

## Series y Transformadas de Fourier

El material de estudio de este capítulo es el Capítulo 8, “The Discrete Fourier Transform” del libro de Oppenheim, A., Schaffer, R., y Buck, J., *Discrete-Time Signal Processing*, segunda edición, Prentice-Hall, Inc., 1998, pp. 541–628.

En estas notas se estudian algunos aspectos de la dualidad tiempo-frecuencia entre las señales continuas y discretas, y se incluyen algunos comentarios sobre matrices circulantes, que resultan útiles para expresar la convolución circular de sucesiones discretas (vea el Ejercicio 26).

### 4.1. Introducción

En los Capítulos ?? y ?? se discutió la representación de sucesiones y sistemas lineales e invariantes en el tiempo usando series y transformadas de Fourier. Para sucesiones de duración finita es posible desarrollar una representación alternativa, conocida como Transformada Discreta de Fourier, o, brevemente, TDF (*Discrete Fourier Transform* o DFT en inglés). Esta transformada es también una sucesión, en lugar de una función de una variable continua, y corresponde a muestras equiespaciadas en frecuencia de la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) de la señal. Además de su importancia teórica como una representación frecuencial de sucesiones, la TDF es vital en la implementación de muchos algoritmos de procesamiento de señales, debido a que se dispone de algoritmos muy eficientes para su cálculo, como se estudia en detalle en el Capítulo ??. La aplicación de la TDF para el análisis espectral se estudia en el Capítulo ??.

La derivación e interpretación de la TDF de una sucesión de longitud finita puede obtenerse de distintas maneras. En este apunte se ha elegido presentar la relación entre sucesiones periódicas y sucesiones de longitud finita. Se comenzará considerando la transformada de Fourier de tiempo discreto de sucesiones discretas periódicas, y se obtendrá una representación denominada de Series Discretas de Fourier (SDF). Aunque esta transformada tiene interés por sí misma, en general es más interesante la aplicación en la representación de señales de longitud finita. Esto se logra construyendo señales periódicas en las cuales cada período sea idéntico a la señal de longitud finita. Como se verá más adelante, la SDF de la señal periódica está relacionada con la TDF de la señal de longitud finita. Por lo tanto,

la definición de la TDF se basa en derivar la SDF para sucesiones periódicas, y estudiar las propiedades de tal representación. Luego se repiten esencialmente los mismos desarrollos asumiendo que la sucesión a representar tiene longitud finita. Este enfoque sintetiza la periodicidad inherente de la representación de la TDF que permite interpretar algunos efectos, y lograr implementaciones más eficientes.

## 4.2. Series de Fourier de sucesiones discretas periódicas

En el Capítulo 2 se encontró que una señal periódica  $\tilde{x}(t)$  de período  $T$ ,  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + rT)$  puede expresarse usando series de Fourier como

$$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j \frac{2\pi}{T} kt},$$

donde

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T \tilde{x}(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} kt} dt.$$

Parece natural extender estos resultados para una sucesión discreta  $\tilde{x}[n]$  periódica de período  $N$ ,  $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$ . Bastaría hacer los reemplazos  $t \rightarrow n$ ,  $T \rightarrow N$ ,  $\tilde{x}(t) \rightarrow \tilde{x}[n]$ , y  $\int_T \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1}$ , obteniendo

$$\tilde{x}[n] = \sum_k c_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad (4.1)$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (4.2)$$

Sin embargo, como se estudió en el Capítulo 3, una exponencial discreta de período  $N$  sólo puede tener  $N$  frecuencias distintas, de modo que la sumatoria en la ecuación de síntesis (4.1) sólo comprende  $N$  armónicos:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}.$$

Además, recordando la expresión de la transformada de Fourier de tiempo discreto,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n}$$

es evidente que (4.2) se puede escribir como

$$c_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N} k} \quad (4.3)$$

donde  $X(e^{j\omega})$  en (4.3) es la TFTD de un período  $x[n]$  de la señal periódica  $\tilde{x}[n]$ . Como  $X(e^{j\omega})$  es  $2\pi$ -periódico,  $c_k$  será una sucesión periódica de período  $N$ .

Para que las expresiones sean similares a las de la TFTD, se coloca el multiplicador  $1/N$  en la ecuación de síntesis, y se renombra  $c_k$  como  $\tilde{X}[k]$ , obteniéndose entonces el par

transformado de Fourier

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad (4.4)$$

que se conoce como *ecuación de síntesis* y

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad (4.5)$$

que se conoce como *ecuación de análisis*. Las dos ecuaciones definen la *serie discreta de Fourier* (o SDF). Usualmente, la relación entre una sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$  y su SDF  $\tilde{X}[k]$  se notará

$$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}[k],$$

o también, usando la forma de operador,

$$\tilde{X}[k] = \mathcal{F}\{\tilde{x}[n]\}.$$

La sucesión  $\tilde{X}[k]$  también es periódica de período  $N$ :  $\tilde{X}[0] = \tilde{X}[N]$ ,  $\tilde{X}[1] = \tilde{X}[N+1]$  y de manera más general,

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k+N] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} (k+N)n} = \left( \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \right) \underbrace{e^{-j \frac{2\pi}{N} Nn}}_{=1} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \tilde{X}[k] \end{aligned}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier  $\tilde{X}[k]$  pueden pensarse como una sucesión de longitud finita, dada por la ecuación (4.5) para  $k = 0, \dots, N-1$  y cero para cualquier otro valor de  $k$ , o como una sucesión periódica definida para todo  $k$  por (4.5). Las dos interpretaciones son aceptables, porque en la ecuación de síntesis (4.4) sólo son necesarios los valores de  $\tilde{X}[k]$  para  $0 \leq k \leq N-1$ . Sin embargo, la ventaja de pensar  $\tilde{X}[k]$  como una sucesión periódica es que entonces hay una dualidad entre los dominios temporal y frecuencial de la representación de Fourier de señales periódicas.

En algunos textos, la exponencial compleja  $e^{-j \frac{2\pi}{N} n}$  se representa con el símbolo  $W_N$ ,

$$W_N \doteq e^{-j \frac{2\pi}{N}},$$

de modo que las ecuaciones de síntesis (4.4) y de análisis (4.5) se notan

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}, \quad \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn},$$

respectivamente. Sin embargo, en el resto de este apunte se mantendrá el uso de la exponencial compleja.

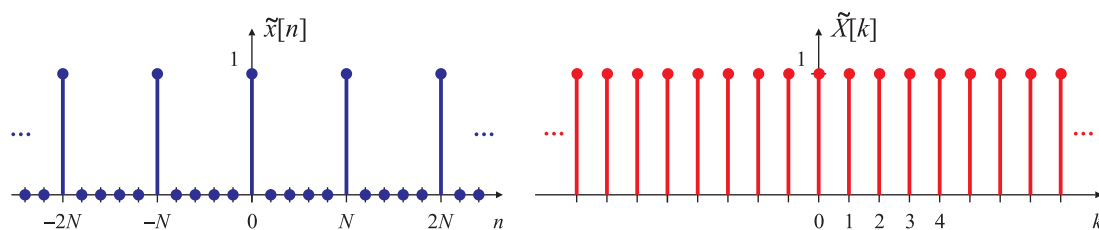


Fig. 4.1. Tren de impulsos periódico (a) y su Serie Discreta de Fourier (b).

#### EJEMPLO 4.1. Serie discreta de Fourier de un tren de impulsos periódico

Dado el tren de impulsos periódico

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = rN, \text{ donde } r \text{ es cualquier entero,} \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (4.6)$$

que se muestra en la Fig. 4.1(a), los coeficientes de su SDF pueden calcularse utilizando (4.5). Como  $\tilde{x}[n] = \delta[n]$  para  $0 \leq n < N$ , resulta sencillo encontrar que

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = e^{-j \frac{2\pi}{N} k0} = 1. \quad (4.7)$$

En este caso, la SDF  $\tilde{X}[k] = 1$  para todo  $k$ , estableciendo el par transformado

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} 1 \text{ para todo } k$$

que se muestra en la Fig. 4.1(b). □

#### EJEMPLO 4.2. La SDF de un pulso rectangular periódico

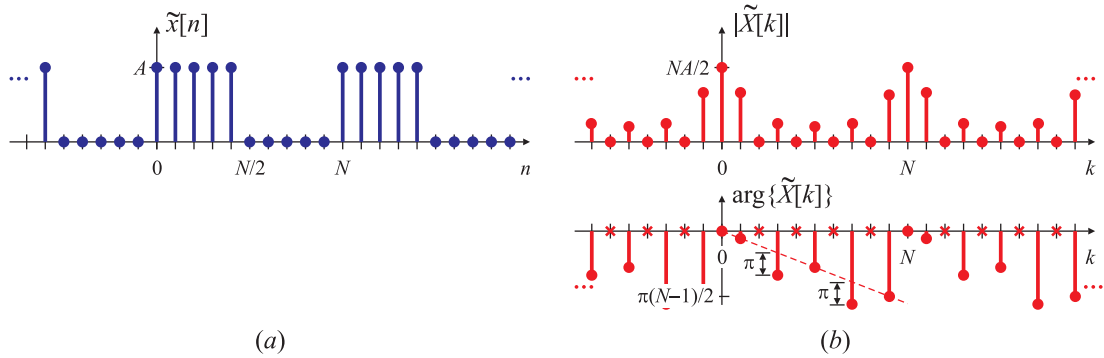
En este ejemplo, la sucesión  $\tilde{x}[n]$ , que se muestra en la Fig. 4.2(a) está formada por  $N/2$  pulsos de amplitud  $A$ , seguidos de  $N/2$  ceros, etc., y se asemeja a una onda cuadrada periódica de periodo  $N$ . Su serie discreta de Fourier se calcula como

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} A e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = A \frac{e^{-j \frac{2\pi}{N} k(N/2)} - 1}{e^{-j \frac{2\pi}{N} k} - 1}, \quad (4.8)$$

donde se utilizó la propiedad de la suma geométrica  $\sum_{n=0}^{M-1} \rho^n = (\rho^M - 1)/(\rho - 1)$ . El último miembro de (4.8) se puede escribir como

$$\tilde{X}[k] = A \frac{e^{-j \frac{2\pi}{N} k(N/2)} - 1}{e^{-j \frac{2\pi}{N} k} - 1} = A e^{-j \pi \frac{N-2}{2N} k} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\text{sen}(\pi k/N)}. \quad (4.9)$$

Esta expresión tiene la forma de un “sinc periódico” con un argumento discreto  $k$ . Cuando  $k = 0$  o cuando  $k$  es múltiplo de  $N$  (en que se anulan simultáneamente el numerador y denominador) el valor de la SDF es  $NA/2$ , como se puede verificar fácilmente usando la segunda sumatoria de (4.8). En la Fig. 4.2(b) se muestran el módulo y la fase de la SDF  $\tilde{X}[k]$  para  $N = 10$ . □



**Fig. 4.2.** Pulso rectangular periódico  $\tilde{x}[n]$  (a) y su Serie Discreta de Fourier  $\tilde{X}[k]$  en módulo y fase (b).

#### 4.2.1. Verificación del par transformado (4.4) - (4.5)

Las expresiones (4.4) y (4.5) fueron obtenidas en base a analogías entre una sucesión temporal periódica *discreta* y una señal temporal periódica *continua*. Para verificar que las dos forman un par transformado, se puede reemplazar (4.5) en (4.4) y comprobar que se obtiene la misma sucesión. Por ejemplo, partiendo de (4.4)

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad (4.10)$$

la idea es reemplazar  $\tilde{X}[k]$  por (4.5). Sin embargo, al hacer este reemplazo debe tenerse en cuenta que el índice  $n$  en (4.5) es una variable interna y no tiene nada que ver con la variable  $n$  en (4.10); para evitar confusiones, se cambiará  $n$  por  $r$  en (4.5). Además, en (4.10) se indica  $\hat{x}[n]$  en lugar de  $\tilde{x}[n]$  porque el objetivo del desarrollo es demostrar precisamente que  $\hat{x}[n] = \tilde{x}[n]$  para todo  $n$ . Entonces,

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r] e^{-j \frac{2\pi}{N} kr} \right) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}.$$

Intercambiando el orden de las sumatorias, se tiene que

$$\hat{x}[n] = \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( e^{-j \frac{2\pi}{N} kr} \right) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(n-r)}. \quad (4.11)$$

Se mostrará en la siguiente sección que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(n-r)} = \sum_{\ell} \delta[n - r - \ell N] = \begin{cases} 1, & \text{si } n - r = \ell N = \text{múltiplo de } N \\ & (\text{donde } \ell \text{ es cualquier entero}), \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que no es otra cosa que el tren de impulsos periódicos del Ejemplo 4.1, que indicaremos como  $p_N[n]$ , desplazado en  $r$  muestras. Se tiene entonces que

$$\hat{x}[n] = \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r] p_N(n - r). \quad (4.12)$$

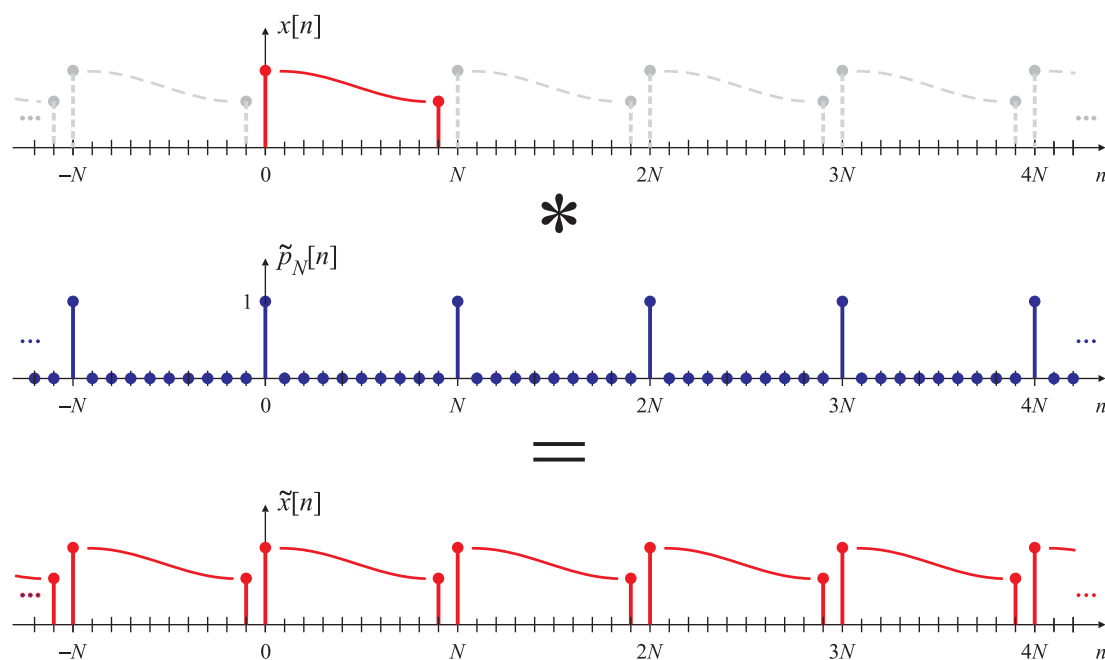


Fig. 4.3. Interpretación gráfica de la ecuación (4.13).

En el rango de la sumatoria ( $0 \leq r \leq N-1$ ),  $p_N(n-r) = 1$  sólo cuando  $r = n$ , y entonces

$$\hat{x}[n] = \tilde{x}[r]|_{r=n} = \tilde{x}[n],$$

lo que muestra que (4.4) y (4.5) forman un par transformado.

La ecuación (4.12) también puede pensarse como la convolución de *un período* de  $\tilde{x}[n]$  (observe los extremos de la sumatoria). Si el período de  $\tilde{x}[n]$  comprendido entre 0 y  $N-1$  se nota  $x[n]$  (sin el “rulito”), es decir

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

es claro que (4.12) se puede escribir como

$$\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r] p_N(n-r) = (x * p_N)[n], \quad (4.13)$$

y es claro que

$$(x * p_N)[n] = \tilde{x}[n]$$

como se muestra en la Fig. 4.3.

#### 4.2.2. Análisis de la sumatoria $\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

El Ejemplo 4.1 permite obtener una relación muy interesante: sustituyendo (4.6) en la ecuación de síntesis (4.4), se tiene que

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Esta relación muestra que un tren periódico de pulsos puede representarse como una suma finita de sucesiones exponenciales complejas que tienen la misma magnitud y fase, y que se suman para dar “1” en todos los enteros múltiplos de  $N$ , y “0” para los demás. Esta sumatoria es muy interesante, y merece un análisis detallado. Notando

$$p_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.14)$$

se puede encontrar una expresión cerrada teniendo en cuenta que  $\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k = (\rho^N - 1)/(\rho - 1)$ , donde  $\rho = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ :

$$p_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}nN} - 1}{e^{j\frac{2\pi}{N}n} - 1} = \frac{1}{N} \frac{e^{j2\pi n} - 1}{e^{j\frac{2\pi}{N}n} - 1}. \quad (4.15)$$

Como  $n$  es un número entero, la exponencial en el numerador es idénticamente igual a 1,  $e^{j2\pi n} = 1$ , para cualquier valor de  $n$ . Por lo tanto, el numerador se **anula** para todo  $n$ . Sin embargo, para los  $n$  que son múltiplos de  $N$ , también se anula el denominador. Para calcular el valor de la expresión en este caso es conveniente estudiar (4.14): es fácil ver que si  $n$  es múltiplo de  $N$ , la exponencial vale 1, y entonces

$$p_N[n]|_{n=rN=\text{múltiplo de } N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}krN} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = \frac{1}{N} N = 1. \quad (4.16)$$

En consecuencia, se tiene que

$$p_N[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = rN = \text{múltiplo de } N \text{ (donde } r \text{ es cualquier entero),} \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y también puede escribirse como

$$p_N[n] = \sum_r \delta[n - rN]$$

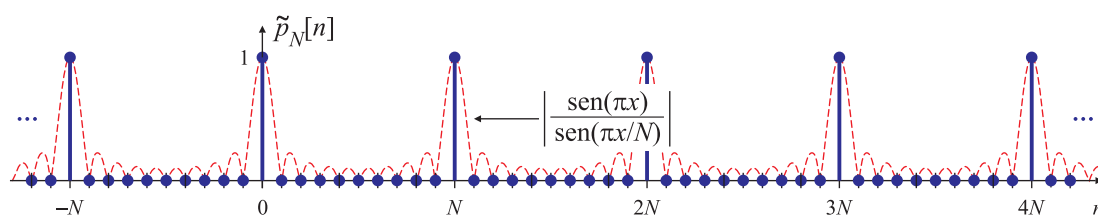
que no es otra cosa que el tren de impulsos periódicos del Ejemplo 4.1:

$$p_N[n] = \sum_{\ell} \delta[n - \ell N] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Otra expresión alternativa puede obtenerse a partir de (4.15). Sacando factor común  $e^{j2\pi \frac{n}{2}}$  en el numerador, y  $e^{j\frac{2\pi}{N} \frac{n}{2}}$  en el denominador, se tiene que

$$p_N[n] = \frac{1}{N} \frac{e^{j2\pi n} - 1}{e^{j\frac{2\pi}{N}n} - 1} = \frac{1}{N} \frac{e^{j2\pi \frac{n}{2}} \left( e^{j2\pi \frac{n}{2}} - e^{-j2\pi \frac{n}{2}} \right)}{e^{j\frac{2\pi}{N} \frac{n}{2}} \left( e^{j\frac{2\pi}{N} \frac{n}{2}} - e^{-j\frac{2\pi}{N} \frac{n}{2}} \right)} = \frac{e^{j\pi \frac{N-1}{N}n}}{N} \frac{\sin(\pi n)}{\sin(\pi n/N)}$$

que es la expresión del “sinc periódico” estudiado en el Capítulo 3, aunque en este caso con un argumento entero. En esta expresión, el numerador se anula para todo  $n$  (el seno de múltiplos de  $\pi$  es cero) pero para los  $n$  que son múltiplos de  $N$  se anulan simultáneamente el numerador y el denominador, y el valor de la función en ese punto se puede calcular



**Fig. 4.4.** El tren de impulsos periódico  $p_N[n]$  y el módulo del sinc periódico  $|\text{sen}(\pi x)/\text{sen}(\pi x/N)|$ .

como en (4.16). La relación entre el tren de impulsos periódico y el sinc periódico se representa en la Fig. 4.4. En consecuencia, el tren de impulsos periódico  $p_N[n]$  se puede escribir alternativamente como

$$p_N[n] = \sum_{\ell} \delta[n - \ell N] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{e^{j\pi\frac{N-1}{N}n}}{N} \frac{\text{sen}(\pi n)}{\text{sen}(\pi n/N)}. \quad (4.17)$$

Esta identidad aparecerá frecuentemente en algunos de los desarrollos de este capítulo.

