

El Procesamiento Digital de Señales (PDS) es actualmente una de las tecnologías más poderosas, y seguramente dará forma a la ciencia y a la ingeniería en el siglo XXI. Ya ha producido cambios revolucionarios en una gran variedad de campos, como comunicaciones, medicina, radar y sonar, reproducción de música de alta fidelidad, prospección petrolera, etc. por citar algunos. Cada una de estas áreas ha desarrollado una tecnología específica para PDS, con sus propios algoritmos, herramientas matemáticas y técnicas especializadas. Esta combinación de amplitud y profundidad hace imposible que una sola persona sea capaz de dominar toda la tecnología de PDS desarrollada hasta ahora.

1.1. Orígenes del procesamiento digital de señales

El Procesamiento Digital de Señales se distingue de otras ramas de la ciencia por el tipo de datos con que trabaja: las *señales*. En la mayoría de los casos, estas señales tienen origen en elementos del mundo real: vibraciones sísmicas, imágenes, ondas de sonido, etc. El PDS comprende la matemática, los algoritmos, y las técnicas utilizadas para manipular estas señales después de que han sido convertidas a un formato digital. Los objetivos que se persiguen pueden ser variados: mejora de imágenes visuales, reconocimiento y generación de voz, compresión de datos para almacenamiento y transmisión, etc.

La importancia de las señales digitales se hizo evidente en 1948 con la invención de los códigos de corrección de errores. Sin embargo, los orígenes del procesamiento digital de señales se remontan hacia 1960 y 1970 cuando estuvieron disponibles las primeras computadoras digitales. En esta época las computadoras eran muy costosas, y el PDS estuvo limitado solamente a unas pocas aplicaciones críticas. Los esfuerzos pioneros tuvieron lugar en cuatro áreas fundamentales: *radar y sonar*, por intereses militares y de seguridad; *prospección petrolera*, donde con pequeñas mejoras se pueden obtener enormes ganancias; *exploración espacial*, aplicación en la que no pueden perderse datos; y *medicina*, particularmente el tratamiento de imágenes, donde hay vidas en riesgo.

La revolución de las computadoras personales en 1980 y 1990 permitió que el PDS fuese accesible para nuevas aplicaciones. Uno de los primeros productos para el público consumidor fue un juguete (“Speak and Spell”, para ayudar a los niños a aprender a deletrear) desarrollado por Texas Instruments en 1978, que utilizaba un procesador digital de se-

Tabla 1.1. Algunas aplicaciones del procesamiento digital de señales.

Espaciales	{	mejora de fotografías compresión de datos análisis de datos de sondas espaciales
Medicinales	{	diagnóstico por imágenes análisis de electrocardiogramas almacenamiento y recuperación de información
Comerciales	{	compresión de imagen y sonido efectos especiales en cine videoconferencias
Telefónicas	{	compresión de voz y datos reducción de eco multiplexado de señales
Militares	{	radar, sonar comunicaciones seguras procesamiento de imágenes
Industriales	{	prospección petrolera y minera monitoreo y control de procesos ensayos no destructivos
Científicas	{	procesamiento de señales sísmicas adquisición de datos análisis espectral

ñales para sintetizar la voz. Los reproductores de compact-disc (CD), desarrollados por Philips Electronics a partir de 1979 fueron los primeros productos de consumo masivo que se aprovecharon de la tecnología de procesamiento digital de señales. Repentinamente el PDS estuvo regido por las leyes del mercado más que por motivos militares o estratégicos. Según el IEEE, en 1985 había tres nichos comerciales para los procesadores digitales de señales (DSP): codificación de voz, compresión de video y módems, representando un mercado de 50 millones de dólares. En la actualidad los DSP están presentes en todas las ramas de la electrónica, y el crecimiento proviene del desarrollo de productos nuevos e innovadores; la Tabla 1.1 muestra apenas algunas de estas varias aplicaciones. El mercado mundial es de alrededor de 27200 millones de dólares, y la mitad de este volumen está representado por integrados donde el PDS está vinulado a funciones específicas (aceleradores de video, módems, procesadores de audio, controladores de motores, etc.), como se muestra en la Fig. 1.1.

Con respecto a los estudios académicos, a comienzos de 1980, el PDS se enseñaba a nivel de posgrado en Ingeniería Eléctrica. Diez años más tarde, el PDS se enseña a nivel de grado. La Universidad Nacional de La Plata y la Universidad Nacional del Sur fueron pioneras en Argentina. El Centro de Técnicas Analógico-Digitales (CeTAD) de La Plata inició sus actividades en 1971 bajo la dirección del Ing. Antonio Quijano. En la Universidad Nacional del Sur el Ing. Alfredo Desages y la Ing. Sylvia Padín dirigieron un activo grupo de investigación en estos temas desde fines de los 70, ofreciendo cursos de grado a principios de los 80. Hoy el PDS es una necesidad básica de científicos e ingenieros en muchos campos de la ciencia y la ingeniería.

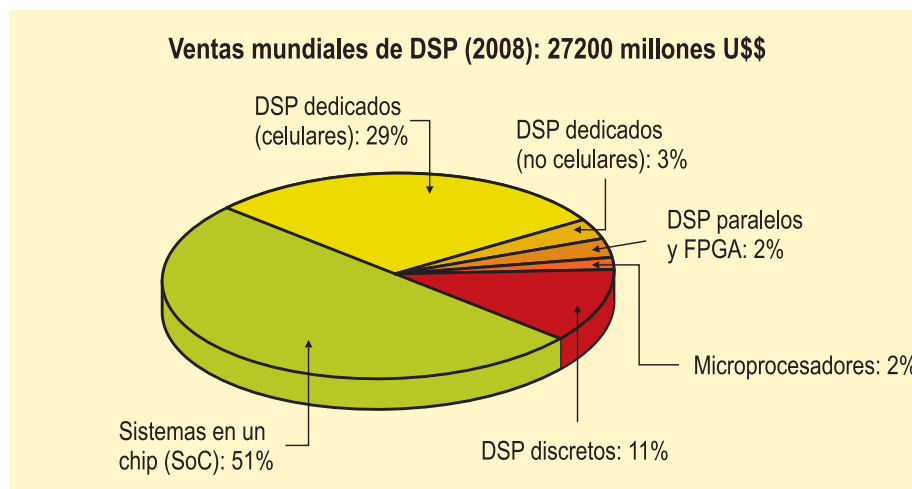


Fig. 1.1. Volumen mundial de ventas de DSPs en el año 2008.

1.2. ¿Porqué estudiar PDS?

Gran cantidad de dispositivos electrónicos y software que afectan muchas facetas de nuestra vida cotidiana están basados en aplicaciones del PDS, como reproductores multimedia, de DVD, de MP3, codificadores de voz en los modems de los teléfonos celulares, procesadores de imágenes en cámaras digitales, navegadores GPS, etc. El PDS permite la transmisión de información utilizando la infraestructura de la red telefónica y de comunicaciones, la medición y el control en equipamiento médico (audífonos, marcapasos), y en la formación y análisis de imágenes médicas, terrestres y planetarias. La lista de aplicaciones es interminable.

La tecnología del PDS es una sinergia de la teoría de señales y sistemas, algoritmos de cálculo, y arquitecturas de hardware y software. El avance continuo en estas áreas y en otras afines ha permitido que el PDS vaya más allá de reemplazar sistemas de procesamiento analógico tradicional, desarrollando aplicaciones que no se podrían haber construido o siquiera imaginado con tecnología analógica. En años recientes, los avances en herramientas de diseño (herramientas de desarrollo, compiladores para lenguajes de alto nivel, simuladores, etc.) han facilitado el diseño, desarrollo y prueba de tales sistemas, haciéndolos accesibles a mayor cantidad de usuarios.

1.3. Algunas aplicaciones del PDS

A continuación se discuten algunas áreas donde el PDS ha producido cambios revolucionarios: telecomunicaciones, audio profesional, detección de ecos en señales de sonar, radar y sísmicas, y procesamiento de imágenes. Se han preferido aquellas que dieron desarrollo a algunas de las técnicas que se estudian en el curso, dejando de lado las más recientes (y complejas) donde la intervención del PDS es más evidente. Este recorrido muestra que el PDS es multidisciplinario, utilizando técnicas provenientes de diferentes campos. Como sugiere la Fig. 1.2, no existen fronteras definidas entre el PDS y otras disciplinas técnicas.



Fig. 1.2. El PDS se relaciona con otras áreas de la ciencia, la ingeniería y las matemáticas.

1.3.1. Telecomunicaciones

Las telecomunicaciones tratan de la transferencia de información de un lugar a otro: conversaciones telefónicas, señales de televisión, archivos de computadoras, y otros tipos de datos. Para transferir la información es necesario contar con un *canal* entre el emisor y el receptor. Este canal puede ser un par de cables, una señal de radio, una fibra óptica, etc. Las compañías de telecomunicaciones cobran por transferir la información de sus clientes, y deben pagar para establecer y mantener el canal. Este será tanto más rentable cuanto mayor sea la cantidad de información transmitida. El PDS ha revolucionado la industria de telecomunicaciones en muchas áreas: generación y detección de tonos de señalización, desplazamiento de bandas de frecuencias, filtrado para eliminar el ruido de línea, etc.

A continuación se discutirán cuatro ejemplos específicos de la red telefónica: multiplexado, compresión, control de eco, y cancelamiento de ruido ambiente.

1.3.1.1. Multiplexado de señales

Según los últimos datos, existen alrededor de mil millones de teléfonos fijos en el mundo. Presionando algunos pocos botones, las redes de conmutación permiten conectar entre sí dos aparatos en unos pocos segundos. La magnitud de este prodigio es apabullante: hasta principios de 1960 para efectuar una conexión era necesario que las señales de voz (analógicas) sortearan llaves mecánicas y amplificadores vinculados por un par de cables. En comparación, el PDS convierte señales de audio en un flujo serial de datos digitales. El cable y los conmutadores mecánicos son caros; las compuertas lógicas digitales son muy baratas. Como los bits pueden entremezclarse (Fig. 1.3) y posteriormente separarse, por un mismo canal pueden transmitirse muchas conversaciones telefónicas. Por ejemplo, el estándar telefónico conocido como sistema *T-Carrier* permite transmitir simultáneamente 24 señales de voz. Cada canal de voz es muestreado a razón de 8000 veces por segundo, utilizando un conversor analógico-digital especial de 8 bits, denominado *compander*, que comprime logarítmicamente la amplitud de la señal. Cada señal de voz se transmite a

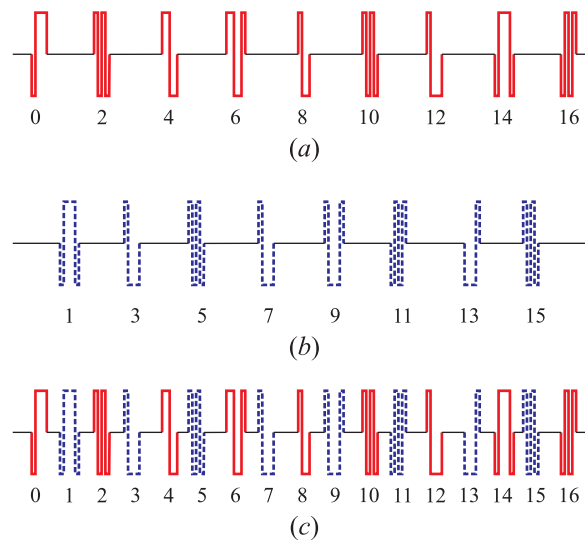


Fig. 1.3. Multiplexado en tiempo o *time-sharing*. La señal que (c) se ha obtenido mutiplexando las señales (a) y (b).

64000 bits/s, y todos los canales de audio están contenidos en un único canal de datos de 1.544 megabits/s. Esta señal puede transmitirse a 2000 metros (que es una distancia de interconexión típica) usando el cable telefónico común.

1.3.1.2. Compresión

Cuando una señal vocal se digitaliza a 8000 muestras por segundo, gran parte de la información es redundante: el valor representado por una muestra está prácticamente duplicado en las muestras vecinas. Se han desarrollado docenas de técnicas para convertir señales vocales digitalizadas en un flujo de datos de menor cantidad de bits/s que se agrupan bajo el nombre de algoritmos de *compresión* de datos. Los algoritmos de *descompresión* permiten recuperar la señal original. En general, a mayor nivel de compresión peor es la calidad del audio: la reducción de la tasa de datos de 64 kilobits/s a 32 kilobits/s no resulta en una pérdida apreciable de la calidad de la señal, que sí se percibe cuando se lleva a 8 kilobits/s. La compresión más alta que se puede obtener (de alrededor de 2 kilobits/s) desmejora la calidad de manera tan apreciable que sólo se emplea para aplicaciones militares y comunicaciones submarinas.

1.3.1.3. Control de eco

El eco es un problema serio en las conexiones telefónicas de larga distancia. Al hablar en el microteléfono la señal que representa la voz viaja hasta el receptor, donde una parte de la misma retorna como un eco. Si la distancia de interconexión es de unos pocos kilómetros, la demora de la señal es de algunos milisegundos; el oído humano está acostumbrado a estos pequeños retardos de tiempo, y no se perciben efectos anormales. Sin embargo, a medida que crece la distancia el eco se hace cada vez más notorio y molesto. En enlaces intercontinentales el retardo puede alcanzar varias centenas de milisegundos e imposibilitar

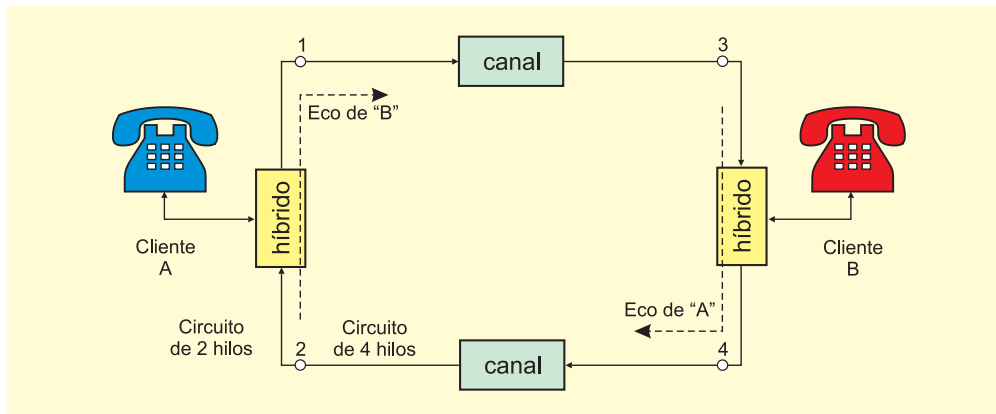


Fig. 1.4. Diagrama de un circuito telefónico simplificado.

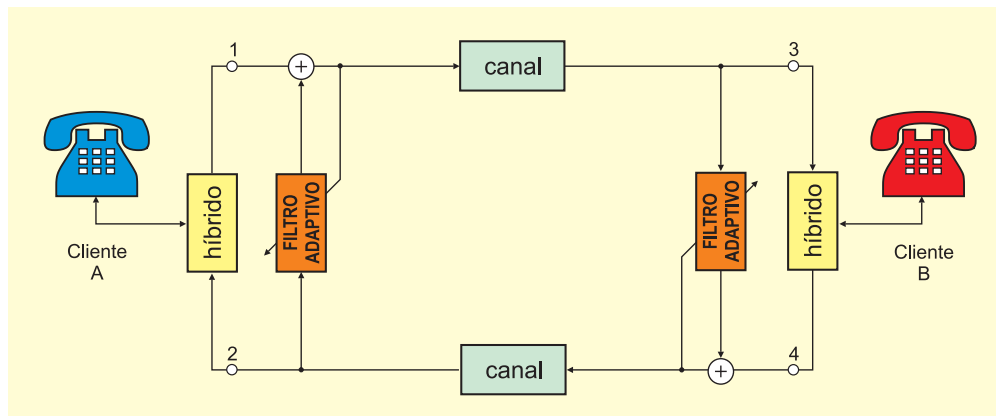


Fig. 1.5. Cancelamiento de eco en redes telefónicas de larga distancia.

una comunicación fluida.

En la Fig. 1.4 se muestra un esquema simplificado de un circuito telefónico de larga distancia. El transformador híbrido en los extremos de la red convierte el circuito de dos hilos en el lado del abonado a un circuito de cuatro hilos, generando caminos separados para cada dirección de transmisión. Este cambio de 2 a 4 hilos se basa en razones económicas, por ejemplo para permitir la amplificación de la señal, el multiplexado o la transmisión simultánea de varios llamados, etc. Idealmente, la señal de voz que se origina en A viaja por el camino 1-3 hasta el híbrido en la derecha, y de ahí hasta el receptor B, mientras que la señal de B viaja por el camino 4-2 hacia A. La red híbrida en cada extremo de la red debe asegurar que la señal de voz se acopla al camino apropiado, y que ningún vestigio de la misma retorne hacia el receptor. Sin embargo, pequeñas diferencias de impedancia causan que algunas de las señales entrantes vuelvan al interlocutor en la forma de eco (líneas de puntos en la Fig. 1.4).

El PDS ataca este problema midiendo la señal de retorno, y generando una *antiseñal* apropiada de modo de cancelar el eco. En cada extremo del canal de comunicación (Fig. 1.5), la señal entrante se aplica simultáneamente al híbrido y a un *filtro adaptivo*, el que estima el eco que produciría la línea y lo resta de la señal original. El filtro adaptivo es un sistema



Fig. 1.6. Detalle del parlante "generador de ruido".

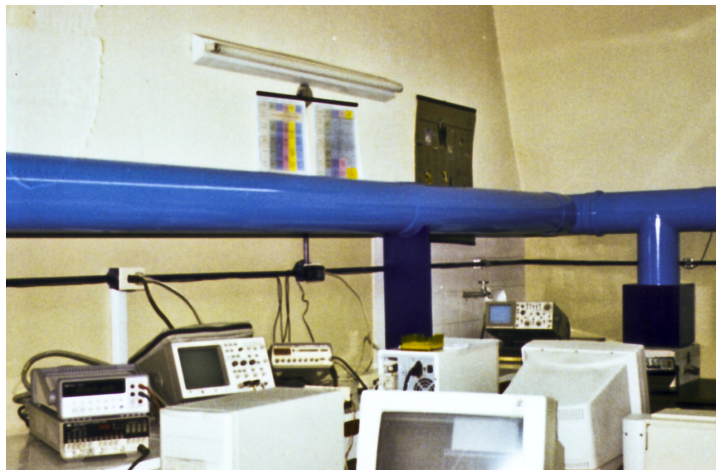


Fig. 1.7. Detalle del parlante cancelador.

realimentado que calcula un modelo de la línea de manera que el sistema puede cancelar el eco casi para cualquier tipo de conexión o distancia entre los abonados.

1.3.1.4. Cancelamiento de ruido

Esta misma técnica se puede utilizar para reducir el ruido ambiente, cancelándolo mediante una señal de "antirruído". Un sistema activo elemental se compone de un dispositivo electroacústico que cancela la señal no deseada generando una señal de igual amplitud y fase opuesta. La señal original y el "antirruído" se combinan de modo de cancelar ambos sonidos. Aunque la idea no es nueva, ya que fue propuesta por Lueg en 1936, sólo en los últimos años la tecnología se ha desarrollado lo suficiente para poder aplicarla satisfactoriamente.

En el Laboratorio de Procesamiento de Señales y Circuitos (LaPSyC) de la UNS (Nieto *et al*, 2001; Gonzalez *et al*, 2002) se ha construido un equipo experimental para ensayar

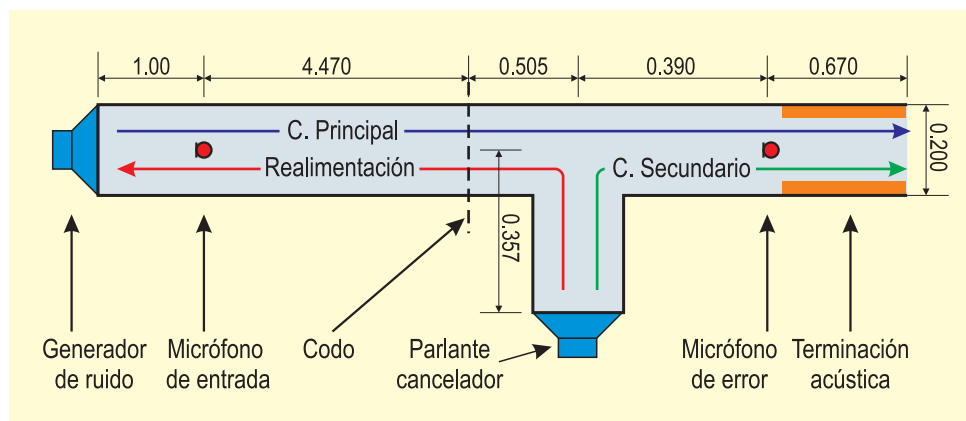


Fig. 1.8. Esquema de un prototipo experimental para cancelamiento activo de ruido.

estas técnicas constituido por un par de parlantes montados sobre un tubo de PVC de 20 cm de diámetro. El tubo consta de dos secciones a 90 grados, la primera con una longitud de 5.5 m, y la segunda de 1.5 m, según se aprecia en las Figs. 1.6 y 1.7. El “generador de ruido” y el “cancelador” son un par de parlantes, el primero montado en un extremo del segmento de mayor longitud, y el segundo en la sección de longitud menor, sobre una “T”. Los transductores están ubicados dentro de cajas acústicas para evitar la radiación de ruido al exterior, y los micrófonos de referencia y error fueron colocados sobre el tubo. Un diagrama esquemático del sistema, junto con las dimensiones más relevantes, se muestra en la Fig. 1.8.

En las Fig. 1.9(a) se observan los resultados de cancelamiento de ruido ante una excitación compuesta por tonos puros, y en la Fig. 1.9(b) la atenuación obtenida para una excitación tipo ruido blanco.

1.3.1.5. Televisión digital

El Comité Consultivo Internacional de Radiocomunicaciones (CCIR) definió en 1982 la norma para codificar señales de video analógica entrelazadas (como las que se usan en la TV común), que se conoce como ITU-R BT.601 (ITU 1983). De acuerdo a esta norma, el

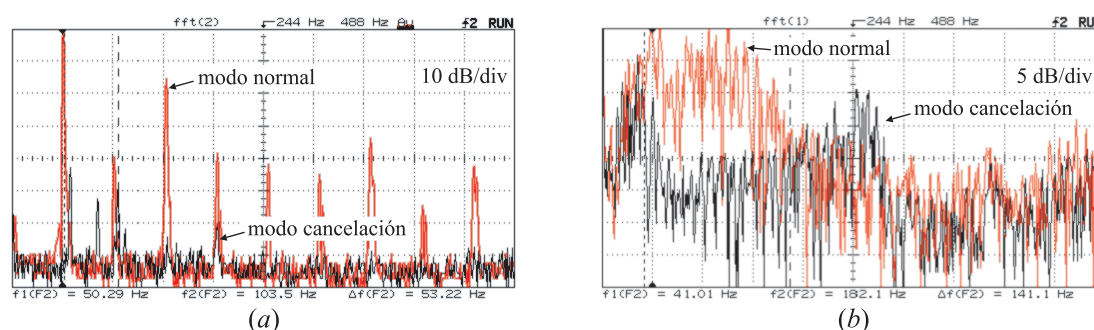


Fig. 1.9. Resultados de cancelamiento: tonos puros (a) y ruido de banda ancha (b).

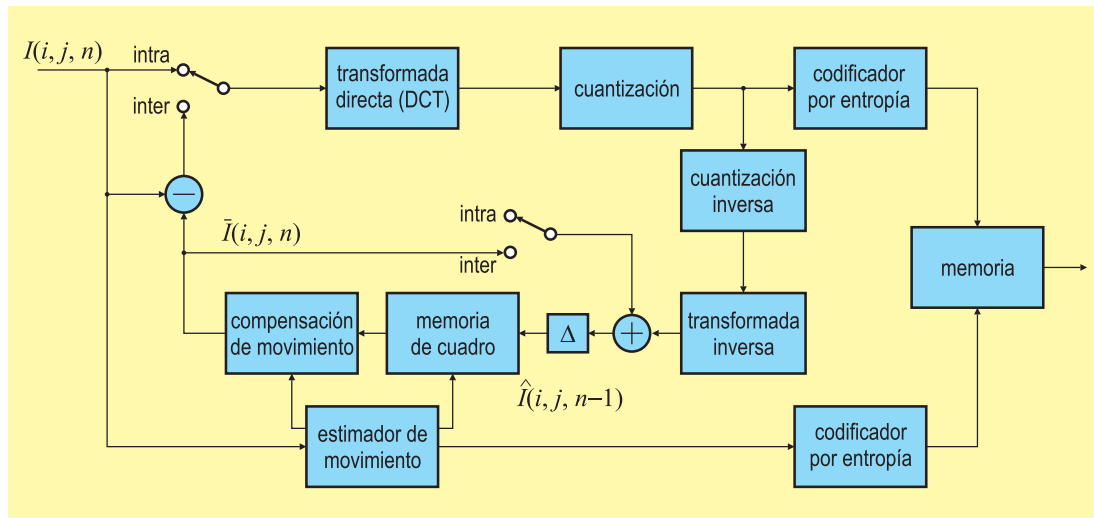


Fig. 1.10. Diagrama bloque de un sistema de compresión de video.

flujo de datos de una señal de video común es de 166 Mb por segundo, que es demasiado elevada para los canales de transmisión o los dispositivos de almacenamiento usuales.

