

## Transformada Z

La bibliografía para el estudio de este tema es:

- el Capítulo 3, “Z Transform” y
- el Capítulo 5, “Transform Analysis of Time-Invariant Systems”

del libro de Oppenheim, A., Schafer, R., *Discrete-Time Signal Processing*, 2da. Edición, Prentice-Hall, Inc., 1998.

### 6.1. Introducción

En los capítulos previos se ha visto que las distintas variantes de la transformada de Fourier, y en especial la Transformada de Fourier de Tiempo discreto (TFTD) es muy útil en la representación y el análisis de sistemas discretos. En este capítulo se desarrolla la transformada  $z$  de una sucesión discreta, que cumple un papel similar a la transformada de Laplace para las señales de tiempo continuo, y tienen una relación similar con las transformadas de Fourier correspondientes. Uno de los motivos para desarrollar esta transformada es que la transformada de Fourier no converge para todas las sucesiones, y por lo tanto es conveniente disponer de una transformada que sea aplicable para una clase más amplia de señales. Esto permite resolver algunos problemas de manera más sencilla.

### 6.2. La transformada $z$

En el Capítulo 3 se definió la transformada de Fourier de tiempo discreto  $X(e^{j\omega})$  de una sucesión  $x[n]$  como

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}. \quad (6.1)$$

La transformada  $z$  de una sucesión se define como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}. \quad (6.2)$$

Esta ecuación es, en general, una suma infinita, o una serie de potencias, donde  $z$  es una variable compleja. A veces es conveniente pensar la ecuación (6.2) como un operador que transforma una sucesión  $x[n]$  en una función  $X(z)$ , y en este caso se utilizará la notación

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = X(z).$$

La correspondencia entre una sucesión  $x[n]$  y su transformada  $z$   $X(z)$  se nota

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z).$$

La transformada  $z$  definida por la ecuación (6.2) se conoce como transformada  $z$  *bilátera*; también es habitual utilizar la transformada  $z$  *unilátera* definida como

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}.$$

Estas dos transformadas son equivalente {únicamente si  $x[n] = 0$  para todo  $n < 0$ . En estos apuntes, sólo se utilizará la transformada  $z$  bilátera definida por la ecuación (6.2).

Comparando las ecuaciones (6.1) y (6.2) es evidente que existe una relación estrecha entre la TFTD y la transformada  $z$ . En particular, si se reemplaza la variable compleja  $z$  por la variable compleja  $e^{j\omega}$  en la ecuación (6.2), la transformada  $z$  se “convierte” en la transformada de Fourier. Este es uno de los motivos por el cual se usa la notación  $X(e^{j\omega})$  para la TFTD: si existe, es  $X(z)$  con  $z = e^{j\omega}$ . Esto es equivalente a decir que el módulo de  $z$  es unitario: esto es, si  $|z| = 1$ , la transformada  $z$  coincide con la transformada de Fourier de tiempo discreto. Si la variable compleja  $z$  se expresa en forma polar,

$$z = r e^{j\omega},$$

la ecuación (6.2) toma la forma

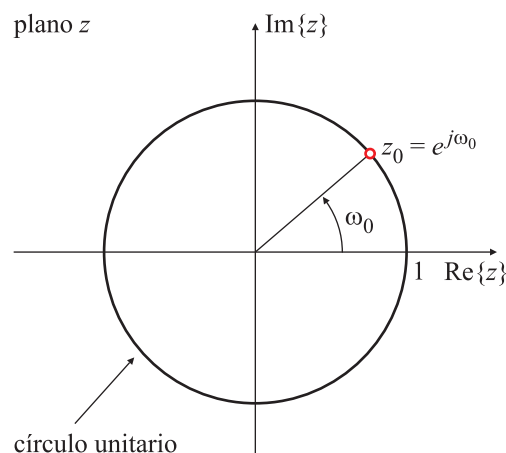
$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (re^{j\omega})^{-n},$$

o bien

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] r^{-n}) e^{-j\omega n}. \quad (6.3)$$

La ecuación (6.3) puede interpretarse como la TFTD de la sucesión  $r^{-n}x[n]$ , y el factor  $r^{-n}$  puede hacer que la sumatoria converja. Para  $r = 1$ , la ecuación (6.3) coincide con la TFTD  $X(e^{j\omega})$ .

Como la transformada  $z$  es función de una variable compleja, es cómodo representarla en el plano complejo. En este plano, el contorno definido por  $|z| = 1$  es un círculo de radio 1, como se muestra en la Fig. 6.1. Este contorno se conoce como *círculo unitario*. La transformada  $z$  evaluada sobre el círculo unitario da como resultado la transformada de Fourier de tiempo discreto. La variable  $z_0 = e^{j\omega_0} = \cos \omega_0 + j \sin \omega_0$  representa un punto ubicado sobre el círculo unitario, de módulo 1 y fase  $\omega_0$ :  $\omega_0$  es el ángulo entre el vector  $z_0$  y el eje real del plano complejo. Si se evalúa  $X(z)$  sobre puntos ubicados sobre el círculo unitario, comenzando en  $z = 1$  (es decir,  $\omega = 0$ ) pasando por  $z = j$  ( $\omega = \pi/2$ )



**Fig. 6.1.** El círculo unitario en el plano complejo  $z$ .

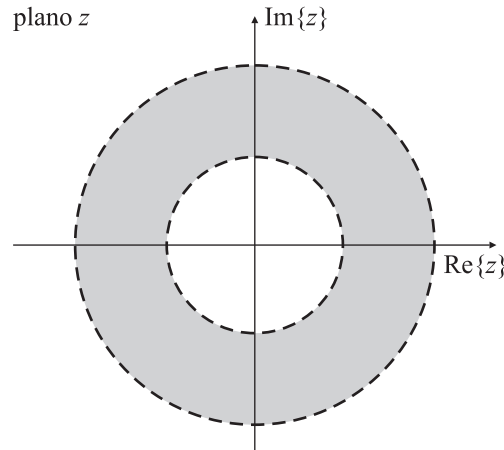
hasta  $z = -1$  ( $\omega = \pi$ ) se obtiene la transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  para  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Continuando el recorrido por el círculo unitario es equivalente a evaluar la TFTD  $X(e^{j\omega})$  desde  $\omega = \pi$  hasta  $\omega = 2\pi$ , o también desde  $\omega = -\pi$  hasta  $\omega = 0$ . En el Capítulo 3 la TFTD se representó sobre un eje de frecuencias lineal, y se enfatizó la periodicidad en  $2\pi$  de la transformada: el interpretar la TDFT como la transformada  $z$  evaluada sobre el círculo unitario es equivalente a enrollar el eje de frecuencia sobre el círculo unitario, haciendo coincidir la frecuencia  $\omega = 0$  con el punto  $z = 1$ , y la frecuencia  $\omega = \pi$  con el punto  $z = -1$ . De esta forma, la periodicidad en  $2\pi$  de la TFTD resulta natural, porque un cambio de frecuencia de  $\omega_0$  a  $\omega_0 + 2\pi$  corresponde a partir de un punto  $z_0$  sobre el círculo unitario, y dar una vuelta completa al disco para llegar exactamente al mismo punto.

Como se estudió en el Capítulo 3, la serie de potencias *que* representa la transformada de Fourier puede no converger para todas las sucesiones: la suma de infinitos términos puede no ser finita. De manera similar, la transformada  $z$  puede no converger para todas las sucesiones, o para cualquier valor de  $z$ . Para una sucesión dada, el conjunto de valores de  $z$  para los cuales la transformada  $z$  converge se denomina *región de convergencia*, y se abreviará RdC. Como se vio en el Capítulo 3, si una sucesión  $x[n]$  es absolutamente sumable, esto es,  $\sum_n |x[n]| < \infty$ , su Transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  converge a una función continua de  $\omega$ . aplicando este criterio a la ecuación (6.3) lleva a la condición de convergencia de la transformada  $z$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] r^{-n}| < \infty \quad (6.4)$$

Tal como se mencionó más arriba, la presencia del factor  $r^{-n}$  hace que la transformada  $z$  pueda converger aún cuando la transformada de Fourier no converja. Por ejemplo, si  $x[n] = u[n]$  (el escalón unitario), la TFTD (6.1) no converge, pero la ecuación (6.3) converge para  $r > 1$ . Entonces, la transformada  $z$  del escalón existe y converge para  $|z| > 1$ .

La convergencia de la serie de potencias (6.2) depende solamente de  $|z|$  ya que  $|X(z)| < \infty$



**Fig. 6.2.** La región de convergencia (RdC) en el plano complejo  $z$ . En algunos casos, el anillo interior puede llegar hasta el origen, y la RdC se convierte en un disco. En otros casos, el borde exterior puede extenderse hasta infinito.

si

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n} < \infty, \quad (6.5)$$

es decir, la región de convergencia de la serie de potencias (6.2) está formada por todos los valores de  $z$  para los cuales se verifica la expresión (6.5). Entonces, si un valor de  $z$ , por ejemplo  $z = z_0$  pertenece a la RdC, entonces todos los valores de  $z$  sobre el círculo  $|z| = |z_0|$  también pertenecen a la RdC. Como consecuencia, las regiones de convergencia tienen forma de anillos centrados en el origen en el plano  $z$ . El borde externo de la RdC es un círculo (que puede tener radio infinito) y el borde interno también (y puede tener radio cero), como se muestra en la Fig. 6.2. Si la RdC contiene al círculo unitario, implica que la transformada  $z$  converge para  $|z| = 1$ , o, lo que es lo mismo, que converge la TFTD. Si la RdC no contiene al círculo unitario, la TFTD no es absolutamente convergente.

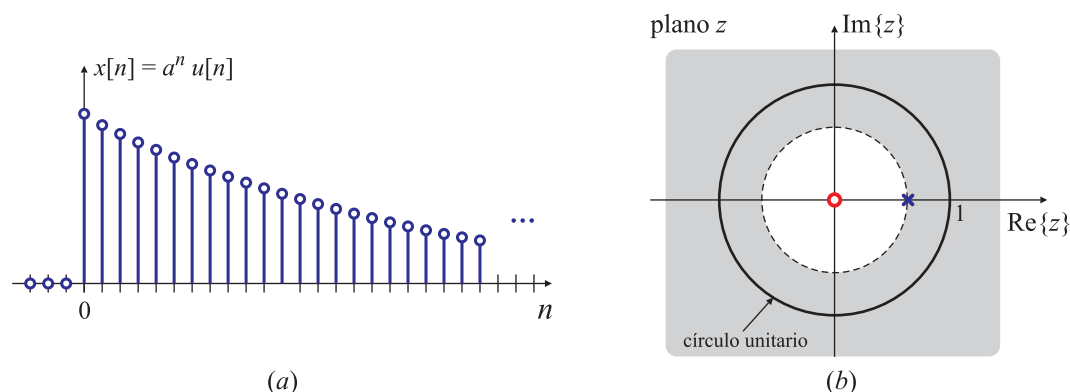
Una serie de potencias de la forma de la ecuación (6.2) es una serie de Laurent, y por lo tanto, muchos teoremas poderosos de la teoría de funciones de variable complejas pueden utilizarse en el estudio de la transformada  $z$ . Una serie de Laurent, y por lo tanto la transformada  $z$  representan una función analítica para cada punto dentro de la región de convergencia. Por lo tanto, la transformada  $z$  y todas sus derivadas deben ser funciones continuas de  $z$  dentro de la RdC. Esto implica que si el círculo unitario está contenido en la RdC, la TFTD y todas sus derivadas respecto a  $\omega$  deben ser funciones continuas de  $\omega$ . Además, como fue estudiado en el Capítulo 3, esto significa que la sucesión temporal es absolutamente sumable, es decir, una sucesión estable.

La convergencia uniforme de la transformada  $z$  requiere que la sucesión temporal, “pesada” por la exponencial  $r^{-n}$  sea absolutamente sumable, como indica la ecuación (6.3). Por ejemplo, la sucesión

$$x_1[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right), \quad -\infty < n < \infty,$$

que es la respuesta impulsiva de un filtro pasabajos ideal, ni la sucesión

$$x_2[n] = \cos(\omega_0 n), \quad -\infty < n < \infty,$$



**Fig. 6.3.** Sucesión  $x[n] = a^n u[n]$  con  $0 < a < 1$  (a) y diagrama de polos y ceros y región de convergencia (b) para el Ejemplo 6.1.

son absolutamente sumables. Más aún, ninguna de estas sucesiones multiplicadas por una exponencial  $r^{-n}$  es absolutamente sumable para ningún valor de  $r$ . Por lo tanto estas sucesiones no tienen una transformada  $z$  que converja absolutamente para ningún valor de  $z$ . Sin embargo, en el Capítulo 3 se mostró que sucesiones como  $x_1[n]$ , si bien no son absolutamente sumables, tienen energía finita y por lo tanto convergen en media cuadrática a una función discontinua periódica. Y sucesiones como  $x_2[n]$ , que no son absolutamente sumables y tampoco tienen energía finita, tienen transformadas de Fourier compuestas por impulsos de Dirac. En ambos casos las transformadas de Fourier no son ni continuas ni infinitamente diferenciables, de modo que no pueden provenir de evaluar una transformada  $z$  sobre el círculo unitario. En estos casos entonces no es estrictamente correcto pensar en la transformada de Fourier como la evaluación de una transformada  $z$  sobre el círculo unitario, a pesar que la notación  $X(e^{j\omega})$  sugiere esta interpretación.

La transformada  $z$  es más útil cuando la suma infinita (6.2) se puede expresarse en forma cerrada, es decir, cuando puede sumarse y expresarse como una ecuación matemática sencilla. Entre las más útiles e importantes transformadas  $z$  se encuentran aquellas que pueden expresarse como una función racional dentro de la región de convergencia, es decir

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios en  $z$  (o a veces, en  $z^{-1}$ ). Los valores  $z$  para los cuales  $X(z) = 0$  son los *ceros* de  $X(z)$ , y los valores donde  $X(z)$  tiende a infinito son los *polos*. Los polos de  $X(z)$  (para valores finitos de  $z$ ) son las raíces del polinomio denominador. Además, pueden aparecer polos en  $z=0$  o en  $z = \infty$ . Para transformadas  $z$  racionales existen una serie de relaciones entre la ubicación de los polos de  $X(z)$  y la región de convergencia de la transformada  $z$ . Estas relaciones se discuten en detalle en la Sección ZZZ. Los siguientes ejemplos ilustran el cálculo de la transformada  $z$ .

#### EJEMPLO 6.1. Sucesión exponencial “derecha”

Sea la sucesión  $x[n] = a^n u[n]$ . Como esta sucesión es no nula para  $n \geq 0$ , es un ejemplo de una

sucesión *derecha*. De la ecuación (6.2),

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n.$$

Para que  $X(z)$  converja es necesario que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a z^{-1}|^n < \infty.$$

Por lo tanto la región de convergencia es el rango de valores de  $z$  para los cuales  $|a z^{-1}| < 1$ , o equivalentemente,  $|z| > |a|$ . Dentro de esta región de convergencia la serie infinita converge a

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|,$$

donde se utilizó la expresión de la suma de una serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1/(1 - \rho)$  si  $|\rho| < 1$ . La transformada  $z$  tiene una región de convergencia para cualquier valor finito de  $|a|$ . Para  $a = 1$ , la sucesión  $x[n]$  es el escalón unitario,  $x[n] = u[n]$ , y la transformada  $z$  es

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1. \quad (6.6)$$

La transformada de Fourier de  $x[n]$ , en cambio, sólo converge si  $|a| < 1$ .  $\square$

En el Ejemplo 6.1 la sumatoria infinita es igual a una función racional de  $z$  dentro de la región de convergencia. En muchos casos esta función racional es una expresión mucho más conveniente que la suma infinita. Se verá luego que cualquier sucesión que pueda expresarse como una suma de exponenciales también puede representarse como una función racional. Tales transformadas quedan definidas, salvo una constante multiplicativa, por la posición de sus polos y ceros. en este ejemplo hay un cero en  $z = 0$  y un polo en  $z = a$ . El diagrama de polos y ceros y la región de convergencia para la función del Ejemplo 6.1 se muestran en la Fig. 6.3, donde el símbolo “o” indica un cero, y el símbolo “x” un polo. Si  $|a| > 1$  la RdC no incluye el círculo unitario, lo que es consistente con el hecho que para esos valores de  $a$  la sucesión  $x[n] = a^n u[n]$  crece exponencialmente y la transformada de Fourier de tal sucesión no converge.

#### EJEMPLO 6.2. Sucesión exponencial “izquierda”

Sea ahora la sucesión  $x[n] = -a^n u[-n - 1]$ . como esta sucesión es no nula sólo para  $n \leq -1$ , esta es una sucesión *izquierda*. Entonces

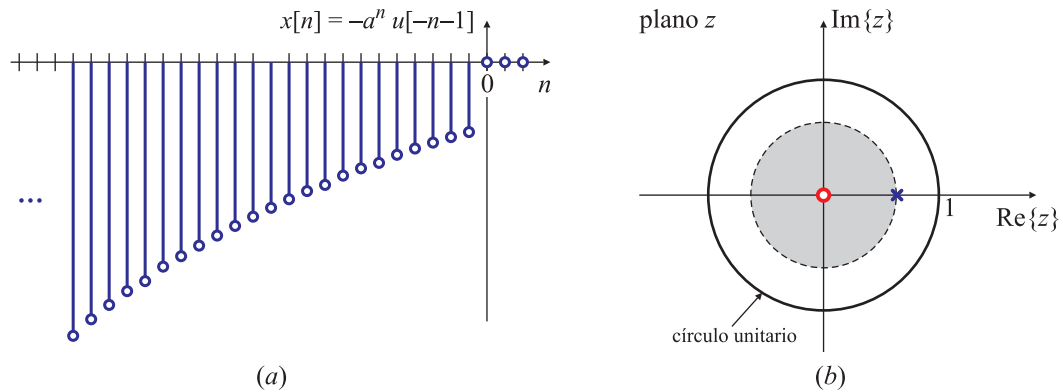
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-a^n u[-n - 1]) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (a z^{-1})^n.$$

Cambiando la variable de la suma  $\ell = -n$ ,

$$X(z) = - \sum_{\ell=1}^{\infty} a^{-\ell} z^{\ell} = 1 - \sum_{\ell=0}^{\infty} (a^{-1} z)^{\ell}. \quad (6.7)$$

Si  $|a^{-1} z| < 1$ , o bien  $|z| < |a|$ , la suma del término de la derecha de la ecuación (6.7) converge, y entonces

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{1 - a^{-1} z - 1}{1 - a^{-1} z} = \frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z}, \quad |z| < |a|. \quad (6.8)$$



**Fig. 6.4.** Sucesión temporal  $x[n] = -a^n u[-n-1]$  con  $0 < a < 1$  (a) y diagrama de polos y ceros y región de convergencia (b) para el Ejemplo 6.2.

El diagrama de polos y ceros y la región de convergencia para este ejemplo se muestran en la Fig. 6.4. Para  $|a| < 1$ , la sucesión  $x[n] = -a^n u[-n-1]$  crece exponencialmente cuando  $n \rightarrow -\infty$ , y por lo tanto, la TFTD no existe.  $\square$

Comparando las ecuaciones (6.6) y (6.8) y las Figs. 6.3 y 6.4 se observa que las sucesiones y las sumatorias infinitas son diferentes. Sin embargo la expresión algebraica para  $X(z)$  y los diagramas de polos y ceros son idénticos en los Ejemplos 6.1 y 6.2: las transformadas  $z$  sólo difieren en la región de convergencia. Por eso, cuando se especifica la transformada  $z$  de una sucesión es indispensable indicar tanto la expresión algebraica como la región de convergencia.

Otra interpretación de esta ambigüedad puede explicarse porque una función racional de  $z$  como (6.6) o (6.8) puede expandirse tanto en potencias positivas como negativas de  $z$ , correspondientes a sucesiones izquierdas o derechas, respectivamente. Esta interpretación es útil para justificar uno de los métodos de cálculo de antitransformadas, que se explora más adelante en los Ejemplos 6.20 y 6.21.

En ambos ejemplos, las sucesiones son exponenciales, y sus transformada  $z$  son funciones racionales. El siguiente ejemplo sugiere que siempre que  $x[n]$  sea una suma de exponenciales (reales o complejas) la transformada  $z$  será racional.

### EJEMPLO 6.3. Suma de dos sucesiones exponenciales

Sea  $x[n]$  la sucesión formada por la suma de dos exponenciales,

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

La transformada  $z$  es

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n. \end{aligned} \quad (6.9)$$

La primera sumatoria converge si

$$\left| \frac{1}{2} z^{-1} \right| < 1 \quad \text{o bien} \quad |z| > \frac{1}{2},$$

y la segunda si

$$\left| -\frac{1}{3} z^{-1} \right| < 1 \quad \text{es decir} \quad |z| > \frac{1}{3}.$$

Para que  $X(z)$  converja, las dos sumatorias deben converger, y esto ocurre cuando  $|z| > 1/2$ . Entonces la RdC es la zona donde ambas regiones se solapan, es decir,  $|z| > 1/2$ . Entonces, en esta región

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right) z^{-1}}$$

y entonces

$$X(z) = \frac{2 \left(1 - \frac{1}{12} z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{3} z^{-1}\right)}.$$

Para graficar los polos y ceros puede ser conveniente escribir  $X(z)$  como polinimios en  $z$

$$X(z) = \frac{2z \left(z - \frac{1}{12}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{3}\right)}.$$

La sucesión combinada tiene los mismos polos que cada una de las sucesiones, y ceros en  $z = 0$  y en  $z = 1/12$ . El diagrama de polos y ceros y la región de convergencia para cada una de las sucesiones y para la sucesión combinada se muestran en la Fig. 6.5.  $\square$

Los ejemplos anteriores muestran que la transformada  $z$  es una representación alteranativa de una señal. Si ésta es de longitud finita, el coeficiente de  $z^{-n}$  de la transformada  $X(z)$  de una sucesión es  $x[n]$ , el valor de la sucesión en el instante  $n$ . Si la señal es de longitud infinita, la transformada  $X(z)$  provee una representación compacta de  $x[n]$ .

En cada uno de los ejemplos previos para calcular la transformada  $z$  se usó la definición (6.2) y se manipularon los términos de las sumatorias hasta llevarlos a una forma reconocible. Cuando las sucesiones que se quieren transformar son suma de exponenciales como las de los Ejemplos 6.1 y 6.2, la transformada  $z$  puede obtenerse de manera más sencilla aprovechando el hecho que la transformada  $z$  es lineal, como se verá en la Sección 6.5.1.

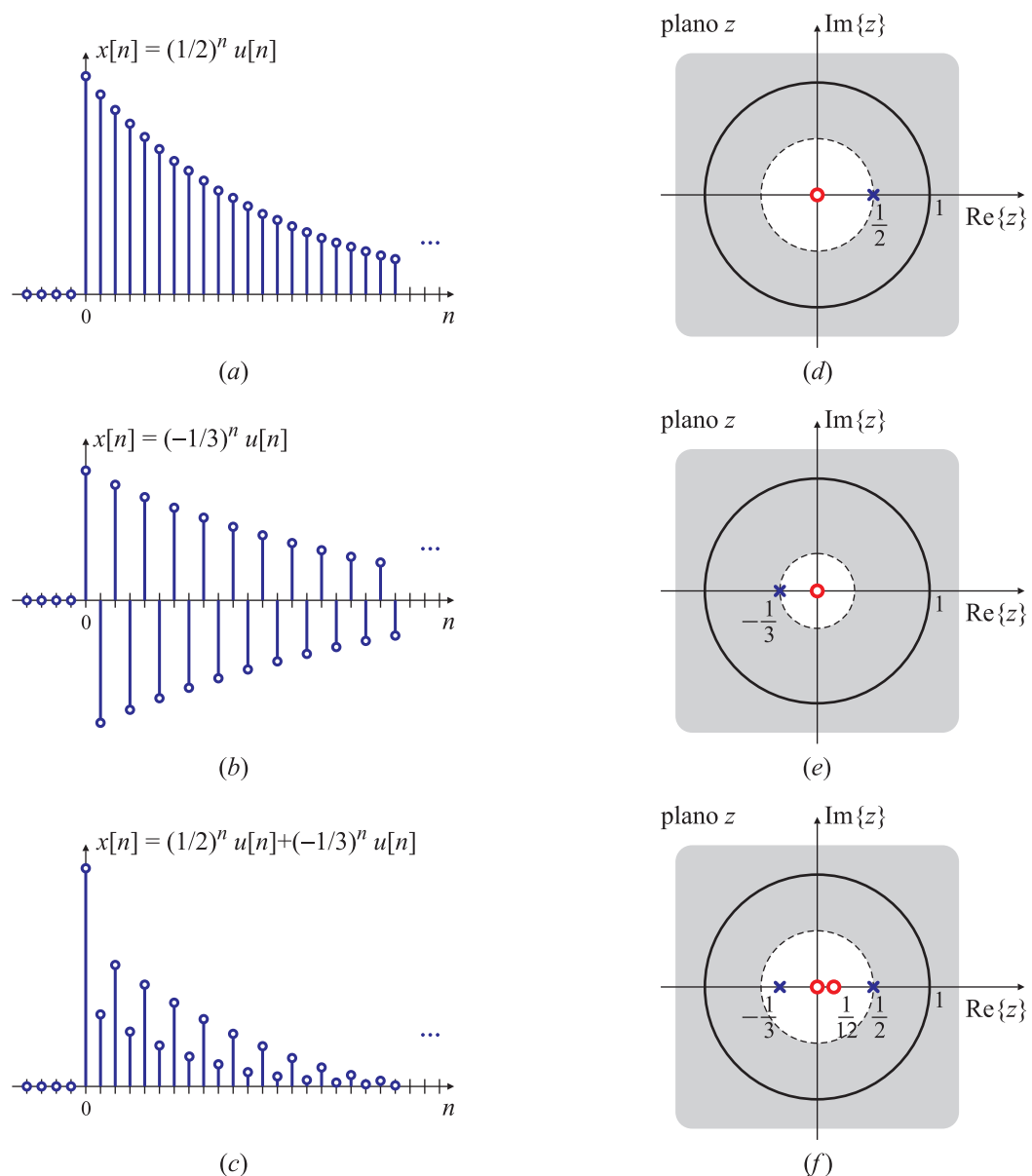
En estos casos, la región de convergencia de la combinación lineal es la intersección de las regiones de convergencia de cada una de las sucesiones, es decir, los valores de  $z$  para los cuales convergen ambas sucesiones, como se analizó para la ecuación (6.9) en el Ejemplo 6.3. En el siguiente ejemplo cómo el empleo de la propiedad de linealidad permite obtener la transformada  $z$  de este ejemplo de manera mucho más sencilla.

#### EJEMPLO 6.4. Suma de dos exponenciales

Sea nuevamente  $x[n]$  la sucesión del Ejemplo 6.3, repetida aquí por comodidad:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

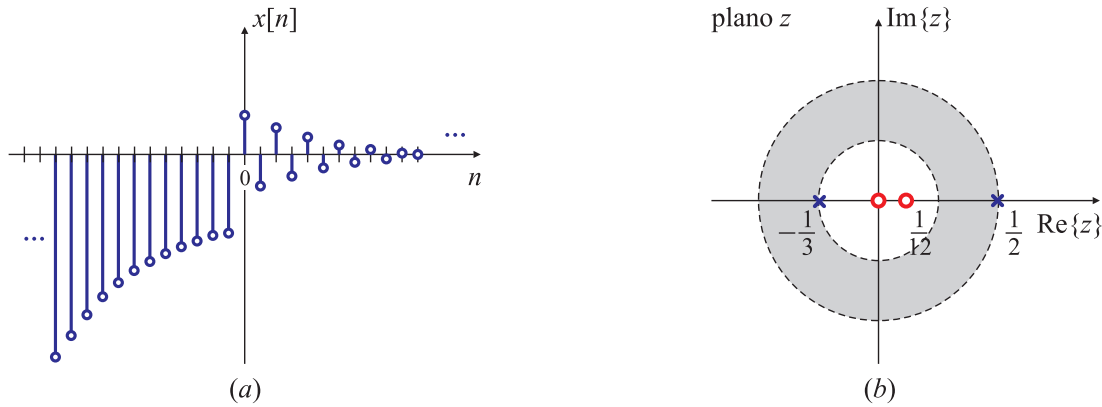




**Fig. 6.5.** Sucesiones y diagrama de polos y ceros y región de convergencia para los términos individuales y su suma para los Ejemplos 6.3 y 6.4: sucesión  $(1/2)^n u[n]$  (a) y transformada  $X(z) = 1/(1 - (1/2)z^{-1})$ ,  $|z| > 1/2$  (d); sucesión  $x[n] = (-1/3)^n u[n]$  (b) y transformada  $X(z) = 1/(1 + (1/3)z^{-1})$ ,  $|z| > 1/3$  (e); sucesión  $x[n] = (1/2)^n u[n] + (-1/3)^n u[n]$  (c) y transformada  $X(z) = 1/(1 - (1/2)z^{-1}) + 1/(1 + (1/3)z^{-1})$ ,  $|z| > 1/2$  (f).

Usando el resultado general del Ejemplo 6.1, con  $a = 1/2$  y  $a = -1/3$ , es sencillo ver que las transformadas  $z$  de cada término son

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] &\xleftrightarrow{z} \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] &\xleftrightarrow{z} \frac{1}{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3}, \end{aligned}$$



**Fig. 6.6.** Sucesión  $x[n] = (-1/3)^n u[n] - (1/2)^n u[-n-1]$  (no a escala) (a) y su diagrama de polos y ceros y región de convergencia (b).

y entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{1}{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$

como se encontró en el Ejemplo 6.1. La región de convergencia y los polos y los ceros de las sucesiones individuales y la de la sucesión combinada se muestran en la Fig. 6.5.  $\square$

En el siguiente ejemplo se sintetizan las características más importantes de los Ejemplos 6.1 a 6.4.

#### EJEMPLO 6.5. Sucesión exponencial bilátera

Sea la sucesión

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1], \quad (6.10)$$

representada, no a escala, en la Fig. 6.6(c). Esta sucesión crece sin límite cuando  $n \rightarrow -\infty$ , y tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Como está definida tanto para  $n \geq 0$  como para  $n < 0$  se dice que es una sucesión *bilátera*. Usando el resultado general del Ejemplo 6.1 con  $a = -1/3$ , se tiene

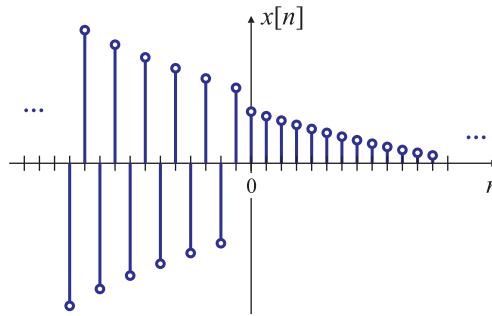
$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3},$$

con el diagrama de polos y ceros y región de convergencia representados en la Fig. 6.6(d). Usando el resultado del Ejemplo 6.2 con  $a = 1/2$  se encuentra

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

cuyo diagrama de polos y ceros y región de convergencia se muestra en la Fig. 6.6(e). Entonces, por la linealidad de la transformada  $z$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad \frac{1}{3} < |z|, \quad |z| < \frac{1}{2} \\ &= \frac{2(1 - \frac{1}{12}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{2z(z - \frac{1}{12})}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})}. \end{aligned}$$



**Fig. 6.7.** Sucesión  $x[n] = -(-1/3)^n u[-n-1] + (1/2)^n u[n]$  que no tiene transformada z. El gráfico es cualitativo: la sucesión no está dibujada a escala.

En este caso, la región de convergencia es el anillo  $1/3 < |z| < 1/2$ . El patrón de polos y ceros y la región de convergencia de esta transformada se muestra en la Fig. 6.6(e). En este ejemplo, la transformada z es la misma función racional que la de los Ejemplos 6.3 y 6.4, pero la región de convergencia es distinta. Como la región de convergencia no contiene al círculo unitario, la sucesión (6.10) no tiene transformada de Fourier.  $\square$

El siguiente ejemplo muestra que no toda combinación de sucesiones exponenciales tiene transformada z.

#### EJEMPLO 6.6. Una sucesión bilátera que no tiene transformada z

Sea la sucesión

$$x[n] = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad (6.11)$$

representada en la Fig. 6.7. Esta sucesión está definida tanto para  $n \geq 0$  como para  $n < 0$ , y por lo tanto es una sucesión bilátera. Para *intentar* el cálculo de su transformada, para el primer término se usa el resultado del Ejemplo 6.2 con  $a = (-1/3)$ , y entonces

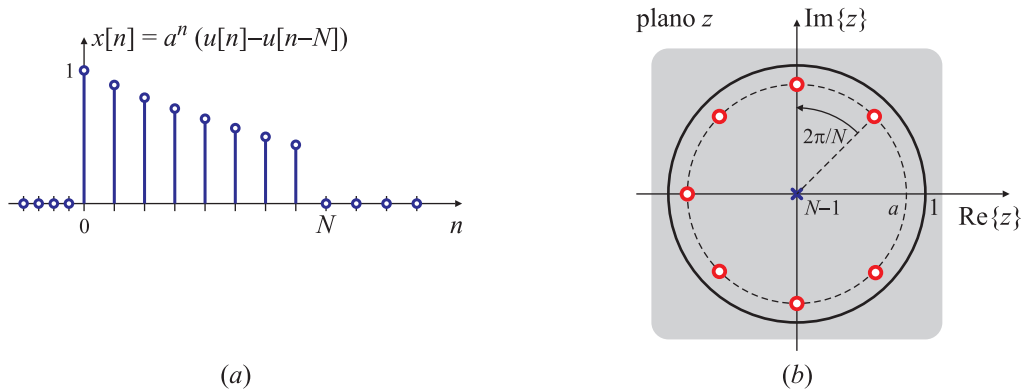
$$-\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| < \frac{1}{3}. \quad (6.12)$$

Para el segundo término se usa el resultado general del Ejemplo 6.1 con  $a = 1/2$ :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}. \quad (6.13)$$

Comparando las regiones de convergencia de las expresiones (6.12) y (6.13) se observa que no hay ninguna zona común a ambas, ya que  $z < 1/3$  y  $|z| > 1/2$  son regiones disjuntas. Esto es, no hay ninguna región del plano complejo donde converjan *simultáneamente* ambas sucesiones. En consecuencia, la sucesión (6.11) no tiene transformada z.  $\square$

En cada uno de los ejemplos anteriores se ha expresado la transformada z como cocientes de polinomios en  $z$  o en  $z^{-1}$ . De la definición de la transformada z dada por la ecuación (6.2) se observa que para sucesiones que son cero para  $n < 0$ , la transformada  $X(z)$



**Fig. 6.8.** Sucesión de longitud finita  $x[n] = a^n(u[n] - u[n - N])$  con  $0 < a < 1$  (a) y su diagrama de polos y ceros y región de convergencia  $|z| > 0$  (b).

involucra solo potencias negativas de  $z$ ; por ello, para este tipo de señales es conveniente expresar  $X(z)$  como cocientes de polinomios en  $z^{-1}$ . Aún en el caso en que  $x[n]$  no sea cero para  $n < 0$  la transformada  $X(z)$  puede escribirse como suma de términos de la forma  $1/(1 - az^{-1})$ . Debe recordarse que este término introduce un polo en  $z = a$  y un cero en  $z = 0$ , como muestran las expresiones algebraicas de los ejemplos precedentes.