#### 4.2.2.1. Interpretación gráfica del tren de impulsos periódico

La expresión (4.17) puede interpretarse gráficamente teniendo en cuenta que el sumando  $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$  representa un versor de módulo 1 y fase  $2\pi/N$ , y en consecuencia las diferentes potencias de ese versor que aparecen en la sumatoria son rotaciones de ese versor. Por ejemplo,  $e^{j\frac{2\pi}{N}0} = 1$  es un versor que coincide con el eje  $x$ ;  $e^{j\frac{2\pi}{N}1}$  es un versor de módulo unitario que forma un ángulo de  $2\pi/N$  con el eje  $x$ , etc. En la Fig. 4.5 se muestran los versores involucrados en la sumatoria

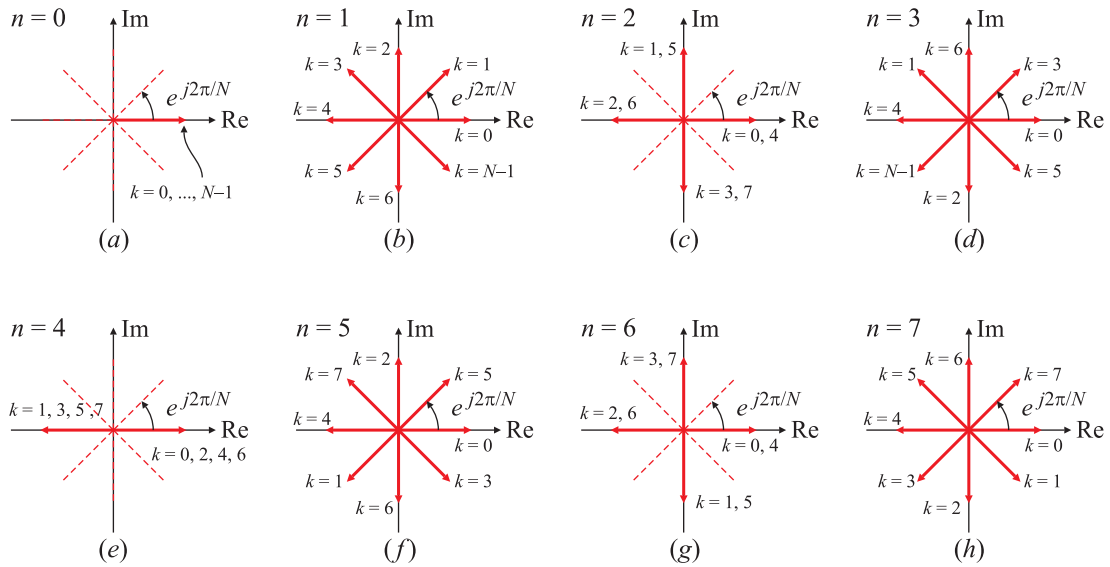
$$p_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

para distintos valores de  $n$ , para el caso  $N = 8$ . Por ejemplo, cuando  $n = 0$ , los  $N$  versores de la sumatoria son el versor unitario orientado en la dirección positiva del eje  $x$  [Fig. 4.5(a)] y por lo tanto la suma de todos ellos da  $N$ . Cuando  $n = 1$ , los fasores que intervienen en la suma son  $1, e^{j\frac{2\pi}{N}}, e^{j\frac{2\pi}{N}2}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)}$ , como se representa en la Fig. 4.5(b). Es evidente que la suma de todos estos versores se anula. Lo mismo ocurre cuando  $n = 2$  [Fig. 4.5(c)] aunque en este caso los únicos versores que aparecen en la sumatoria son  $1, e^{j\pi/2}, -1$  y  $e^{-j\pi/2}$ . Nuevamente, la suma de todos estos versores es cero. El lector puede revisar, con la ayuda de la Fig. 4.5, los casos en que  $n = 3, 4, \dots, N-1$ .

Esta interpretación muestra que el signo del exponente no cambia el resultado, ya que sólo se cambia en sentido en que se suman los versores, y por lo tanto,

$$p_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\pm j\frac{2\pi}{N}kn}.$$





**Fig. 4.5.** Interpretación gráfica de  $p_N[n] = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$  para distintos valores de  $n$  ( $N = 8$ ).

#### EJEMPLO 4.3. Serie discreta de Fourier de una exponencial compleja

Sea  $\tilde{x}[n]$  una sucesión exponencial compleja:

$$\tilde{x}[n] = Ae^{j\omega_0 n}.$$

Para que sea una sucesión periódica de período  $N$ , la frecuencia  $\omega_0$  tiene que ser una fracción racional de  $2\pi$ :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}k_0,$$

donde  $0 \leq k_0 \leq N-1$ . La transformada de Fourier de esta sucesión es

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} Ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} Ae^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)n} \quad (4.18)$$

La última sumatoria del miembro derecho de (4.18) tiene la forma de (4.17), pero en este caso la sumatoria es sobre el índice  $n$  y no sobre  $k$ . Por lo tanto,

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} Ae^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)n} = AN \sum_r \delta[k - k_0 - rN] = \begin{cases} AN, & \text{si } k = k_0 + rN, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De esta forma, se puede establecer el par transformado de Fourier

$$Ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n} \xLeftrightarrow{\text{SDF}} AN \sum_r \delta[k - k_0 - rN],$$

que se representa gráficamente en la Fig. 4.6. □

### 4.3. Propiedades de la Serie Discreta de Fourier

Al igual que con las series y transformadas de Fourier de señales de tiempo continuo, las propiedades de las series discretas de Fourier son muy importantes y útiles en el campo de

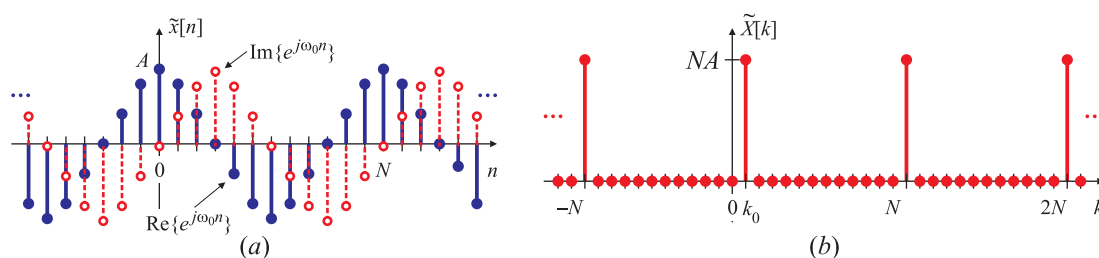


Fig. 4.6. La señal  $\tilde{x}[n] = A e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 n}$  (a) y su SDF  $\tilde{X}[k]$  (b).

procesamiento digital de señales. En esta sección se resumen algunas de las propiedades más importantes, que en principio son las mismas que las estudiadas para la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) del Capítulo ?? . Sin embargo, el hecho de que las señales temporales  $\tilde{x}[n]$  y sus transformadas  $\tilde{X}[k]$  sean periódicas introducen algunas diferencias.

### 4.3.1. Linealidad

Dadas dos sucesiones periódicas  $\tilde{x}_1[n]$  y  $\tilde{x}_2[n]$ , ambas de período  $N$ , tal que

$$\tilde{x}_1[n] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}_1[k],$$

y

$$\tilde{x}_2[n] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}_2[k],$$

la propiedad de linealidad establece que la combinación lineal de las entradas  $\tilde{x}_1[n]$  y  $\tilde{x}_2[n]$  tiene como SDF la combinación lineal de las SDF de cada una de ellas. En símbolos,

$$a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k],$$

donde  $a, b$  son números complejos. La propiedad de linealidad se puede deducir aplicando las ecuaciones de análisis y síntesis (4.4) y (4.5), y queda como ejercicio para el lector.

#### EJEMPLO 4.4. SDF de un coseno y de un seno

Para calcular la SDF de la señal periódica  $\tilde{x}[n] = A \cos[(2\pi k_0/N)n]$ , de frecuencia  $\omega_0 = 2\pi k_0/N$ , es conveniente expresar el coseno como una suma de exponenciales:

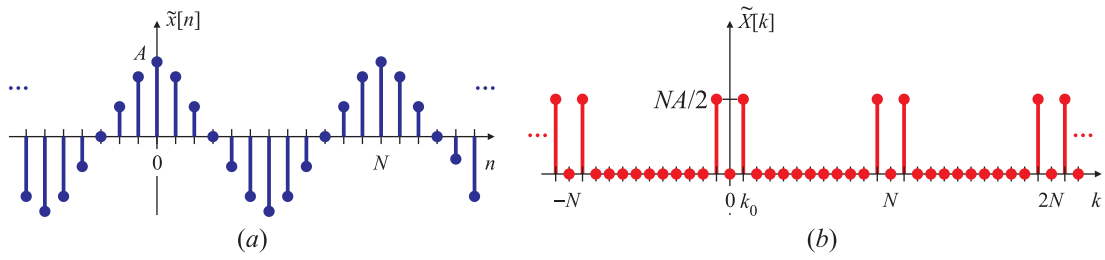
$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &= A \cos[(2\pi k_0/N)n] = \frac{A}{2} e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j \frac{2\pi}{N} k_0 n} \\ &= \frac{A}{2} \tilde{x}_1[n] + \frac{A}{2} \tilde{x}_2[n], \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde

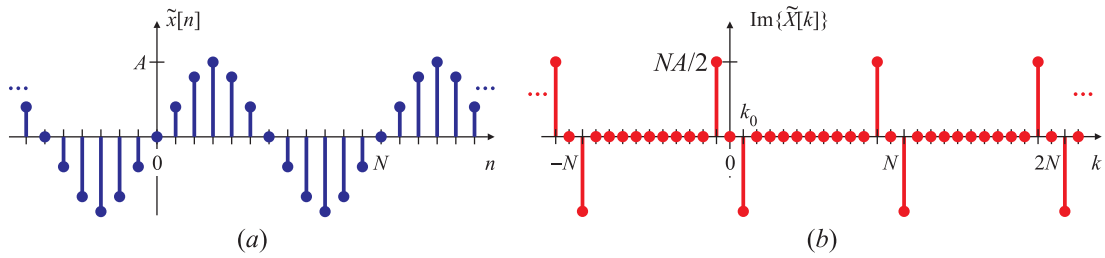
$$\tilde{x}_1[n] = e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 n}, \quad \tilde{x}_2[n] = e^{-j \frac{2\pi}{N} k_0 n} = e^{j \frac{2\pi}{N} (-k_0)n}$$

La transformada de la exponencial  $\tilde{x}_1[n]$  ya fue calculada en el Ejemplo 4.3:

$$\tilde{X}_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (k-k_0)n} = N \sum_r \delta[k - k_0 - rN] = \begin{cases} N, & \text{si } k = k_0 + rN, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$



**Fig. 4.7.** La señal  $\tilde{x}[n] = A \cos[(2\pi k_0/N)n]$  (a) y su SDF  $\tilde{X}[k]$  (b).



**Fig. 4.8.** La señal  $\tilde{x}[n] = A \text{sen}[(2\pi k_0/N)n]$  (a) y su SDF  $\tilde{X}[k]$  (b).

De manera similar, se puede encontrar que la SDF de  $\tilde{x}_2[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}(-k_0)n}$  es

$$\tilde{X}_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k+k_0)n} = N \sum_r \delta[k+k_0-rN] = \begin{cases} N, & \text{si } k = -k_0 + rN, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Aplicando la propiedad de linealidad a (4.19), se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \frac{A}{2} \tilde{X}_1[k] + \frac{A}{2} \tilde{X}_2[k] \\ &= \frac{NA}{2} \sum_r (\delta[k-k_0-rN] + \delta[k+k_0-rN]) \end{aligned}$$

lo que permite establecer el par transformado

$$A \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_0n\right) \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \frac{NA}{2} \sum_r (\delta[k-k_0-rN] + \delta[k+k_0-rN]),$$

que se representa en la Fig. 4.7 para  $N = 10$  y  $k_0 = 1$ . Queda como ejercicio para el lector verificar el par transformado

$$A \text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}k_0n\right) \xLeftrightarrow{\text{SDF}} j \frac{NA}{2} \sum_r (-\delta[k-k_0-rN] + \delta[k+k_0-rN]).$$

mostrado en la Fig. 4.8 para  $N = 10$  y  $k_0 = 1$ . □

### 4.3.2. Desplazamiento temporal y frecuencial

Si  $\tilde{x}[n]$  es una sucesión periódica con SDF  $\tilde{X}[k]$ , entonces  $\tilde{x}[n - n_0]$  es una sucesión desplazada en  $n_0$  muestras (a la derecha si  $n_0$  es positivo). Su SDF está dada por

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}[n - n_0]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n - n_0] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

haciendo un cambio de variables  $s = n - n_0$ , se tiene que

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}[n - n_0]\} = \sum_{s=-n_0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[s] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(s+n_0)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k} \sum_{s=-n_0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[s] e^{-j\frac{2\pi}{N}ks}. \quad (4.20)$$

La última sumatoria no parece coincidir exactamente con  $\tilde{X}[k]$  en (4.5). Sin embargo, debido a la  $N$ -periodicidad tanto de  $\tilde{x}[n]$  como de  $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$  ambas expresiones coinciden. Suponiendo arbitrariamente que  $n_0$  es positivo, la última sumatoria de (4.20) se puede partir en los términos negativos y positivos de  $s$ :

$$\sum_{s=-n_0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[s] e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} = \sum_{s=0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[s] e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} + \sum_{s=-n_0}^{-1} \tilde{x}[s] e^{-j\frac{2\pi}{N}ks}.$$

Observando que  $\tilde{x}[s] = \tilde{x}[N + s]$  y que  $e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N+s)}$  se tiene que

$$\sum_{s=-n_0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[s] e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} = \sum_{s=0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[s] e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} + \sum_{s=-n_0}^{-1} \tilde{x}[s + N] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(s+N)}.$$

Haciendo el cambio de variables  $m = N + s$ ,

$$\sum_{s=-n_0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[s] e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} = \sum_{s=0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[s] e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} + \sum_{m=N-n_0}^{N-1} \tilde{x}[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km}.$$

En esta expresión, la primer sumatoria del miembro derecho son los primeros  $N - n_0$  términos de la ecuación de análisis (4.5), y la segunda sumatoria los últimos  $n_0$  términos, de modo que

$$\sum_{s=-n_0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[s] e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} = \sum_{s=0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[s] e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} + \sum_{m=N-n_0}^{N-1} \tilde{x}[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}[k].$$

Por lo tanto, reemplazando en (4.20), se encuentra que

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}[n - n_0]\} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k} \tilde{X}[k],$$

o bien

$$\tilde{x}[n - n_0] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k} \tilde{X}[k]. \quad (4.21)$$

Debido a la similitud de las ecuaciones de síntesis y análisis (4.4) y (4.5), es rutina verificar que la propiedad de **desplazamiento frecuencial**, o de **modulación**, resulta

$$e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n} \tilde{x}[n] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}[k - k_0]. \quad (4.22)$$

Nótese la diferencia en el signo de los exponentes de las expresiones (4.21) y (4.22).

Como tanto la sucesión  $\tilde{x}[n]$  como su SDF  $\tilde{X}[k]$  son  $N$ -periódicas, un desplazamiento por un determinado número de períodos más una fracción,  $n_1 = rN + n_0$ , donde  $r$  es entero y  $0 \leq n_0 \leq N - 1$  (respectivamente,  $k_1 = mN + k_0$ , donde  $m$  es entero y  $0 \leq k_0 \leq N - 1$ ) es indistinguible del desplazamiento por la fracción  $n_0$  ( $k_0$ ).

**EJEMPLO 4.5. Desplazamiento temporal**

Se mostró en el Ejemplo 4.1 que la transformada de un tren de impulsos periódicos es una constante:

$$\tilde{p}_N[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} 1 \text{ para todo } k$$

como se muestra en la Fig. 4.1. Sea  $\tilde{x}[n]$  el tren de impulsos desplazado en  $n_0$  muestras:

$$\tilde{x}[n] = \tilde{p}_N[n - n_0] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0 - rN]$$

representado en la Fig. 4.9(a). Su Serie Discreta de Fourier es

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0 - rN] \right) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}.$$

En el intervalo  $0 \leq n \leq N-1$ , sólo aparece un impulso de  $\tilde{x}[n]$  (el que corresponde a  $r = 0$  en  $\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0 - rN]$ ). Por lo tanto,

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0 - rN] \right) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n - n_0] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = e^{-j \frac{2\pi}{N} n_0 k}.$$

En este caso, como la SDF es compleja, es habitual calcular el módulo y la fase:

$$|\tilde{X}[k]| = 1 \text{ para todo } k, \quad \arg\{\tilde{X}[k]\} = -\frac{2\pi}{N} n_0 k,$$

graficada en la Fig. 4.9(b). Naturalmente, este resultado es el mismo que resulta de aplicar la propiedad de desplazamiento temporal (4.21).  $\square$

**EJEMPLO 4.6. Desplazamiento frecuencial**

En el Ejemplo 4.3 se mostró que la sucesión  $\tilde{x}_1[n] = A e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 n}$  tiene una Serie Discreta de Fourier  $\tilde{X}_1[k] = AN \sum_r \delta[k - k_0 - rN]$ . Si  $\tilde{X}_2[k]$  la sucesión frecuencial correspondiente a un desplazamiento de  $\tilde{X}_1[k]$  en  $k_0$  muestras a la izquierda, es decir

$$\tilde{X}_2[k] = \tilde{X}_1[k + k_0],$$

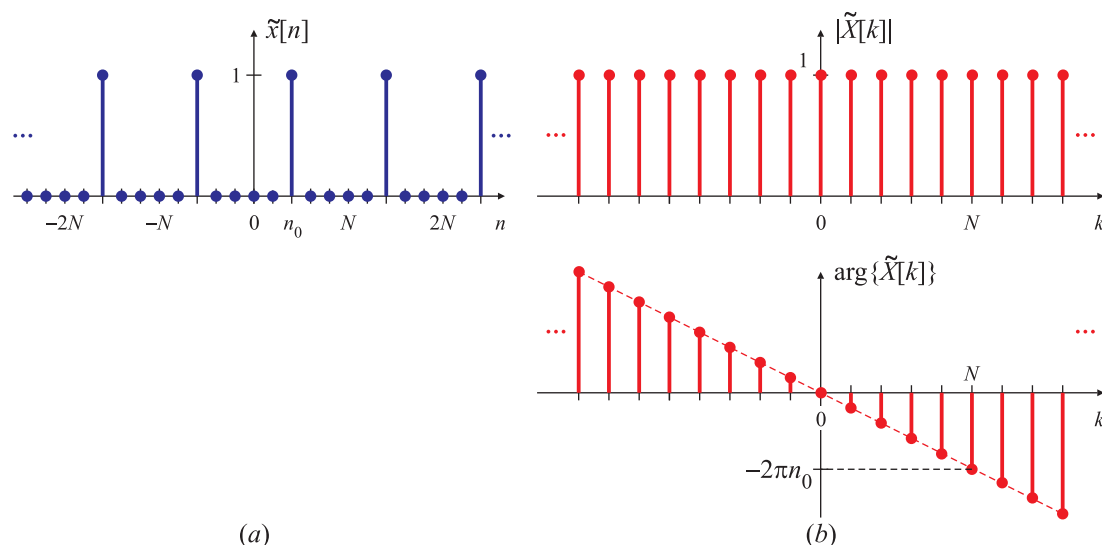
es claro que

$$\tilde{X}_2[k] = \tilde{X}_1[k + k_0] = AN \sum_r \delta[k + k_0 - k_0 - rN] = AN \sum_r \delta[k - rN]$$

como se muestra en la Fig. 4.10(b). La sucesión correspondiente a esta SDF es

$$\tilde{x}_2[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( AN \sum_r \delta[k - rN] \right) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = A \sum_{k=0}^{N-1} \delta[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = A$$

para todo  $n$ , representado en la Fig. 4.10(a). El paso de la segunda a la última sumatoria resulta de observar que de los infinitos impulsos de  $\sum_r \delta[k - rN]$ , en el intervalo  $0 \leq k \leq N-1$  en el que se



**Fig. 4.9.** Propiedad de desplazamiento temporal: sucesión  $\tilde{p}_N[n - n_0]$  (a) y su SDF  $\tilde{X}[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k}$  graficada en módulo y fase (b).

calcula la ecuación de síntesis sólo aparece el impulso correspondiente a  $k = 0$ . Este cálculo permite establecer el par transformado

$$\tilde{x}[n] = A \xleftrightarrow{\text{SDF}} AN \sum_r \delta[k - rN] = AN p_N[k].$$

Este resultado también puede obtenerse aplicando la propiedad de desplazamiento frecuencial: dado el par transformado

$$\tilde{x}_1[n] = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0n} \xleftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}_1[k] = AN \sum_r \delta[k - k_0 - rN]$$

si se define

$$\tilde{X}_2[k] = \tilde{X}_1[k - (-k_0)]$$

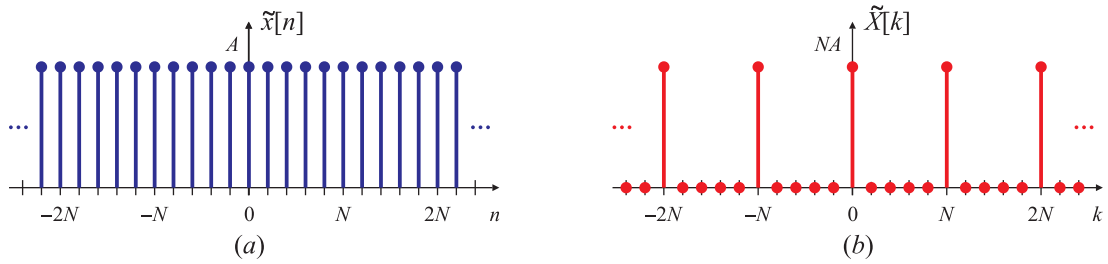
la propiedad de desplazamiento frecuencial establece que

$$\tilde{x}_2[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}(-k_0)n} \tilde{x}_1[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}(-k_0)n} \left( Ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0n} \right) = A,$$

que naturalmente coincide con el calculado por definición.  $\square$

### 4.3.3. Dualidad

Debido a la fuerte similitud de las ecuaciones de análisis y síntesis de la Serie Discreta de Fourier, existe una dualidad entre los dominios temporal y frecuencial debido a que tanto la variable temporal  $n$  como la frecuencial  $k$  son números enteros. En el caso de la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) no se puede establecer una dualidad porque la función temporal y su transformada son “objetos” muy diferentes: mientras que en el dominio tiempo se trabaja con sucesiones discretas, en el dominio frecuencial se tienen funciones periódicas continuas en la variable frecuencial  $\omega$ .



**Fig. 4.10.** Propiedad de desplazamiento frecuencial: la sucesión  $\tilde{x}[n] = A$  (a) y su SDF  $\tilde{X}[k] = \sum_r A\delta[k - rN]$  (b).