Entre los procesos necesarios para llevar la señales desde la fuente (una cámara, un estudio de TV) hasta su destino (una pantalla) se destacan los de *compresión* y *descompresión*. El primero reduce la señal de video con una tasa de 166 Mb/s a 20 Mb/s (o menos), y el segundo se encarga de reconstruir la señal para visualizarla. En los últimos años se han propuesto varios esquemas de codificación para imagen y video, tales como JPEG para imágenes, H.263 para video con bajas tasas de transmisión, MPEG-1 para almacenamiento, MPEG-2 para transmisión y aplicaciones generales de alta calidad, MPEG-4 para aplicaciones multimedia interactivas, y H.264 para altas tasas de compresión. Aunque tienen diferentes especificaciones, el principio de funcionamiento de todos ellos es similar. Un bloque común es el de compresión, que se representa esquemáticamente en la Fig. 1.10.

El sistema de la figura puede trabajar en dos modos diferentes: *intra*, en el que se explota solamente la redundancia espacial en la imagen, o *inter*, donde se aprovecha la redundancia temporal entre imágenes vecinas. Módulos de análisis de mayor jerarquía que éste se encargan de seleccionar automáticamente uno u otro modo de operación de acuerdo a las características de las imágenes.

Se analizará brevemente el funcionamiento del modo *intra*. Este es el modo usado, por ejemplo, para la primera imagen de una secuencia de video. En primer lugar, se realiza una *transformación* para decorrelar la información. La imagen se particiona en bloques de 8×8 bits, y a cada uno de ellos se aplica una transformada discreta coseno (DCT), que es similar a una transformada discreta de Fourier, pero que enfatiza las bajas frecuencias. Cada uno de los bloques se representa en un formato numérico apropiado teniendo en cuenta las peculiaridades del sistema visual humano. Este proceso que se denomina *cuantización*, y en general introduce algún grado de distorsión, que hace que la imagen decodificada sea distinta a la señal original. Los coeficientes cuantizados se codifican según su entropía¹, lo

¹Los coeficientes más frecuentes se codifican usando símbolos más cortos. La longitud de cada símbolo es aproximadamente proporcional a menos el logaritmo de su probabilidad.

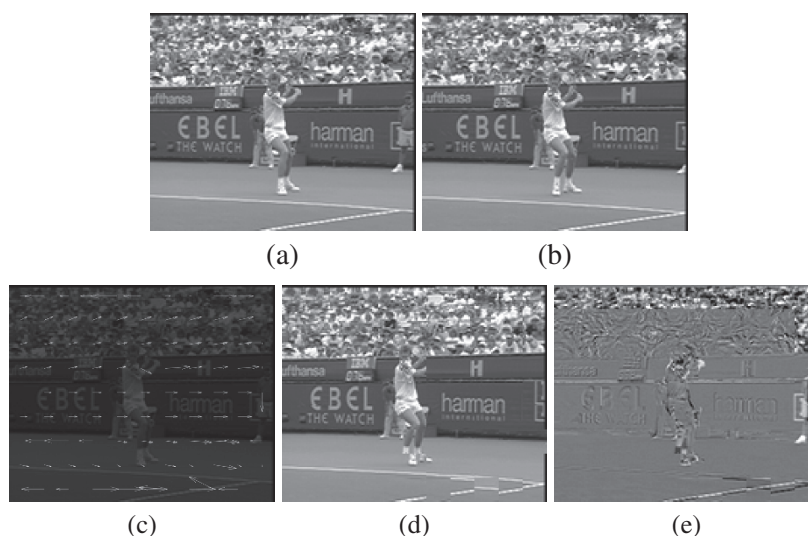


Fig. 1.11. Codificación de imágenes: Imagen número 12 (a) y número 10 (b) de la sucesión original. Campo de movimiento estimado a partir de las imágenes previas (c); sólo se muestra un vector por cada bloque de 16×16 píxeles. Estimación del cuadro 12 a partir del cuadro 10 y la información de compensación del movimiento (d). Imagen error entre el cuadro 12 y la imagen compensada en movimiento (e). A fines de visualización se agregó un corrimiento de 128 a los píxeles de la imagen de error, y se escalaron los valores resultantes entre 0 (negro) y 255 (blanco).

que asegura una transmisión eficiente.

Los datos cuantizados se utilizan localmente para proveer al codificador con la misma información que estará disponible en el decodificador. En otras palabras, en el codificador también se encuentra incluido un decodificador, que a través de la *cuantización inversa* y la *transformación inversa* permite obtener una réplica de la imagen decodificada, que se almacena en la *memoria de cuadro*, y que será utilizada en la codificación de los cuadros que siguen. Esta imagen se representa como $\hat{I}(i, j, n - 1)$, donde i, j , son índices que indican la posición espacial del pixel, y n la posición temporal. El sombrero “ $\hat{\cdot}$ ” representa que no es el cuadro original, sino uno decodificado. Como durante todo este tiempo el sistema ya ha comenzado a codificar el cuadro siguiente en la sucesión, la imagen decodificada se almacena como perteneciente al instante temporal $n - 1$, y este retardo se representa como Δ en la figura.

El primer paso es explotar la redundancia temporal entre las imágenes decodificadas anteriormente y la reciente. Por simplicidad, se supondrá que sólo se utiliza la imagen anterior, pero en un sistema real la memoria de cuadro puede contener varias imágenes decodificadas para utilizar en este paso.

La imagen $\hat{I}(i, j, n - 1)$ decodificada previamente se utiliza para estimar la imagen actual utilizando el bloque *estimador de movimiento* que calcula el desplazamiento entre una escena y otra, asignándole a cada pixel un vector de movimiento (d_x, d_y) . La información de movimiento es parte de una representación más compacta de la sucesión de video, que nuevamente se codifica de acuerdo a su entropía y se transmite.

Basado en este campo de movimiento y en la imagen decodificada almacenada en la me-

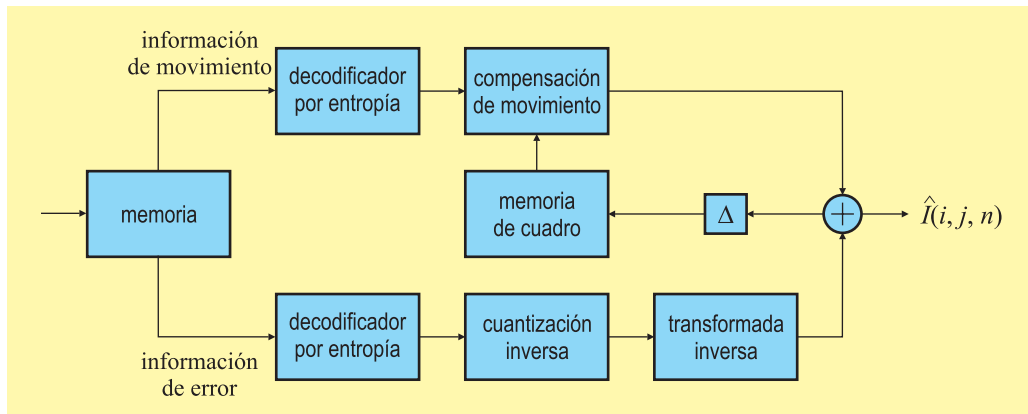


Fig. 1.12. Esquema del decodificador asociado al codificador de la Fig. 1.10

moria de cuadro, el bloque *compensación de movimiento* produce una estimación de la imagen actual $\bar{I}(i, j, n)$, denominada *imagen compensada por movimiento* en el instante temporal n . El sistema hace la diferencia entre la imagen compensada por movimiento $\bar{I}(i, j, n)$ y la imagen original $I(i, j, n)$ en el instante n y obtiene la imagen de error, que contiene toda la información de la imagen actual que no fue estimada correctamente utilizando la información disponible a partir de la imagen $\hat{I}(i, j, n - 1)$. Las diferencias entre las distintas imágenes se ilustran en la Fig. 1.11.

La imagen de error se trata como una imagen original en el modo *intra*, es decir, se decorrelaciona utilizando la DCT por bloques, se cuantiza, se codifican los coeficientes según su entropía y se transmiten.

La Fig. 1.12 muestra el diagrama bloque del decodificador. Las imágenes $\hat{I}(i, j, n - 1)$ decodificadas previamente se almacenan en la memoria de cuadro, y se compensan por movimiento utilizando la información que se transmite al codificar los cuadros siguientes. Esto explica la necesidad de contar con una réplica de las imágenes decodificadas $\hat{I}(i, j, n)$ en el codificador, ya que en caso contrario el codificador y el decodificador estarían utilizando diferente información en el proceso de estimación del movimiento: el codificador estimaría el movimiento utilizando la información original $I(i, j, n)$, mientras que el decodificador estaría aplicando esta información sobre la señal decodificada $\hat{I}(i, j, n)$.

1.3.2. Procesamiento de audio

Probablemente, la vista y el oído son los sentidos humanos más relevantes para las relaciones entre las personas. En consecuencia, gran parte de las aplicaciones del PDS está vinculado con el tratamiento de señales de audio y video.

1.3.2.1. Música

El camino que va desde el músico al oyente (o bien desde el micrófono al parlante) es significativamente largo, como se sugiere en la Fig. 1.13. La representación digital de los datos permite prevenir la degradación de la señal asociada al almacenamiento y manipu-

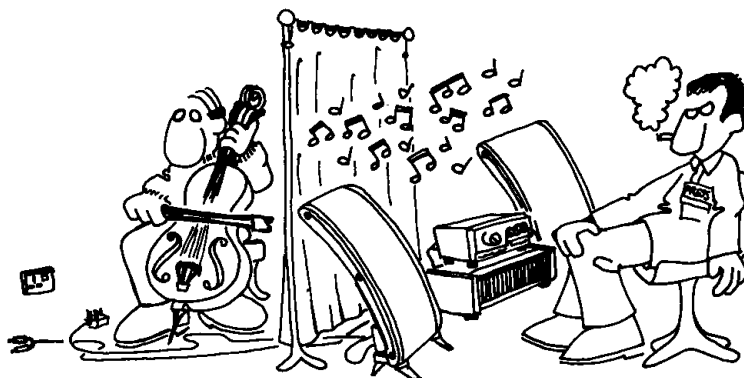


Fig. 1.13. El camino de la señal analógica puede ser particularmente largo... o no!

lación analógicas, efecto que resulta familiar a cualquiera que haya comparado la superior calidad musical de los discos compactos frente a la de los cassettes o vinilos (aunque algunos puristas y audiófilos sostienen lo contrario).

La pieza musical se graba en un estudio de sonido en múltiples canales o pistas. En algunos casos, algunos instrumentos y las voces se graban en canales separados. Esto permite que el ingeniero de sonido y de mezcla tenga mayor libertad y flexibilidad para crear el producto final. El complejo proceso de combinar las pistas individuales en un par de pistas –los canales izquierdo y derecho– o en “5+1” –izquierda y derecha delanteros, izquierda y derecha traseros, y un canal central de graves– se denomina *mix down*, o mezcla. El PDS puede proveer muchas funciones fundamentales de la mezcla, como el filtrado, suma y resta de señales, edición, etc.

Otra de las aplicaciones musicales del PDS es la creación de *reverberación* artificial. Si los distintos canales de audio simplemente se suman, la pieza de sonido suena opaca, pues el contenido de ecos o de reverberaciones de la música –minimizados al grabar en estudio– influyen favorablemente sobre los oyentes. El PDS permite agregar ecos y reverberaciones artificiales durante el proceso de mezcla, de modo de simular ambientes ideales de audición. Los ecos de pocas centenas de milisegundos de duración dan la impresión de un ambiente de gran tamaño, mientras que retardos de 10 a 20 milisegundos provocan en el oyente la ilusión de un ambiente de audición más reducido.

1.3.2.2. El disco compacto (CD)

Las personas de mayor edad recuerdan los sonidos desagradables que acompañaban la reproducción de los discos de vinilo (LP), sobre todo cuando había rayones, polvo, o hasta ihuellas de dedos! en su superficie. El sistema de discos compactos (CD) evita todos los inconvenientes del LP, y brinda ventajas adicionales. La Tabla 1.2 compara las características técnicas de los dos sistemas.

La información en el CD se almacena digitalmente en una pista espiralada, con una sucesión de “marcas” (Fig. 1.14). Cada bit grabado en la superficie del CD ocupa un área de solamente $1 \mu\text{m}^2$, por lo que la densidad de información muy alta (10^6 bits por milímetro cuadrado), aunque no tanto como en un DVD.

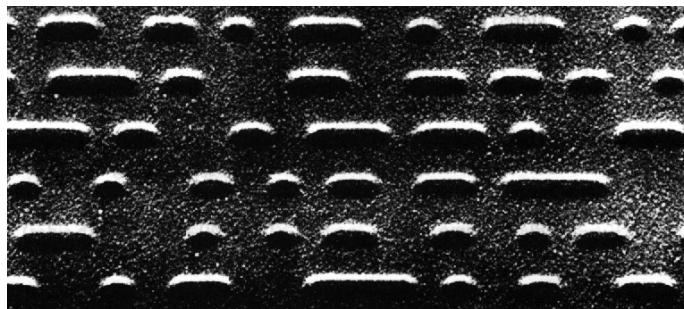


Fig. 1.14. Información en la superficie de un CD. Cada marca tiene $0,5\ \mu\text{m}$ de ancho, $0,8$ a $3,5\ \mu\text{m}$ de longitud, y una profundidad de $0,11\ \mu\text{m}$. La distancia entre pistas es de $1,6\ \mu\text{m}$. (Reproducido de *Philips Technical Review*, **40** (6), 1982).

En la Fig. 1.15 se muestra un diagrama bloque del procesamiento de señales de audio para la grabación del CD. La señal analógica de cada uno de los canales de audio se muestrea a $44.1\ \text{kHz}$, y se digitaliza. Cada muestra se representa por una palabra de 16 bits, que permite abarcar un rango dinámico de 90 dB. En cada instante de muestreo se obtienen 32 bits (16 por cada canal), que se codifican utilizando la técnica Reed-Solomon de dos niveles, para detectar y corregir (o cancelar) los errores durante la reproducción. Se agregan bits adicionales de control y para almacenar información complementaria. El flujo de datos resultante se transforma en un formato apropiado para grabar en el disco, utilizando una modulación EFM (modulación 8 a 14) que convierte cada byte en un código de 14 bits. Después de un procesamiento adicional, este flujo de bits se envía al láser, que graba la información digital en una película sensible depositada sobre un disco de vidrio. Para generar los patrones de las marcas se utiliza un proceso fotográfico, y de esta forma se obtiene el disco “maestro” a partir del cual se generan las copias que podrán disfrutar los oyentes.

Durante la reproducción (Fig. 1.16) las pistas se leen ópticamente a una velocidad tangencial constante de $1.2\ \text{m s}^{-1}$, mientras el disco gira a una velocidad de entre $8\ \text{rev s}^{-1}$ y $3.5\ \text{rev s}^{-1}$. La señal digital se demodula, se detecta cualquier error en el flujo de datos y, si es

Tabla 1.2. Características de los vinilos (LP) y discos compactos (CD).

Característica	LP	CD
Respuesta en frecuencia	30 Hz a 20 kHz	20 Hz a 20 kHz
Rango dinámico	70 dB (a 1 kHz)	> 90 dB
Relación señal a ruido	60 dB	> 90 dB
Distorsión armónica	1-2 %	0.004 %
Separación de canales	25-30 dB	>90 dB
Wow y flutter	0.03 %	no detectable
Efecto de polvo, rayones, etc.	causa ruido	se puede corregir
Durabilidad	se degrada con el uso	semipermanente
Vida de la “púa”	500 a 600 hs	semipermanente
Capacidad	40 a 45 minutos	50 a 75 minutos

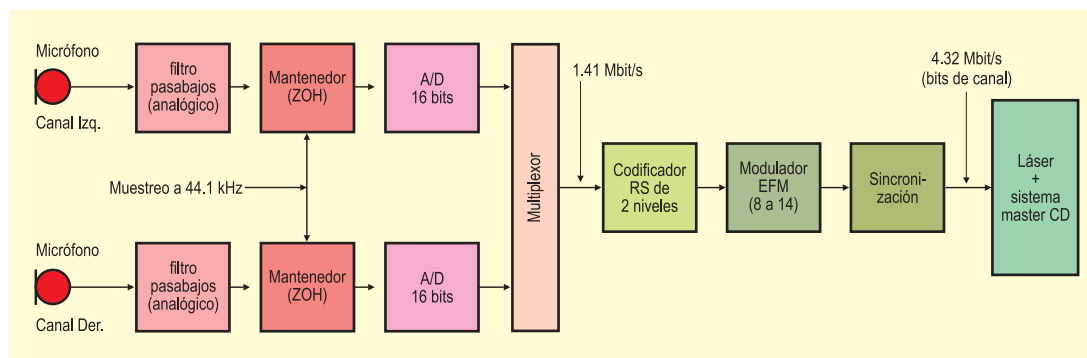


Fig. 1.15. Procesamiento de una señal de audio para la grabación de un CD.

posible, se corrige. Los errores pueden tener origen en fallas en el proceso de fabricación (la creación de la copia a partir del disco maestro), daños en la superficie del CD, polvo, etc. Si no son corregibles, su efecto se reduce reemplazando la muestra dañada por el promedio de las muestras adyacentes, o, si hay más de una muestra errónea, asignándoles un valor nulo (*muting*).

Después de la corrección o cancelación de los errores, los datos están formados por una serie de palabras de 16 bits, cada una de las cuales representa una muestra de señal de audio. Estas muestras podrían aplicarse directamente a un convertor D/A, pero impondría restricciones muy severas sobre el filtro reconstituidor. En particular, el nivel de las señales por encima de 20 kHz deben reducirse al menos en 50 dB relativos a la máxima señal de audio, y para evitar distorsiones el filtro debe tener una característica de fase lineal en toda la banda de audio. Por este motivo se prefiere un procesamiento digital adicional: las señales se filtran con un filtro digital que trabaja a 4 veces o más la frecuencia de muestreo (*oversampling*) para lograr que la salida del DAC sea más suave, y simplificar de esta forma los requerimientos del filtro reconstituidor analógico. Además con este proceso se logra una relación señal a ruido equivalente a la de un convertor D/A de 16 bits utilizando un convertor de sólo 14 bits. El filtro digital tiene la respuesta de fase lineal requerida lo que reduce la posibilidad de intermodulación, y su característica varía con la frecuencia de reloj, haciéndolo insensible a las variaciones de la velocidad de rotación del disco.

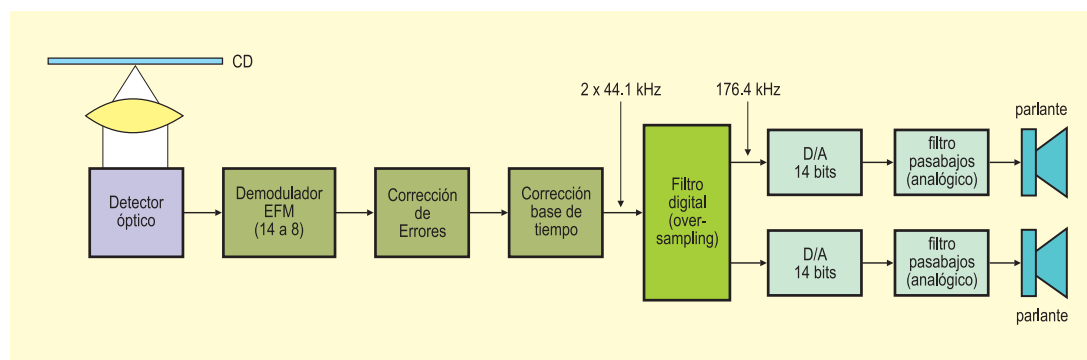


Fig. 1.16. Reproducción de la señal de audio en un CD.

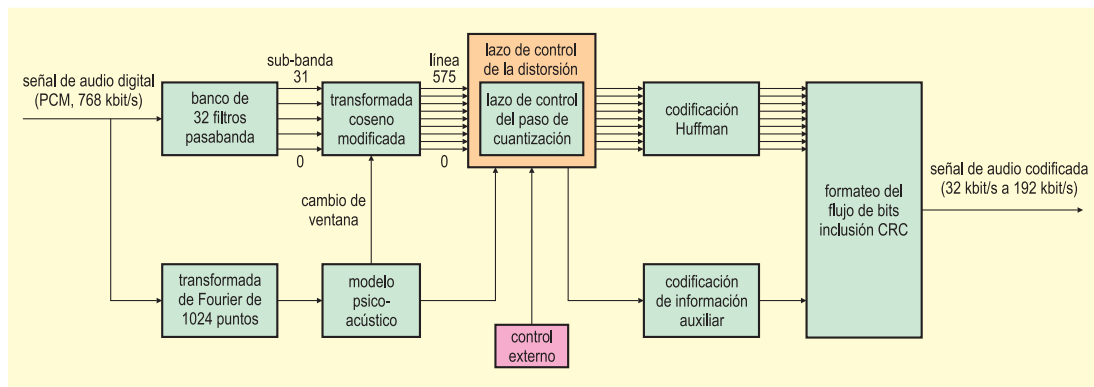


Fig. 1.17. Un codificador MPEG Layer-3 (MP3).

1.3.2.3. Codificación MP3

MP3 es una abreviatura de MPEG 1/2-Layer 3, el mecanismo de codificación de audio diseñado por el Motion Picture Experts Group (MPEG), un grupo de estudio de la International Standards Organization (ISO), cuyo nombre formal es ISO/IEC JTC1/SC29/WG11. Este comité fue creado en 1988 para desarrollar normas genéricas para la codificación de películas y audio; desde entonces, se ha encargado de la normalización de las técnicas de compresión para video y audio. La norma MPEG-1 Layer 3 fue definida en 1991; el “layer 3” es un modo de operación de mayor complejidad y mejor desempeño, diseñado para proveer la mejor calidad de sonido a bajas tasas de transferencia, de alrededor de 128 kbit/s para una señal de audio estéreo (Brandenburg y Popp, 2000).

Desde entonces, los avances en la investigación en codificación perceptual de audio han permitido desarrollar nuevos métodos de codificación. El MPEG-2, cuya normalización se produjo en 1994, introdujo menores frecuencias de muestreo (16 kHz, 22.05 kHz y 24 kHz) que se suman a las frecuencias de 32 kHz, 44.1 kHz y 48 kHz definidas en MPEG-1. En 1997 se finalizó la definición de la norma MPEG-2 Advanced Audio Coding (AAC), que define nuevos esquemas de codificación (no son compatibles con MPEG1-Layer 3) para el tratamiento de señales estéreo y multicanales, con soporte para frecuencias de muestreo entre 8 kHz y 96 kHz, y entre 1 a 48 canales de audio. Paralelamente, se han diseñado otros sistemas propietarios que supuestamente permiten codificar con mayor calidad o mayor compresión.

El formato no tiene una tasa de compresión fija, y para el Layer 3 la norma define un rango que va desde 8 kbit/s a 320 kbit/s; la tasa de compresión se puede cambiar entre uno y otro bloque de datos de audio.

La especificación de la mayoría de las etapas del decodificador se definen por ecuaciones; el cumplimiento con la norma se verifica por la máxima desviación de la señal decodificada respecto a una señal de referencia. Esto permite construir decodificadores que corran sobre arquitecturas de punto fijo o punto flotante; dependiendo de la habilidad de los implementadores, es posible lograr decodificadores que cumplan con la norma utilizando un ancho de palabras de 20 bits, sin necesidad de utilizar operaciones en doble precisión.