Las transformadas  $z$  de sucesiones de longitud finita también pueden expresarse como una función racional. Si  $x[n]$  no es idénticamente nula en el intervalo  $N_1 \leq n \leq N_2$  la transformada  $z$  es

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \\ &= x[N_1]z^{-N_1} + x[N_1 + 1]z^{-N_1+1} + \cdots + x[N_2 - 1]z^{-N_2-1} + x[N_2]z^{-N_2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

y en general no tiene problemas de convergencia siempre que cada uno de los términos  $|x[n]z^{-n}|$  sea finito; es decir posiblemente no converga en  $z = 0$  y/o cuando  $|z| = \infty$ . Estos puntos pueden quedar excluidos porque si en la suma de la ecuación (6.14) hay alguna potencia  $z^{-k}$  (con  $k > 0$ ), ese término se hace infinito cuando  $z = 0$ , y si hay alguna potencia  $z^k$  (con  $k > 0$ ), ese término se hace infinito cuando  $|z| = \infty$ .

En general, es difícil poder expresar estas transformadas en forma cerrada, pero en muchos casos esto no es necesario. Por ejemplo, es fácil ver que si

$$x[n] = \delta[n] - 5\delta[n - 1]$$

su transformada  $z$  es

$$X(z) = 1 - 5z^{-1} = \frac{z - 5}{z}$$

que tiene un cero en  $z = 5$  y un polo en  $z = 0$ . Por lo tanto, la región de convergencia es todo el plano complejo menos el punto  $z = 0$ . En otras palabras, la región de convergencia es el exterior de un círculo de radio cero. El próximo ejemplo muestra el caso en el cual un número finito de términos puede sumarse para obtener una expresión más compacta.

**EJEMPLO 6.7. Transformada  $z$  de una sucesión de longitud finita**

Considere la sucesión

$$x[n] = a^n (u[n] - u[n - N]) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

representada en la Fig. 6.8(a). Entonces su transformada  $z$  es

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a},$$

donde se ha usado la expresión de la suma de una serie geométrica,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \rho^n = \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho}$$

con  $\rho = az^{-1}$ . La región de convergencia está determinada por los valores de  $z$  para los cuales

$$\sum_{n=0}^{N-1} |az^{-1}|^n < \infty.$$

Como hay un número finito de elementos no nulos en la sucesión ( $N$  términos), la sumatoria siempre será un número finito mientras que  $|az^{-1}|$  sea finito, lo que se cumple siempre que  $|a| < \infty$  y  $z \neq 0$ . Por lo tanto, suponiendo que  $a$  es finito la RdC es todo el plano complejo a excepción del origen ( $z = 0$ ). El diagrama de polos y ceros con  $N = 8$  y  $0 < a < 1$ , con  $a$  real, se muestra en la Fig. 6.8(b). En particular, los ceros de la transformada son las raíces de polinomio  $z^N - a^N$ , que están dados por

$$z_k = \sqrt[N]{|a|^N} e^{j \frac{\arg\{a^N\} + 2\pi k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

El cero en  $k = 0$ ,  $z_0 = a$  cancela el polo en  $z = a$ ; el resto de los ceros están en

$$z_k = ae^{j \frac{2\pi}{N} k}, \quad k = 1, \dots, N - 1.$$

Los polos de la transformada son los  $N - 1$  polos en el origen. □

Los pares transformados de los ejemplos previos, como así también otros pares transformados de uso frecuente se listan en la Tabla 6.1. Estos pares transformados son muy útiles para encontrar la transformada  $z$  de una sucesión, o antitransformar una transformada.

**6.3. Propiedades de la RdC de la transformada  $z$** 

Los ejemplos de la sección anterior sugieren que las propiedades de la región de convergencia dependen de la naturaleza de la señal. Estas propiedades se sintetizan a continuación, seguidas por una discusión y una demostración intuitiva. En lo que sigue, se supone que la transformada  $z$  es una función racional, y que  $x[n]$  tiene amplitud finita, a excepción posiblemente en  $n = \infty$  o en  $n = -\infty$ .

**Propiedad 1:** La RdC es un disco o un anillo en el plano complejo  $z$  centrado en el origen:

$$0 \leq r_i < |z| < r_e \leq \infty.$$

**Tabla 6.1.** Algunos pares de transformadas  $\mathcal{Z}$  (consultar la Sección 6.9 para una tabla más completa).

	sucesión	transformada	región de convergencia
1.	$\delta[n]$	1	todo el plano $z$
2.	$\delta[n - m]$	$z^{-m}$	todo $z$ salvo 0 (si $m > 0$ ) o $\infty$ (si $m < 0$ )
3.	$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$
4.	$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  < 1$
5.	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  >  a $
6.	$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  <  a $
13.	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
14.	$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
15.	$r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - r \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
16.	$r^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{r \sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
17.	$\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z  > 0$

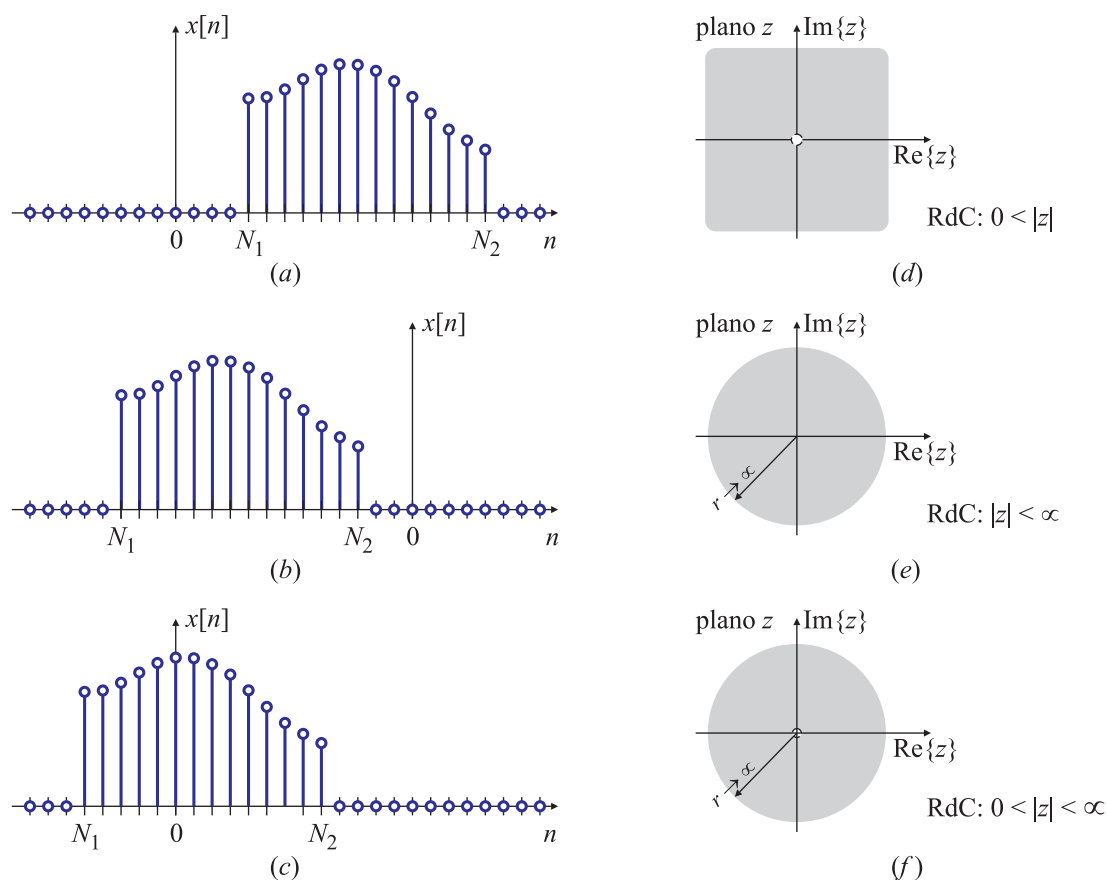
**Propiedad 2:** La TFTD de  $x[n]$  converge absolutamente si y sólo si la RdC de la transformada  $z$  de  $x[n]$  contiene al círculo unitario.

**Propiedad 3:** La región de convergencia no puede contener polos.

**Propiedad 4:** Si  $x[n]$  es una sucesión de longitud finita, como las que se muestran en la Fig. 6.9(a)-(c) es decir una sucesión que es cero salvo en el intervalo  $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$ , entonces la región de convergencia es todo el plano  $z$ , excepto posiblemente  $z = 0$  o  $z = \infty$ , Fig. 6.9(d)-(f).

**Propiedad 5:** Si  $x[n]$  es una sucesión *derecha*, es decir una sucesión que es cero para  $n < N_1 < \infty$ , como se muestra en la Fig. 6.10(a)-(b) la RdC se extiende hacia *afuera* de un círculo cuyo radio  $r_i$  es el módulo de polo finito de mayor módulo de  $X(z)$ , Fig. 6.10(f)-(g), posiblemente incluyendo  $z = \infty$ , Fig. 6.10(g).

**Propiedad 6:** Si  $x[n]$  es una sucesión *izquierda* es decir, una sucesión se anula para  $n > N_2 > -\infty$ , como se representa en la Fig. 6.10(c)-(d), la RdC se extiende hacia *aden-*



**Fig. 6.9.** Sucesiones de longitud finita y sus regiones de convergencia: sucesión definida para  $0 < N_1 < n < N_2 < \infty$  (a), con RdC  $0 < |z|$  (d); sucesión definida para  $-\infty < N_1 < n < N_2 < 0$  (b), con RdC  $|z| < \infty$  (e); sucesión definida para  $N_1 \leq n \leq N_2$  con  $N_1 < 0$  y  $N_2 > 0$  (c), con RdC  $0 < |z| < \infty$  (f).

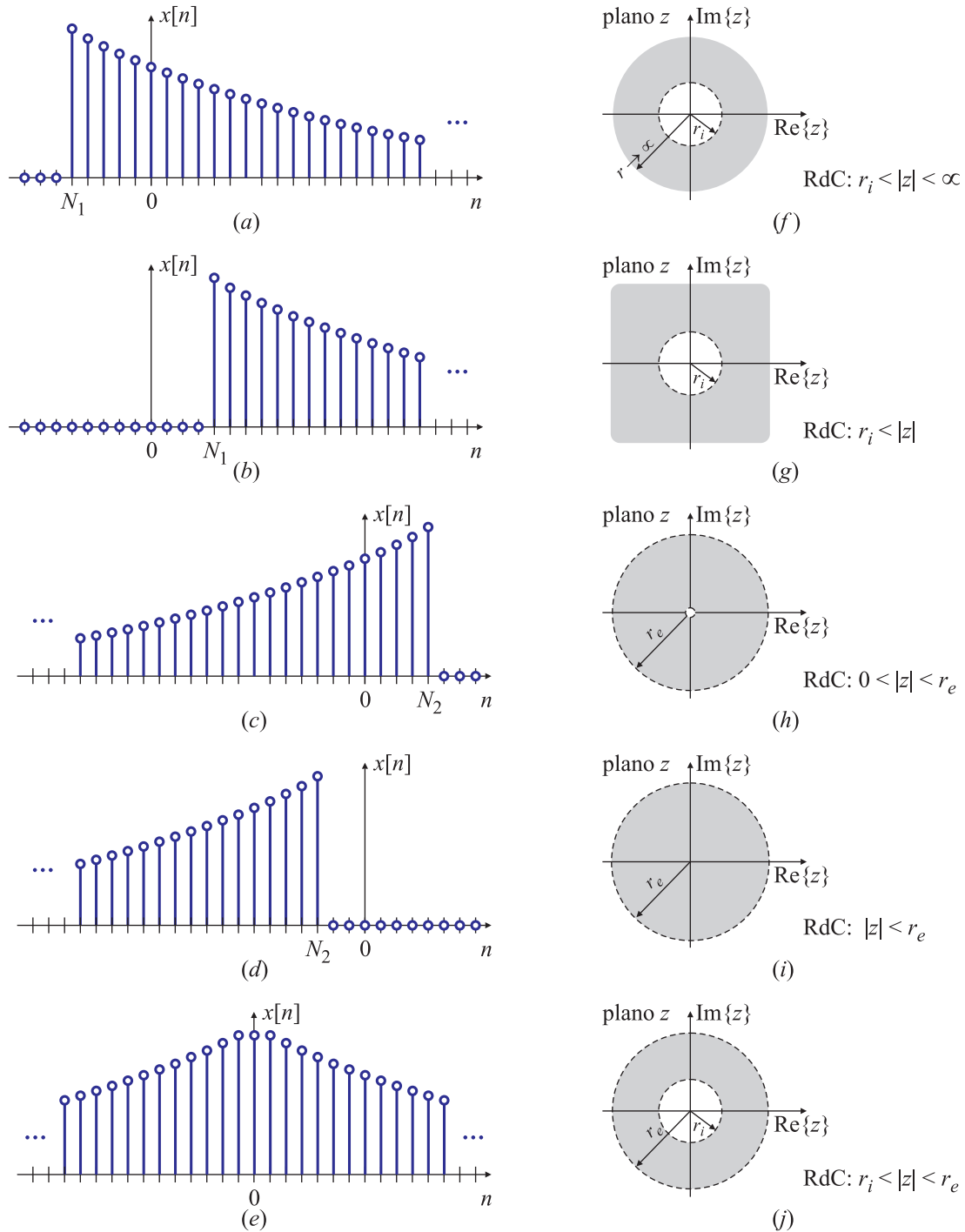
tro de un círculo cuyo radio  $r_e$  es el módulo del polo de menor módulo de  $X(z)$ , Fig. 6.10(h)-(i), posiblemente incluyendo  $z = 0$ , Fig. 6.10(i).

**Propiedad 7:** Una sucesión bilátera es una sucesión de longitud infinita que no es derecha ni izquierda, Fig. 6.10(c). Si  $x[n]$  es una sucesión bilátera la RdC es un anillo en el plano complejo  $z$  limitado en el borde interno y externo por polos, y, de acuerdo a la propiedad 3, no contiene ningún polo, Fig. 6.10(j).

**Propiedad 8:** La RdC es una región conectada.

Como se discutió en la Sección 6.2, la propiedad 1 resulta de que la convergencia de la transformada  $z$  sólo depende de  $|z|$ , y la propiedad 2 es consecuencia que la definición (6.2) de la transformada  $z$  es la transformada de Fourier de tiempo discreto  $X(e^{j\omega})$  cuando se evalúa sobre el círculo unitario  $|z| = 1$ . La propiedad 3 resulta de observar que en un polo  $|X(z)| \rightarrow \infty$ , y entonces, por definición, no converge.

Las propiedades 4 a 7 pueden desarrollarse más o menos directamente de la interpretación de la transformada  $z$  como la transformada de Fourier de tiempo discreto de la sucesión



**Fig. 6.10.** Sucesiones de longitud infinita y sus regiones de convergencia. Sucesión derecha definida sobre  $-\infty < N_1 \leq n$ , con  $N_1 < 0$  (a) y su RdC  $r_i < |z| < \infty$  (f); sucesión derecha definida sobre  $0 \leq N_1 \leq n$  (b) y su RdC  $r_i < |z|$  (g); sucesión izquierda definida sobre  $-\infty < n \leq N_1$  con  $N_1 > 0$  (c) y su RdC  $0 < |z| < r_e$  (h); sucesión izquierda definida sobre  $-\infty < n \leq N_1 \leq 0$  (d) y su RdC  $|z| < r_e$  (i); sucesión bilátera definida sobre  $-\infty < n < \infty$  (e) y su RdC  $r_i < |z| < r_e$  (j).



original “pesada” por una sucesión exponencial, como indica la ecuación (6.3). Específicamente para la propiedad 4, sean las señales de longitud finita que se anulan fuera del intervalo  $-\infty < N_1 < n < N_2 < \infty$ , cuya transformada  $z$  es

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$$

que puede escribirse como

$$X(z) = x[N_1]z^{-N_1} + x[N_1 + 1]z^{-N_1+1} + \dots + x[N_2 - 1]z^{-N_2-1} + x[N_2]z^{-N_2}.$$

Si  $z = re^{j\omega}$  es claro que

$$|X(z)| < |x[N_1]||r|^{-N_1} + |x[N_1 + 1]||r|^{-N_1+1} + \dots + |x[N_2 - 1]||r|^{-N_2-1} + |x[N_2]||r|^{-N_2}. \quad (6.15)$$

Entonces esta suma finita de términos converge siempre que  $|x[n]||r|^{-n}$  sea finito. Es natural que  $|x[n]| < \infty$ , pero que  $|r|^{-n}$  sea finito depende tanto del valor de  $n$  como del valor de  $r$ . Por ejemplo, en (6.15):

- si  $N_2 > 0$ , Fig. 6.9(a), la transformada  $z$  no converge para  $r = |z| = 0$ , porque el último término de la ecuación (6.15) es  $|x[N_2]||r|^{-N_2} = |x[N_2]|/|r|^{N_2} \rightarrow \infty$  cuando  $r = |z| \rightarrow 0$ . En este caso, la región de convergencia es el exterior de un disco de radio cero, como se muestra en la Fig. 6.9(d).
- si  $N_1 < 0$ , Fig. 6.9(b) (es decir, en la transformada  $z$  hay exponentes positivos de  $z$ ) entonces  $|X(z)| \rightarrow \infty$  cuando  $r = |z| \rightarrow \infty$ . Entonces la región de convergencia es todo el plano  $z$  menos el infinito: la RdC es el interior de un círculo de radio infinito, Fig. 6.9(e).
- si  $N_1 < 0$  y  $N_2 > 0$ , Fig. 6.9(c), se desprende que la región de convergencia es un anillo, con radio interior de valor nulo, y radio exterior de valor infinito. Fig. 6.9(f).

#### EJEMPLO 6.8. Regiones de convergencia de sucesiones de longitud finita

- Sea

$$x_1[n] = \delta[n] - 4\delta[n - 3].$$

Su transformada  $z$  es

$$X_1(z) = 1 - 4z^{-3} = \frac{z^3 - 4}{z^3}.$$

En esta sucesión,  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 10 > 0$ , y tiene un polo (triple) en el origen: converge en todo el plano complejo  $z$  excepto en el origen. Es decir, la RdC es el exterior de un círculo de radio *cero*.

- Para la sucesión

$$x_2[n] = 2\delta[n + 4] + 3\delta[n + 1],$$

la transformada  $z$  es

$$X(z) = 2z^4 + 3z$$

En este caso,  $N_1 = -4 < 0$  y  $N_2 = -1$ . En  $z = 0$  la transformada  $z$  no tiene problemas ( $X_2(z) = 0$ ) pero cuando  $|z|$  tiende a  $\infty$ ,  $|X(z)|$  también tiende a  $\infty$ : es decir, tiene un polo (cuádruple) en infinito. La RdC es todo el plano complejo, menos el infinito, o en otras palabras, el interior de un círculo de radio *infinito*.

- La sucesión

$$x_3[n] = \delta[n+1] + \delta[n-1]$$

tiene transformada  $z$  dada por

$$X_3(z) = z + z^{-1} = \frac{z^2 + 1}{z}.$$

En esta transformada  $N_1 = -1 < 0$  y  $N_2 = 1 > 0$ . Tal como se analizó más arriba, esta transformada no converge para  $z = 0$  (tiene un polo), pero tampoco para  $|z| \rightarrow \infty$ , pues en ese caso  $|X(z)|$  también tiende a  $\infty$ . En consecuencia, la RdC es el interior de un anillo de radio interno cero, y radio externo infinito. O bien, todo el plano complejo  $z$  menos el cero y el infinito.

Estos ejemplos muestran que a veces es conveniente escribir las transformadas  $z$  como cocientes de polinomios en  $z$  para detectar sin problemas todos sus polos y sus ceros.  $\square$

Para las propiedades 5 a 7, relativas a las sucesiones de longitud infinita, puede hacerse un análisis similar. En la región de convergencia de  $X(z)$ ,  $|X(z)| < \infty$ . Como se mostró en la ecuación (6.4).

$$|X(z)| < \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}|.$$

donde  $r = |z|$ . Esta desigualdad puede expresarse como

$$|X(z)| < \sum_{n=-\infty}^1 |x[n]r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]r^{-n}|,$$

que se puede escribir

$$|X(z)| < \sum_{n=1}^{\infty} |x[-n]r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x[n]}{r^n} \right|. \quad (6.16)$$

Si  $X(z)$  converge en alguna región del plano complejo  $z$ , ambas sumatorias en (6.16) deben dar un número finito en esa región. Si converge la primera suma de (6.16) debe haber valores de  $r$  suficientemente chicos que hagan que la sucesión  $x[-n]r^n$ ,  $1 \leq n < \infty$  sea absolutamente sumable. Si la sucesión  $x[-n]r^n$  converge para un valor  $r = r_e$ , también convergerá para un valor  $r = r_0 < r_e$ , porque  $r_0^n$  decrece más rápido que  $r_e^n$ . Por lo tanto, la RdC de la primera sumatoria consisten en los puntos  $r < r_e$ , es decir, los puntos interiores de un círculo de radio  $r_e$ , con  $r_e < \infty$ .

Por otra parte, si la segunda sumatoria converge, tiene que haber valores de  $r$  suficientemente grandes tal que la sucesión  $x[n]/r^n$ ,  $0 \leq n < \infty$  sea absolutamente sumable. Si la sucesión  $x[n]/r^n$  converge para un valor  $r_i$ , también converge para un  $r = r_0 > r_i$ , porque  $(1/r_0)^n$  decrece más rápido que  $(1/r_i)^n$ . Por lo tanto, la RdC de la segunda sumatoria de (6.16) está formada por todos los puntos fuera de un círculo de radio  $r > r_i$ .

Como la convergencia de  $X(z)$  requiere que ambos términos de (6.16) sean finitos, se desprende que la región de convergencia es un anillo en el plano  $z$ ,  $r_i < r < r_e$  que es la región común donde ambas sumas son finitas. Por otra parte, si  $r_e < r_i$ , no hay una región de convergencia común para las dos sucesiones, y entonces la transformada  $z$  no existe, como se mostró en el Ejemplo 6.6.

Para una sucesión derecha, como la que se muestra en las Figs. 6.10(a)-(b) la cota sobre la transformada  $z$  toma la forma

$$|X(z)| < \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| |r|^{-n}, \quad (6.17)$$

donde  $N_1$  puede ser mayor o menor que cero. Si  $N_1$  es menor que cero, aparecen un número finito de potencias positivas de  $r$ , y una cantidad infinita de términos con potencias negativas de  $r$

$$|X(z)| < |x[N_1]| r^{-N_1} + \cdots + x[-1]r + \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]| |r|^{-n}.$$

La primera parte se puede pensar como la transformada de una sucesión de longitud finita, y por lo tanto su región de convergencia es el interior de un anillo de radio infinito, y por lo tanto, no afecta la RdC de la segunda parte (salvo por el polo en infinito). Por lo tanto, el análisis se centrará en el caso de la ecuación (6.17) con  $N_1 \geq 0$ . Esta sumatoria puede escribirse como una función racional, y supongamos que tiene  $N$  polos, en  $z = p_1$  hasta  $z = p_N$ , donde se asume que  $|p_1| < |p_2| < \cdots < |p_N|$ . Es decir, el  $N$ -ésimo polo es el de mayor módulo (para simplificar el desarrollo se supone que todos los polos son distintos, pero la demostración puede generalizarse fácilmente para el caso de polos múltiples). Como se verá en la Sección 6.4, la sucesión  $x[n]$  para  $n \geq N_1$  puede escribirse como

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n, \quad n \geq N_1.$$

El término asociado al polo  $p_1$  es el que crece más lento, o decrece más rápido, según su módulo sea mayor o menor que la unidad. Mientras que el polo de mayor módulo  $p_N$  es el que crece más rápido decrece más lento, según sea  $|p_N| > 1$  o  $|p_N| < 1$ . Consideremos ahora esta sucesión “pesada” por la exponencial  $r^{-n}$

$$x[n]r^{-n} = r^{-n} \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n = \sum_{k=1}^N A_k \left( \frac{p_k}{r} \right)^n, \quad n \geq N_1. \quad (6.18)$$

Para que exista la transformada  $z$ ,  $x[n]r^{-n}$  tiene que ser absolutamente sumable, y de acuerdo a (6.18) esto requiere que cada una de las  $N$  exponenciales de la sumatoria sean absolutamente sumables, es decir

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} \left| \frac{p_k}{r} \right|^n \leq \infty \quad \text{para } k = 1, \dots, N,$$

que implica que

$$\left| \frac{p_k}{r} \right| < 1 \quad \text{o bien} \quad |p_k| < |r| \quad \text{para } k = 1, \dots, N.$$

Como por hipótesis el polo de mayor módulo es  $p_N$ , entonces la convergencia de la serie queda asegurada si

$$|p_N| < |r|, \quad (6.19)$$

es decir, la región en el plano  $z$  formada por los puntos que tengan módulo mayor que  $|p_N|$ . En otras palabras, la región de convergencia de una sucesión derecha es el *exterior* de un círculo de radio  $r_i$  igual al módulo del polo de mayor módulo, como se muestra en la Fig. 6.10(g). Como se mencionó más arriba, si  $N_1 < 0$ , entonces esta región de convergencia no contiene a  $|z| = \infty$  porque  $x[N_1]z^{-N_1}$  tiende a infinito cuando  $N_1$  es negativo y  $|z| \rightarrow \infty$ . En este caso, la región de convergencia es un anillo con radio interno  $r_i$  igual al módulo del polo de mayor módulo, y radio externo infinito, como se muestra en la Fig. 6.10(f).

Para la propiedad 6, referente a las sucesiones izquierdas, puede desarrollarse una demostración enteramente similar. En este caso, las sucesiones  $x[n]$  se pueden escribir como una suma de exponenciales, pero para  $n \leq N_2$ , como muestran las Figs. 6.10(c)-(d), es decir

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n, \quad n \leq N_2.$$

Para que exista la transformada  $z$  la sucesión  $x[n]r^{-n}$  tiene que ser absolutamente sumable, y en este caso se puede escribir como

$$x[n]r^{-n} = \sum_{k=1}^N A_k^n \left( \frac{p_k}{r} \right), \quad n \leq N_2.$$

Como ahora  $x[n]$  está definida para  $-\infty < n < N_2$ , el  $r$  de la sucesión exponencial debe elegirse de manera que  $|p_k/r|^n$  tienda a cero a medida que  $n$  tiende a  $-\infty$ . Para que esto suceda,

$$\left| \frac{p_k}{r} \right| > 1 \quad \text{o bien} \quad |p_k| > |r| \quad \text{para } k = 1, \dots, N.$$

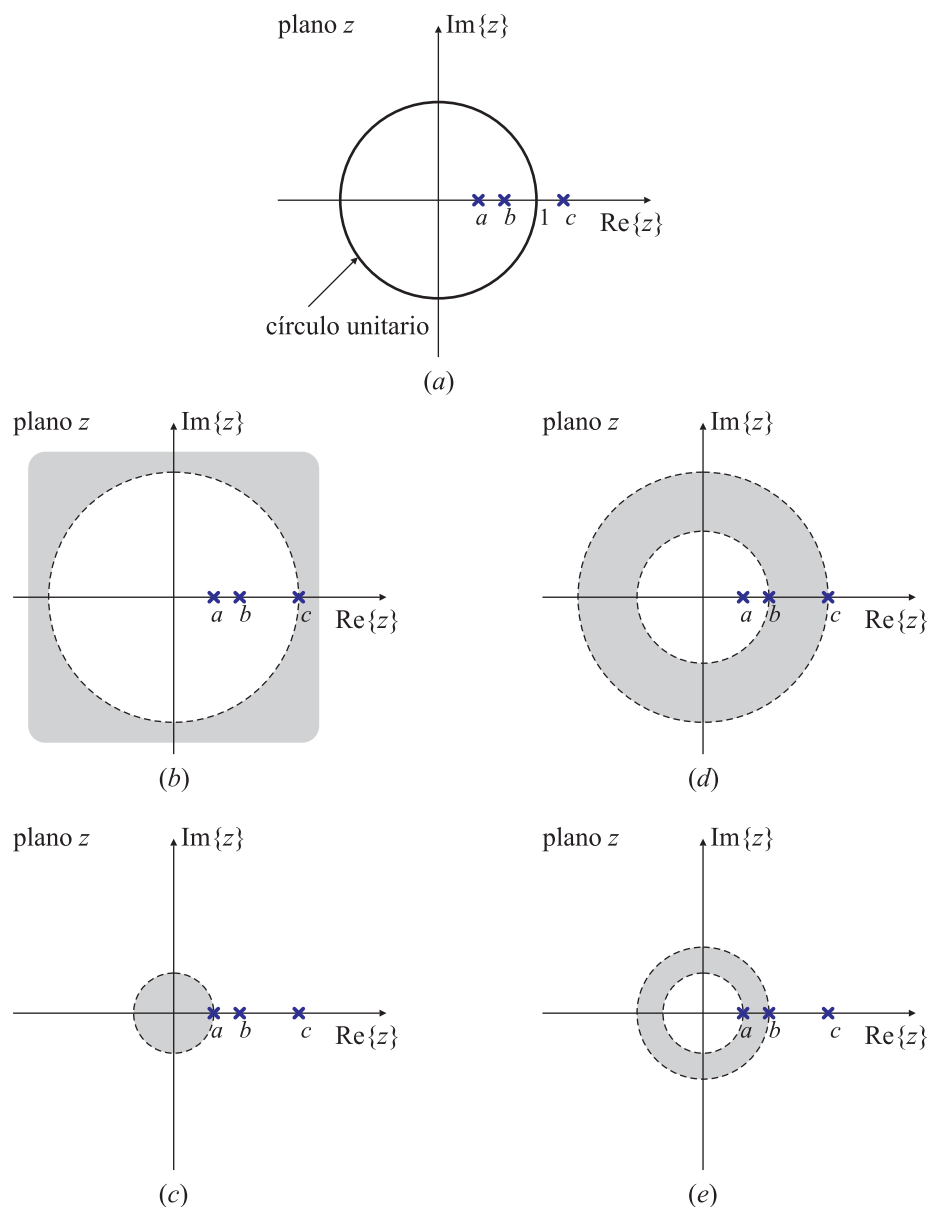
Como  $p_1$  es el polo de menor magnitud, la sucesión  $x[n]r^{-n}$  es absolutamente convergente si

$$|r| < |p_1|. \quad (6.20)$$

En otras palabras, la sucesión converge para todos los puntos en el plano complejo cuyo módulo es menor que el módulo del polo de menor módulo: el interior de un disco de radio  $r_e = |p_1|$ , como se muestra en la Fig. 6.10(i). Si la sucesión tiene algunas muestras no nulas para  $n > 0$  (es decir, si  $N_2 > 0$ , como se muestra en la Fig. 6.10(c), entonces la sucesión no converge en  $z = 0$ . En este caso, la RdC es un anillo, cuyo radio interno es cero,  $r_i = 0$  y el radio externo es igual al módulo del polo de menor módulo,  $r_e = |p_1|$ , como se muestra en la Fig. 6.10(h).

En el caso de las sucesiones biláteras, como la representada en la Fig. 6.10(e), la sucesión exponencial de “peso”  $r^{-n}$  tiene que estar balanceada, ya que si decae muy rápidamente para los  $n$  positivos, crece rápidamente para los  $n$  negativos, y viceversa. Para sucesiones biláteras algunos de los polos contribuyen para  $n > 0$  y el resto para  $n < 0$ . La región de convergencia es un anillo cuyo radio interior  $r_i$  está fijado por el polo de mayor módulo que contribuye para las sucesiones con  $n > 0$  y el radio exterior  $r_e$  queda determinado por el módulo del polo de menor módulo asociado a las sucesiones con  $n < 0$ , como se muestra en la Fig. 6.10(j).

