Procesamiento digital de señales

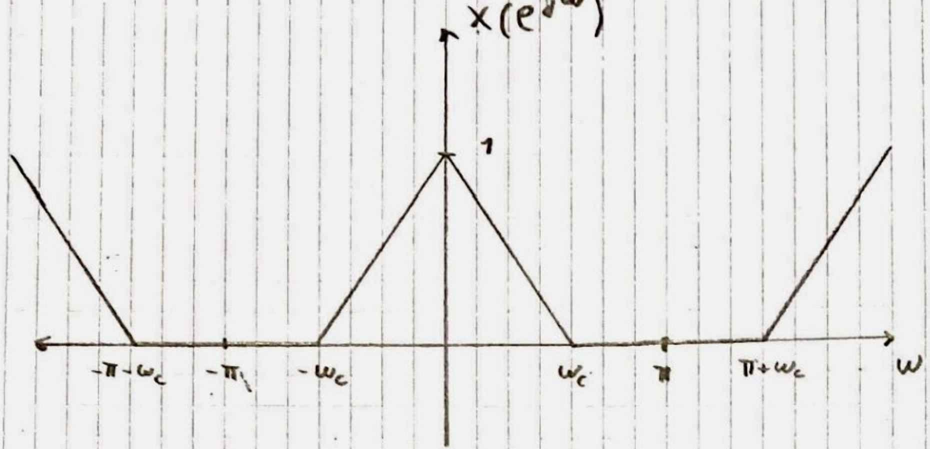
Sistemas discretos

Integrantes:

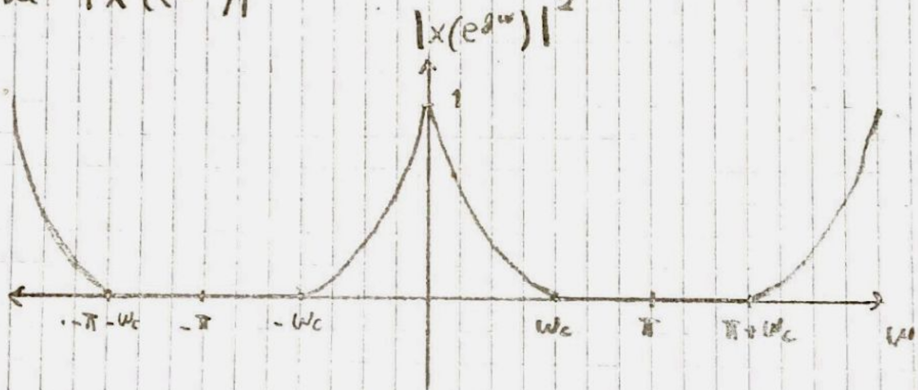
- Barco Valentín
- Estrada Anselmo

Ejercicio 1

$$X(e^{jw}) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{w}{w_c}\right| , & |w| < w_c \\ 0 & w_c < |w| < \pi \end{cases}$$

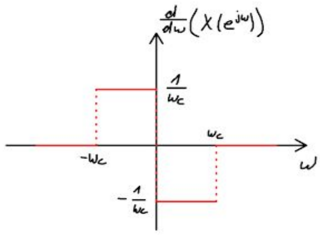


Se puede definir la energía como el área bajo la curva de $|X(e^{jw})|^2$



Se puede ver que la energía se concentra en bajas frecuencias.