La codificación de MPEG Audio queda librada al implementador de la norma. Los están-

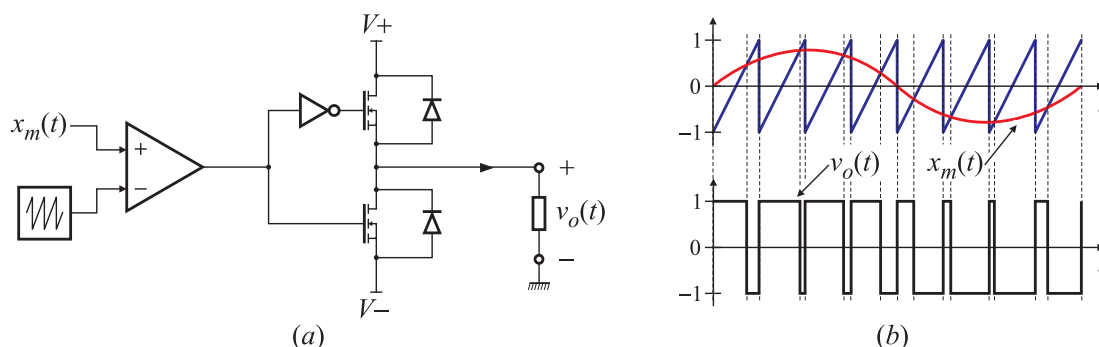


Fig. 1.18. Amplificador clase D: esquema circuital (a) y formas de ondas relevantes (b).

dares ISO incluyen algunos ejemplos de decodificadores, pero es necesario una enorme experiencia y gran cantidad de conocimientos para implementar codificadores MPEG de buena calidad; por ello el número de implementaciones independientes se ha mantenido relativamente bajo.

El principio de funcionamiento de un codificador MP3 es el siguiente (Fig. 1.17). La señal de audio muestreada es filtrada por una cascada de dos tipos de filtros diferentes. El primero es un banco de 32 filtros pasabandas polifásico (el banco de filtros principal), seguido de una transformada coseno modificada de 576 muestras. Esta división de cada una de las 32 bandas en 18 sub-bandas aumenta la posibilidad de eliminar redundancias, lo que permite una codificación más eficiente.

El modelo perceptual determina la calidad de la implementación del codificador. Puede ser implementado utilizando un banco de filtros, o combinando el cálculo de los valores de energía que se utilizarán para definir el umbral de enmascaramiento con el banco de filtros principal. La salida del modelo perceptual son los valores del umbral de enmascaramiento para cada sub-banda de frecuencias. Los coeficientes de la transformada coseno que sean menores que el umbral se descartan. En el Layer-3, estas bandas de frecuencia son aproximadamente equivalentes a las bandas críticas del oído humano. Si el ruido de cuantización se mantiene por debajo del umbral de enmascaramiento, la señal comprimida resulta indistinguible de la señal original.

1.3.2.4. Amplificadores de potencia

Los amplificadores de audio de potencia tradicionales solían ser de clase B o AB, pues permiten conseguir baja distorsión con un diseño sencillo. Su eficiencia de potencia es moderada, y su rendimiento máximo teórico es ligeramente inferior al 80 %. En los últimos años se han incrementado los esfuerzos por desarrollar técnicas de amplificación más eficientes. Una de las premisas básicas del diseño electrónico actual es reducir al mínimo el consumo de potencia del propio dispositivo, objetivo que se puede alcanzar trabajando los semiconductores al corte y la saturación, donde su consumo de energía es mínimo. Esta es la idea detrás de los amplificadores conmutados (o clase D), que pueden alcanzar un rendimiento máximo teórico cercano al 100 %.

Este principio de funcionamiento requiere modular la señal a amplificar, de modo de convertirla en una señal binaria del tipo “0-1” o “apagado-prendido”. Una de las técnicas

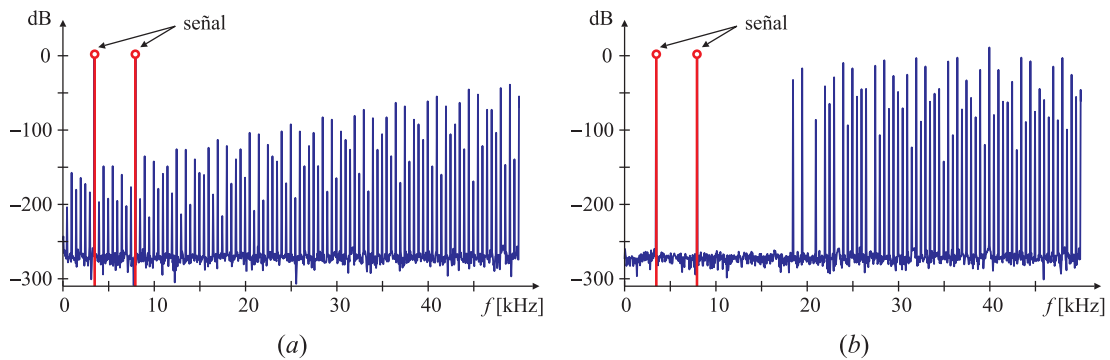


Fig. 1.19. Espectro de una señal PWM natural (a) y una señal “click” modulada (b).

de modulación binaria más utilizadas es la modulación por ancho de pulsos (MAP), que se obtiene comparando la señal a modular con una señal portadora con forma de rampa o triángulo de frecuencia mayor como se muestra en la Fig. 1.18(a). Este tipo de modulación se denomina MAP *natural*. La señal de salida es una onda cuadrada con ciclo de trabajo variable que depende de la amplitud de la señal moduladora. En la Fig. 1.18(b) se muestran las formas de onda relevantes de la MAP.

La determinación analítica del espectro en frecuencia de una señal MAP no es trivial. Los primeros trabajos, de alrededor de 1950, sólo calculan el espectro para el caso particular en que la señal moduladora es sinusoidal; recién en 2003 se publicaron los primeros trabajos que explicitan el espectro de una señal PWM modulada por una forma de onda arbitraria. El espectro de una señal MAP natural está compuesta por el espectro de la señal moduladora, junto con réplicas moduladas en fase centradas en cada armónica de la portadora, como se representa en la Fig. 1.19(a). Por lo tanto, para que los niveles de distorsión sean pequeños es necesario que la frecuencia de la portadora (la onda triangular o diente de sierra) sea varias veces superior a la frecuencia máxima de la señal moduladora.

Una técnica de modulación distinta es la “modulación click”, que se caracteriza porque la señal modulada tiene distorsión nula en banda base y además se puede especificar una banda libre de productos de intermodulación, desplazando el ruido a un rango de frecuencias por encima de la banda de interés, como se muestra en la Fig. 1.19(b).

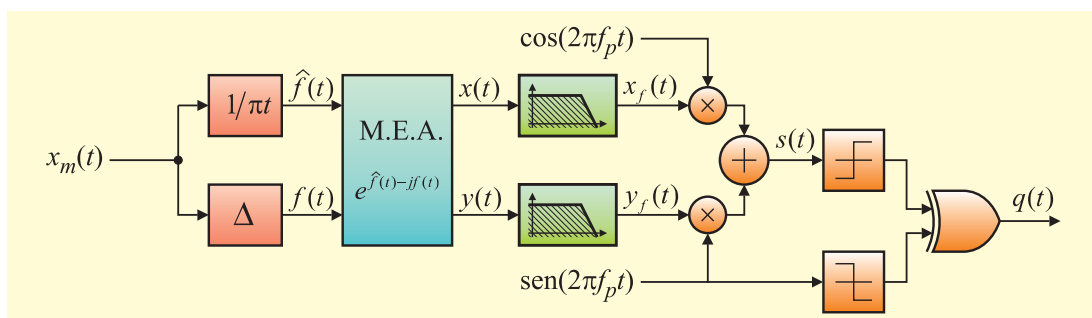


Fig. 1.20. Esquema de un modulador “click”.

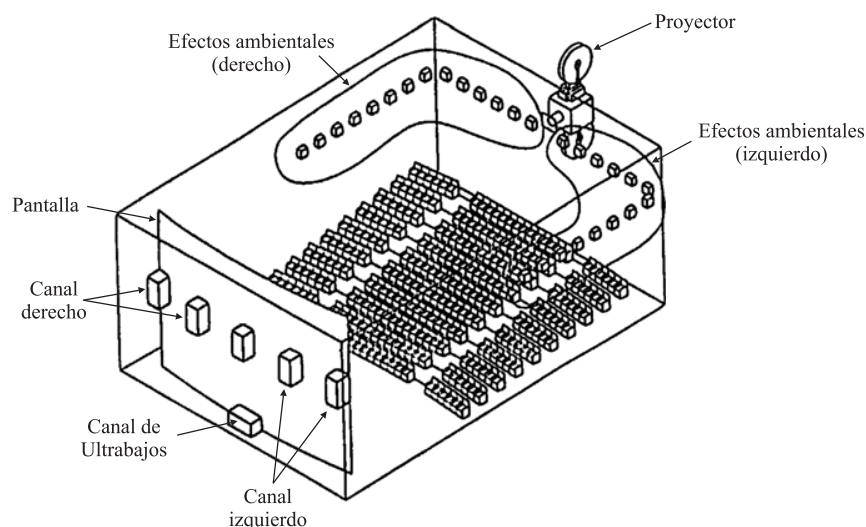


Fig. 1.21. Arreglo de parlantes en un cine con sonido envolvente.

El inconveniente es que el proceso de modulación es suficientemente complejo como para permitir una implementación sencilla, como se muestra en la Fig. 1.20. Los bloques críticos son el transformador de Hilbert (con respuesta impulsiva $(\pi t)^{-1}$) y el modulador exponencial analítico (MEA); además es necesario determinar con muy buena precisión los instantes en que la onda cuadrada de salida cambia de signo. Estos problemas hacen que la implementación “en línea” sea difícil (Stefanazzi, 2008). Sin embargo, la comparación de los espectros de las Figs. 1.19(a) y (b) justifica que en la actualidad se sigan investigando nuevas técnicas de modulación para atenuar los niveles de distorsión con implementaciones más sencillas que la modulación “click”. Todas estas alternativas emplean distintas técnicas de procesamiento digital de señales (Chierchie, 2010), algunas de las cuales serán estudiadas en este curso.

1.3.2.5. Otras aplicaciones de audio

El PDS se aplica en otros equipos de uso masivo, tales como televisores, grabadores de video, videocámaras, equipos profesionales como los empleados en estudios de grabación, transmisión y distribución de programas de TV, etc. Otras aplicaciones de PDS en audio son:

- Creación y uso de efectos de sonido (disparos, pasos, aplausos, ruido de automóviles que se alejan, etc.) en comerciales de TV y películas para mejorar la ilusión de realidad o aumentar la credibilidad de una escena: los sistemas Dolby o DTS para generar sonido “tridimensional” en el cine (Fig. 1.21), el procesamiento de audio de los sistemas de “home theater”, etc.
- Mejora del ámbito de audición y aumento de la riqueza del sonido mediante filtros digitales sencillos que simulan ecos, reverberaciones y efectos corales.
- Síntesis de sonidos que imitan instrumentos musicales, y otros que no se pueden generar con ningún instrumento convencional.

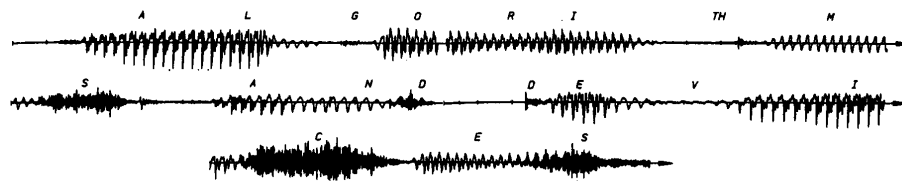


Fig. 1.22. Ejemplo de una señal vocal ("algorithms and devices").

- Empleo de técnicas avanzadas en la codificación, detección, y corrección de errores, eliminación del *wow* y *flutter* (variaciones de velocidad de baja y alta frecuencia, respectivamente), asegurando que la calidad del material de audio no dependa del soporte (magnético u óptico), etc.
- Mejora de registros sonoros de materiales de archivo.

1.3.2.6. Síntesis de voz

El reconocimiento y la síntesis de voz permiten la comunicación entre humanos y máquinas. Para la generación de voz artificial se han popularizado dos tecnologías diferentes: *grabación digital* y *simulación del tracto vocal*. La primera se basa en digitalizar la voz de un locutor humano (Fig. 1.22) y almacenarla, usualmente de forma comprimida. Para la reproducción se descomprimen los datos, y se convierten nuevamente a formato analógico. Una hora de voz grabada requiere aproximadamente 3 megabytes de almacenamiento, lo que está dentro de las capacidades de sistemas de cómputo pequeños. Esta es la forma de generación de voz sintética más utilizada hoy en día.

Los simuladores del tracto vocal son más complicados, y tratan de reproducir los mecanismos físicos por los cuales los seres humanos generan la voz. El tracto vocal (Fig. 1.23) es una cavidad acústica con frecuencias de resonancia determinadas por el tamaño y la forma de las distintas cámaras. Los fonemas se generan de dos maneras diferentes, que

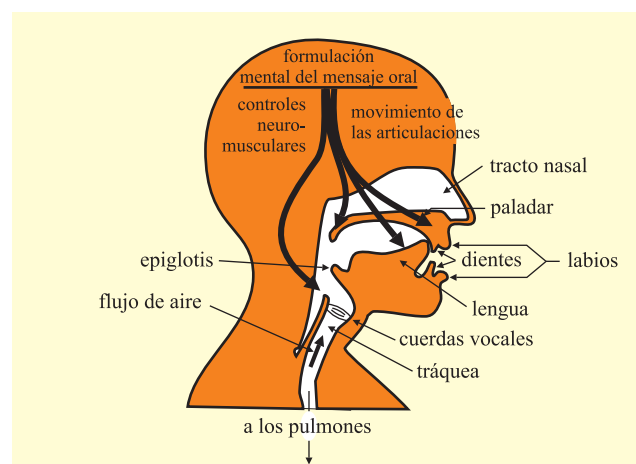


Fig. 1.23. Corte esquemático del tracto vocal.

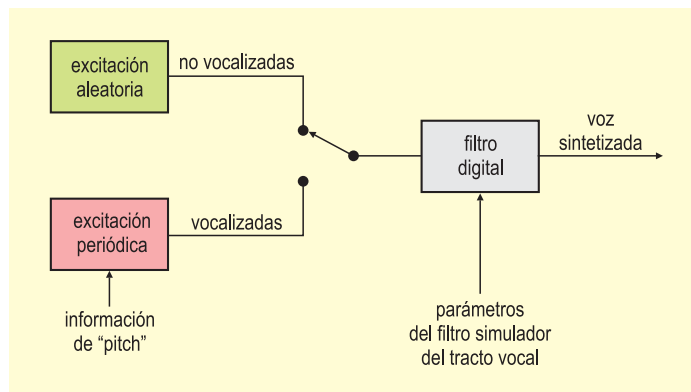


Fig. 1.24. Sistema de generación de voz artificial.

dan origen a los sonidos *vocales* y *fricativos*. Los primeros ocurren por la vibración de las cuerdas vocales ante el paso del flujo de aire y son ondas de naturaleza periódica (es el caso de las vocales). Los sonidos fricativos se originan por la turbulencia del aire ante restricciones tales como dientes y labios (por ejemplo, el sonido de la “t”, de la “b”, etc.). Los simuladores del tracto vocal operan generando señales eléctricas que reproducen este tipo de excitación (Fig. 1.24), y sus características se simulan filtrando la señal de excitación con un filtro digital con similares frecuencias de resonancia.

Estas técnicas se aplican también en los sistemas de telecomunicaciones. En la telefonía celular, el módulo encargado de convertir una versión digital de la señal de voz en una sucesión de bits, estima cada 20 ms un conjunto de parámetros de la señal vocal y el receptor se encarga de convertir este conjunto de parámetros nuevamente en una señal de voz: *cada celular resuelve un sistema de 10 ecuaciones lineales en 10 incógnitas 50 veces por segundo*. La telefonía moderna no sería posible sin los mecanismos de análisis y síntesis de voz.

1.3.2.7. Reconocimiento de voz

El reconocimiento automático de la voz humana es inmensamente más difícil que la síntesis. El PDS enfoca el problema de reconocimiento en dos etapas: *extracción de características*, y *comparación de patrones* (“matching”). El esquema básico se representa en la

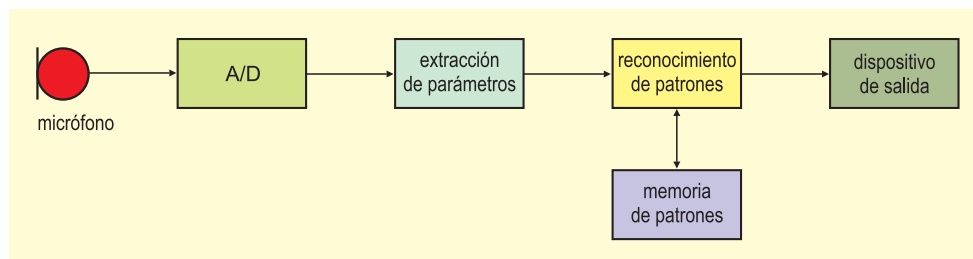


Fig. 1.25. Diagrama bloque de un sistema de reconocimiento de voz.

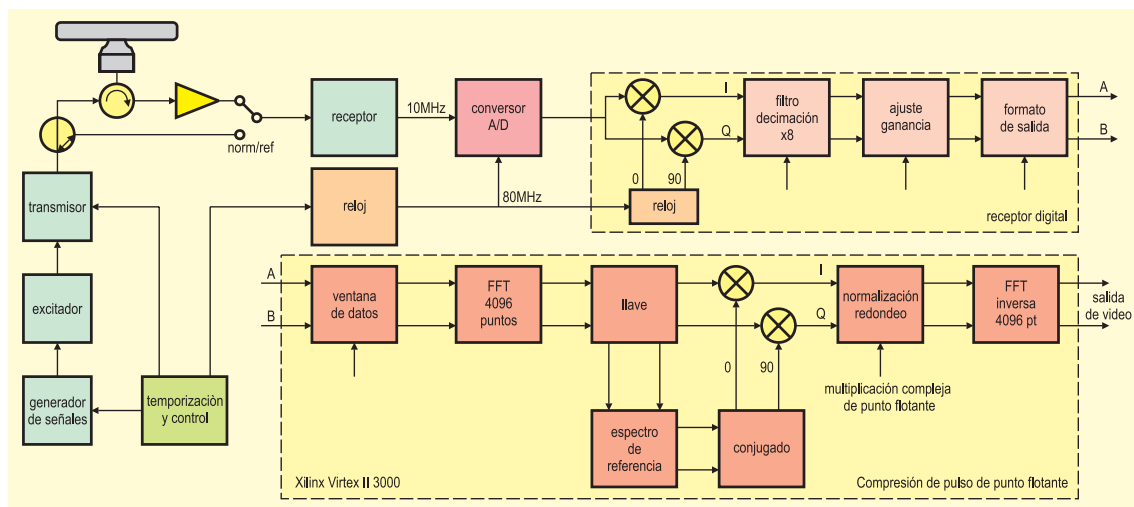


Fig. 1.26. Sistema básico de compresión de pulsos de radar usando un receptor digital y una convolución con transformada de Fourier discreta (convolución rápida).

Fig. 1.25. Cada palabra de la señal de audio se aísla y se analiza para identificar el tipo de excitación y las frecuencias de resonancia. Estos parámetros se comparan luego con una base de datos formada por ejemplos de palabras, de modo de identificar cuál de los elementos de la base de datos es más parecido a la señal de entrada. Estos sistemas suelen estar limitados a una centena de palabras, sólo aceptan oraciones con palabras separadas por espacios de tiempo bien definidos, y para tener buen desempeño conviene que sean entrenados para cada sujeto que los utilice. Aunque resultan apropiados para muchas aplicaciones comerciales, las limitaciones son humillantes en comparación con las habilidades de la audición humana. Éste es un área de trabajo que aún hoy requiere gran desarrollo, y que se estima será de importancia creciente en el futuro.

1.3.3. Detección de ecos

Una forma de obtener información sobre un objeto remoto es haciendo rebotar en él una onda: el radar transmite pulsos de ondas de radio, y examina la señal recibida para detectar ecos provenientes del móvil. El sonar transmite ondas sonoras a través del agua para detectar submarinos y otros objetos sumergidos. La geofísica trata de determinar la estructura de la corteza terrestre produciendo explosiones y escuchando los ecos provenientes de las capas de rocas subterráneas. Aunque estas aplicaciones tienen un objetivo común (la detección de los ecos recibidos) cada una de ellas tiene sus problemas específicos y sus necesidades; el PDS ha producido cambios dramáticos en cada una de ellas.

1.3.3.1. Radar

Radar es el acrónimo de *R*adio *D*etection *A*nd *R*anging. En los sistemas más sencillos, un transmisor produce un pulso de energía de radiofrecuencia de unos pocos microsegundos de duración, que se emite por una antena altamente direccional. Las aeronaves que in-

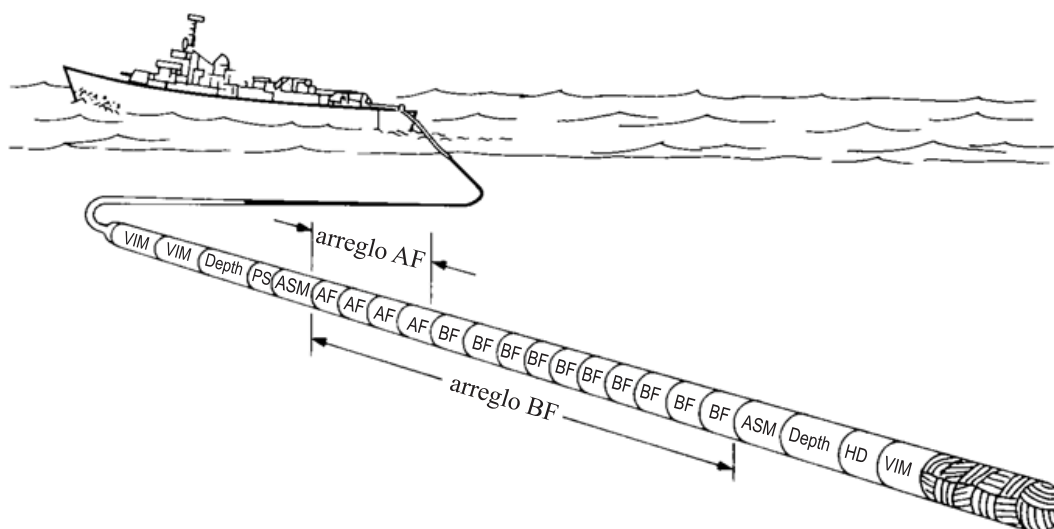


Fig. 1.27. Esquema de un sonar lineal remolcado.

tersecten este haz reflejarán una pequeña parte de la energía hacia una antena receptora, situada cerca del lugar de transmisión. La distancia al objeto (el rango) se calcula en base al tiempo que transcurre entre la emisión del pulso y la recepción del eco. La dirección del objeto se determina por la posición de la antena direccional.

El rango operativo de un sistema radar está determinado por dos parámetros: la *cantidad de energía* contenida en el pulso inicial, y el *nivel de ruido* del receptor. En general, el aumento de la energía del pulso reduce la precisión y la exactitud de la medición del tiempo transcurrido, lo que resulta en un conflicto entre dos parámetros importantes: la habilidad para detectar objetos lejanos, y para determinar su distancia con exactitud.

El PDS ha mejorado el radar en tres aspectos, todos relacionados al problema básico: (i) comprimiendo el pulso apenas se recibe, lo que mejora la determinación de la distancia sin reducir el rango de operación (Fig. 1.26); (ii) filtrando la señal para disminuir su nivel de ruido, con lo que se incrementa el rango sin degradar la determinación de distancia. (iii) generando rápidamente pulsos de distinta longitud y forma, que pueden optimizarse para un problema de detección en particular. Desde el punto de vista de la implementación, mucho de este procesamiento se realiza a una velocidad de muestreo comparable a la de la radiofrecuencia utilizada, de varios cientos de MHz. Para poder trabajar a esta velocidad, tanto el hardware como los algoritmos utilizados son importantes.