La propiedad 8 es más difícil de probar formalmente, pero se puede deducir, al menos intuitivamente, de los análisis de las propiedades 4 a 7. Cualquier sucesión bilátera infinita puede escribirse como la suma de una sucesión “derecha” (por ejemplo, para  $n \geq 0$ ) y una

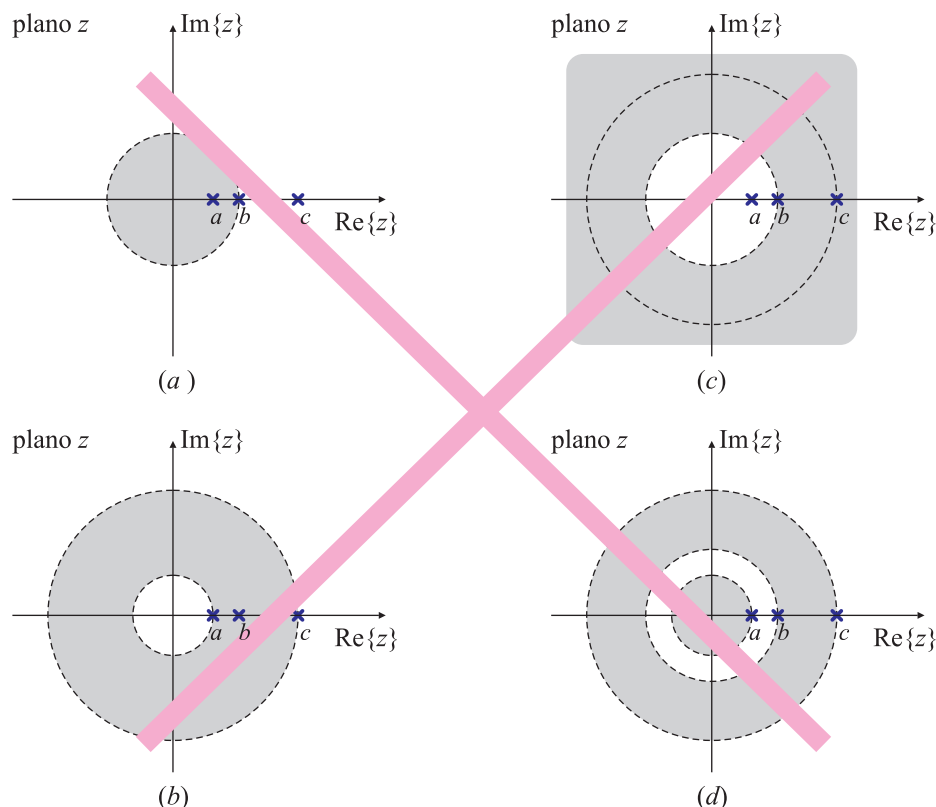


**Fig. 6.11.** Ejemplo de cuatro transformadas  $z$  con el mismo patrón de polos y ceros (a), mostrando las cuatro posibles RdC, correspondientes a: una sucesión derecha (b), una sucesión izquierda (c) y a sucesiones biláteras (d)-(e).

sucesión formada por el resto de las muestras. La sucesión de la derecha tendrá una RdC  $|r| > |p_N|$ , como indica la ecuación (6.19), y la RdC de la otra sucesión es  $|r| < |p_1|$ , como se muestra en la ecuación (6.20). La RdC de la sucesión completa debe estar contenida en la intersección de estas dos regiones. Si esa intersección no es vacía, será una región anular de la forma

$$r_i < |z| < r_e$$

Existe la posibilidad que las RdC de las sucesiones no se solapen, como muestra el Ejemplo 6.6, y entonces, para esta sucesión no existe una transformada  $z$ .



**Fig. 6.12.** Ejemplo de cuatro regiones de convergencia “imposibles”, porque contienen polos dentro de la RdC (a), (b), (c), y porque la RdC no es una región conectada (d).

Tal como muestran los Ejemplos 6.1 y 6.2, la función racional o el diagrama de polos y ceros no caracteriza completamente la transformada  $z$  de la sucesión: la RdC siempre debe especificarse. Las propiedades estudiadas en esta sección limitan la cantidad de RdC que pueden asociarse a un patrón de polos y ceros. Por ejemplo, la Fig. 6.11(a) muestra un patrón de polos y ceros. De las propiedades 1, 3 y 8, sólo hay cuatro posibles regiones de convergencia:

- Región 1:  $c < |z|$
- Región 2:  $|z| < a$
- Región 3:  $a < |z| < b$
- Región 4:  $b < |z| < c$

que se representan en la Fig. 6.11(b), (c), (d) y (e), respectivamente. Cada una de estas regiones está asociada a una sucesión diferente. La Fig. 6.11(b) es la RdC de una sucesión derecha, la Fig. 6.11(c) la de una sucesión izquierda, y las Figs. 6.11(d)-(e) a dos sucesiones biláteras distintas. Si se supone que el círculo unitario queda comprendido entre los polos en  $z = b$  y en  $z = c$ , la única sucesión que tiene una transformada de Fourier es la que tiene la región de convergencia indicada en la Fig. 6.11(e), porque esa región contiene al círculo unitario.

En la Fig. 6.12 se muestran cuatro regiones de convergencia “imposibles”: las Figs. 6.12(a) a (c) no son posibles porque tienen un polo dentro de la RdC, y la Fig. 6.12(d) no es posible porque no es una región conectada.

Para cada una de las regiones de convergencia “correctas” es sencillo encontrar las sucesiones asociadas. Para ejemplificar con un poco más de detalle, supongamos que la transformada  $z$  está dada por

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - az^{-1}} + \frac{A_2}{1 - bz^{-1}} + \frac{A_3}{1 - cz^{-1}}. \quad (6.21)$$

donde se supone que  $0 < a < b < c$ . Esta transformada tiene los mismos polos que los mostrados en la Fig. 6.11(a); los ceros no se grafican porque dependen de los valores de  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ , y no son relevantes para encontrar las regiones de convergencia.

Para calcular las sucesiones asociadas a cada polo es conveniente recordar los pares transformados encontrados en los Ejemplos 6.1 y 6.2 y listados también en la Tabla 6.1, y estos son:

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|, \quad (6.22)$$

$$-a^n u[-n - 1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|. \quad (6.23)$$

Las sucesiones correspondientes a cada región de convergencia se calculan de esta manera.

- **Región 1:**  $|z| > c$ . Esta región de convergencia es el exterior de un círculo de radio  $c$  para los tres polos de (6.21). Por lo tanto cada uno de ellos corresponde a una sucesión derecha, como indica (6.22). En particular, la RdC para el polo en  $z = a$  es  $|z| > a$ , y para el polo en  $z = b$  es  $|z| > b$ . Entonces la RdC  $|z| > c$  es común a las tres. En consecuencia,

$$x[n] = A_1 a^n u[n] + A_2 b^n u[n] + A_3 c^n u[n].$$

- **Región 2:**  $|z| < a$ . Esta región de convergencia es el interior de un círculo de radio  $a$  para los tres polos de la transformada  $X(z)$  dada por (6.21), y por lo tanto cada uno de los polos corresponde a una sucesión izquierda, según (6.23). Por ejemplo, para el polo en  $z = b$ , que converge en la RdC  $|z| < b$ , naturalmente converge en la región  $|z| < a$  porque ésta está contenida en  $|z| < b$ . Lo mismo ocurre para el polo en  $z = c$ . Por lo tanto, para esta región,

$$x[n] = -A_1 a^n u[-n - 1] - A_2 b^n u[-n - 1] - A_3 c^n u[-n - 1].$$

- **Región 3:**  $a < |z| < b$ . Esta región de convergencia es un anillo de radio interno  $r_i = a$  y radio externo  $r_e = b$ . Esta región de convergencia es el exterior de un círculo para el polo en  $z = a$ , pero el interior de un círculo para los polos en  $z = b$  y en  $z = c$ . En otras palabras, la región de convergencia  $a < |z| < b$  está contenida en la intersección de las regiones  $|z| > a$  (el exterior de un círculo),  $|z| < b$  y  $|z| < c$  (interiores de círculos de radio  $r_e = b$  y  $r_e = c$ , respectivamente). Por lo tanto el polo en  $z = a$  se asocia a una sucesión derecha, según (6.22), y los polos en  $z = b$  y en  $z = c$  se asocian a sucesiones izquierdas, de acuerdo con (6.23). Entonces, para esta RdC la sucesión correspondiente es

$$x[n] = A_1 a^n u[n] - A_2 b^n u[-n - 1] - A_3 c^n u[-n - 1].$$

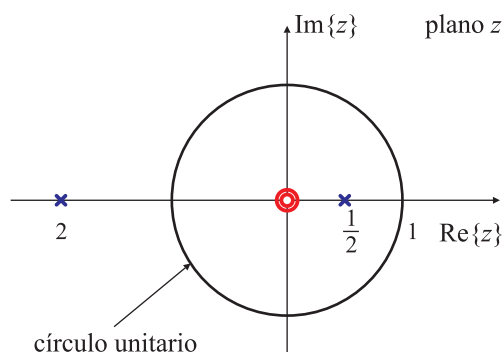


Fig. 6.13. Diagrama de polos y ceros para la función de sistema del Ejemplo 6.9.

- **Región 4:**  $b < |z| < c$ . Esta región de convergencia es un anillo de radio interno  $r_i = b$  y radio externo  $r_e = c$  y está contenida en la intersección de las regiones  $|z| > a$ ,  $|z| > b$  y  $|z| < c$ . Por lo tanto, las sucesiones asociadas a los polos  $z = a$  y  $z = b$  son derechas, y la asociada al polo en  $z = c$  es izquierda. Por lo tanto, la sucesión asociada a esta región de convergencia es

$$x[n] = A_1 a^n u[n] + A_2 b^n u[n] - A_3 c^n u[-n - 1].$$

Cuando se representa una sucesión por medio de su transformada  $z$  es usual expresar la región de convergencia a partir de una propiedad “temporal” de la sucesión como se muestra en el siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 6.9. Causalidad, estabilidad y la RdC

Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva  $h[n]$ , cuya transformada  $z$   $H(z)$  tiene el diagrama de polos y ceros que se muestra en la Fig.6.13. Hay tres regiones de convergencia posible para esta distribución de polos y ceros:

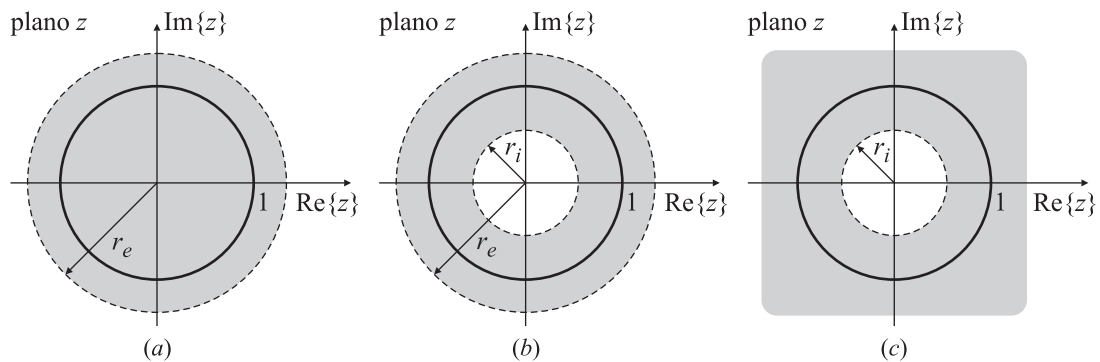
$$\begin{aligned} \text{Región 1: } & 2 < |z|, \\ \text{Región 3: } & \frac{1}{2} < |z| < 2, \\ \text{Región 3: } & |z| < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si se conoce que el sistema es *estable*, es decir, que la sucesión  $h[n]$  es absolutamente sumable, y que por lo tanto tiene una TFTD  $H(e^{j\omega})$ , entonces la RdC tiene que contener al círculo unitario. Por lo tanto la estabilidad del sistema y las propiedades 1 a 8 implican que la región de convergencia de ese sistema tiene que ser la Región 2:  $1/2 < |z| < 2$ . Como la región es un anillo, las propiedades muestran que  $h[n]$  tiene que ser una sucesión bilátera, y por lo tanto, el sistema *no es causal*.

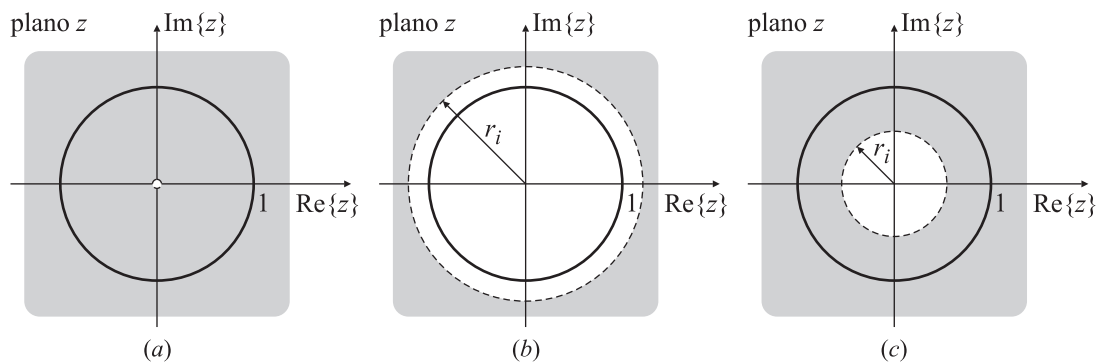
Si se conoce que el sistema es *causal*, esto significa que  $h[n] = 0$  para  $n < 0$ , y por lo tanto es una sucesión *derecha*. Entonces de acuerdo a la propiedad 5, la región de convergencia tiene que ser el exterior de un círculo. La única región compatible con este requisito es la Región 1,  $|z| > 2$ . Este sistema no es estable, porque la región de convergencia no contiene la círculo unitario. Para este patrón de polos y ceros, no ha ningún sistema que sea simultáneamente causal y estable.  $\square$

Los resultados del ejemplo anterior son bien importantes:





**Fig. 6.14.** Tres posibles regiones de convergencia para sucesiones estables:  $|z| < r_e$  (a);  $r_i < |z| < r_e$  (b);  $r_i < |z|$  (c).



**Fig. 6.15.** Tres posibles regiones de convergencia para sucesiones causales:  $|z| > 1$  (a);  $r_i < |z| < r_e$  con  $r_i > 1$  (b);  $r_i < |z|$  con  $r_i < 1$  (c).

- una sucesión  $x[n]$  es **estable** si la RdC de su transformada  $z X(z)$  contiene al círculo unitario. Tres posibles regiones de convergencia de sucesiones estables se muestran en la Fig. 6.14.
- una sucesión  $x[n]$  es **causal** si la RdC de su transformada  $z X(z)$  es el exterior de un círculo. Tres posibles regiones de convergencia de sucesiones causales se muestran en la Fig. 6.15.

Observando las Figs. 6.14(c) y 6.15(c), se observa que para que una sucesión sea simultáneamente causal y estable, la región de convergencia debe ser el exterior de un círculo (para que sea una sucesión derecha) de radio menor que uno (para que la RdC contenga el círculo unitario). De acuerdo a la propiedad 5, esto significa que

- para que una sucesión sea **causal** y **estable** todos los polos de su transformada  $z$  deben estar contenidos dentro del círculo unitario.

## 6.4. Cálculos de transformadas inversas

Una de las principales aplicaciones de la transformada  $z$  es en el análisis de sistemas lineales discretos. Frecuentemente este análisis involucra el encontrar transformadas  $z$

de las sucesiones, y luego de alguna manipulación de las expresiones algebraicas, calcular la transformada  $z$  inversa. Existen varias maneras, formales e informales, de calcular la transformada inversa dada una expresión algebraica y su región de convergencia. El procedimiento formal se basa en la integral de Cauchy (Churchill y Brown, 1990). Sin embargo, para los tipos de sucesiones y transformadas  $z$  que se encuentran en el análisis de sistemas discretos lineales e invariantes al desplazamiento, bastan (y en general, son preferibles) métodos menos formales. En las siguientes secciones se presentan algunos de ellos: el método de inspección, el de fracciones parciales, y el de la expansión en series de potencia

#### 6.4.1. Método de inspección

El método de inspección consiste en familiarizarse con ciertos pares transformados, y tratar de reorganizar la expresión de la transformada  $z$  para ponerlos en evidencia. Por ejemplo, en la Sección 6.2, en los Ejemplos 6.1 y 6.2, se evaluaron las transformadas  $z$  de sucesiones de la forma  $x[n] = a^n u[n]$ , donde  $a$  puede ser real o complejo. Las sucesiones de este tipo aparecen frecuentemente, y por ellos es particularmente útil recordar el par transformado

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (6.24)$$

Si se necesita encontrar la antitransformada de

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad (6.25)$$

y se recuerda el par transformado indicado en (6.24), se puede reconocer “por inspección” que la sucesión asociada es  $x[n] = (1/2)^n u[n]$ . Si la región de convergencia asociada a  $X(z)$  en la ecuación (6.25) hubiese sido  $|z| < 1/2$ , el par transformado número 6 de la Tabla 6.1 (o el Ejemplo 6.2) indica que  $x[n] = -(1/2)^n u[-n - 1]$ .

Las tablas de transformadas  $z$ , como la Tabla 6.1, son de gran ayuda cuando se aplica el método de inspección. Si la tabla es extensa, es posible expresar la transformada  $z$  a invertir como una suma de términos cuya inversa figure en la tabla.

#### 6.4.2. Expansión en fracciones parciales

Como se mencionó más arriba, las transformadas inversas se pueden calcular por inspección si se reconocen expresiones características, o si se cuenta con una tabla donde figure la transformada  $z$  que se quiere antitransformar. Algunas veces  $X(z)$  puede no figurar explícitamente en la tabla, pero puede obtenerse una forma alternativa como una suma de términos simples, cada uno de los cuales está tabulado. Este es el caso de cualquier función racional, ya que se puede obtener una expansión en fracciones parciales e identificar fácilmente las sucesiones asociadas a los términos individuales.

Para obtener una expansión en fracciones parciales, se supone que  $X(z)$  está expresada como un cociente de polinomios en  $z^{-1}$

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (6.26)$$

Este tipo de transformadas aparecen frecuentemente en el estudio de sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo. Una expresión equivalente es

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}. \quad (6.27)$$

La ecuación (6.27) muestra explícitamente que para tales funciones habrá  $M$  ceros y  $N$  polos en el plano  $z$ , que no están ubicados en el origen. Además, habrá  $M - N$  polos en  $z = 0$  si  $M > N$  o  $N - M$  ceros en  $z = 0$  si  $N > M$ . En otras palabras, las transformadas  $z$  de expresiones de la forma (6.26) siempre tienen la misma cantidad de polos y ceros en el plano  $z$ , y no hay polos o ceros en  $z = \infty$ .

Para obtener la expansión en fracciones parciales de la expresión de  $X(z)$  en la ecuación (6.26) es más conveniente notar que  $X(z)$  también puede expresarse como

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}, \quad (6.28)$$

donde los  $c_k, p_k$  son los ceros y polos no nulos, respectivamente, de  $X(z)$ . Si  $M < N$ , y los polos son de primer orden, entonces  $X(z)$  puede escribirse como

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}. \quad (6.29)$$

Evidentemente, el denominador común de las fracciones en (6.29) es el mismo denominador de la ecuación (6.28). Multiplicando ambos miembros de (6.29) por  $(1 - p_k z^{-1})$  y evaluando en  $z = p_k$  se encuentra que los coeficientes  $A_k$  pueden calcularse como

$$A_k = X(z)(1 - p_k z^{-1})|_{z=p_k}. \quad (6.30)$$

#### EJEMPLO 6.10. Transformada $z$ de segundo orden

Sea  $x[n]$  una sucesión con transformada  $z$

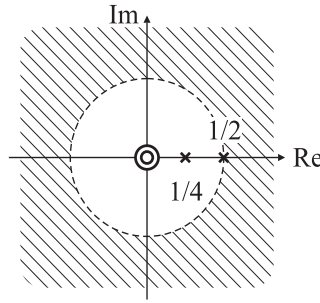
$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

El diagrama de polos y ceros de  $X(z)$  se representa en la Fig. 6.16: la transformada tiene un par de ceros en el origen, y polos en  $z_1 = 1/4$  y en  $z_2 = 1/2$ , como se pone en evidencia al escribir  $X(z)$  en la forma de la ecuación (6.27)

$$X(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{4})(z - \frac{1}{2})}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

De la forma de la región de convergencia y de la propiedad 5 de la Sección 6.3 se deduce que  $x[n]$  es una sucesión derecha. Como los polos son de primer orden,  $X(z)$  se puede expresar en la forma de la ecuación (6.29)

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}.$$



**Fig. 6.16.** Diagrama de polos y ceros y región de convergencia para la transformada  $Z$  del Ejemplo 6.10.

De la ecuación (6.30),

$$\begin{aligned} A_1 &= X(z)(1 - \tfrac{1}{4}z^{-1})\Big|_{z=1/4} = \frac{1}{(1 - \tfrac{1}{2}z^{-1})}\Big|_{z=1/4} = \frac{1}{1 - \tfrac{1}{2}4} = -1, \\ A_2 &= X(z)(1 - \tfrac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z=1/2} = \frac{1}{(1 - \tfrac{1}{4}z^{-1})}\Big|_{z=1/2} = \frac{1}{1 - \tfrac{1}{4}2} = 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X(z) = \frac{-1}{1 - \tfrac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \tfrac{1}{2}z^{-1}}.$$

Como la sucesión es derecha, la región de convergencia de cada término se extiende por fuera del polo de mayor módulo. De la Tabla 6.1 y de la linealidad de la transformada  $z$  se tiene que

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \quad \square$$

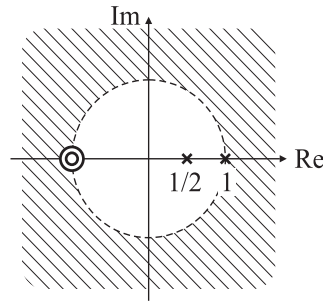
El numerador que resultaría de sumar los términos de la ecuación (6.29) es un polinomio cuyo mayor grado posible es  $N - 1$  en la variable  $z^{-1}$ . Si  $M \geq N$ , entonces debe agregarse un polinomio de orden  $M - N$  (en  $z^{-1}$ ) al miembro de la derecha de la ecuación (6.29). Entonces, para  $M \geq N$ , la expansión en fracciones parciales de  $X(z)$  toma la forma

$$X(z) = \sum_{r=1}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}. \quad (6.31)$$

Si  $X(z)$  es una función racional de la forma (6.26) con  $M \geq N$ , los términos  $B_r$  de la expresión (6.31) se calculan efectuando la división entre el numerador y el denominador de  $X(z)$ , concluyendo el proceso de la división cuando el grado del resto (en  $z^{-1}$ ) es menor que el grado del denominador. Los  $A_k$  se siguen calculando con la ecuación (6.30).

Si  $X(z)$  tiene polos múltiples y  $M \geq N$ , la ecuación (6.31) debe modificarse; en particular si  $X(z)$  tiene un polo de orden  $s$  en  $z = p_i$  y todos los demás polos son de primer orden, la forma corregida de la ecuación (6.31) es

$$X(z) = \sum_{r=1}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - p_i z^{-1})^m}. \quad (6.32)$$



**Fig. 6.17.** Diagrama de polos y ceros y región de convergencia para la transformada  $\mathcal{Z}$  del Ejemplo 6.11.

Los coeficientes  $A_k$  y  $B_r$  se calculan como se indicó anteriormente, y los coeficientes  $C_m$  se calculan usando la expresión:

$$C_m = \frac{1}{(s-m)!(-p_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} [(1-p_i w)^s X(w^{-1})] \right\} \Big|_{w=p_i^{-1}}. \quad (6.33)$$

La ecuación (6.32) es la forma más general de la expresión de expansión en fracciones parciales de una transformada  $z$  racional expresada como función de  $z^{-1}$  para  $M \geq N$  y para un polo  $p_i$  de orden  $s$ . Si ocurren varios polos múltiples, aparecerán términos como la tercera sumatoria de (6.32) por cada uno de ellos. Si no hay polos múltiples, (6.32) se reduce a (6.31). Si el orden del numerador es menor que el del denominador ( $M < N$ ) el término polinomial desaparece de las ecuaciones (6.31) y (6.32).

Resta determinar cuál es la sucesión correspondiente a una transformada  $z$  racional dada. A tal fin se supone que  $X(z)$  tiene sólo polos de primer orden, de manera que la ecuación (6.31) es la forma general de la expansión en fracciones parciales. Para calcular  $x[n]$  se aprovecha la linealidad de la transformada  $z$ , de manera que se puede calcular la transformada inversa de cada término individual y luego sumarlos algebraicamente.

Los términos  $B_r z^{-r}$  corresponden a impulsos escalados y desplazados, esto es, términos de la forma  $B_r \delta[n-r]$ . Cada una de las fracciones parciales corresponden a sucesiones exponenciales. Para decidir si un término de la forma

$$\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}$$

corresponde a una sucesión  $p_k^n u[n]$  o  $-p_k^n u[-n-1]$ , se deben observar las propiedades de la región de convergencia que fueron discutidas en la Sección 6.3. Se observa entonces que si  $X(z)$  tiene sólo polos simples, y la región de convergencia es de la forma  $r_i < |z| < r_e$ , entonces un polo  $p_k$  corresponde a una sucesión exponencial derecha  $p_k^n u[n]$  si  $|p_k| < r_e$ , y corresponde a una sucesión exponencial izquierda  $-p_k^n u[-n-1]$  si  $|p_k| > r_e$ . La región de convergencia sirve para clasificar los polos; los polos múltiples también pueden dividirse según contribuyan a sucesiones izquierdas o derechas de la misma manera. El empleo de la región de convergencia en el cálculo de las transformadas  $z$  inversas a partir de la expansión en fracciones parciales se ilustra con los siguientes ejemplos.

**EJEMPLO 6.11. Transformada inversa usando fracciones parciales**

En este ejemplo, la transformada  $z$  tiene la forma indicada en la ecuación (6.31):

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1. \quad (6.34)$$

El diagrama de polos y ceros se representa en la Fig. 6.17. De la región de convergencia y de la Propiedad 5, de la Sección 6.3, es evidente que  $x[n]$  es una sucesión derecha.. Como el numerador y el denominador de la función transferencia son del mismo orden en  $z^{-1}$  (con  $M = N = 2$ ), y todos los polos son de primer orden, se puede expresar  $X(z)$  como

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - z^{-1})}.$$

La constante  $B_0$  se encuentra efectuando la división:

$$\begin{array}{r} z^{-2} + 2z^{-1} + 1 \\ z^{-2} - 3z^{-1} + 2 \\ \hline 5z^{-1} - 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ 2 \end{array} \right.$$

El cálculo no se continúa porque el resto es un grado menor (en la variable  $z^{-1}$ ) que el divisor. De modo que  $X(z)$  se puede expresar como

$$X(z) = 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (6.35)$$

Los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  pueden encontrarse aplicando la ecuación (6.30) a las expresiones (6.34) o (6.35) indistintamente. Utilizando (6.34) se obtiene

$$\begin{aligned} A_1 &= X(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \Big|_{z=1/2} = \left[ 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right] (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \Big|_{z=1/2} = -9, \\ A_2 &= X(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z=1} = \left[ 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right] (1 - z^{-1}) \Big|_{z=1} = 8. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X(z) = 2 + \frac{-9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}.$$

De la Tabla 6.1 se encuentra que, como la región de convergencia es  $|z| > 1$ ,

$$\begin{aligned} 2 &\xleftrightarrow{Z} 2\delta[n] \\ \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} &\xleftrightarrow{Z} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \\ \frac{1}{1 - z^{-1}} &\xleftrightarrow{Z} u[n]. \end{aligned}$$

Por la linealidad de la transformada  $z$ ,

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n] \quad \square$$

**EJEMPLO 6.12. Cálculo de antitransformadas**

Se debe calcular  $x[n]$  sabiendo que

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1.$$

Como el numerador y el denominador de la función de sistema tienen el mismo orden en  $z - 1$  se debe calcular el cociente:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4}z^{-2} - z^{-1} + 1 \\ \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{5}{4}z^{-1} + 1 \\ \hline \frac{1}{4}z^{-1} + 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{5}{4}z^{-1} + 1 \\ 1 \end{array}$$

de modo que

$$X(z) = 1 + \underbrace{\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}}_{\tilde{X}(z)} = 1 + \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - z^{-1})}. \quad (6.36)$$

Los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  se calculan por residuos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{X}(z)(1 - \frac{1}{4}z^{-1}) \Big|_{z=1/4} = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1 - z^{-1})} \Big|_{z=1/4} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{4})^{-1}} = -\frac{1}{3}, \\ A_2 &= \tilde{X}(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z=1} = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \Big|_{z=1} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Los residuos  $A_1, A_2$  de  $\tilde{X}(z)$  son los mismos que los de  $X(z)$ , como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} A_1 &= X(z)(1 - \frac{1}{4}z^{-1}) \Big|_{z=1/4} = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - z^{-1})} \Big|_{z=1/4} = \frac{(1 - 2)^2}{1 - (\frac{1}{4})^{-1}} = -\frac{1}{3}, \\ A_2 &= X(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z=1} = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \Big|_{z=1} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1 - z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1, \quad (6.37)$$

y de tablas se encuentra que

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{1}{3}u[-n - 1]. \quad (6.38)$$

**Observación:** Cuando el numerador y el denominador de la función de sistema tienen el mismo orden, es *imprescindible* efectuar el cociente entre el numerador y el denominador de  $X(z)$ . En caso contrario, no se obtiene el término “1” en la ecuación (6.36), y al descomponer  $X(z)$  en fracciones parciales se tiene

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1 - z^{-1})} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \tilde{X}(z). \quad (6.39)$$

Es evidente que  $\tilde{X}(z) \neq X(z)$ , y por lo tanto, la expresión en fracciones parciales del miembro izquierdo de ecuación (6.39) es incorrecta.  $\square$

Los mismos resultados puede obtenerse si la expresión racional  $X(z)$  se expresa como un cociente de polinomios en  $z$  en lugar de  $z^{-1}$ . En este caso, el lugar de factores de la forma  $(1 - az^{-1})$  se hubieran considerado factores del tipo  $(z - a)$ , lo que hubiera conducido a un conjunto de ecuaciones similares a las (6.31)-(6.33) que serían convenientes para utilizar con una tabla de transformadas  $\mathcal{Z}$  expresadas en función de  $z$  y no de  $z^{-1}$ . Ya que la Tabla 6.1 está expresada en función de  $z^{-1}$ , este enfoque es más útil. De todas maneras, estas alternativas se exploran en los Ejemplos 6.13 y 6.14.