$$\frac{d}{d\omega}\left(X(e^{j\omega})\right) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_c} & -\omega_c < \omega < 0 \\ -\frac{1}{\omega_c} & 0 < \omega < \omega_c \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



$$-jn\,x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\omega}\left(X(e^{j\omega})\right)e^{j\omega n}\,d\omega$$ Propiedad de derivación

$$x[n] = -\frac{1}{2\pi jn}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d}{d\omega}\left(X(e^{j\omega})\right)e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$= -\frac{1}{2\pi jn}\left[\int_{-\omega_c}^{0}\frac{1}{\omega_c}e^{j\omega n}\,d\omega + \int_{0}^{\omega_c}\left(-\frac{1}{\omega_c}\right)e^{j\omega n}\,d\omega\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi jn\omega_c}\left[\int_{-\omega_c}^{0}e^{j\omega n}\,d\omega - \int_{0}^{\omega_c}e^{j\omega n}\,d\omega\right] = -\frac{1}{2\pi jn\omega_c}\left[\frac{1-e^{-j\omega_c n}}{jn} - \frac{e^{j\omega_c n}-1}{jn}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\omega_c n^2}\left(1-e^{-j\omega_c n} - e^{j\omega_c n}+1\right) = \frac{1}{2\pi\omega_c n^2}\left(2-\left(e^{j\omega_c n}+e^{-j\omega_c n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi\omega_c n^2}\left(1-\cos(\omega_c n)\right)$$

Ejercicio 2

$$y[n] = (-1)^n x[n]$$

a) Verifico principio de superposicion

$$S\{a x_1[n] + b x_2[n]\} = a S\{x_1[n]\} + b S\{x_2[n]\}$$

$$\underbrace{(-1)^n \left(a x_1[n] + b x_2[n]\right)}_{} = a (-1)^n x_1[n] + b (-1)^n x_2[n]$$

$$(-1)^n \cdot a \cdot x_1[n] + (-1)^n \cdot b \cdot x_2[n] =$$

$$= a (-1)^n x_1[n] + b (-1)^n x_2[n]$$ ✓ Es lineal

Verifico si es invariante en el tiempo

La salida $y[n]$ desplazada n_0 muestras

$y[0 - n_0] = (-1)^{-n_0} . X[-n_0]$

$y[1 - n_0] = (-1)^{(1-n_0)} . X[1 - n_0]$

$y[2 - n_0] = (-1)^{(2-n_0)} . X[2 - n_0]$

$y[3 - n_0] = (-1)^{(3-n_0)} . X[3 - n_0]$

$y[n_0 - n_0] = (-1)^0 . X[0]$

La salida $y_1[n]$ ante una entrada $x_1[n] = x[n - n_0]$

$y_1[0] = (-1)^0 . X[-n_0]$

$y_1[1] = (-1) . x[1 - n_0]$

$y_1[2] = (-1)^2 . X[2 - n_0]$

$y_1[3] = (-1)^3 . X[3 - n_0]$

$y_1[n_0] = (-1)^{n_0} X[0]$

Se puede ver que $S\{X[n - n_0]\} = y(n - n_0)$ para valores de n_0 pares por lo tanto el sistema va a ser invariante en el tiempo para valores pares de n_0

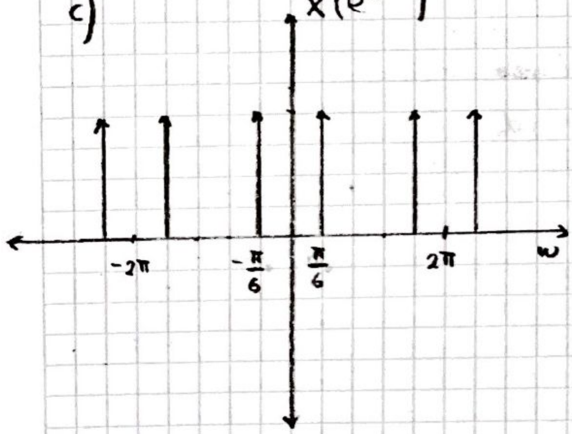
b)