De las ecuaciones (4.4) y (4.5) se observa que las ecuaciones de síntesis y de análisis sólo difieren en el factor  $1/N$  y en el signo del exponente en  $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ . Además, una sucesión periódica discreta y su SDF son el mismo tipo de funciones: las dos son sucesiones periódicas discretas. Específicamente, teniendo en cuenta el factor  $1/N$  y la diferencia en el signo del exponente, resulta de (4.4) que

$$N\tilde{x}[-n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.23)$$

o, intercambiado  $n$  por  $k$  en (4.23)

$$N\tilde{x}[-k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.24)$$

Se observa que (4.24) es similar a (4.5): en otras palabras, la sucesión de coeficientes de la SDF de la sucesión temporal  $\tilde{X}[n]$  es  $N\tilde{x}[-k]$ , es decir, la sucesión periódica original reflejada y multiplicada por  $N$ . Esta propiedad de dualidad puede notarse de la siguiente manera: si

$$\tilde{x}[n] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}[k], \quad (4.25)$$

entonces

$$\tilde{X}[n] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} N\tilde{x}[-k]. \quad (4.26)$$

#### EJEMPLO 4.7. Propiedad de dualidad

Los Ejemplos 4.1 y 4.6 permiten demostrar la propiedad de dualidad. En el Ejemplo 4.1 se encontró que la SDF de un tren de impulsos es una constante:

$$\tilde{x}_1[n] = A \sum_r \delta[n - rN] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}_1[k] = A \text{ para todo } k,$$

como se muestra en la Fig. 4.11(a)-(c), mientras que en el Ejemplo 4.6 se demostró que la transformada de una constante en un tren de impulsos:

$$\tilde{x}_2[n] = A \text{ para todo } n \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}_2[k] = NA \sum_r \delta[k - rN].$$

Es evidente que  $\tilde{x}_2[n] = \tilde{X}_1[n]$ , y entonces la propiedad de dualidad indica que  $\tilde{X}_2[k] = N\tilde{x}_1[-k] = NA \sum_r \delta[k - rN]$ , tal como se representa en la Fig. 4.11(b)-(d).  $\square$

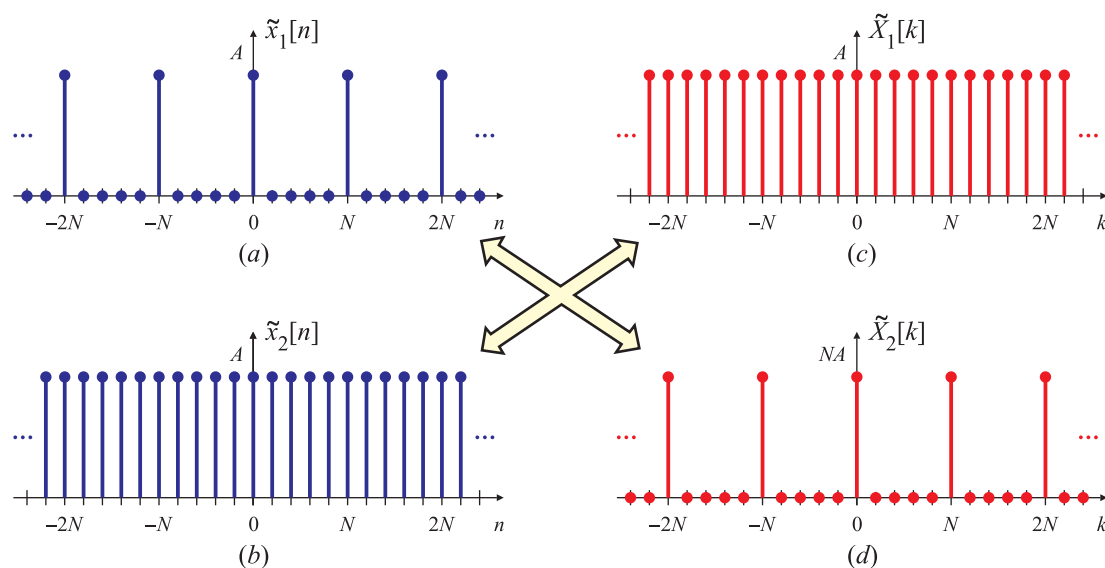


Fig. 4.11. Propiedad de dualidad.

En el ejemplo anterior no se nota el efecto de reflexión porque todas las sucesiones son simétricas respecto al eje de tiempos o de frecuencias. Este no es el caso del siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 4.8. Propiedad de dualidad

En el Ejemplo 4.4 se mostró el par transformado

$$\tilde{x}_1[n] = A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N} k_0 n \right) \quad \xleftrightarrow{\text{SDF}} \quad \tilde{X}_1[k] = j \frac{NA}{2} \sum_r (-\delta[k - k_0 - rN] + \delta[k + k_0 - rN]),$$

que se muestra en la Fig. 4.12(a)-(c), donde se supone que  $k_0 > 0$ . Si se define  $\tilde{x}_2[n]$  como el tren de impulsos periódico complejo

$$\tilde{x}_2[n] = \tilde{X}_1[n] = \tilde{X}_1[k] \Big|_{k=n} = j \frac{NA}{2} \sum_r (-\delta[n - k_0 - rN] + \delta[n + k_0 - rN]),$$

mostrado en la Fig. 4.12(b), entonces

$$\tilde{X}_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( j \frac{NA}{2} \sum_r (-\delta[n - k_0 - rN] + \delta[n + k_0 - rN]) \right) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Como en el rango  $0 \leq n \leq N-1$  de la sumatoria externa sólo intervienen los impulsos  $\delta[n - k_0]$  y  $\delta[n - k_0 + N] = \delta[n - (N - k_0)]$ , correspondientes a  $r = 0$  y  $r = -1$  de la sumatoria interna, resulta que

$$\tilde{X}_2[k] = j \frac{NA}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (-\delta[n - k_0] + \delta[n - (N - k_0)]) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = j \frac{NA}{2} \left( -e^{-j \frac{2\pi}{N} k_0 k} + e^{-j \frac{2\pi}{N} (N - k_0) k} \right).$$

Debido a la periodicidad de la exponencial compleja,

$$e^{-j \frac{2\pi}{N} (N - k_0) k} = \underbrace{e^{-j \frac{2\pi}{N} Nk}}_{=1} e^{-j \frac{2\pi}{N} (-k_0) k} = e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 k}.$$



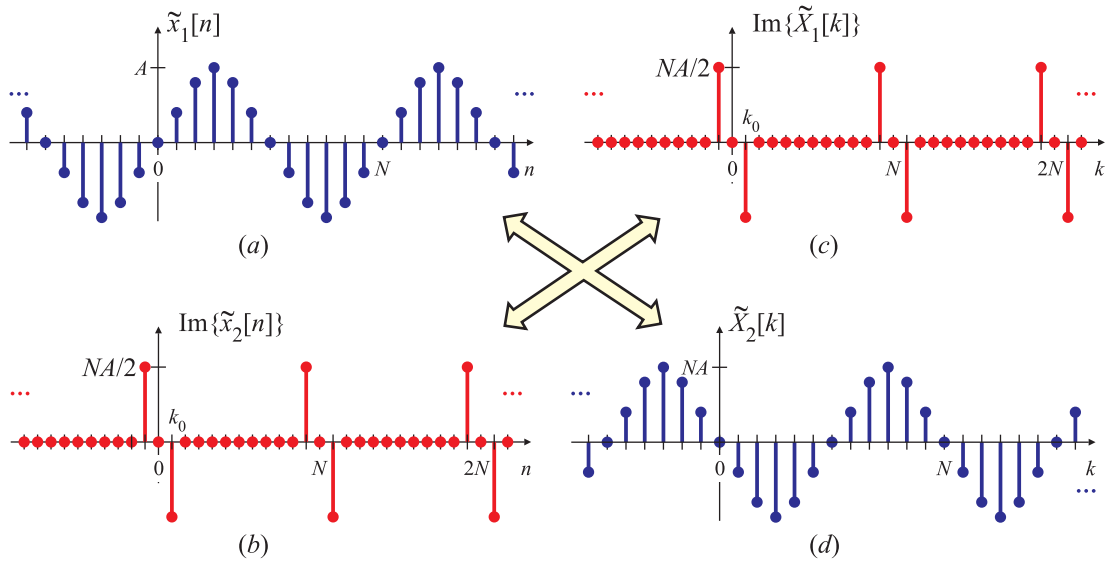


Fig. 4.12. Propiedad de dualidad.

Por lo tanto

$$\tilde{X}_2[k] = j \frac{NA}{2} \underbrace{\left( -e^{-j \frac{2\pi}{N} k_0 k} + e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 k} \right)}_{2j \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N} k_0 k\right)}$$

de modo que

$$\tilde{X}_2[k] = -NA \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N} k_0 k\right) = NA \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{N} k_0 (-k)\right],$$

que se grafica en la Fig. 4.12(d). Se verifica entonces que

$$\tilde{X}_2[k] = N \tilde{x}_1[-n] \big|_{n=k} = N \tilde{x}_1[-k]$$

como asegura la propiedad de dualidad.  $\square$

#### 4.3.4. Propiedades de simetría

Las propiedades de simetría de la Serie Discreta de Fourier son similares a las de la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto del comienzo de la Sección ??, y se listan en la Tabla 4.1. Las demostraciones son muy similares a las desarrolladas en el Capítulo ??, aunque en algunos casos puede ser necesario aplicar ideas parecidas a las usadas en la Sección 4.3.2 en la demostración de la propiedad de desplazamiento temporal.

#### 4.3.5. Convolución periódica

Sean  $\tilde{x}_1[n]$  y  $\tilde{x}_2[n]$  dos sucesiones periódicas de período  $N$ , y  $\tilde{X}_1[k]$ ,  $\tilde{X}_2[k]$  sus Series Discretas de Fourier. Si se forma el producto

$$\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]$$

**Tabla 4.1.** Propiedades de simetría de la Serie Discreta de Fourier.

Propiedad	Sucesión $\tilde{x}[n]$	Serie discreta de Fourier $\tilde{X}[k]$
1	$\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
2	$\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
3	$\text{Re}\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k] = \frac{1}{2} (\tilde{X}[k] + \tilde{X}^*[-k])$
4	$j \text{Im}\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_o[k] = \frac{1}{2} (\tilde{X}[k] - \tilde{X}^*[-k])$
5	$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2} (\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n])$	$\tilde{X}_R[k] = \text{Re}\{\tilde{X}[k]\}$
6	$\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2} (\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n])$	$j\tilde{X}_I[k] = j \text{Im}\{\tilde{X}[k]\}$
<i>Las siguientes propiedades se aplican sólo cuando <math>\tilde{x}[n]</math> es real</i>		
7	Cualquier $\tilde{x}[n]$ real	$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k]$
8	Cualquier $\tilde{x}[n]$ real	$\tilde{X}_R[k] = \text{Re}\{\tilde{X}[k]\} = \text{Re}\{\tilde{X}[-k]\} = \tilde{X}_R[-k]$
9	Cualquier $\tilde{x}[n]$ real	$\tilde{X}_I[k] = \text{Im}\{\tilde{X}[k]\} = -\text{Im}\{\tilde{X}[-k]\} = -\tilde{X}_I[-k]$
10	Cualquier $\tilde{x}[n]$ real	$ \tilde{X}[k]  =  \tilde{X}[-k] $
11	Cualquier $\tilde{x}[n]$ real	$\arg\{\tilde{X}[k]\} = -\arg\{\tilde{X}[-k]\}$
12	$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2} (\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n])$	$\tilde{X}_R[k] = \text{Re}\{\tilde{X}[k]\}$
13	$\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2} (\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n])$	$j\tilde{X}_I[k] = j \text{Im}\{\tilde{X}[k]\}$

la sucesión periódica  $\tilde{x}_3[n]$  cuya Serie Discreta de Fourier tiene coeficientes  $\tilde{X}_3[k]$  es

$$\tilde{x}_3[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_3[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Reemplazando por ejemplo  $\tilde{X}_1[k]$  por la ecuación de análisis,

$$\tilde{X}_1[k] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}_1[\ell] e^{-j\frac{2\pi}{N}k\ell}$$

(donde se utilizó la variable de suma  $\ell$  para no confundir con el valor de  $n$  donde se está calculando  $\tilde{x}_3[n]$ ) se tiene

$$\tilde{x}_3[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}_1[\ell] e^{-j\frac{2\pi}{N}k\ell} \right) \tilde{X}_2[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Intercambiando el orden de las sumatorias resulta

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}_1[\ell] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2[k] e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-\ell)}.$$

La sumatoria interna es la ecuación de síntesis de la sucesión  $\tilde{x}_2[n]$  pero desplazada en  $\ell$  muestras:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2[k] e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-\ell)} = \tilde{x}_2[n - \ell],$$

y por lo tanto

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}_1[\ell] \tilde{x}_2[n - \ell]. \quad (4.27)$$

Si en lugar de reemplazar  $\tilde{X}_1[k]$  por la ecuación de análisis se hubiese reemplazado  $\tilde{X}_2[k]$ , se hubiera obtenido

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n - \ell] \tilde{x}_2[\ell]. \quad (4.28)$$

Las expresiones (4.27) y (4.28) son muy similares a las de la suma convolución del Capítulo ?? . Esas expresiones involucran la suma de productos de  $\tilde{x}_1[\ell]$  con  $\tilde{x}_2[n - \ell]$  que es una versión invertida en tiempo y desplazada de  $\tilde{x}_2[\ell]$ , tal como en la convolución discreta aperiódica. Sin embargo, en (4.27) y (4.28) todas las sucesiones son periódicas con período  $N$ , y la sumatoria sólo se lleva a cabo sobre un período de las señales. Una convolución de la forma (4.27) o (4.28) se conoce como *convolución periódica*, y se nota de manera similar a la convolución:

$$(\tilde{x}_1 * \tilde{x}_2)[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}_1[\ell] \tilde{x}_2[n - \ell] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n - \ell] \tilde{x}_2[\ell]. \quad (4.29)$$

A pesar de utilizar el mismo símbolo “\*” para indicar la convolución “normal” y la convolución periódica, no debería haber ninguna confusión entre una y otra porque las funciones intervinientes son de distinta clase: unas son sucesiones aperiódicas, y otras son sucesiones periódicas, respectivamente.

En resumen,

$$(\tilde{x}_1 * \tilde{x}_2)[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}_1[\ell] \tilde{x}_2[n - \ell] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n - \ell] \tilde{x}_2[\ell] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k].$$

La convolución periódica de sucesiones periódicas tiene como transformada el producto (punto a punto) de las sucesiones de sus Series Discretas de Fourier.

Como la convolución periódica es ligeramente diferente de las convoluciones aperiódicas, vale la pena considerar el mecanismo subyacente a (4.29). Esta ecuación involucra el producto de las sucesiones  $\tilde{x}_1[\ell]$  y  $\tilde{x}_2[n - \ell] = \tilde{x}_2[-(\ell - n)]$ , vistas como una función de  $\ell$  para un  $n$  dado. Hasta aquí el procedimiento es el mismo que el de la convolución aperiódica, pero con un par de diferencias:

- la suma se realiza sobre un intervalo finito  $0 \leq \ell \leq N - 1$ , y
- los valores de  $\tilde{x}_2[n - \ell]$  en el intervalo  $0 \leq \ell \leq N - 1$  se repiten periódicamente para  $\ell$  fuera de ese intervalo.

Estos detalles se ilustran en el siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 4.9. Convolución periódica

Se desea calcular la convolución periódica entre las señales  $\tilde{x}_1[n]$  y  $\tilde{x}_2[n]$ , de período  $N = 8$  definidas en un período como

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1[n] &= \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \delta[n - 3], \\ \tilde{x}_2[n] &= \frac{1}{2}\delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{5}{6}\delta[n - 3] + \frac{2}{3}\delta[n - 4] + \frac{1}{2}\delta[n - 5] + \frac{2}{3}\delta[n - 6] + \frac{1}{6}\delta[n - 7], \end{aligned}$$

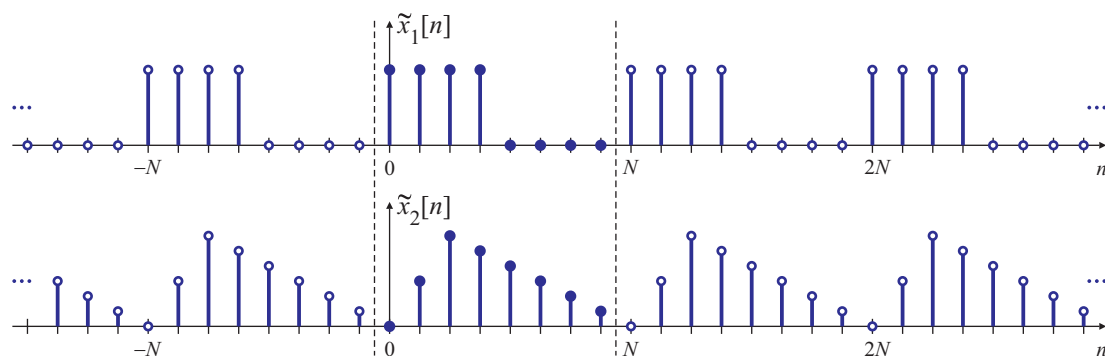


Fig. 4.13. Las señales  $\tilde{x}_1[n]$  y  $\tilde{x}_2[n]$  a convolucionar en el Ejemplo 4.9.

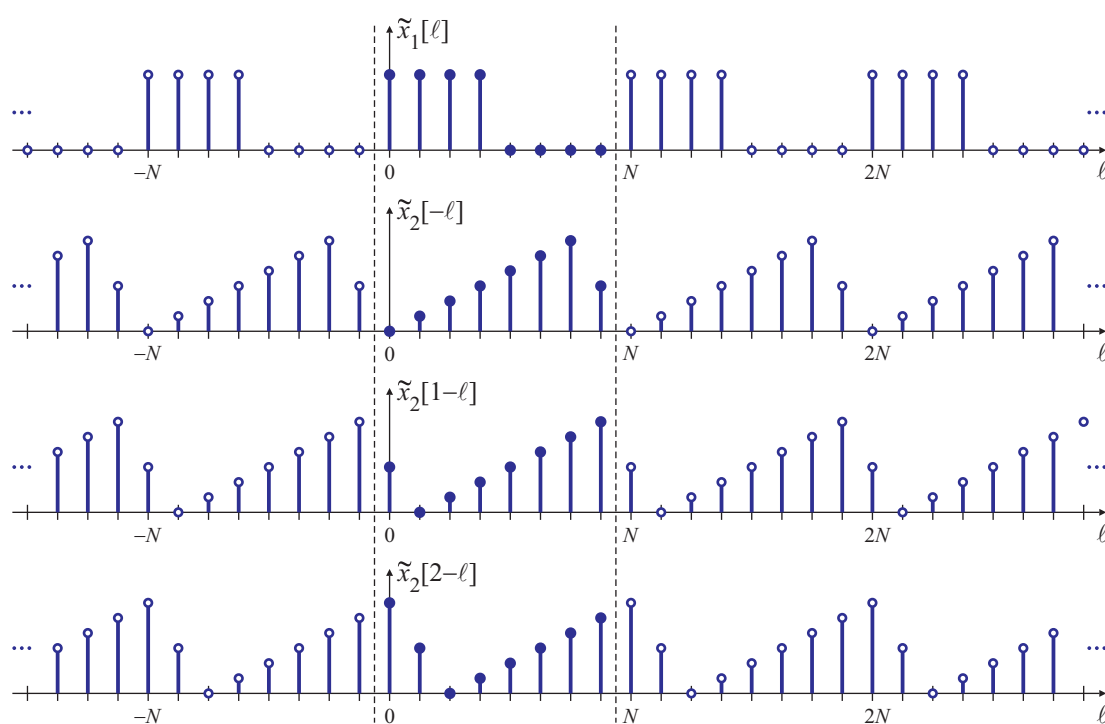


Fig. 4.14. Procedimiento de cálculo de la convolución periódica.

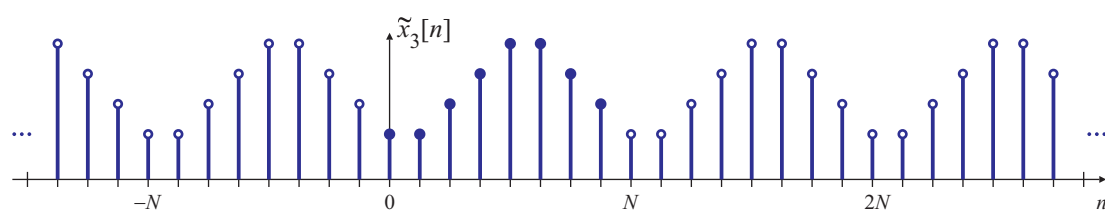


Fig. 4.15. Sucesión  $\tilde{x}_3[n]$  resultado de la convolución periódica entre las sucesiones  $\tilde{x}_1[n]$  y  $\tilde{x}_2[n]$  de la Fig. 4.13.

que se muestran en la Fig. 4.13. El proceso de cálculo utilizando la expresión (4.27) se detalla en la Fig. 4.14, donde se grafican las sucesiones  $\tilde{x}_1[\ell]$  y  $\tilde{x}_2[-\ell]$ , y dos desplazamientos de  $\tilde{x}_2[-(\ell-n)]$ , uno para  $n = 1$  y otro para  $n = 2$ . Para evaluar  $\tilde{x}_3[n]$  en (4.27) para  $n = 0$ , por ejemplo, se multiplican muestra a muestra  $\tilde{x}_1[\ell]$  y  $\tilde{x}_2[-\ell]$ , y se suman estos productos  $\tilde{x}_1[\ell]\tilde{x}_2[-\ell]$  para  $0 \leq \ell \leq N-1$ , obteniéndose  $\tilde{x}_3[1]$ :

$$\tilde{x}_3[0] = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{5}{6} + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{2} = 1.$$

A medida que se varía  $n$ , la sucesión  $\tilde{x}_2[n-\ell]$  se desplaza y la ecuación (4.27) se evalúa para cada valor de  $n$  en el intervalo  $0 \leq n \leq N-1$ . Para  $n = 1$ , se multiplican muestra a muestra  $\tilde{x}_1[\ell]$  y  $\tilde{x}_2[1-\ell]$ , y se suman estos productos  $\tilde{x}_1[\ell]\tilde{x}_2[1-\ell]$  para  $0 \leq \ell \leq N-1$ :

$$\tilde{x}_3[1] = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{5}{6} + 0 \times 1 = 1.$$

Para  $n = 2$ ,

$$\tilde{x}_3[2] = 1 \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$$

A medida que la sucesión  $\tilde{x}_2[n-\ell]$  se desplaza a la izquierda o derecha, los valores que abandonan el intervalo indicado con líneas punteadas (en la Fig. 4.14) por un extremo vuelven a aparecer por el otro debido a la periodicidad. Repitiendo los cálculos, se encuentra que

$$\tilde{x}_3[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \frac{5}{3}\delta[n-2] + \frac{7}{3}\delta[n-3] + 3\delta[n-4] + 3\delta[n-5] + \frac{7}{3}\delta[n-6] + \frac{5}{3}\delta[n-7],$$

graficada en la Fig. 4.15. Debido a que  $\tilde{x}_3[n]$  también es periódica, no hay necesidad de seguir evaluando (4.27) fuera del intervalo  $0 \leq n \leq N-1$ .  $\square$

La propiedad de dualidad de la Sección 4.3.3 indica que si se intercambian los dominios tiempo y frecuencia se obtiene un resultado dual al anterior. Es decir, si la sucesión temporal  $\tilde{x}_3[n]$  es el producto de dos sucesiones  $\tilde{x}_1[n]$  y  $\tilde{x}_2[n]$ , las dos de período  $N$ ,

$$\tilde{x}_3[n] = \tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n] \quad (4.30)$$

los coeficientes de su Serie Discreta de Fourier  $\tilde{X}_3[k]$  están relacionados con  $\tilde{X}_1[k]$  y  $\tilde{X}_2[k]$  (las SDF de  $\tilde{x}_1[n]$  y  $\tilde{x}_2[n]$ ) según

$$\tilde{X}_3[k] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell] \quad (4.31)$$

que es  $1/N$  veces la convolución periódica entre  $\tilde{X}_1[k]$  y  $\tilde{X}_2[k]$ . Esta operación se notará de manera abreviada como

$$\tilde{X}_3[k] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell] = (\tilde{X}_1 * \tilde{X}_2)[k]$$

Este resultado puede verificarse sustituyendo (4.31) en la ecuación de síntesis (4.4) para obtener  $\tilde{x}_3[n]$ :

$$\tilde{x}_3[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_3[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell] \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Intercambiando el orden de las sumatorias,

$$\tilde{x}_3[n] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2[k - \ell] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (4.32)$$

La segunda sumatoria es la antitransformada de la SDF  $\tilde{X}_2[k]$  desplazada  $\ell$  muestras en tiempo, y de acuerdo con la Propiedad 4.3.2,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2[k - \ell] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \tilde{x}_2[n] e^{j \frac{2\pi}{N} \ell n}.$$

Reemplazando esta expresión en (4.32),

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3[n] &= \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2[k - \ell] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] \tilde{x}_2[n] e^{j \frac{2\pi}{N} \ell n} \\ &= \tilde{x}_2[n] \left( \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] e^{j \frac{2\pi}{N} \ell n} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

La última sumatoria es la antitransformada de  $\tilde{x}_1[n]$ ,

$$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] e^{j \frac{2\pi}{N} \ell n} = \tilde{x}_1[n].$$

Reemplazando esta expresión en (4.33), se obtiene el resultado buscado:

$$\tilde{x}_3[n] = \tilde{x}_2[n] \left( \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] e^{j \frac{2\pi}{N} \ell n} \right) = \tilde{x}_2[n] \tilde{x}_1[n],$$

que naturalmente coincide con (4.30). De esta manera queda establecido el par transformado

$$\tilde{x}_1[n] \tilde{x}_2[n] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] \tilde{X}_2[k - \ell] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[k - \ell] \tilde{X}_2[\ell] = (\tilde{X}_1 * \tilde{X}_2)[k]$$

#### 4.3.6. Identidad de Parseval

Para señales periódicas, la energía en un período se define como

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2,$$

La identidad de Parseval relaciona esta energía promedio con una operación sobre los coeficientes de la SDF. Sabiendo que  $|\tilde{x}[n]|^2 = \tilde{x}[n] \tilde{x}^*[n]$ , se tiene que

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \tilde{x}^*[n].$$

Reemplazando  $\tilde{x}^*[n]$  por la ecuación de síntesis

$$\tilde{x}^*[n] = \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right)^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}^*[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},$$

resulta

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \tilde{x}^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}^*[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Intercambiando el orden de la sumatoria del segundo miembro,

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}^*[k] \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}_{\tilde{X}[k]} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}^*[k] \tilde{X}[k]$$

lo que permite establecer la identidad de Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{X}[k]|^2 \quad (4.34)$$

que indica que la energía de un período de una señal periódica es igual al promedio en un período de la energía de su transformada.