### EJEMPLO 6.13. Antitransformando expresiones en “ $z$ ”

La sucesión  $x[n]$  también puede obtenerse a partir de  $X(z)$  trabajando con polinomios en  $z$  y no en  $z^{-1}$ . En este caso,

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{z^2 - z + \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{(z - \frac{1}{4})(z - 1)}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1.$$

Nuevamente, como el numerador y el denominador de  $X(z)$  tienen el mismo orden, es necesario calcular el cociente:

$$\begin{array}{r} z^2 - z + \frac{1}{4} \\ z^2 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4}z + 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} z^2 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4} \\ 1 \\ \hline \frac{1}{4}z + 0 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$X(z) = 1 + \underbrace{\frac{\frac{1}{4}z}{(z - \frac{1}{4})(z - 1)}}_{\tilde{X}(z)} = 1 + \frac{A_1}{(z - \frac{1}{4})} + \frac{A_2}{(z - 1)},$$

donde los residuos  $A_1, A_2$  se pueden calcular a partir de  $\tilde{X}(z)$ , como

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{X}(z)(z - \frac{1}{4}) \Big|_{z=1/4} = \frac{\frac{1}{4}z}{z - 1} \Big|_{z=1/4} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{12}, \\ A_2 &= \tilde{X}(z)(z - 1) \Big|_{z=1} = \frac{\frac{1}{4}z}{z - \frac{1}{4}} \Big|_{z=1} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

o bien usando  $X(z)$ , como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} A_1 &= X(z)(z - \frac{1}{4}) \Big|_{z=1/4} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{(z - 1)} \Big|_{z=1/4} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{12}, \\ A_2 &= X(z)(z - 1) \Big|_{z=1} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{(z - \frac{1}{4})} \Big|_{z=1} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

De modo que

$$X(z) = 1 - \frac{1}{12} \frac{1}{(z - \frac{1}{4})} + \frac{1}{3} \frac{1}{(z - 1)}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1. \quad (6.40)$$

El problema ahora está en antitransformar  $X(z)$ , ya que los pares transformados que se conocen son

$$\begin{aligned} x[n] = a^n u[n] &\quad \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|, \\ h[n] = -a^n u[-n - 1] &\quad \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \quad H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|. \end{aligned}$$



y al compara con (6.40) se observa que al menos falta una “ $z$ ” en el numerador. Esto se puede solucionar multiplicando numerador y denominador por  $z^{-1}$  para obtener

$$X(z) = 1 - \frac{1}{12} \frac{z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{1}{3} \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1. \quad (6.41)$$

Esta expresión se puede antitransformar fácilmente haciendo uso de la propiedad de desplazamiento:  $x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n_0} X(z)$ . Nuevamente, para el polo en  $z = 1/4$  la región de convergencia es el exterior de un círculo, y la respuesta temporal está asociada a una sucesión derecha:

$$\frac{z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} (\frac{1}{4})^{n-1} u[n-1].$$

Para el polo en  $z = 1$ , la región de convergencia es el interior de un círculo, y la respuesta temporal está asociada a una sucesión izquierda

$$\frac{1}{(1 - z^{-1})}, \quad |z| < 1 \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -u[-n-1].$$

Pero hay que prestar especial atención al desplazamiento, pues  $z^{-1}/(1 - z^{-1})$  equivale a deslazar la sucesión temporal una muestra *hacia la derecha* (es decir, reemplazar  $n$  por  $n - 1$ ):

$$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})}, \quad |z| < 1 \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -u[-(n-1) - 1] = -u[-n].$$

Por lo tanto, la antitransformada de (6.41) resulta

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{12} (\frac{1}{4})^{n-1} u[n-1] - \frac{1}{3} u[-n]. \quad (6.42)$$

La comparación de las ecuaciones (6.38) y (6.42) muestra que la expresión matemática de  $x[n]$  es distinta; sin embargo los valores numéricos de ambas sucesiones son iguales. Operando con los términos de (6.42), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} (\frac{1}{4})^{n-1} u[n-1] &= \frac{1}{3} \frac{1}{4} (\frac{1}{4})^{n-1} u[n-1] = \frac{1}{3} (\frac{1}{4})^n u[n-1] = \frac{1}{3} (\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{1}{3} \delta[n], \\ \frac{1}{3} u[-n] &= \frac{1}{3} \delta[n] + \frac{1}{3} u[-n-1]. \end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en (6.42) se encuentra que

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n] - \frac{1}{12} (\frac{1}{4})^{n-1} u[n-1] - \frac{1}{3} u[-n] \\ &= \delta[n] - (\frac{1}{3} (\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{1}{3} \delta[n]) - (\frac{1}{3} \delta[n] + \frac{1}{3} u[-n-1]) \\ &= \delta[n] - \frac{1}{3} (\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{1}{3} u[-n-1], \end{aligned}$$

que coincide con la ecuación (6.38). □

#### EJEMPLO 6.14. Otra manera de antitransformar expresiones en “ $z$ ”

Para evitar confusiones en el corrimiento hacia la derecha de las sucesiones izquierdas, cuando  $X(z)$  se expresa como un cociente de polinomios en  $z$  y no en  $z^{-1}$ , es conveniente expresar en fracciones parciales la función  $X(z)/z$ . Aunque de esta forma es necesario calcular un residuo más porque se adiciona un polo en el origen, en general se evita hacer el cociente y se simplifica el cálculo posterior, como se muestra a continuación. Utilizando la misma transformada  $z$  de los ejemplos previos,

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{(z - \frac{1}{4})(z - 1)}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1,$$

se tiene que

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{z(z - \frac{1}{4})(z - 1)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{4}} + \frac{A_3}{z - 1}.$$

Los residuos son

$$\begin{aligned} A_1 &= \left. \frac{X(z)}{z} \right|_{z=0} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{(z - \frac{1}{4})(z - 1)} \Big|_{z=0} = \frac{(-\frac{1}{2})^2}{(-\frac{1}{4})(-1)} = 1, \\ A_2 &= \left. \frac{X(z)}{z} (z - \frac{1}{4}) \right|_{z=1/4} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{z(z - 1)} \Big|_{z=1/4} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4})} = -\frac{1}{3}, \\ A_3 &= \left. \frac{X(z)}{z} (z - 1) \right|_{z=1} = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{z(z - \frac{1}{4})} \Big|_{z=1} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{1(1 - \frac{1}{4})} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z} - \frac{\frac{1}{3}}{z - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{3}}{z - 1}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1.$$

Multiplicando ambos miembros por  $z$ , resulta

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - 1}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1,$$

que también puede escribirse como

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1.$$

Esta transformada  $z$  coincide con la expresión (6.37) del Ejemplo 6.12, y la antitransformada es directa teniendo en cuenta la forma de la región de convergencia para cada uno de los polos. Se tiene entonces que

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{3} u[-n - 1], \quad (6.43)$$

que coincide con las sucesiones calculadas en los Ejemplos 6.12 y 6.13.  $\square$

#### EJEMPLO 6.15. Una cuarta forma de calcular la transformada $z$ inversa

Si la transformada  $z$  tiene una expresión sencilla, la aplicación de propiedades puede simplificar el cálculo de las sucesiones, aunque frecuentemente resultan expresiones no tan compactas de  $x[n]$  como las obtenidas en los Ejemplos 6.12 a 6.14. Partiendo de la misma transformada  $z$  que en los ejemplos anteriores, pero expresada como cociente de polinomios en  $z^{-1}$ ,

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1,$$

se puede escribir

$$X(z) = (1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2 X_1(z) = (1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}) X_1(z), \quad (6.44)$$

donde

$$X_1(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1.$$

Esta transformada auxiliar se puede expresar en fracciones parciales (se omiten los cálculos por brevedad) como

$$X_1(z) = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{3} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1,$$

cuya antitransformada es

$$x_1[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}u[-n-1].$$

Con esta sucesión, y teniendo en cuenta de la ecuación (6.44) que

$$x[n] = x_1[n] - x_1[n-1] + \frac{1}{4}x_1[n-2],$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} x[n] &= \left\{ -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}u[-n-1] \right\} \\ &\quad - \left\{ -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] - \frac{4}{3}u[-(n-1)-1] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\{ -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2] - \frac{4}{3}u[-(n-2)-1] \right\}. \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}u[-n-1] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] + \frac{4}{3}u[-n] \\ &\quad - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2] - \frac{1}{3}u[-n+1] \end{aligned} \quad (6.45)$$

Esta expresión es más complicada que las expresiones (6.38), (6.42) y (6.43) obtenidas en los Ejemplos 6.12 a 6.14, respectivamente, pero puede simplificarse notando que el tercer término se puede escribir como

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] = \frac{1}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2],$$

y por lo tanto la suma del primer, tercer y quinto término queda

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\delta[n-1] \quad (6.46)$$

El segundo, el cuarto y el último término pueden escribirse como

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3}u[-n-1] + \frac{4}{3}u[-n] - \frac{1}{3}u[-n+1] &= \frac{4}{3}(-u[-n-1] + u[-n]) - \frac{1}{3}u[-n+1] \\ &= \frac{4}{3}\delta[n] - \frac{1}{3}u[-n+1] \\ &= \frac{4}{3}\delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1] - \frac{1}{3}u[-n-1] \\ &= \delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1] - \frac{1}{3}u[-n-1]. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (6.46) y (6.47), la expresión (6.45) resulta

$$\begin{aligned} x[n] &= \left( -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\delta[n-1] \right) + \left( \delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1] - \frac{1}{3}u[-n-1] \right) \\ &= \delta[n] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}u[-n-1], \end{aligned}$$

que coincide con las expresiones (6.38), (6.42) y (6.43) de los Ejemplos previos.  $\square$

En la Sección 6.5 se discutirán e ilustrarán una serie de propiedades de la transformada  $z$  que, en combinación con el método de las fracciones parciales permiten determinar la sucesión asociada a una función racional algebraica en  $z$  y su región de convergencia aún cuando  $X(z)$  no esté dada exactamente en la forma indicada en la ecuación (6.28).

#### 6.4.2.1. Antitransformada de expresiones con polos complejos conjugados

De acuerdo a la expresión (6.31), la transformada  $z$  de una sucesión que al menos tenga un par de polos complejos conjugados, por ejemplo en  $z = p = \rho e^{j\theta}$  y en  $z = p^* = \rho e^{-j\theta}$ , puede expresarse como

$$X(z) = \sum_{r=1}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=2}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{A_0}{1 - p z^{-1}} + \frac{A_1}{1 - p^* z^{-1}}$$

donde los dos últimos términos representan las fracciones parciales correspondientes a los polos complejos conjugados. En lo que sigue se muestra que  $A_1 = A_0^*$ . Para simplificar la notación es conveniente expresar  $X(z)$  como

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{\tilde{Q}(z)} \frac{1}{(1 - pz^{-1})(1 - p^*z^{-1})}.$$

donde  $P(z)$ ,  $Q(z)$  y  $\tilde{Q}(z)$  son polinomios con coeficientes reales. Por lo tanto, según el cálculo de residuos,

$$\begin{aligned} A_0 &= X(z)(1 - pz^{-1})|_{z=p} = \frac{P(p)}{\tilde{Q}(p)} \frac{1}{(1 - p^*p^{-1})}, \\ A_1 &= X(z)(1 - pz^{-1})|_{z=p^*} = \frac{P(p^*)}{\tilde{Q}(p^*)} \frac{1}{[1 - p(p^*)^{-1}]} = \left[ \frac{P(p)}{\tilde{Q}(p)} \right]^* \frac{1}{[1 - (p^*p^{-1})^*]} = A_0^*. \end{aligned}$$

ya que  $P(p^*) = [P(p)]^*$ ,  $\tilde{Q}(p^*) = [\tilde{Q}(p)]^*$  porque tienen coeficientes reales.

La transformada del par de polos complejos conjugados se puede escribir entonces como

$$\frac{A}{1 - pz^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p^*z^{-1}} = \frac{A - Ap^*z^{-1} + A^* - A^*pz^{-1}}{1 - (p + p^*)z^{-1} + pp^*z^{-2}} = \frac{2 \operatorname{Re}\{A\} - 2 \operatorname{Re}\{Ap^*\}z^{-1}}{1 - 2 \operatorname{Re}\{p\}z^{-1} + |p|^2z^{-2}}. \quad (6.48)$$

Por otra parte, si  $A = \alpha e^{j\phi}$ , y  $p = \rho e^{j\theta}$ , la antitransformada para una región de convergencia  $|z| > |p|$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} Ap^n u[n] + A^*(p^*)^n u[n] &= \alpha e^{j\phi} (\rho e^{j\theta})^n u[n] + \alpha e^{-j\phi} (\rho e^{-j\theta})^n u[n] \\ &= \alpha \rho^n [e^{j(n\theta + \phi)} + e^{-j(n\theta + \phi)}] u[n] \\ &= 2\rho^n \cos(\theta n + \phi) u[n] \\ &= 2|A||p|^n \cos(\arg\{p\}n + \arg\{A\}) u[n]. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Por lo tanto, de acuerdo a las expresiones (6.48) y (6.49) se puede establecer el par transformado

$$2\alpha \rho^n \cos(\theta n + \phi) u[n] \iff 2\alpha \frac{\cos \phi - \rho \cos(\phi - \theta) z^{-1}}{1 - 2\rho \cos \theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}, \quad |z| > \rho. \quad (6.50)$$

La aplicación de este par transformado se muestra en los siguientes ejemplos.

#### EJEMPLO 6.16. Antitransformada de polos complejos conjugados

Se desea calcular la antitransformada de

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}. \quad (6.51)$$

Esta función tiene un par de ceros en el origen, y un par de polos complejos conjugados en

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} e^{\pm j\pi/6} = \frac{1}{4} \pm j \frac{\sqrt{3}}{4},$$

de manera que  $\rho = 1/2$ ,  $\theta = \pi/6$ . Por lo tanto,  $X(z)$  puede escribirse como

$$X(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{j\pi/6}z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/6}z^{-1}},$$

donde  $A$ ,  $A^*$  se calculan aplicando residuos:

$$A = X(z)(1 - \frac{1}{2}e^{j\pi/6}z^{-1}) \Big|_{z=\frac{1}{2}e^{j\pi/6}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/6}z^{-1}} \Big|_{z=\frac{1}{2}e^{j\pi/6}} = \frac{1}{1 - e^{-j\pi/3}} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1e^{-j\pi/3}$$

de modo que  $\alpha = 1$ ,  $\phi = -\pi/3$ . Aplicando (6.49) se encuentra que

$$x[n] = 2\alpha\rho^n \cos(\theta n + \phi) u[n] = 2(\frac{1}{2})^n \cos(\frac{\pi}{6}n - \frac{\pi}{3}) u[n]. \quad (6.52)$$

La expresión (6.51) también se puede antitransformar sin calcular residuos, comparándola con (6.50). En este caso, como en el numerador de (6.51) no aparece  $z^{-1}$ , y  $\rho \neq 0$ , debe ser  $\cos(\phi - \theta) = 0$ , de donde

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

esto es,  $\phi = \frac{2}{3}\pi + \pi k$ . El numerador de (6.50) es  $2\alpha \cos \phi$ , y el de (6.51) es la unidad, de modo que  $2\alpha \cos \phi = 1$  de donde

$$\alpha = \frac{1}{2 \cos \phi}.$$

Como  $\alpha \geq 0$  (porque es el módulo del residuo  $A$ ) se debe elegir un valor de  $\phi = \frac{2}{3}\pi + \pi k$  compatible, esto es, tal que  $\cos \phi \geq 0$ , lo que ocurre para  $k$  impar. Para  $k = 1$ ,  $\phi = 5\pi/6$ , y entonces  $\cos \phi = 1/2$ , de donde  $\alpha = 1$ . Finalmente, de la expresión (6.50) se encuentra que

$$x[n] = 2\alpha\rho^n \cos(\theta n + \phi) u[n] = 2(\frac{1}{2})^n \cos(\frac{\pi}{6}n + \frac{5\pi}{6}) u[n]. \quad (6.53)$$

Aunque las expresiones (6.52) y (6.53) son matemáticamente diferentes, representan la misma sucesión temporal porque el ángulo  $(-\pi/3)$  es congruente con  $5\pi/3$ .  $\square$

#### EJEMPLO 6.17. Antitransformada de una expresión con polos complejos conjugados

Se desea calcular la antitransformada de

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1} + z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}}{1 - (\frac{1}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2})z^{-1} + (\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2})z^{-2} - \frac{1}{3}z^{-3}} = \frac{(1 + z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{9}{4}z^{-2})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

Esta expresión tiene ceros en  $c_{1,2} = \pm j$  y  $c_3 = -1/4$ , y polos en  $z_{1,2} = \frac{3}{2}e^{\pm j\pi/4}$  y en  $z_3 = 1/3$ , de modo que también puede escribirse como

$$X(z) = \frac{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - jz^{-1})(1 + jz^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})}.$$

Como el numerador y el denominador tienen igual orden, para calcular la antitransformada es necesario efectuar el cociente entre ambos. Se encuentra que

$$X(z) = -\frac{1}{3} + \frac{\frac{4}{3} + (\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{2}}{2})z^{-1} + (\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{2}}{6})z^{-2}}{(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

que puede escribirse como

$$X(z) = -\frac{1}{3} + \frac{A_0}{(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})} + \frac{A_1}{(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Los coeficientes  $A_0$ ,  $A_1 = A_0^*$  y  $A_2$  se calculan por residuos:

$$A_0 = X(z)(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1}) \Big|_{z=\frac{3}{2}e^{j\pi/4}} = \frac{-3}{2132} \left[ (212 + 203\sqrt{2}) - j(514 + 105\sqrt{2}) \right] = \sqrt{\frac{873}{1066} + \frac{66\sqrt{2}}{164}} e^{j\beta}$$

$$A_1 = A_0^*,$$

$$A_2 = X(z)(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) \Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{70}{85 - 18\sqrt{2}}$$

donde  $\beta = -\tan^{-1}[(514 + 105\sqrt{2})/(212 + 203\sqrt{2})]$ . Expresiones aproximadas para los residuos son

$$\begin{aligned} A_0 &\approx -0,702278 - j0,932213 \approx 1,16714e^{-j2,21643}, \\ A_1 &\approx -0,702278 + j0,932213 \approx 1,16714e^{+j2,21643}, \\ A_2 &\approx 1,1756, \end{aligned}$$

con  $\alpha = 1,16714$  y  $\phi = -2,21643$ . Por lo tanto,

$$X(z) = -\frac{1}{3} + \frac{1,16714e^{-j2,21643}}{(1 - \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})} + \frac{1,16714e^{j2,21643}}{(1 - \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})} + \frac{1,1756}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Las posibles regiones de convergencia y las antitransformadas correspondientes son

- Para  $|z| < 1$ ,

$$x[n] = -\frac{1}{3}\delta[n] - 2 \times 1,16714 \times (\frac{3}{2})^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2,21643)u[-n-1] - 1,1756(\frac{1}{3})^n u[-n-1]$$

- Para  $1 < |z| < 3/2$ ,

$$x[n] = -\frac{1}{3}\delta[n] - 2 \times 1,16714 \times (\frac{3}{2})^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2,21643)u[-n-1] + 1,1756(\frac{1}{3})^n u[n]$$

- Para  $\frac{3}{2} < |z|$ ,

$$x[n] = -\frac{1}{3}\delta[n] + 2 \times 1,16714 \times (\frac{3}{2})^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2,21643)u[n] + 1,1756(\frac{1}{3})^n u[n] \quad \square$$

### 6.4.3. Expansión en series de potencias

La expresión que define la transformada  $z$  es una serie de Laurent donde cada uno de los elementos de la sucesión de valores  $x[n]$  son los coeficientes de  $z^{-n}$ . De modo que si la transformada  $\mathcal{Z}$  se da como una serie de potencia en la forma

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-2} + x[2]z^{-2} + \cdots, \end{aligned} \quad (6.54)$$

se puede determinar cualquier valor de la sucesión encontrando el coeficiente de la potencia apropiada de  $z^{-1}$ . Esta aproximación es la misma que se aplicó al calcular la transformada inversa de la parte polinomial en la expresión en fracciones parciales cuando  $M \geq N$ . También es útil para sucesiones de longitud finita donde  $X(z)$  puede no tener una forma cerrada más sencilla que un polinomio en  $z^{-1}$ .

#### EJEMPLO 6.18. Sucesiones de longitud finita

Si  $X(z)$  está dada por

$$\begin{aligned} X(z) &= z^2(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) \\ &= \frac{z^3 - \frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{2}}{z} \end{aligned} \quad (6.55)$$

se observa que tiene un único polo en  $z = 0$ , de modo que no resulta práctica la expansión en fracciones parciales de la Sección 6.4.2. Sin embargo, multiplicando los factores de la ecuación (6.55) se puede expresar  $X(z)$  como

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}.$$

Por inspección, teniendo en cuenta (6.54), se desprende que

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = -2, \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } n = -1, \\ -1, & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

o bien

$$x[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]. \quad \square$$

Cuando se busca la transformada  $z$  de una sucesión se trata de sumar la serie de potencias de la ecuación (6.54) para obtener una expresión matemática más sencilla, en general una función racional. Si se desea usar la técnica de la serie de potencias para encontrar la sucesión asociada a una dada  $X(z)$  expresada en forma cerrada, primero es necesario expandir  $X(z)$  nuevamente en una serie de potencias. Existen tablas de series de potencias para muchas funciones, tales como logaritmo, seno, seno hiperbólico, etc. En algunos casos tales series de potencia pueden tener una interpretación útil como transformadas  $z$  como se muestra en el siguiente ejemplo. En el caso de transformadas  $z$  racionales la expresión en serie de potencias se puede obtener calculando la “división larga”, como en los Ejemplos 6.20 y 6.21

#### EJEMPLO 6.19. Transformada inversa por expansión en series de potencias

Aunque en general no serán de aplicación en este curso, es posible calcular las antitransformadas de funciones no racionales en  $z$ . Por ejemplo, si

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|,$$

se puede conocer la sucesión  $x[n]$  correspondiente expresando  $X(z)$  en serie de potencias. Teniendo en cuenta que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

resulta

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n z^{-n},$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta la expresión (6.54),

$$x[n] = (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} u[n-1]. \quad \square$$

.

#### EJEMPLO 6.20. Transformada inversa por división larga

Se desea calcular la antitransformada de  $X(z) = 1/(1 - az^{-1})$ ,  $|z| > |a|$ . Como la región de convergencia es el exterior de un círculo, la sucesión  $x[n]$  es derecha, de modo que la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $X(z)$  está formada por una serie de potencias negativas de  $z$ . Tal serie se puede obtener

calculando el cociente entre los polinomios 1 y  $1 - az^{-1}$  ordenando el dividendo y el divisor de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 1 - az^{-1} \\
 \hline
 0 + az^{-1} \\
 \quad + az^{-1} - a^2 z^{-2} \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad + a^2 z^{-2} \\
 \quad \quad + a^2 z^{-2} - a^3 z^{-3} \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad + a^3 z^{-3} \\
 \quad \quad \quad \vdots
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1 - az^{-1} \\
 \hline
 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots
 \end{array}$$

Es evidente que

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots$$

si  $|z| > |a|$ . En este ejemplo sencillo es fácil deducir la forma general de la solución. Observando las potencias que intervienen en el resultado, y comparando con la expresión general de la transformada  $\mathcal{Z}$  se nota que

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_n x[n] z^{-n} \\
 &= \dots + \underbrace{x[-2]}_0 z^2 + \underbrace{x[-1]}_0 z + \underbrace{x[0]}_1 z^0 + \underbrace{x[1]}_a z^{-1} + \underbrace{x[2]}_{a^2} z^{-2} + \underbrace{x[3]}_{a^3} z^{-3} + \dots
 \end{aligned}$$

de donde se deduce la forma general  $x[n] = a^n u[n]$ . □

Con este método también pueden calcularse las transformadas inversas de regiones de convergencia que sean el interior de un disco, que corresponden a sucesiones izquierdas. Para ello es necesario ordenar los polinomios en potencias crecientes de  $(z^{-1})$ , como se muestra en el siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 6.21. Transformada inversa por división larga de una sucesión izquierda

Tomando la misma transformada  $z$  del ejemplo anterior,  $X(z) = 1/(1 - az^{-1})$ , pero con región de convergencia  $|z| < |a|$ , la antitransformada inversa puede calcularse efectuando el cociente de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 1 - a^{-1} z \\
 \hline
 0 + a^{-1} z \\
 \quad + a^{-1} z - a^{-2} z^2 \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad + a^{-2} z^2 \\
 \quad \quad + a^{-2} z^2 - a^{-3} z^3 \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad + a^{-3} z^3 \\
 \quad \quad \quad \vdots
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 -az^{-1} + 1 \\
 \hline
 -a^{-1} z - a^{-2} z^2 - a^{-3} z^3 + \dots
 \end{array}$$



Es evidente que

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 + \dots$$

si  $|z| < |a|$ . Nuevamente, comparando con la expresión general de la transformada  $\mathcal{Z}$  se observa que

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_n x[n]z^{-n} \\ &= \dots + \underbrace{x[-3]}_{\downarrow -a^{-3}} z^3 + \underbrace{x[-2]}_{\downarrow -a^{-2}} z^2 + \underbrace{x[-1]}_{\downarrow -a^{-1}} z + \underbrace{x[0]}_{\downarrow 0} z^0 + \underbrace{x[1]}_{\downarrow 0} z^{-1} + \underbrace{x[2]}_{\downarrow 0} z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

de donde se deduce la forma general  $x[n] = -a^n u[-n - 1]$ .  $\square$

Este procedimiento no es útil para transformadas muy complicadas, pero puede dar una pista para encontrar la forma general de la solución, como se muestra en los siguientes ejemplos.

#### EJEMPLO 6.22. Transformada inversa de una sucesión derecha

Se desea calcular la sucesión derecha asociada a la transformada  $\mathcal{Z}$

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}.$$

Como se desea encontrar una sucesión derecha, el cociente debe arreglarse como

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2} \\ 1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} \\ \hline 0 + \frac{4}{3}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} \\ + \frac{4}{3}z^{-1} - \frac{10}{9}z^{-2} + \frac{2}{9}z^{-3} \\ \hline 0 + \frac{11}{18}z^{-2} - \frac{2}{9}z^{-3} \\ + \frac{11}{18}z^{-2} - \frac{55}{108}z^{-3} + \frac{11}{108}z^{-4} \\ \hline 0 + \frac{31}{108}z^{-3} - \frac{11}{108}z^{-4} \\ \vdots \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} \\ 1 + \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{11}{18}z^{-2} + \frac{31}{108}z^{-3} + \dots \end{array} \right.$$

La sucesión  $x[n]$  puede escribirse como

$$x[n] = \delta[n] + \frac{4}{3}\delta[n-1] + \frac{11}{18}\delta[n-2] + \frac{31}{108}\delta[n-3] + \dots \quad (6.56)$$

pero es difícil encontrar un patrón que permita generalizar la sucesión. Utilizando otros métodos, por ejemplo el de fracciones parciales, es más sencillo encontrar la forma general. En este caso, como el numerador y denominador de  $X(z)$  tienen el mismo orden, es necesario efectuar el cociente, pero ordenando los coeficientes de manera distinta:

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} + 1 \\ -\frac{1}{3}z^{-2} + \frac{5}{3}z^{-1} - 2 \\ \hline 0 - \frac{7}{6}z^{-1} + 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} \frac{1}{6}z^{-2} - \frac{5}{6}z^{-1} + 1 \\ -2 \end{array} \right.$$

De modo que  $X(z)$  puede escribirse como

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = -2 + \frac{-\frac{7}{6}z^{-1} + 3}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = -2 + \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= X(z)(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) \Big|_{z=1/3} = \frac{-\frac{7}{6}z^{-1} + 3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z=1/3} = \frac{-\frac{7}{6} \cdot 3 + 3}{1 - \frac{1}{2} \cdot 3} = 1, \\ A_2 &= X(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \Big|_{z=1/2} = \frac{-\frac{7}{6}z^{-1} + 3}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \Big|_{z=1/2} = \frac{-\frac{7}{6} \cdot 2 + 3}{1 - \frac{1}{3} \cdot 2} = 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X(z) = -2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}},$$

y entonces,

$$x[n] = -2\delta[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Se puede verificar que esta expresión coincide con (6.56) dando valores numéricos para  $n = 0, 1, \dots$

$n$	0	1	2	3	...
$x[n]$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{31}{108}$	...

En consecuencia, el método de la división larga es conveniente cuando sólo se necesitan conocer unos pocos términos de  $x[n]$ .  $\square$

Sin embargo, algunas veces el método de la división larga permite poner en evidencia cierta estructura de la sucesión a encontrar que sería difícil de encontrar de otra forma, como se muestra en el siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 6.23. Método de división larga en sucesiones particulares

Se desea conocer la transformada inversa de  $X(z) = 1/(1 - \frac{1}{2}z^{-3})$ , para  $|z| > 1/\sqrt[3]{2}$ . En este caso, la expansión en fracciones parciales necesita conocer los residuos de  $X(z)$  en las tres raíces de  $z^3 = 1/2$ , que son  $z_k = 2^{-(1/3)}e^{j\frac{2\pi}{3}k}$ , con  $k = 0, 1, 2$ . Esto es,

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-3}} = \frac{1}{(1 - 2^{-1/3}z^{-1})} \times \frac{1}{(1 - 2^{-1/3}e^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})} \times \frac{1}{(1 - 2^{-1/3}e^{j\frac{4\pi}{3}}z^{-1})}.$$

Si bien se puede resolver por residuos, es mucho más sencillo ensayar el método de la división larga:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 - \frac{1}{2}z^{-3} \\ 0 + \frac{1}{2}z^{-3} \\ + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{1}{4}z^{-6} \\ \hline + \frac{1}{4}z^{-6} \\ + \frac{1}{4}z^{-6} - \frac{1}{8}z^{-9} \\ \hline + \frac{1}{8}z^{-9} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 - \frac{1}{2}z^{-3} \\ \hline 1 + \frac{1}{2}z^{-3} + \frac{1}{4}z^{-6} + \frac{1}{8}z^{-9} + \dots \end{array}$$

Es evidente que

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-3}} = 1 + \frac{1}{2}z^{-3} + \frac{1}{4}z^{-6} + \frac{1}{8}z^{-9} + \dots$$

y por lo tanto, la transformada inversa es

$$x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-3] + \frac{1}{4}\delta[n-6] + \frac{1}{8}\delta[n-9] + \dots$$

que puede generalizarse fácilmente a

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/3}, & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 3, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En este caso, es mucho más sencillo calcular la transformada inversa utilizando el método de la división larga en lugar de efectuar la expansión en fracciones parciales, al contrario que lo que sucede con el Ejemplo anterior.  $\square$

En la Tabla 6.2 se listan algunas funciones comunes y su expansión en series de potencias.

#### 6.4.4. Transformada inversa usando integración de contorno

En las Secciones 6.4.1 a 6.4.3 se discutieron varias formas de obtener la sucesión asociada a una transformada  $z$  dada. En esta sección se desarrolla un método formal, que será de interés teórico para obtener dos propiedades adicionales de la transformada  $z$ : el teorema de convolución compleja y la relación de Parseval.

La expresión formal de la transformada  $z$  inversa puede obtenerse a partir del teorema integral de Cauchy (Churchill y Brown 1992), que establece

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-k} dz = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (6.57)$$

donde  $C$  es un contorno cerrado que rodea al origen.

A partir de la definición de la transformada  $z$ ,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (6.58)$$

multiplicando ambos miembros por  $z^{k-1}$  e integrando con una integral de contorno donde la curva de integración rodee al origen y esté íntegramente contenida en la región de convergencia de  $X(z)$ , se obtiene

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} z^{k-1} dz.$$

Intercambiando el orden de la integración y la suma (que es válido siempre que la serie sea convergente, de allí que el contorno de integración debe estar contenido en la RdC) resulta que

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-n-1} dz.$$

Tabla 6.2. Algunas funciones y sus series de potencias.

función	serie de potencia	RdC
1. $\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$ z  < 1$
2. $\frac{1}{(1-z)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}$	$ z  < 1$
3. $\frac{1}{(1-z)^3}$	$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$	$ z  < 1$
4. $\frac{z}{(1-z)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$	$ z  < 1$
5. $\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$	$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$	$ z  < 1$
6. $\log(1+z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$	$ z  < 1$
7. $-\log(1-z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$	$ z  < 1$
8. $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}}{n} z^n$	$ z  < 1$
9. $z + (1-z)\log(1-z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^n$	$ z  < 1$
10. $e^z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$	plano $z$
11. $\cos z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n$	plano $z$
12. $\sin z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^n$	plano $z$
13. $\cosh z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$	plano $z$
14. $\sinh z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$	plano $z$
15. $\arctan z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$	$ z  < 1$
16. $\operatorname{arctanh} z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}$	$ z  < 1$
17. $\arcsin z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} z^{2n+1}$ $= z + \frac{1}{2} \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{1}{7} z^7 + \dots$	$ z  < 1$
18. $\operatorname{arcsinh} z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} z^{2n+1}$ $= z - \frac{1}{2} \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{1}{7} z^7 + \dots$	$ z  < 1$
19. $\tan z$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^n (4^n - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$ $= z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7 + \frac{62}{2835} z^9 + \frac{1382}{155925} z^{11} + \dots$	$ z  < \frac{\pi}{2}$
20. $\tanh z$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (4^n - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$ $= z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 - \frac{17}{315} z^7 + \frac{62}{2835} z^9 - \frac{1382}{155925} z^{11} + \dots$	$ z  < \frac{\pi}{2}$

$n!!$  es el producto de todos los enteros (pares o impares) menores que  $n$ :  $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ ,  $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1$ .

$B_n$  es el  $n$ -ésimo número de Bernoulli. Se calcula por recursión  $\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} B_j = 0$  con  $B_0 = 1$ , y  $m > 0$ .

De acuerdo a la expresión (6.57)  $\oint_C z^{k-n-1} dz = 1$  cuando  $n = k$ , y es nula si  $n \neq k$ ; por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = x[k].$$

De modo que la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa se puede expresar de manera formal como la integral de contorno

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad (6.59)$$

donde  $C$  es un contorno cerrado orientado en sentido antihorario contenido en la región de convergencia de  $X(z)$  y que rodea al origen. En la derivación de la relación (6.59) no se hizo ninguna hipótesis sobre el signo de  $k$  o de  $n$ , de modo que dicha expresión vale tanto para  $n$  positivos o negativos.

La ecuación (6.59) es la expresión formal de la transformada  $z$  inversa. Si la región de convergencia incluye el círculo unitario, y éste se toma como contorno de integración, se puede escribir  $z = e^{j\omega}$ , con  $\omega$  variando desde  $-\pi$  hasta  $\pi$  para recorrer el círculo en sentido antihorario. Se tiene entonces que  $dz = j\omega e^{j\omega} d\omega$ , y reemplazando en (6.59) resulta

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{z=e^{j\omega}} X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega(n-1)} j\omega e^{j\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

que no es otra cosa que la transformada de Fourier inversa de  $X(e^{j\omega})$ .

Es frecuente evaluar las integrales de contorno como (6.59) con el teorema de los residuos de Cauchy, que aplicado a la expresión (6.59) resulta

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \\ &= \sum \text{residuos de } X(z) z^{n-1} \text{ en los polos encerrados por } C. \end{aligned} \quad (6.60)$$

La ecuación (6.60) es válida para cualquier transformada  $X(z)$ , pero el cálculo de los residuos de una transformada  $z$  que no sea una función racional puede ser difícil. Sin embargo, si  $X(z) z^{n-1}$  es una función racional, se puede expresar como

$$X(z) z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z - p_k)^s},$$

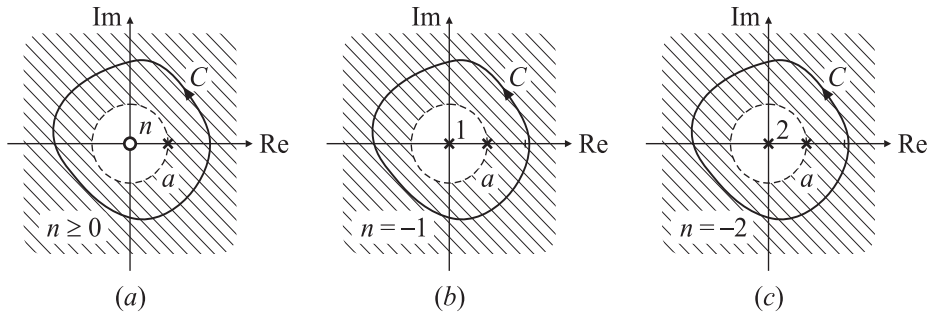
donde  $X(z) z^{n-1}$  tiene  $s$  polos en  $z = p_k$ , y  $\psi(z)$  no tiene ningún polo en  $z = p_k$ . El residuo de  $X(z) z^{n-1}$  en  $z = p_k$  está dado por

$$\text{Res}\{X(z) z^{n-1} \text{ en } z = p_k\} = \frac{1}{(s-1)!} \left. \frac{d^{s-1} \psi(z)}{dz^{s-1}} \right|_{z=p_k}. \quad (6.61)$$

En particular, si hay un único polo en  $z = p_k$  ( $s = 1$ ), la expresión (6.61) se simplifica a

$$\text{Res}\{X(z) z^{n-1} \text{ en } z = p_k\} = \psi(z)|_{z=p_k}. \quad (6.62)$$

Comparando (6.33) con (6.61) es sencillo advertir que encontrar los residuos de  $X(z) z^{n-1}$  es similar a calcular los coeficientes para una expansión en fracciones parciales de  $X(z)$ . En general, para transformadas  $z$  racionales es más sencillo aplicar el método de las fracciones parciales presentado en la Sección 6.4.2, ya que permite obtener la expresión de



**Fig. 6.18.** Contornos de integración para la función  $X(z)z^{n-1}$  del Ejemplo 6.24: para  $n \geq 0$  (a), y para  $n = -1$  (b) y  $n = -2$  (c).

$x[n]$  para cualquier valor de  $n$ ; en cambio, la expresión formal dada por la ecuación (6.59) permite calcular los valores de  $x[n]$  muestra a muestra. En consecuencia la expresión (6.59) resulta de interés para aplicaciones teóricas, como se verá sobre el final del Capítulo. De todas maneras, es interesante ilustrar este método utilizando una transformada  $z$  sencilla.

