \text{sen } \omega/2}.$$

De (7.20) se observa que el filtro promediador tiene ceros sobre el círculo unidad ubicados en

$$c_k = e^{j2\pi k/N}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1.$$

El polo en  $z = 1$  se cancela con el cero en  $z = 1$ , por lo que el sistema sólo tiene  $N - 1$  polos en el origen, y  $N - 1$  ceros sobre el círculo unidad. La magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro con  $N = 8$  se muestra en la Fig. 7.22. Los ceros están equiespaciados en el eje de frecuencias, lo que significa que el filtro anulará las componentes de frecuencia “indeseables”  $\omega_k = 2\pi k/N$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ . Sin embargo, la ganancia para el resto de las frecuencias dista de ser uniforme.

Un filtro peine generalizado puede generarse a partir de un filtro cualquiera, por ejemplo uno con función de sistema

$$H(z) = \sum_n h[n] z^{-n},$$

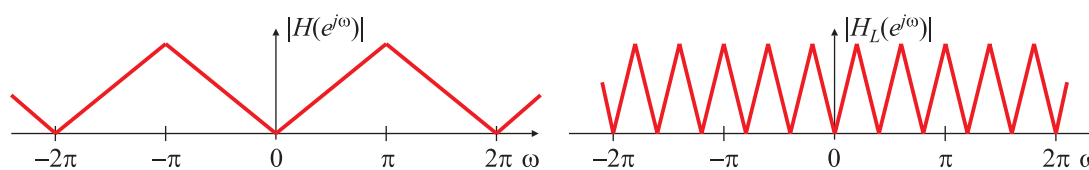


Fig. 7.23. Filtro peine diseñado por el método de escalado en frecuencia.

reemplazando  $z$  por  $z^L$ , donde  $L$  es un entero positivo. Esta sustitución corresponde a un *escalado en frecuencia*. El filtro peine tiene la función de sistema

$$H_L(z) = \sum_n h[n] z^{-nL}. \quad (7.21)$$

Si la respuesta en frecuencia del filtro original es  $H(e^{j\omega})$ , la respuesta en frecuencia del filtro peine es

$$H_L(e^{j\omega}) = \sum_n h[n] e^{-jnL\omega} = H(e^{j\omega L}).$$

En consecuencia, la respuesta en frecuencia de  $H_L(e^{j\omega})$  es la respuesta  $H(e^{j\omega})$  “comprimada” en frecuencia en un factor  $(1/L)$  y repetida  $L$  veces en el intervalo  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ . En la Fig. 7.23 se muestra la relación entre  $H_L(e^{j\omega})$  y  $H(e^{j\omega})$  para  $L = 5$ .

Si el filtro FIR original con función de sistema  $H(z)$  tiene un cero en una frecuencia  $\omega_0$ , el filtro peine con función de sistema  $H_L(z)$  tendrá  $L$  ceros espaciados periódicamente en  $\omega_k = (\omega_0 + 2\pi k)/L$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$ .

De la expresión (7.21) de  $H_L(z)$  se deriva que la respuesta impulsiva del peine es

$$h_L[n] = \begin{cases} h[n/L], & \text{si } n \text{ es múltiplo de } L, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En otras palabras, la respuesta impulsiva del peine está formada por la respuesta impulsiva del filtro prototipo a la cual se han intercalado  $L-1$  ceros entre cada muestra. Se dice que  $h_L[n]$  es la versión *sobremuestreada* por  $L$  de  $h[n]$ .

#### EJEMPLO 7.12. Filtros peine tipo notch

En la Fig. 7.24 se muestra un filtro peine tipo notch diseñado con esta técnica, con  $L = 10$ . El filtro prototipo es el notch del Ejemplo 7.10. La función de sistema es

$$H(z) = \frac{1 + r^2 - \sqrt{2}r}{2 - \sqrt{2}} \frac{1 - \sqrt{2}z^{-L} + z^{-2L}}{1 - r\sqrt{2}z^{-L} + r^2z^{-2L}}.$$

Los ceros del notch original están ubicados en  $\omega_0 = \pi/4$  (y por lo tanto también en  $\omega_1 = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$ ); en el filtro peine esos ceros se mapean a  $(\omega_0 + 2\pi k)/10$ ,  $(\omega_1 + 2\pi k/10)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 10$ . □

#### EJEMPLO 7.13. Filtro peine tipo resonador

En la Fig. 7.25 se muestra el filtro peine derivado del filtro resonador del Ejemplo 7.8. La función de sistema para  $r = 0.9$  es

$$H(z) = \frac{(1-r)\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{2}} \frac{(1 - z^{-2L})}{1 - r\sqrt{2}z^{-L} + r^2z^{-2L}} \quad \square$$



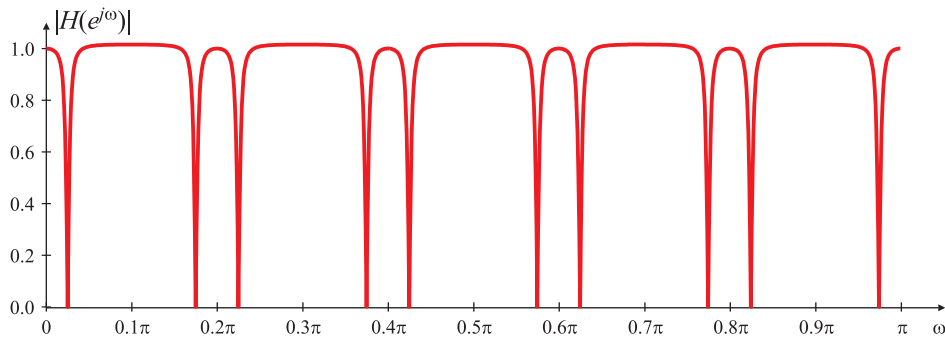


Fig. 7.24. Filtro peine diseñado por el método de escalado en frecuencia.