La identidad de Parseval se puede generalizar para un par de sucesiones  $\tilde{x}_1[n]$ ,  $\tilde{x}_2[n]$  como

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n] \tilde{x}_2^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2^*[k].$$

La demostración sigue las mismas líneas del desarrollo anterior.

## 4.4. Resumen de propiedades: SDF de sucesiones periódicas

Un resumen de las propiedades de la Serie Discreta de Fourier de sucesiones periódicas se listan en la Tabla 4.2.

## 4.5. La relación entre la SDF y la TFTD

Como se discutió en la Sección ??, la convergencia absoluta de la transformada de Fourier de tiempo discreto de una sucesión requiere que la sucesión sea absolutamente sumable, y la convergencia en media necesita que la sucesión sea de cuadrado sumable. Las sucesiones periódicas no satisfacen ninguna de estas condiciones, en parte porque no tienden a cero cuando  $n$  tiende a  $\pm\infty$ . Sin embargo, tal como se mostró en la Sección ??, a las sucesiones formadas por sumas de exponenciales complejas se les pueden asignar transformadas formadas por trenes de impulsos de Dirac que se repiten periódicamente. De manera similar, es útil incluir la representación en Series Discretas de Fourier (SDF) dentro del marco de la Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD).

**Tabla 4.2.** Propiedades de la Serie Discreta de Fourier.

Propiedad	Sucesión $N$ periódica $\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_2[n]$	Serie Discreta de Fourier $\tilde{X}_1[k], \tilde{X}_2[k]$
linealidad	$a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n]$	$a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$
corrimiento temporal	$\tilde{x}_1[n - n_0] \ (n_0 \in \mathbb{Z})$	$e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k} \tilde{X}_1[k]$
corrimiento frecuencial	$e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n} \tilde{x}_1[n]$	$\tilde{X}_1[k - k_0]$
reflexión	$\tilde{x}_1[-n]$	$\tilde{X}_1[-k]$ $\tilde{X}_1^*[k]$ si $\tilde{x}_1[n]$ es real
convolución temporal periódica	$(\tilde{x}_1 * \tilde{x}_2)[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}_1[\ell] \tilde{x}_2[n - \ell]$	$\tilde{X}_1[k] \times \tilde{X}_2[k]$
convolución frecuencial periódica	$\tilde{x}_1[n] \times \tilde{x}_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] \tilde{X}_2[k - \ell]$
área “promedio” de la SDF	$\tilde{x}_1[n]_{n=0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1[k]$	
“área” de la sucesión	$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n] = \tilde{X}_1[k] \Big _{k=0}$	
Identidad de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1}  \tilde{x}_1[n] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1}  \tilde{X}_1[k] ^2$ $\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n] \tilde{x}_2^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2^*[k]$	

Esta vinculación puede conseguirse interpretando la TFTD de una señal periódica como un tren de impulsos en el dominio frecuencia, cuya área es proporcional a los coeficientes de la SDF de la sucesión. Específicamente, si  $\tilde{x}[n]$  es una sucesión  $N$ -periódica y  $\tilde{X}[k]$  son los coeficientes de su SDF, entonces la TFTD de la sucesión  $\tilde{x}[n]$  se define como

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}[n]\} = \sum_k \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right), \quad (4.35)$$

donde  $\delta(\omega)$  es el delta de Dirac<sup>1</sup> estudiado en el Capítulo ???. En esta definición,  $\mathcal{F}\{\tilde{x}[n]\}$  es  $2\pi$ -periódica, ya que  $\tilde{X}[k]$  es  $N$ -periódica, y los impulsos están separados en múltiplos de  $2\pi/N$ . Para mostrar que la transformada  $\mathcal{F}\{\tilde{x}[n]\}$  definida en (4.35) es la TFTD de la

<sup>1</sup>Los impulsos discretos  $\delta[n]$  y los impulsos continuos (o “delta de Dirac”)  $\delta(t)$  son objetos matemáticos muy diferentes, y no deben confundirse unos con otros.



sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$  se puede sustituir esta expresión en la ecuación de síntesis de la TFTD (??):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

donde la integral se evalúa sobre cualquier intervalo de longitud  $2\pi$  porque la expresión  $X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$  es  $2\pi$ -periódica. Entonces, si  $\varepsilon$  es un número comprendido entre 0 y  $2\pi/N$ ,  $0 < \varepsilon < 2\pi/N$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \mathcal{F}\{\tilde{x}[n]\} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \sum_k \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

que significa que la integral incluye el impulso ubicado en  $\omega = 0$ , y no su réplica ubicada en  $\omega = 2\pi$ . Intercambiando el orden de la integral y de la sumatoria,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \mathcal{F}\{\tilde{x}[n]\} e^{j\omega n} d\omega &= \sum_k \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned}$$

donde los extremos de la sumatoria se han ajustado para indicar que en la integral sólo intervienen los  $N$  impulsos comprendidos en el intervalo  $0 \leq \omega < 2\pi$  asociados a  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Aplicando la propiedad de colador del impulso de Dirac,

$$\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\frac{2\pi}{N}kn},$$

resulta que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \mathcal{F}\{\tilde{x}[n]\} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{x}[n],$$

de acuerdo a la ecuación de síntesis (4.4). Por lo tanto, la TFTD inversa del tren de impulsos (4.35) es realmente la señal periódica  $\tilde{x}[n]$ , lo que permite establecer el par transformado

$$\tilde{x}[n] \xLeftrightarrow{\text{TFTD}} \sum_k \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right),$$

donde  $\tilde{X}[k]$  son los coeficientes de la SDF de  $\tilde{x}[n]$ .

Aunque la TFTD de una sucesión periódica no converge en el sentido normal, la introducción de los impulsos permite incluir las sucesiones periódicas en el marco de análisis de la transformada. Esta aproximación también fue utilizada en el Capítulo ?? para obtener una representación en TFTD de una sucesión constante (Ejemplo ??) o de una sucesión exponencial compleja (Ejemplo ??). Aunque la representación en Series Discretas de Fourier (SDF) es adecuada para muchos fines, la representación en TFTD (4.35) a veces conduce a expresiones más simples o compactas, o bien facilita el análisis de problemas.

### 4.5.1. Una derivación alternativa entre la relación entre la SDF y la TFTD

La derivación de la expresión (4.35) en la sección anterior parece un poco caprichosa. Otra manera de derivar este par transformado es estableciendo la relación entre la sucesión periódica  $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$  y  $x[n]$  un período de esa sucesión:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

tal como se muestra en la Fig. 4.3. Entonces, la sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$  puede expresarse como la convolución entre  $x[n]$  y  $\tilde{p}_N[n]$ ,

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \tilde{p}_N[n]$$

donde  $\tilde{p}_N[n]$  es un tren periódico de impulsos separados  $N-1$  muestras entre sí:

$$\tilde{p}_N[n] = \sum_r \delta[n - rN]. \quad (4.36)$$

Aplicando la propiedad de la convolución temporal de la TFTD, se tiene que

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}[n]\} = \mathcal{F}\{(x * \tilde{p}_N)[n]\} = X(e^{j\omega}) \times \mathcal{F}\{\tilde{p}_N[n]\}, \quad (4.37)$$

donde  $X(e^{j\omega})$  es la TFTD de  $x[n]$ , y  $\mathcal{F}\{\tilde{p}_N[n]\}$  es la TFTD de la sucesión periódica  $\tilde{p}_N[n]$ . El cálculo de esta transformada tiene algunas dificultades, y se desarrolla en el siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 4.10. La TFTD del tren de impulsos periódicos $\tilde{p}_N[n]$

El cálculo directo de la TFTD de  $\tilde{p}_N[n]$  resulta en

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{p}_N[n]\} &= \sum_n \tilde{p}_N[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_n \left( \sum_r \delta[n - rN] \right) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_r e^{-jN\omega r}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

que es la suma de una serie geométrica de razón  $e^{-j\omega N}$ . Sin embargo, esta sumatoria “no se puede sumar” porque la razón  $e^{-j\omega N}$  tiene módulo unitario.

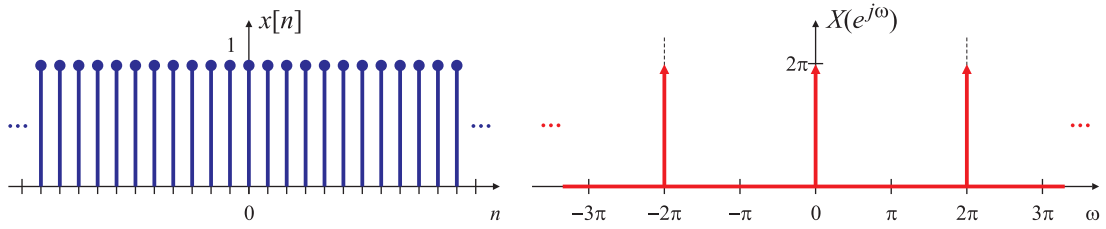
Para salvar esta dificultad, es conveniente recordar el par transformado de una sucesión  $x[n] = 1$  (una constante), desarrollado en el Ejemplo ?? del Capítulo ?. Se encontró entonces que

$$x[n] = 1 \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_k \delta(\omega - 2\pi k), \quad (4.39)$$

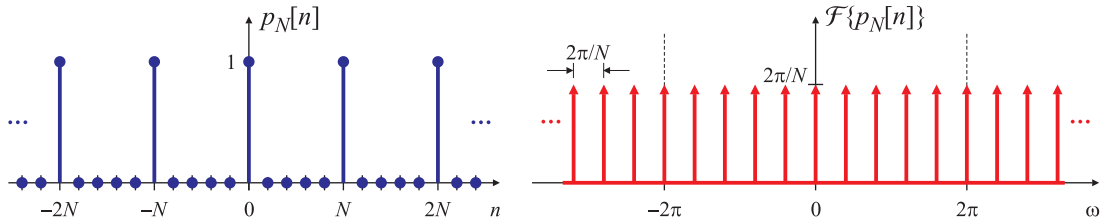
donde los  $\delta(\cdot)$  que aparecen en la expresión de  $X(e^{j\omega})$  son los “delta de Dirac”<sup>2</sup> estudiados en el Capítulo ?? (Fig. 4.16). El cálculo por definición de la TFTD de la constante  $x[n] = 1$  es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n} = \sum_n e^{-j\omega n}. \quad (4.40)$$

<sup>2</sup>Los impulsos discretos  $\delta[n]$  y los impulsos continuos (o “delta de Dirac”)  $\delta(t)$  son objetos matemáticos muy diferentes, y no deben confundirse unos con otros.



**Fig. 4.16.** Una sucesión constante  $x[n] = 1$  y su TFTD  $X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_k \delta(\omega - 2\pi k)$ .



**Fig. 4.17.** Un tren de impulsos  $\tilde{p}_N[n]$  y su TFTD  $\mathcal{F}\{\tilde{p}_N[n]\} = \frac{2\pi}{N} \sum_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$ .

Las expresiones (4.39) y (4.40) permiten establecer la *identidad de Poisson*

$$\sum_n e^{-j\omega n} = 2\pi \sum_k \delta(\omega - 2\pi k), \quad (4.41)$$

que es de gran utilidad en muchos problemas de procesamiento de señales.

Volviendo al cálculo de la TFTD de  $\tilde{p}_N[n]$ , la expresión (4.38) muestra que  $\mathcal{F}\{\tilde{p}_N[n]\}$  es un escalado en frecuencia del primer término de la identidad de Poisson, y por lo tanto

$$\mathcal{F}\{\tilde{p}_N[n]\} = \sum_r e^{-jN\omega r} = 2\pi \sum_k \delta(N\omega - 2\pi k).$$

Aplicando la propiedad de escalado del delta de Dirac,  $\delta(N\omega) = \delta(\omega)/|N|$ , se tiene que

$$\mathcal{F}\{\tilde{p}_N[n]\} = 2\pi \sum_k \delta\left(N\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\right) = \frac{2\pi}{N} \sum_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right),$$

que finalmente permite establecer el par transformado de Fourier

$$\tilde{p}_N[n] = \sum_r \delta[n - rN] \xrightarrow{\text{TFTD}} \mathcal{F}\{\tilde{p}_N[n]\} = \frac{2\pi}{N} \sum_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

representado en la Fig. 4.17. □

Retomando el cálculo de la TFTD de la señal periódica  $\tilde{x}[n]$ , la aplicación del teorema de convolución temporal (4.37) resulta en

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{x}[n]\} &= \mathcal{F}\{(x * \tilde{p}_N)[n]\} = X(e^{j\omega}) \times \mathcal{F}\{\tilde{p}_N[n]\} \\ &= X(e^{j\omega}) \frac{2\pi}{N} \sum_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \\ &= \frac{2\pi}{N} \sum_k X(e^{j\omega}) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \end{aligned}$$

que, aplicando la propiedad de colador del impulso, puede escribirse como

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}[n]\} = \frac{2\pi}{N} \sum_k X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right). \quad (4.42)$$

Como  $x[n]$  es una sucesión de longitud finita  $N$ ,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

y entonces,

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

La ecuación (4.42) es la transformada de Fourier de una señal periódica, y por lo tanto  $X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$  funciona como el  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier, que se notará como  $\tilde{X}[k]$ :

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}. \quad (4.43)$$

En otras palabras, la sucesión periódica  $\tilde{X}[k]$  de la SDF de  $\tilde{x}[n]$  dada por la ecuación de síntesis (4.4) se puede interpretar como un conjunto de  $N$  muestras equiespaciadas de la TFTD  $X(e^{j\omega})$  de la sucesión  $x[n]$  de longitud finita obtenida al tomar un período de  $\tilde{x}[n]$ ,

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4.44)$$

representado gráficamente en la Fig. 4.3.

La importante relación (4.43) se puede derivar de otra manera. Ya que  $x[n] = \tilde{x}[n]$  para  $0 \leq n \leq N-1$ , y cero para cualquier otro  $n$ ,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\omega n}.$$

Comparando esta última expresión con la ecuación de síntesis (4.4), se observa nuevamente que

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}.$$

Esto corresponde a muestrear la TFTD  $X(e^{j\omega})$  en  $N$  frecuencias equiespaciadas cada  $2\pi/N$  entre  $\omega = 0$  y  $\omega = 2\pi$ .

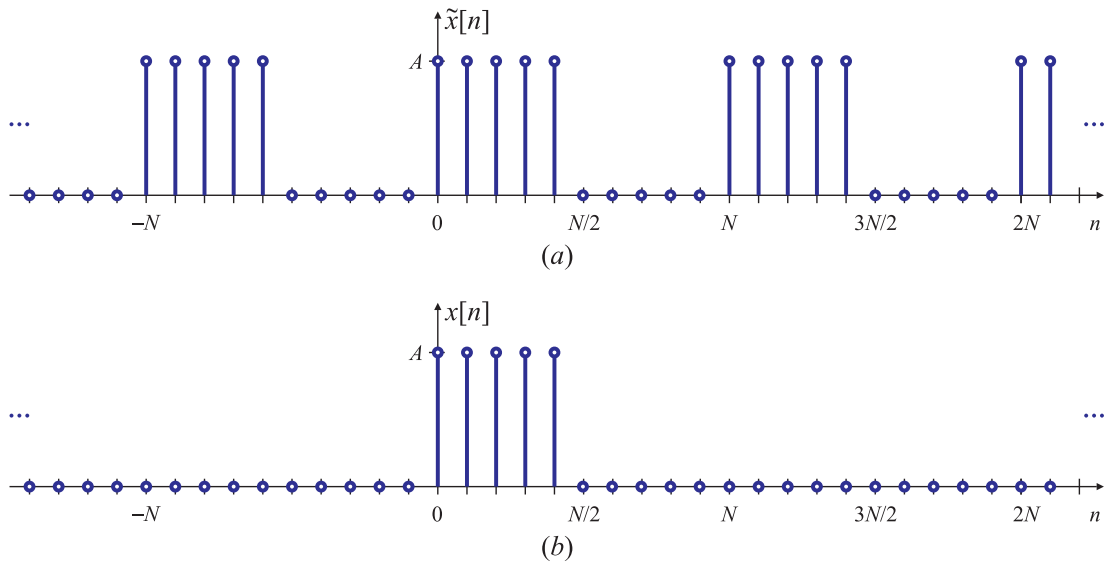
#### EJEMPLO 4.11. Relación entre los coeficientes de la SDF y la TFTD de un período

Para el tren de pulsos rectangular periódico  $\tilde{x}[n]$  del Ejemplo 4.2 que se representa en la Fig. 4.2(a), repetida en la Fig. 4.18(a), la sucesión  $x[n]$  formada por un período de esta sucesión es

$$x[n] = \begin{cases} A, & 0 \leq n \leq N/2 - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

tal como se muestra en la Fig. 4.18(b). La TFTD  $X(e^{j\omega})$  de esta sucesión es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N/2-1} Ae^{-j\omega n} = \frac{e^{-j\omega \frac{N}{2}} - 1}{e^{-j\omega} - 1} = Ae^{-j\omega \frac{N/2-1}{2}} \frac{\text{sen}(N\omega/4)}{\text{sen}(\omega/2)}$$



**Fig. 4.18.** La sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$  (a) y la señal aperiódica  $x[n]$ .

cuyo módulo y fase se grafican en la Fig. 4.19(a) y (b), respectivamente. La fase es discontinua (tiene saltos de  $\pm\pi$  en las frecuencias donde se anula  $X(e^{j\omega})$ ).

La SDF  $\tilde{X}[k]$  de la sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$  formada por la repetición periódica de  $x[n]$  cada  $N$  muestras se puede calcular aplicando (4.43):

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = A e^{-j\omega \frac{N/2-1}{2}} \frac{\text{sen}(N\omega/4)}{\text{sen}(\omega/2)} \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = A e^{-j\frac{2\pi}{N} \frac{N/2-1}{2} k} \frac{\text{sen}((2\pi/N)N/4k)}{\text{sen}((2\pi/N)/2k)}$$

es decir

$$\tilde{X}[k] = A e^{-j\frac{2\pi}{N} \frac{N/2-1}{2} k} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\text{sen}(\pi k/N)}$$

que (naturalmente) coincide con (4.9). Para mostrar que la SDF de la sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$  representada en la Fig. 4.2(b) corresponde a  $X(e^{j\omega})$  muestreada cada  $2\pi/N$ , estas dos transformadas se grafican en la Fig. 4.20, donde se han superpuesto la Fig. 4.19 con la Fig. 4.2(b).  $\square$

## 4.6. Muestreo frecuencial de la TFTD

En esta sección se discute la relación entre una sucesión aperiódica  $x[n]$  con transformada de Fourier de tiempo discreto  $X(e^{j\omega})$  y una sucesión periódica  $y[n]$  cuya SDF está formada por las muestras equiespaciadas en frecuencia de  $X(e^{j\omega})$ . Esta relación es muy importante en las aplicaciones de la Transformada Discreta de Fourier (TDF) que se tratan más adelante en este Capítulo.