#### EJEMPLO 6.24. Transformada inversa por integral de contorno

Como un ejemplo del empleo de la expresión (6.59) se calculará la transformada  $z$  inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

Aplicando (6.59) se tiene que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{n-1}}{1 - az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z - a} dz,$$

donde el contorno de integración está contenido en la región de convergencia  $|z| > |a|$ , como se muestra en la Fig. 6.18(a). Es evidente en este caso que

$$X(z)z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z - p_k)^s} = \frac{z^n}{z - a}.$$

Si  $n \geq 0$ ,  $\psi(z) = z^n$ ,  $X(z)z^{n-1}$  sólo tiene un polo en  $z = a$ , y por lo tanto el contorno encierra sólo un polo. Se tiene entonces que

$$\text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} = \psi(z)|_{z=a} = a^n.$$

Por lo tanto,

$$x[n] = a^n, \quad \text{para } n \geq 0.$$

Si  $n < 0$ , aparece un polo múltiple en el origen, cuya multiplicidad depende de  $n$ , y por lo tanto el cálculo de los residuos se dificulta a medida que  $n \rightarrow (-\infty)$ . Por ejemplo, para  $n = -1$ ,

$$x[-1] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{-2}}{1 - az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z} \frac{1}{z - a} dz$$

de modo que dentro del contorno de integración quedan dos polos, uno en  $z = a$  y otro en  $z = 0$ , como se muestra en la Fig. 6.18(b). Por lo tanto,

$$x[-1] = \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} + \text{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\}.$$

Es sencillo calcular que

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} &= \frac{1}{z} \frac{1}{z-a} z \Big|_{z=0} = -a^{-1}, \\ \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} &= \frac{1}{z} \frac{1}{z-a} (z-a) \Big|_{z=a} = a^{-1},\end{aligned}$$

de modo que  $\operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} + \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} = 0$ , y entonces

$$x[-1] = 0.$$

Si  $n = -2$ ,

$$x[-2] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{-3}}{1-az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z^2} \frac{1}{z-a} dz,$$

y dentro del contorno de integración quedan *tres polos*: el polo en  $z = a$ , y un polo *doble* en  $z = 0$ . Nuevamente,

$$\begin{aligned}x[-2] &= \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} + \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}} \left( \frac{1}{z-a} \right) +\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}} \left( \frac{1}{z-a} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{a^2}, \\ \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{z-a} (z-a) \Big|_{z=a} = \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x[-2] = \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = 0\} + \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1} \text{ en } z = a\} = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = 0.$$

La evaluación de  $x[n]$  para valores más negativos de  $n$  hacen que crezca la multiplicidad del polo en  $z = 0$ , complicando los cálculos. Aún así se puede encontrar que  $x[n] = 0$  para  $n < 0$ , y en consecuencia,

$$x[n] = a^n u[n],$$

como era de esperar. □

Mientras que la ecuación (6.59) es válida para todo  $n$ , no es cómoda para calcular los valores de  $x[n]$  cuando  $n < 0$  por la aparición de polos múltiples en el origen. Esto se puede evitar haciendo un cambio de variables, que resulta en una ecuación alternativa que es más fácil de aplicar cuando  $n < 0$ . Si se hace  $z = p^{-1}$ , se tiene que  $dz = -p^{-2} dp$ , y (6.59) toma la forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz \Big|_{z=p^{-1}} = \frac{-1}{2\pi j} \oint_{-C'} X(p^{-1})p^{-n+1}p^{-2} dp. \quad (6.63)$$

El cambio de variables introduce modificaciones en la región de convergencia y el contorno de integración. Como  $z = p^{-1}$ , si el contorno de integración tiene sentido antihorario en el plano  $z$ , en el plano  $p$  se recorre en sentido horario; por ello se indica el contorno como  $-C'$ . El sentido de recorrido se puede hacer antihorario nuevamente multiplicando el último término de la expresión (6.63) por  $(-1)$ . Además, si el contorno de integración

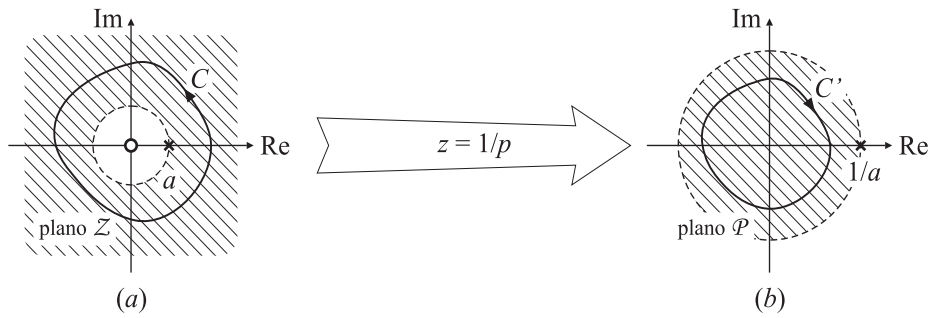


Fig. 6.19. Región de convergencia de  $X(z)$  y de  $X(1/p)$  para el Ejemplo 6.25.

es un círculo de radio  $r$  en el plano  $z$ , el contorno  $C'$  corresponde a un círculo de radio  $1/r$  en el plano  $p$ . Los polos de  $X(z)$  que estaban *fuera* del contorno  $C$  quedan *dentro* del contorno  $C'$  y viceversa. Algunos polos adicionales pueden o no aparecer en el origen o en infinito, pero no es importante para esta argumentación. En definitiva, multiplicando por  $(-1)$  para que el nuevo contorno también sea recorrido en sentido antihorario, la expresión (6.63) se puede escribir como

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} X(1/p) p^{-n-1} dp \\ &= \sum \text{residuos de } X(1/p) p^{-n-1} \text{ en los polos encerrados por } C'. \end{aligned} \quad (6.64)$$

La utilidad de esta expresión se aprecia en el siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 6.25. Transformada inversa por integral de contorno para $n < 0$

Para calcular la antitransformada de la función racional  $X(z)$  del ejemplo anterior, primero es necesario efectuar el cambio de variables  $z = p^{-1}$ . Por lo tanto,

$$X(1/p) = X(z)|_{z=p^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \Big|_{z=p^{-1}} = \frac{1}{1 - ap}.$$

Esta expresión tiene un polo en  $p = 1/a$ . La región de convergencia para  $X(z)$  era  $|z| > |a|$ , y para  $X(1/p)$  será  $|p^{-1}| > |a|$ , que puede escribirse como  $|p| < 1/|a| = |1/a|$ . El contorno de integración  $C'$ , que debe estar contenido dentro de la región de convergencia de  $X(1/p)$ , y por lo tanto no rodea al polo en  $1/a$ , como se muestra en la Fig. 6.19. Se tiene entonces que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} X(1/p) p^{-n-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{1}{1 - ap} p^{-n-1} dp,$$

y, por ejemplo, para  $n = -1$ , resulta

$$x[-1] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{1}{1 - ap} p^{+1-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{1}{1 - ap} dp = 0,$$

porque el contorno de integración no encierra ningún polo. Para  $n = -2$ ,

$$x[-2] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{1}{1 - ap} p^{+2-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{p}{1 - ap} dp = 0,$$

por el mismo motivo. Se observa que valores más negativos de  $n$  sólo aumentan el número de ceros, pero dejan inalterado el cálculo de los residuos.  $\square$



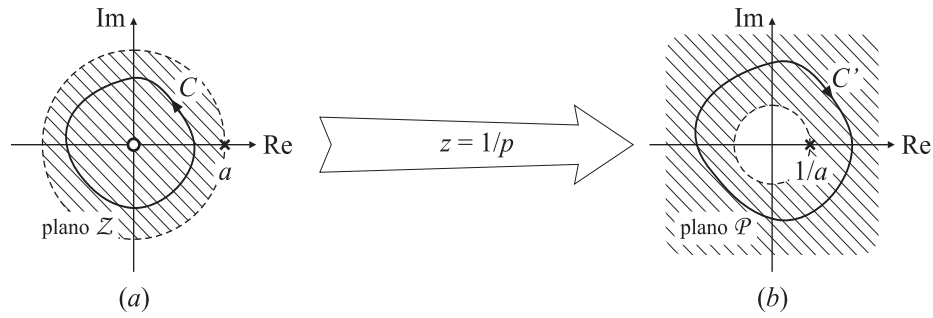


Fig. 6.20. Región de convergencia de  $X(z)$  (a) y de  $X(1/p)$  (b) para el Ejemplo 6.26.

De la misma manera que la expresión (6.60) es válida pero complicada de aplicar para el caso  $n < 0$ , la ecuación (6.64) también es válida, pero incómoda, para el caso  $n > 0$ .

#### EJEMPLO 6.26. Aplicación del método de la integral de contorno

Se desea calcular la sucesión  $x[n]$  asociada a la transformada  $z$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|.$$

Para calcular la parte de la sucesión correspondiente a  $n \geq 0$ , se aplica la ecuación (6.60):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z - a} dz$$

La región de convergencia de  $X(z)$  y el contorno de integración se muestran en la Fig. 6.20(a). Si  $n \geq 0$ , el término  $z^n$  del numerador representa  $n$  ceros en el origen. Como el contorno de integración no encierra ningún polo, la integral de contorno es nula, esto es

$$x[n] = 0 \quad \text{para } n \geq 0. \quad (6.65)$$

Para los  $n < 0$  conviene aplicar la expresión (6.64). En este caso,

$$X(1/p) = \frac{1}{1 - ap} = \frac{-a^{-1}}{p - a^{-1}}, \quad |p| > |1/a|.$$

El cero en el origen de  $X(z)$  se mapea en un cero en  $p = \infty$  de  $X(1/p)$ . La región de convergencia de  $X(1/p)$  se representa en la Fig. 6.20(b). Entonces, de (6.64) se tiene que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} X(1/p) p^{-n-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{-a^{-1}}{p - a^{-1}} p^{-n-1} dp.$$

Como  $n < 0$ , el numerador  $p^{-n-1}$  representa  $n + 1$  ceros en el origen. Por lo tanto el contorno de integración sólo encierra el polo en  $p = a^{-1}$ . Por lo tanto,

$$x[-1] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{-a^{-1}}{p - a^{-1}} p^{-(-1)-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{-a^{-1}}{p - a^{-1}} dp = \text{Res} \left\{ \frac{-a^{-1}}{p - a^{-1}} \text{ en } p = a^{-1} \right\} = -a^{-1}.$$

Para  $n = -2$ ,

$$x[-2] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{-a^{-1}}{p - a^{-1}} p^{-(-2)-1} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{-a^{-1}p}{p - a^{-1}} dp = \text{Res} \left\{ \frac{-a^{-1}p}{p - a^{-1}} \text{ en } p = a^{-1} \right\} = -a^{-2},$$

etc. De modo que

$$x[n] = -a^n \quad \text{para } n < 0. \quad (6.66)$$

De (6.65) y (6.66) se deduce que  $x[n] = -a^n n[-n - 1]$ .  $\square$

## 6.5. Propiedades de la transformada z

Muchas de las propiedades de la transformada  $z$  son particularmente útiles en el estudio de señales discretas, y en especial, sistemas discretos. Estas propiedades son frecuentemente utilizadas con las técnicas de cálculo de las antitransformadas discutidas en la Sección 6.4 para calcular las transformadas inversas de expresiones más complejas. Se verá más adelante que estas propiedades son invaluable para transformar ecuaciones a diferencias con coeficientes constantes en expresiones algebraicas en la variable compleja  $z$ , cuya solución puede calcularse antitransformando, y no haciendo la recursión como en el Capítulo 3. En esta sección se consideran algunas de las propiedades de uso frecuente. En lo que sigue,  $X(z)$  es la transformada  $z$  de  $x[n]$ , y la región de convergencia de la sucesión  $x[n]$  se indica  $R_x$ , es decir

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \text{RdC} = R_x.$$

Esta región de convergencia  $R_x$  representa un conjunto de valores de  $z$ , por ejemplo,  $r_i < |z| < r_e$ . Para las propiedades que involucran dos sucesiones, y sus respectivas transformadas  $z$ , los pares transformados se indicarán como:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\xleftrightarrow{Z} X_1(z), & \text{RdC} &= R_{x_1}, \\ x_2[n] &\xleftrightarrow{Z} X_2(z), & \text{RdC} &= R_{x_2}. \end{aligned}$$

### 6.5.1. Propiedad de linealidad

La propiedad de linealidad establece que

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad \text{RdC} \supset R_{x_1} \cap R_{x_2},$$

que se deduce inmediatamente de la definición de la transformada  $z$ : si  $x_1[n], x_2[n]$  son sucesiones con transformada  $z$   $X_1(z), X_2(z)$ , respectivamente, sea  $x_3[n]$  la sucesión formada por una combinación lineal de  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ ,

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n].$$

La transformada  $z$  de  $x_3[n]$  es

$$\begin{aligned} X_3(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (ax_1[n] + bx_2[n])z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ax_1[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} bx_2[n]z^{-n} \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n} = aX_1(z) + bX_2(z). \end{aligned}$$

Es decir, si una sucesión es la combinación lineal de otras dos, su transformada  $z$  es la combinación lineal de las transformadas de cada sucesión. Como se indica, la región de convergencia es al menos la intersección de cada una de las RdC de cada sucesión. Para sucesiones con transformadas  $z$  racionales, si los polos de  $aX_1(z) + bX_2(z)$  son los polos de  $X_1(z)$  más los polos de  $X_2(z)$  (es decir, no hay ninguna cancelación polo-cero), entonces la RdC de la combinación será exactamente la intersección de las RdC individuales. Si la combinación lineal es tal que se generan algunos ceros que cancelan polos, entonces la

RdC puede ser mayor que la intersección de las RdC individuales. Un ejemplo de este caso es cuando la combinación de dos sucesiones de longitud infinita resultan en una sucesión de longitud finita. En este caso la RdC de la combinación es todo el plano  $z$  con la posible excepción de los puntos  $z = 0$  o  $z = \infty$ . Tal es el caso estudiado en el Ejemplo 6.7, donde

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

también puede escribirse como

$$x[n] = a^n (u[n] - u[n - N]) = a^n u[n] - a^n u[n - N].$$

Las dos sucesiones  $a^n u[n]$  y  $a^n u[n - N]$  son sucesiones derechas de longitud infinita, y sus transformadas  $z$  tienen un polo en  $z = a$ . Por lo tanto, sus dos regiones de convergencia son  $|z| > |a|$ . Sin embargo, como se mostró en el Ejemplo 6.7, el polo en  $z = a$  se cancela con el cero en  $z = a$ , y por lo tanto la RdC se extiende a todo el plano complejo menos  $z = 0$ .

La propiedad de linealidad ha sido utilizada en casi todos los ejemplos previos, y en particular en expresar una transformada  $z$  como suma de fracciones parciales. Este procedimiento permite expresar una función racional como una suma de términos más simples, y gracias a la propiedad de linealidad, la transformada  $z$  inversa es la suma de las antitransformadas de cada uno de esos términos.

### 6.5.2. Propiedad de desplazamiento temporal

La propiedad de desplazamiento temporal establece que

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z), \quad \text{RdC} \supset R_x \pm \{z = 0\} \pm \{z = \infty\}.$$

La cantidad  $n_0$  es un entero. Si  $n_0$  es positivo, la sucesión original  $x[n]$  se desplaza hacia la derecha y si  $n_0$  es negativo  $x[n]$  se desplaza hacia la izquierda. Como en la propiedad de linealidad, la RdC puede cambiar porque la multiplicación de la transformada  $z$   $X(z)$  por  $z^{-n_0}$  puede cambiar el número de polos en  $z = 0$  o en  $z = \infty$ .

La derivación de esta propiedad es natural a partir de la definición de la transformada  $z$ . Si  $y[n] = x[n - n_0]$ , la transformada  $z$  es

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n}.$$

Haciendo el cambio de variables  $s = n - n_0$ ,

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[s] z^{-s-n_0} = z^{-n_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[s] z^{-s} = z^{-n_0} X(z).$$

La propiedad de desplazamiento temporal es muy útil, junto con otras propiedades, para calcular antitransformadas.

**EJEMPLO 6.27. Sucesión exponencial desplazada**

Sea la transformada  $z$

$$X(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}}, \quad |z| > \frac{1}{4}.$$

Por la región de convergencia se asocia esta transformada a una sucesión derecha. Se puede reescribir  $X(z)$  como

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}.$$

Esta transformada es de la forma de la ecuación (6.28) con  $N = M = 1$ . Por lo tanto hay que hacer el cociente, y luego expandir el resto en fracciones parciales, obteniéndose

$$X(z) = -4 + \frac{4}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}.$$

Aplicando la propiedad de linealidad, y antitransformando término a término se encuentra que  $x[n]$  está dada por

$$x[n] = -4\delta[n] + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]. \quad (6.67)$$

Una expresión para  $x[n]$  puede obtenerse de manera más directa aplicando la propiedad de desplazamiento temporal. Primero,  $X(z)$  puede escribirse como

$$X(z) = z^{-1} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right) = z^{-1} X_1(z), \quad |z| > \frac{1}{4},$$

donde

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}.$$

Por la propiedad de desplazamiento temporal, se tiene que

$$X(z) = z^{-1} X_1(z) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} x[n] = x_1[n-1]. \quad (6.68)$$

Conociendo el par transformado

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (6.69)$$

de (6.68) y (6.69) se tiene que

$$x[n] = x_1[n-1] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (6.70)$$

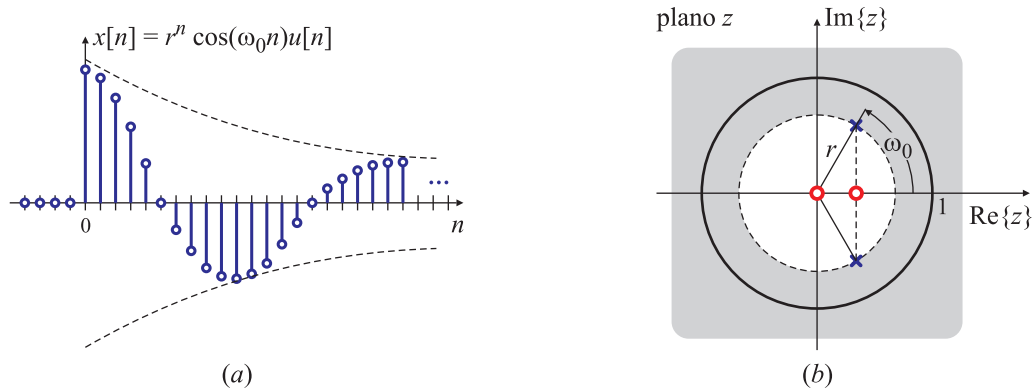
Es fácil verificar que (6.67) y (6.70) representan la misma sucesión para todos los valores de  $n$ .  $\square$

**6.5.3. Multiplicación por una sucesión exponencial**

Esta propiedad se expresa matemáticamente como

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z/z_0), \quad \text{RdC: } |z_0| R_x. \quad (6.71)$$

La notación  $|z_0| R_x$  indica que la RdC  $R_x$  está escalada por  $|z_0|$ : por ejemplo, si  $R_x$  indica el conjunto de valores de  $z$  que satisfacen  $r_i < |z| < r_e$ , entonces  $|z_0| R_x$  es el conjunto de valores de  $z$  que verifican  $|z_0| r_i < |z| < |z_0| r_e$ .



**Fig. 6.21.** Sucesión  $x[n] = r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$  (a) y el diagrama de polos y ceros y  $\text{RdC } |z| > r$  de su transformada z (b).

Esta propiedad se demuestra fácilmente reemplazando  $z_0^n x[n]$  en la definición (6.2): si

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad r_i < |z| < r_e,$$

entonces

$$\mathcal{Z}\{z_0^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X(z/z_0),$$

y si  $X(z)$  converge para  $r_i < |z| < r_e$ , entonces  $X(z/z_0)$  converge para

$$r_i < \left|\frac{z}{z_0}\right| < r_e,$$

que puede escribirse como

$$|z_0| r_i < |z| < |z_0| r_e.$$

Si  $X(z)$  tiene un polo en  $z = p_k$  entonces  $X(z/z_0)$  tiene un polo en  $z_0 p_k$ . Si  $z_0$  es un número real positivo, el escalamiento puede interpretarse como una expansión o reducción del plano z, es decir, las ubicaciones de los polos y los ceros cambia a lo largo de líneas radiales en el plano z. Si  $z_0$  es complejo con módulo unitario, es decir,  $z = e^{j\omega_0}$  el escalamiento consiste en una rotación del plano z por un ángulo  $\omega_0$ : la posición de los polos y los ceros cambia de posición a lo largo de círculos centrados en el origen. Esto a su vez puede interpretarse como un desplazamiento frecuencia, asociado con la modulación de la sucesión temporal por la sucesión exponencial  $e^{j\omega_0 n}$ . Si existe la transformada de Fourier, esta propiedad tiene la forma

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega - \omega_0)}).$$

#### EJEMPLO 6.28. Multiplicación por una sucesión exponencial

Se desea calcular la transformada z de la sucesión cosenoidal amortiguada

$$x[n] = r^n \cos(\omega_0 n) u[n].$$

Esta sucesión puede escribirse como

$$x[n] = \frac{1}{2} (re^{j\omega_0})^n u[n] + \frac{1}{2} (re^{-j\omega_0})^n u[n].$$

Recordando el par transformado

$$u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1,$$

aplicando la propiedad de multiplicación por una sucesión exponencial (6.71) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (re^{j\omega_0})^n u[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \left. \frac{1}{1-z^{-1}} \right|_{z=z/(re^{j\omega_0})} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}, \quad |z| > r, \\ \frac{1}{2} (re^{-j\omega_0})^n u[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \left. \frac{1}{1-z^{-1}} \right|_{z=z/(re^{-j\omega_0})} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}, \quad |z| > r. \end{aligned}$$

De la propiedad de linealidad resulta que

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}} \quad |z| > r,$$

que también puede escribirse como

$$X(z) = \frac{1-r\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2 z^{-2}}, \quad |z| > r.$$

Una representación temporal de  $x[n]$  y del diagrama de polos y ceros y de la región de convergencia de su transformada  $X(z)$  se muestran en la Fig. 6.21 para  $0 < r < 1$ .  $\square$

#### 6.5.4. Propiedad de diferenciación de la transformada z

La propiedad de diferenciación establece que

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{RdC: } R_x.$$

La propiedad se verifica trivialmente derivando la definición (6.2):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

y entonces

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n]z^{-n-1}$$

de donde

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nx[n])z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx[n]\}.$$

Se muestra esta propiedad de diferenciación con dos ejemplos.

**EJEMPLO 6.29. Inversa de una transformada z no racional**

En este ejemplo se utiliza la propiedad de diferenciación junto con la propiedad de desplazamiento temporal para calcular la transformada inversa de la transformada z del Ejemplo 6.19 (pág. 1043), donde

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|.$$

Diferenciando con respecto a z se obtiene una función racional:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1 + az^{-1}},$$

y aplicando la propiedad de derivación

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (6.72)$$

Como

$$(-a)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 + az^{-1}}, \quad |z| > |a|,$$

es claro que

$$a(-a)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (6.73)$$

De (6.72) y (6.73) resulta

$$nx[n] = a(-a)^{n-1} u[n-1]$$

y entonces

$$x[n] = (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n} u[n-1],$$

que naturalmente coincide con el resultado del Ejemplo 6.19.  $\square$

Otro ejemplo de aplicación de la propiedad de derivación es para el cálculo de la anti-transformada de un polo doble.

**EJEMPLO 6.30. Antitransformada de un polo de segundo orden**

Sea la transformada z

$$X(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|.$$

La antitransformada de esta  $X(z)$  puede calcularse utilizando la ecuación para los residuos de polos múltiples, indicada en la ecuación (6.33). Pero resulta más sencillo aplicar la propiedad de derivación. Sea  $X_1(z)$  una transformada auxiliar

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|,$$

cuya antitransformada es

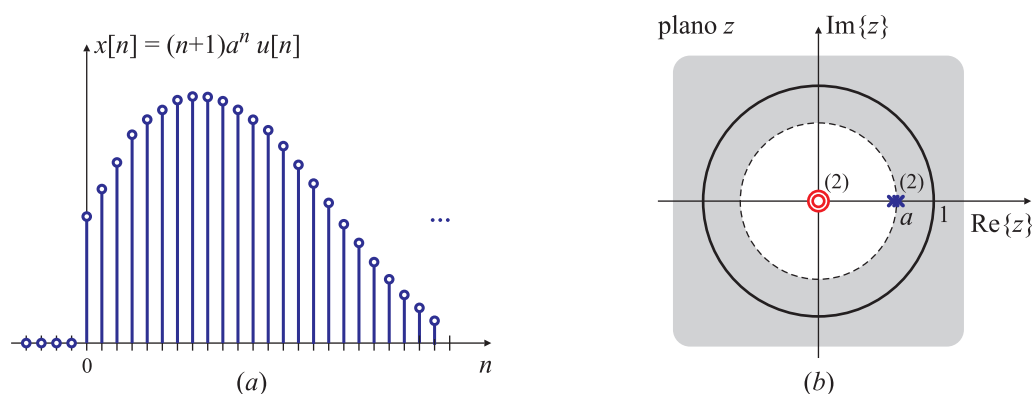
$$x_1[n] = a^n u[n].$$

Entonces, definiendo

$$X_2(z) = -z \frac{dX_1(z)}{dz} \quad (6.74)$$

por la propiedad de derivación se tiene que

$$x_2[n] = nx_1[n] = na^n u[n]. \quad (6.75)$$



**Fig. 6.22.** Sucesión  $x[n] = (n+1)a^n u[n]$  (a) y el diagrama de polos y ceros y RdC  $|z| > r$  de su transformada  $z$   $X(z) = 1/(1-az^{-1})^2$  (b).

Realizando las operaciones indicadas en (6.74) resulta

$$X_2(x) = -z \frac{dX_1(z)}{dz} = -z \left( -\frac{az^{-2}}{(1-az^{-1})^2} \right) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},$$

de donde se observa que

$$X(z) = a^{-1}zX_2(z),$$

y por lo tanto,

$$x[n] = a^{-1}x_2[n+1].$$

Finalmente, reemplazando  $x_2[n]$  de (6.75) se encuentra el resultado buscado:

$$x[n] = a^{-1}(n+1)a^{n+1}u[n+1] \quad (6.76)$$

que también puede escribirse

$$x[n] = (n+1)a^n u[n],$$

ya que la ecuación (6.76) se anula en  $n = -1$ . La Fig. 6.22(a) muestra la sucesión  $x[n]$ , y la Fig. 6.22(b) la región de convergencia y el diagrama de polos y ceros.  $\square$

### 6.5.5. Propiedad de conjugación de una sucesión compleja

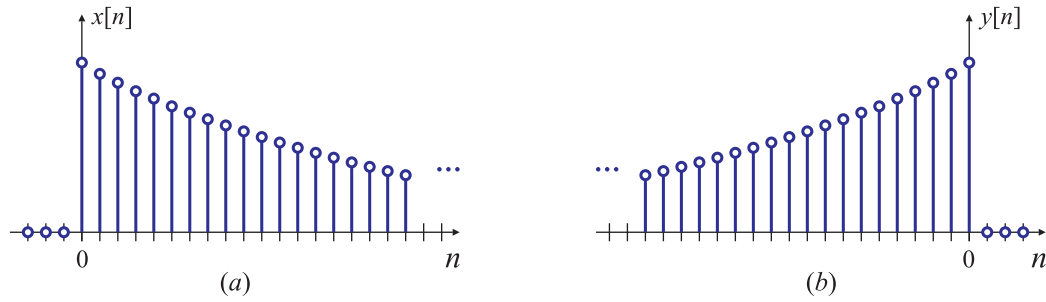
Esta propiedad se enuncia como

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X^*(z^*), \quad \text{RdC: } R_x.$$

Esta relación se puede demostrar trivialmente a partir de la definición (6.2):

$$\mathcal{Z}\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]z^{-n} = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^*)^{-n} \right)^* = X^*(z^*).$$





**Fig. 6.23.** Sucesión  $x[n] = a^n u[n]$  (a) y su reflexión temporal  $y[n] = x[-n] = a^{-n} u[-n]$  (b).

### 6.5.6. Propiedad de reflexión temporal

Esta propiedad establece que

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X^*(1/z^*), \quad \text{RdC: } \frac{1}{R_x},$$

donde la notación RdC:  $1/R_x$  indica que debe invertirse  $R_x$ : si  $R_x$  es el conjunto de valores de  $z$  que satisfacen  $r_i < |z| < r_e$ , entonces la RdC:  $1/R_x$  está dada por el conjunto de valores de  $z$  que satisfacen  $r_e^{-1} < |z| < r_i^{-1}$ . Entonces, si el número  $z_0$  está en la RdC  $R_x$  de la transformada  $z$  de la sucesión  $x[n]$ , entonces el número  $1/z_0^*$  está en la RdC  $1/R_x$  de la transformada  $z$  de la sucesión  $x^*[-n]$ . si la sucesión  $x[n]$  es real, o si no se conjuga la sucesión compleja, la propiedad se puede escribir como

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(1/z), \quad \text{RdC: } \frac{1}{R_x}.$$

La demostración es sencilla:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x^*[-n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[-n] z^{-n} = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] (z^*)^{-n} \right)^* = \left( \sum_{s=-\infty}^{\infty} x[s] (z^*)^s \right)^* \\ &= \left( \sum_{s=-\infty}^{\infty} x[s] \left( \frac{1}{z^*} \right)^{-s} \right)^* = X^*(1/z^*). \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 6.31. Reflexión temporal de una sucesión

Sea la sucesión

$$x[n] = a^n u[n],$$

con  $a$  real (en este caso  $0 < a < 1$ ) representada en la Fig. 6.23(a), cuya transformada  $z$  es

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

Si  $y[n]$  es la reflexión temporal de  $x[n]$ , es decir,  $y[n] = x[-n] = a^{-n} u[-n]$ , como se muestra en la Fig. 6.23(b); note que  $y[n] \neq -a^n u[n-1]$ . La propiedad de reflexión temporal permite establecer que

$$Y(z) = X^*(1/z^*) = \left( \frac{1}{1 - a(1/z^*)^{-1}} \right)^* = \frac{1}{1 - az} = \frac{-az^{-1}}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < 1/|a|. \quad (6.77)$$

Este resultado puede revisarse por definición:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{-n}u[-n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 a^{-n}z^{-n} = \sum_{s=0}^{\infty} (az)^s = \frac{1}{1-az}, \quad (6.78)$$

donde en (6.78) la última igualdad surge de suponer que  $|az| < 1$ , o bien  $|z| < 1/|a|$ . Tanto la región de convergencia como el resultado de la transformada son los mismo que resultan de la aplicación de la propiedad de inversión temporal calculados en (6.77).  $\square$

### 6.5.7. Propiedad de convolución de sucesiones

La propiedad de convolución establece que

$$(x_1 * x_2)[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)X_2(z), \quad \text{RdC: contiene } R_{x_1} \cap R_{x_2}.$$

Para demostrar esta propiedad, sea  $y[n] = (x_1 * x_2)[n]$ , es decir

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k].$$

Entonces,

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right) z^{-n}.$$

Intercambiando el orden de las sumatorias,

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]z^{-n}.$$

Haciendo el cambio de variables  $s = n - k$  en la segunda sumatoria

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{s=-\infty}^{\infty} x_2[s]z^{-(s+k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left( \sum_{s=-\infty}^{\infty} x_2[s]z^{-s} \right) z^{-k}.$$

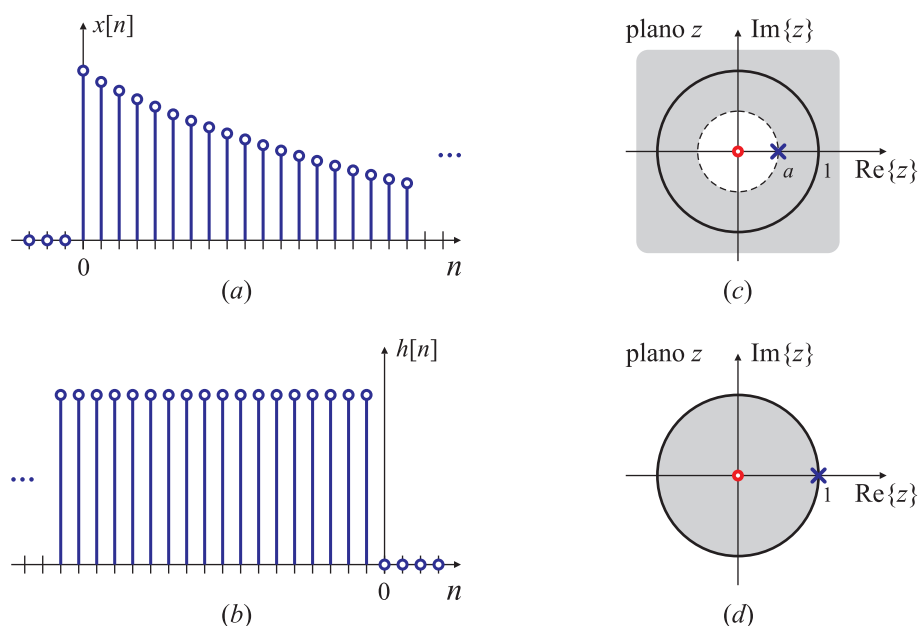
Entonces en los puntos de plano  $z$  comunes a las dos regiones de convergencia se puede escribir

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z),$$

donde la región de convergencia incluye la intersección de las regiones de convergencia de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ . Si un polo en el borde de una de las regiones de convergencia de una sucesión es cancelado por un cero de la otra, entonces la región de convergencia de  $Y(z)$  puede ser mayor.

La propiedad de convolución y la propiedad de desplazamiento temporal son muy útiles para el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo. como consecuencia de esta propiedad, la transformada  $z$  de la salida de un sistema puede escribirse como el producto de la transformada de la entrada multiplicada por la transformada de la respuesta impulsiva del sistema.