#### EJEMPLO 7.14. Filtros peine: aplicaciones en astronomía

Una aplicación original de los filtros peine es la separación de las componentes espectrales debidas a los efectos de la luna y del sol en la medición de la concentración de electrones libres en la ionosfera. El período solar es de  $T_s = 24$  horas, y resulta en una componente solar de un ciclo por día y sus armónicas. El período lunar es  $T_L = 24,84$  horas, y genera líneas espectrales a  $0,96618 (\cong 24/24,84)$  ciclos por día y sus armónicas. La Fig. 7.26(a) muestra el espectro de densidad de potencia de la concentración de electrones tal como ha sido medida (es decir, sin filtrar). Las débiles componentes lunares están prácticamente enmascaradas por las fuertes componentes espectrales debidas al sol. Los dos conjuntos de componentes espectrales pueden separarse usando filtros peine construidos en base a filtros promediadores (7.20)

$$H_L(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-LN}}{1 - z^{-L}}.$$

Para rescatar las componentes solares se debe usar un filtro con un ancho de banda muy angosto, con ceros ubicados en las frecuencias de un ciclo por día y sus armónicas. Para ello se elige  $L$  de manera que  $F_s/L = 1$  ciclo por día, donde  $F_s$  es la frecuencia de muestreo (cada cuánto tiempo se efectúan las mediciones). Resulta entonces un filtro cuya respuesta en frecuencia tiene ceros a la frecuencia de un ciclo por día y sus múltiplos. Eligiendo el filtro promediador con  $N = 59$ , sus ceros se ubicarán en múltiplos de  $(F_s/L)/N = 1/59$ ; en otras palabras, entre cada pico de ganancia unitaria del promediador quedan intercalados 58 ceros, que quedan próximos a la frecuencia de las componentes lunares, y por lo tanto resultan prácticamente eliminadas. La Fig. 7.26(b) muestra el espectro de la densidad de potencia de la salida del filtro peine que rescata las componentes

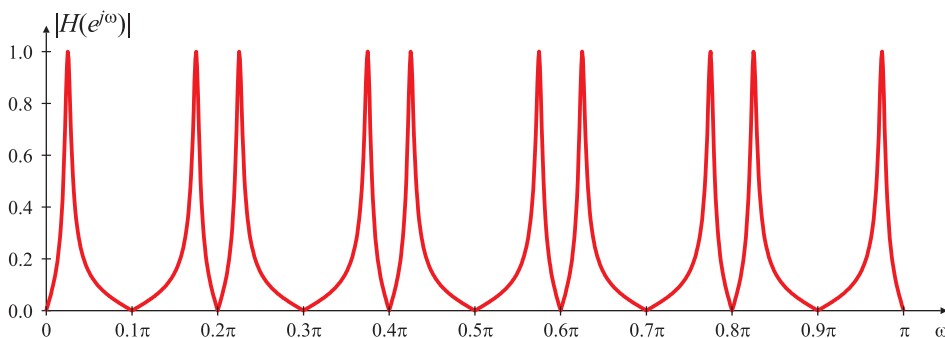
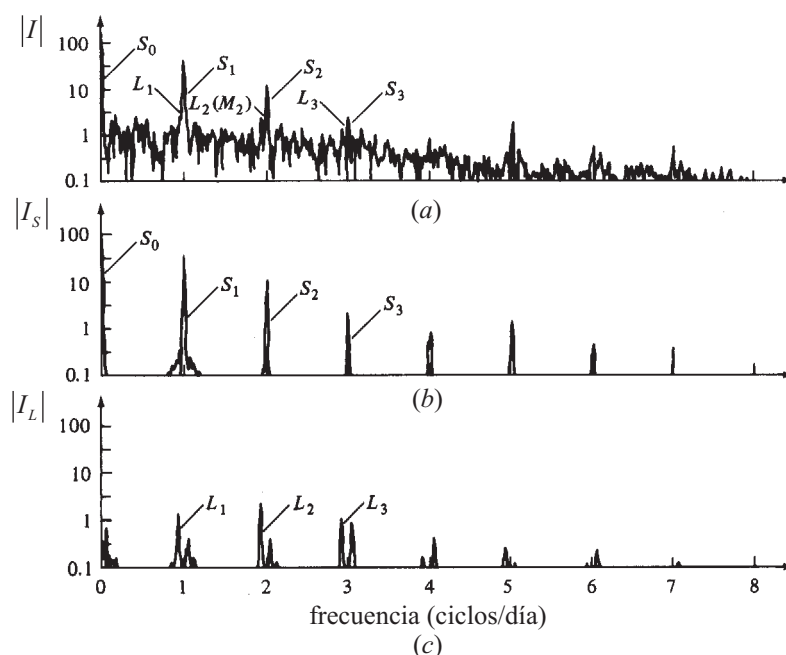


Fig. 7.25. Filtro peine tipo resonador.



