Procesamiento digital de señales

Series de Fourier

Integrantes:

- Barco Valentín
- Estrada Anselmo

Ejercicio 1

$$C_K^x = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t)\, e^{-jK2\pi f_0 t}\, dt$$

$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(at)$ El periodo de $\tilde{y}(t)$ es $\frac{T_0}{a}$

$$C_K^y = \frac{a}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2a}}^{\frac{T_0}{2a}} \tilde{x}(at)\, e^{-jK2\pi f_0 t}\, dt$$

- $u = at$ $du = a\,dt \longrightarrow dt = \frac{du}{a}$ Extremos $\longrightarrow a\cdot\frac{T_0}{2a} = \frac{T_0}{2}$, $a\cdot\frac{-T_0}{2a} = -\frac{T_0}{2}$
- $t = \frac{u}{a}$

$$C_K^y = \frac{\cancel{a}}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(u)\, e^{-jK2\pi \frac{\cancel{a}}{T_0}\cdot\frac{u}{\cancel{a}}}\cdot \frac{du}{\cancel{a}} = \underline{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(u)\, e^{-jK2\pi \frac{u}{T_0}}\, du}$$

Se puede ver que C_K^y tiene la misma forma que C_K^x por lo tanto $\underline{C_K^x = C_K^y}$

FECHA

Ejercicio 2:

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t)\left[\cos(2\pi f_0 t) - j\,\text{sen}(2\pi f_0 t)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t)\cdot \cos(2\pi k f_0 t)\, dt}_{A} - \underbrace{\frac{j}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t)\, \text{sen}(2\pi k f_0 t)\, dt}_{B}$$

Analizo paridad:

→ Si $\tilde{x}(t)$ es Par $f(x) = f(-x)$

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t)\cdot\cos(2\pi k f_0 t)\, dx = A$$

B es cero ya que $\tilde{x}(t)$ es una funcion par y $\text{sen}(2\pi k f_0 t)$ es impar por lo tanto el producto es impar y la integral de una funcion impar entre $-\frac{T_0}{2}$ y $\frac{T_0}{2}$ es cero.

$$C_{(-k)} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t)\cos(-2\pi k f_0 t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t)\cos(2\pi k f_0 t)\,dt = C_k$$

* Como el cos es una funcion par, el $\cos(x) = \cos(-x)$

por lo tanto $\underline{C_{(-k)} = C_k}$

→ Si $\tilde{X}(t)$ es impar: $f(x) = -f(-x)$

$$C_k = -\frac{j}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{X}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi k f_0 t)\,dt = B$$

A es cero ya que $\tilde{x}(t)$ es una funcion impar y el $\cos(2\pi k f_0 t)$ es una par por lo tanto el producto de $\tilde{x}(t)$ y $\cos(2\pi k f_0 t)$ es una funcion impar y la integral definida entre $-\frac{T_0}{2}$ y $\frac{T_0}{2}$ de una funcion impar es cero.

$$-C_{(-k)} = +\frac{j}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{X}(t)\,\mathrm{sen}(-2\pi k f_0 t)\,dt = -\frac{j}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{X}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi k f_0 t)\,dt = C_k$$

* Como el sen es una funcion impar, el $\mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}(x)$

entonces $\underline{-C_{(-k)} = C_k}$

Ejercicio 3

$$f(x)\begin{cases} -A & -T_0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} - T_0 \quad y \quad T_0 - \frac{\tau}{2} \leq t \leq T_0 \\ A & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

a) El coeficiente C_0 es cero ya que la señal no contiene ningún desplazamiento sobre el eje vertical y además su valor medio también es cero.

c) $$C_K = \frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{\frac{\tau}{2}-T_0} -A\, e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt + \frac{1}{2T_0}\int_{T_0-\frac{\tau}{2}}^{T_0} -A\, e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

$$+ \frac{1}{2T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A . e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

$$C_K = \frac{A}{2T_0} \cdot \left(-\int_{-T_0}^{\frac{\tau}{2}-T_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt - \int_{T_0-\frac{\tau}{2}}^{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt\right)$$

$$= \frac{-A}{jk4\pi f_0 T_0} \cdot \left[-e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{-T_0}^{\frac{\tau}{2}-T_0} + e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{T_0-\frac{\tau}{2}}^{T_0} \right]$$

$$= \frac{j A}{K 4\pi f_0 T_0} \left[-e^{-j 2\pi K f_0 \left(\frac{\tau}{2} - T_0\right)} + e^{+j 2\pi K f_0 T_0} + e^{-j 2\pi K f_0 \frac{\tau}{2}} - e^{+j 2\pi K f_0 \frac{\tau}{2}} \right.$$

$$\left. - e^{-j 2\pi K f_0 T_0} + e^{-j 2\pi K f_0 \left(T_0 - \frac{\tau}{2}\right)} \right] =$$

$$= \frac{A}{K 2\pi \frac{1}{\cancel{2} T_0} \cancel{T_0}} \left[\operatorname{sen}\left(\cancel{2}\pi K f_0 \frac{\tau}{\cancel{2}}\right) - \operatorname{sen}\left(2\pi K f_0 T_0\right) - \underbrace{\operatorname{sen}\left(2\pi K f_0 \left(\frac{\tau}{2} - T_0\right)\right)}_{(*)} \right]$$

$$(*) \quad \operatorname{sen}\left(2\pi K f_0 \left(\frac{\tau}{2} - T_0\right)\right) = \operatorname{sen}(\pi K f_0 \tau)\cos(K\pi) - \cos(\pi K f_0 \tau)\operatorname{sen}(K\pi)$$

$$C_K = \frac{A}{K\pi} \cdot \left[\operatorname{sen}(\pi K f_0 \tau) - \operatorname{sen}(\pi K) - \operatorname{sen}(\pi K f_0 \tau)\cos(K\pi) + \cos(\pi K f_0 \tau)\operatorname{sen}(K\pi) \right]$$

b)

$$C_{2r} = \frac{A}{K\pi} \cdot \left[\operatorname{sen}(2\pi r f_0 \tau) - \underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(2\pi r)}}_{0} - \operatorname{sen}(2\pi r f_0 \tau)\underbrace{\cancel{\cos(2\pi r)}}_{1} + \cos(2\pi r f_0 \tau)\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(2\pi r)}}_{0} \right]$$

$$C_{2r} = \frac{A}{K\pi} \cdot \left[\cancel{\operatorname{sen}(2\pi r f_0 \tau)} - \cancel{\operatorname{sen}(2\pi r f_0 \tau)} \right] = \underline{0}$$