Procesamiento digital de señales

Transformada de fourier y propiedades

Integrantes:

- Barco Valentín
- Estrada Anselmo

Ejercicio 1:

a) No es posible lograr el espectro $Y(f)$ a partir del espectro $X(f)$ ya que ni $Re\{X(f)\}$, ni $Im\{X(f)\}$ tienen la forma de $Y(f)$.

b) $x(t) = y(t) + y(-t) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(y(t) + y(-t)\right) =$

$$2 \cdot X(f) = \underline{2 \cdot Re\{Y(f)\}}$$

c) $z(t) = y(-t) \xrightarrow[\text{de Reflexion}]{\text{Por propiedad}} \underline{Z(f) = Y(-f)}$

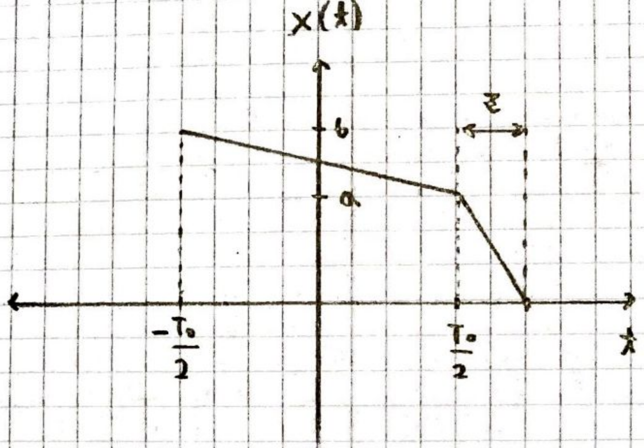
d) Al igual que el inciso a) no es posible formar el espectro $W(f)$ a partir del espectro $X(f)$ ya que ni $Re\{X(f)\}$, ni $Im\{X(f)\}$ tienen la forma de $W(f)$.

e) Igual que el inciso a) y d)

b) $w(t) = y(t) - y(-t) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(y(t) - y(-t)\right)$

$= W(f) = \underline{2 \cdot \mathrm{Im}\{Y(f)\}}$

Esercizio 2

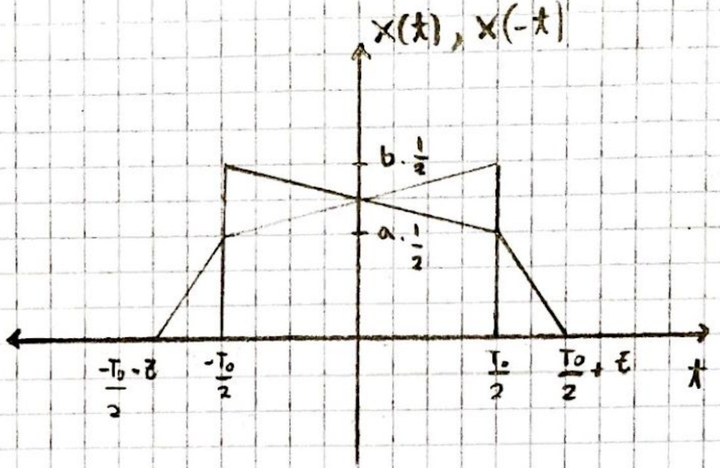


$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{(a-b)}{T_0} t + \dfrac{a+b}{2} & -\dfrac{T_0}{2} < t < \dfrac{T_0}{2} \\ -\dfrac{a}{\tau} t + \dfrac{a T_0}{2\tau} + a & \dfrac{T_0}{2} < t < \dfrac{T_0}{2} + \tau \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