**Fig. 7.26.** Empleo de filtros peine para separar las componentes lunares y solares de la concentración de electrones libres en la ionosfera.

solares. De forma similar puede diseñarse un filtro que rechace las componentes solares y rescate las componentes lunares; el espectro de la densidad de potencia de este filtro se muestra en la Fig. 7.26(c). □

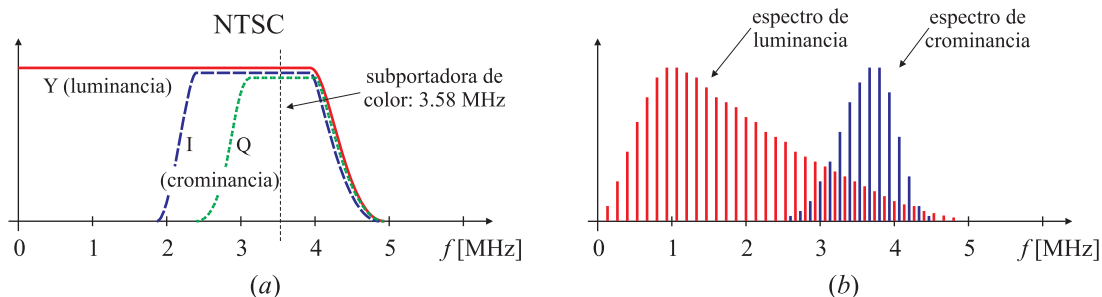
#### 7.4.4.1. Aplicaciones de filtros peine en TV

Los filtros peine también encuentran aplicación en los receptores de televisión. La señal de video compuesto está formada por tres componentes:

- la señal de *luminancia*, que se extiende desde 0 Hz hasta 5.5 MHz, y que refleja los detalles de la imagen en blanco y negro;
- la información de color (señal de *crominancia*) modulada sobre una portadora de 3.58 MHz en NTSC (4.43 MHz en PAL);
- las señales de *sincronismo* horizontal y vertical.

La siguiente tabla detalla las relaciones entre las frecuencias de cuadro, de línea y de portadora de color para ambas normas.

Parámetro	NTSC	PAL
frecuencia de cuadro $f_F$	30 Hz	25 Hz
frecuencia de línea $f_L$	$525 f_F = 15,750 \text{ kHz}$	$625 f_F = 15,625 \text{ kHz}$
portadora de color $f_c$	$119\,437,5 f_F = 227,5 f_L$ $= 3,58 \text{ MHz}$	$177\,187,5 f_F = 283,5 f_L$ $= 4,42 \text{ MHz}$



**Fig. 7.27.** Señal de video compuesto NTSC. (a) Anchos de banda de las señales de crominancia y luminancia. (b) Espectro de la señal de video compuesto.

Las tres componentes analógicas de la señal de video compuesto son suficientes para recomponer una imagen bidimensional en el tubo de rayos catódicos (TRC) del televisor.

La señal de luminancia representa el nivel de intensidad de la imagen. Es la que necesita mayor ancho de banda (5 MHz típico), y el brillo, el contraste y la nitidez dependen exclusivamente de ella. La información de color o crominancia se agregó en 1947, cuando se desarrolla la TV en colores, utilizando una ingeniosa técnica de modulación que permite mantener la compatibilidad con los receptores monocromáticos existentes.

A partir de la señal RGB de la cámara, se generan la señal de luminancia  $Y$ , y las señales de diferencia de color, denominadas  $I$  y  $Q$  en NTSC ( $U$  y  $V$  en PAL)

$$\begin{aligned} Y &= 0,299R + 0,587G + 0,114B, \\ I &= 0,596R - 0,275G - 0,321B, \\ Q &= 0,212R - 0,523G + 0,311B. \end{aligned}$$

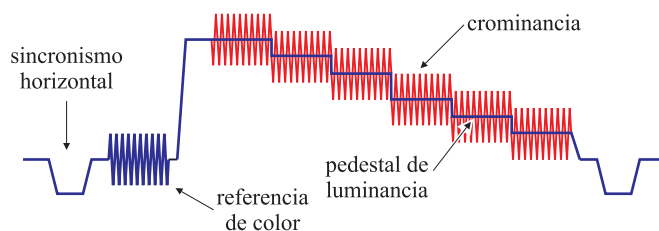
La señal de crominancia se modula en cuadratura sobre la información de luminancia. Las señales de diferencia de color ( $I/Q$ ,  $U/V$ ) ocupan un ancho de banda menor que la señal de luminancia  $Y$  [Fig. 7.27(a)] pues el ojo humano es más sensible a variaciones de iluminación que de color. En NTSC el ancho de banda de la información de color se restringe entre los 0.6 y 1.3 MHz, y se modula con una portadora  $f_c$  de 3.58 MHz,

$$C = I \cos(2\pi f_c t) + Q \sin(2\pi f_c t).$$

En PAL el ancho de banda es el mismo para las dos señales  $U$ ,  $V$  y la frecuencia de la portadora  $f_c$  es de 4.43 MHz. El espectro típico de las señales  $Y$  y  $C$  se muestra en la Fig. 7.27(b).

La señal de video compuesto también lleva información de sincronismo, que ocupa una parte importante del rango de amplitud disponible para la señal de video. El sincronismo horizontal y el tono de referencia de color ocupan la primera parte de la señal de línea, como muestra la Fig. 7.28; el sincronismo vertical se agrega cada 262.5 líneas (cada 312.5 líneas en PAL).