La transformada de la respuesta impulsiva de un sistema se conoce coo **función de sistema**.



**Fig. 6.24.** Sucesión  $x[n] = a^n u[n]$  (a) y la RdC y el diagrama de polos y ceros de  $X(z)$  (c). Sucesión  $h[n] = u[-n-1]$  (b) y la RdC y el diagrama de polos y ceros de  $H(z)$  (d).

#### EJEMPLO 6.32. Cálculo de la convolución entre dos sucesiones

Se debe calcular la convolución entre la sucesión  $x[n] = a^n u[n]$ , donde se supone que  $|a| < 1$ , representada en la Fig. 6.24(a) y la sucesión  $h[n] = u[-n-1]$  que se grafica en la Fig. 6.24(b). En este ejemplo se exploran dos alternativas:

- **Cálculo de la convolución por definición:** Si  $y[n] = x[n] * h[n]$ , como  $x[n]$  es causal y  $h[n]$  es no causal se encuentra que

$$y[n] = \sum_k x[k]h[n-k] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k], & \text{si } n < 0, \\ \sum_{k=n+1}^{\infty} x[k]h[n-k], & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

Entonces, para  $n < 0$  se tiene que

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Por otra parte, si  $n \geq 0$ ,

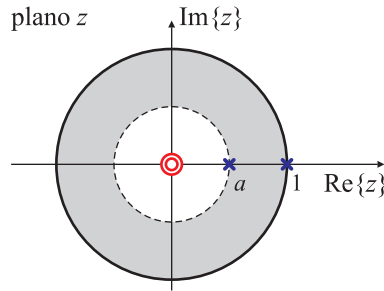
$$y[n] = \sum_{k=n+1}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=n+1}^{\infty} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} a^k - \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Por lo tanto,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & \text{si } n < 0, \\ \frac{a^{n+1}}{1-a}, & \text{si } n \geq 0. \end{cases} \quad (6.79)$$

- **Cálculo de la convolución aplicando la transformada  $z$**

En general, es mucho más sencillo antitransformar el producto de las transformadas  $\mathcal{Z}$  de las



**Fig. 6.25.** Región de convergencia de  $Y(z)$  del Ejemplo 6.32.

sucesiones que efectuar el cálculo de la convolución por definición. en este caso,

$$x[n] = a^n u[n] \quad \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|,$$

$$h[n] = u[-n - 1] \quad \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \quad H(z) = \frac{(-1)}{1 - z^{-1}}, \quad |z| < 1.$$

representadas en las Fig. 6.24(c) y 6.24(d), respectivamente. Como  $|a| < 1$ , las regiones de convergencia de  $X(z)$  y de  $Y(z)$  se solapan en  $|a| < |z| < 1$ , y entonces se puede definir

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \times \frac{(-1)}{1 - z^{-1}}, \quad \text{para } |a| < |z| < 1.$$

La región de convergencia de  $Y(z)$  se muestra en la Fig. 6.25. Expresando  $Y(z)$  en fracciones parciales,

$$Y(z) = \frac{A_0}{1 - az^{-1}} + \frac{A_1}{1 - z^{-1}},$$

donde

$$A_0 = Y(z)(1 - az^{-1}) \Big|_{z=a} = \frac{(-1)}{1 - z^{-1}} \Big|_{z=a} = \frac{-1}{1 - a^{-1}} = \frac{a}{1 - a},$$

$$A_1 = Y(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z=1} = \frac{(-1)}{1 - az^{-1}} \Big|_{z=1} = \frac{-1}{1 - a}.$$

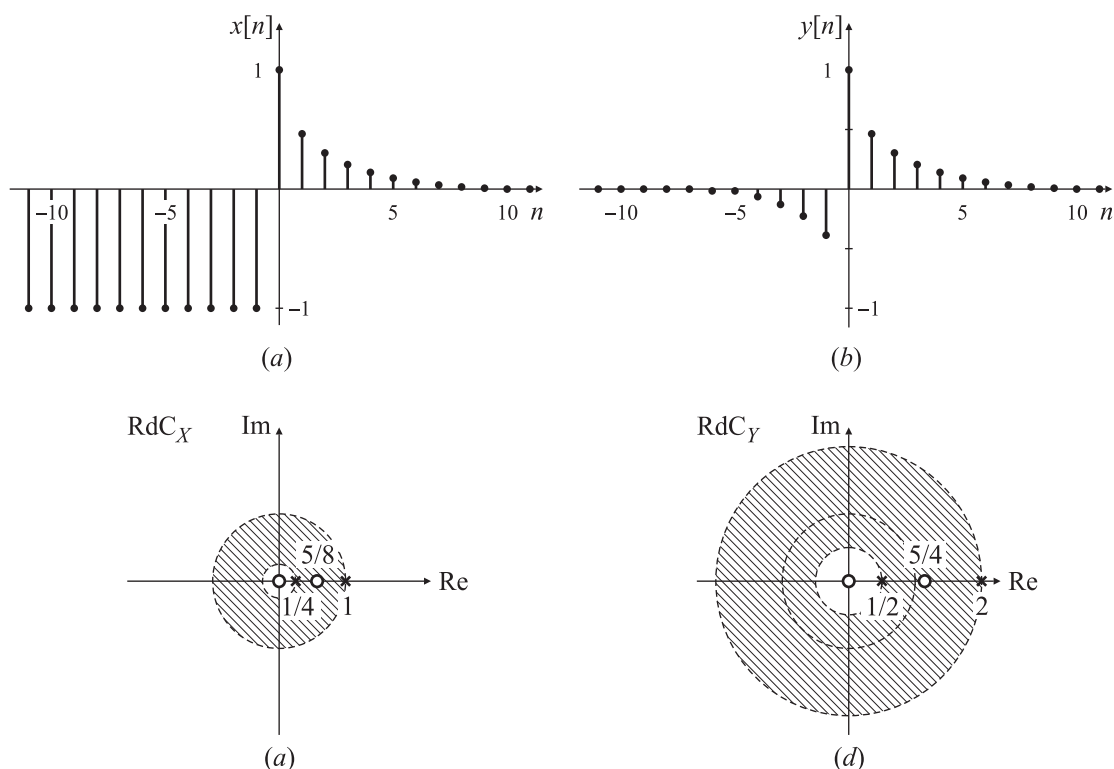
Por lo tanto,

$$Y(z) = \left( \frac{a}{1 - a} \right) \frac{1}{1 - az^{-1}} + \left( \frac{-1}{1 - a} \right) \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \text{para } |a| < |z| < 1.$$

Para el polo en  $z = a$ , la región de convergencia es el exterior de un círculo, y por lo tanto la antitransformada corresponde a una sucesión derecha. Para el polo en  $z = 1$  la región de convergencia es el interior de un círculo, y en consecuencia se asocia a una sucesión izquierda. En definitiva,

$$y[n] = \left( \frac{a}{1 - a} \right) a^n u[n] + \frac{1}{1 - a} u[-n - 1],$$

que, evidentemente, coincide con la convolución calculada por definición en (6.79).  $\square$



**Fig. 6.26.** Sucesiones  $x[n]$  (a) e  $y[n]$  (b) del Ejemplo 6.33 y sus regiones de convergencia  $\text{RdC}_X$  (c) y  $\text{RdC}_Y$  (d).

### EJEMPLO 6.33. Identificación de un sistema a partir de su entrada y su salida

Se desea conocer la respuesta impulsiva  $h[n]$  de un sistema que al ser excitado con la entrada

$$x[n] = (1/4)^n u[n] - u[-n - 1]$$

que se representa en la Fig. 6.26(a) responde con la salida

$$y[n] = (1/2)^n u[n] - 2^n u[-n - 1].$$

que se grafica en la Fig. 6.26(b). Si  $X(z)$ ,  $Y(z)$  y  $H(z)$  son las transformadas de  $x[n]$ ,  $y[n]$  y  $h[n]$ , resulta que

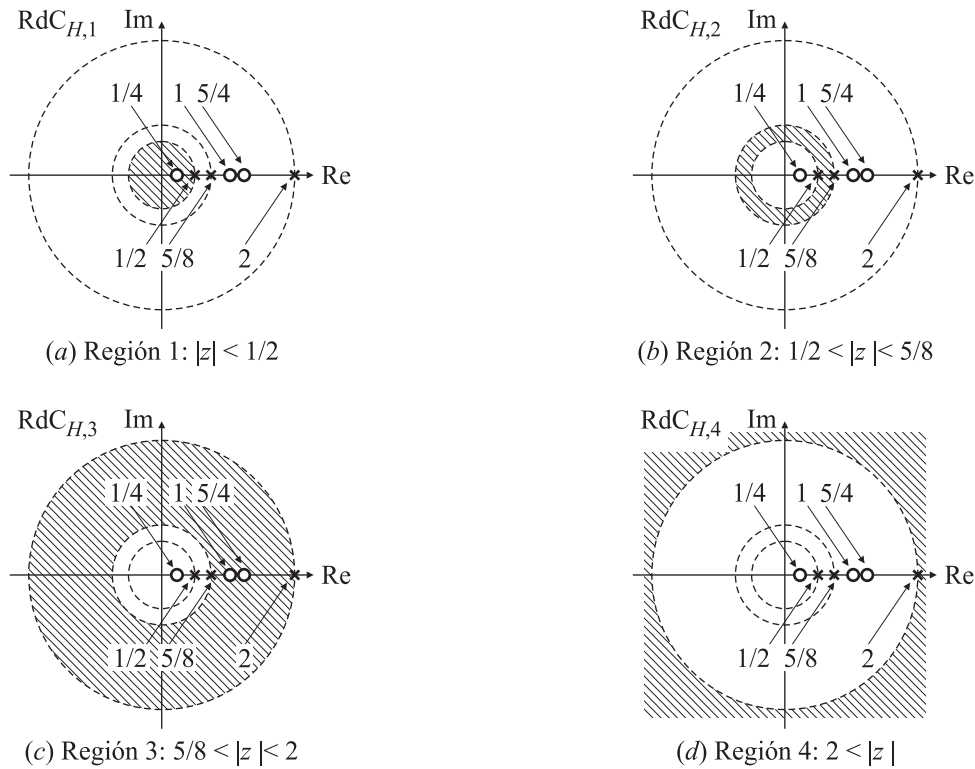
$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{2(1 - \frac{5}{8}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad \text{RdC}_X : \frac{1}{4} < |z| < 1$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{2(1 - \frac{5}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \quad \text{RdC}_Y : \frac{1}{2} < |z| < 2$$

y por lo tanto,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - \frac{5}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{5}{8}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}. \quad (6.80)$$

La clave está en determinar adecuadamente la región de convergencia de  $H(z)$ . Como  $y[n] = x[n] * h[n]$ , la región de convergencia de  $x[n]$  y las de  $h[n]$ , que se muestran en la Fig. 6.26(c) y (d), respectivamente, tienen que solaparse, y la propiedad establece que la región de convergencia de  $Y(z)$  contiene a la región de convergencia de  $X(z)H(z)$ . Como  $H(z)$  tiene tres polos (en  $z_1 = 1/2$ ,  $z_2 = 5/8$  y en  $z_3 = 2$ ), las regiones de convergencia posibles son cuatro, representadas en la Fig. 6.27.



**Fig. 6.27.** Posibles regiones de convergencia de la función de sistema  $H(z)$  del Ejemplo 6.33.

1.  $\text{RdC}_{H,1} : |z| < 1/2$ . Esta región no es compatible con la  $\text{RdC}_Y$ , y por lo tanto se descarta.
2.  $\text{RdC}_{H,2} : 1/2 < |z| < 5/8$ . Esta región se solapa parcialmente con  $\text{RdC}_X$  y con  $\text{RdC}_Y$ .
3.  $\text{RdC}_{H,3} : 5/8 < |z| < 2$ . Esta región se solapa parcialmente con  $\text{RdC}_X$  y con  $\text{RdC}_Y$ .
4.  $\text{RdC}_{H,4} : |z| < 2$ . Esta región no se solapa con  $\text{RdC}_X$  y por lo tanto no es admisible.

De las cuatro regiones especificadas, sólo dos son admisibles: la Región 2 ( $\text{RdC}_{H,2} : 1/2 < |z| < 5/8$ ) y la Región 3 ( $\text{RdC}_{H,3} : 5/8 < |z| < 2$ ). Esto significa que hay *dos* sistemas inversos posibles: uno no causal e inestable, caracterizado por la región de convergencia  $\text{RdC}_{H,2}$  y otro no causal, pero estable, cuya región de convergencia es  $\text{RdC}_{H,3}$ .

Para calcular cada una de las respuesta impulsivas conviene expresar la función de sistema  $H(z)$  de la ecuación (6.80) en fracciones parciales. Se tiene que

$$H(z) = \frac{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - \frac{5}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{5}{8}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{-\frac{5}{16}z^{-3} + \frac{29}{16}z^{-2} - \frac{5}{2}z^{-1} + 1}{-\frac{5}{8}z^{-3} + \frac{41}{16}z^{-2} - \frac{25}{8}z^{-1} + 1} \quad (6.81)$$

Como el numerador y el denominador son polinomios de igual orden es necesario hacer la división:

$$\begin{array}{r|l} -\frac{5}{16}z^{-3} + \frac{29}{16}z^{-2} - \frac{5}{2}z^{-1} + 1 & -\frac{5}{8}z^{-3} + \frac{41}{16}z^{-2} - \frac{25}{8}z^{-1} + 1 \\ -\frac{5}{16}z^{-3} + \frac{41}{32}z^{-2} - \frac{25}{16}z^{-1} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{17}{32}z^{-2} - \frac{15}{16}z^{-1} + \frac{1}{2} \end{array}$$

de modo que

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{17}{32}z^{-2} - \frac{15}{16}z^{-1} + \frac{1}{2}}{-\frac{5}{8}z^{-3} + \frac{41}{16}z^{-2} - \frac{25}{8}z^{-1} + 1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{17}{32}z^{-2} - \frac{15}{16}z^{-1} + \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{5}{8}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}.$$

Esta expresión puede escribirse como

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{A_0}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{A_1}{(1 - \frac{5}{8}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - 2z^{-1})},$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 &= H(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1})|_{z=1/2} = \frac{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - \frac{5}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{5}{8}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}|_{z=1/2} = 1, \\ A_1 &= H(z)(1 - \frac{5}{8}z^{-1})|_{z=5/8} = \frac{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - \frac{5}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}|_{z=5/8} = -\frac{9}{11}, \\ A_2 &= H(z)(1 - 2z^{-1})|_{z=2} = \frac{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - \frac{5}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{5}{8}z^{-1})}|_{z=2} = \frac{7}{22}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} - \frac{9}{11} \frac{1}{(1 - \frac{5}{8}z^{-1})} + \frac{7}{22} \frac{1}{(1 - 2z^{-1})}.$$

A partir de esta expresión es sencillo calcular las transformadas inversas:

1. Para  $\text{RdC}_{H,2} : 1/2 < |z| < 5/8$ , el polo en  $z = 1/2$  está asociado a la región de convergencia formada por el exterior de un círculo, y corresponden entonces a una sucesión derecha. La región de convergencia de los otros dos polos (en  $z = 5/8$  y  $z = 2$ ) es el interior de un círculo, y por lo tanto corresponden a sucesiones izquierdas. Por lo tanto, la respuesta impulsiva es

$$h_{\text{RdC}2}[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{9}{11} \left(\frac{5}{8}\right)^n u[-n-1] - \frac{7}{22} (2)^n u[-n-1]. \quad (6.82)$$

que caracteriza a un sistema que es *no causal* e *inestable*.

2. Para  $\text{RdC}_{H,3} : 5/8 < |z| < 2$ , tanto el polo en  $z = 1/2$  como el polo en  $z = 5/8$  están en el interior del anillo de convergencia, y por lo tanto corresponden a sucesiones derechas, mientras que el polo en  $z = 2$  corresponde a una sucesión izquierda. La respuesta impulsiva es entonces

$$h_{\text{RdC}3}[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{9}{11} \left(\frac{5}{8}\right)^n u[n] - \frac{7}{22} (2)^n u[-n-1]. \quad (6.83)$$

que caracteriza a un sistema *no causal* y *estable*.

La ecuación de sistema (6.81) está asociada a la ecuación a diferencias

$$y[n] - \frac{25}{8}y[n-1] + \frac{41}{16}y[n-2] - \frac{5}{8}y[n-3] = x[n] - \frac{5}{2}x[n-1] + \frac{29}{16}x[n-2] - \frac{5}{16}x[n-3]. \quad (6.84)$$

Para obtener cada una de las respuestas impulsivas (6.82-6.83) es necesario dar un conjunto de condiciones iniciales para (6.84). Como la parte recursiva del sistema es de tercer orden se deben dar *tres* condiciones iniciales; la forma más sencilla es evaluar tres términos de  $h_{\text{RdC}2}[n]$ ,  $h_{\text{RdC}3}[n]$ , respectivamente. Evaluando por ejemplo en  $n = -1, -2, -3$ , se encuentra que

$n$	$h_{\text{RdC}2}[n]$	$n$	$h_{\text{RdC}3}[n]$
-1	$\frac{23}{20} \cong 1,15$	-1	$-\frac{7}{44} \cong -0,159091$
-2	$\frac{403}{200} \cong 2,015$	-2	$-\frac{7}{88} \cong -0,079545$
-3	$\frac{6623}{2000} \cong 3,3115$	-3	$-\frac{7}{176} \cong -0,039772$

Entonces, la ecuación a diferencias (6.84) con las condiciones iniciales  $y[-1] = 23/20$ ,  $y[-2] = 403/200$ , e  $y[-3] = 6623/2000$  resulta en la respuesta impulsiva  $h_{\text{RdC}2}[n]$  dada por la ecuación (6.82), mientras que la misma ecuación con las condiciones iniciales  $y[-1] = -7/44$ ,  $y[-2] = -7/88$ , e  $y[-3] = -7/176$  genera la respuesta impulsiva  $h_{\text{RdC}3}[n]$  indicada por (6.83).