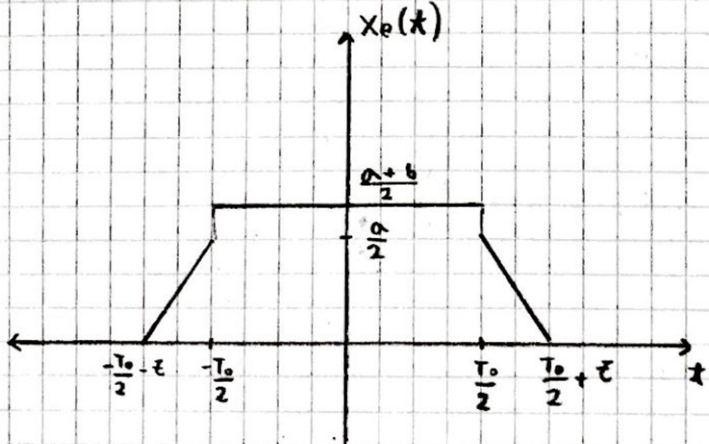
$$x_e(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(x(t) + x(-t)\right)$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(x(t) - x(-t)\right)$$

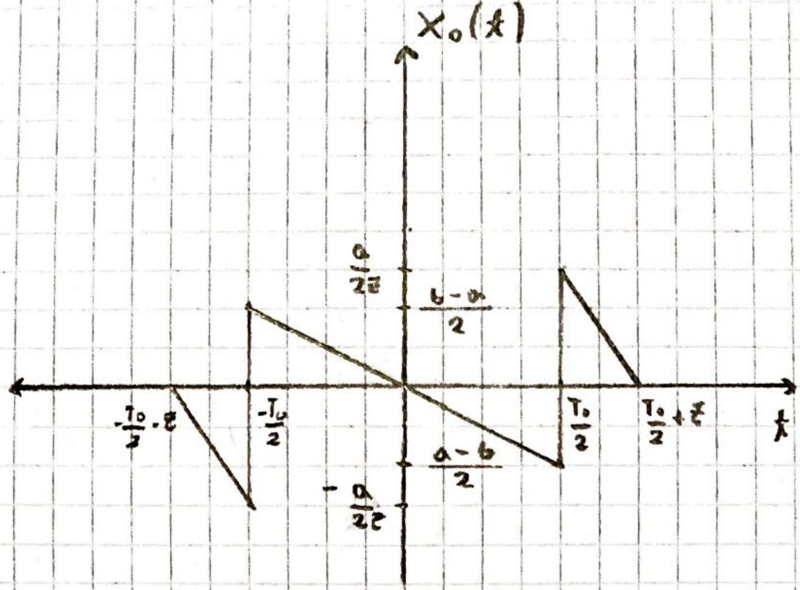
$\underline{x_e(t):}$



$$x_e(t) = \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} & -\dfrac{T_0}{2} < t < \dfrac{T_0}{2} \\ -\dfrac{a}{2\tau}t + \dfrac{a\,T_0}{4\tau} + \dfrac{1}{2}a & \dfrac{T_0}{2} < t < \dfrac{T_0}{2} + \tau \\ \dfrac{a}{2\tau}t + \dfrac{a\,T_0}{4\tau} + \dfrac{1}{2}a & -\dfrac{T_0}{2} - \tau < t < -\dfrac{T_0}{2} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

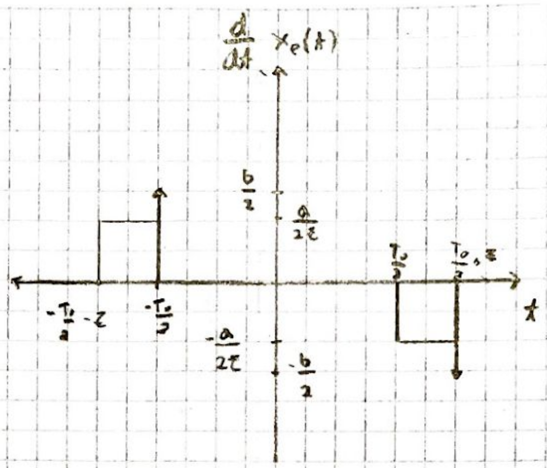


$x_0(t)$:



$$
x_0(t) = \begin{cases} \dfrac{(a-b)}{T_0} t & -\dfrac{T_0}{2} < t < \dfrac{T_0}{2} \\[2ex] \dfrac{-a}{2\tau} t + \dfrac{a T_0}{4\tau} + \dfrac{1}{2} a & \dfrac{T_0}{2} < t < \dfrac{T_0}{2} + \tau \\[2ex] -\dfrac{a}{2\tau} t - \dfrac{a T_0}{4\tau} - \dfrac{1}{2} a & -\dfrac{T_0}{2} - \tau < t < -\dfrac{T_0}{2} \\[2ex] 0 & \text{caso contrario} \end{cases}
$$

b)