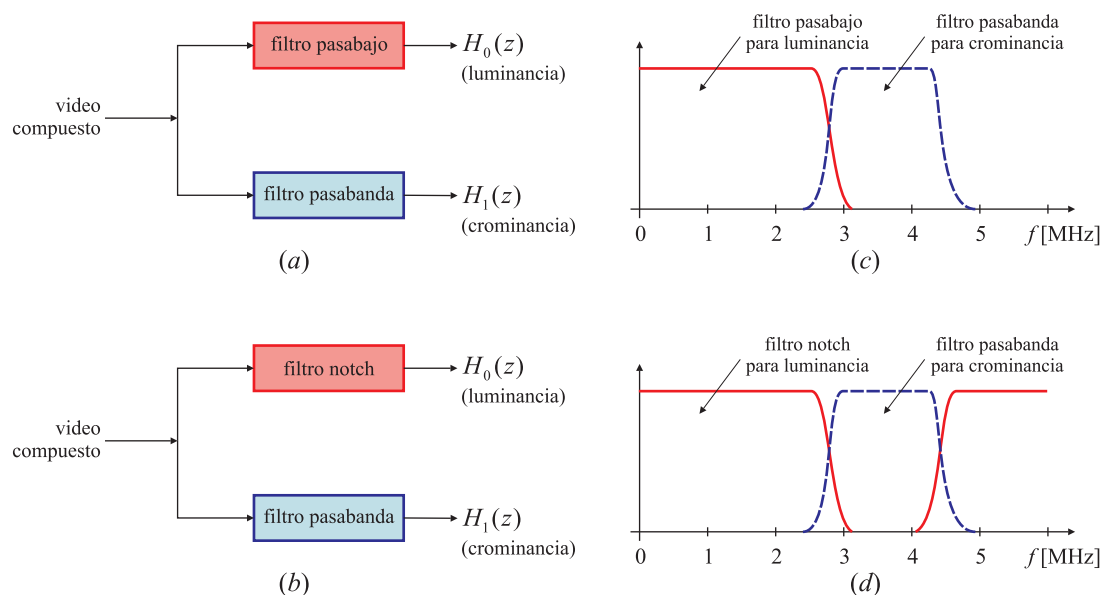
Para recomponer la imagen, de la señal de video compuesto deben extraerse la señal de color  $C$  y la señal de luminancia  $Y$ , lo que no es sencillo pues comparten la porción del espectro entre los 2.5 y 5 MHz, aproximadamente, como se observa en la Fig. 7.27(b). Para lograr separar estas componentes se han propuesto diferentes técnicas a lo largo de los años, con mejor desempeño a medida que aumenta la complejidad de la solución.



**Fig. 7.28.** Señal de línea típica de video compuesto.

La técnica más sencilla emplea un par de filtros como muestra la Fig. 7.29(a): la señal de luminancia se recupera a la salida de un filtro pasabajos con frecuencia de corte entre 2.0 y 2.5 MHz, y la de crominancia a la salida de un filtro pasabanda (conocida en la jerga como “trampa”), con banda de paso entre 2.5 MHz y 5 MHz. El problema con esta técnica es que se pierde información de detalle, porque se truncan las componentes de alta frecuencia de la señal de luminancia [Fig. 7.29(b)]: los bordes se vuelven difusos, y la imagen pierde nitidez. Otros problemas son una gran interacción entre luminancia y crominancia: una señal con colores fuertes altera el nivel de brillo. Aunque el método es de bajo costo, la calidad de video que se obtiene es baja, y en la actualidad se utiliza sólo en reproductores de video muy económicos.

Una mejora es utilizar un filtro *notch* [Fig. 7.29(c)] para recuperar la señal de luminancia, y un pasabanda o trampa para obtener la señal de color. Aunque se recupera en cierta manera el nivel de detalle, pues se rescatan algunas componentes de alta frecuencia de la señal de luminancia [Fig. 7.29(d)], el ancho de banda acotado del canal *C* limita la coloración de los detalles de la imagen. Además la señal de luminancia con componentes



**Fig. 7.29.** Separación de las señales de luminancia y crominancia usando una “trampa” de color. (a, b) Esquema y respuesta en frecuencia del filtro pasabajos/pasabanda; (c, d) Diagrama bloque y respuesta en frecuencia del filtro notch/pasabanda.

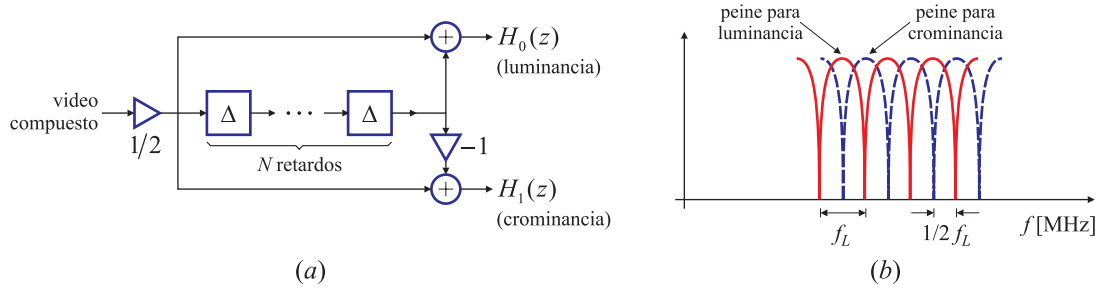


Fig. 7.30. Esquema de un filtro peine para TV (a). Respuesta en frecuencia del filtro. (b).

frecuenciales en la banda de paso del notch contamina la salida del filtro generando colores indeseados. Este efecto se más notable cuando las imágenes están compuestas por tramas de líneas blancas y negras: las componentes de alta frecuencia de la luminancia producen un abanico de colores.

Tanto el decodificador basado en el filtro pasabajos como en el filtro notch tienen problemas con los gráficos superpuestos a la imagen de video (subtítulos, logos, etc.), que generalmente tienen alta intensidad de color, y debido a sus bordes bien definidos tienen altas componentes de frecuencia.

Un tercer método aprovecha las características espectrales de las señales  $Y$  y  $C$ . Para imágenes estáticas, las señales  $Y$ ,  $I$  y  $Q$  tienen un espectro en frecuencia discreto. Sus componentes espectrales están separadas entre sí la frecuencia  $f_F$  de un cuadro ( $f_F = 30$  Hz en NTSC, 25 Hz en PAL). Al modular las señales  $I$ ,  $Q$  con la portadora  $f_c$  se centra su espectro alrededor de  $f_c$ . Esta frecuencia se elige de manera que caiga en medio de dos armónicos de la frecuencia de cuadro:  $f_c$  es exactamente 119 437,5 veces la frecuencia de cuadro  $f_F$ :