Sea  $x[n]$  una sucesión aperiódica (de cualquier longitud) con TFTD  $X(e^{j\omega})$ ,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] e^{-j\omega r}. \quad (4.45)$$

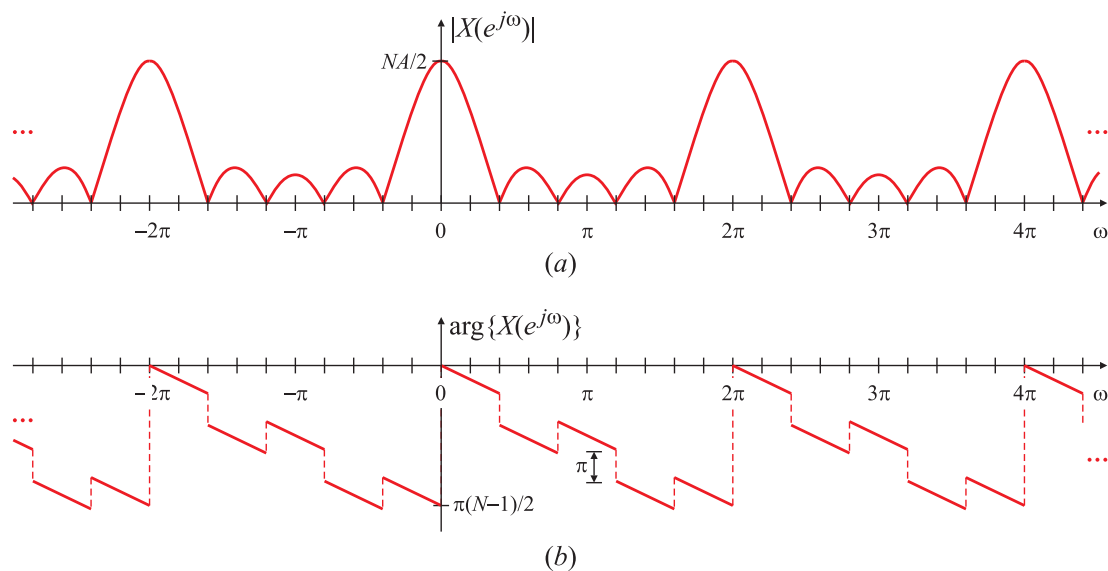


Fig. 4.19. La TFTD  $X(e^{j\omega})$  de  $x[n]$  en módulo (a) y fase (b).

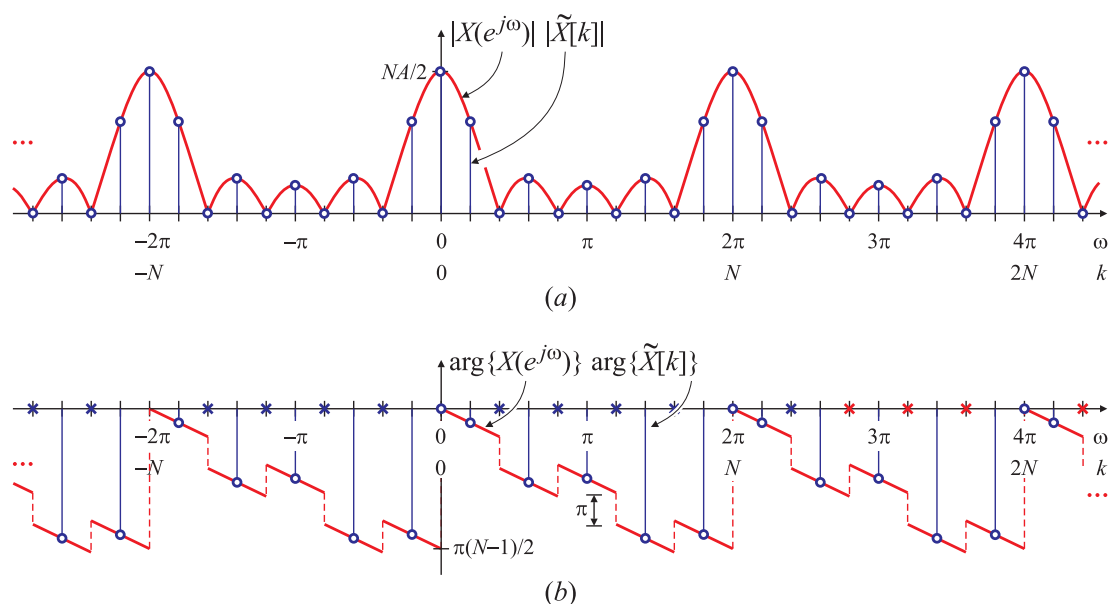
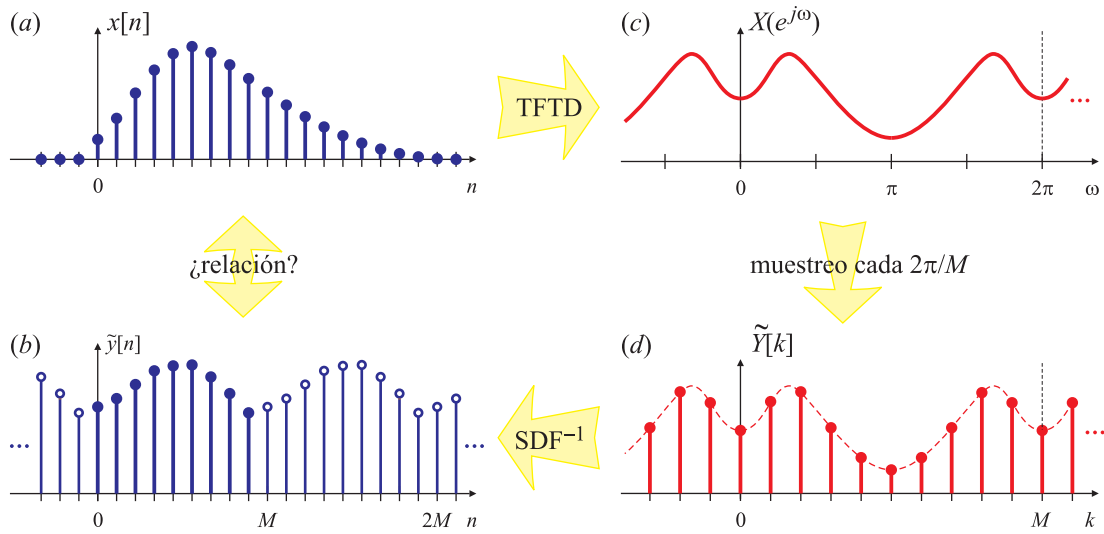


Fig. 4.20. Superposición de las Figs. 4.2(b) y 4.19 mostrando los coeficientes de la SDF de una sucesión periódica como muestras de la TFTD de un período.



**Fig. 4.21.** Muestreo de la TFTD: la sucesión aperiódica  $x[n]$  (a); su TFTD  $X(e^{j\omega})$  (c); la sucesión  $\tilde{Y}[k]$ , formada por  $M$  muestras de  $X(e^{j\omega})$  cada  $2\pi/N$  (d) e  $\tilde{y}[n]$ , la SDF inversa de  $\tilde{Y}[k]$  (b).

Esta TFTD se muestrea en  $M$  puntos equiespaciados en frecuencia, por ejemplo, en las frecuencias  $\omega_k = 2\pi k/M$ , y las muestras obtenidas se notan como  $\tilde{Y}[k]$ :

$$\tilde{Y}[k] = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{M}k}. \quad (4.46)$$

Esta sucesión  $\tilde{Y}[k]$  es periódica en  $k$ , de período  $M$ , y se puede pensar que es la SDF de una sucesión  $\tilde{y}[n]$   $M$ -periódica:

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{Y}[k] e^{j\frac{2\pi}{M}kn}. \quad (4.47)$$

El objeto de esta sección es establecer la relación entre  $x[n]$  e  $\tilde{y}[n]$ ; la idea del procedimiento se sintetiza en la Fig. 4.21.

De acuerdo con (4.45) y (4.46), la SDF  $\tilde{Y}[k]$  se puede escribir como

$$\tilde{Y}[k] = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{M}k} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] e^{-j\frac{2\pi}{M}rk} \quad (4.48)$$

y reemplazando (4.48) en (4.47),

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{Y}[k] e^{j\frac{2\pi}{M}kn} = \tilde{y}[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] e^{-j\frac{2\pi}{M}rk} \right) e^{j\frac{2\pi}{M}kn}.$$

Intercambiando el orden de las sumatorias, se encuentra que

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] \left( \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-r)} \right). \quad (4.49)$$

La expresión entre paréntesis es conocida: no es más que el tren de impulsos periódicos estudiado en la Sección 4.2.2:

$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi}{M} k(n-r)} = \sum_{\ell} \delta[n-r-\ell M] = \begin{cases} 1, & \text{si } n-r = \ell M = \text{múltiplo de } M \\ & (\text{donde } \ell \text{ es cualquier entero}), \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} = p_M[n-r].$$

Por lo tanto, (4.49) se puede escribir como

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] p_M[n-r] = (x * p_M)[n]$$

es decir, la convolución (aperiódica) entre  $x[n]$  y  $p_M[n]$ , que no es otra cosa que la replicación de  $x[n]$  cada  $M$  muestras. Esta interpretación se pone de manifiesto reemplazando  $p_M[n-r] = \sum_{\ell} \delta[n-r-\ell M]$ , y aplicando la propiedad de colador del impulso:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] p_M[n-r] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] \sum_{\ell} \delta[n-r-\ell M] = \sum_{\ell} x[n-\ell M].$$

Resumiendo, la relación entre  $\tilde{y}[n]$  y  $x[n]$  se puede escribir como

$$\tilde{y}[n] = \sum_{\ell} x[n-\ell M] \quad (4.50)$$

es decir que  $\tilde{y}[n]$  es la sucesión periódica que resulta de convolucionar la sucesión aperiódica  $x[n]$  con un tren de impulsos separados cada  $M$  muestras (donde  $M$  es el número de puntos en el que se ha muestreado la TFTD de  $x[n]$ ). Este proceso se representa en la Fig. 4.22.

En otras palabras, la sucesión periódica  $\tilde{y}[n]$ , la antitransformada de  $\tilde{Y}[k]$  que se obtiene tomando muestras cada  $2\pi/M$  de  $X(e^{j\omega})$  está formada por una suma de infinitas réplicas de  $x[n]$  cada  $M$  muestras: el período de  $\tilde{y}[n]$ . En el caso ilustrado en la Fig. 4.22 la sucesión  $x[n]$  es infinitamente larga, y por lo tanto, ninguna de las muestras de la sucesión  $\tilde{y}[n]$  coincide con la de  $x[n]$ .

En cambio, en la Fig. 4.23(a) se muestra una señal  $x[n]$  de longitud finita  $N = 7$ . Si la transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  de  $x[n]$  se muestra cada  $M = 10$  veces (con  $M$  mayor que  $N$ ) en el intervalo entre 0 y  $2\pi$ , y se antitransforma la sucesión resultante, se obtiene la sucesión  $\tilde{y}[n]$

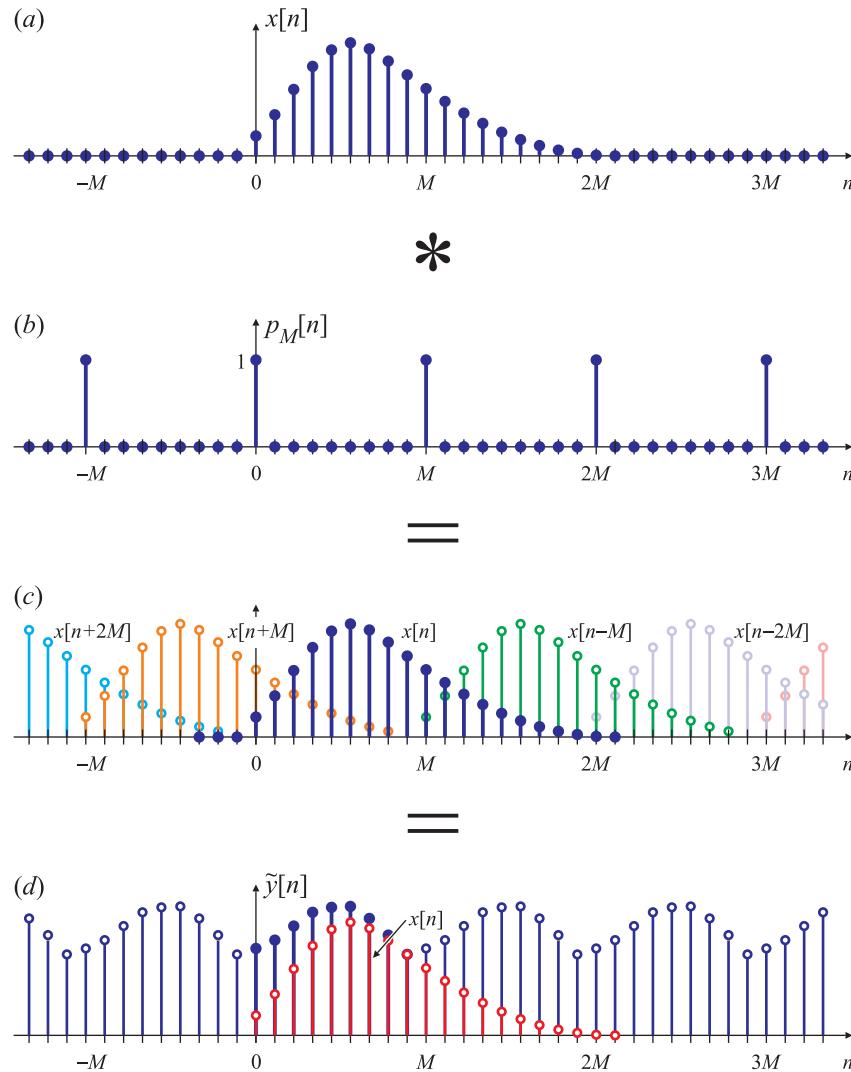
$$\tilde{y}[n] = \mathcal{F}^{-1} \left\{ X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi/M} \right\}$$

que es periódica de período  $M = 10$ , como se muestra en la Fig. 4.23(b). Naturalmente, la relación entre  $x[n]$  e  $\tilde{y}[n]$  está dada por la ecuación (4.50). Como la cantidad de puntos  $M$  en que se muestrea la transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  es mayor que el largo  $N$  de la señal, en el proceso de replicación cada  $M$  muestras indicado por (4.50) las réplicas de  $x[n]$  no se solapan, y por lo tanto resulta posible recuperar  $x[n]$  a partir de  $\tilde{y}[n]$ :

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{y}[n], & \text{si } 0 \leq n \leq M-1. \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4.51)$$

Si la transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  de  $x[n]$  se muestrea cada  $M$  puntos en el intervalo entre 0 y  $2\pi$ , pero con  $M$  menor que el largo  $N$  de la sucesión, la ecuación (4.50) sigue



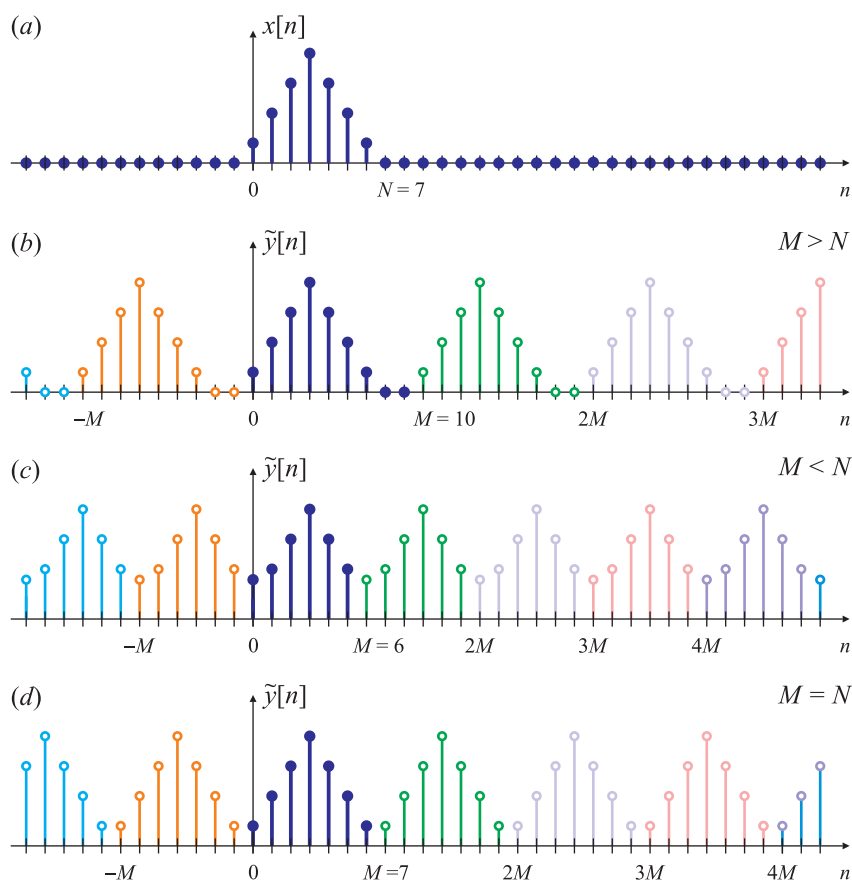


**Fig. 4.22.** Muestreo de la TFTD: relación entre  $x[n]$  e  $\tilde{y}[n]$ . La sucesión aperiódica  $x[n]$  (a); el tren de impulsos periódico  $p_M[n]$ ; la convolución entre  $x[n]$  y  $p_M[n]$ , indicando las distintas réplicas de  $x[n]$  (c) e  $\tilde{y}[n]$ , el resultado final de la convolución (d).

siendo válida, pero ahora las réplicas de  $x[n]$  se solapan, y no es posible recuperar  $x[n]$  a partir de  $\tilde{y}[n]$  (al menos, no todas las muestras de  $x[n]$ , como se verá más adelante). Este es el caso ilustrado en la Fig. 4.23(c), donde el largo de la señal  $x[n]$  sigue siendo  $N = 7$ , pero ahora su transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  se muestrea cada  $M = 6$  veces en el intervalo entre 0 y  $2\pi$ . Al replicar  $x[n]$  cada  $= 6$  muestras, se solapan la primera muestra de una réplica con la última muestra de la réplica previa.

Finalmente, si  $X(e^{j\omega})$  se muestra cada  $M = N$  puntos, la sucesión  $\tilde{y}[n]$  está formada por las réplicas de  $x[n]$  ubicadas “una al lado de la otra”, como se muestra en la Fig. 4.23(d). En este caso, nuevamente es posible recuperar  $x[n]$  a partir de  $\tilde{y}[n]$  aplicando (4.51).

En el caso ilustrado en la Fig. 4.23(b), cuando el número de muestras  $M$  de la TFTD es menor que el largo  $N$  de la señal, no es posible recuperar  $x[n]$  a partir de  $\tilde{y}[n]$ , pero sí se puede cuando  $M \geq N$ , como se observa en las Figs. 4.23(b) y 4.23(d). En este último



**Fig. 4.23.** Muestreo de la TFTD: Señal  $x[n]$  de largo  $N = 7$  (a). Señal periódica  $\tilde{y}[n]$  que resulta de antitransformar el muestreo de  $X(e^{j\omega})$  cada  $M = 10 > N$  (b),  $M = 6 < N$  (c) y  $M = 7 = N$  (d).

caso, también es posible recuperar  $X(e^{j\omega})$  a partir de las muestras  $Y[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi/M}$  utilizando una fórmula de interpolación (ver al respecto el Ejercicio 7). Es decir, es posible recuperar  $X(e^{j\omega})$  a partir de sus muestras siempre que el espaciado de estas muestras sea suficientemente chico (en frecuencia). En el dominio temporal, esto se traduce en que no se produzca solapamiento entre las réplicas de  $x[n]$ . En este caso, se dice que no hay *aliasing* temporal. Es evidente que el aliasing temporal puede evitarse sólo si la señal  $x[n]$  es de longitud finita. Si la señal  $x[n]$  es de longitud infinita, como es el caso representado en la Fig. 4.22, no es posible recuperar  $x[n]$  a partir de  $\tilde{y}[n]$  para ningún valor de  $M$ .

Esta situación es enteramente análoga al caso del muestreo temporal de señales de tiempo continuo  $x(t)$ : si la señal es de banda limitada, es decir que la transformada de Fourier  $X(f) \equiv 0$  para todo  $f > f_H$ , para recuperar la señal continua a partir de sus muestras  $x[n] = x(t)|_{t=nT}$ , la separación  $T$  entre las muestras debe ser “suficientemente” fina:  $T < 1/(2f_H)$ .

Esta discusión revela varios conceptos importantes que jugarán un papel destacado en el resto del Capítulo. Se ha visto que muestras de la transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  de una sucesión aperiódica  $x[n]$  pueden pensarse como los coeficientes de la SDF  $Y[k]$  de la sucesión periódica  $\tilde{y}[n]$  que resulta de sumar las réplicas de  $x[n]$  repetidas cada  $M$

muestras:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{\ell} x[n - \ell M].$$

Si  $x[n]$  tiene longitud finita, y su TFTD  $X(e^{j\omega})$  se muestrea en un número adecuado  $M$  de puntos, en particular si  $M$  es mayor o igual que el largo  $N$  de la sucesión,

$$\tilde{Y}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{M}k}$$

entonces es posible recuperar la TFTD  $X(e^{j\omega})$  a partir de estas muestras  $\tilde{Y}[k]$ , y también  $x[n]$  a partir de  $y[n]$ :

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{y}[n], & \text{si } 0 \leq n \leq M - 1. \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se puede establecer una relación directa entre  $X(e^{j\omega})$  y sus muestras  $\tilde{Y}[k]$ , como se estudia en el Ejercicio 7. Sin embargo, la esencia del desarrollo precedente es que para representar o recuperar  $x[n]$  no es necesario conocer  $X(e^{j\omega})$  en todas las frecuencias  $\omega$  si  $x[n]$  tiene longitud finita. Dada una sucesión  $x[n]$  de longitud finita, se puede formar una sucesión periódica aplicando (4.50), que a su vez se puede representar por una serie discreta de Fourier. De manera similar, dada una sucesión de coeficientes de Fourier  $\tilde{Y}[k]$  se puede calcular  $\tilde{y}[n]$  y a partir de ella calcular  $x[n]$  utilizando (4.51). Cuando la serie discreta de Fourier se utiliza de esta manera para representar sucesiones de longitud finita, se la denomina Transformada Discreta de Fourier (TDF). Al desarrollar, discutir y aplicar la TDF siempre es importante recordar que la representación a partir de muestras de la TFTD está en realidad representando una señal de longitud finita por una señal periódica, cuyo período está formado por la señal de longitud finita que se desea representar.

## 4.7. Representación de Fourier de señales de longitud finita: la Transformada Discreta de Fourier

En esta sección se formaliza el punto de vista sugerido al final de la sección anterior. Sea  $x[n]$  una sucesión de longitud finita de  $N$  muestras de largo, tal que  $x[n] = 0$  fuera del rango  $0 \leq n \leq N - 1$ . En muchos casos, puede ser conveniente asumir que la sucesión tiene largo  $N$  aún cuando tenga  $M$  muestras no nulas, con  $M \leq N$ . En tales casos, se asume que las últimas  $(N - M)$  muestras son nulas.