Utilizo propiedad de diferenciación en tiempo

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = X(f)\cdot j2\pi f \longrightarrow \boxed{\frac{F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}}{j2\pi f} = X(f)}$$

Podemos notar que $x'(t)$ son dos pulsos rectangulares desplazados en $-\frac{(T_0+\tau)}{2}$ y $\frac{(T_0+\tau)}{2}$ y dos impulsos ubicados en $-\frac{T_0}{2}$ y $\frac{T_0}{2}$.

Estos impulsos se deben a que la función en esos puntos es discontinua, y al derivarlo queda el impulso.

La transformada de un pulso rectangular es un sinc y al utilizar la propiedad de desplazamiento temporal queda

$$U(f) = \frac{a}{2}\cdot \text{sinc}(\tau\cdot f)\cdot e^{j2\pi f\left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)} - \frac{a}{2}\,\text{sinc}(\tau f)\cdot e^{-j2\pi f\left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)}$$

Luego al transformar los impulsos

$$I(f) = \frac{b}{2}\cdot e^{j2\pi f\frac{T_0}{2}} - \frac{b}{2}\cdot e^{-j2\pi f\frac{T_0}{2}}$$

$$j2\pi f\cdot X(f) = U(f) + I(f)$$

$$j2\pi f\cdot X_1(f) = \frac{a}{2}\cdot \operatorname{sinc}(\tau\cdot f)\left[e^{j2\pi f\left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)} - e^{-j2\pi f\left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)}\right] +$$

$$+ \frac{b}{2}\left(e^{j2\pi f\frac{T_0}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{T_0}{2}}\right)$$

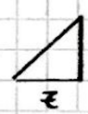
$$X_1(f) = \frac{a}{j4\pi f}\cdot \operatorname{sinc}(\tau\cdot f)\left[e^{j2\pi f\left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)} - e^{-j2\pi f\left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)}\right] +$$

$$+ \frac{b}{j4\pi f}\left(e^{j2\pi f\frac{T_0}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{T_0}{2}}\right)$$

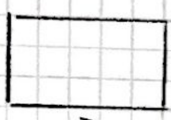
$$X(f) = \frac{a}{2\pi f}\cdot \operatorname{sinc}(\tau f)\cdot \operatorname{sen}\left(2\pi f\,\frac{T_0+\tau}{2}\right) + \frac{b}{2\pi f}\cdot \operatorname{sen}\left(2\pi f\,\frac{T_0}{2}\right)$$

Se procedió a realizar el límite con MatLab el límite de $X(f)$ con $f \to 0$ y el resultado fue $\frac{a}{2}\tau + T_0\,\frac{a+b}{2}$

y al calcular el Area de $X_e(t)$ se obtiene el mismo resultado

$2 \times$  $\frac{a}{2}$ $\rightarrow$ $2\cdot\frac{a}{4}\tau = \frac{a}{2}\tau$.

τ

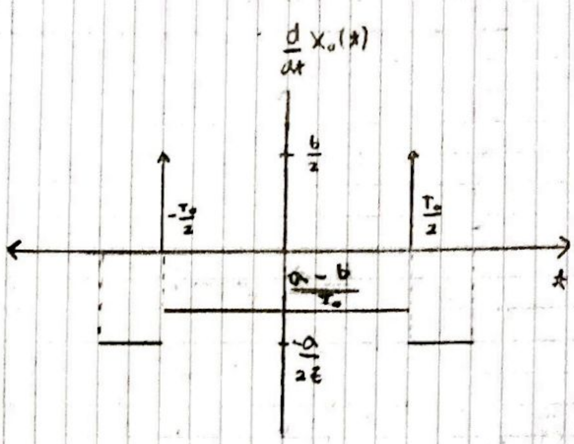
 $\frac{a+b}{2}$ $\rightarrow$ $T_0\,\frac{a+b}{2}$