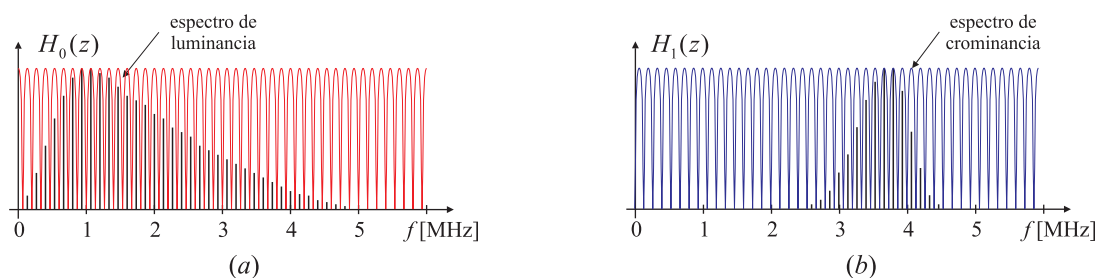
$$f_c = 119\,437,5 f_F = 3,583125 \text{ MHz.}$$

( $f_c = 177187,5 f_F = 4,4296875$  MHz en PAL). Por lo tanto, las líneas espectrales de las componentes  $Y$  y  $C$  queden entrelazadas, y la diferencia entre ellas es de media frecuencia de cuadro, como se muestra en la Fig. 7.27(b).

En realidad hay dos niveles de periodicidad: una microestructura asociada a la frecuencia de cuadro  $f_F = 30$  Hz ( $f_F = 25$  Hz en PAL), y una macroestructura asociada a la frecuencia de línea  $f_L$ , que es 525 veces la frecuencia de cuadro (625 en PAL). La señal  $C$  está desplazada en  $f_c = 119\,437,5 f_F = 227,5 f_L$  ( $f_c = 177187,5 f_F = 283,5 f_L$  en PAL), y por lo tanto sus componentes frecuenciales yacen en medio de las líneas espectrales de la señal de luminancia. Como la frecuencia de línea  $f_L$  es un múltiplo exacto de la frecuencia de cuadro  $f_F$ , el espectro de la señal  $C$  tampoco se superpone sobre la microestructura de cuadro; en la Fig. 7.27(b) sólo se ha graficado la información de la macroestructura para no complicar el gráfico.

La distribución espectral de las señales sugiere que ambas componentes pueden recuperarse filtrando la señal de video compuesta con un par de filtros peine, cuya estructura se muestra en la Fig. 7.30(a). Las funciones de sistema son

$$H_0(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-N}),$$



**Fig. 7.31.** Composición espectral de la salida de los filtros peine de la Fig. 7.30(a).

con ceros en  $c_k = e^{j\omega_k}$ ,  $\omega_k = (2k+1)\pi/N$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ , y

$$H_1(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-N}),$$

con ceros en  $c_k = e^{j\omega_k}$ ,  $\omega_k = 2k\pi/N$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ . Los ceros de  $H_0(z)$  y de  $H_1(z)$  quedan entrelazados. La respuesta en frecuencia de ambos filtros se muestra en la Fig. 7.30(b). La Fig. 7.31(a) muestra la eliminación de las componentes de crominancia, y la Fig. 7.31(b) la eliminación de las de luminancia.

La diferencia de calidad de cada una de las soluciones se ilustra en la Fig. 7.32. La Fig. 7.32(a) muestra la forma temporal de una línea de video generada por un generador patrón, y la Fig. 7.32(b) una imagen de la pantalla de TV de un cuadro formado por un conjunto de líneas idénticas a las de la Fig. 7.32(a). La abscisa (en MHz) indica la componente frecuencial dominante de la señal de luminancia en cada parte de la pantalla.

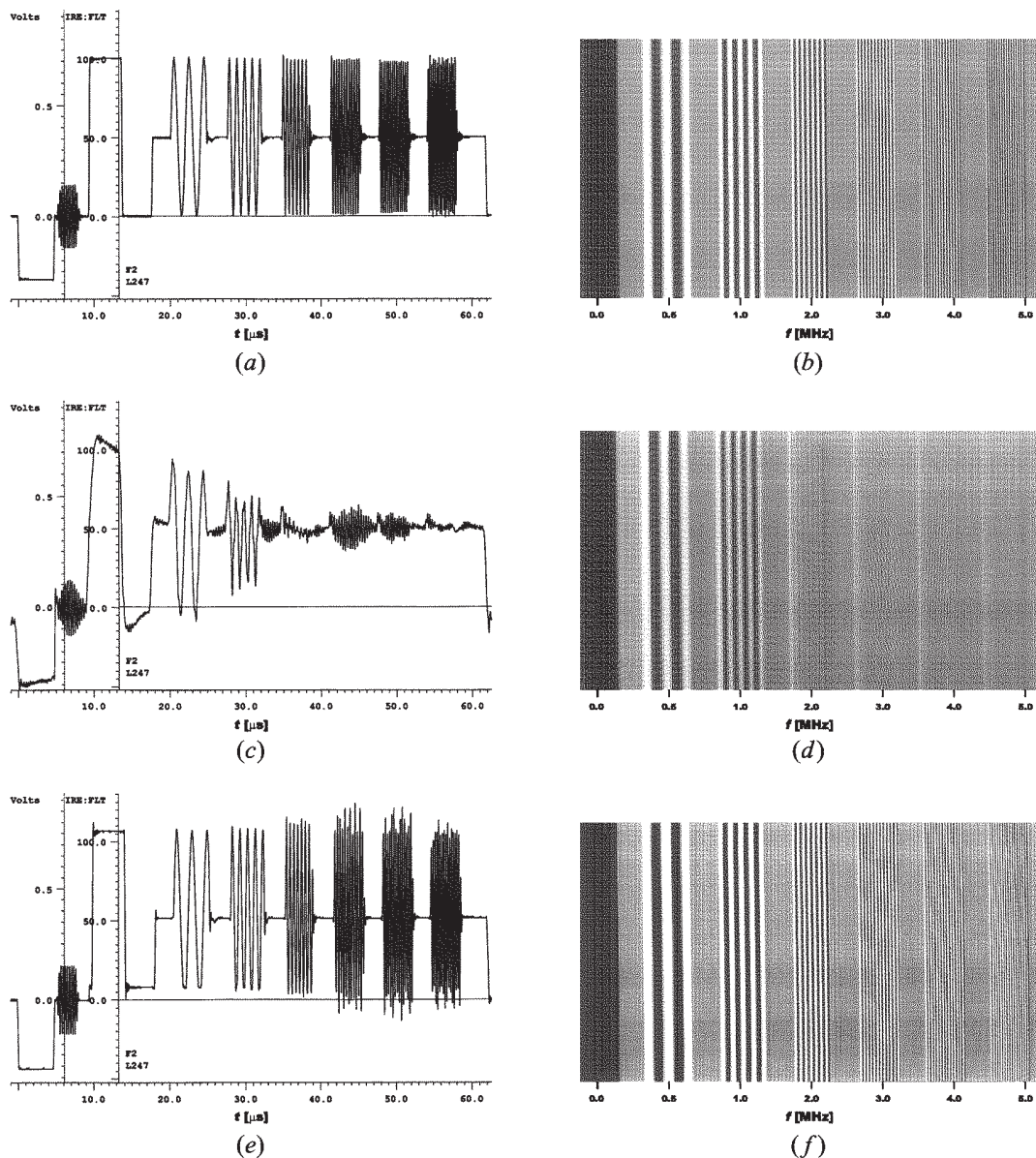
La Fig. 7.32(c) muestra la respuesta del filtro pasabajos/pasabanda de la Fig. 7.29(c) cuando se lo excita con la señal del generador de la Fig. 7.32(a). En la gráfica temporal se observa la atenuación de las frecuencias por encima de 2 MHz, y en la imagen [Fig. 7.32(d)] se nota la pérdida de definición de la trama de líneas finas a la derecha del gráfico.