A cada sucesión  $x[n]$  de longitud finita  $N$  se le puede asociar una sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$  formada por la replicación de  $x[n]$  cada  $N$  muestras:

$$\tilde{x}[n] = \sum_r x[n - rN] \quad (4.52)$$

La sucesión de longitud finita  $x[n]$  puede recuperarse de  $\tilde{x}[n]$  por truncación, aplicando la ecuación (4.44), es decir

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4.53)$$

En la Sección 4.6 se mostró que los coeficientes de la Serie Discreta de Fourier (SDF) de  $\tilde{x}[n]$  son muestras (espaciadas en frecuencia cada  $2\pi/N$ ) de la transformada de Fourier de

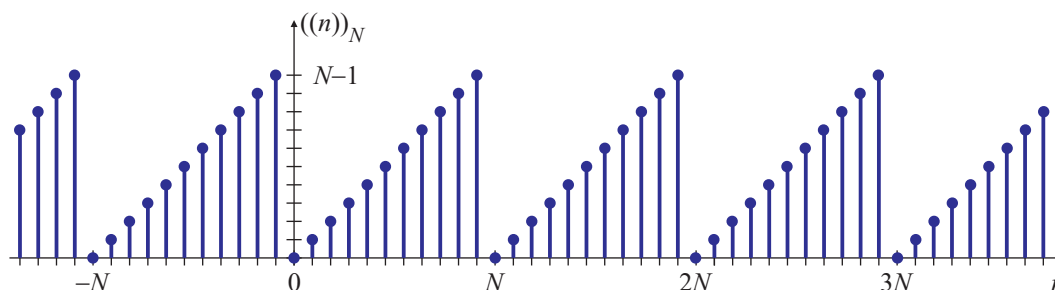


Fig. 4.24. Gráfico de la función módulo  $((n))_N$ .

tiempo discreto (TFTD)  $X(e^{j\omega})$  de  $x[n]$ . Como  $x[n]$  tiene longitud  $N$ , no hay solapamiento entre los términos  $x[n - rN]$  de (4.52) para los distintos valores de  $r$ . Por lo tanto, la ecuación (4.52) también puede escribirse como

$$\tilde{x}[n] = x[(n \text{ módulo } N)] \quad (4.54)$$

donde la operación  $(n \text{ módulo } N)$  por conveniencia se notará  $((n))_N$ . Con esta notación la ecuación (4.54) se expresa como

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]. \quad (4.55)$$

Por definición  $((n))_N$  está comprendido entre 0 y  $N - 1$ , de modo que en la expresión (4.55) el argumento nunca “se escapa” del rango donde está definida  $x[n]$ .

#### EJEMPLO 4.12. La función módulo $((n))_N$

Hay varias maneras de definir la operación módulo, según sean los signos de  $n$  y de  $N$ . En este texto, se asume siempre que  $N > 0$ , porque se asocia al período de la señal. Siguiendo la definición de Knuth,

$$((n))_N = n - N \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor, \quad (4.56)$$

donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  es la función piso (el menor entero más próximo al argumento, aún cuando este sea negativo). Por ejemplo,  $((5))_3 = 2$ , porque

$$((5))_3 = 5 - 3 \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 5 - 3 \times 1 = 2,$$

ya que  $\lfloor 5/3 \rfloor = 1$ . En particular, cuando  $n$  y  $N$  son positivos  $((n))_N$  es el resto de la división de  $n$  por  $N$ . Si  $n < 0$ , por ejemplo  $n = -5$ , se tiene que  $((-5))_3 = 1$ , porque

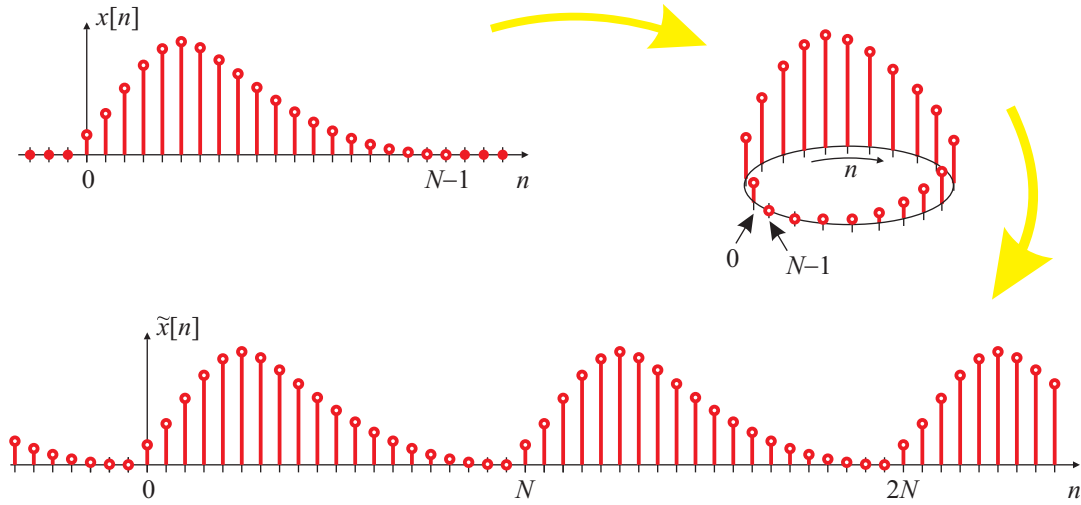
$$((-5))_3 = -5 - 3 \left\lfloor \frac{-5}{3} \right\rfloor = -5 - 3 \times (-2) = 1,$$

pues  $\lfloor -5/3 \rfloor = -2$ .

De acuerdo a la definición (4.56),  $((n))_N$  siempre es un número positivo comprendido entre 0 y  $N - 1$ . En Matlab se calcula como

$$((n))_N = \text{mod}(n, N).$$

En Matlab también se dispone de la función `rem`, pero en este caso el resultado queda comprendido entre  $\pm(N - 1)$ . En la Fig. 4.24 se grafica la función  $((n))_N$  para distintos valores de  $n$ .  $\square$



**Fig. 4.25.** Mapeo de una sucesión de longitud finita  $x[n]$  sobre un cilindro para generar una sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$ .

La ecuación (4.55) es equivalente a (4.52) solamente cuando  $x[n]$  tiene longitud menor o igual a  $N$ . La sucesión de longitud finita  $x[n]$  se obtiene a partir de  $\tilde{x}[n]$  extrayendo un período, como indica la ecuación (4.53).

Una manera informal y a veces útil de visualizar (4.55) es pensar e enrollar un gráfico de la sucesión de longitud finita  $x[n]$  sobre un cilindro cuya circunferencia es igual al largo de la sucesión (Fig. 4.25). A medida que se recorre la circunferencia del cilindro, se obtienen los valores de la sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$ . Con esta interpretación, representar una señal periódica por una sucesión de longitud finita equivale a enrollar la sucesión  $x[n]$  sobre el cilindro y recorrer su circunferencia, mientras que recuperar la señal de longitud finita a partir de la sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$  puede visualizarse como desenrollar el cilindro y extenderlo sobre un plano de modo que la sucesión se grafica sobre un eje lineal en lugar de sobre un eje circular (módulo  $N$ ).

Tal como se definió en la Sección 4.2, la sucesión formada por los coeficientes  $\tilde{X}[k]$  de la serie discreta de Fourier de la sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$  también es una sucesión periódica de período  $N$ . Para mantener la dualidad entre los dominios tiempo y frecuencia, se elegirán los coeficientes de la serie de Fourier que se asocian a la sucesión de longitud finita de forma que también sean una sucesión finita de largo  $N$  correspondientes a un período de  $\tilde{X}[k]$ . La sucesión de duración finita, que se indicará como  $X[k]$ , se denominará a Transformada Discreta de Fourier (TDF) de la sucesión (de longitud finita)  $x[n]$ . Por lo tanto, la TDF  $X[k]$  está relacionada con los coeficientes de la SDF  $\tilde{X}[k]$  por la relación

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y

$$\tilde{X}[k] = X[(k \text{ módulo } N)] = X[(k)_N]. \quad (4.57)$$

Teniendo en cuenta la definición de la SDF de las ecuaciones (4.4) y (4.5), repetidas aquí

por comodidad

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

y que las sumatorias sólo tienen en cuenta las muestras (en tiempo  $n$  o en frecuencia  $k$ ) que están comprendidas entre 0 y  $N-1$ , la Transformada Discreta de Fourier (TDF) queda definida como

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, & \text{si } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (4.58)$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, & \text{si } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es habitual escribir las ecuaciones de análisis y de síntesis de la TDF de manera más compacta como:

ecuación de análisis:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (4.59)$$

ecuación de síntesis:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (4.60)$$

es decir, el hecho que  $X[k] = 0$  fuera del intervalo  $0 \leq k \leq N-1$  y que  $x[n] = 0$  para  $n$  fuera del rango  $0 \leq n \leq N-1$  está implícito y no declarado explícitamente. La relación entre  $x[n]$  y  $X[k]$  establecida por las ecuaciones (4.59) y (4.60) se indicará como

$$x[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X[k].$$

También es habitual en los textos simplificar la notación usando los *factores de rotación*

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}},$$

(note el signo “-” de la exponencial), de modo que las ecuaciones de análisis y de síntesis se leen como

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$$

Al reescribir las ecuaciones (4.5) y (4.4) en la forma de (4.59) y (4.60) para las sucesiones de longitud finita, no se ha eliminado la periodicidad inherente a estas expresiones. Como sucede con la SDF, la TDF  $X[k]$  está formada por muestras de la transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD)  $X(e^{j\omega})$  y si la ecuación de síntesis (4.4) se evalúa fuera del intervalo  $0 \leq n \leq N-1$ , el resultado que se obtiene no es nulo, sino la extensión periódica de  $x[n]$ . Esta periodicidad inherente está siempre presente. A veces puede dificultar los resultados (como en el caso de las rotaciones) o a veces puede hacerlos más comprensibles

(como en el caso de las propiedades de simetría) pero ignorarla totalmente seguramente tendrá consecuencias. Al definir la TDF se admite que sólo interesan los valores de  $x[n]$  en el intervalo  $0 \leq n \leq N - 1$  porque  $x[n]$  es nula fuera de ese intervalo, y que interesan los valores de  $X[k]$  para  $0 \leq k \leq N - 1$  porque estos son los valores que se necesitan en la ecuación (4.60).

Cuando se calcula la TDF de una sucesión de longitud finita, es fundamental especificar el orden  $N$  de la TDF, o el largo a partir del cual se “repite”  $x[n]$  para formar la sucesión periódica. Por tal motivo es frecuente decir que se calcula la “transformada de orden  $N$ ” o la “transformada de orden  $N$ ” de una sucesión.

#### EJEMPLO 4.13. TDF de un pulso rectangular

Sea  $x[n]$  la sucesión de 5 impulsos que se muestra en la Fig. 4.26(a). Para el cálculo de la TDF se puede elegir cualquier valor de  $N$  mayor o igual que 5.

- Si se elige  $N = 5$ , la extensión periódica  $\tilde{x}[n]$  de  $x[n]$  (es decir,  $x[n]$  repetida cada 5 muestras) es la señal constante  $\tilde{x}[n] = 1$  que se muestra en la Fig. 4.26(b). La SDF  $\tilde{X}[k]$  de  $\tilde{x}[n]$  es

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^4 1 \left( e^{-j\frac{2\pi}{5}k} \right)^n = \frac{\left( e^{-j\frac{2\pi}{5}k} \right)^5 - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{5}k} - 1} = \begin{cases} 5, & \text{si } n = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(la expresión de la sumatoria es la misma de la sección 4.2.2). Los únicos coeficientes no nulos de la SDF  $\tilde{X}[k]$  son los ubicados en  $k = 0$  y en los múltiplos de  $k = 5$  (todos los cuales representan la misma exponencial compleja). Estos coeficientes en módulo y fase se grafican en la Fig. 4.26(c) y (d), respectivamente. En la misma figura se muestra superpuesta la TFTD  $X(e^{j\omega})$  de la sucesión  $x[n]$ , poniendo en evidencia que  $\tilde{X}[k]$  son las muestras cada  $\omega = 2\pi k/5$  de  $X(e^{j\omega})$ . Según la ecuación (4.58), la TDF de 5 puntos de  $x[n]$  corresponde a la sucesión de longitud finita que resulta de extraer un período de  $\tilde{X}[k]$ ,

$$X[k] = \frac{e^{-j2\pi k} - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{5}k} - 1} = \begin{cases} 5, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n = 1, \dots, 9. \end{cases}$$

Por lo tanto, la sucesión

$$x[n] = [1, 1, 1, 1, 1]$$

tiene TDF

$$X[k] = [5, 0, 0, 0, 0].$$

que es la que se muestra en la Fig. 4.26(e).

- Si en cambio se considera que  $x[n]$  es una sucesión de largo  $N = 10$ , como la que se representa en la Fig. 4.27(a), la extensión periódica de  $x[n]$  es la señal  $\tilde{x}[n]$  que se muestra en la Fig. 4.27(b). La serie discreta de Fourier (SDF)  $\tilde{X}[k]$  de  $\tilde{x}[n]$  es la misma calculada en el Ejemplo 4.2,

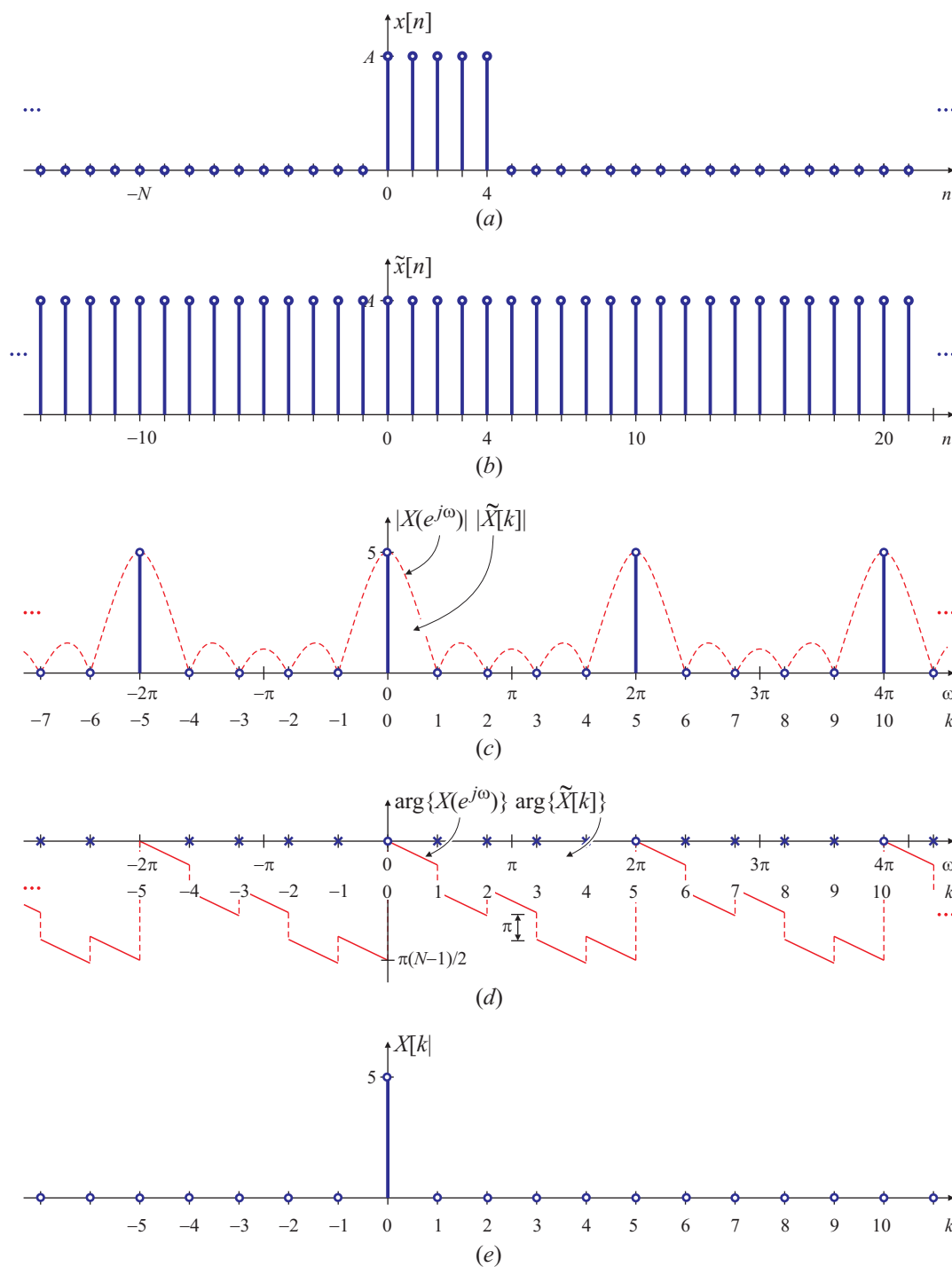
$$\tilde{X}[k] = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{10}5k} - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{10}k} - 1} = e^{-j\frac{2\pi}{5}k} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\text{sen}(\pi k/10)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

y representada en la Fig. 4.2(b), repetida en la Fig. 4.27(c) y (d) en módulo y fase, respectivamente, por comodidad. La TDF  $X[k]$  está formada por un período de  $\tilde{X}[k]$ , es decir

$$X[k] = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{10}5k} - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{10}k} - 1} = e^{-j\frac{2\pi}{5}k} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\text{sen}(\pi k/10)}, \quad k = 0, \dots, 9,$$

de modo que la sucesión

$$x[n] = [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$$



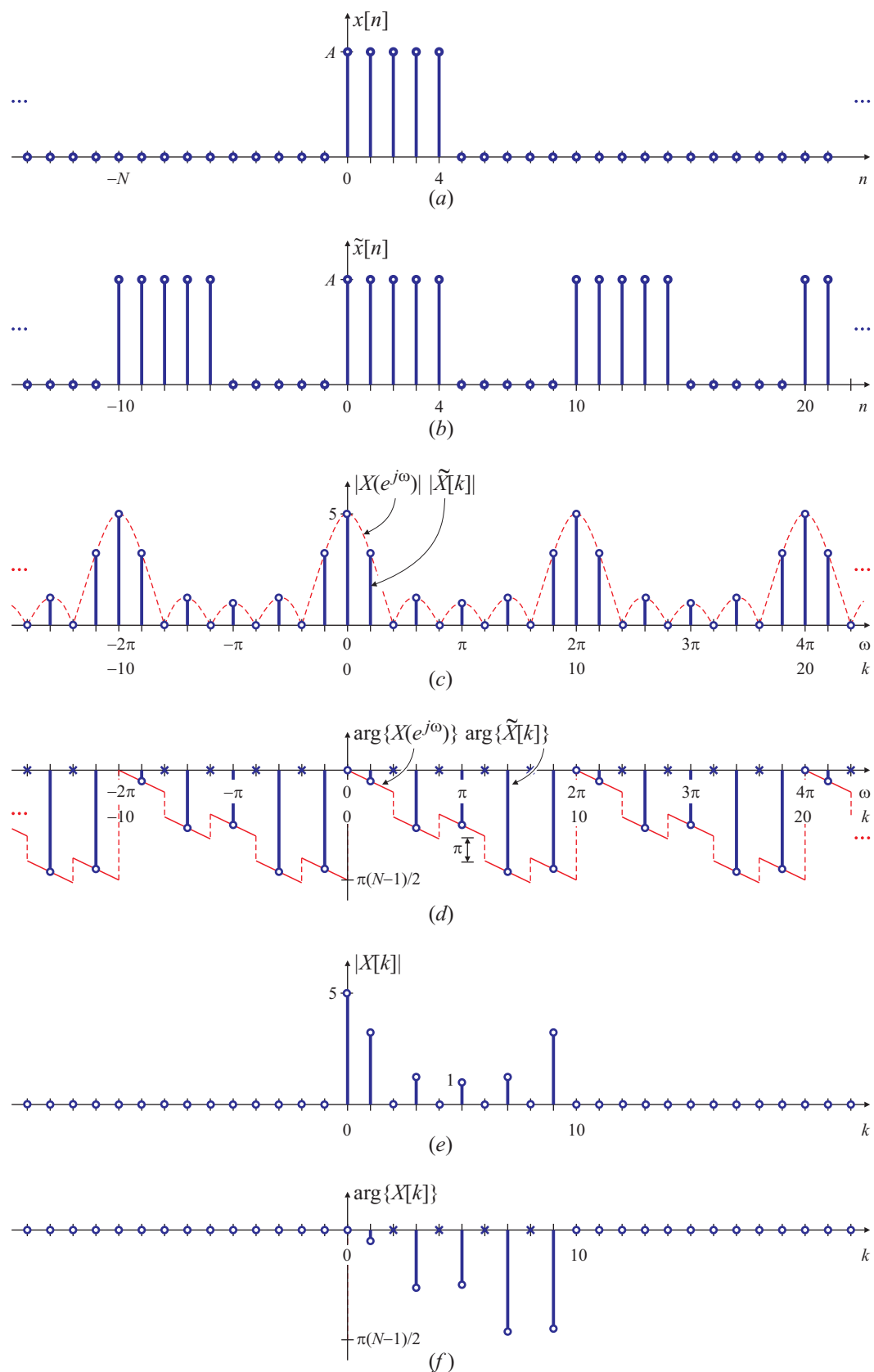
**Fig. 4.26.** Cálculo de la TDF. Sucesión  $x[n]$  de longitud finita (a). Extensión periódica  $\tilde{x}[n]$  para  $N = 5$  (b); módulo (c) y fase (d) de la SDF  $\tilde{X}[k]$ ; TDF  $X[k]$  de  $x[n]$  (e).

tiene como TDF

$$X[k] = \left[ 5, (1+\sqrt{5})e^{-j\frac{2\pi}{5}}, 0, (\sqrt{5}-1)e^{-j\frac{6\pi}{5}}, 0, 1, 0, (\sqrt{5}-1)e^{-j\frac{16\pi}{5}}, 0, (1+\sqrt{5})e^{-j\frac{18\pi}{5}} \right].$$

El módulo y la fase de la TDF  $X[k]$  de  $N = 10$  puntos se grafican en la Fig. 4.27(e) y (f),





**Fig. 4.27.** Cálculo de la TDF. Sucesión  $x[n]$  de longitud finita (a). Extensión periódica  $\tilde{x}[n]$  para  $N = 10$  (b); módulo (c) y fase (d) de la SDF  $\tilde{X}[k]$ ; módulo (e) y fase (f) de la TDF  $X[k]$  de  $x[n]$

respectivamente. □

En general, en el cálculo de la TDF (o de la SDF) es difícil encontrar expresiones “cerradas” para la TDF, salvo en algunos casos específicos, como los mostrados en los ejemplos más arriba.