T_0

NOTA Area $= \frac{a}{2}\tau + T_0\,\frac{a+b}{2}$

c)

Utilizando la propiedad de diferenciacion en tiempo y deriva $x_0(t)$



Al igual que el en el inciso anterior la $x_0'(t)$ consta de 3 pulsos rectangulares centrados en cero, $-\frac{(T_0+\tau)}{2}$ y $\frac{(T_0+\tau)}{2}$ y dos impulsos desplazados en $-\frac{T_0}{2}$ y $\frac{T_0}{2}$

Transformada de los pulsos cuadrados.

$$U(f) = -\frac{a}{2}\operatorname{sinc}(\tau f).e^{j2\pi f\left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)} - \frac{a}{2}\operatorname{sinc}(\tau f)e^{-j2\pi f\left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)}$$

$$-\frac{T_0}{2}(a-b)\operatorname{sinc}(T_0 f)$$

Transformada de los impulsos.

$$I(f) = \frac{b}{2}.e^{j2\pi f\frac{T_0}{2}} + \frac{b}{2}e^{-j2\pi f\frac{T_0}{2}}$$

$$j2\pi f \cdot X_0(f) = U(f) + I(f)$$

$$j2\pi f\, X_0(f) = -\frac{a}{2}\,\text{sinc}(\tau f)\, e^{j2\pi f\left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)} - \frac{a}{2}\,\text{sinc}(\tau f)\, e^{-j2\pi f\left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)}$$

$$-\frac{\cancel{T_0}(a-b)}{\cancel{T_0}}\,\text{sinc}(T_0 f) + \frac{b}{2} e^{j2\pi f\left(\frac{T_0}{2}\right)} + \frac{b}{2} e^{-j2\pi f\left(\frac{T_0}{2}\right)}$$

$$X_2(f) = +j\frac{1}{2\pi f}\left[a\,\text{sinc}(\tau f)\cdot \cos\left(2\pi f\left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)\right) - (a-b)\,\text{sinc}(T_0 f)\right.$$

$$\left. - b\cos\left(2\pi f\,\frac{T_0}{2}\right)\right]$$

Se procede a realizar el limite de $X_0(f)$ con $f \to 0$ en mat lab y esto dio cero. Este resultado concuerda con el area bajo la curba del $X_0(t)$ ya que al ser una funcion impar, la integral (area) definida de esta va a ser cero.

d) $X(f) = X_1(f) + X_2(f)$ propiedad de simetria

$$X(f) = \frac{a}{2\pi f} \operatorname{sinc}(\tau f) \cdot \operatorname{sen}\left(2\pi f \frac{T_0+\tau}{2}\right) + \frac{b}{2\pi f} \operatorname{sen}\left(2\pi f \frac{T_0}{2}\right) +$$

$$+ j \cdot \frac{1}{2\pi f}\left(a \operatorname{sinc}(\tau f) \cdot \cos\left(2\pi f \left(\frac{T_0+\tau}{2}\right)\right) - (a-b) \operatorname{sinc}(T_0 f) - b \cdot \cos\left(2\pi f \frac{T_0}{2}\right)\right)$$

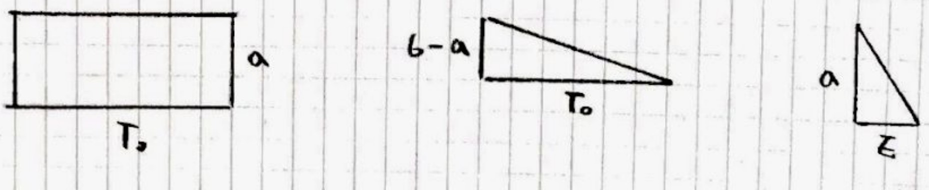
Ahora compruebo con propiedad de Area

$$\lim_{f\to 0} X(f) = \lim_{f\to 0} X_1(f) + \cancel{\lim_{f\to 0} X_2(f)}^{\,0}$$

$$\lim_{f\to 0} X(f) = \lim_{f\to 0} X_1(f) = \frac{a}{2}\tau + T_0 \cdot \frac{a+b}{2}$$