En la Fig. 7.32(e) se aprecia la señal a la salida del filtro peine de línea. Los pulsos se recuperan prácticamente sin distorsión, y la imagen muestra un nivel de definición similar al proporcionado por el generador [Fig. 7.32(f)].

La cantidad  $N$  de retardos puede igualar la duración de una *línea*, para remover el entrelazado de la macroestructura, o la duración de un *cuadro*, para eliminar el entrelazado de la microestructura. Esto da origen a dos tipos de filtros: el peine de línea y el de cuadro.

El efecto del filtro *peine de línea* es promediar un par de líneas consecutivas de la señal de video, y electrónicamente se implementa utilizando una línea de retardo analógica: el filtro  $H_0(z)$  actúa como un filtro pasabajos para dos líneas horizontales consecutivas de la señal de video, “borroneando” la señal de luminancia. Como no elimina la microestructura asociada a la frecuencia de cuadro  $f_F$ , las señales con altos niveles de color y transiciones abruptas pueden hacer que la información de color sea mayor que la información de luminancia de alta frecuencia, dando lugar a la aparición una serie de puntos blancos horizontales (“crawl dots”).

La separación entre ambas señales se puede mejorar si la cadena de retardos iguala la duración de un *cuadro* de la señal (525 líneas en el sistema NTSC, 625 en PAL). Temporalmente equivale a promediar cada punto de la imagen con su homólogo del cuadro previo,



**Fig. 7.32.** Comparación de la respuesta de los decodificadores. Las figuras de la izquierda muestran las señales temporal de video compuesto, y las figuras de la derecha la imagen sobre la pantalla del TV. (a)-(b) Generador de video. (c)-(d) Separador con filtro pasabajo/pasabanda. (d)-(e) Separador con filtro peine de línea.

un proceso similar al que efectúa el ojo humano. Los inconvenientes son su elevado costo, y problemas con las imágenes que varían significativamente de un cuadro a otro.

Este problema se resuelve en equipamiento profesional utilizando filtros peine adaptivos, que conmutan entre un peine de cuadro o de línea cuando ocurre una abrupta variación vertical, pero es demasiado costoso para los equipos hogareños. Ello ha impulsado el formato S-video, donde las señales de luminancia y crominancia están disponibles de manera independiente, eliminando todos los efectos adversos de la modulación. La “S” se refiere,



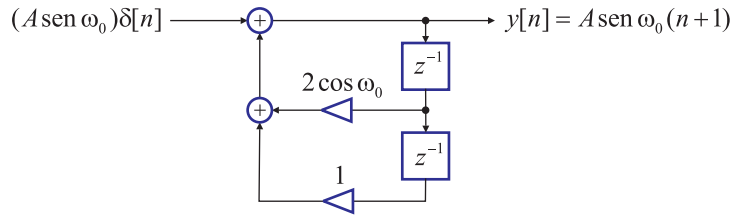


Fig. 7.33. Esquema de un oscilador sinusoidal digital.

precisamente, a “*separated luminance and chrominance analog signals*”. Evidentemente es un estándar analógico, y no satisface los requerimientos de calidad impuestos para las señales de video digital.

#### 7.4.5. Osciladores sinusoidales digitales

Un oscilador digital sinusoidal puede pensarse como la forma límite de un resonador digital, donde los polos yacen sobre el círculo unitario. La función de sistema del resonador de dos polos es

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - (2r \cos \omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}.$$

Este filtro tiene polos complejos conjugados en  $p_{0,1} = r e^{\pm j\omega_0}$ , y respuesta impulsiva

$$h[n] = \frac{b_0 r^n}{\sin \omega_0} \sin(n+1)\omega_0 u[n].$$

Si los polos se ubican sobre el círculo unitario ( $r = 1$ ), y  $b_0 = A \sin \omega_0$ ,

$$h[n] = A \sin(n+1)\omega_0 u[n].$$

Entonces la respuesta impulsiva de un sistema de segundo orden con polos complejos conjugados sobre el círculo unitario es una senoide, y el sistema se denomina *oscilador sinusoidal*. Es un elemento clave en los generadores de frecuencia sintetizados.