#### 4.7.1. Relaciones entre la TFTD y la TDF para señales de longitud finita

Si  $x[n]$  es una señal de longitud finita, es decir que  $x[n]$  no es idénticamente nula en el intervalo  $0 \leq n \leq L-1$ , su Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) está dada por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\omega n}. \quad (4.61)$$

La Transformada Discreta de Fourier de orden  $N$ , donde  $N \geq L$  es

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.62)$$

donde la segunda igualdad sale de observar que  $x[n] = 0$  para  $L \leq n \leq N-1$ . Comparando entonces (4.61) con (4.62), es evidente que

$$X[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

es decir, que la TDF  $X[k]$  de una sucesión está formada por las muestras cada  $\omega_k = 2\pi k/N$  de su TFTD  $X(e^{j\omega})$ . En muchas ocasiones, esto facilita el cálculo analítico de varias transformadas, como se observa en el siguiente ejemplo.

##### EJEMPLO 4.14. TDF de un pulso exponencial

Sea la sucesión

$$x[n] = \begin{cases} Ae^{j\omega_0 n}, & \text{si } 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que se muestra en la Fig. 4.28(a). Su TFTD  $X(e^{j\omega})$  es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} = A \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j(\omega-\omega_0)n} = A \frac{e^{-j(\omega-\omega_0)L} - 1}{e^{-j(\omega-\omega_0)} - 1}$$

que puede escribirse como

$$X(e^{j\omega}) = Ae^{-j(\omega-\omega_0)\frac{L-1}{2}} \frac{\text{sen}[(\omega-\omega_0)L/2]}{\text{sen}[(\omega-\omega_0)/2]}. \quad (4.63)$$

Esta TFTD, representada en módulo y fase en la Fig. 4.28(b), es similar a la TFTD del promediador, desplazado en frecuencia una cantidad  $\omega_0$ .

La TDF de orden  $N$  de esta sucesión es

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{j\omega_0 n}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = A \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)n} = A \frac{e^{-j(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)L} - 1}{e^{-j(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)} - 1},$$

que puede expresarse como

$$X[k] = Ae^{-j(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)\frac{L-1}{2}} \frac{\text{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0\right)\frac{L}{2}\right]}{\text{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0\right)/2\right]} \quad (4.64)$$

Comparando (4.63) con (4.64) es evidente que

$$X[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}.$$

Esta relación permite vislumbrar la “forma” de la TDF  $X[k]$  “mostrando” la TDF  $X(e^{j\omega})$  cada  $\omega_k = 2\pi k/N$ , como se representa en la Fig. 4.28(c). Las figuras se dibujaron en la misma escala para resaltar la relación  $X[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$ , pero debe quedar claro que el eje de abscisas en la Fig. 4.28(b) es la variable continua  $\omega$ , mientras que en la Fig. 4.28(c) es la variable discreta  $k$ .  $\square$

Es interesante analizar qué ocurre cuando  $L = N$  y la frecuencia  $\omega_0$  de la señal es un múltiplo de  $2\pi/N$ , es decir,  $\omega_0 = 2\pi k_0/N$ , con  $k_0 \in \mathbb{Z}$ .

#### EJEMPLO 4.15. TDF de un pulso exponencial

Sea  $x[n]$  la sucesión de largo  $N$  formada por  $k_0$  ciclos ( $0 \leq k_0 \leq N-1$ ) de una exponencial compleja,

$$x[n] = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

representada en la Fig. 4.28(c) para  $k_0 = 1$ . Esa señal es similar a la del Ejemplo anterior, pero:

- la frecuencia de la señal es un múltiplo exacto de  $2\pi/N$ , es decir,  $\omega_0 = 2\pi k_0/N$ , con  $k_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq k_0 \leq N-1$ .
- El orden de la TDF coincide con el largo de la señal ( $L = N$ ).

La Transformada de Fourier de Tiempo discreto es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} Ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}e^{-j\omega n} = A \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k_0)n} = A \frac{e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k_0)N} - 1}{e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k_0)} - 1}$$

que puede escribirse como

$$X(e^{j\omega}) = Ae^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k_0)\frac{N-1}{2}} \frac{\text{sen}\left[(\omega - \frac{2\pi}{N}k_0)N/2\right]}{\text{sen}\left[(\omega - \frac{2\pi}{N}k_0)/2\right]}.$$

Esta TFTD se representa en módulo y fase en la Fig. 4.28(d).

La TDF de esta señal, calculada por definición, es

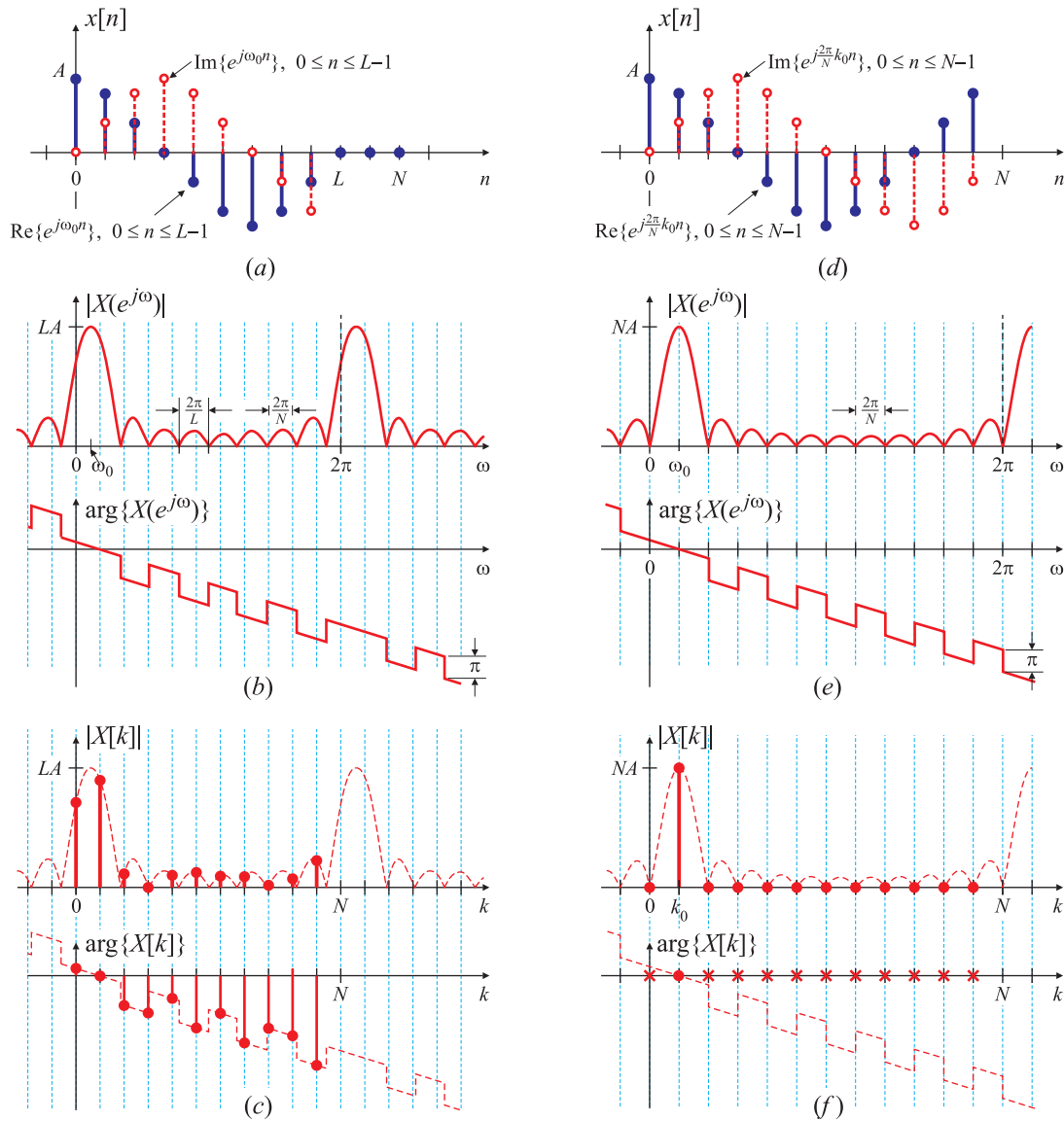
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} Ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = A \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)n}.$$

La última sumatoria ha sido estudiada en la Sección 4.2.2.1, y para  $0 \leq n \leq N-1$ , se verifica que

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)n} = N\delta[k - k_0].$$

Por lo tanto,

$$X[k] = AN\delta[k - k_0]. \quad (4.65)$$



**Fig. 4.28.** Sucesión  $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$  de longitud finita  $L$  (a), su TTFD  $X(e^{j\omega})$  (b) y la TDF de  $N$  puntos  $X[k]$  (c). Sucesión  $x[n] = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$  de longitud finita  $N$  (d), su TTFD  $X(e^{j\omega})$  (e) y la TDF de  $N$  puntos  $X[k]$  (f).

Es sencillo verificar que  $X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$ :

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} &= Ae^{-j(\omega-\frac{2\pi}{N}k_0)\frac{N-1}{2}} \frac{\text{sen}[(\omega-\frac{2\pi}{N}k_0)N/2]}{\text{sen}[(\omega-\frac{2\pi}{N}k_0)/2]} \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \\
 &= Ae^{-j(\frac{2\pi}{N}k-\frac{2\pi}{N}k_0)\frac{N-1}{2}} \frac{\text{sen}[(\frac{2\pi}{N}k-\frac{2\pi}{N}k_0)N/2]}{\text{sen}[(\frac{2\pi}{N}k-\frac{2\pi}{N}k_0)/2]} \\
 &= Ae^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)\frac{N-1}{2}} \frac{\text{sen}[\frac{2\pi}{N}(k-k_0)N/2]}{\text{sen}[\frac{2\pi}{N}(k-k_0)/2]} \\
 &= Ae^{-j\pi(k-k_0)\frac{N-1}{N}} \frac{\text{sen}[\pi(k-k_0)]}{\text{sen}[\pi(k-k_0)/N]}.
 \end{aligned}$$

El numerador  $\sin[\pi(k - k_0)]$  se anula para todo  $k$  y  $k_0$  enteros. Pero en particular, si  $k = k_0$  también se anula el denominador  $\sin[\pi(k - k_0)/N]$ . Calculando el límite de esta expresión se encuentra que

$$X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \begin{cases} NA, & \text{si } k = k_0, \\ 0, & \text{si } k \neq k_0, \end{cases}$$

para  $0 \leq k \leq N-1$ , que naturalmente coincide con (4.65). La TDF  $X[k]$  se representa en módulo y fase en la Fig. 4.28(f). Para resaltar las diferencias entre la SDF y la TDF es conveniente comparar este ejemplo con el Ejemplo 4.3.  $\square$

La distinción entre la señal de longitud finita  $x[n]$  y la sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$  puede parecer menor, ya que una y otra están relacionadas por las ecuaciones (4.53) y (4.55), y a partir de ellas se puede obtener una a partir de la otra. Sin embargo, esta distinción se vuelve importante al considerar las propiedades de la TDF y los efectos que los cambios en  $X[k]$  producen en  $x[n]$  y viceversa. Este punto de vista se pone de manifiesto en la siguiente sección, donde se discuten las propiedades de la TDF.

## 4.8. Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

En esta sección se estudian una serie de propiedades de la TDF para sucesiones de longitud finita. La presentación es similar a la de la Sección 4.3, “Propiedades de la SDF” para sucesiones periódicas. Sin embargo, se presta especial atención a la relación entre la hipótesis de longitud finita de las señales y la periodicidad implícita de la representación por TDF de señales de longitud finita.

### 4.8.1. Propiedad de área

Esta propiedad relaciona el valor de la muestra en el origen de un dominio con la suma de las muestras en el otro. En particular, si se calcula  $X[k]$  en  $k = 0$  se tiene

$$X[k]\big|_{k=0} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \bigg|_{k=0} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].$$

En otras palabras, el valor de la TDF  $X[k]$  en  $k = 0$  es la suma de todas las muestras de la señal  $x[n]$ , como se representa en la Fig. 4.29(a).

De manera similar, el valor de la sucesión temporal  $x[n]$  en  $n = 0$  está dada por

$$x[n]\big|_{n=0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \bigg|_{n=0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k],$$

es decir, la muestra de la sucesión  $x[n]$  en  $n = 0$  es la suma de todas las muestras de la TDF  $X[k]$ , escaladas por  $1/N$ .

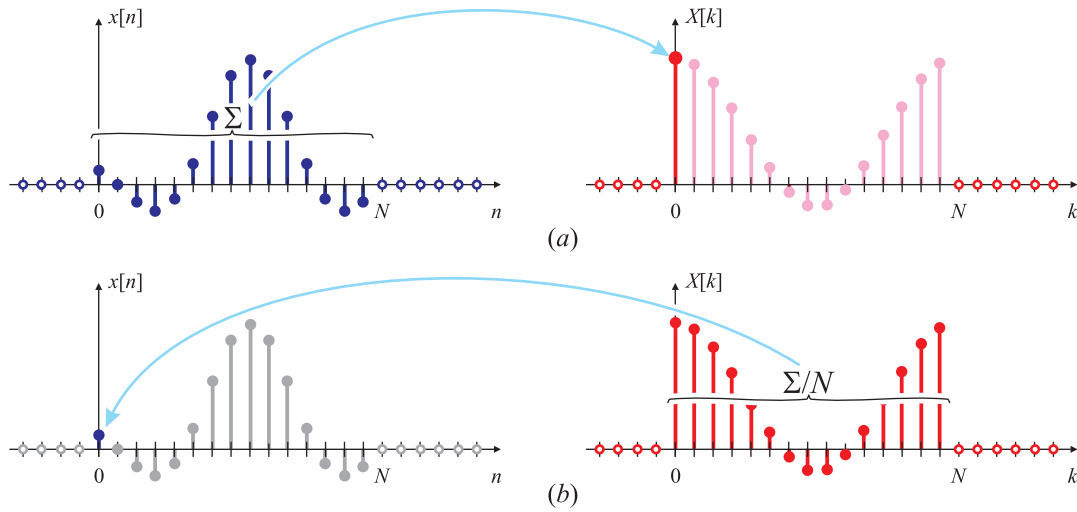


Fig. 4.29. Representación de la propiedad de área de la TDF.

#### EJEMPLO 4.16. Propiedad de área de la TDF

Se  $x[n]$  la sucesión del Ejemplo 4.15,

$$x[n] = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

cuya TDF es

$$X[k] = AN\delta[k - k_0].$$

Es sencillo verificar que

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} Ae^{j\frac{2\pi}{N}k_0n} = A \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}k_0N} - 1}{e^{j\frac{2\pi}{N}k_0} - 1} = 0,$$

que naturalmente coincide con  $X[k]$  en  $k = 0$ :

$$X[k]|_{k=0} = X[0] = 0.$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} AN\delta[k - k_0] = A,$$

que es el valor de la muestra  $x[n]$  en  $n = 0$ . □

#### 4.8.2. Linealidad

Si dos señales de longitud finita  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  se combinan linealmente, es decir, si

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n],$$

entonces la TDF de  $x_3[n]$  es

$$X_3[k] = aX_1[k] + bX_2[k]. \quad (4.66)$$

Si  $x_1[n]$  tiene largo  $N_1$  y  $x_2[n]$  tiene largo  $N_2$ , entonces la longitud de  $x_3[n]$  será  $N_3 = \max[N_1, N_2]$ . Para que (4.66) tenga sentido, las TDF  $X_1[k]$  y  $X_2[k]$  de  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ , respectivamente, tienen que ser TDF del mismo orden  $N \geq N_3$ . Por ejemplo, si  $N_1 < N_2$ , se pueden calcular las TDF de largo  $N_2$ , y entonces  $X_1[k]$  es la TDF de  $N_2$  puntos de  $x_1[n]$  “aumentada” con  $N_2 - N_1$  ceros. Es decir, la TDF de  $N_2$  puntos de  $x_1[n]$  es

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_1[n] e^{-j \frac{2\pi}{N_2} nk} = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1[n] e^{-j \frac{2\pi}{N_2} nk}, \quad k = 0, \dots, N_2 - 1$$

(note que se suma hasta  $N_1 - 1$  porque el resto de las muestras hasta  $N_2 - 1$  son los ceros “agregados”, pero que el exponente de la exponencial compleja es  $-j2\pi kn/N_2$ ). La TDF de  $N_2$  puntos de  $x_2[n]$  es

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2[n] e^{-j \frac{2\pi}{N_2} nk}, \quad k = 0, \dots, N_2 - 1.$$

En resumen, si

$$x_1[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X_1[k]$$

y

$$x_2[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X_2[k]$$

entonces

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} aX_1[k] + bX_2[k],$$

donde los largos de las sucesiones y de sus transformadas de Fourier son todos iguales al máximo de las longitudes de  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ . También es posible calcular TDF de mayor longitud aumentando la longitud de las dos sucesiones con tantos ceros como se desee.

La técnica de agregar ceros al final de una sucesión para llevarla a la longitud deseada se conoce como *padding* de ceros.

#### EJEMPLO 4.17. Propiedad de linealidad de la TDF

Sea  $x_1[n]$  una sucesión de longitud  $N_1 = 5$  formada por 5 impulsos unitarios,

$$x_1[n] = \sum_{r=0}^4 \delta[n-r] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4]$$

y  $x_2[n]$  una sucesión de largo  $N_2 = 10$ , también compuesta por 10 impulsos unitarios,

$$x_2[n] = \sum_{r=0}^9 \delta[n-r]$$

tal como se muestra en la Fig. 4.30(a) y (b), respectivamente. Como  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  no tienen la misma longitud, para poder combinarlas linealmente es necesario pensar que las muestras que “faltan” en la sucesión más corta son nulas. En este caso, para que  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  tengan la misma longitud, es necesario agrandar  $x_1[n]$  con cinco ceros:

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \dots, 4, \\ 0, & \text{si } n = 5, \dots, 9. \end{cases}$$

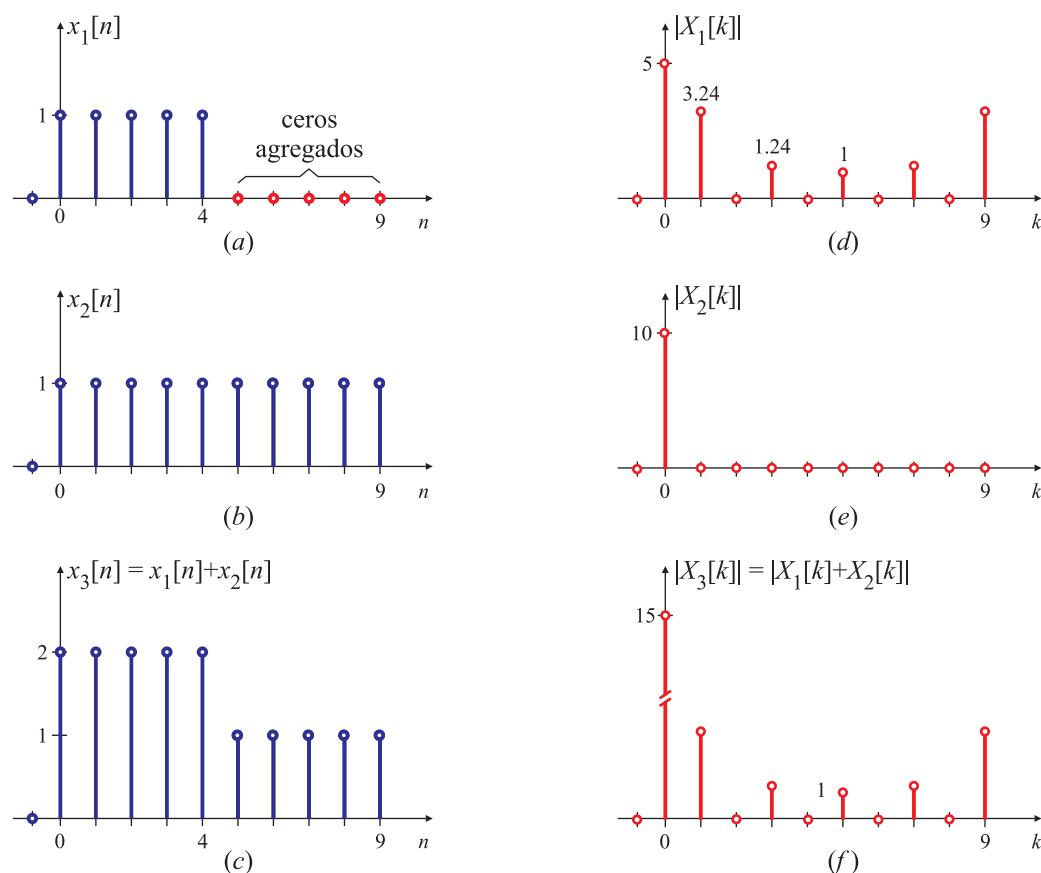


Fig. 4.30. Demostración de la propiedad de linealidad de la TDF.

Las TDF  $X_1[k]$  y  $X_2[k]$  de  $N = 10$  puntos de las sucesiones de longitud finita  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  ya han sido calculadas en los ejemplos anteriores,

$$\begin{aligned}
 X_1[k] &= \left[ 5, (1+\sqrt{5})e^{-j\frac{2\pi}{5}}, 0, (\sqrt{5}-1)e^{-j\frac{6\pi}{5}}, 0, e^{-j\frac{10\pi}{5}}, 0, (\sqrt{5}-1)e^{-j\frac{16\pi}{5}}, 0, (1+\sqrt{5})e^{-j\frac{18\pi}{5}} \right] \\
 &= \left[ 5, 3,2631e^{-j\frac{2\pi}{5}}, 0, 1,2361e^{-j\frac{6\pi}{5}}, 0, 1, 0, 1,2361e^{-j\frac{16\pi}{5}}, 0, 3,2631e^{-j\frac{18\pi}{5}} \right] \\
 X_2[k] &= \begin{cases} 10, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n = 1, \dots, 9. \end{cases}
 \end{aligned}$$

y se representan en la Fig. 4.30(d) y (e), respectivamente. Si  $x_3[n]$  es la combinación lineal de  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  (simplemente la suma en este ejemplo)

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n],$$

representada en la Fig. 4.30(c), de acuerdo a la propiedad de linealidad su TDF  $X_3[k]$  será

$$X_3[k] = X_1[k] + X_2[k],$$

es decir

$$X_3[k] = \left[ 15, (1+\sqrt{5})e^{-j\frac{2\pi}{5}}, 0, (\sqrt{5}-1)e^{-j\frac{6\pi}{5}}, 0, 1, 0, (\sqrt{5}-1)e^{-j\frac{16\pi}{5}}, 0, (1+\sqrt{5})e^{-j\frac{18\pi}{5}} \right]$$

como se muestra en la Fig. Fig. 4.30(f). Estos resultados se pueden corroborar calculando la TDF por definición, usando la ecuación (4.59), o bien usando Matlab, como se indica a continuación. □



**Código 4.1.** Comandos para calcular las TDF del Ejemplo 4.17 con Matlab

---

```

1 x1 = [1 1 1 1 1];
2 X1 = fft(x1,10);
3
4 x2 = ones(1,10);
5 X2 = fft(x2);

```

---

Los resultados de los ejemplos y ejercicios de esta sección pueden revisarse muy fácilmente usando Matlab, o cualquier otro software de cálculo matemático. El comando que ejecuta el cálculo de la TDF en Matlab es `fft`, que acepta un par de argumentos: la sucesión  $x[n]$  y el largo de la TDF que se desea calcular. Por ejemplo, las TDF del ejemplo anterior pueden calcularse usando los comandos indicados en el listado 4.1

En la línea 1 se define el vector `x1` que representa la sucesión  $x_1[n]$ . En la línea 2 se calcula la TDF usando el comando `fft`: el primer argumento es el vector, y el segundo el orden (largo) de la TDF. El comando se encarga de agregar los ceros que hagan falta hasta completar el largo deseado. En la línea 4 se define el vector `x2` que representa la sucesión  $x_2[n]$ , en este caso usando el comando `ones` que construye un vector de una fila y 10 columnas formados enteramente por “unos”. En la línea 5 se calcula la TDF de este vector; como en este caso el largo del vector coincide con el orden de la TDF, no hace falta incluir el segundo argumento.