Nuevamente, es instructivo (aunque *muy* tedioso) revisar que la convolución de la señal  $x[n] = (1/4)^n u[n] - u[-n-1]$  con cualquiera de las respuestas impulsivas  $h_{RdC2}[n]$ ,  $h_{RdC3}[n]$  dadas por (6.82-6.83), respectivamente, resultan en la *misma* salida  $y[n] = (1/2)^n u[n] - 2^n u[-n-1]$ . Esta verificación se puede hacer en Mathematica siguiendo la secuencia de comandos que se lista a continuación.

```
In[1]:= (* señal de entrada *)
x[n_] := (1/4)^n UnitStep[n] - UnitStep[-n-1];
(* señal de salida *)
y[n_] := (1/2)^n UnitStep[n] - 2^n UnitStep[-n-1];

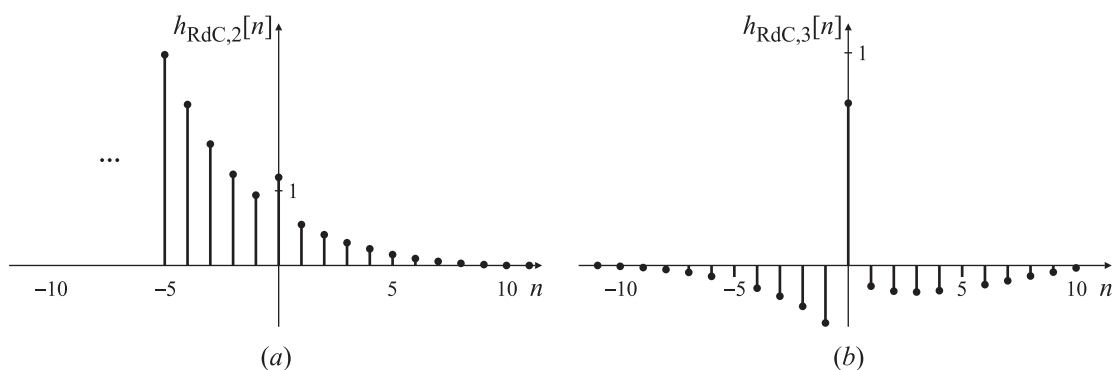
(* respuesta impulsiva no causal, no estable *)
h1[n_] := (1/2) DiscreteDelta[n] + (1/2)^n UnitStep[n] +
(9/11) (5/8)^n UnitStep[-n-1] - (7/22) 2^n UnitStep[-n-1];
(* convolución de x[n] con h1[n] *)
yc1 = Sum[x[k] h1[n-k], {k, -Infinity, Infinity}];
(* comparación de y[n] con yc1 para -10 ≤ n ≤ 10 *)
Table[yc1 - y[n], {n, -10, 10}]

Out[5]= {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

(* respuesta impulsiva no causal, estable *)
h2[n_] := (1/2) DiscreteDelta[n] + (1/2)^n UnitStep[n] -
(9/11) (5/8)^n UnitStep[n] - (7/22) 2^n UnitStep[-n-1];
(* convolución de x[n] con h2[n] *)
yc2 = Sum[x[k] h2[n-k], {k, -Infinity, Infinity}];
(* comparación de y[n] con yc2 para -10 ≤ n ≤ 10 *)
Table[yc2 - y[n], {n, -10, 10}]

Out[8]= {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

Para verificar que  $y_{c1}[n] = x[n] * h_{RdC2}[n]$  coincide con  $y[n]$  se calculan los valores de ambas respuestas para  $-10 \leq n \leq 10$  usando el comando `Table[ ]`. Lo mismo se hace con la respuesta  $y_{c2}[n] = x[n] * h_{RdC3}[n]$ . Las respuestas impulsivas  $h_{RdC2}[n]$ ,  $h_{RdC3}[n]$  se representan en la Fig. 6.28(a) y (b), respectivamente.  $\square$



**Fig. 6.28.** Respuestas impulsivas no causal e inestable (a) y no causal y estable (b) compatibles con la entrada  $x[n]$  y la salidas  $y[n]$  del sistema del Ejemplo 6.33.



### 6.5.8. Teorema del valor inicial

Si  $x[n]$  es causal, es decir,  $x[n] = 0$  para  $n < 0$ , entonces

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

La demostración es sencilla. Si  $x[n]$  es causal, su transformada z es

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} + \dots$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} (x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} + \dots) \\ &= x[0] + \lim_{z \rightarrow \infty} (x[1]z^{-1}) + \lim_{z \rightarrow \infty} (x[2]z^{-2}) + \lim_{z \rightarrow \infty} (x[3]z^{-3}) + \dots \\ &= x[0]. \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 6.34. Teorema del valor inicial

En el Ejemplo 6.11 se mostró que la sucesión

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n]$$

era la antitransformada de

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1.$$

Tanto  $x[n]$  como la RdC de  $X(z)$  son las de una sucesión causal. Entonces se puede aplicar el teorema del valor inicial. Es sencillo verificar que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 1. \quad (6.85)$$

Por otra parte, el valor de  $x[n]$  en  $n = 0$  es

$$x[n]|_{n=0} = 2\delta[n]|_{n=0} - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]|_{n=0} + 8u[n]|_{n=0} = 2 - 9 + 8 = 1. \quad (6.86)$$

Comparando (6.85) y (6.86), se comprueba que se verifica el teorema del valor inicial. Usualmente este teorema es útil para verificar las antitransformadas siempre que sean sucesiones causales.  $\square$

Como se ve en la demostración, el teorema sólo es aplicable para las sucesiones causales, como se muestra en el siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 6.35. Aplicación (incorrecta) del teorema del valor inicial a una sucesión no causal

En el Ejemplo 6.12 se demostró que la sucesión

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}u[-n-1]$$

es la antitransformada de

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1.$$

Si se calcula el  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$  se encuentra que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = 1.$$

Sin embargo,

$$x[n]|_{n=0} = \delta[n]|_{n=0} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n]|_{n=0} - \frac{1}{3}u[-n-1]|_{n=0} = 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}.$$

Es claro que en este caso  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 1 \neq x[n]|_{n=0} = 2/3$ . Pero es natural porque el teorema del valor inicial no es aplicable en este caso: tanto la sucesión como la región de convergencia de su transformada z no corresponden a una sucesión causal.  $\square$

### 6.5.9. Teorema del valor final

Si  $x[n]$  es una sucesión causal el teorema del valor final establece que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

si el límite existe. Este teorema es útil para encontrar el valor de estado estacionario de una sucesión, pero no sirve para sucesiones sinusoidales porque no existe el  $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$ .

#### EJEMPLO 6.36. Teorema del valor final

En el Ejemplo 6.11 se encontró el par transformado

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1.$$

La sucesión  $x[n]$  es causal, y la RdC de su transformada z corresponde a la de una sucesión causal. Por lo tanto, se puede aplicar el teorema del valor final. Es sencillo ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \delta[n] - 9 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8 \lim_{n \rightarrow \infty} u[n] = 8,$$

y por otra parte,

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{(z + 1)^2}{(z - \frac{1}{2})(z - 1)} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8.$$

Naturalmente, ambos resultados coinciden. La ventaja del teorema del valor final es que si uno solo necesita conocer el valor de estado estacionario de una sucesión, no tiene necesidad de calcular la antitransformada. Este teorema es muy útil en aplicaciones de control de sistemas.  $\square$

## 6.6. El teorema de convolución compleja

En el Capítulo 3 se discutió la propiedad de convolución periódica para las transformadas de Fourier de tiempo discreto (TFTD). Específicamente, la transformada de Fourier de un producto de sucesiones es la convolución periódica de sus transformadas de Fourier. Una generalización de esta propiedad es el teorema de la convolución compleja, que relaciona la transformada  $\mathcal{Z}$  del producto de sucesiones con la transformada  $\mathcal{Z}$  de cada una de las sucesiones.

Para derivar el teorema de la convolución compleja sea  $w[n]$  el producto de dos sucesiones  $x[n]$  e  $y[n]$ ,

$$w[n] = x[n]y[n],$$

de modo que

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]z^{-n}. \quad (6.87)$$

Si  $Y(z)$  es la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $y[n]$ , se puede escribir

$$y[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} Y(v)v^{n-1}dv,$$

donde  $C_y$  es un contorno de integración orientado en sentido antihorario contenido en la región de convergencia de  $Y(v)$ . Por lo tanto,  $W(z)$  resulta

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[ \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} Y(v)v^{n-1}dv \right] z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} \underbrace{\left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z/v)^{-n} \right]}_{X(z/v)} Y(v)v^{-1}dv$$

que puede escribirse como

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} X(z/v)Y(v)v^{-1}dv \quad (6.88)$$

donde  $C_2$  es un contorno cerrado contenido en la zona común de las regiones de convergencia de  $X(z/v)$  y de  $Y(v)$ . De manera similar, si se reemplaza en (6.87) la sucesión  $x[n]$  por su expresión equivalente

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} X(v)v^{n-1}dv,$$

se llega a la expresión

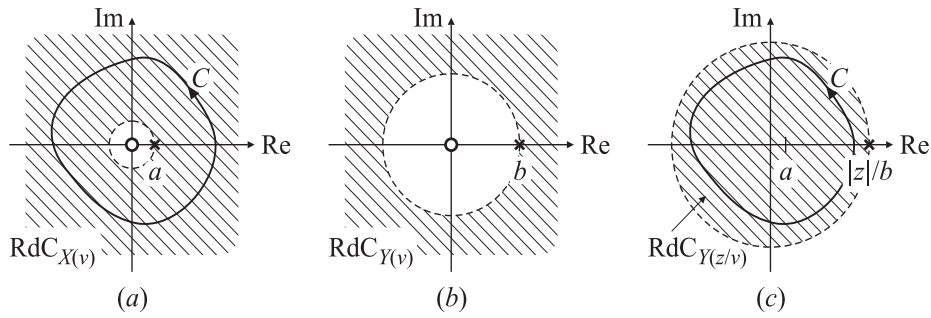
$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} X(v)Y(z/v)v^{-1}dv, \quad (6.89)$$

donde en este caso  $C_x$  es un contorno de integración contenido en la región de convergencia común a  $X(v)$  y a  $Y(z/v)$ . Para determinar la región de convergencia de  $W(z)$  se supone que las regiones de convergencia de  $X(z)$  y de  $Y(z)$  están dadas por

$$\text{RdC}_X: r_{dx} < |z| < r_{ix}, \quad \text{RdC}_Y: r_{dy} < |z| < r_{iy}.$$

Entonces, en la ecuación (6.88)  $C_Y$  es un contorno tal que

$$r_{dy} < |v| < r_{iy},$$



**Fig. 6.29.** Diagramas de polos y ceros y región de convergencia de  $X(v)$  (a),  $Y(v)$  (b) e  $Y(z/v)$  (c) del Ejemplo 6.37.

y

$$r_{dx} < \left| \frac{z}{v} \right| < r_{ix}.$$

Combinando estas dos expresiones, se encuentra que la región de convergencia de  $W(z)$  es

$$r_{dx}r_{dy} < |z| < r_{ix}r_{iy}.$$

Esta región de convergencia se suele designar como  $\text{RdC}_X \times \text{RdC}_Y$ . En algunas ocasiones la región de convergencia puede ser más grande que esta, por la eventual cancelación de polos y ceros, pero siempre incluye la región de convergencia recién definida, y extendiéndose hacia adentro o hacia afuera hasta los polos más cercanos. En otras palabras, la región de convergencia de  $W(z)$  contiene a  $\text{RdC}_X \times \text{RdC}_Y$ .

Como es de esperar, las expresiones (6.88) y (6.89) coinciden con las convoluciones periódicas de la transformada de Fourier cuando se toma el círculo unitario como el contorno  $C_X$  o  $C_Y$ , haciendo  $v = e^{j\theta}$  (de manera que  $dv = je^{j\theta}d\theta$ ) y evaluando  $W(z)$  sobre el círculo unitario tomando  $z = e^{j\omega}$ . En estas condiciones, la expresión (6.89) se puede escribir como

$$\begin{aligned} W(z)|_{z=e^{j\omega}} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_X} X(v)Y(z/v)v^{-1}dv = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j\omega}/e^{j\theta})e^{-j\theta}(je^{j\theta}d\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j\omega-\theta})d\theta, \end{aligned}$$

que es la expresión de la convolución periódica estudiada en el Capítulo 2.

Una de las principales dificultades en aplicar el teorema de convolución compleja consiste en determinar cuáles de los polos del integrando quedan dentro y cuáles fuera del contorno de integración. El siguiente ejemplo permite ilustrar el procedimiento.

#### EJEMPLO 6.37. Aplicación del teorema de convolución compleja

Sean  $x[n] = a^n u[n]$  e  $y[n] = b^n u[n]$ . Es claro que

$$w[n] = x[n]y[n] = a^n u[n]b^n u[n] = (ab)^n u[n],$$

y por lo tanto,

$$W(z) = \frac{1}{1 - (ab)z^{-1}}, \quad \text{para } |z| > |ab|. \quad (6.90)$$

Este mismo resultado puede encontrarse aplicando el teorema de convolución compleja. Las transformadas  $\mathcal{Z}$  de  $x[n]$  e  $y[n]$  son

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|, \quad \text{y} \quad Y(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > |b|,$$

respectivamente. Reemplazando en (6.89) se tiene que

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y(z/v)v^{-1}dv = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{1 - av^{-1}} \frac{1}{1 - b(z/v)^{-1}} v^{-1} dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{(v - a)} \frac{-(z/b)}{(v - z/b)} dv \end{aligned}$$

El integrando (es conveniente destacar que aquí la variable es  $v$  y no  $z$ ) tiene dos polos, uno ubicado en  $v = a$  y otro en  $v = z/b$ . El diagrama de polos y ceros y la región de convergencia de  $X(v)$  se representan en Fig. 6.29(a). Ya que el contorno de integración debe estar dentro de la región de convergencia de  $X(v)$ , necesariamente encierra el polo en  $v = a$ . Para determinar si el contorno rodea o no al polo en  $v = z/b$ , se observa que la región de convergencia de  $Y(z)$  es  $|z| > |b|$ , como se muestra en la Fig. 6.29(b) y por lo tanto, la región de convergencia de  $Y(z/v)$  es  $|z/v| > |b|$  o  $|v| > |z/b|$ , como se ilustra en la Fig. 6.29(c). Como el contorno de integración debe estar contenido en la región de convergencia común a  $X(v)$  y a  $Y(z/v)$ , el polo en  $v = z/b$  queda *afuera* del contorno  $C$ . (En las figura se ha supuesto que  $a$  y  $b$  son reales para facilitar la representación). Utilizando el teorema de los residuos de Cauchy para evaluar  $W(z)$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{(v - a)} \frac{-(z/b)}{(v - z/b)} dv = \text{Res} \left\{ \frac{1}{(v - a)} \frac{-(z/b)}{(v - z/b)} \text{ en } v = a \right\} \quad (6.91) \\ &= \frac{-(z/b)}{(a - z/b)} = \frac{1}{1 - (ab)z^{-1}}, \end{aligned}$$

que coincide con la expresión calculada en (6.90). Debe notarse que, para que se solapen las regiones de convergencia de  $X(v)$  y de  $Y(z/v)$ , la Fig. 6.29(c) muestra que  $|z/b| > |a|$ , de donde resulta que  $W(z)$  converge donde  $|z| > |ab|$ .

**Nota:** El cálculo de residuo en (6.91) sólo tiene en cuenta el polo encerrado por el contorno de integración. Es rutina verificar que si (por error) dentro del contorno de integración se hubiese considerado también el polo en  $v = z/b$ , la evaluación de la integral hubiese sido nula.  $\square$

## 6.7. Relación de Parseval

En el Capítulo 2 se estudió la relación de Parseval para la transformada de Fourier. La generalización de esta relación para la transformada  $\mathcal{Z}$  es consecuencia directa del teorema de convolución compleja. Dadas dos sucesiones (que se supondrán complejas),  $x[n]$  e  $y[n]$ , la relación de Parseval establece que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*(1/v^*)v^{-1}dv, \quad (6.92)$$

donde el contorno de integración debe estar contenido en la zona común entre la región de convergencia de  $X(v)$  y la de  $Y^*(1/v^*)$ . La relación (6.92) se puede obtener definiendo una sucesión auxiliar

$$w[n] = x[n]y^*[n],$$

y notando que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] = W(z)|_{z=1}. \quad (6.93)$$

De la Propiedad 5 de la Tabla 4.2 y el teorema de convolución compleja,

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*(z^*/v^*)v^{-1}dv. \quad (6.94)$$

Evalutando (6.94) para  $z = 1$  se obtiene (6.92). Debe observarse que para poder aplicar (6.93) la región de convergencia de  $W(z)$  debe contener el círculo unitario.

Si tanto  $X(z)$  como  $Y(z)$  convergen sobre el círculo unitario, se puede elegir  $v = e^{j\omega}$ , y la ecuación (6.92) se puede escribir como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega, \quad (6.95)$$

que es la relación de Parseval para la transformada de Fourier estudiada en el Capítulo 2.

La relación de Parseval en la forma de la ecuación (6.95) es difícil de evaluar. Por ejemplo, si  $X(z)$  e  $Y(z)$  son funciones racionales, el integrando de 6.95 será una función complicada de  $e^{j\omega}$  aún para sistemas sencillos. Sin embargo, la expresión (6.92) se puede calcular fácilmente aplicando el teorema de los residuos de Cauchy, como se muestra en el Ejemplo 6.38.

Un caso particular de (6.92) es cuando  $x[n] = y[n]$ , donde  $x[n]$  es una sucesión real. En este caso la relación (6.92) toma la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)X(1/v)v^{-1}dv, \quad (6.96)$$

donde  $C$  es un contorno cerrado en la región de convergencia de  $X(z)$ . Como se mencionó más arriba, para que las sumatorias del miembro izquierdo sean finitas, la región de convergencia de  $X(z)$  debe contener al círculo unitario.

La expresión (6.96) es una expresión de la energía de una sucesión  $x[n]$  en función de su transformada  $Z$ , y se suele aplicar para encontrar la potencia de ruido (debido al redondeo en las operaciones aritméticas) en la salida de filtros digitales. El siguiente ejemplo muestra el uso del teorema de los residuos de Cauchy para evaluar la ecuación (6.96).

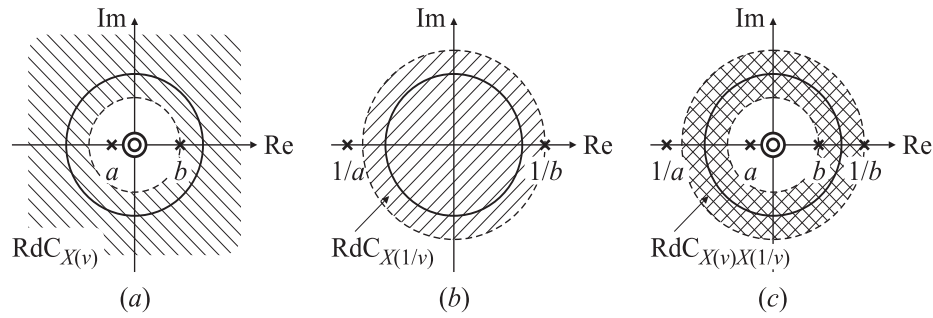
#### EJEMPLO 6.38. Energía de una sucesión en base a la relación de Parseval

Sea  $x[n]$  una sucesión derecha con transformada  $Z$

$$X(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})},$$

donde  $|a| < |b| < 1$ . Entonces, la región de convergencia de  $X(z)$  es  $|z| > |b|$ . Para calcular la integral de contorno en (6.96) es necesario calcular  $X(v) = X(z)|_{z=v}$ , que está dada por

$$X(v) = \frac{1}{(1 - av^{-1})(1 - bv^{-1})} = \frac{v^2}{(v - a)(v - b)},$$



**Fig. 6.30.** Diagramas de polos y ceros y regiones de convergencia de  $X(v)$  (a),  $X(1/v)$  (b) y de  $X(v)X(1/v)$  (c) (Ejemplo 6.38).

y cuya región de convergencia es  $|v| > |b|$ , que tiene un cero doble en el origen y un polo en  $v = a$  y otro en  $v = b$ , como se muestra en la Fig. 6.30(a). También es necesario calcular  $X(v^{-1}) = X(z)|_{z=v^{-1}}$ ,

$$X(v^{-1}) = \frac{1}{(1 - av)(1 - bv)} = \frac{1}{ab} \frac{1}{(v - 1/a)(v - 1/b)},$$

que tiene un cero doble en infinito, y polos en  $v = 1/a$  y en  $v = 1/b$ , donde por hipótesis,  $1 < 1/|b| < 1/|a|$ . La región de convergencia es entonces  $|v| < 1/|b|$ , que naturalmente se solapa con la región de convergencia de  $X(v)$ , como se representa en la Fig. 6.30(b). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)X(1/v)v^{-1}dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{v^2}{(v-a)(v-b)} \frac{1}{ab} \frac{1}{(v-1/a)(v-1/b)} v^{-1}dv \end{aligned} \quad (6.97)$$

donde  $C$  es un contorno de integración contenido en la intersección de las regiones de convergencia de  $X(v)$  y de  $X(v^{-1})$ , es decir, en el anillo  $|b| < |z| < |b|^{-1}$ , representado en la Fig. 6.30(c). Para calcular la integral de (6.97) los únicos polos rodeados por la curva  $C$  son los polos en  $v = a$  y en  $v = b$ , de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{v^2}{(v-a)(v-b)} \frac{1}{ab} \frac{1}{(v-1/a)(v-1/b)} v^{-1}dv \\ &= \text{Res} \left\{ \frac{1}{ab} \frac{v}{(v-a)(v-b)(v-1/a)(v-1/b)} \text{ en } z = a \right\} + \\ &\quad \text{Res} \left\{ \frac{1}{ab} \frac{v}{(v-a)(v-b)(v-1/a)(v-1/b)} \text{ en } z = b \right\} \\ &= \frac{1}{ab} \frac{a}{(a-b)(a-1/a)(a-1/b)} + \frac{1}{ab} \frac{b}{(b-a)(b-1/a)(b-1/b)} = \frac{1+ab}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)} \end{aligned} \quad (6.98)$$

Este resultado también puede obtenerse en el dominio temporal. La transformada  $X(z)$  también puede escribirse como

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})} = \frac{1}{1 - b/a} \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - a/b} \frac{1}{1 - bz^{-1}} \\ &= \frac{-a}{b-a} \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{b}{b-a} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \end{aligned}$$

de modo que

$$x[n] = \frac{-a}{b-a} a^n u[n] + \frac{b}{b-a} b^n u[n].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^2[n] &= \left( \frac{-a}{b-a} a^n u[n] + \frac{b}{b-a} b^n u[n] \right)^2 \\ &= \left( \frac{a^2}{(b-a)^2} a^{2n} - \frac{2ab}{(b-a)^2} a^n b^n + \frac{b^2}{(b-a)^2} b^{2n} \right) u[n], \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a^2}{(b-a)^2} a^{2n} - \frac{2ab}{(b-a)^2} a^n b^n + \frac{b^2}{(b-a)^2} b^{2n} \right) \\ &= \frac{a^2}{(b-a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n - \frac{2ab}{(b-a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (ab)^n + \frac{b^2}{(b-a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (b^2)^n \\ &= \frac{a^2}{(b-a)^2} \frac{1}{1-a^2} - \frac{2ab}{(b-a)^2} \frac{1}{1-ab} + \frac{b^2}{(b-a)^2} \frac{1}{1-b^2} \\ &= \frac{1+ab}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)} \end{aligned} \quad (6.99)$$

resultado que, naturalmente, coincide con (6.98). En este ejemplo la dificultad de calcular la energía en el dominio temporal o transformado es más o menos equivalente; sin embargo, para sistemas de mayor orden, la complejidad del cálculo en el dominio temporal crece con el orden, mientras que el desarrollo de los cálculos en el dominio transformado se limitan a calcular más residuos.  $\square$

### 6.7.1. Resumen de las propiedades de la transformada $z$

Las propiedades y los teoremas de la transformada  $z$ , muchos de los cuales son útiles en el análisis y diseño de sistemas discretos, se resumen en la Tabla 6.3.

## 6.8. Referencias

Churchill, R. V., Brown, J. W. *Variable compleja y aplicaciones*, 5ta. ed., McGraw-Hill, Madrid, 1992.

Mathews J. H., Howell, R. W., *The complex analysis project*,  
<http://math.fullerton.edu/mathews/c2003/ComplexPowerSeriesMod.html>



Tabla 6.3. Algunas propiedades de la transformada  $z$ 

Propiedad	Sucesión	Transformada	RdC
	$x[n]$	$X(z)$	$R_x$
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	$R_{x_1}$
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	$R_{x_2}$
linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	contiene $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
desplazamiento temporal	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R_x$ , posiblemente quitando o agregando el origen o $\infty$
multiplicación por una sucesión exponencial	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
derivada de $X(z)$	$nx[n]$	$-\frac{dX(z)}{dz}$	$R_x$ , posiblemente quitando o agregando el origen o $\infty$
sucesión conjugada	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	$R_x$
	$\text{Re}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	contiene $R_x$
	$\text{Im}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	contiene $R_x$
inversión temporal	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
convolución temporal	$(x_1 * x_2)$	$X_1(z)X_2(z)$	contiene $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
producto de sucesiones (convolución frecuencial)	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	$R_{x_1}R_{x_2}$
teorema de valor inicial	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$	
teorema de valor final	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$	

6.9. Tabla de transformadas  $\mathcal{Z}$ 

	sucesión	transformada	RdC
1.	$\delta[n]$	1	todo el plano $z$
2.	$\delta[n - m]$	$z^{-m}$	todo $z$ salvo 0 (si $m > 0$ ) o $\infty$ (si $m < 0$ )
3.	$a^n(u[n] - u[n - N])$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a z^{-1}}$	$ z  > 0$
4.	$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$
5.	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - a z^{-1}}$	$ z  >  a $
6.	$na^n u[n]$	$\frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}$	$ z  >  a $
7.	$(n+1) a^n u[n]$	$\frac{1}{(1 - a z^{-1})^2}$	$ z  >  a $
8.	$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  < 1$
9.	$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - a z^{-1}}$	$ z  <  a $
10.	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
11.	$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
12.	$\sin(\omega_0 n + \phi) u[n]$	$\frac{\sin \phi + \sin(\omega_0 - \phi) z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
13.	$r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - r \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
14.	$r^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{r \sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
15.	$\cosh(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cosh \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cosh \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
16.	$\sinh(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sinh \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cosh \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$

	sucesión	transformada	RdC
17.	$\frac{1}{n}u[n+1]$	$\ln\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$	$ z  > 1$
18.	$\frac{1-a^n}{n}u[n]$	$\ln\left(\frac{a^{-1}-z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)$	$ z  > 1$
19.	$\frac{\cos(\omega_0 n)}{n}u[n+1]$	$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-2\cos\omega_0}z^{-1}+z^{-2}}\right)$	$ z  > 1$
20.	$\frac{(-1)^n \cos(\omega_0 n)}{n}u[n+1]$	$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\cos\omega_0}z^{-1}+z^{-2}}\right)$	$ z  > 1$
21.	$\frac{\sin(\omega_0 n)}{n}u[n]$	$\omega_0 + \arctan\left(\frac{\sin\omega_0 z^{-1}}{1-\cos\omega_0 z^{-1}}\right)$	$ z  > 1$
22.	$\frac{(-1)^n \sin(\omega_0 n)}{n}u[n]$	$\omega_0 + \arctan\left(\frac{\sin\omega_0 z^{-1}}{1+\cos\omega_0 z^{-1}}\right)$	$ z  > 1$
23.	$\frac{\cos(\omega_0 n)}{n!}u[n]$	$e^{\cos\omega_0 z^{-1}} \cos(\sin\omega_0 z^{-1})$	$ z  > 1$
24.	$\frac{\sin(\omega_0 n)}{n!}u[n]$	$e^{\cos\omega_0 z^{-1}} \sin(\sin\omega_0 z^{-1})$	$ z  > 1$
25.	$\left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m}\right)u[n+1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} \ln\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$	$ z  > 1$
26.	$\left(\sum_{m=0}^n \frac{1}{m!}\right)u[n]$	$\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} e^{z^{-1}}$	$ z  > 1$
27.	$\frac{1+(-1)^n}{2}a^n u[n]$	$\frac{1}{1-a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $
28.	$\frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$	$\frac{\pi}{2} + \arctan(z^{-1})$	$ z  > 1$
29.	$a^n \cos(\pi n)u[n]$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$	$ z  >  a $
30.	$a^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$	$\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$	$ z  >  a $

### 6.9.1. Transformadas de sucesiones $n^r a^n u[n]$ o $-n^r a^n u[n]$

sucesión	transformada
1. $\left. \begin{array}{l} n a^n u[n], \quad  z  >  a  \\ -n a^n u[-n-1], \quad  z  <  a  \end{array} \right\}$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}$
2. $\left. \begin{array}{l} n^2 a^n u[n], \quad  z  >  a  \\ -n^2 a^n u[-n-1], \quad  z  <  a  \end{array} \right\}$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^3} (1+a z^{-1})$
3. $\left. \begin{array}{l} n^3 a^n u[n], \quad  z  >  a  \\ -n^3 a^n u[-n-1], \quad  z  <  a  \end{array} \right\}$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^4} (1+4a z^{-1}+a^2 z^{-2})$
4. $\left. \begin{array}{l} n^4 a^n u[n], \quad  z  >  a  \\ -n^4 a^n u[-n-1], \quad  z  <  a  \end{array} \right\}$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^5} (1+11a z^{-1}+11a^2 z^{-2}+a^3 z^{-3})$
5. $\left. \begin{array}{l} n^5 a^n u[n], \quad  z  >  a  \\ -n^5 a^n u[-n-1], \quad  z  <  a  \end{array} \right\}$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^6} (1+26a z^{-1}+66a^2 z^{-2}+26a^3 z^{-3}+a^4 z^{-4})$
6. $\left. \begin{array}{l} n^6 a^n u[n], \quad  z  >  a  \\ -n^6 a^n u[-n-1], \quad  z  <  a  \end{array} \right\}$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^7} (1+57a z^{-1}+302a^2 z^{-2}+302a^3 z^{-3}+57a^4 z^{-4}+a^5 z^{-5})$
7. $\left. \begin{array}{l} n^7 a^n u[n], \quad  z  >  a  \\ -n^7 a^n u[-n-1], \quad  z  <  a  \end{array} \right\}$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^8} (1+120a z^{-1}+1191a^2 z^{-2}+2416a^3 z^{-3}+1191a^4 z^{-4}+120a^5 z^{-5}+a^6 z^{-6})$
8. $\left. \begin{array}{l} n^8 a^n u[n], \quad  z  >  a  \\ -n^8 a^n u[-n-1], \quad  z  <  a  \end{array} \right\}$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^9} (1+247a z^{-1}+4293a^2 z^{-2}+15619a^3 z^{-3}+15619a^4 z^{-4}+4293a^5 z^{-5}+247a^6 z^{-6}+a^7 z^{-7})$
9. $\left. \begin{array}{l} n^9 a^n u[n], \quad  z  >  a  \\ -n^9 a^n u[-n-1], \quad  z  <  a  \end{array} \right\}$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^{10}} (1+502a z^{-1}+14608a^2 z^{-2}+88234a^3 z^{-3}+156190a^4 z^{-4}+88234a^5 z^{-5}+14608a^6 z^{-6}+502a^7 z^{-7}+a^8 z^{-8})$
10. $\left. \begin{array}{l} n^{10} a^n u[n], \quad  z  >  a  \\ -n^{10} a^n u[-n-1], \quad  z  <  a  \end{array} \right\}$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^{11}} (1+1013a z^{-1}+47840a^2 z^{-2}+455192a^3 z^{-3}+1310354a^4 z^{-4}+1310354a^5 z^{-5}+455192a^6 z^{-6}+47840a^7 z^{-7}+1013a^8 z^{-8}+a^9 z^{-9})$

## 6.9.2. Transformadas inversas de polos múltiples

transformada	RdC	sucesión
1. $\frac{1}{(1 - az^{-1})}$	$ z  >  a $	$a^n u[n]$
2.	$ z  <  a $	$-a^n u[-n - 1]$
3. $\frac{1}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  >  a $	$(n+1) a^n u[n]$
4.	$ z  <  a $	$-(n+1) a^n u[-n - 1]$
5. $\frac{1}{(1 - az^{-1})^3}$	$ z  >  a $	$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) a^n u[n]$
6.	$ z  <  a $	$-\frac{1}{2}(n+1)(n+2) a^n u[-n - 1]$
7. $\frac{1}{(1 - az^{-1})^4}$	$ z  >  a $	$-\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) a^n u[n]$
8.	$ z  <  a $	$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) a^n u[-n - 1]$
9. $\frac{1}{(1 - az^{-1})^N}$	$ z  >  a $	$\frac{1}{(N-1)!}(n+1)(n+2) \cdots (n+N-1) a^n u[n]$
10.	$ z  <  a $	$-\frac{1}{(N-1)!}(n+1)(n+2) \cdots (n+N-1) a^n u[-n - 1]$

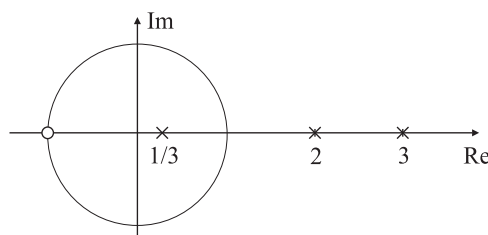
## 6.10. Ejercicios

**Ejercicio 1.** Calcule la transformada  $\mathcal{Z}$  y la región de convergencia de cada una de las siguientes sucesiones, usando la definición.

1.  $(1/2)^n u[n]$ .
2.  $(1/2)^n (u[n] - u[n - 10])$ .
3.  $-(1/2)^n u[-n - 1]$ .
4.  $\delta[n + 1]$ .
5.  $(1/2)^n u[-n]$ .
6.  $a^n u[n] + b^n u[-n - 1]$ .

**Ejercicio 2.** Si los polos y ceros de  $X(z)$  están distribuidos como se muestra en la figura,

1. Especifique la región de convergencia de  $X(z)$  si se sabe que existe la transformada de Fourier. Para este caso, determine si la sucesión es derecha, izquierda o bilátera.
2. ¿Cuántas sucesiones biláteras se pueden asociar al diagrama de polos y ceros?
3. ¿Es posible que la gráfica de polos y ceros esté asociada a una sucesión que sea estable y causal? En caso afirmativo, indique cuál es la región de convergencia.



**Ejercicio 3.** Calcule la transformada  $\mathcal{Z}$  de las siguientes señales aplicando propiedades. Resuelva también el inciso (3) aplicando la definición, y compare las regiones de convergencia que se obtienen en cada caso.

1.  $x[n] = [3(2^n) - 4(3^n)] u[n]$ .
2.  $x[n] = (a^n \cos \omega_0 n) u[n]$ .
3.  $x[n] = u[n] - u[n - N]$ .
4.  $x[n] = u[-n]$ .
5.  $x[n] = n a^n u[n]$ .

**Ejercicio 4.** Encuentre la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa de las siguientes funciones, empleando el método de la serie de potencias o la expansión en fracciones parciales.

1.  $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$ .
2.  $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$ .
3.  $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$ .
4.  $X(z) = \frac{1 - a z^{-1}}{z^{-1} - a}, \quad |z| > \frac{1}{a}$ .

**Ejercicio 5.** Demuestre que si  $X(z)$  es la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $x[n]$ , entonces:

1.  $z^{n_0} X(z) \leftrightarrow x[n + n_0]$ .
2.  $X(a^{-1}z) \leftrightarrow a^n x[n]$ .
3.  $-zX'(z) \leftrightarrow n x[n]$ .

**Ejercicio 6.** Si  $x[n]$  es una sucesión causal ( $x[n] = 0$  si  $n < 0$ ), y  $x[0] \neq 0$ , demuestre que:

1.  $X(z)$  no tienen polos ni ceros en  $z = \infty$ : el  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$  es no nulo y finito.
2. hay el mismo número de polos y de ceros en el plano  $\mathcal{Z}$  (excluido  $z = \infty$ ).

**Ejercicio 7.** Especifique las regiones de convergencia de las siguientes funciones, y calcule todas las transformadas  $\mathcal{Z}$  inversas posibles.

$$1. \quad X(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}. \qquad 2. \quad X(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{(z-2)^2(z+3)}.$$

**Ejercicio 8.** Calcule la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa de las siguientes funciones, aplicando los métodos sugeridos.

$$1. \quad X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \text{ (división larga, } x[n] \text{ es una sucesión derecha.)}$$

$$2. \quad X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}}, \text{ (fracciones parciales, } x[n] \text{ es estable.)}$$

$$3. \quad X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}, \text{ (división larga.)}$$

$$4. \quad X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{4}, \text{ (división larga.)}$$

$$5. \quad X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \text{ (por tablas.)}$$