En la Fig. 7.33 se muestra el diagrama en bloques del oscilador. La ecuación a diferencias para este sistema es

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - y[n-2] + b_0 \delta[n], \quad (7.22)$$

donde los parámetros son  $a_1 = -2 \cos \omega_0$ ,  $b_0 = A \sin \omega_0$ , y las condiciones iniciales son  $y[-1] = y[-2] = 0$ . La aplicación del impulso en  $n = 0$  tiene por objeto iniciar la oscilación. De allí en más, la oscilación es automantenida, ya que el sistema tiene amortiguamiento nulo ( $r = 0$ ). La oscilación del sistema también puede lograrse anulando la entrada, y ajustando las condiciones iniciales. La respuesta ante una entrada nula del sistema de segundo orden descrito por la ecuación a diferencias homogénea

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - y[n-2], \quad (7.23)$$

con condiciones iniciales  $y[-1] = 0$ ,  $y[-2] = -A \sin \omega_0$ , es exactamente la misma que la respuesta del sistema (7.22) ante una excitación impulsiva. En realidad, la ecuación a diferencias (7.23) se puede obtener a partir de la identidad trigonométrica

$$\sin \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2},$$



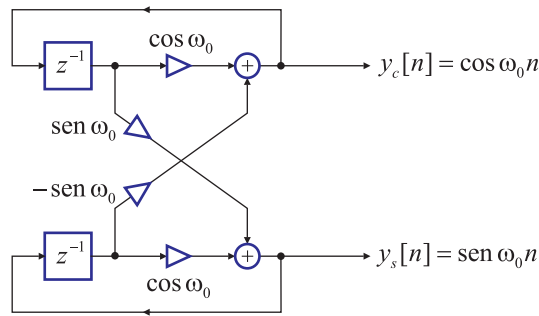


Fig. 7.34. Esquema de un oscilador sinusoidal digital.

haciendo  $\alpha = (n+1)\omega_0$ ,  $\beta = (n-1)\omega_0$ , e  $y[n] = \text{sen}(n+1)\omega_0$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{sen}(n+1)\omega_0}_{y[n]} + \underbrace{\text{sen}(n-1)\omega_0}_{y[n-2]} &= 2 \cos \frac{(n+1)\omega_0 - (n-1)\omega_0}{2} \text{sen} \frac{(n+1)\omega_0 + (n-1)\omega_0}{2} \\ &= \underbrace{2 \cos \omega_0}_{-a_1} \underbrace{\text{sen} n\omega_0}_{y[n-1]} \end{aligned}$$

En algunas aplicaciones que involucran modulación de señales portadoras en cuadratura de fase es necesario generar dos señales sinusoidales desfasadas  $\pi/2$  radianes entre sí,

$$\begin{aligned} y_s[n] &= A \text{sen} \omega_0 n, \\ y_c[n] &= A \text{sen}(\omega_0 n - \pi/2) = A \cos \omega_0 n. \end{aligned}$$

Estas señales se generan con una estructura llamada *oscilador acoplado* (Fig. 7.34) que puede obtenerse a partir de las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \text{sen} \alpha \text{sen} \beta, \\ \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen} \beta, \end{aligned}$$

donde, por definición,  $\alpha = n\omega_0$ ,  $\beta = \omega_0$ ,  $y_s[n] = A \text{sen} n\omega_0 u[n]$  e  $y_c[n] = A \cos n\omega_0 u[n]$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \underbrace{\cos(n+1)\omega_0}_{y_c[n]} &= \underbrace{\cos n\omega_0}_{y_c[n-1]} \cos \omega_0 - \underbrace{\text{sen} n\omega_0}_{y_s[n-1]} \text{sen} \omega_0 \\ \underbrace{\text{sen}(n+1)\omega_0}_{y_s[n]} &= \underbrace{\text{sen} n\omega_0}_{y_s[n-1]} \cos \omega_0 + \underbrace{\cos n\omega_0}_{y_c[n-1]} \text{sen} \omega_0 \end{aligned}$$

obteniéndose las dos ecuaciones a diferencias acopladas

$$\begin{aligned} y_c[n] &= (\cos \omega_0) y_c[n-1] - (\text{sen} \omega_0) y_s[n-1], \\ y_s[n] &= (\text{sen} \omega_0) y_c[n-1] + (\cos \omega_0) y_s[n-1], \end{aligned}$$

que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} y_c[n] \\ y_s[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 & -\text{sen} \omega_0 \\ \text{sen} \omega_0 & \cos \omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c[n-1] \\ y_s[n-1] \end{bmatrix}.$$

En la Fig. 7.34 se muestra la estructura del oscilador senoidal acoplado: es un sistema con dos salidas sin ninguna excitación, pero que requiere condiciones iniciales  $y_c[-1] = A \cos \omega_0$  e  $y_s[-1] = -A \text{sen} \omega_0$  para poder comenzar las oscilaciones automantenidas.