---

y si calculamos el area de $x(t)$

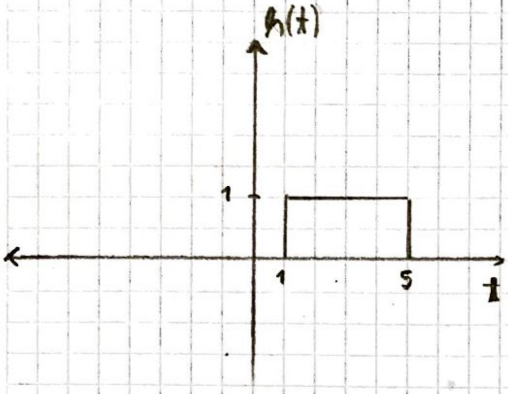


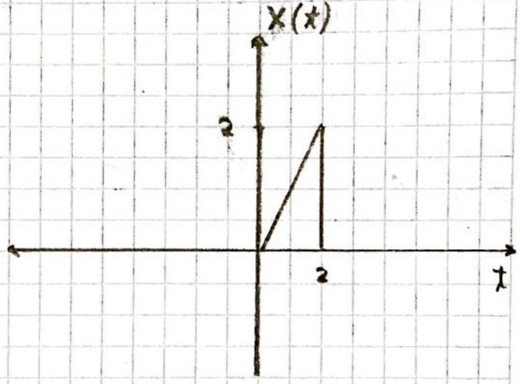
$T_0 \cdot a \quad + \quad \frac{b}{2}T_0 - \frac{a}{2} \cdot T_0 \quad \frac{a \cdot \tau}{2}$

$$\text{Area } x(t) = \frac{a+b}{2} T_0 + \frac{a}{2}\tau = \lim_{f\to 0} X(f)$$

NOTA

Ejercicio 3:



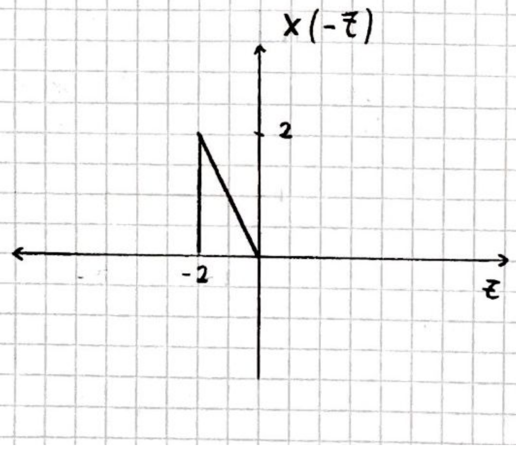


$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

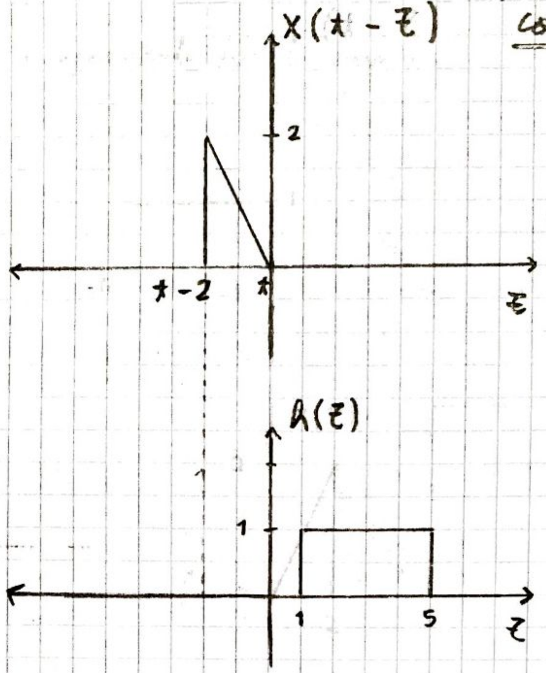
Integral de convolucion

$$y(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$



Reflexion

con $t = 0$



Desplazamiento

- Etapa 1: Sin solapamiento por izquierda para $-\infty < t < 1$
- Etapa 2: Solapamiento parcial por izquierda para $1 < t < 3$
- Etapa 3: Solapamiento total para $3 < t < 5$
- Etapa 4: Solapamiento parcial por derecha para $5 < t < 7$
- Etapa 5: Sin solapamiento por derecha para $7 < t < \infty$

b)