1.3.3.2. Sonar

Sonar es el acrónimo de *SOund Navigation And Ranging* (Fig. 1.27). Existen dos tipos de sonares: *activos* y *pasivos*. En el sonar activo, se transmiten pulsos de sonido de entre 2 kHz y 40 kHz, y se detectan y analizan los ecos resultantes. Los empleos del sonar activo incluyen detección y localización de cuerpos submarinos, navegación, comunicación y relevamiento de mapas del lecho oceánico. El rango de operación máximo está entre los 19 km y los 100 km. En cambio, el sonar pasivo sólo “escucha” sonidos submarinos, como las turbulencias naturales, sonidos generados por la vida marina, y ruidos mecánicos

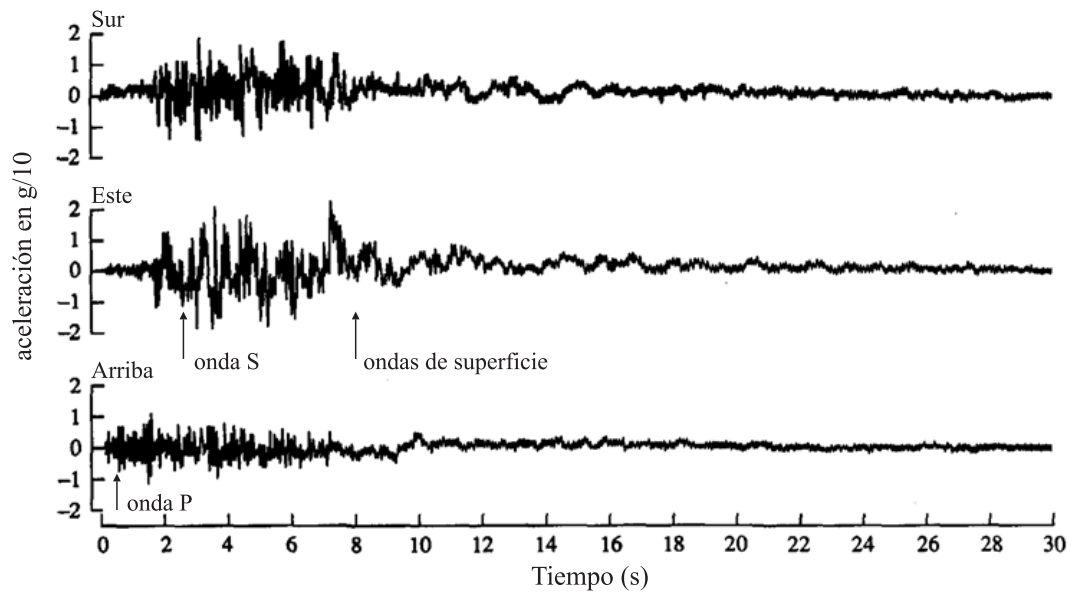


Fig. 1.28. Componentes de la aceleración de la corteza terrestre medida a pocos kilómetros del epicentro de un terremoto.

de submarinos y barcos de superficie. La aplicación más importante del sonar pasivo es en sistemas de patrullaje militares para detectar y seguir submarinos, y en aplicaciones pesqueras para detectar y localizar cardúmenes. El sonar pasivo generalmente trabaja con frecuencias más bajas que el sonar activo, porque se propagan por el agua con menor atenuación. Los rangos de detección pueden ser de miles de kilómetros.

El PDS ha revolucionado el sonar en tantas áreas como el radar: la generación de los pulsos, la compresión de los mismos, y el filtrado de las señales detectadas. En el sonar el hardware es más sencillo que el del radar porque las señales de interés son de más baja frecuencia, pero los algoritmos son más complicados pues el ambiente es mucho menos estable y uniforme. Además, los sonares suelen utilizar conjuntos de elementos transmisores y receptores (denominados *arreglos*) en lugar de un único elemento transmisor y/o receptor. Controlando y mezclando apropiadamente las señales del arreglo el sistema sonar puede direccionar el pulso emitido hacia la dirección deseada, y determinar la dirección de los ecos recogidos; en estos casos, la potencia computacional necesaria es similar a la del radar.

1.3.3.3. Sismología de reflexión

Alrededor de 1920 los geofísicos advirtieron que la estructura interna de la tierra podía estudiarse mediante el sonido (Fig. 1.28), generando una explosión controlada y grabando los ecos generados por las superficies que separan medios de distinta densidad a más de 10 km de la superficie. Los sismogramas de eco se interpretaban a simple vista (Fig. 1.29) para generar un mapa de la corteza terrestre. Este método rápidamente se convirtió en el medio preferido para localizar petróleo y depósitos minerales, y así sigue siendo en la actualidad.

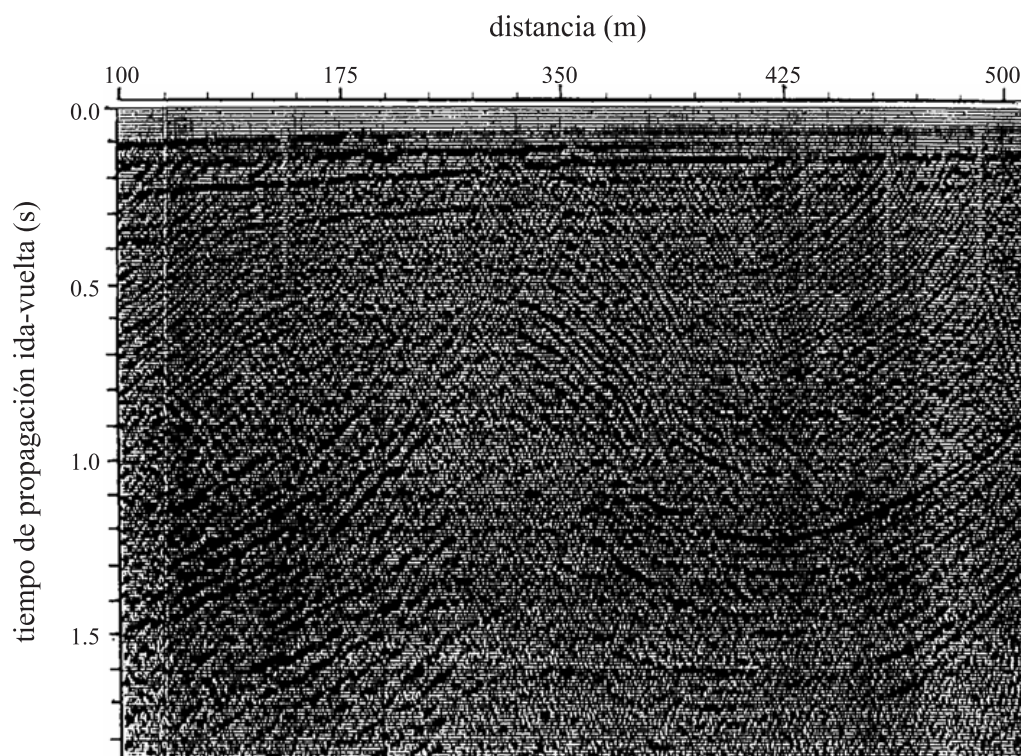


Fig. 1.29. Esquema de las capas de la corteza terrestre obtenido por un sismógrafo de reflexión.

En el caso ideal, un pulso de sonido enviado hacia el interior de la corteza terrestre produce un único eco por cada capa atravesada por el pulso. Cada eco, al retornar hacia la superficie, debe atravesar todas las capas que están por encima de la que le dio origen. Esto puede dar lugar a un rebote del eco entre capas, lo que en la superficie se refleja como un conjunto de “ecos de ecos”. Los ecos secundarios hacen que la señal detectada sea muy complicada y difícil de interpretar. El PDS ha sido utilizado desde 1960 para aislar los ecos primarios de los secundarios. Los primeros geofísicos, sin el auxilio de esta herramienta, podían interpretar los resultados de lugares “sencillos”, mientras que la ayuda del PDS permite hacer prospección de lugares acústicamente complejos, como por ejemplo debajo del océano.

1.3.4. Procesamiento de imágenes

Las imágenes son señales con características especiales. En primer lugar, son la medida de un parámetro sobre un *espacio* (distancia), mientras que la mayoría de las señales son la medida de un parámetro en función del *tiempo*. En segundo lugar, contienen una gran cantidad de información: son necesarios más de 10 megabytes para almacenar un segundo de señal de video de TV. Esto es más de mil veces mayor que la cantidad de memoria necesaria para almacenar una señal vocal de longitud similar. En tercer lugar, la calidad frecuentemente se evalúa subjetivamente (por un ser humano), en lugar de emplear criterios objetivos. Estas características especiales hacen que el procesamiento de imágenes sea un subgrupo diferente del PDS (Fig. 1.30).

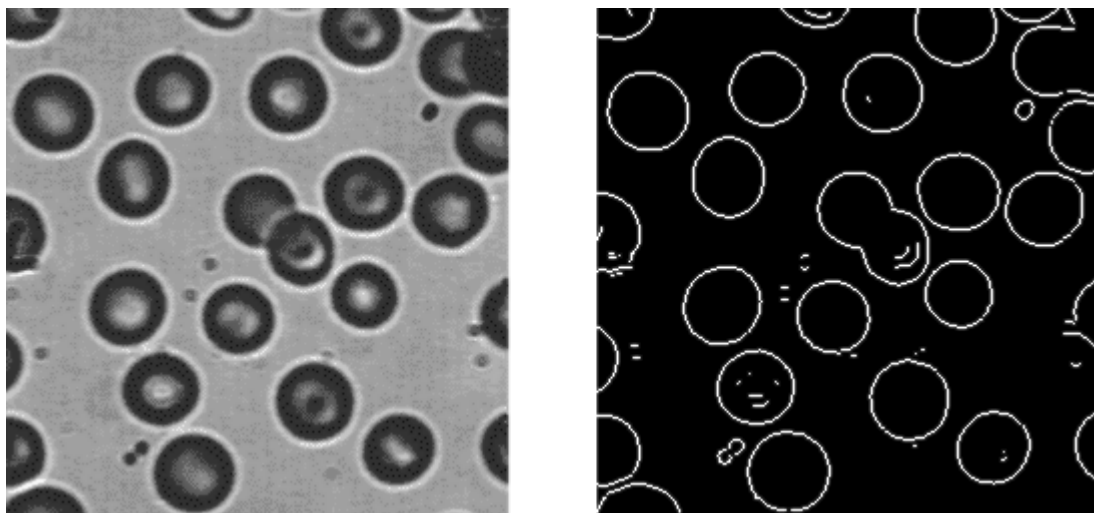


Fig. 1.30. Procesamiento de imágenes médicas: detección de los bordes de los glóbulos rojos.

1.3.4.1. Imágenes médicas

Wilhelm C. Röntgen descubrió en 1895 que los rayos X podían atravesar ciertos materiales, y la posibilidad de “ver” dentro del cuerpo humano revolucionó la medicina. En el lapso de muy pocos años, los sistemas médicos de rayos X se esparcieron por el mundo. A pesar de este éxito, hasta el advenimiento del PDS alrededor de 1970 la imaginería médica de rayos X sufría de cuatro limitaciones fundamentales:

1. No se podían observar todas las estructuras del cuerpo, ya que algunas ocultan la visión de otras: parte del corazón no es visible porque queda tapado por las costillas.
2. Muchas veces resulta imposible distinguir entre tejidos similares: aunque es sencillo distinguir el hueso de los tejidos blandos, no siempre es posible distinguir un tumor en el hígado del resto del órgano.
3. Los rayos X permiten observar la *anatomía* del cuerpo (su estructura), pero no su *fisiología* (su funcionamiento), al menos de manera segura.
4. La exposición prolongada a los rayos X puede producir cáncer, lo que impone que sean utilizados moderadamente y con la justificación adecuada.

Tomografía axial computada El problema ocasionado por el solapamiento de estructuras fue resuelto en 1977 con la introducción de los primeros tomógrafos (tomografía axial computada, o CAT por sus siglas en inglés). La tomografía computada es un ejemplo clásico de PDS. El cuerpo del paciente es atravesado por rayos X provenientes de distintas direcciones; las señales se digitalizan y se almacenan en una computadora (Fig. 1.31). Con esta información se calculan imágenes que simulan “rebanadas” del cuerpo, mostrando mucho mayor nivel de detalle y mejorando el diagnóstico y el tratamiento.

El impacto de la tomografía computada fue tan grande como el descubrimiento de los rayos X. En un lapso de pocos años, casi todos los hospitales importantes del mundo

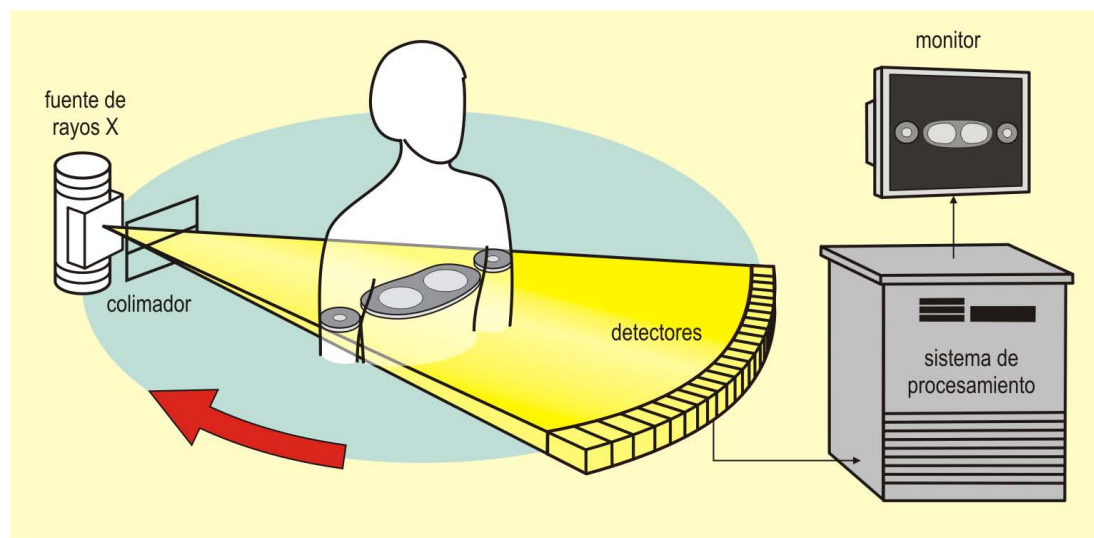


Fig. 1.31. Esquema de un sistema de tomografía axial computada.

tenían acceso a un tomógrafo. En 1979 sus inventores Godfrey N. Hounsfield (ingeniero electricista) y Allan M. Cormack (físico) recibieron el premio Nobel de medicina.

Los últimos tres problemas de la técnica de rayos X han sido resueltos mediante el empleo de rayos más penetrantes, como ondas sonoras y ondas de radio. El PDS juega un papel fundamental en todas estas tecnologías. Por ejemplo, la Resonancia Magnética Nuclear (o Medical Resonance Imaging, MRI) utiliza campos magnéticos junto con ondas de radio para examinar el interior del cuerpo humano. Ajustando la magnitud y la frecuencia de los campos se logra que los núcleos atómicos de una región particular del cuerpo resuenen entre estados cuánticos de energía. Esta resonancia produce la emisión de una onda de radio secundaria que se detecta con una antena ubicada cerca del cuerpo. La magnitud y otras características de la señal detectada proveen información acerca de la región que está en resonancia. El ajuste del campo magnético permite desplazar la región de interés, relevando un mapa de la estructura interna del cuerpo. Esta información se presenta en forma de imágenes como en la tomografía computada. Además de brindar excelente discriminación entre distintos tipos de tejidos blandos, la resonancia magnética permite obtener información acerca de la fisiología del cuerpo (por ejemplo, observar el flujo de sangre por las arterias). El funcionamiento de los equipos de resonancia magnética y la interpretación de sus resultados depende absolutamente del PDS, y su desarrollo no hubiese sido posible sin él.

Imágenes por ultrasonido Los equipos de ultrasonido modernos (Fig. 1.32) usan técnicas de procesamiento de señales que permiten obtener imágenes con una resolución y definición impensada hace algunos años atrás. Utilizan sistemas multicanales, con múltiples emisores y receptores que retardan, escalan y suman inteligentemente la energía de los ecos recibidos. La posibilidad de retardar y escalar la señal de los distintos canales de un arreglo de receptores permiten focalizar la recepción, como si se contara con un único sensor cuyo patrón de recepción se puede modificar a voluntad. Este proceso se denomina “beamforming”.

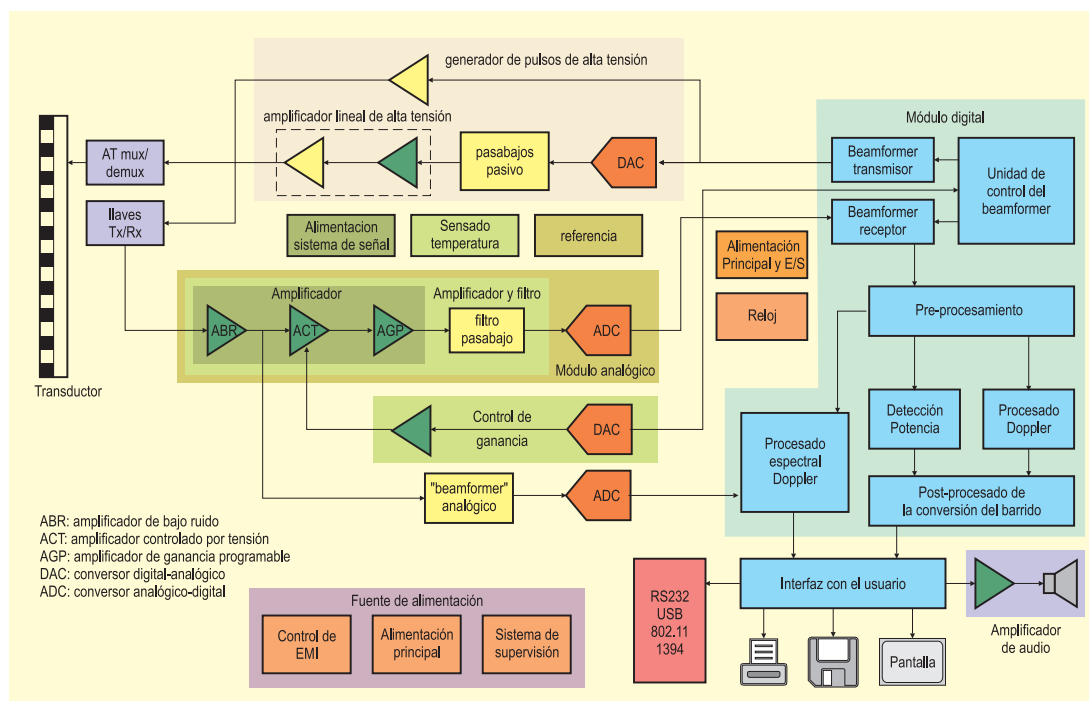


Fig. 1.32. Diagrama bloque de un sistema de diagnóstico por imágenes ultrasónicas.

Al iniciar una exploración se genera y transmite un pulso por cada uno de los 8 a 512 elementos del transductor. Los pulsos se generan usando circuitos integrados específicos para la aplicación (ASICs), o lógica programable (FPGAs). La separación temporal y la amplitud de los pulsos se ajustan de manera de “iluminar” regiones específicas del cuerpo. Luego de la transmisión, los transductores se conmutan al modo recepción. El pulso, ahora en forma de energía mecánica, se propaga por el cuerpo como ondas sonoras de alta frecuencia, generalmente en el rango entre 1 MHz y 15 MHz. La señal se debilita rápidamente, en función del cuadrado de la distancia recorrida. A medida que la señal se propaga, parte de la energía del frente de onda se refleja. Estas reflexiones son los “ecos” que deben ser detectados por la electrónica de recepción. Las señales que rebotan inmediatamente serán muy intensas, pues están muy cerca de la superficie, mientras que las que rebotan en los órganos internos del cuerpo serán muy débiles.

Debido a limitaciones en la cantidad de energía que puede aplicarse sobre el cuerpo humano, la industria ha desarrollado una electrónica de recepción extremadamente sensible. Los ecos debidos a reflexiones próximas a la superficie casi no requieren amplificación, mientras que los ecos de puntos focales dentro del cuerpo son mucho más débiles, y deben ser amplificados 1000 o más veces. La relación entre estas dos señales define el rango dinámico del sistema.

El filtro pasabajos entre el amplificador controlado por tensión y el conversor A/D elimina las réplicas que puede causar el proceso de discretización temporal, y para limitar el ancho de banda del ruido. Se suelen utilizar topologías con 2 a 5 polos, y fase lineal. Los conversores A/D son de 10 o 12 bits. La relación señal a ruido y el consumo de cada canal es importante, porque puede haber muchos de ellos (hasta 512).

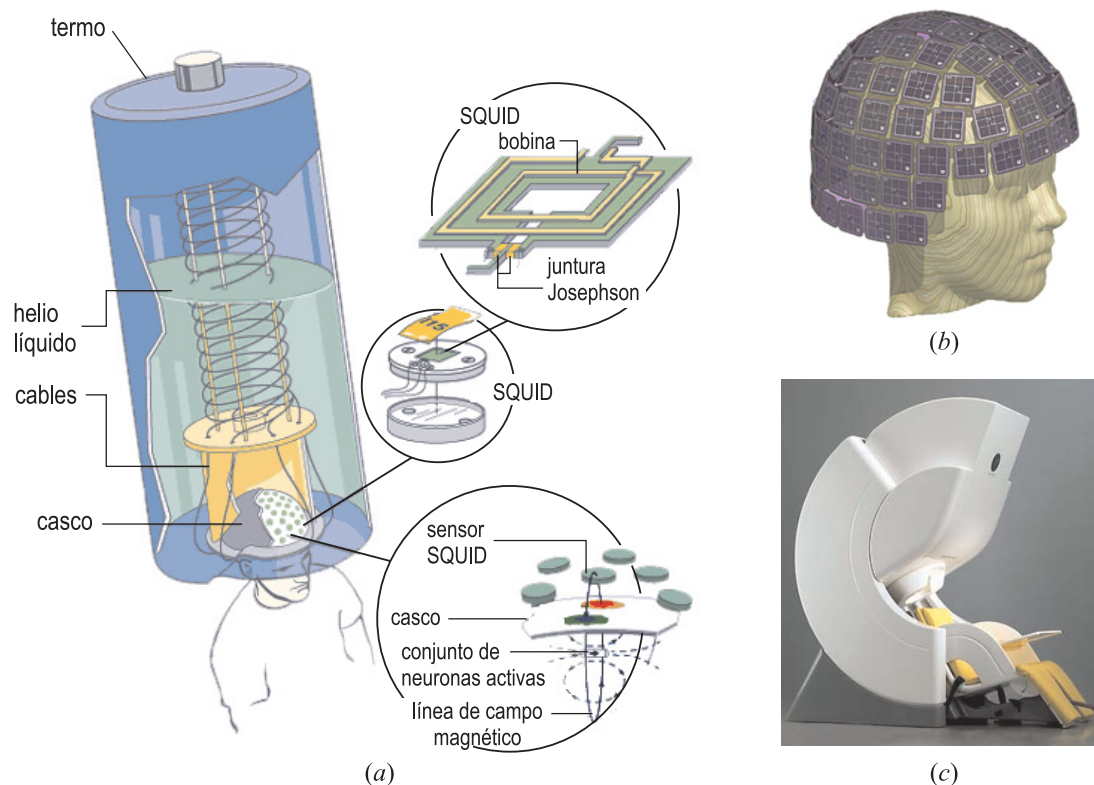


Fig. 1.33. Esquema de un sistema de magnetoencefalografía (a). Arreglo de SQUIDs sobre el casco (b). Fotografía de un aparato comercial (c).

El beamformer del receptor se encarga de escalar y retardar las señales detectadas por cada uno de los canales del transductor, para crear el efecto de focalización sobre la zona del cuerpo que se desea estudiar. Las señales recibidas, adecuadamente escaladas y retardadas, se suman y se aplican al DSP. Éste se utiliza para el procesamiento Doppler, la generación de imágenes bidimensionales y tridimensionales, además de numerosas operaciones de postprocesamiento que permiten incrementar la funcionalidad y el desempeño. Los requerimientos clave son gran ancho de banda y considerable capacidad de cálculo. Se utilizan DSPs que corren a 1GHz o más, para manejar apropiadamente el gran flujo de datos.

Magnetoencefalografía Posiblemente, el campo más novedoso de procesamiento de señales médicas son los sistemas de magnetoencefalografía (Fig. 1.33). La idea es medir el campo magnético generado por la circulación de corriente en las neuronas. Si bien las primeras experiencias se hicieron en 1968, los extremadamente débiles campos magnéticos generados eran muy difíciles de distinguir del ruido magnético generado por el campo terrestre y los distintos dispositivos eléctricos cotidianos.

Un cambio significativo ocurrió con la invención de los SQUIDs (*superconductor quantum interference device*, dispositivo superconductor de interferencia cuántica) que permite detectar campos magnéticos extremadamente débiles generados por corrientes de muy pequeña amplitud.

En los primeros sistemas, un único detector SQUID se utilizaba para medir sucesivamente el campo magnético en distintos puntos de la cabeza. En 1980 aparecieron los primeros arreglos de receptores. En la actualidad, se utilizan arreglos de alrededor de 300 sensores dispuestos en forma de anillo sobre un casco.

El campo magnético generado por las neuronas tiene una intensidad de alrededor de 10 fT (femto = 10^{-12}), y 1000 fT para las ondas cerebrales alfa. El ruido magnético debido al campo terrestre es de 10^8 fT, es decir, 100000 veces más intenso. De aquí que el problema esencial de esta tecnología es la debilidad de la señal a detectar relativa a la sensibilidad de los detectores, y al fuerte ruido magnético ambiental.