## 7.5. Referencias

- Blinn, J.F. "NTSC: Nice technology, Super Color", *IEEE Computer Graphics & Applications*, Vol. 13, No. 2, pp. 17-23, 1993.
- Ifeachor, E., Jervis, B. *Digital Signal Processing: a practical approach*, Addison-Wesley Longman Ltd, Edingburg Gate, Harlow, England, 1993.
- LaJeunesse, S. G. , "Composite video separation techniques", *Application Note AN 9644*, Intersil, October 1996.
- Mitra, S. K., *Digital Signal Processing: a Computer-Based Approach*, McGraw-Hill Co., 1998.
- Orfanidis, S. J., *Introduction to Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.
- Powell, S. R., Chau, P. M. "The reversed filtering in real time", *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Systems*, May 1990, Vol. 2, pp. 1239-1243.
- Proakis, J. G., Manolakis, D. G., *Digital Signal Processing*, 2da. Ed., Macmillan, 1992.
- Rader, C. M., Gold, B. (1967) "Digital filter design in the frequency domain", *Proc. IEEE*, Vol. 55, No. 2, pp. 149-171, 1990.
- Rader, C. M. "A simple method for sampling in-phase and quadrature components", *IEEE Trans. Aerospace Electr. Syst.*, Vol. AES 20, No. 6, pp. 821-824, 1984.
- Rader, C. M. "The rise and fall of recursive digital filters", *IEEE Signal Proc. Magazine*, Vol. 23, No. 6, pp. 46-49, 2006.
- Regalia, P. A., Mitra, S. K., Vaidyanathan, P. P., "The Digital All-Pass Filter: A Versatile Signal Processing Building Block", *Proc. IEEE*, Vol. 76, No. 1, pp. 19-37, 1988.
- Stockham, T. G. "High speed convolution and correlation", *Proc. AFIPS*, No. 28, pp. 229-233, 1996.

## Filtros pasatodo

## Resonadores

1. Calcule el valor de  $b_0$  en función de  $r$  y de  $\omega_0$  para que  $|H(e^{j\omega_0})| = 1$ .
2. Calcule la verdadera frecuencia de resonancia  $\omega_r$  para la cual  $|H(e^{j\omega_r})|$  alcanza el máximo. Observe la relación entre  $\omega_0$  y  $\omega_r$  cuando  $r \rightarrow 1$ .
3. Calcule la respuesta en frecuencia (módulo y fase) de resonadores con parámetros
 

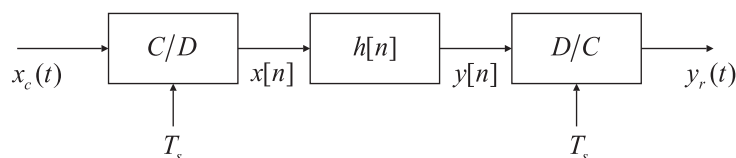
(a) $\omega_0 = \pi/3, r = 0,80,$	(b) $\omega_0 = \pi/3, r = 0,95.$
-----------------------------------	-----------------------------------
4. Compare ambas respuestas graficándolas simultáneamente en un única figura.
5. Calcule cuál es el ancho de banda aproximado [dado por la ecuación (7.13)], y compárelo con el que se puede medir en las curvas de respuesta en frecuencia.

1. Calcule la respuesta en frecuencia (módulo y fase) de resonadores con ceros en  $z = \pm 1$  con parámetros  
 (a)  $\omega_0 = \pi/3$ ,  $r = 0,80$ ,  
 (b)  $\omega_0 = \pi/3$ ,  $r = 0,95$ .
2. Compare ambas respuestas graficándolas simultáneamente en un única figura.
3. Observe en el gráfico la verdadera frecuencia de resonancia  $\omega_r$  y compárela con la frecuencia de resonancia  $\omega_0$  de diseño.
4. Mida el ancho de banda de  $\pm 3$  dB para cada caso.
5. Compare las respuestas de los resonadores con y sin ceros en el origen (el ancho de banda, corrimiento de la frecuencia de resonancia real respecto a la de diseño, etc.)

1. Calcule la respuesta en frecuencia (módulo y fase) si
  - (a)  $\omega_0 = \pi/4$ ,  $r = 0,85$ ,
  - (b)  $\omega_0 = \pi/4$ ,  $r = 0,95$ .
2. Compare la respuesta del notch tipo FIR (7.15) con la del notch tipo IIR (7.16).

**I Ejercicio 6.** En la figura se muestra un sistema de procesamiento discreto de señales continuas. Se debe implementar un filtro notch para eliminar las componentes de 50 Hz presentes en la señal de entrada  $x_c(t)$ . La frecuencia de muestreo es  $f_s = 1/T_s = 500$  Hz.

1. Especifique la ubicación de los ceros del filtro discreto  $H(z)$ .
2. Diseñe una implementación FIR [ecuación FIR (7.15)].
3. Calcule la respuesta en frecuencia del sistema (módulo y fase) y exprese de la manera más sencilla posible. Grafique  $H(e^{j\omega})$  indicando todos los puntos significativos.
4. Calcule el valor de la respuesta en  $\omega = 0$  y en  $\omega = \pi$ .
5. Determine la respuesta en frecuencia del sistema continuo  $H_c(f) = Y_c(f)/X_c(f)$ , y grafique su módulo y su fase.
6. Calcule analíticamente la expresión de la salida de estado estacionario  $y_{c(ee)}(t)$  cuando la entrada es  $x_c(t) = 2 \sin(2\pi \times 50t) + 3 \cos(2\pi \times 100t)$ .



### Filtros Peine

**Ejercicio 7.** Calcule el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro peine simple (7.20) si  $M = 10$ .

**Ejercicio 8.** A partir del filtro peine simple del ejercicio anterior, construya un filtro peine reemplazando  $z$  por  $z^L$ .

1. Calcule la función de sistema del nuevo filtro peine.
2. Calcule la expresión de la respuesta en frecuencia.
3. Encuentre la ubicación de los ceros. Observe qué sucede en las frecuencias

$$\omega_n = \frac{2\pi nL}{L(M+1)} = \frac{2\pi n}{(M+1)}.$$

4. Grafique el módulo de la respuesta en frecuencia de este filtro para  $L = 3$  y  $M = 10$ .

### Osciladores sinusoidales digitales

**Ejercicio 9.** Encuentre los tres primeros términos de la respuesta impulsiva del oscilador sinusoidal digital descrito por la ecuación (7.22).