• Etapa 1: Para $-\infty < t < 1$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = \int 0\,d\tau = \underline{0} \text{ para } -\infty < t < 1$$

El producto de ambas funciones en el intervalo antes mencionado es nulo y su area (integral) tambien es nula.

• Etapa 2: Para $1 < t < 3$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = \int_{1}^{t} (t-\tau).1\,d\tau = t\tau - \frac{\tau^2}{2}\Bigg|_{1}^{t}$$

$$= t^2 - \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} = \underline{+\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}} \quad \text{Para } 1 < t < 3$$

Etapa 3: Para $3 < t < 5$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = \int_{t-2}^{t} (t-\tau)\,1\,d\tau = t\tau - \frac{\tau^2}{2}\Bigg|_{t-2}^{t}$$

$$= t^2 - \frac{t^2}{2} - (t-2)t + \frac{(t-2)^2}{2} = \cancel{t^2} - \cancel{\frac{t^2}{2}} - \cancel{t^2} + \cancel{2t} + \cancel{\frac{t^2}{2}} - \cancel{2t} + 2$$

$$= \underline{2}$$

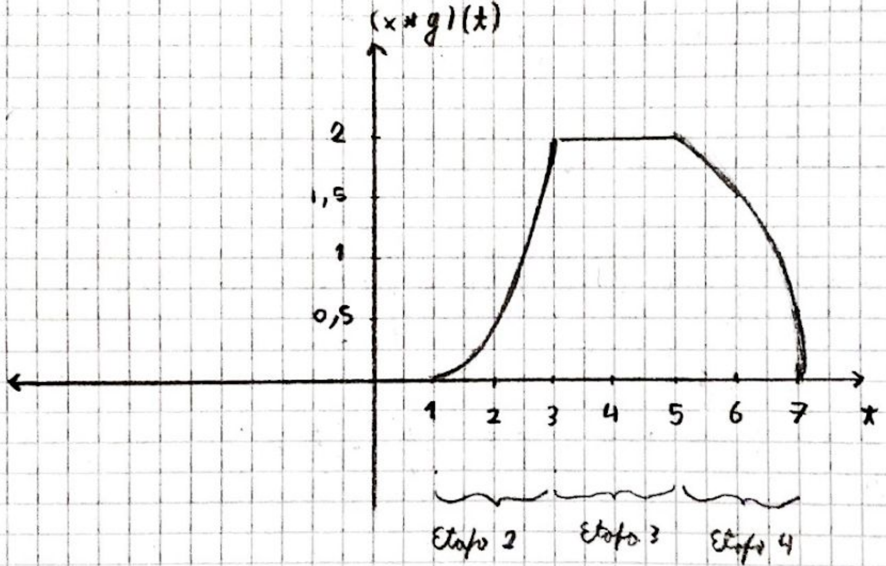
NOTA

Etapa 4: Para $5 < t < 7$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = \int_{t-2}^{5} (t-\tau)\cdot 1\,d\tau = t\tau - \frac{\tau^2}{2}\Bigg|_{t-2}^{5}$$

$$= t5 - \frac{25}{2} - t^2 + 2t + \frac{(t-2)^2}{2} = 7t - t^2 + \frac{t^2 - 4t + 4}{2} - \frac{25}{2}$$

$$-\frac{1}{2}t^2 + 5t - 10{,}5 \quad \text{Para } 5 < t < 7$$



Etapa 5: Para $7 < t < \infty$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = \int 0\,d\tau = 0 \quad \text{Para } 7 < t < \infty$$

El producto de ambas funciones en el intervalo antes mencionado es cero y por lo tanto su area tambien

NOTA