**Ejercicio 9.** Resuelva las siguientes transformadas  $\mathcal{Z}$  inversas.

$$1. \quad X(z) = \frac{3z^{-3}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2}, \quad x[n] \text{ es izquierda.} \qquad 3. \quad X(z) = \sin(z).$$

$$2. \quad X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|. \qquad 4. \quad X(z) = \frac{z^7 - 2}{1 - z^{-7}}, \quad |z| > 1.$$

**Ejercicio 10.** Para cada una de las siguientes sucesiones, calcule la transformada  $\mathcal{Z}$  y la región de convergencia. Esboce el diagrama de polos y ceros.

$$1. \quad x[n] = a^n u[n] + b^n u[n] + c^n u[-n-1], \quad |a| < |b| < |c|.$$

$$2. \quad x[n] = n^2 a^n u[n].$$

$$3. \quad x[n] = e^{n^4} \left( \cos \frac{\pi}{12} n \right) u[n] - e^{n^4} \left( \cos \frac{\pi}{12} n \right) u[n-1].$$

**Ejercicio 11.** Determine cuál de las siguientes transformadas  $\mathcal{Z}$  no corresponde a una sucesión causal.

$$1. \quad X(z) = \frac{(z - \frac{1}{2})^4}{(z - \frac{1}{3})^3} \quad 2. \quad X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \quad 3. \quad X(z) = \frac{(z - \frac{1}{3})^2}{(z - \frac{1}{2})^3}$$

**Ejercicio 12.** Dentro de un reactor nuclear interactúan dos tipos de partículas. Cada segundo, una partícula  $\alpha$  se divide en ocho partículas  $\beta$ , y una partícula  $\beta$  se divide en una partícula  $\alpha$  y dos partículas  $\beta$ .

1. Verifique que en el  $n$ -ésimo instante de tiempo el número de partículas es

$$\begin{aligned} \alpha[n] &= \beta[n-1], \\ \beta[n] &= 2\beta[n-1] + 8\beta[n-2] + 8\delta[n-1], \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

2. Si en el tiempo inicial  $t = 0$  hay en el reactor una única partícula  $\alpha$ , ¿cuántas partículas  $\alpha$  y cuántas partículas  $\beta$  hay en  $t = 100$ ?

**Ejercicio 13.** Un préstamo de  $p = 100000$  \$ se debe amortizar en 360 cuotas mensuales de  $c$  pesos. El interés, acumulado mensualmente, se computa a razón de  $\rho = 10\%$  por año sobre el saldo deudor: por ejemplo, después del primer mes (y justo antes del primer pago), la deuda total es  $y[1] = 100000 + \frac{0,10}{12}100000$ .

1. Verifique que el balance en el  $n$ -ésimo mes es

$$y[n] = (1 + \beta)y[n-1] - cu[n-1] + p\delta[n], \quad n \geq 1.$$

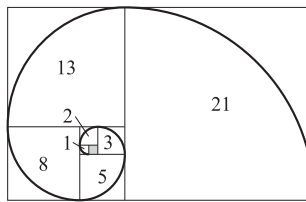
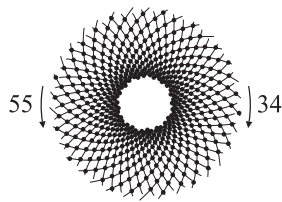
2. Calcule el monto  $p$  de la cuota de manera de cancelar la deuda en 30 años, dejando un balance neto nulo.

**Ejercicio 14.** La sucesión de Fibonacci generalizada satisface la ecuación a diferencias

$$x[n+2] = x[n+1] + x[n], \quad n \geq 0,$$

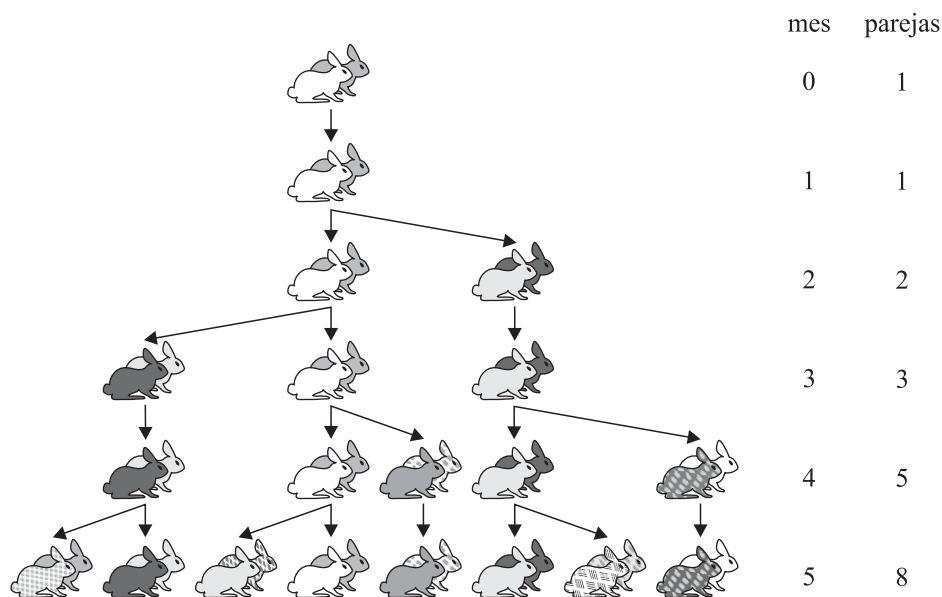
es decir, que el valor actual es la suma de los dos valores previos. La sucesión clásica se cita por vez primera en el *Liber abaci*, publicado en 1202 por el comerciante y matemático italiano Leonardo de Pisa, o Fibonacci (*figlio dei Bonacci*), y se obtiene cuando las condiciones iniciales son  $x[0] = 0$  y  $x[1] = 1$ . Esta sucesión aparece en un sinnúmero de problemas aparentemente no relacionados, como la impedancia de entrada de una red resistiva en escalera, la separación de los brotes en las ramas de los árboles, el número de pétalos de las flores (las lilas tienen 3, los ranúnculos 5, las caléndulas 13, los ásteres 21, y la mayoría de las margaritas 34, 55, u 89; las semillas de girasol están dispuestas sobre dos familias de espirales entrelazadas, 34 en sentido horario y 55 en sentido antihorario, como se muestra en la figura, aunque según la familia pueden ser 34 y 55, 55 y 89 u 89 y 144), etc. La espiral equiangular, formada por cuartos de círculos cuyos radios crecen según la serie de Fibonacci reproduce el aspecto de los caracoles.



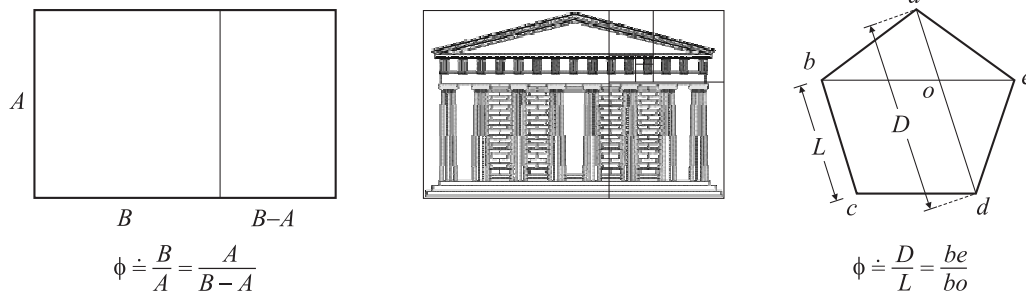


Sin duda el ejemplo más conocido, aunque más inexacto, es el cálculo del número total de parejas de conejos en un determinado número de meses, sabiendo que cada pareja pare una nueva pareja cada mes, que la pareja nueva puede tener descendencia a partir de los dos meses de edad, y que ningún conejo muere. De esta forma,

- Al finalizar el primer mes, la pareja se aparea (pero todavía no tiene descendencia).
- Al fin del segundo mes, la hembra parió una nueva pareja, de modo que hay dos parejas.
- Al final del tercer mes, la primera hembra tiene otra camada, de modo que hay 3 parejas.
- Al finalizar el cuarto mes, la primera hembra tiene su segunda cría, y la segunda tiene su primera descendencia, totalizando 5 parejas.
- etc.



1. Encuentre una expresión en forma cerrada para  $x[n]$ .
2. Demuestre que la relación  $x[n]/x[n+1]$  tiende al límite  $\phi = 2/(1 + \sqrt{5})$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Este número se conoce como *sección dorada*, *divina proporción*, o *proporción áurea* y según los griegos era la relación entre los lados del rectángulo de aspecto más agradable (la altura, ancho y largo del Partenon siguen esta proporción). La figura muestra otras construcciones geométricas donde aparece la sección dorada: en un pentágono regular, el cociente entre la longitud de las diagonales y los lados, o el cociente entre los segmentos en que se forman en una diagonal al ser cortada por otra es igual a  $\phi$ . Se verifica que  $1/\phi = \phi - 1$ . (La elección de  $\phi$  -phi- como nombre de esta constante es en homenaje a Fidias, escultor y arquitecto griego)



3. Muestre que la sucesión de Fibonacci satisface las siguientes propiedades:

- a)  $(x[n])^2 + (x[n+1])^2 = x[2n+1]$ .
- b)  $(x[n+2])^2 - (x[n+1])^2 = x[n]x[n+3]$ .

### Referencias:

La Fibonacci Association (<http://www.mscs.dal.ca/Fibonacci/>) fue fundada en California en 1962 para incentivar el interés en los números de Fibonacci y tópicos relacionados, y publica desde 1963 *The Fibonacci Quarterly*. Otros artículos de interés sobre los números de Fibonacci y la sección áurea son:

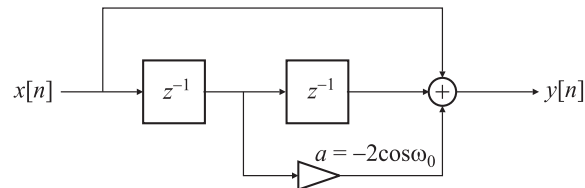
1. Bubnicki, Z., "Input Impedance and Transfer Function of a Ladder Network," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 10, No. 2, Jun 1963, pp. 286-287.
2. Hill Jr., F., "Gentle diversions: Phi-A precious jewel," *IEEE Communications Magazine*, Vol. 16, No. 5, Sep 1978, pp.35-37.
3. Mack, D. R., "The magical Fibonacci number," *IEEE Potentials*, Vol. 9, No. 3, Oct 1990, pp. 34-35.
4. Stewart, I., "Mathematical Recreations: Daisy, Daisy, give me your answer, do", *Scientific American*, Vol. 272, No. 1, January 1995, pp. 76-79.
5. Stewart, I., "Mathematical Recreations: Fibonacci Forgeries", *Scientific American*, Vol. 272, No. 5, May 1995, pp. 82-85.
6. Stewart, I., "Mathematical Recreations: Tales of a neglected number", *Scientific American*, Vol. 274, No. 6, June 1996, pp. 92-93.



## 6.11. Análisis de sistemas LIT en el campo transformado

**Ejercicio 1.** Para el filtro digital de la figura,

1. Determine la relación entrada/salida y la respuesta impulsiva  $h[n]$ .
2. Calcule y grafique la magnitud  $|H(e^{j\omega})|$  y la fase  $\angle H(e^{j\omega})$  del filtro, y encuentre qué frecuencias son completamente bloqueadas por el filtro.
3. Cuando  $\omega_0 = \pi/2$ , calcule la salida  $y[n]$  si  $x[n] = \cos(\pi/3n + \pi/6)$ ,  $-\infty < n < \infty$ .



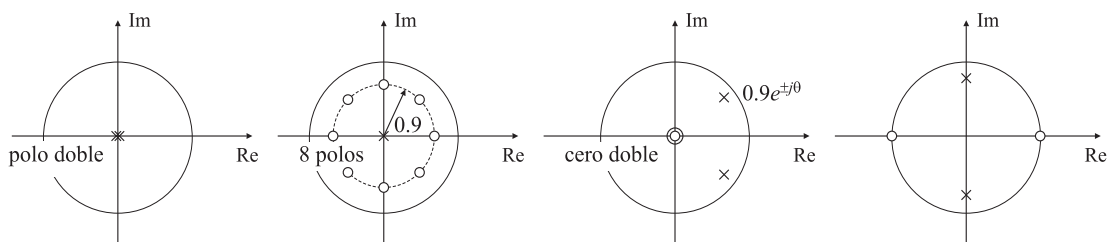
**Ejercicio 2.** Para el sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva  $h[n] = (1/4)^n \cos(\pi n/4) u[n]$ ,

1. Calcule la función de sistema  $H(z)$ .
2. ¿Es posible implementar este sistema utilizando un número finito de multiplicadores y retardos unitarios? Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo lo haría?
3. Esboce la respuesta en frecuencia  $|H(e^{j\omega})|$  en base al diagrama de polos y ceros.
4. Calcule la respuesta del sistema a la entrada  $x[n] = (1/4)^n u[n]$ .

**Ejercicio 3.** Para el sistema descrito por la ecuación a diferencias  $y[n] = (1/2)y[n-1] + x[n] + (1/2)x[n-1]$ ,

1. Determine la respuesta impulsiva.
2. Calcule la respuesta en frecuencia.
3. Calcule la salida si la entrada es  $x[n] = \cos(\pi/2n + \pi/4)$ .

**Ejercicio 4.** Esboce aproximadamente la magnitud de la respuesta  $|X(e^{j\omega})|$  de los siguientes diagramas de polos y ceros.



**Ejercicio 5.** La función de sistema de un filtro de primer orden es

$$H(z) = k \frac{1 + az^{-1}}{1 - az^{-1}}, \quad a, k \text{ reales.}$$

1. ¿Para qué rango de valores de  $a$  el filtro es un pasabajos estable? Esboce  $|H(e^{j\omega})|$ .
2. Calcule  $k$  para que la ganancia del filtro sea unitaria en  $\omega = 0$ .
3. Compute la respuesta impulsiva  $h[n]$  del filtro.
4. Determine el rango de valores de  $a$  en el cual el filtro es un *pasaaltos* estable.

**Ejercicio 6.** El filtro con ecuación a diferencias  $y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$  se llama *filtro promediador*, porque su salida es el promedio de las  $M$  muestras anteriores de la entrada. La función de sistema (para  $M = 9$ ) es:

$$H(z) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}z^{-1} + \cdots + \frac{1}{9}z^{-8}.$$

1. Calcule y grafique la respuesta al escalón del sistema.
2. Calcule la respuesta en frecuencia (magnitud y fase).
3. Si la frecuencia de muestreo es  $f_s = 1$  kHz, determine las frecuencias (analógicas) de las señales que serán bloqueadas por el filtro.

**Ejercicio 7.** La ecuación diferencial de un diferenciador analógico es  $y(t) = dx(t)/dt$ , donde  $x(t)$  es la señal de entrada e  $y(t)$  la señal de salida.

1. Determine la respuesta en frecuencia  $H_c(j\Omega)$ .
2. El diferenciador discreto ideal se define como  $H(e^{j\omega}) = j\omega$ ,  $|\omega| \leq \pi$ . Justifique esta definición comparando las respuestas en frecuencia  $|H(e^{j\omega})|$  y  $\angle H(e^{j\omega})$  con las del inciso anterior.
3. Muestre que el sistema discreto  $y[n] = x[n] - x[n-1]$  es una buena aproximación al diferenciador del inciso 2, al menos para bajas frecuencias.
4. Calcule la respuesta del sistema del inciso 3 a una entrada  $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta)$ ,  $-\infty < n < \infty$ , para  $\omega_0$  pequeño.

**Ejercicio 8.** Un SLIT causal está definido por la ecuación a diferencias

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1].$$

1. Determine la función de sistema  $H(z) = Y(z)/X(z)$ . Dibuje los polos y ceros de  $H(z)$  indicando la región de convergencia.
2. Calcule la respuesta impulsiva  $h[n]$  del sistema.

3. Si el sistema es inestable, encuentre una respuesta al impulso estable (no causal) que satisfaga la ecuación a diferencias.

**Ejercicio 9.** La función de sistema de un SLIT causal es

$$X(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}}, \quad a \text{ real.}$$

1. Determine para qué valores de  $a$  el sistema es estable.
2. Si  $0 < a < 1$ , dibuje el diagrama de polos y ceros. Indique la región de convergencia.
3. Demuestre que el sistema es un pasatodo (el módulo de la respuesta en frecuencia  $|H(e^{j\omega})|$  es constante para todo  $\omega$ ).

**Ejercicio 10.** Si el sistema  $y[n] = 0,2y[n-1] + x[n] - 0,3x[n-1] + 0,02x[n-2]$  y el sistema  $y[n] = x[n] - 0,1x[n-1]$  se excitan con la misma señal de entrada, se obtiene una salida idéntica en ambos casos. ¿Es posible? ¿Por qué?

**Ejercicio 11.** Cuando la entrada a un sistema lineal e invariante en el tiempo es  $x[n] = (1/2)^n u[n] + (2)^n u[-n-1]$ , la salida es  $y[n] = 6(1/2)^n u[n] - 6(3/4)^n u[n]$ .

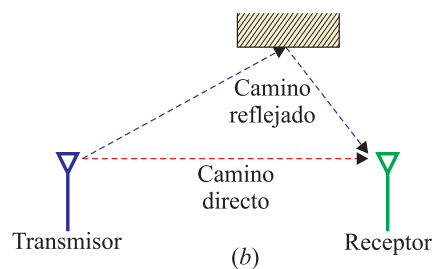
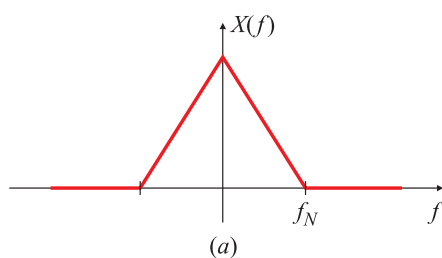
1. Encuentre la función de sistema  $H(z)$ . Grafique los polos y los ceros de  $H(z)$  e indique la región de convergencia.
2. Calcule la respuesta impulsiva del sistema  $h[n]$ .
3. Escriba la ecuación a diferencias que caracteriza el sistema.
4. Determine si el sistema es
  - a) estable;
  - b) causal.

**I Ejercicio 12.** Una sucesión  $x[n]$  tiene transformada- $z$   $X(z) = P(z)/Q(z)$ , donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios en  $z$ . Si  $x[n]$  es absolutamente sumable, y si todas las raíces de  $Q(z)$  están dentro del círculo unidad, ¿puede afirmar que  $x[n]$  es causal?. Si la respuesta es afirmativa, explique detalladamente. Si la respuesta es negativa, dé un contraejemplo.

**Ejercicio 13.** Un transmisor emite una señal  $x(t)$  con espectro  $X(f)$  como se muestra en la Fig. (a). Debido a los rebotes en el camino de propagación, el receptor recibe una señal  $y(t) = x(t) + \alpha x(t - T_R)$ , con  $\alpha < 1$  [Fig. (b)]. En el receptor esta señal se muestrea cada  $T = T_R/N$  segundos,  $y[n] = y(nT)$ .

1. Calcule el espectro  $Y(f)$  de la señal  $y(t)$  en función del espectro de la señal  $X(f)$ .
2. Dibuje el espectro  $Y(e^{j\omega})$  de  $y[n]$ , indicando las escalas de amplitud y tiempo.

3. Calcule  $H(z) = Y(z)/X(z)$ , y dibuje el diagrama de polos y ceros.
4. Calcule *analíticamente* la respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$  y exprese la de la forma más sencilla posible.
5. Dibuje el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia, indicando los puntos singulares de los diagramas.
6. Determine y justifique si el sistema es
  - a) causal;
  - b) estable;
  - c) invariante en el tiempo.
7. Calcule la función de sistema de un compensador  $G(z)$ , un sistema que conectado a la salida del receptor permita recuperar  $x[n]$ . Note que  $H(z)G(z) = 1$ .
8. Encuentre todas las respuestas impulsivas  $g[n]$  tales que  $y[n] = h[n] * g[n] = x[n]$ .
9. Para las respuestas impulsivas del inciso anterior demuestre –evaluando explícitamente la convolución– que si  $x[n] = \delta[n]$ , entonces  $y[n] = \delta[n]$ .
10. Especifique la región de convergencia de  $G(z)$  según los resultados del inciso (6).
11. Determine (justificando su respuesta) si el sistema  $G(z)$  es
  - a) causal;
  - b) estable.
12. Este método de compensación, ¿puede aplicarse en un sistema real? ¿Por qué?



**Ejercicio 14.** Para cada una de las siguientes funciones de sistema, determine y justifique si corresponden o no a sistemas de mínima fase.

$$(a) \quad H_1(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})},$$

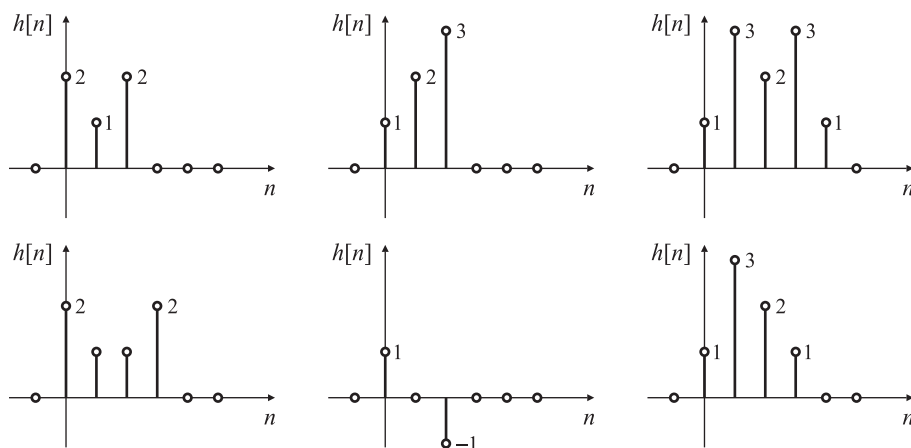
$$(b) \quad H_2(z) = \frac{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{2}{3}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}z^{-1})},$$

$$(c) \quad H_3(z) = \frac{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - \frac{j}{2}z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})},$$

$$(d) \quad H_4(z) = \frac{z^{-1}(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - \frac{j}{2}z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})}.$$

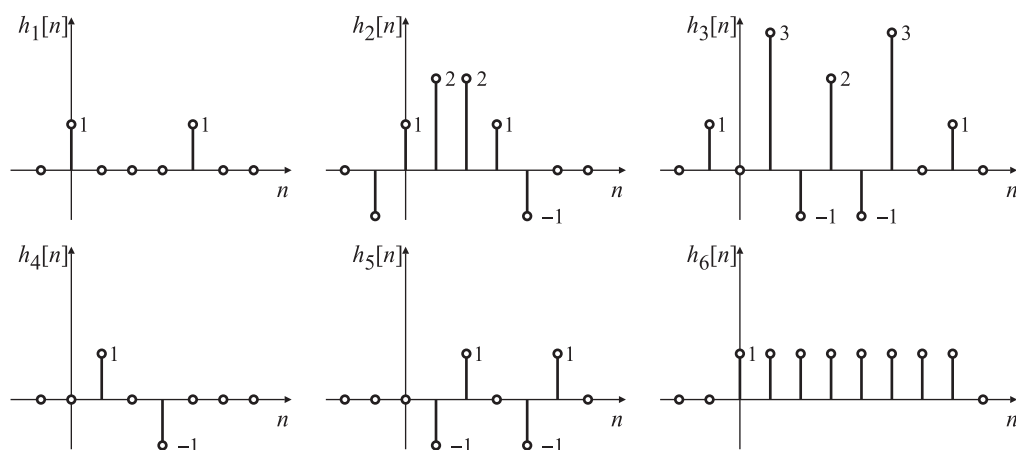
**Ejercicio 15.** Un filtro de fase lineal es aquel cuya respuesta en frecuencia puede expresarse como  $H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j\omega\alpha}$ , donde  $A(\omega)$  es una función real y no negativa de  $\omega$ , y  $\alpha$  es una constante real.

1. Determine si cada una de las respuestas impulsivas de la figura corresponden a sistemas de fase lineal generalizada. Si la respuesta es afirmativa, calcule  $A(\omega)$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ .
2. Para los filtros con fase lineal generalizada determine si cumplen con la condición más exigente de ser de fase lineal.



**I Ejercicio 16.** ¿Es posible que un filtro FIR de fase mínima tenga respuesta de fase lineal generalizada? Dé un ejemplo en caso afirmativo, y justifique en caso contrario.

**Ejercicio 17.** Para las respuestas impulsivas de la figura correspondientes a sistemas de fase lineal generalizada, encuentre el retardo de grupo asociado con cada sistema.



**I Ejercicio 18.** Una señal  $x[n]$  con transformada  $z$   $X(z)$  es tal que:

1.  $x[n]$  es real, y de fase mínima.
2.  $x[n]$  es nula fuera del intervalo  $0 \leq n \leq 4$ .
3.  $X(z)$  tiene un cero en  $z = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$  y un cero en  $z = \frac{1}{2}e^{j3\pi/4}$ .

En base a esta información, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Es  $X(z)$  una función racional? Justifique.
2. Grafique el diagrama de polos y ceros de  $X(z)$  y especifique su región de convergencia.
3. Si  $x[n] * y[n] = \delta[n]$ , e  $y[n]$  es una sucesión derecha, dibuje el diagrama de polos y ceros de  $Y(z)$  y determine su región de convergencia

**Ejercicio 19.** Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo  $H_1(e^{j\omega})$  y  $H_2(e^{j\omega})$  son sistemas con fase lineal generalizada. Determine si las siguientes combinaciones de dichos sistemas son sistemas de fase lineal generalizada:

1.  $G_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$
2.  $G_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})$
3.  $G_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\theta}) H_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$

**Ejercicio 20.** La función de sistema de un SLIT causal es

$$H(z) = \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 + 4z^{-1})}{(1 - 0,64z^{-2})}.$$

1. Encuentre expresiones para un sistema de mínima fase  $H_1(z)$  y un sistema pasatodos  $H_{pt}(z)$  tal que  $H(z) = H_1(z)H_{pt}(z)$ .
2. Derive expresiones para un sistema de fase mínima  $H_2(z)$ , distinto de  $H_1(z)$  y un sistema FIR de fase lineal generalizada  $H_{lin}(z)$  tal que  $H(z) = H_2(z)H_{lin}(z)$ .

**Ejercicio 21.** Para el SLIT con función de sistema

$$H(z) = (1 - 0,9e^{j0,6\pi}z^{-1})(1 - 0,9e^{-j0,6\pi}z^{-1})(1 - 1,25e^{j0,8\pi}z^{-1})(1 - 1,25e^{-j0,8\pi}z^{-1}).$$

1. Encuentre todas las funciones de sistema causales que tienen el mismo módulo de la respuesta en frecuencia que  $H(z)$ , y cuya respuesta impulsiva es real y de la misma longitud que la respuesta impulsiva  $h[n]$  de  $H(z)$  (son cuatro). Identifique cuál de esos sistemas es de mínima fase.
2. Calcule las respuestas impulsivas de cada una de las funciones de sistema halladas en el inciso previo.
3. Para cada una de las respuestas del inciso anterior, calcule y grafique la *energía parcial*  $E[n] = \sum_{m=0}^n (h[m])^2$ , para  $0 \leq n \leq 5$ . Indique qué gráfica corresponde al sistema de mínima fase.



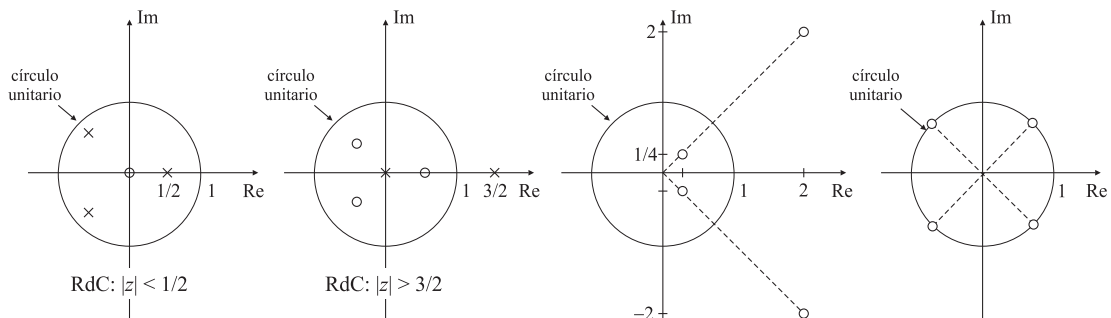
**Ejercicio 22.** Sea  $x[n]$  una sucesión que se anula para  $n < 0$  y  $n > 5$ . Si la transformada  $z$  de  $x[n]$  es

$$X(z) = 3 \left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{4}{5}z^{-2}\right) \left(1 + \frac{2}{5}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)$$

¿cuántas otras sucesiones, que también se anulan para  $n < 0$  y  $n > 5$  y que tienen el mismo valor inicial que  $x[n]$  tienen la misma fase?

**Ejercicio 23.** Cada uno de los diagramas de polos y ceros de la figura, junto con la especificación de la región de convergencia, describen un sistema lineal e invariante en el tiempo con función de sistema  $H(z)$ . Responda si los siguientes postulados son verdaderos o no.

1. El sistema tiene fase nula.
2. El sistema tiene fase lineal generalizada.
3. El sistema tiene una inversa  $H_i(z)$  estable.

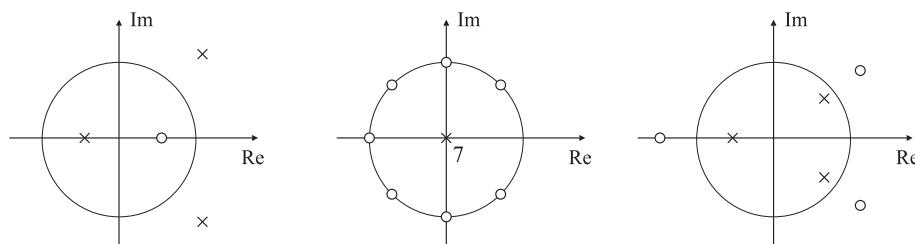


**Ejercicio 24.** Encuentre un sistema de fase mínima que tenga la misma magnitud de la respuesta en frecuencia que el sistema

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\frac{5}{4} - \cos \omega}{\frac{10}{9} - \frac{2}{3} \cos \omega}.$$

**Ejercicio 25.** La sucesión compleja  $x[n]$  es nula para  $n < 0$  y  $n > N - 1$ . Determine el número de sucesiones diferentes de longitud  $N$ , y con el mismo valor de la muestra inicial, que tienen el mismo módulo de la transformada de Fourier que  $x[n]$ .

**Ejercicio 26.** La figura muestra el diagrama de polos y ceros de tres SLIT causales con respuestas impulsivas  $h[n]$  reales. Determine si cada uno de ellos satisface las siguientes propiedades: estable, FIR, IIR, fase mínima, pasatodos, fase lineal generalizada, retardo de grupo positivo para todo  $\omega$ .



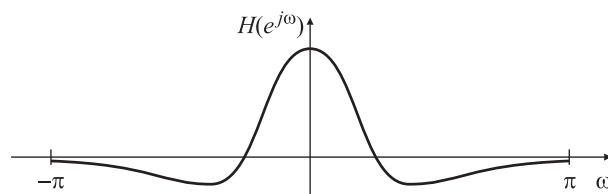
**Ejercicio 27.** Si  $H(z)$  y  $G(z)$  son funciones de sistema racionales que son de mínima fase, explicar si (i)  $H(z)G(z)$  y (ii)  $H(z) + G(z)$  también son de mínima fase.

**Ejercicio 28.** Una sucesión causal de fase no mínima tiene transformada z

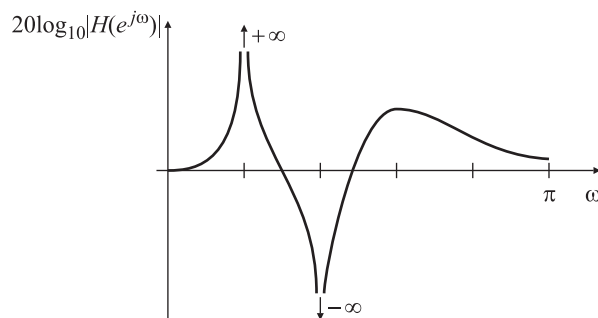
$$X(z) = \frac{(1 - \frac{3}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{5}{3}z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}.$$

¿Para qué valores de  $\alpha$  la sucesión  $y[n] = \alpha^n x[n]$  es de fase mínima?

- I Ejercicio 29.** Un SLIT estable tiene la transformada de Fourier con parte imaginaria nula que se muestra en la figura. ¿El sistema puede tener una inversa estable?



- I Ejercicio 30.** Un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo con función de sistema  $H(z)$  y respuesta impulsiva real, tiene la respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$  que se muestra en la figura.



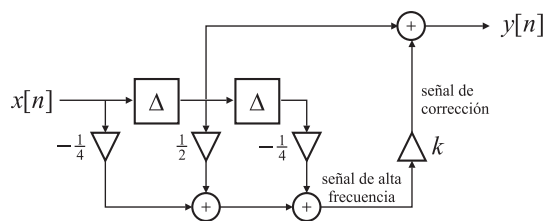
1. Dibuje el diagrama de polos y ceros de  $H(z)$ , mostrando toda la información posible acerca de la ubicación de los polos y los ceros que puede inferirse a partir de la figura.
2. El sistema ¿es FIR o IIR? Justifique.
3. El sistema ¿tiene fase lineal? ¿Por qué?
4. ¿El sistema es estable? Justifique.

**Ejercicio 31.** Si  $h[n]$  y  $H(z)$  son la respuesta impulsiva y la función de sistema de un SLIT estable tipo pasatodos, y  $h_i[n]$  la respuesta impulsiva del sistema inverso (también LIT y estable), muestre que  $h_i[n] = h[-n]$ . Suponga que  $h[n]$  es real.

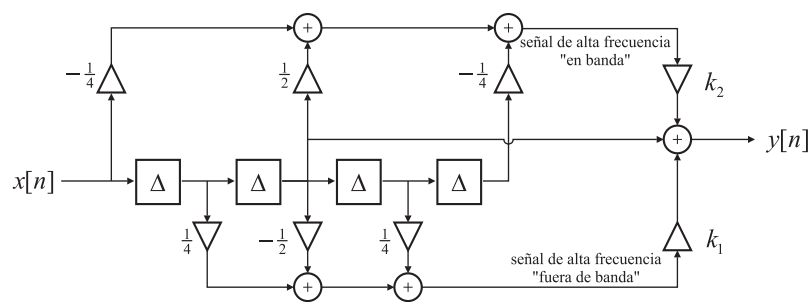
**Ejercicio 32.** ¿Es cierto que un sistema no puede tener fase lineal generalizada si la función de sistema  $H(z)$  tiene polos en cualquier lugar del plano  $z$  excepto en  $z = 0$  o en  $z = \infty$ ? Justifique si la respuesta es verdadera, y dé un contraejemplo si es falsa.

**Ejercicio 33.** Determine la función de sistema  $H(z)$  de un filtro pasatodos que posea fase lineal generalizada.

**Ejercicio 34.** El filtro FIR de la figura compensa las pérdidas de alta frecuencia en receptores de TV (*corrección de apertura*). Se conectan en cascada dos de estos circuitos, uno para corregir la apertura horizontal y otro para corregir la apertura vertical. En el primer caso el retardo  $\Delta$  es la duración de una línea, mientras que en el segundo es de 70 ns (según el estándar CCIR). La ganancia  $k$  permite ajustar la cantidad de corrección. Calcule la función transferencia y grafique el módulo de la respuesta en frecuencia para diferentes valores de  $k$ .



**Ejercicio 35.** La figura muestra un circuito mejorado de corrección de apertura. El retardo es de 70 ns (estándar CCIR) y las dos ganancias  $k_1 > 0$  y  $k_2 < 0$  permiten ajustar la cantidad de corrección. Determine la función de sistema de este circuito y grafique el módulo de la respuesta en frecuencia para diferentes valores de  $k_1$  y  $k_2$ .



**Ejercicio 36.** La señal  $y[n]$  está formada por una señal primaria  $x[n]$  y dos ecos de la misma:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n - n_d] + \frac{1}{4}x[n - 2n_d].$$

Calcule un filtro realizable que permita recuperar  $x[n]$  a partir de  $y[n]$ .

**Ejercicio 37.** En muchas aplicaciones es necesario recuperar una señal que ha sido distorsionada por un proceso de convolución. Este fenómeno puede modelarse como un filtrado lineal, donde la señal deseada  $x[n]$  es “distorsionada” por un filtro con respuesta impulsiva  $h[n]$ , dando lugar a la señal “corrupta”  $y[n]$ . Suponga que  $h[n] = 1$  para  $0 \leq n \leq M - 1$ , y que vale cero para cualquier otro valor de  $n$ .



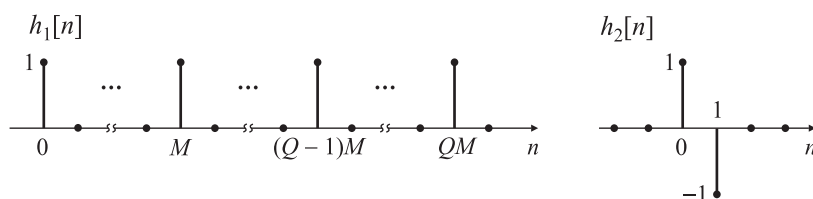
1. Una manera de recuperar  $x[n]$  a partir de  $y[n]$  es usando un *filtro inverso*: la señal  $y[n]$  se filtra por un sistema cuya respuesta en frecuencia es  $H_i(e^{j\omega}) = [H(e^{j\omega})]^{-1}$ , donde  $H(e^{j\omega})$  es la transformada de Fourier de  $h[n]$ . Para la respuesta impulsiva especificada, discuta los problemas que presenta la implementación del filtro inverso.
2. Debido a las dificultades del filtrado inverso, una solución habitual es procesar la señal corrupta  $y[n]$  con el sistema que muestra la figura, cuya salida  $w[n]$  permite extraer una réplica mejorada de  $x[n]$ .



Las respuestas impulsivas de los sistemas son

$$h_1[n] = \sum_{k=0}^Q \delta[n - kM], \quad h_2[n] = \delta[n] - \delta[n - 1].$$

Explique en detalle el funcionamiento de este sistema, y en particular, en qué condiciones se puede recuperar *exactamente*  $x[n]$  de  $w[n]$ . **Ayuda:** considere la respuesta impulsiva del sistema completo (desde  $x[n]$  a  $w[n]$ ).



Este procesamiento se utiliza para restaurar imágenes “movidas” (*blurred* en inglés) –por ejemplo, las fotografías tomadas desde un automóvil que se desplaza con cierta velocidad, o las fotografías de la corteza terrestre tomadas por los satélites– y se conoce como *deblurring*.

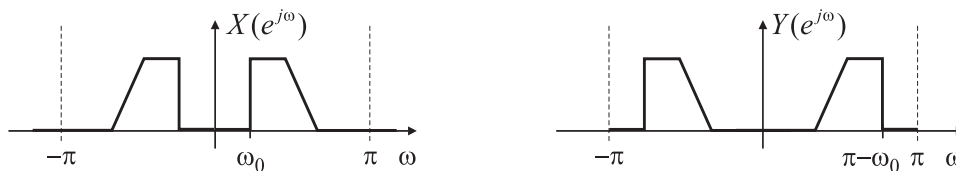
**Ejercicio 38.** No es posible diseñar un compensador perfecto (un sistema inverso causal y estable) para un sistema de *no mínima fase*. Una forma de compensar la *magnitud* de la respuesta en frecuencia se estudia en este problema. El sistema SLIT estable de no mínima fase con función de sistema racional  $H(z)$  se conecta en cascada con un sistema compensador  $H_c(z)$ . La función de sistema  $G(z)$  de la cascada es  $G(z) = H(z)H_c(z)$ .

1. ¿Cómo debe elegirse  $H_c(z)$  para que sea estable y causal y tal que  $|G(e^{j\omega})| = 1$ ? (Recuerde que  $H(z)$  siempre puede representarse como  $H(z) = H_{pt}(z)H_{\min}(z)$ .)
2. Caracterice las funciones de sistema  $H_c(z)$  y  $G(z)$ .
3. Suponga que

$$H(z) = (1 - 0,8e^{j0,3\pi}z^{-1})(1 - 0,8e^{-j0,3\pi}z^{-1})(1 - 1,2e^{j0,7\pi}z^{-1})(1 - 1,2e^{-j0,7\pi}z^{-1}).$$

Encuentre  $H_{\min}(z)$ ,  $H_{pt}(z)$ ,  $H_c(z)$  y  $G(z)$  para este caso, y grafique los diagramas de polos y ceros de cada función de sistema.

**Ejercicio 39.** Los *inversores de frecuencia* han sido utilizados durante mucho tiempo como una manera sencilla de enmascarar la voz, ya que una señal vocal se vuelve casi ininteligible si su espectro se invierte, tal como se ve en la figura.



1. Determine cómo se puede efectuar la inversión de frecuencia en el dominio tiempo. **Nota:** las operaciones requeridas son muy sencillas, y se pueden efectuar fácilmente en tiempo real.
2. Diseñe un desenmascarador.
3. Usando las funciones de sonido de MATLAB, pruebe a leer un archivo \*.WAV cualquiera, enmascárelo, y reprodúzcalo.

#### (M) Ejercicio 40. Ecos y reverberaciones

Se puede generar una señal  $y[n]$  formada por ecos y reverberaciones “sintéticos” de una señal  $x[n]$  sumando réplicas retardadas y escaladas de la misma

$$y[n] = \sum_{i=1}^{\infty} g_i x[n - iD], \quad (6.100)$$

donde  $D$  es un entero positivo, y  $|g_k| > |g_{k+1}|$ .

1. Muestre que el filtro “peine”

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-D}}$$

puede ser utilizado como un reverberador, calculando la respuesta al impulso, y comparándola con la respuesta impulsiva del sistema (6.100).

2. Para construir reverberadores digitales se colocan en cascada de tres a cinco filtros “peine” pasatodo, cuya función transferencia es

$$H(z) = \frac{z^{-D} - a}{1 - az^{-D}},$$

eligiendo adecuadamente los parámetros  $a$  y  $D$ . Calcule (con MATLAB, utilizando la función `impz`) y grafique la respuesta impulsiva de dos de tales reverberadores, obtenido cada uno de ellos al colocar en cascada tres secciones con los siguientes parámetros:

Reverberador “A”			Reverberador “B”		
Sección	$D$	$a$	Sección	$D$	$a$
1	50	0,70000	1	37	0,70000
2	40	0,66500	2	17	0,77000
3	32	0,63175	3	11	0,84700

3. Grafique la función transferencia (módulo y fase) de los reverberadores “A” y “B” utilizando el comando `freqz`, y comente sobre ellas.
4. Analice la respuesta impulsiva  $h[n]$  de los reverberadores en los dos casos que se detallan a continuación.
- los retardos  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  no son primos (similar al caso del Reverberador “A”);
  - los retardos  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  son números primos (como en el Reverberador “B”).
5. La diferencia entre el eco y la reverberación es que con el eco se producen repeticiones claras de la señal a intervalos de tiempo uniformes. La reverberación, en cambio, puede pensarse como un sinfín de ecos de diferente duración interactuando entre sí. ¿Cuál de los prototipos es mejor reverberador?

Más detalles acerca de esta aplicación pueden encontrarse en J. A. Moorer, “Signal processing aspects of computer music: a survey”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, No. 8, Agosto de 1977, pp. 1108-1137.

# Apéndice 6.A

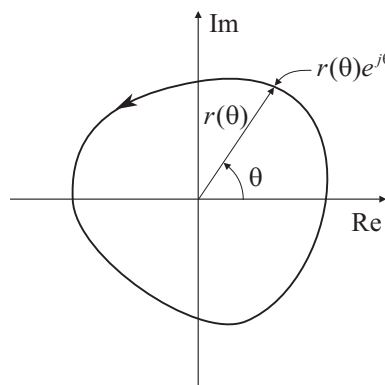
## Idea de la demostración del Teorema de Cauchy

Se desea probar que

$$\oint_C z^{-k} dz = \begin{cases} 2\pi j, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{si } k \neq 1, \end{cases} \quad (6.A.1)$$

donde  $C$  es un contorno cerrado que rodea al origen y orientado en sentido antihorario (Fig. 6.A.1). Es conveniente introducir el cambio de variables  $z = r(\theta) e^{j\theta}$  parametrizando el contorno  $C$  en función del ángulo  $\theta$ . Es evidente que

$$\begin{aligned} dz &= \left[ \frac{dr(\theta)}{d\theta} e^{j\theta} + r(\theta) \frac{de^{j\theta}}{d\theta} \right] d\theta \\ &= r'(\theta) e^{j\theta} d\theta + j r(\theta) e^{j\theta} d\theta. \end{aligned}$$



**Fig. 6.A.1.** Contorno de integración para la Ec. 6.A.1.

Para  $k = 1$ , el integrando es

$$\begin{aligned} z^{-k} dz &= z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{r(\theta) e^{j\theta}} \left[ r'(\theta) e^{j\theta} + j r(\theta) e^{j\theta} \right] d\theta \\ &= \frac{r'(\theta)}{r(\theta)} d\theta + j d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \oint_C z^{-1} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{r'(\theta)}{r(\theta)} d\theta + \int_0^{2\pi} j d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} [\ln r(\theta)] d\theta + \int_0^{2\pi} j d\theta \\ &= \ln r(\theta) \Big|_0^{2\pi} + j\theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi j \end{aligned} \tag{6.A.2}$$

pues  $r(0) = r(2\pi)$ , y además  $r(\theta) \neq 0$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$  pues el contorno de integración rodea al origen.

Para el caso en que  $k = m \geq 2$ , se tiene que

$$\begin{aligned} z^{-m} dz &= \frac{1}{r^m(\theta) e^{jm\theta}} \left[ r'(\theta) e^{j\theta} + j r(\theta) e^{j\theta} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{m-1} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{r^{m-1}(\theta) e^{j(m-1)\theta}} \right] d\theta \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \oint_C z^{-m} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{m-1} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{r^{m-1}(\theta) e^{j(m-1)\theta}} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{m-1} \frac{1}{r^m(\theta) e^{jm\theta}} \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6.A.3}$$

Finalmente, si  $k = -p \leq 0$  (es decir,  $p \geq 0$ ), resulta

$$\begin{aligned} z^{-m} dz &= z^p dz = r^p(\theta) e^{jp\theta} \left[ r'(\theta) e^{j\theta} + j r(\theta) e^{j\theta} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{p+1} \frac{d}{d\theta} \left[ r^{(p+1)}(\theta) e^{j(p+1)\theta} \right] d\theta, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \oint_C z^{-k} dz &= \oint_C z^p dz \\ &= \oint_C \frac{1}{p+1} \frac{d}{d\theta} \left[ r^{(p+1)}(\theta) e^{j(p+1)\theta} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{p+1} \left[ r^{(p+1)}(\theta) e^{j(p+1)\theta} \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6.A.4}$$

De (6.A.2)-(6.A.4) queda probado (6.A.1).