Para evitar la influencia del ruido, al principio se utilizaron ambientes magnéticamente aislados. En general estaban formados por capas compuestas por una pared de aluminio, y otra de un material de alta permeabilidad magnética, como el molibdeno. Se intercalaban varias capas, que frecuentemente debían electroplatearse con plata u oro para asegurar el buen contacto eléctrico entre ellas. El costo de estos recintos muchas veces superaba al de toda la electrónica de detección.

Otro enfoque más reciente es el de cancelamiento activo de ruido, similar al detallado para el ducto acústico, con la salvedad que en este caso debe ser tridimensional. Un arreglo de sensores se encarga de medir el campo magnético cerca de los receptores, y se implementan técnicas de cancelamiento activo para disminuir el ruido a cerca de 2 a 3 fT/ $\sqrt{\text{Hz}}$.

Otras aplicaciones En las aplicaciones mencionadas más arriba, el fin último de todo el procesamiento de las señales es la obtención o mejora de otras señales (frecuentemente imágenes) que faciliten el diagnóstico. Pero no menos importantes son las aplicaciones donde el procesamiento de imágenes permite determinar otras variables de interés. Por ejemplo, los sistemas de seguimiento de los globos oculares sirven tanto de apoyo para personas minusválidas para facilitar su comunicación con el medio (mediante el desplazamiento de un cursor sobre una pantalla, etc.) pero también para fines de diagnóstico. Un estudio sobre el movimiento de los ojos durante la lectura de un párrafo puede servir como indicador precoz de problemas cognitivos (Kintsch y Van Dijk 1978). Pequeñas fallas de la memoria producen un descenso en la eficiencia de las actividades relacionadas con la lecto-escritura, que se traducen en un aumento de los tiempos de lectura y en un incremento de la cantidad de movimientos del ojo.

Un sistema de procesamiento de imágenes que permita seguir los movimientos del ojo (Orazi, 2010) debe ser capaz no sólo de determinar la posición de la pupila o el iris, diferenciándola de las perturbaciones introducidas por las pestañas o la posición del ojo (Fig. 1.34) sino también de reconocer y evitar situaciones tales como el parpadeo que no está asociado a problema de lectura (Fig. 1.35). En muchas aplicaciones no es necesario que el procesamiento ocurra en tiempo real, pero sí es necesario que la velocidad de la cámara sea suficientemente rápida para no perder ninguno de los movimientos del ojo.

1.3.4.2. Exploración espacial

El PDS permite mejorar la claridad de las imágenes captadas bajo condiciones muy desfavorables. Se pueden mejorar el brillo, el contraste, efectuar detección de bordes, reducir el nivel de ruido, ajustar el foco, eliminar los efectos del movimiento de la cámara (corregir

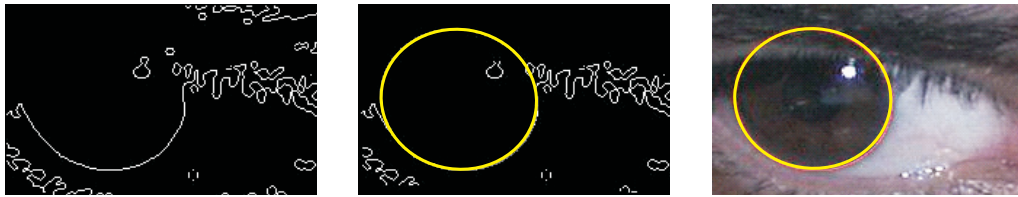


Fig. 1.34. Reconocimiento del iris a pesar del recorte producido por los párpados y la perturbación de las pestañas.

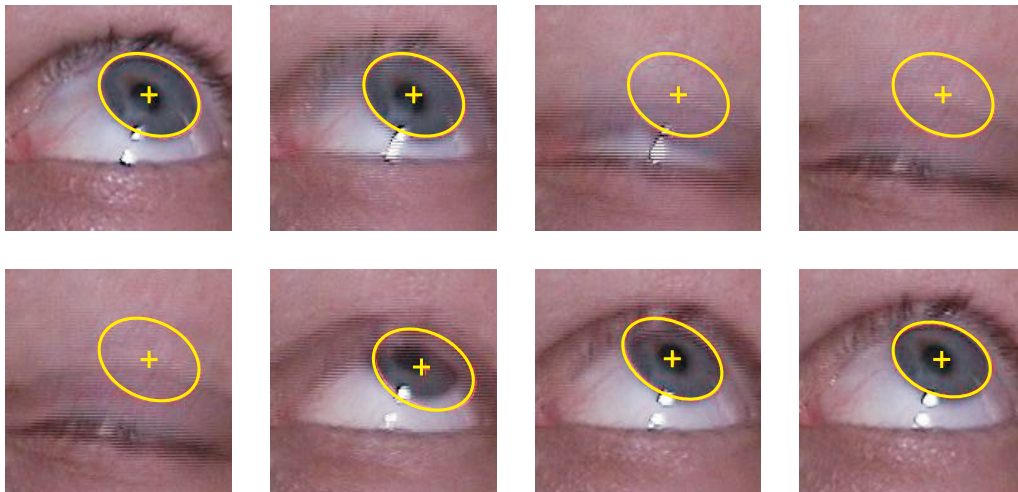


Fig. 1.35. Seguimiento de la posición del iris evitando el parpadeo.

fotografías “movidas”), etc. En el caso de la exploración espacial, las imágenes de los distintos planetas están distorsionadas pues se está mapeando un objeto curvo (el planeta) sobre una superficie plana (la fotografía). El PDS permite corregir este defecto de manera

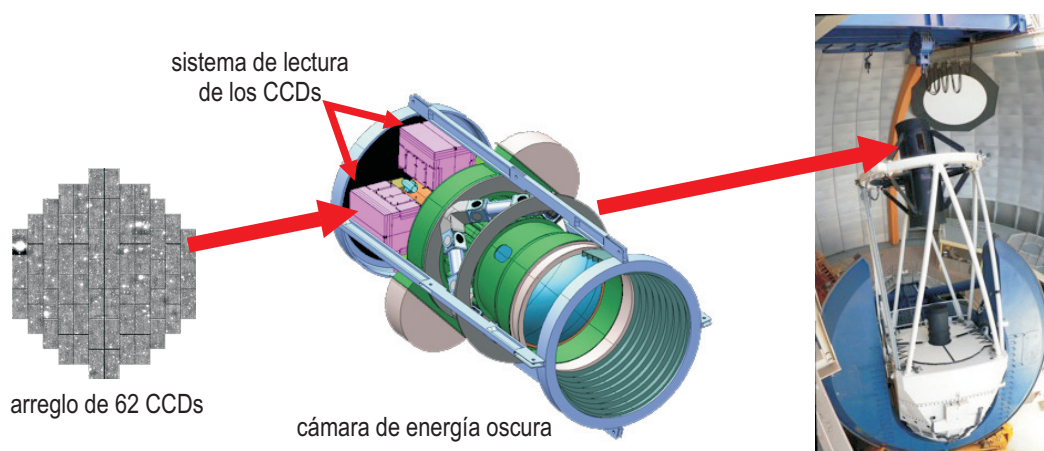


Fig. 1.36. Detalle de una cámara para energía oscura instalada en el telescopio Blanco, en cerro Tololo, Chile a fines de 2010.

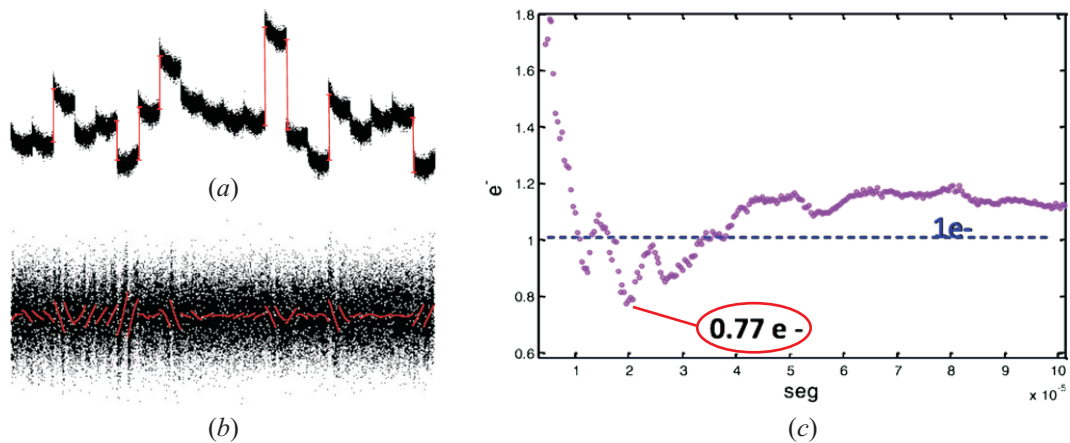


Fig. 1.37. Ruido en CCDs: señal directa (a); ruido de alta (negro) y baja (rojo) frecuencia (b); ruido residual en función del intervalo de integración (c).

de obtener una representación correcta. Muchas imágenes de diferente naturaleza pueden combinarse en una base de datos para representar información de maneras únicas, como por ejemplo generar una secuencia de imágenes que simule el vuelo aéreo sobre la superficie de un planeta distante.

Búsqueda de la materia oscura del universo La energía oscura es una forma hipotética de energía que permea el espacio y es la manera más popular de explicar observaciones recientes que indican que el universo se expande aceleradamente. En este modelo la energía oscura representa el 74 % de la masa-energía total del universo. Se necesitan mediciones muy precisas para comprender cómo cambia la tasa de expansión a lo largo del tiempo.

Una manera de detectar materia oscura de baja masa es utilizando sensores conocidos como cámara de energía oscura, construidos en base a CCDs (*charged coupled devices*, o dispositivos de acoplamiento por cargas). Un CCD es un registro de desplazamiento analógico que posibilita el transporte de señales analógicas representadas por cargas eléctricas a través de una serie de etapas controlados por una señal de reloj. El término “CCD” identifica la forma en que la imagen es leída del chip: bajo control de un circuito externo, cada capacitor puede transferir su carga eléctrica a alguno de sus vecinos. Los CCD se utilizan en fotografía digital, astronomía, sensores, microscopía electrónica, etc.

El elemento sensor para detección de materia oscura está formado por 8 detectores CCD ubicados a 100 metros bajo tierra (para evitar rayos cósmicos) en Cerro Tololo, Chile (Fig. 1.36). El tipo de partículas que se busca tiene una muy baja interacción con la materia, en este caso con el silicio del CCD, por lo que la energía que liberan al atravesar el detector es muy pequeña. De aquí la importancia vital de técnicas de lectura con una alta relación señal a ruido.

En la Fig. 1.37(a) se muestra la lectura de una sucesión de píxeles contaminados por ruido. La información de interés es la diferencia entre los “escalones” pares e impares, y para determinar esta diferencia con precisión hay que eliminar el ruido de cada “escalón”. En la Fig. 1.37(b) se representa el ruido de alta frecuencia (en color negro) y el ruido de baja

frecuencia (en rojo) que varía lentamente entre pixel y pixel. La señal “limpia” (que no se muestra) se integra durante un lapso de tiempo variable. La duración del intervalo de integración tiene un óptimo para el cual el nivel de ruido es mínimo, como se grafica en la Fig. 1.37(c) (Fernández Moroni, 2010).

1.3.4.3. Productos comerciales de procesamiento de imágenes

El volumen de información contenida en la imágenes constituye un problema para sistemas de venta masiva, que deben ser económicos, y esto en general es incompatible con memorias de gran capacidad, y velocidades de transmisión elevada. Los algoritmos de *compresión de imágenes* permiten eliminar información redundante, reduciendo el tamaño de los paquetes de datos. Las imágenes de televisión y de cine son especialmente adecuadas para compresión, ya que la imagen cambia muy poco de un cuadro al otro. Esta tecnología es el corazón de la televisión digital, los DVD, las técnicas de *streaming*, etc.

1.4. Rangos de frecuencia de algunas señales típicas

Para el diseño de sistemas de procesamiento de señales es necesario conocer aproximadamente el rango de frecuencias que ocupa la señal de interés. Las Tablas 1.3, 1.4 y 1.5 dan idea del contenido espectral de señales biológicas, electromagnéticas y sísmicas.

Tabla 1.3. Rangos de frecuencia de algunas señales biológicas.

Tipo de señal	Rango [Hz]
electrorretinograma (registro de las características de la retina)	0 – 20
electronystagmograma (movimiento involuntario de los ojos)	0 – 20
neumograma (registro de la actividad respiratoria)	0 – 40
electrocardiograma (ECG)	0 – 100
electroencefalograma (EEG)	0 – 100
electromiograma (registro de las actividades musculares)	10 – 200
esfigmomanograma (registro de la presión sanguínea)	0 – 200
voz	100 – 4000

Tabla 1.4. Rangos de frecuencia de señales electromagnéticas.

Tipo de Señal	Rango [Hz]
emisión de radio	3×10^4 – 3×10^6
radio de onda corta	3×10^6 – 3×10^{10}
radar, comunicaciones satelitales, y espaciales, microondas	3×10^8 – 3×10^{10}
infrarrojo	3×10^{11} – 3×10^{14}
luz visible	$3,7 \times 10^{14}$ – $7,7 \times 10^{14}$
ultravioleta	3×10^{15} – 3×10^{16}
rayos γ y X	3×10^{17} – 3×10^{18}

Tabla 1.5. Rango de frecuencias de algunas señales sísmicas.

Tipo de Señal	Rango [Hz]		
ruido del viento	100	–	1000
señales de exploración sísmica	10	–	100
explosiones nucleares y terremotos	0.01	–	10
ruido sísmico	0.1	–	1

1.5. Procesamiento digital y analógico de señales

Digital Signal Processing:

That discipline which has allowed us to replace a circuit previously composed of a capacitor and a resistor with two antialiasing filters, and A-to-D and a D-to-A converter, and a general purpose computer (or array processor) so long as the signal we are interested in does not vary too quickly.

Thomas P. Barnwell, 1974.²

El procesamiento analógico de señales involucra operaciones tales como amplificación, filtrado, integración y diferenciación, como así también varias formas de procesamiento no lineal (rectificación, controles automáticos de ganancia, etc.), utilizando circuitos electrónicos. Estas operaciones se sintetizan en el bloque “Procesamiento Analógico” de la Fig. 1.38(a). Entre sus limitaciones y las desventajas pueden citarse:

- debido a las tolerancias de los componentes, alinealidad de los amplificadores, desvíos con la temperatura, etc. es difícil obtener circuitos muy precisos con un costo razonable;
- la repetitividad es limitada por efecto de las tolerancias, y variaciones derivadas de condiciones ambientales, tal como temperatura, vibraciones, etc.
- son muy sensibles al ruido eléctrico (ruido interno de los amplificadores, etc.);
- poseen un rango dinámico limitado;
- son poco flexibles al cambio de las funciones de procesamiento (por ejemplo, no es fácil cambiar un filtro de pasabajos a pasaaltos);
- es difícil implementar con precisión funciones no lineales o variantes en el tiempo;
- no es sencillo almacenar y recuperar información analógica con alta calidad;
- el costo es muy elevado para funciones de cierta complejidad y precisión, que requieran ajustes manuales para satisfacer las especificaciones de diseño.

²“Procesamiento Digital de Señales: esa disciplina que nos permite reemplazar un circuito formado por un capacitor y una resistencia por dos filtros antialiasing, un conversor A/D y un conversor D/A y una computadora de propósito general (o un procesador dedicado), siempre que la señal que nos interesa no varíe muy rápidamente.” Thomas P. Barnwell, 1974, citado por B. Porat, p. 1.

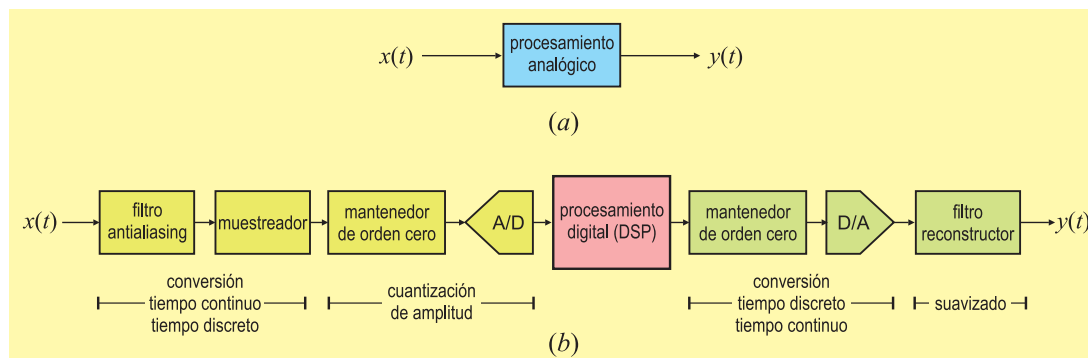


Fig. 1.38. Tratamiento de señales: procesamiento analógico (a) y digital (b).

El PDS se basa en representar las señales por números en una computadora, o hardware digital especializado, y efectuar una serie de operaciones numéricas (adiciones, multiplicaciones, operaciones lógicas, transferencia de datos, etc.) sobre esas señales. Para implementar un sistema de PDS, tal como ilustra la 1.38(b), es necesario:

- convertir las señales analógicas en información digital, en la forma de una sucesión de números binarios. Esta tarea se lleva a cabo en dos pasos, el *muestreo* ("sampling") y la conversión analógico-digital (A/D);
- efectuar operaciones numéricas sobre la información digital;
- convertir nuevamente a una señal analógica los datos digitales obtenidos después del procesamiento. Este paso también se implementa en dos etapas: la conversión digital-analógica (D/A) y la reconstrucción.

A pesar de su mayor complejidad, que se aprecia al comparar la Figs. 1.38(a) y (b), varias razones justifican el PDS para señales analógicas en lugar de preferir un tratamiento enteramente analógico:

- las computadoras pueden hacer operaciones con un grado de precisión arbitrariamente alto, incrementando la longitud de palabra tanto como sea necesario;
- los sistemas digitales son altamente repetibles (siempre que no fallen por problemas de software o hardware);
- tienen muy baja sensibilidad al ruido eléctrico;
- la representación numérica de punto flotante permite un rango dinámico prácticamente ilimitado;
- un sistema digital es flexible y el tipo de procesamiento de señales se puede alterar simplemente cambiando el "software". Aunque el diseño del programa no es una tarea sencilla, su implementación ("bajarlo" al hardware) sí lo es. La reconfiguración de un sistema analógico, en cambio, involucra rediseñar el hardware, probarlo, y volver a verificar que opera satisfactoriamente, y eventualmente, volver a calibrarlo para satisfacer los requisitos de diseño.

- el PDS permite un mejor control sobre la precisión de la implementación, que se manifiestan en la longitud de palabra del conversor A/D, D/A y el procesador; la elección de aritmética de punto fijo vs. aritmética de punto flotante, etc. En los circuitos analógicos la tolerancia de los componentes hace que sea extremadamente difícil mantener la calidad del sistema completo. En general es posible obtener mejor desempeño con la combinación hardware digital+software que con circuitos y procesamiento analógicos;
- el almacenamiento digital es barato y flexible. En consecuencia, las señales son transportables y pueden ser procesadas fuera de línea en lugares alejados del origen de las mismas. Además, la información puede encriptarse para aumentar la seguridad o disminuir errores, y comprimirse para reducir los costos de almacenamiento y transporte;
- el PDS permite implementar algoritmos más elaborados, tal como control o filtrado adaptativo; usualmente es muy difícil efectuar operaciones matemáticas precisas con hardware analógico, que pueden efectuarse sin inconvenientes en una computadora.
- en algunos casos la implementación digital de un sistema de procesamiento de señales es más económica que una implementación analógica, bien porque en general el hardware digital es menos costoso, o bien como consecuencia de la flexibilidad para modificaciones que tiene la implementación digital (un mismo hardware puede servir para diferentes productos finales, con características distintas).

A pesar de todas estas ventajas, el PDS puede no ser la solución apropiada para *todos* los problemas de procesamiento. Los conversores analógico-digital (A/D) y digital-analógico (D/A) introducen una serie de problemas y errores que atentan contra la representación fiel de una señal analógica. Hay dos procesos vitales para el tratamiento digital de la señal que conducen inevitablemente a una pérdida de información. Son ellos:

- la *cuantización en amplitud*: la representación de los datos con un número finito de bits, que introduce un error intrínseco –el error de cuantización– que se propaga por el resto de la cadena de procesamiento. Dos maneras de reducir este error son incrementando la resolución de los conversores, y efectuando “oversampling” junto con un procesamiento digital para mejorar la relación señal a ruido.
- la *cuantización en tiempo o muestreo*: la representación de la señal continua en el tiempo por una sucesión discreta de valores. Esta operación, si no se efectúa de manera apropiada, puede invalidar completamente el PDS, en el sentido que la señal procesada puede no guardar ninguna relación con la señal original.

El primer problema es difícil de tratar analíticamente, porque es esencialmente un proceso no lineal. Sin embargo, si se utilizan conversores de calidad razonable (es decir, de 8 o más bits de resolución), el error de cuantización es pequeño, y puede modelarse como una fuente de ruido aleatorio adicional. En la Fig. 1.39 se ilustran los efectos de cuantizar una señal analógica con diferentes números de bits de resolución. La Fig. 1.39(c) muestra el error de cuantización (diferencia entre la señal original y la señal cuantizada) de 3 bits (8 niveles): se aprecia que el error tiene cierta similitud (“alta correlación”) con la señal original. En cambio, para una cuantización de 8 bits [Fig. 1.39(d)], el error no sólo es mucho menor, sino que es virtualmente independiente de la señal original. Si bien algunos fenómenos escapan a esta presentación simplificada –tales como oscilaciones a la salida

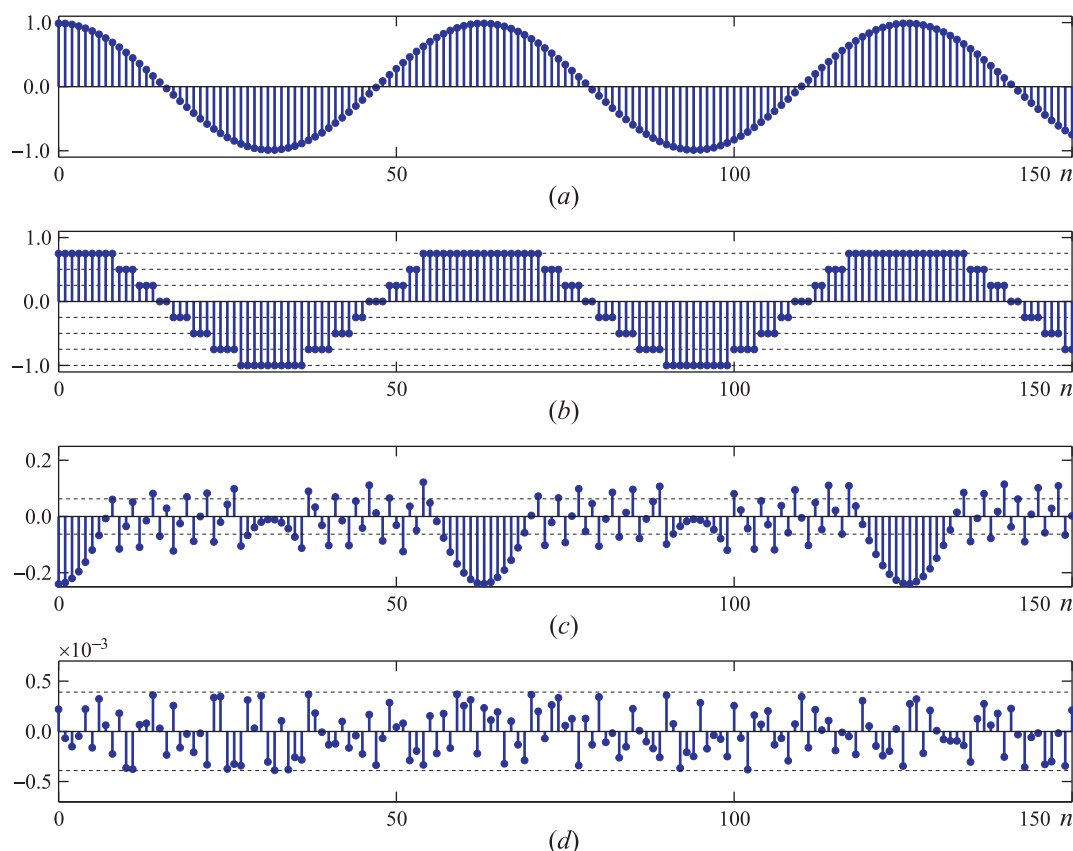


Fig. 1.39. Efectos de cuantización de una señal: señal sinusoidal discreta (a); señal cuantizada con 3 bits (8 niveles) de resolución (b); error de cuantización para 3 bits (c); error de cuantización para 8 bits (d).

del sistema aún con entradas nulas— la mayor ventaja es que permite tratar los problemas de cuantización usando técnicas lineales.