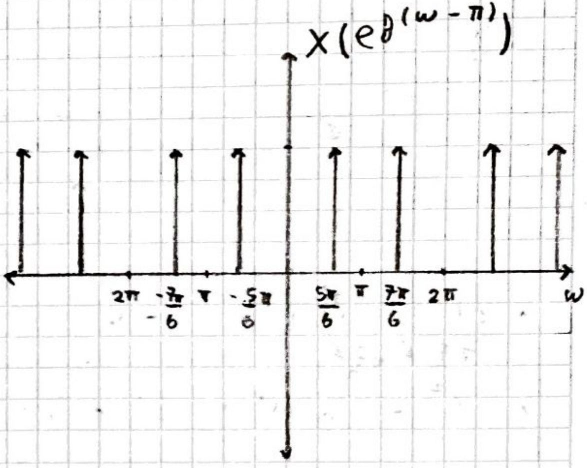
$$Y(e^{jw}) = \sum_{m=0}^{\infty} y[m] \cdot e^{-jwm} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot x[m] \cdot e^{-jwm}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} e^{j\pi m} \cdot X[m] \cdot e^{-jwm} = \sum_{m=0}^{\infty} X[m] \cdot e^{-j(w-\pi)m}$$

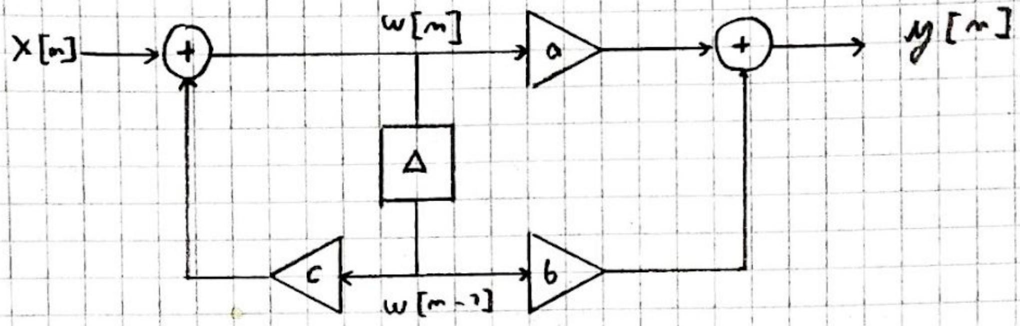
$$Y(e^{jw}) = X(e^{j(w-\pi)})$$

c)





Exercício 3



$$\begin{cases} w[n] = x[n] + c\,w[n-1] \\ y[n] = a\,w[n] + b\,w[n-1] \end{cases}$$

$$x[n] = w[n] - c\,w[n-1]$$

Aplicando propriedade do deslocamento temporal

$$X(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) - c\,e^{-j\omega}\,W(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = a\,W(e^{j\omega}) + b \cdot e^{-j\omega}\,W(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{a + b\,e^{-j\omega}}{1 - c\,e^{-j\omega}}$$

b)

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\overset{b_0}{a} + \overset{b_1}{b e^{-j\omega}}}{\underset{a_0}{1} - \underset{a_1}{c e^{-j\omega}}}$$

$b_0 = a$

$b_1 = b$

$a_0 = 1$

$a_1 = -c$

$$a_0\, y[n] + a_1\, y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

$$y[n] - c\, y[n-1] = a\, x[n] + b\, x[n-1]$$

c) $$H(e^{j\omega}) = \frac{a}{1 - c e^{-j\omega}} + b e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - c e^{-j\omega}}$$

$$h[n] = a \cdot c^{n} \cdot u[n] + \underbrace{b \cdot c^{n-1}\, u[n-1]}$$

Esto se realizó aplicando la propiedad de desplazamiento temporal $x[n-n_d] \Leftrightarrow e^{-jn_d\omega} \cdot X(e^{j\omega})$