El segundo problema (el muestreo) es crucial, y tal como se verá a lo largo del curso, bajo ciertas condiciones es posible asegurar que la información contenida en la señal analógica original es la misma que transporta la señal obtenida tomando “muestras” de ella cada cierto intervalo de tiempo.

Otras restricciones impuestas por el PDS y algunas posibles soluciones son:

- los conversores A/D y D/A exhiben errores tales como el corrimiento con la temperatura y las alinealidades. Un “buen” sistema de procesamiento de señales de tiempo real con entradas analógicas debe tener una buena etapa de entrada analógica!
- los conversores A/D y D/A de alta resolución son lentos, excepto los extremadamente elaborados (y caros). En general, un conversor A/D requiere unos pocos microsegundos para convertir una muestra analógica, y un conversor D/A necesita tiempos del orden del microsegundo para estabilizarse. Estos retardos imponen un límite a la máxima frecuencia de muestreo alcanzable. Con la tecnología actual, los conversores A/D y D/A son el “cuello de botella” en la mayoría de las aplicaciones de PDS en tiempo real.

- para obtener una mejor precisión, es necesario que la señal analógica no varíe durante el intervalo de tiempo que tarda en efectuarse la conversión A/D. Por ello suelen utilizarse circuitos *mantenedores* (“sample and hold”) a la entrada del conversor A/D.
- la salida del “sample and hold” es de banda ancha, lo que incrementa el ruido a la entrada del conversor A/D.
- los mantenedores introducen errores en el tiempo de adquisición, incerteza de apertura, errores de caída durante el intervalo de conversión, y acoplamiento en el modo “mantenimiento”.
- para reducir el error debido a la energía de las señales imágenes (“alias”) fuera de la banda de interés a un nivel aceptable, siempre es conveniente limitar el ancho de banda de la señal de entrada usando filtros antialiasing y/o efectuando un “over-sampling” si es posible.
- los filtros antialiasing modifican la amplitud y fase de la señal a procesar. La respuesta de estos filtros no es exactamente plana en la banda de paso, y aquellos con buena respuesta de amplitud tienen invariablemente una pobre respuesta de fase, lo que distorsiona las relaciones armónicas entre las componentes de la señal.
- el empleo de conversores D/A suele alterar el espectro en frecuencia de la señal pesándolo con una función de la forma $(\sin f)/f$ que atenúa las componentes de alta frecuencia de la señal; ese efecto puede compensarse mediante un filtro digital con característica inversa.
- La tendencia en sistemas modernos de procesamiento de señales, especialmente sistemas de audio digital como los reproductores de CD es utilizar conversores A/D y D/A de 1 bit. Estos dispositivos novedosos explotan las ventajas de las técnicas multi-rate.
- Para muchos sistemas de tiempo real y gran ancho de banda, el procesamiento analógico u óptico puede ser la única solución posible.

1.6. Procesadores Digitales de Señales (DSP)

Los DSP son microprocesadores especializados en el tratamiento de señales. Se caracterizan por trabajar en tiempo real, con capacidad para manejar volúmenes de datos importantes en tiempos relativamente breves, y son capaces de implementar algoritmos que requieren operaciones aritméticas intensivas, en particular multiplicaciones y sumas, o multiplicación junto con acumulación.

Como los microprocesadores típicos no son eficientes para implementar los algoritmos usuales del PDS, se desarrollaron dispositivos específicamente diseñados, ya sea por su arquitectura (Fig. 1.40) como por su conjunto de instrucciones. Entre las características que distinguen los DSP merecen citarse las siguientes:

- multiplicadores por hardware incluidos en el chip (y no rutinas de multiplicación implementadas con microcódigo), de manera que la operación se ejecuta extre-

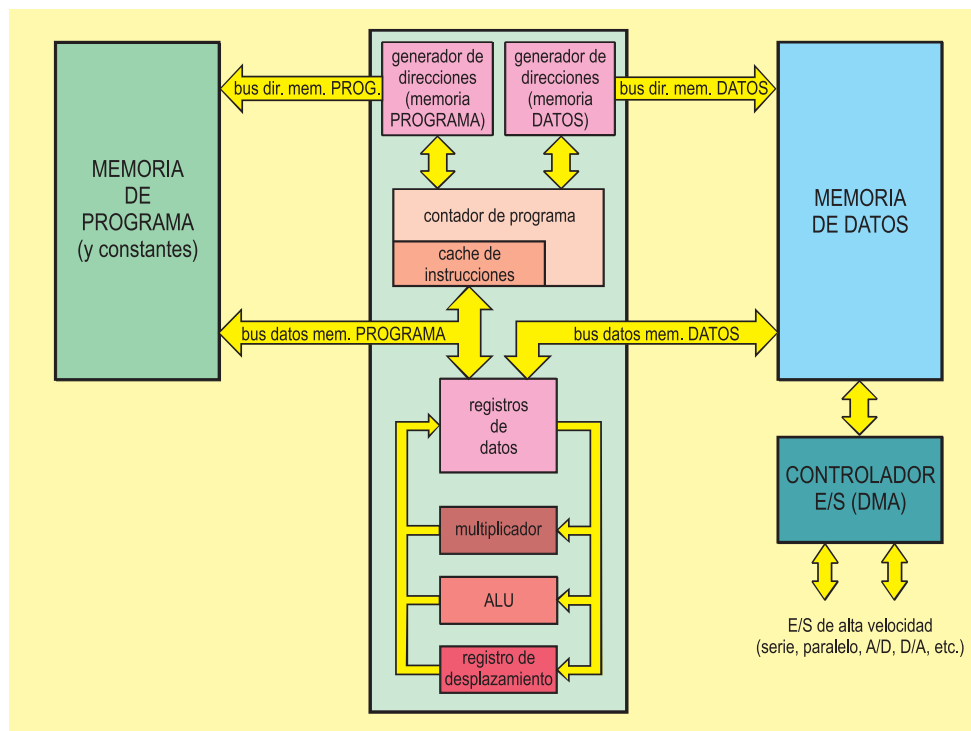


Fig. 1.40. Arquitectura Harvard típica de un DSP.

madamente rápido. Los DSP más modernos incluyen instrucciones de multiplicar-acumular que demandan un sólo ciclo de reloj, y algunos hasta tienen varios multiplicadores trabajando en paralelo;

- memorias y “buses” separados para programas y datos (arquitectura Harvard), como se muestra en la Fig. 1.40, que permite solapar las ejecución de una instrucción con la búsqueda de la siguiente, y también efectuar simultáneamente varias operaciones. En particular, están optimizados para tomar simultáneamente un dato de la memoria de datos y un coeficiente de la memoria de programa, multiplicarlos entre sí, y adicionar el resultado al contenido del acumulador. Algunos DSP dedican una ALU a esta operación, que se denomina MAC (“multiply and accumulate”);
- instrucciones de salto o lazo que permiten ahorrar ciclos de reloj;
- modos de direccionamiento especializados (por ejemplo, para implementar arreglos circulares);
- velocidad de procesamiento extremadamente rápida.

Como no tienen que efectuar algunas de las funciones de los microprocesadores de alto nivel, los DSP se diseñan para que consuman menos energía, sean más pequeños, y tengan un costo menor que un procesador de propósito general. Los DSP hicieron que fuese más sencillo implementar aplicaciones de audio –tales como modems de líneas telefónicas o compresores de voz– en forma digital que con circuitos analógicos. Las velocidades de los DSP de alto rango se han incrementado hasta tal punto (Fig. 1.41) que existen implementaciones de DSL y de estaciones base inalámbricas (wireless). Este aumento de velocidad

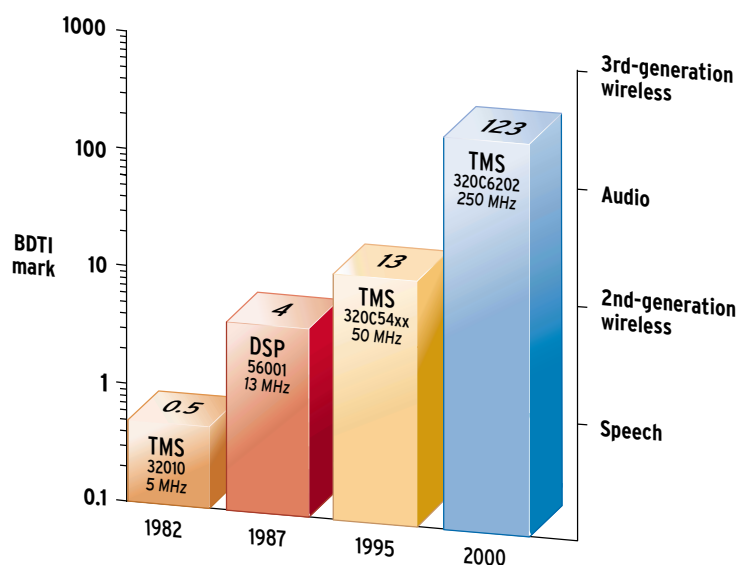


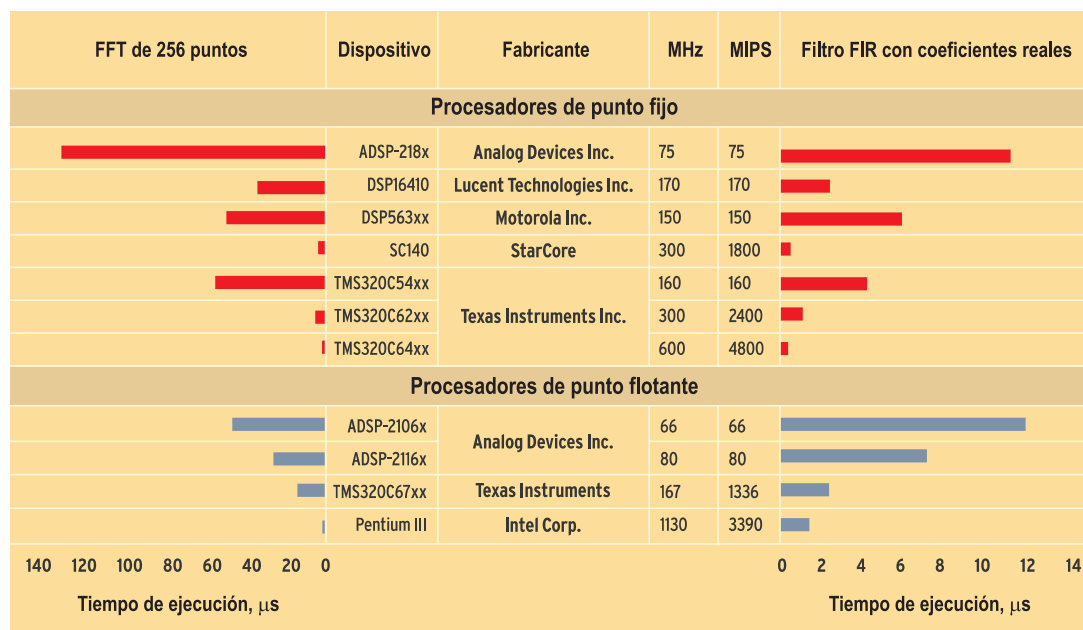
Fig. 1.41. El índice BDTI mark, una medida de comparación de velocidad de procesadores desarrollada por Berkeley Design Technology Inc., ilustra los incrementos de velocidad para cuatro generaciones de DSP, junto con los requerimientos de algunas aplicaciones. El eje de velocidades es logarítmico, y revela el ritmo de la evolución.

se debe tanto al empleo de geometrías más reducidas como a mejoras en la tecnología CMOS de integración.

1.6.1. Breve historia de la evolución de los DSP

Los algoritmos de PDS se usaron desde mucho tiempo antes a la aparición de los DSP. Se implementaban en grandes computadoras (mainframes), y posteriormente en mini-computadoras de alta velocidad (VAX 11-780, etc.) Según el ancho de banda de la señal, estas implementaciones podían o no ejecutarse en tiempo real. Con la evolución de la tecnología de semiconductores se construyeron procesadores dedicados utilizando cientos de integrados TTL de mediana escala de integración (MSI), incluyendo ALU escalables (tecnología “bit-slice”) y circuitos multiplicadores. Los sistemas típicos contaban con más de 100 integrados: eran grandes, costosos y consumían mucha potencia, necesitando de sistemas de refrigeración dedicados.

Los primeros DSP populares fueron el NEC μ PD7720 y el Texas Instruments TMS32010, que estuvieron disponibles comercialmente a fines de 1982. Estos integrados tenían aritmética entera (o de “punto fijo”) de 16 bits, efectuaban 5 millones de instrucciones por segundo (MIPS), y tenían una limitada capacidad de memoria RAM, ROM y puertos de entrada/salida. El costo era de alrededor de \$600, sin incluir el software o las herramientas de desarrollo. Muchos DSP actuales, que son mucho más avanzados, cuestan menos de \$20. Integran dentro del encapsulado una mayor cantidad de periféricos, lo que disminuye el espacio necesario en plaquetas de circuito impreso, disminuye el consumo de energía, aumenta la confiabilidad, y reduce la complejidad y el costo de fabricación a punto tal que muchos productos de consumo masivo, como modems telefónicos, tarjetas de sonido

Tabla 1.6. Comparación del desempeño de distintos DSP.

para PC y teléfonos celulares incluyen uno o más DSP.

El diseño usando tecnología CMOS redujo significativamente el consumo de potencia; los modelos actuales utilizan baja tensión de alimentación (3.3V y menores). Aplicaciones como los modems telefónicos, que antiguamente necesitaban dos DSP y un microprocesador actuando como controlador, hoy pueden implementarse a mucho menor costo utilizando un único DSP.

Otro hito significativo en la historia de los DSP fue la introducción comercial en 1986 del primer DSP de punto flotante, el DSP32 de AT&T. Los procesadores de punto flotante son útiles en ciertas aplicaciones porque su programación es más sencilla. Sin embargo, los DSP de punto fijo son de uso más frecuente, ya que son más pequeños, baratos, rápidos y consumen menos potencia. El costo es un factor de peso significativo en productos masivos tales como teléfonos celulares, modems, y discos rígidos. Los DSP de punto fijo necesitan escalar la amplitud de las señales para evitar saturación y/o desborde. Habitualmente este no es un problema en la mayoría de los sistemas de comunicaciones digitales donde los niveles de potencia de la señal permanecen relativamente constantes. Los DSP de punto flotante efectúan este escalado de manera automática.

En 1988 aparecieron las primeras partidas del TMS320C30 de Texas Instruments, que costaba alrededor de \$1300. Tanto este DSP como el DSP32 tenían un ancho de palabra de 32 bits. Al poco tiempo, un miembro de la familia TMS320C30 que podía ejecutar 25 MIPS costaba \$200; en la generación siguiente (TMS320C31) se podía encontrar un componente de 40 MIPS con un costo de \$35.

La Tabla 1.6 compara la performance de distintos tipos de DSP actuales (datos de 2001), medida en base al tiempo de ejecución de dos algoritmos típicos: el cálculo de una transformada rápida de Fourier y el cómputo de un filtro FIR por bloques con coeficientes

reales. Como comparación se incluyen los resultados para un procesador Pentium III de 1130 MHz de frecuencia de reloj. Puede resultar sorprendente que este procesador sea más rápido que muchos DSP; sin embargo, es mucho más costoso, consume mucha más energía y carece de periféricos orientados al procesamiento de señales. Además, con este tipo de procesadores “superescalares” no se puede predecir exactamente el tiempo de ejecución de un algoritmo.

Los DSP modernos son más rápidos y versátiles, y suelen incluir periféricos como entradas y salidas seriales, espacio de memoria extendido, memoria FLASH interna, temporizadores, interrupciones multinivel, etc. Algunos están orientados a aplicaciones específicas: la serie DSP56F80x de Motorola, y la TMS320C24x de Texas Instruments cuentan con dispositivos que facilitan el control de motores (6 módulos PWM, entradas específicas para la lectura de encodificadores ópticos incrementales para medida de posición, múltiples fuentes de interrupción para sensar sobrecorrientes o sobretensiones, etc.)

1.6.2. Otras alternativas

Aunque el mercado tradicional de DSP de propósito general está dominado por cuatro compañías –Texas Instruments, Motorola, Agere Systems y Analog Devices– este tipo de procesadores cubre apenas un tercio del mercado global. La mayor parte del mercado corresponde a chips en los cuales el DSP está incorporado de manera no muy evidente, disponibles a través de más de 100 fabricantes. Estos integrados no se conocen como “DSP”, y tampoco son programables; usualmente se comercializan según la tarea que efectúen: modems, reproductores de MP3, códecs para MPEG, etc. En algunos casos o aplicaciones puede resultar más conveniente o eficiente implementar los algoritmos del PDS utilizando alternativas a los DSP.

- Los arreglos lógicos programables (FPGA, Field Programmable Gate Arrays) pueden ser reconfigurados “en el sistema”, lo que es ventajoso en aplicaciones que necesiten muchas versiones de prueba durante el desarrollo, ofreciendo un tránsito rápido desde el diseño hasta el mercado. Son muy veloces debido a que las operaciones se implementan utilizando lógica “cableada” (no se ejecuta un programa); sin embargo, son mucho más costosos, y consumen más que un DSP de funcionalidad similar. Aún cuando la FPGA es la tecnología típica adoptada en la infraestructura de comunicaciones inalámbricas (wireless), es cada vez más frecuente asociarlas a DSP para obtener mayor flexibilidad, mejor relación precio/desempeño, y menor consumo. En este caso la etapa de alta frecuencia se procesa con los FPGA, y la etapa de procesamiento a la tasa de símbolo se ataca con el DSP.
- Los integrados diseñados para aplicaciones específicas (ASIC, Application Specific Integrated Circuits) se pueden ajustar para efectuar ciertas operaciones con gran eficiencia, tanto desde el punto de vista del desempeño como del consumo. Sin embargo, como no son reprogramables, es muy difícil alterar su comportamiento o actualizar el diseño mientras el producto final está en etapa de desarrollo: cada nueva versión necesita un rediseño y la integración de una nueva partida de circuitos, lo que aumenta el costo y retarda el desarrollo del prototipo. Una alternativa son los ASSP (Application Specific Standard Product) que en lugar de diseñarse para una única compañía se destinan al mercado global. Los DSP, en cambio, pueden mejorar su funcionalidad y permiten mejoras del producto final mediante la actualización de

software. En la actualidad, las ASIC se utilizan como interfaces entre buses, lógica de interconexión, y aceleradores funcionales de sistemas basados en DSP, y el mayor volumen de ventas de ASSP está orientado a la telefonía celular. Texas Instruments ha utilizado los núcleos de sus DSP básicos en una variedad de ASSP para uso en cámaras digitales hasta modems DSL, que no denominan “DSP”. Otro ejemplo es el circuito integrado para receptores sin etapa de frecuencia intermedia de Analog Devices, en el cual el trabajo del DSP se reemplaza por una máquina finita de estados, solución que se prefiere cuando el ancho de banda es elevado y el algoritmo invariante. Los integrados para cablemódem se implementan de manera similar.

- Los procesadores de propósito general (GPP, General Purpose Processors) están optimizados para efectuar una gran variedad de tareas. Sin embargo, para aplicaciones en las cuales el producto final debe trabajar con señales de tiempo real, u operar con baterías, los GPP ofrecen un desempeño comparativamente inferior. Cada vez más estos procesadores se consideran los “dinosaurios” de la industria, demasiado influenciados por la compatibilidad con las PC y sus requerimientos específicos como para adaptarse a la rápida evolución de los sistemas de tiempo real. El vuelco del mercado consumidor hacia dispositivos pequeños, inalámbricos, o que permitan una conexión portátil a internet (organizadores personales, teléfonos celulares, reproductores portátiles de música, etc.) que requieren consumos del orden de los miliwatt (y no de las decenas o centenas de watt que consumen los GPP) hacen que el diseño actual de tales aplicaciones se base en DSP.
- En la actualidad, algunos microprocesadores y la mayoría de los microcontroladores incluyen alguna funcionalidad para el procesamiento de señales, que van desde la simple inclusión de un MAC para permitir una implementación sencilla de filtros FIR hasta complejas máquinas de estado como las que procesan las instrucciones SIMD (Single Instruction Multiple Data) para multimedia en los procesadores Intel MMX y SSE II. El motivo principal para incorporar estas prestaciones es que sólo con PDS se puede tener multimedia, acceder a Internet, y mejorar las prestaciones de las consolas para juegos electrónicos: los integrados controladores de las tarjetas de video de alta performance como NVIDIA y ATI funcionan como DSP de muy alto nivel de desempeño.

1.7. Clasificación de señales

Los métodos utilizados para procesar una señal o para analizar la respuesta de un sistema a una señal determinada dependen de las *características* propias de cada señal. Ciertas técnicas se aplican solamente a determinado tipo o familias de señales. Aunque las clasificaciones suelen ser arbitrarias, se comentarán a continuación las principales propiedades de señales:

- multicanales y multidimensionales;
- continuas o discretas en tiempo;
- continuas o discretas en amplitud;
- periódicas o no periódicas;

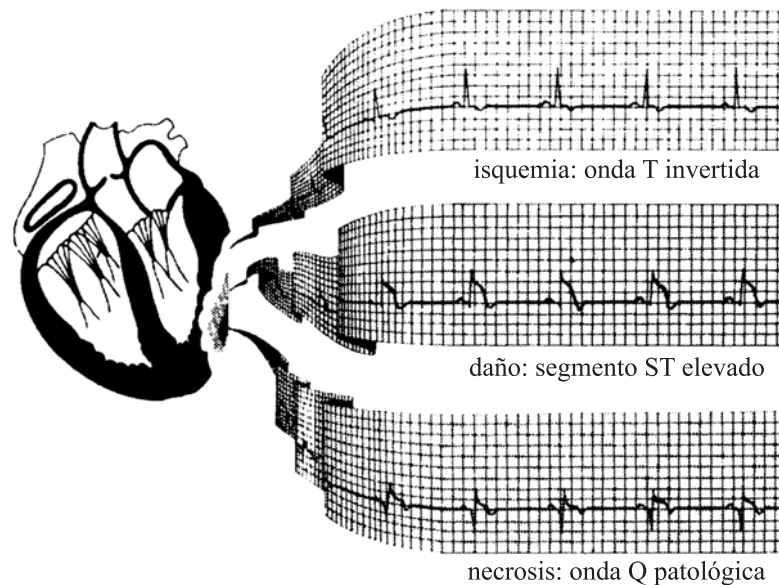


Fig. 1.42. Ejemplo de señal electrocardiográfica de tres canales.

- de longitud finita, semiinfinita, o infinita;
- determinísticas o aleatorias;
- de ancho de banda limitado (banda angosta, banda ancha) o ilimitado;
- con espectro discreto o continuo;
- de energía o de potencia.

1.7.1. Señales multicanales y multidimensionales

Una señal se describe en función de una o más variables independientes. El valor de esta función (la variable dependiente) puede ser una cantidad escalar real o compleja, o quizás un vector. El número de variables independientes define la *dimensión* de la señal, mientras que el número de variables dependientes determina la cantidad de *canales*. Por ejemplo, la señal $x_1(t) = A \sin 3\pi t$ es una señal real valuada que depende de una única variable independiente (t): tanto el número de canales como la dimensión son unitarios. La señal $s_2(t) = Ae^{j3\pi t} = A \cos 3\pi t + j A \sin 3\pi t$ aunque también depende de una única variable independiente (t) toma valores complejos: en algunos casos puede ser más conveniente pensarla como una señal unidimensional de dos canales.

En algunas aplicaciones las señales pueden estar generadas por múltiples fuentes o sensores, y entonces pueden representarse en forma vectorial. La Fig. 1.28 muestra las tres componentes de una señal vectorial que es la salida de un único acelerómetro que se utiliza para medir la aceleración de la corteza terrestre durante un terremoto. La medición representa las contribuciones de tres tipos básicos de ondas elásticas: las ondas primarias (P) y secundarias (S) se propagan por el interior de las rocas, y pueden ser transversales o longitudinales, la onda superficial, que se propaga cerca de la superficie terrestre.

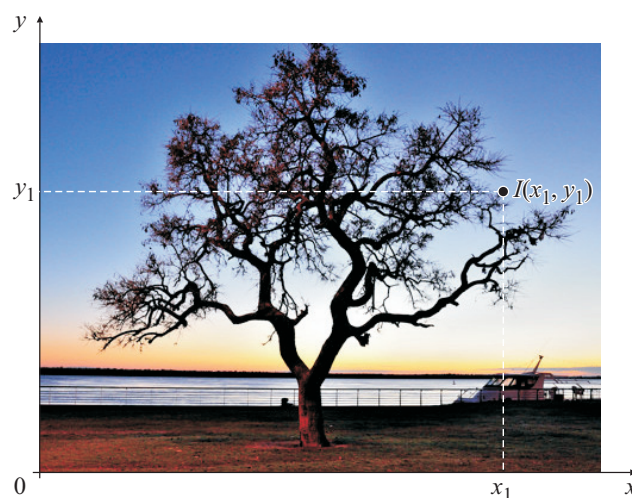


Fig. 1.43. Ejemplo de una señal bidimensional.

Un conjunto de fuentes, o sensores múltiples, generan un conjunto de señales escalares. Aunque tales señales no son vectoriales desde un punto de vista físico, por conveniencia notacional y matemática pueden pensarse como componentes de un vector. La Fig. 1.42 muestra la salida de un electrocardiógrafo que cuenta con tres electrodos, que miden la actividad cardíaca en tres lugares distintos del cuerpo. Si $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ nota la señal eléctrica del k -ésimo sensor en función del tiempo, el conjunto de las tres señales puede representarse como el vector

$$\mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Tal vector de señales es una *señal multicanal*. En electrocardiografía es común realizar electrocardiogramas utilizando tres y doce sensores, que dan lugar a señales de tres y doce canales, respectivamente.

Cuando la señal depende de una única variable independiente es *unidimensional*, y si es función de M variables independientes es *M-dimensional*.

La fotografía de la Fig. 1.43 es un ejemplo de una señal bidimensional, ya que la intensidad o brillo $I(x, y)$ en cada punto es una función de dos variables independientes x e y . Por otro lado, una imagen de televisión en blanco y negro puede representarse como $I(x, y, t)$ ya que el brillo también es función del tiempo, y por lo tanto, la señal de TV monocroma puede describirse como una señal tridimensional. En cambio, una imagen de TV color puede describirse como tres componentes de intensidad $I_r(x, y, t)$, $I_g(x, y, t)$, e $I_b(x, y, t)$ correspondientes al valor de los colores principales (rojo, verde y azul) como funciones del tiempo. La señal de TV color puede describirse entonces como una señal tridimensional de tres canales, representada por el vector

$$\mathbf{I}(x, y, t) = \begin{bmatrix} I_r(x, y, t) \\ I_g(x, y, t) \\ I_b(x, y, t) \end{bmatrix}.$$

En este curso trataremos principalmente con señales de un solo canal, unidimensionales,

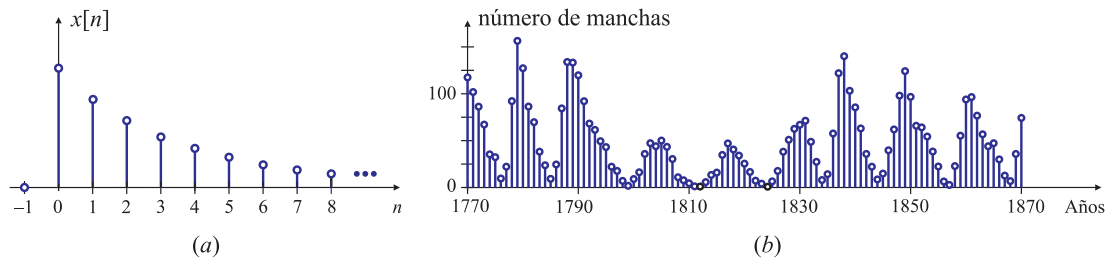


Fig. 1.44. Señales discretas en tiempo: Representación gráfica de la señal $x[n] = 0,8^n$ para $n \geq 0$, y $x[n] = 0$ para $n < 0$ (a); Número de manchas solares por año entre 1770 y 1869 (b).

reales o complejas, que denominaremos simplemente *señales*. En términos matemáticos estas señales son función de una única variable independiente; aunque no necesariamente es el tiempo, es costumbre referirse a ella utilizando el símbolo t . En muchos casos, las operaciones de procesamiento de señales y los algoritmos desarrollados para señales unidimensionales, de un único canal, pueden extenderse a señales multicanales y multidimensionales. En otros casos, como en el procesamiento de imágenes, las técnicas y métodos se diseñan para explotar la bidimensionalidad de este tipo de señales.

1.7.2. Señales continuas o discretas en tiempo

Las señales de *tiempo continuo* están definidas para cualquier valor de tiempo, y pueden tomar valores en el intervalo continuo (t_1, t_2) , donde t_1 puede ser $-\infty$ y t_2 puede ser $+\infty$. Matemáticamente, estas funciones pueden describirse como función de una variable continua. La forma de onda de la voz de la Fig. 1.22 y las señales $x_1(t) = \cos \pi t$, $x_2(t) = e^{-|t|}$, $-\infty < t < \infty$ son ejemplos de señales de tiempo continuo.

Las señales *discretas* están definidas en determinados instantes de tiempo, y solamente en ellos. Estos instantes de tiempo no tienen por qué ser equidistantes, aunque en la práctica frecuentemente lo son por conveniencia computacional y para que resulten matemáticamente tratables. La señal $x[t_n] = e^{-|t_n|}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ es un ejemplo de una señal discreta. Debe tenerse presente que la señal *no es nula* durante el intervalo de tiempo entre t_n y t_{n+1} : simplemente, *no está definida* en esos intervalos.

De aquí en más, las variables independientes de las señales discretas se encerrarán entre corchetes “[·]”, mientras que para las señales continuas se utilizarán paréntesis “(·)”. Para enfatizar la naturaleza discreta de la señal, se notará $x[n]$ en lugar de $x[t_n]$. El índice n de los instantes discretos de tiempo es una variable entera, y por lo tanto las señales discretas pueden representarse matemáticamente como una sucesión de números reales o complejos. Si los instantes de tiempo están equiespaciados (es decir, $t_n = nT$), la notación $x[nT]$ también es frecuente. Por ejemplo, la señal definida por

$$x[n] = \begin{cases} 0,8^n, & \text{si } n \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

es una señal discreta, representada gráficamente en la Fig. 1.44(a).

En las aplicaciones, las señales discretas pueden surgir de dos maneras:

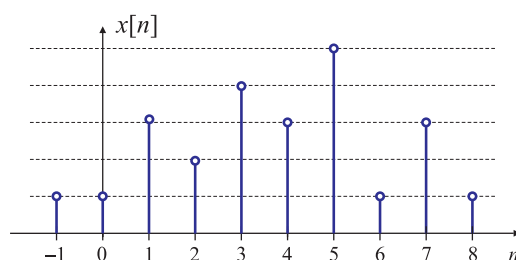


Fig. 1.45. Señal digital cuantizada en cinco niveles de amplitud.

1. Eligiendo valores de una señal analógica en determinados instantes de tiempo. Este proceso se denomina *muestreo* (“sampling” en inglés) y será tratado en profundidad en el Capítulo 5. Todos los instrumentos de medición que toman medidas a intervalos regulares de tiempo proveen señales de tiempo discreto. Por ejemplo, la señal $x[n]$ de la Fig. 1.44(a) puede obtenerse muestreando la señal continua

$$x_1(t) = \begin{cases} 0,8^t, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

a razón de una vez por segundo, en $t_n = n$. La misma señal discreta $x[n]$ se obtiene si se muestrea otra señal continua

$$x_1(t) = \begin{cases} 0,8^{t/T}, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

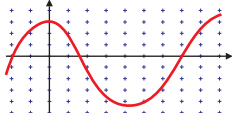
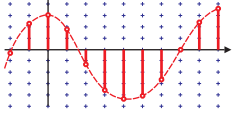
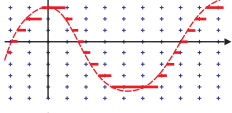
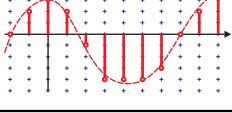
con $T > 0$, $T \neq 1$, cada $1/T$ segundos, en $t_n = n/T$. El hecho que la misma señal discreta resulte del muestreo de dos señales continuas diferentes puede ser beneficioso o no, según las aplicaciones.

2. Por acumulación de una variable durante un período de tiempo. Por ejemplo, la cuenta de los automóviles que pasan por una determinada calle por hora, o el registro de la cotización promedio de alguna variable económica cada día son ejemplos de señales discretas. La Fig. 1.44(b) muestra un gráfico de los números de manchas solares de Wölfer. Cada muestra de esta señal discreta corresponde al número total de manchas solares observadas durante el lapso de un año.

1.7.3. Señales continuas o discretas en amplitud

Los valores de la *amplitud* que toma una señal continua o discreta en tiempo, también pueden ser continuos o discretos. La Fig. 1.45 muestra una señal que sólo puede tomar cuatro valores diferentes. Si la señal toma todos los posibles valores sobre un rango finito o infinito, se dice que es una señal de *amplitud continua*. El proceso de convertir la señal de amplitud continua en una de amplitud discreta, denominado *cuantización*, es un proceso de aproximación. Puede llevarse a cabo por *redondeo* o *truncación*. Por ejemplo, si la señal digital sólo puede tomar valores enteros entre 0 y 15, la señal continua se cuantizará en alguno de estos 16 valores. Si el valor de la señal continua es 8.58, se aproximará a 8 si se adopta el método de truncación, o a 9 si se emplea el redondeo al entero más próximo.

Tabla 1.7. Clasificación de señales según su variación en amplitud y tiempo.

Variación en		tipo de señal	
tiempo	amplitud		
continua	continua	analógica	
discreta	continua	discreta	
continua	discreta	cuantizada	
discreta	discreta	digital	

De acuerdo a la forma de variación de la variable independiente (usualmente el tiempo, ya sea la variable continua t o la variable discreta n) y de la amplitud, las señales que serán objeto de estudio a lo largo de este curso pueden caracterizarse en cuatro categorías diferentes como se muestra en la Tabla 1.7.

Una señal que es continua en amplitud y tiempo, se denomina señal *analógica*. Alternativamente, si la señal sólo toma valores de un conjunto finito de valores posibles, se dice que es una señal de *amplitud discreta* o *cuantizada*. Usualmente, estos valores son equidistantes, y por lo tanto pueden expresarse como un entero múltiplo de la distancia entre dos valores sucesivos. Una señal discreta en el tiempo, que toma valores discretos en amplitud suele denominarse una señal *digital*.

Para que una señal pueda ser procesada por medios digitales, debe ser discreta en tiempo y amplitud³ (es decir, debe ser una señal digital). Si la señal que debe procesarse es de tiempo continuo, antes de su procesamiento debe ser convertida en una señal digital discretizándola (en tiempo) y cuantizándola (en amplitud), utilizando, por ejemplo, un esquema como el de la Fig. 1.38(b).

1.7.4. Señales periódicas y no periódicas

Una señal continua $x(t)$ es *periódica* si satisface la condición

$$x(t) = x(t + T_0) \quad (1.1)$$

³Los circuitos de capacitores conmutados sirven para procesar señales discretas en tiempo y continuas en amplitud, pero este procesamiento queda limitado a algoritmos simples, como filtrado, interpolación, etc. Los algoritmos más complejos requieren de señales digitales y DSPs.

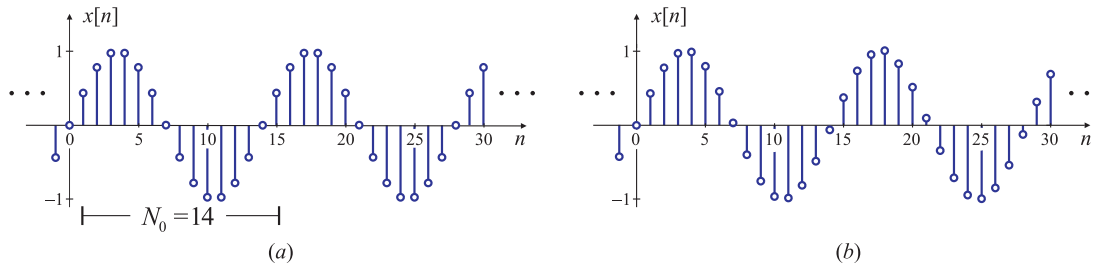


Fig. 1.46. Señales sinusoidales $x[n] = \sin(\omega_0 n)$: señal periódica, con $\omega_0 = \pi/7$ (a); señal casi periódica de frecuencia $\omega_0 = \pi/(5\sqrt{2})$ (b).

para todo t , donde T_0 es una constante. El menor valor positivo de T_0 que satisface esta condición se denomina *período*, y define la duración de un ciclo completo de la señal $x(t)$. Por ejemplo, la señal

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t)$$

es periódica de período $T_0 = 2\pi/\omega_0$, pues

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = A \sin\left[\omega_0 \left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] = A \sin(\omega_0 t + 2\pi) = A \sin(\omega_0 t) = x(t).$$

Si una señal $x(t)$ es tal que la condición (1.1) no se cumple para ningún valor de T_0 , se dice que la señal es aperiódica. Por ejemplo, la señal $x(t) = t^2$ no es periódica pues no existe ningún T_0 tal que se verifique (1.1). En cambio, la señal $x(t) = x_0$ (constante) tiene período arbitrario, pues la condición (1.1) se satisface para *cualquier* valor de T_0 .

Una señal discreta $x[n]$ es periódica de período N_0 si

$$x[n] = x[n + N_0], \quad (1.2)$$

donde N_0 es un entero positivo. Las señales discretas presentan ciertas peculiaridades inherentes que no ocurren en señales continuas. Por ejemplo, la señal

$$x[n] = A \sin(\omega_0 n) \quad (1.3)$$

es periódica sólo si ω_0 es una fracción racional de 2π . Si $\omega_0 = \pi/7$, el período de la señal es $N_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/(\pi/7) = 14$, como se observa en la Fig. 1.46(a). En cambio, si $\omega_0 = \pi/(5\sqrt{2}) \approx 7,07$, por lo que la frecuencia es similar a la del ejemplo anterior, la señal (1.3) no es periódica: el argumento $\omega_0 n = \pi n/(5\sqrt{2})$ no es congruente módulo 2π con $\omega_0(n + N_0) = \pi n/(5\sqrt{2}) + \pi N_0/(5\sqrt{2})$ para ningún valor de N_0 [Fig. 1.46(b)].

En el caso de las señales discretas, aún cuando ω_0 sea una fracción racional de 2π , no siempre el período está dado por la ecuación $2\pi/\omega_0$, ya que el resultado de esta operación no necesariamente es un número entero. Por ejemplo, si $\omega_0 = 5\pi/4$, el cálculo de $2\pi/\omega_0$ es

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{5\pi/4} = \frac{8}{5}$$

que no es un número entero; en este caso, el período N_0 de la señal es $N_0 = 8$, como se aprecia en la Fig. 1.47(a).

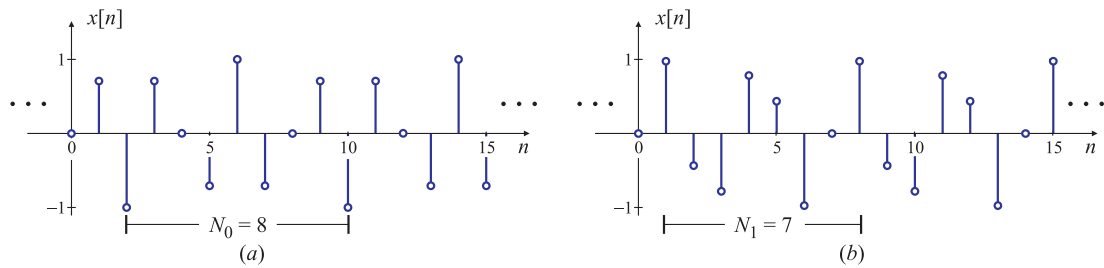


Fig. 1.47. En señales discretas, la frecuencia ω_0 y el período no siempre están inversamente relacionados. Señal sinusoidal de frecuencia $\omega_0 = (3/8)2\pi$ y período $N_0 = 8$ (a); señal de frecuencia $\omega_1 = (2/7)2\pi$, y período $N_1 = 7$ (b). La segunda señal es de frecuencia y período menor que la primera!

En general, si $2\pi/\omega_0 \in \mathbb{Q}$ (i.e., es un número racional), siempre puede notarse

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{p}{q}$$

donde p y q son *relativamente primos* o *primos entre sí*; en otras palabras, no tienen factores en común, por lo que la fracción p/q es irreducible. Bajo estas condiciones, el período N_0 de la señal discreta $x[n]$ es

$$N_0 = p.$$

Nuevamente, esto establece algunas diferencias con el caso continuo: la frecuencia $\omega_0 = 2\pi(3/8)$ es mayor que $\omega_1 = 2\pi(2/7)$, y sin embargo el período $N_0 = 8$ de la primera [Fig. 1.47(a)] *también es mayor* que el período $N_1 = 7$ de la segunda [Fig. 1.47(b)].

A pesar de que una señal discreta $x[n]$ como (1.3) de frecuencia ω_0 que no es una fracción racional de 2π *no* es periódica, su envolvente sí lo es, tal como se puede apreciar en la Fig. 1.46(b); por ello se las suele denominar señales *casi periódicas*. Aunque en muchas aplicaciones resulta irrelevante que la señal sea periódica o casi periódica, como por ejemplo en la determinación de la salida de estado estacionario de sistemas lineales discretos, en otras, como el análisis espectral de señales discretas, esta diferencia se manifiesta de manera notable.

En los ejercicios se exploran otras propiedades de las señales periódicas discretas y continuas.

1.7.5. Señales de longitud finita, semi-infinita e infinita

Se entiende por *longitud* de una señal al intervalo de tiempo para el cual la señal no es idénticamente nula. Este concepto se corresponde con el de *soporte* de una función en análisis matemático. Si el intervalo es acotado se dice que la señal tiene longitud finita, y en caso contrario que es de longitud infinita. Por ejemplo, la señal continua

$$x_c(t) = 1, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

es una señal de longitud infinita (o *doblemente* infinita), porque toma valores no nulos tanto para $t \rightarrow \infty$ como para $t \rightarrow -\infty$. En cambio, la señal descrita por

$$x_c(t) = Ae^{-\alpha t}, \quad \text{con } \alpha > 0, \quad 0 \leq t < \infty,$$

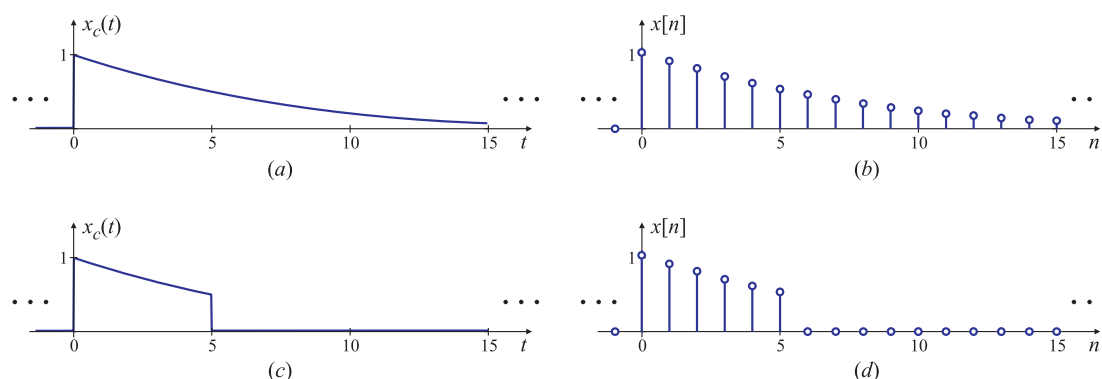


Fig. 1.48. Señales de longitud semi-infinita de tiempo continuo (a) y discreto (b). Señales de longitud finita de tiempo continuo (c) y discreto (d).

es de longitud *semi*-infinita, porque se anula sobre el eje real negativo. En cambio la señal

$$y_c(t) = \begin{cases} A \sin(\omega_0 t), & -2\pi/\omega_0 \leq t \leq 4\pi/\omega_0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

tiene longitud finita, pues es distinta de cero sólo en el intervalo $-2\pi/\omega_0 \leq t \leq 4\pi/\omega_0$. Dentro de este intervalo, la función puede tomar valores nulos (por ejemplo, en $t = t_n = \pi n/\omega_0$), pero no es idénticamente nula en todo el intervalo. Las mismas consideraciones caben para señales discretas en tiempo: mientras que la señal

$$x[n] = n^2, \quad -\infty < n < \infty,$$

es de longitud doblemente infinita, la señal

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

tiene longitud finita, de 6 muestras. En la Fig. 1.48 se muestran ejemplos de señales discretas y continuas de longitud finita e infinita.

Una señal periódica *necesariamente* debe ser de longitud doblemente infinita; en cambio una señal aperiódica puede tener longitud finita o infinita.

El interés de distinguir entre uno y otro tipo de señal está motivado por su diferente comportamiento frecuencial, como se verá en el Capítulo 2. Pero también porque ponen de manifiesto algunas diferencias entre los sistemas de tiempo continuo y los de tiempo discreto. Por ejemplo, mientras que la respuesta de un sistema continuo a una excitación impulsiva es de longitud infinita, la respuesta impulsiva de un sistema discreto puede ser tanto de longitud infinita (se dice que el sistema es tipo IIR, por *infinite impulse response*) como de longitud finita (sistema tipo FIR, por *finite impulse response*). Los sistemas FIR pueden mostrar comportamientos que no tienen equivalente en los sistemas continuos, como respuesta de fase lineal, retardo de grupo constante, etc.

Algunas señales de longitud infinita tienen características distintivas en cierto intervalo de tiempo, y en el resto toman valores muy pequeños, o varían muy suavemente, etc. Por ello se suele definir la *longitud equivalente* de una señal, que mide el intervalo de tiempo donde se concentra la energía (o la potencia, etc.) de la señal. Estas ideas se explorarán en el Capítulo 2.

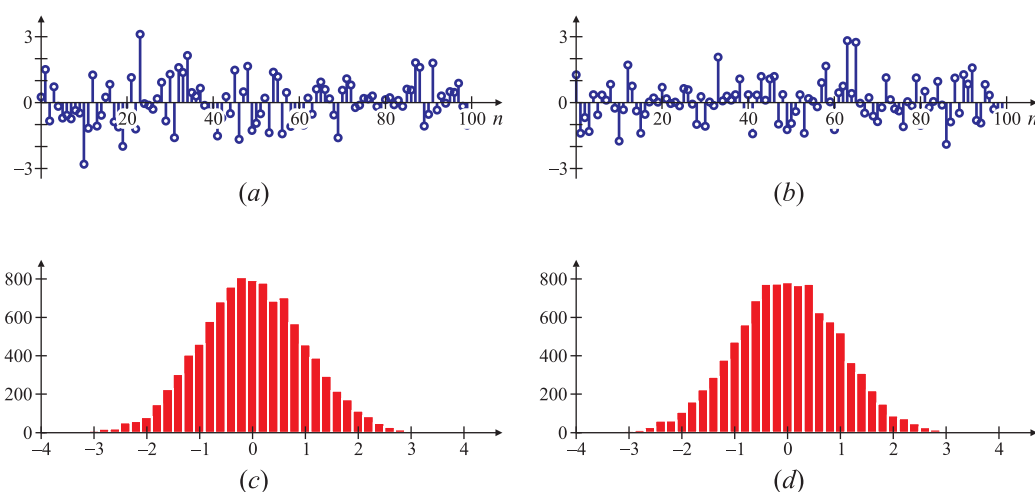


Fig. 1.49. Dos señales aleatorias del mismo generador (a)-(b), y sus histogramas (c)-(d).

1.7.6. Señales determinísticas o aleatorias

El procesamiento y el análisis matemático de las señales requiere disponer de una descripción matemática de la señal, denominada *modelo de señal*, que conduce a otra importante clasificación de señales. Una señal que puede describirse de manera única por una expresión matemática explícita, una tabla de valores, o una regla bien definida, se denomina *determinística*. Este término indica que tanto los valores pasados, presentes y futuros de la señal se conocen precisamente, sin ninguna incertidumbre.

Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas se encuentran señales que no pueden describirse con un nivel razonable de precisión por ninguna fórmula matemática, o una descripción de ese tipo es demasiado complicada para ser de utilidad. La falta de tal relación implica que la señal evoluciona en el tiempo de manera imprevisible. Se dice que tales señales son *aleatorias*. La salida de un generador de ruido, la señal sísmica de la Fig. 1.28, y la señal de voz de la Fig. 1.22 son ejemplos de señales que pueden pensarse como aleatorias.

Las Figs. 1.49(a) y (b) muestran un tramo de 100 muestras de longitud de dos señales aleatorias obtenidas del mismo generador de ruido, y es evidente que ambas señales son diferentes. En las Figs. 1.49(c) y (d) se representan los histogramas⁴ de estas señales, calculados para segmentos de 10000 muestras de longitud. Contrariamente a lo que sucede con la representación temporal de las Figs. 1.49(a) y (b), los histogramas son *muy* parecidos. Esta similitud es la que motiva la descripción y el análisis de las señales aleatorias utilizando técnicas *estadísticas*, en lugar de fórmulas explícitas. El marco matemático para el tratamiento teórico de las señales aleatorias se basa en la teoría de probabilidad y procesos estocásticos.