d) $a = 1$ $\quad H(e^{jw}) = 1$

$b = -c$

Ej: $a = c$

$b = -1$

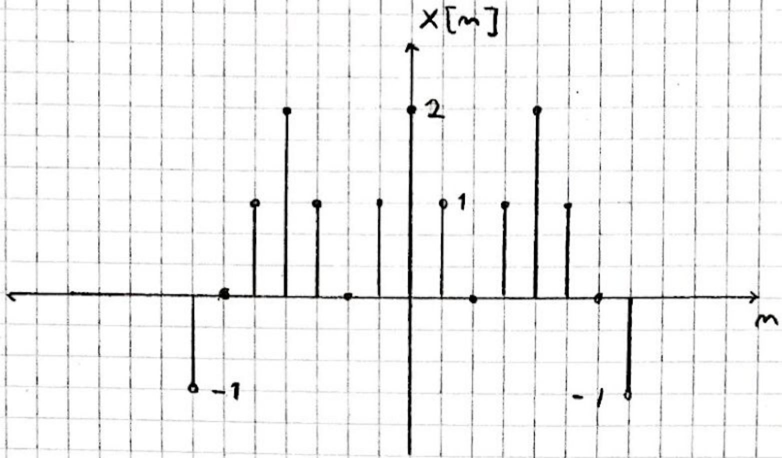
$$|c - e^{-jw}| = |1 - ce^{-jw}|$$

$$|\cancel{e^{-jw}}|^{1} \cdot \left| \frac{c}{e^{-jw}} - 1 \right| = |1 - c \cdot e^{-jw}|$$

$$|c \cdot e^{jw} - 1| = |1 - c \cdot e^{-jw}|$$

Se puede ver que al aplicar el valor absoluto hay muchos mas valores que pueden tomar a, b y c

Ejercicio 4:



a) Teniendo en cuenta la propiedad de area

$$X(e^{jw})\Big|_{w=0} = \sum_{n} x[n]$$

$= -1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 - 1 = \underline{10}$

b) Teniendo en cuenta la definicion de la transformada de fourier de tiempo discreto.

$$X(e^{jw}) = \sum_{n} x[n] . e^{-jwn}$$

Si $\omega = \pi$ entonces

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = \sum_{n} x[n] \cdot e^{-j\pi n} = \sum_{n=-7}^{7} (-1)^n \cdot x[n]$$

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = -(-1) - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 - (-1)$$

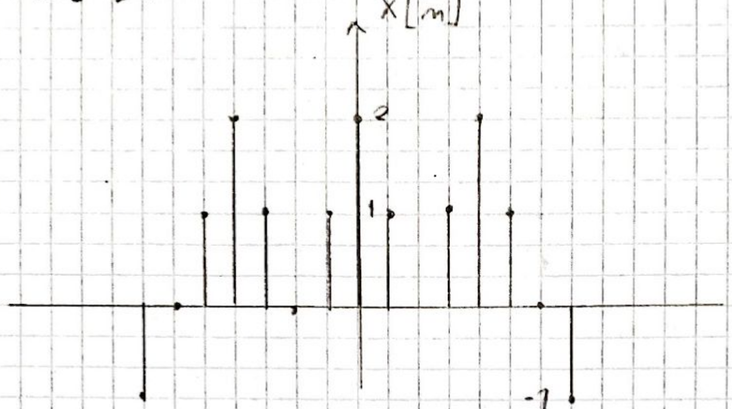
$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = 2$$

c) como la funcion es par en tiempo entonces la transformada $X(e^{j\omega})$ tambien sera par y Real, por lo tanto el argumento oscilara entre $-\pi$, cero y π

d) Por propiedad de area $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, d\omega = x[0] \cdot 2\pi$

$= 4\pi$

e) como $x[n]$ es real y par, entonces la transformada va a ser también real y por lo tanto $Re\{X(e^{j\omega})\} = X(e^{j\omega})$
la señal que cuya transformada es $Re\{X(e^{j\omega})\}$ es $x[n]$.



f) Por propiedad de reflexión $X(e^{-j\omega}) \Leftrightarrow x[-n]$

y como $x[n]$ es par, $X(e^{-j\omega}) \Leftrightarrow x[n]$ ✓