La clasificación de una señal del “mundo real” como determinística o aleatoria no es siempre evidente. Algunas veces ambas aproximaciones conducen a resultados significativos que brindan una comprensión más profunda sobre el comportamiento de la señal. En

⁴El histograma es una representación gráfica en forma de barras, donde la altura de cada barra es proporcional a la cantidad de muestras que toman el valor representado en el eje horizontal.

otros casos, una clasificación incorrecta puede dar lugar a resultados erróneos, ya que ciertas herramientas matemáticas sólo son aplicables a señales determinísticas, mientras que otras tienen sentido solamente para señales aleatorias.

1.7.7. Señales de ancho de banda limitado e ilimitado

Las señales pueden estudiarse no sólo desde el punto de vista temporal, sino también *espectral*, en función de la frecuencia, como se estudiará en el próximo capítulo. El tipo de *contenido espectral* influye sobre el tipo de procesamiento que puede efectuarse sobre la señal.

Las señales con ancho de banda limitado son aquellas cuyo contenido espectral queda concentrado en un rango finito de frecuencias. Por ejemplo, una señal senoidal $w(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$, como la que se muestra a la izquierda de la Fig. 1.50(a) tiene componentes frecuenciales únicamente en las frecuencias $\pm f_0$, y por lo tanto se considera de banda angosta. Se estudiará en el próximo capítulo que el espectro $W(f)$ de la señal $w(t)$ es

$$W(f) = (A/2) \delta(f + f_0) + (A/2) \delta(f - f_0)$$

donde $\delta(f)$ es el impulso de Dirac, que se estudiará en detalle en el Capítulo 2. En cambio, una onda cuadrada tiene infinitas componentes frecuenciales, ubicadas en la frecuencia fundamental y sus infinitos múltiplos (las armónicos superiores). Esta señal tiene un ancho de banda ilimitado. Por ejemplo, la onda cuadrada de amplitud A , ciclo de trabajo d y período $1/f_0$ que se muestra a la izquierda de la Fig. 1.50(b) tiene un espectro dado por

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - k f_0),$$

donde $c_k = A d f_0 \text{sinc}(dk)$, y $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$.

Una señal temporal con un ancho de banda ilimitado es el impulso de Dirac, $x(t) = \delta(t)$. El pulso rectangular $y(t) = A[u(t + t_0/2) - u(t - t_0/2)]$, con $t_0 = 1/f_0$, representado en la Fig. 1.50(c) también tiene un espectro con un ancho de banda ilimitado en frecuencia, dado por

$$Y(f) = A t_0 \text{sinc}(t_0 f).$$

Las señales aleatorias, con distribución gaussiana, también son de ancho de banda ilimitado (aunque en este caso lo correcto es hablar de *densidad espectral* en lugar de espectro).

En la Fig. 1.50(d) se representa una señal de banda limitada. La forma de onda temporal está dada por

$$z(t) = A \text{sinc}(t f_0/2) \sin(2\pi 5 f_0 t),$$

y su espectro es

$$Z(f) = j \frac{A}{2} f_0 \{ [u(f + 4,5 f_0) - u(f + 5,5 f_0)] - [u(f - 4,5 f_0) - u(f - 5,5 f_0)] \}.$$

Las señales de *banda ancha* o *banda angosta* se caracterizan por la relación entre el ancho de banda de la señal, y alguna frecuencia distintiva de la misma. Por ejemplo las ondas de radio moduladas en amplitud tienen un espectro concentrado alrededor de la frecuencia

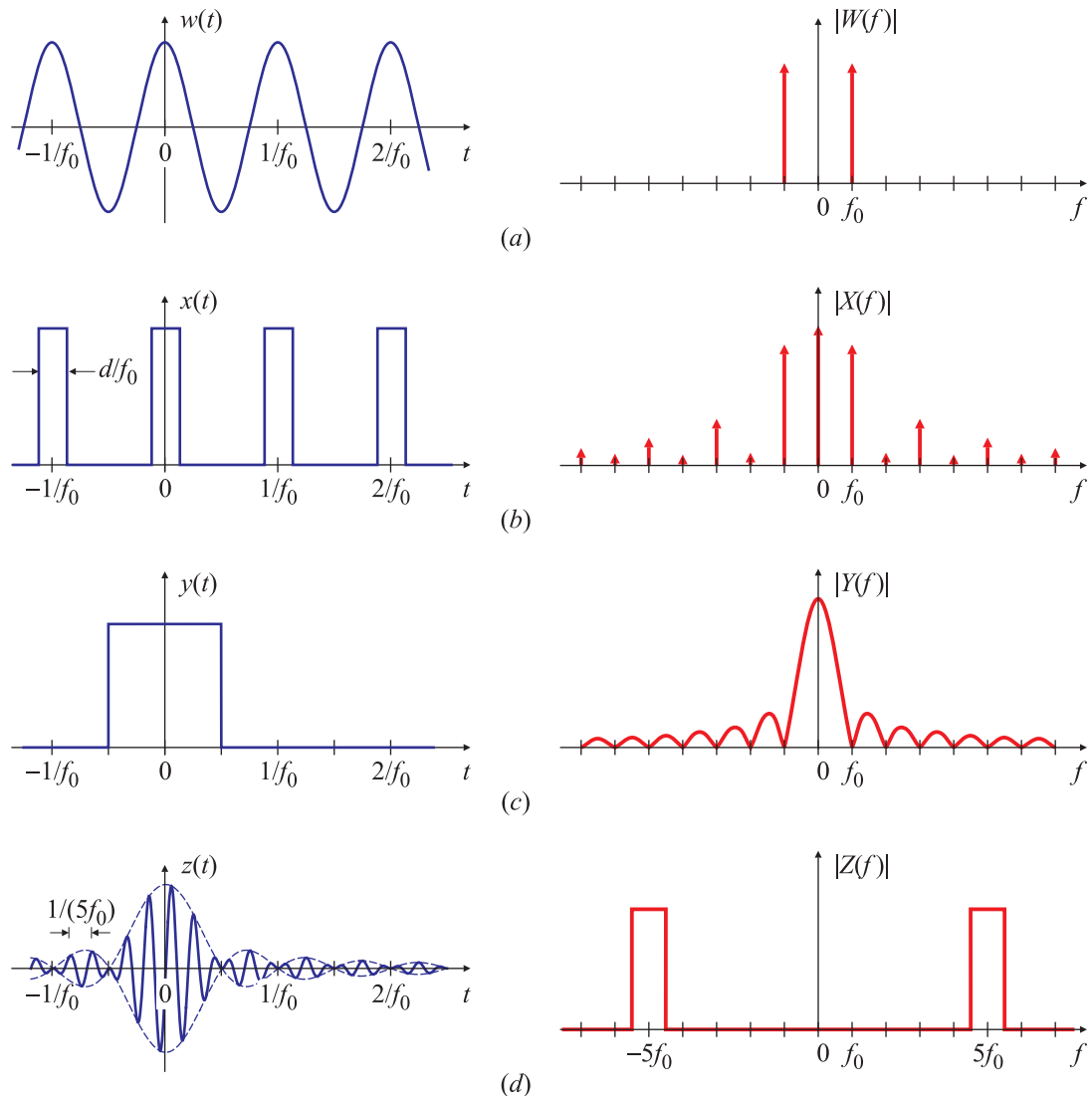


Fig. 1.50. Señales temporales (izquierda) y sus espectros (derecha): ancho de banda finito y discreto (a), ilimitado y discreto (b), finito y continuo (c), ilimitado y continuo (d).

de la portadora, y *limitado* a ± 5 kHz alrededor de ella. Por lo tanto, el ancho de banda es de 10 kHz y como es mucho menor que la frecuencia de la señal, se dice que esta señal es de *banda angosta*. Las señales moduladas en frecuencia tienen un ancho de banda mayor, de 30 kHz, pero la frecuencia portadora también es mayor (entre 88 MHz y 108 MHz), y por lo tanto también se consideran de *banda angosta*. Las señales de televisión analógica, en cambio, tienen anchos de banda de 6 MHz, con portadoras comprendidas entre 59 MHz y 88 MHz (canales 2 al 6) y entre 175 MHz y 216 MHz (canales del 7 al 13), y se consideran de *banda ancha*.

En la actualidad también se utilizan señales cuyo espectro se extiende sobre un rango de frecuencias muchísimo mayor. Por ejemplo, en Wi-Fi (802.11b/g/n) se utilizan señales de 22 MHz de ancho de banda, centradas en “canales” que van desde los 2.412 GHz (canal 1) hasta 2.472 GHz (canal 13). En realidad el ancho de banda es mayor que los 22 MHz;

la norma especifica que la potencia de la señal a ± 11 MHz de la frecuencia central del canal debe ser al menos 30 dB menor que la potencia pico. Es frecuente denominar estas señales como de *banda ultra-ancha* o de *espectro disperso*.

1.7.8. Señales con espectro discreto o continuo

La Fig. 1.50 muestra también otra clasificación posible de las señales de acuerdo su tipo de espectro. Los espectros de las Figs. 1.50(a) y 1.50(b) están concentrados en determinados puntos frecuenciales, y se denominan espectros *discretos*, mientras que los de las Figs. 1.50(c) y 1.50(d) se distribuyen de manera *continua* sobre todo el eje de frecuencias o sobre un intervalo acotado del mismo. Se estudiará en el Capítulo 2 que las señales con espectro discreto son periódicas, mientras las que tienen espectro continuo son aperiódicas.

1.7.9. Señales de energía o de potencia

En sistemas de comunicaciones una señal puede representar indistintamente una tensión o una corriente. Si una tensión $v(t)$ fluye sobre una resistencia R con una corriente $i(t)$, la potencia instantánea disipada en la resistencia es

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R}, \quad \text{o bien} \quad p(t) = Ri^2(t).$$

En ambos casos, la potencia instantánea es proporcional al cuadrado de la señal. En el caso especial en que la resistencia R tuviese un valor de 1Ω , ambas ecuaciones adoptan la misma expresión. Por ello, en el análisis de señales es habitual adoptar esta convención, de modo que dada una señal $x(t)$ se define la potencia instantánea de la misma como

$$p(t) = x^2(t).$$

De acuerdo con esta convención, se define la *energía total* de la señal como

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt,$$

y la *potencia promedio* a la expresión

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt.$$

Para el caso de señales discretas, la energía se define como

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n],$$

y la potencia es

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^2[n].$$

En cualquiera de los dos casos, se dice que una señal es de *energía* si $0 \leq E < \infty$, y de *potencia* si $0 < P < \infty$.

Las clasificaciones de señales como de potencia o energía son mutuamente excluyentes. En particular, cualquier señal de energía tiene potencia promedio nula, mientras que una señal de potencia tiene energía infinita. Ejemplos de señales de potencia son las señales sinusoidales, constantes o las señales aleatorias, mientras que señales determinísticas y no periódicas suelen ser señales de energía, como $x(t) = e^{-\alpha t}$ ó $x[n] = e^{-\alpha n}$, con $\alpha > 0$ y $n \geq 0$ que tienen energía finita (y potencia nula).

Una señal de longitud finita tiene energía finita, y potencia promedio nula. Sin embargo, una señal de longitud infinita puede ser una señal de energía (por ejemplo, $x[n] = a^n$, con $|a| < 1$ y $n \geq 0$) o de potencia, como $x[n] = A \sin(2\pi n/N)$.

1.7.10. Otras clasificaciones

Entre la inagotable variedad de señales merecen citarse los tipos de señales

- causales y no causales;
- pares o impares.

Ambos tipos de señales serán estudiadas con detalle en el Capítulo 2.

1.8. Referencias

1. Brandenburg, K., Popp, H., "An introduction to MPEG Layer-3", *EBU Technical Review*, junio 2000.
2. Chierchie, F., *Aplicación de técnicas de control y procesamiento de señales en amplificadores de audio de alta eficiencia y baja distorsión*, Tesis de Maestría, Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur, 2011.
3. Dutoit, T., Marques, F., *Applied Signal Processing: A Matlab-based proof of concept*, Springer, 2009.
4. Eyre, J., "The Digital Signal Processor Derby", *IEEE Spectrum*, **38**, 6, (2001), 62–68.
5. Fernández Moroni, G., *Sistema de reducción de ruido de lectura en Charged Coupled Devices*, Proyecto final de carrera. Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur, 2010.
6. González, J. P., Cutini, G., Cousseau, J. E., Paolini, E. E., "Cancelamiento Activo de Banda Ancha", *XVIII Congreso Argentino de Control Automático AADECA 2002*, Buenos Aires, 2 al 4 de Setiembre de 2002, ref. 055.
7. Haykin, S., *An Introduction to Analog and Digital Communications*, Wiley, 1989.
8. Kintsch, W., Van Dijk, T. A., "Toward a model of text comprehension and production", *Psychological Review*, **85** (5), 363-394, 1978.
9. Lyons, R., *Understanding Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 2001.

10. Madiseti, V., Williams, D., *The Digital Signal Processing Handbook*, CRC Press & IEEE Press, 1998.
11. Mitra, S., *Digital Signal Processing: A computer-based approach*, Mc Graw Hill, 1998.
12. Orazi, V., *Sistema de seguimiento Ocular*. Proyecto final de carrera. Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur, 2010.
13. Nieto, J. I., Paolini, E. E., Cousseau, J. E., “Aspectos de la implementación de un ambiente de cancelamiento activo de ruido”, *IX Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC'2001)*, Santa Fe, 12 al 14 de septiembre de 2001, pp. 139-144.
14. Porat, B., *A course in Digital Signal Processing*, Wiley, 1997.
15. Proakis, J., Manolakis, D., *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Macmillan, 1992.
16. Smith, S., *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, 2da. Ed., California Technical Publishing, 1999. (disponible vía internet en <http://www.dsp-guide.com>).
17. Stefanazzi, L., *Modulación “click” para amplificadores de audio conmutados*. Tesis de Maestría, Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur, 2008.
18. Strauss, W., “The Embedded DSP Trend”, *IEEE Signal Processing Magazine*, **21**, 3, (2004), 101.
19. Tretter, S., *Communication System Design Using DSP Algorithms*, Kluwer/Plenum Publishing, 2003.

1.9. Ejercicios

多闻阙疑，慎言其余，则寡尤。多见阙殆，慎行其余，则寡悔。言寡尤，行寡悔，禄在其中矣。

Escucho, y olvido.

Veo, y recuerdo.

Hago, y entiendo.

atribuida a Confucio, 551-479.

不闻不若闻之，闻之不若见之，见之不若知之，知之不若行之。学至于行之而止矣。

Mejor que nada es oír;

mejor que oír es ver;

mejor que ver es saber;

mejor que saber es hacer.

El aprendizaje no concluye

hasta que se lleva a la práctica.

Xunzi, 340-245.

Sobre los ejercicios:

Los ejercicios forman una parte muy importante (si no la *más* importante) del curso. Algunos son sencillos, otros más complicados, y dentro de lo posible se ha tratado de evitar ejercicios triviales o donde se repita el argumento necesario para su solución. Se incluyen los problemas más interesantes de los parciales de años anteriores. Si bien no hay ejercicios más importantes que otros, las siguientes indicaciones pueden ser de utilidad:

- Los ejercicios señalados ① son **interesantes**: aunque en la mayoría de los casos no son de resolución sencilla, se aconseja estudiarlos y discutirlos pues su finalidad es enfatizar algunos conceptos importantes.
- Los ejercicios marcados ② pueden (¡o deben!) resolverse con MATLAB. El grado de dificultad es variable: en algunos basta usar MATLAB como una calculadora, mientras que en otros es necesario escribir pequeños programas (*funciones o m-files*).
- Los ejercicios indicados con ③ son **complementarios**: profundizan sobre ciertos temas o desarrollan algunas aplicaciones interesantes, pero no son indispensables para comprender los temas de la materia.

Ejercicio 1. Especifique si estas señales son analógicas, discretas, cuantizadas o digitales.

1. La lectura de un termómetro de mercurio montado en un globo meteorológico, expresada en función de la altura.
2. Los mismos datos de temperatura, pero registrados en un *data logger*.
3. El intervalo de tiempo que transcurre entre la llegada de clientes a un mostrador.
4. El número de personas por hora que han sido atendidos por un empleado a lo largo de un día de trabajo.
5. La variación de los precios de la bolsa a lo largo del año.

Ejercicio 2. Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales periódicas, con períodos fundamentales T_1 y T_2 , respectivamente. ¿Bajo qué condiciones la suma $x(t) + y(t)$ es periódica? Si es periódica, calcule cuál es el período fundamental de la señal.

Ejercicio 3. Encuentre, si es posible, ejemplos de señales $x(t)$ e $y(t)$, periódicas con el mismo período fundamental T , tales que:

1. la señal $x(t) + y(t)$ tenga período fundamental $T/2$.
2. la señal $x(t) + y(t)$ tenga período fundamental $2T$.

Ejercicio 4. Sean $x[n]$ e $y[n]$ dos señales periódicas, con períodos fundamentales N_1 y N_2 , respectivamente. ¿Bajo qué condiciones la suma $x[n] + y[n]$ es periódica? Si es periódica, calcule cuál es el período fundamental de la señal.

Ejercicio 5. Si $x(t)$ es una señal continua en el tiempo, $x(2t)$ es una versión “acelerada” de $x(t)$, en el sentido que la duración de la nueva señal es la mitad de la original. De manera similar, $x(t/2)$ es una versión “desacelerada” de $x(t)$, donde la escala temporal de la señal se ha duplicado. Si $y(t) = x(2t)$ y $z(t) = x(t/2)$, determine si las siguientes afirmaciones son ciertas, y si la respuesta es afirmativa, determine la relación entre los períodos de las dos señales consideradas en la proposición. Si la proposición es falsa, dé un contraejemplo.

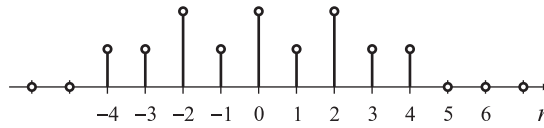
1. Si $x(t)$ es periódica, entonces $y(t)$ es periódica.
2. Si $x(t)$ es periódica, entonces $z(t)$ es periódica.
3. Si $y(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.
4. Si $z(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.

Ejercicio 6. Los conceptos de “aceleración” o “desaceleración” de una señal son ligeramente diferentes para señales discretas en el tiempo. Dada una señal $x[n]$ discreta en el tiempo, las señales $y[n]$ y $z[n]$ definidas a continuación representan en cierta forma las señales “aceleradas” (o *decimadas* en tiempo) y “desaceleradas” (o *interpoladas*) de $x[n]$:

$$y[n] = x[2n] \qquad z[n] = \begin{cases} x[n/2], & \text{si } n \text{ es par.} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas, y si la respuesta es afirmativa, determine la relación entre los períodos de las dos señales consideradas en la proposición. Si la proposición es falsa, dé un contraejemplo.

1. Si $x[n]$ es periódica, entonces $y[n]$ es periódica.
2. Si $x[n]$ es periódica, entonces $z[n]$ es periódica.
3. Si $y[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.
4. Si $z[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.



5. Para la señal $x[n]$ que se muestra en la figura, dibuje $y[n]$ y $z[n]$.

Ejercicio 7. La señal continua $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ tiene frecuencia fundamental f_0 y período $T_0 = 1/f_0$. La señal $x[n]$ se obtiene al tomar muestras de $x(t)$ cada T segundos: $x[n] = x(nT) = e^{j2\pi f_0 nT}$.

1. Muestre que la señal $x[n]$ es periódica si y sólo si T/T_0 es un número racional, es decir, si y sólo si el período de muestreo iguala exactamente un múltiplo del período de $x(t)$.
2. Si $x(t)$ es periódica, ($T/T_0 = p/q$ donde p y q son enteros), ¿cuál es el período y la frecuencia fundamental de $x[n]$? Expresar la frecuencia fundamental como una fracción de $f_0 T$.
3. Si se cumple la condición del inciso anterior, determine cuántos períodos de $x(t)$ son necesarios para obtener las muestras que formen un período de $x[n]$.

(C) Ejercicio 8. Si una señal analógica sinusoidal $x_a(t) = e^{j\Omega_0 t}$ se muestrea a una frecuencia Ω_s , de modo tal que si Ω_0 y Ω_s están *armónicamente relacionadas* entre sí ($\Omega_0 N = \Omega_s k$, donde N y k son números naturales) se obtiene un conjunto de señales periódicas $\phi_k[n] = \phi_k[n + M] = e^{j(\frac{2\pi}{N}k)n}$. En los siguientes ejercicios, observe la relación entre la frecuencia de la señal (directamente proporcional a k si N y Ω_s son constantes) y su período M .

1. Para el conjunto de señales $\phi_k[n] = e^{j(\frac{2\pi}{7}k)n}$, $0 \leq n \leq 27$, ($N = 7$), encuentre el período fundamental para todos los valores enteros de k .
2. Repita el inciso anterior si $\phi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{8})n}$, $0 \leq n \leq 31$, ($N = 8$).
3. Generalice los resultados anteriores para una señal periódica, discreta en el tiempo $\phi_k[n] = e^{j(\frac{2\pi}{N}k)n}$. Muestre que el período fundamental N_0 de esta señal está dado por $N_0 = N / \text{MCD}(k, N)$, donde $\text{MCD}(k, N)$ (el máximo común divisor entre k y N) es el mayor entero que divide a ambos k y N un número entero de veces. Por ejemplo, $\text{MCD}(2, 3) = 1$, $\text{MCD}(2, 4) = 2$, $\text{MCD}(8, 12) = 4$. Note que $N_0 = N$ si m y N no tienen factores en común (en ese caso se dice que k y N son *relativamente primos*).

Ejercicio 9. Las siguientes sucesiones representan un período fundamental de una señal sinusoidal $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$. Determine los valores de A , ω_0 y ϕ para cada caso. El primer valor de cada sucesión corresponde a $n = 0$.

1. $x[n] = \{0, -\sqrt{2}, -2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}\}$.
2. $x[n] = \{-3, 3\}$.
3. $x[n] = \{0, 3/2, 0, -3/2\}$.

Ejercicio 10. Calcule la energía y/o la potencia promedio de las siguientes señales:

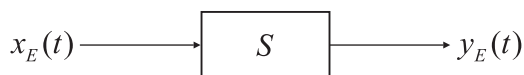
1. $x(t) = e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$, $\alpha > 0$.
2. $x(t) = e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$, $\alpha < 0$.
3. $x(t) = A \sin(\omega_0 t)$ para $-\infty < t < \infty$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$.
4. $x(t) = A \sin(\omega_0 t) u(t)$ para $-\infty < t < \infty$, donde $u(t)$ es el escalón unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ 1, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$
5. $x[n] = \begin{cases} A \sin(\omega_k n), & \text{si } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$ para $\omega_k = 2\pi k/N$, $0 \leq k \leq N-1$.
6. $x[n] = A \sin(\omega_0 n)$ para $-\infty < n < \infty$, si $2\pi/\omega_0 = p/q \in \mathbb{Q}$.
7. $x[n] = A \sin(\omega_0 n)$ para $-\infty < n < \infty$, si $2\pi/\omega_0 \notin \mathbb{Q}$.
8. $x[n] = k$ (constante)

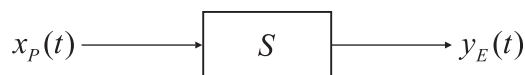
Ayuda: para resolver el inciso 5 aplique la identidad de Euler $\sin \alpha = -j(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})/2$, y tenga en cuenta que $\sum_{n=0}^{N-1} (e^{j\theta})^n = (e^{j\theta N} - 1)/(e^{j\theta} - 1)$. Para los incisos 6 y 7 puede ser más sencillo determinar una cota sobre la potencia o la energía de la señal; el cálculo exacto se puede efectuar en base a propiedades que se estudiarán en el Capítulo siguiente.

Ejercicio 11. Una señal es de *longitud finita* si $x(t) = 0$ para todo $t \notin [t_0, t_1]$ (caso continuo) o $x[n] = 0$ para todo $n \notin [n_0, n_1]$. Muestre que toda señal continua o discreta de longitud finita tiene energía finita, y potencia promedio nula.

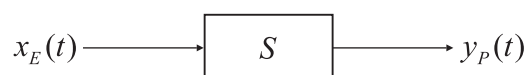
Ejercicio 12. Las entradas $x(t)$ y las salidas $y(t)$ de los sistemas de la figura pueden ser señales de potencia o de energía, y se indican con subíndices P o E , según corresponda. Los sistemas S son lineales e invariantes en el tiempo. Dé ejemplos de funciones transferencia que permitan satisfacer las cuatro relaciones indicadas entre los tipos de señales de entrada y salida.



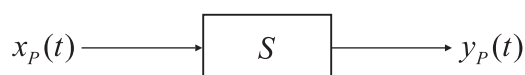
(a)



(b)



(c)



(d)