**EJEMPLO 4.18. TDF de un pulso coseno**

Sea la sucesión

$$x[n] = \begin{cases} A \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_0n\right), & \text{si } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que se muestra en la Fig.4.31(a), donde se supone que  $0 \leq k_0 \leq N-1$ . Para calcular su TDF  $X[k]$  se puede aplicar la propiedad de linealidad: recordando que  $2 \cos \theta = e^{j\theta} + e^{-j\theta}$ , se tiene que

$$x[n] = \frac{A}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n} + \frac{A}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0n}.$$

La transformada de  $e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}$  se calculó en el Ejemplo 4.15, y vale  $N\delta[k - k_0]$ . Por analogía, uno estaría tentado a escribir que la transformada de  $e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0n} = e^{j\frac{2\pi}{N}(-k_0)n}$  es  $N\delta[k - (-k_0)]$ . Sin embargo, este es un impulso discreto de amplitud  $N$  que está ubicado en  $k = -k_0$ , que está fuera del rango  $0 \leq k \leq N-1$  donde está definida la TDF. Este inconveniente puede resolverse de dos maneras:

- Haciendo la extensión periódica de  $e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0n}$ , calcular su SDF (como se hizo en el Ejemplo 4.3) y tomar el período comprendido entre 0 y  $N-1$ , o
- Notando que  $e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0n} = e^{j\frac{2\pi}{N}(-k_0)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k_0)n}$ , ya que  $e^{j\frac{2\pi}{N}Nn} = 1$ .

En cualquiera de los dos casos, la transformada de  $e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0n}$  es  $N\delta[k - (N - k_0)]$ , que es un impulso de amplitud  $N$  ubicado en  $k = N - k_0$ , que está comprendido dentro del intervalo  $0 \leq k \leq N-1$ . Por lo tanto, en base a los pares transformados

$$\begin{aligned} e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n} &\xrightarrow{\text{TDF}} N\delta[k - k_0], \\ e^{j\frac{2\pi}{N}(-k_0)n} &\xrightarrow{\text{TDF}} N\delta[k - (N - k_0)], \end{aligned}$$

se puede establecer que la TDF de  $x[n]$  es  $X[k] = NA/2\delta[k - k_0] + NA/2\delta[k - (N - k_0)]$ , tal como se muestra en la Fig.4.31(b). De esta forma queda demostrado el par transformado

$$A \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_0n\right) \xrightarrow{\text{TDF}} \frac{NA}{2}\delta[k - k_0] + \frac{NA}{2}\delta[k - (N - k_0)], \quad \begin{cases} 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 \leq k_0 \leq N-1. \end{cases}$$

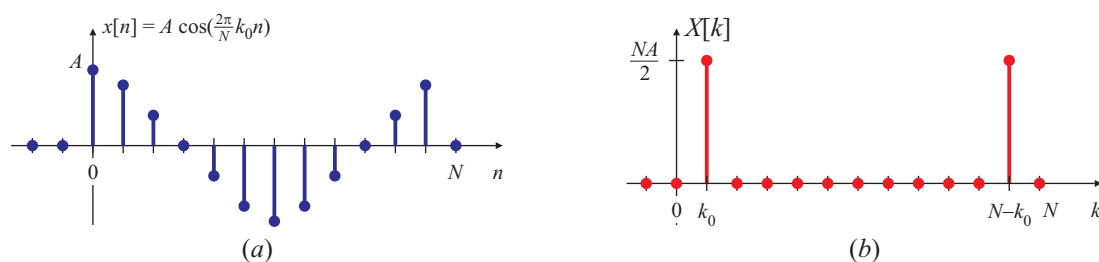


Fig. 4.31. Pulso coseno y su TDF.

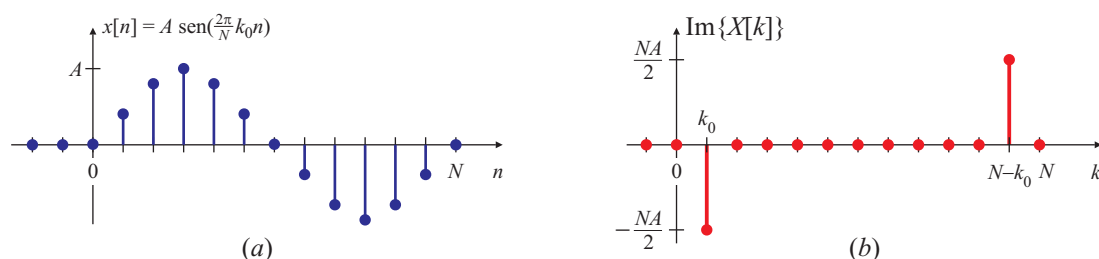


Fig. 4.32. Pulso seno y su TDF.

Es ilustrativo comparar este par transformado con el calculado usando la SDF en el Ejemplo 4.4. □

Es un ejercicio rutinario calcular la TDF de un pulso senoidal, que resulta en el par transformado

$$A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N} k_0 n \right) \xrightarrow{\text{TDF}} -j \frac{NA}{2} \delta[k - k_0] + j \frac{NA}{2} \delta[k - (N - k_0)], \quad \begin{cases} 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0 \leq k_0 \leq N - 1. \end{cases}$$

representado en la Fig. 4.32.

### 4.8.3. Desplazamiento circular de una sucesión

De acuerdo a los resultados del Capítulo anterior (específicamente la Sección ??, y la Propiedad ??) si  $x[n]$  es una sucesión cuya transformada de Fourier de tiempo discreto es  $X(e^{j\omega})$ , la TFTD de la sucesión  $x[n - n_d]$  (la sucesión  $x[n]$  desplazada en  $n_d$  muestras) es  $e^{-jn_d\omega} X(e^{j\omega})$ . Es decir, que un desplazamiento en tiempo de  $n_d$  muestras, donde un  $n_d$  positivo se asocia a un retardo de tiempo y un  $n_d$  negativo a un adelanto de tiempo, corresponde en el dominio de la frecuencia a cambiar la fase de la transformada de Fourier por un factor de fase lineal  $e^{-jn_d\omega}$ .

Para estudiar el efecto en la TDF, es conveniente utilizar la relación que existe entre la SDF y la TDF. En la Sección 4.3.2 se discutió la propiedad de desplazamiento temporal de una sucesión periódica  $\tilde{x}[n]$  para los cual los coeficientes de la SDF están dados por  $\tilde{X}[k]$ . En este caso, la sucesión desplazada  $\tilde{x}[n - n_d]$  tiene una SDF  $e^{-j\frac{2\pi}{N}n_d k} \tilde{X}[k]$ .

En el marco de la TDF no tiene sentido el desplazamiento temporal de una sucesión  $x[n]$ , porque si  $x[n]$  se extiende entre 0 y  $N - 1$ , la sucesión desplazada  $x[n - n_d]$  se extiende

entre  $n_d$  y  $N - 1 + n_d$ , y por lo tanto, queda fuera del rango de la definición dada por la ecuación (4.59). Entonces resulta conveniente definir una nueva sucesión  $x_1[n]$  cuya TDF  $X_1[k]$  se construye multiplicando la TDF  $X[k]$  de  $x[n]$  por el factor de fase lineal  $e^{-j\frac{2\pi}{N}n_d k}$ , y antitransformando  $X_1[k]$  para hallar  $x_1[n]$ . Es decir, si

$$x[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X[k]$$

se desea conocer

$$x_1[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X_1[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_d k} X[k].$$

Como la TDF de  $N$  puntos representa una sucesión de longitud finita de largo  $N$ , tanto  $x[n]$  y  $x_1[n]$  deben ser nulas fuera del intervalo  $0 \leq n \leq N - 1$ , y por lo tanto,  $x_1[n]$  no es un corrimiento temporal de  $x[n]$ . El resultado correcto surge de los desarrollos de la Sección 4.3.2, y de la interpretación de la TDF como los coeficientes de la SDF de  $\tilde{x}_1[n] = x_1[((n))_N]$ . En particular, de las ecuaciones (4.55) y (4.57) se tiene que

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}[k] = X[((k))_N].$$

De la misma manera puede definirse una sucesión periódica  $\tilde{x}_1[n]$  tal que

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[((n))_N] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}_1[k] = X_1[((k))_N],$$

donde, por hipótesis,

$$X_1[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_d k} X[k]. \quad (4.67)$$

Entonces, los coeficientes de la SDF de  $\tilde{x}_1[n]$  son

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_d((k))_N} X[((k))_N].$$

Como

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}n_d((k))_N} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_d k}$$

por la periodicidad de  $e^{-j\frac{2\pi}{N}n_d k}$  cada  $N$  muestras tanto en  $k$  como en  $n_d$ , se tiene

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_d k} X[((k))_N],$$

y de los resultados de la Sección 4.3.2 resulta que

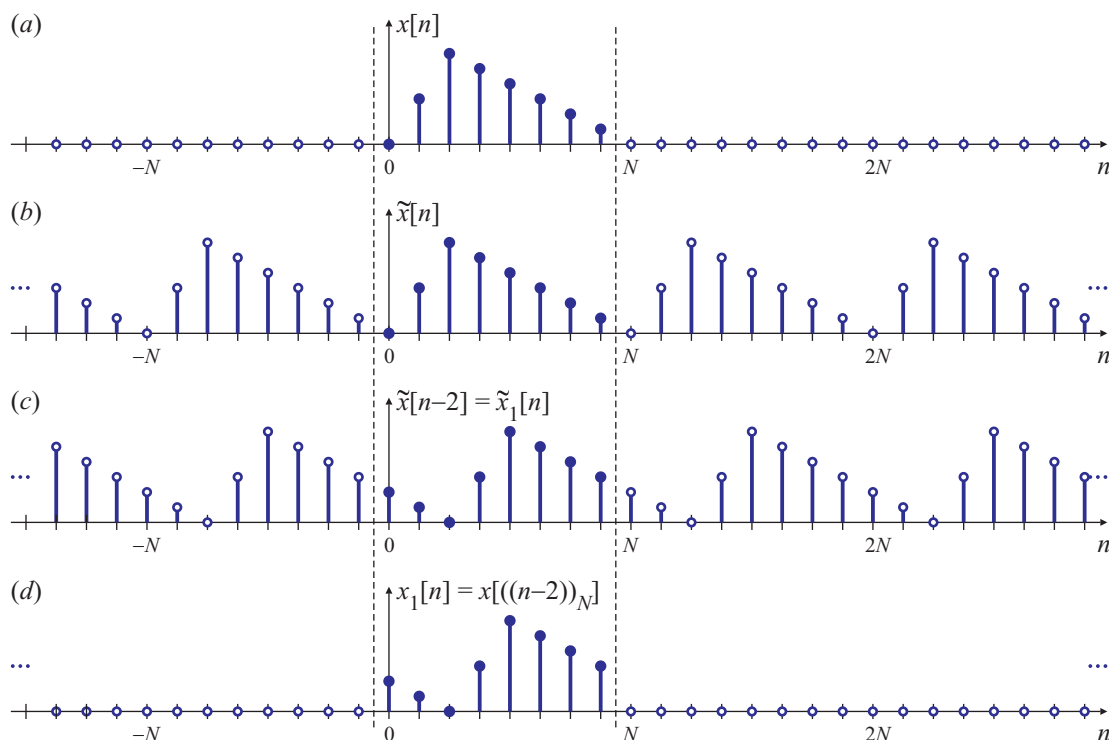
$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n - n_d] = x[(n - n_d)_N].$$

La operación módulo garantiza que el argumento de  $x[\cdot]$  nunca queda fuera del rango  $0 \leq n \leq N - 1$  donde está definida  $x[n]$ . Entonces, la sucesión de longitud finita  $x_1[n]$  cuya TDF está dada por la ecuación (4.67) es

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n] = x[(n - n_d)_N], & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que como es usual se notará  $x_1[n] = x[(n - n_d)_N]$ . Por lo tanto, se puede establecer el par transformado

$$x[(n - n_d)_N] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} e^{-j\frac{2\pi}{N}n_d k} X[k].$$



**Fig. 4.33.** Demostración de la propiedad de desplazamiento circular: el efecto en la sucesión temporal de multiplicar la TDF por un factor de fase lineal.

Debido a la periodicidad del factor de rotación, un desplazamiento en  $n_d$  unidades hacia la derecha es lo mismo que un desplazamiento en  $(N - n_d)$  unidades hacia la izquierda. En efecto,

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-n_d)k} = \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}(N)k}}_{=1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(-n_d)k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(-n_d)k},$$

de modo que

$$x[((n - n_d))_N] = x[((n - [N - n_d])]_N).$$

Como se aprecia en el ejemplo siguiente, esta propiedad suele conocerse como *desplazamiento circular* de una sucesión.

#### EJEMPLO 4.19. Desplazamiento circular de una sucesión

El procedimiento del desplazamiento circular de una sucesión se muestra en la Fig. 4.33 para  $n_d = 2$ . Se desea calcular  $x[((n-2))_N]$  con  $N = 8$ . A partir de  $x[n]$  (Fig. 4.33(a)) se construye su extensión periódica  $\tilde{x}[n]$  replicando  $x[n]$  cada  $N = 8$  muestras

$$\tilde{x}[n] = \sum_r x[n - rN],$$

o bien usando la función módulo

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N].$$

La extensión periódica  $\tilde{x}[n]$  está representada en la Fig. 4.33(b). Esta sucesión se retarda  $n_d$  muestras, obteniéndose la señal

$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n - n_d] = \tilde{x}[n - 2],$$

**Código 4.2.** Cálculo del desplazamiento circular de una sucesión usando la TDF

---

```

1  %% Calculo del desplazamiento circular de una sucesion
2
3  x = [ 0 3 6 5 4 3 2 1];           % la sucesión x[n]
4  N = length(x);                   % el largo de la sucesion
5  nd = 2;                           % el corrimiento circular
6  X = fft(x);                       % la TDF X[k]
7  W = exp(-1i*2*pi/N*nd*(0:N-1)); % el factor de fase lineal
8  X1 = W.*X;                       % La TDF afectada por el factor de fase lineal
9  x1 = ifft(X1);                   % la sucesión x1[n] = x[(n-nd)_N]

```

---

graficada en la Fig. 4.33(c). Esta figura permite comprobar que desplazar  $\tilde{x}[n]$  en  $n_d = 2$  muestras para la derecha es lo mismo que desplazarla  $N - n_d = 6$  muestras para la izquierda. Finalmente, para obtener la señal  $x_1[n]$  se toma un período de la señal periódica  $\tilde{x}_1[n]$ :

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[((n))_N]$$

y también

$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-2] = x[(n-2)_N]$$

es claro que

$$x_1[n] = x[(n-2)_N]$$

como se muestra en la Fig. 4.33(d). Si  $X[k]$  es la TDF de  $x[n]$ , se verifica que  $X_1[k]$ , la TDF de  $x_1[n]$  está relacionada con  $X[k]$  según la ecuación (4.67), es decir,  $X_1[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_d k} X[k]$ .  $\square$

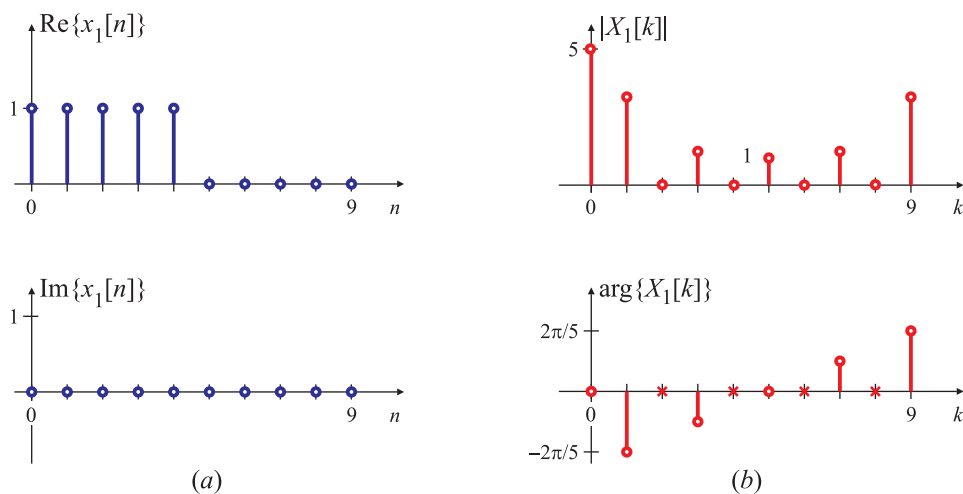
Para obtener el desplazamiento circular de una sucesión, muchas veces es más conveniente calcular su TDF, aplicar el factor de fase lineal y calcular la antitransformada. Este procedimiento se basa en el hecho de que existen algoritmos muy eficientes para calcular la TDF de una sucesión.

El listado 4.2 muestra el cálculo del desplazamiento circular usando esta técnica. En la línea 1 se define una sucesión  $x[n]$  similar a la de la Fig. 4.33(a), y su TDF  $X[k]$  se calcula en la línea 6. En la línea 7 se define el factor de fase lineal, que es un vector del mismo largo que  $X[k]$ . En la línea 8 se afecta la TDF  $X[k]$  por el factor de fase lineal (multiplicación punto a punto) y finalmente en la línea 9 se obtiene la sucesión  $x_1[n]$  que está relacionada con  $x[n]$  por un corrimiento circular de  $n_d$  muestras:  $x_1[n] = x[(n-2)_N]$ .

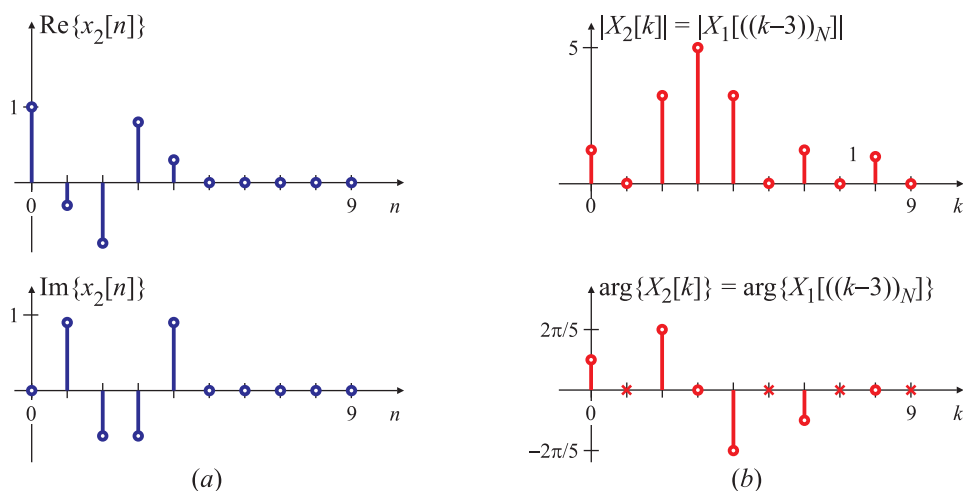
De manera enteramente similar al desarrollo realizado para derivar la propiedad de desplazamiento circular (en tiempo) de una sucesión, puede derivarse la propiedad de desplazamiento *frecuencial*, o de *modulación*. En este caso la relación es:

$$e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n} x[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X[((k-k_0))_N], \quad (4.68)$$

como se comprueba en el siguiente ejemplo.



**Fig. 4.34.** Desplazamiento circular en frecuencia: señal  $x_1[n]$  (a) y su TDF  $X_1[k]$  (b).



**Fig. 4.35.** Propiedad de desplazamiento circular en frecuencia: señal  $x_2[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}x_1[n]$  (a) y su TDF  $X_2[k] = X_1[(k-k_0)_N]$  (b).

#### EJEMPLO 4.20. Desplazamiento circular en frecuencia de una sucesión

Sea  $x_1[n]$  el pulso rectangular del Ejemplo 4.7,

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

representado en la Fig. 4.34(a). Su TDF de  $N = 10$  puntos es

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{10}5k} - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{10}k} - 1} = e^{-j\frac{2\pi}{5}k} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\text{sen}(\pi k/10)}, \quad k = 0, \dots, 9, \quad (4.69)$$

o bien, numéricamente,

$$\begin{aligned} X_1[k] &= \left[ 5, (1+\sqrt{5})e^{-j\frac{2\pi}{5}}, 0, (\sqrt{5}-1)e^{-j\frac{\pi}{5}}, 0, 1, 0, (\sqrt{5}-1)e^{j\frac{\pi}{5}}, 0, (1+\sqrt{5})e^{j\frac{2\pi}{5}} \right] \\ &= \left[ 5, 3,2631e^{-j\frac{2\pi}{5}}, 0, 1,2361e^{-j\frac{\pi}{5}}, 0, 1, 0, 1,2361e^{j\frac{\pi}{5}}, 0, 3,2631e^{j\frac{2\pi}{5}} \right] \end{aligned}$$

cuyo módulo y fase se grafican en la Fig. 4.34(b). Si

$$x_2[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}x_1[n], \quad (4.70)$$

con  $N = 10$  y  $k_0 = 3$ , se tiene que

$$\begin{aligned} x_2[n] &= \left[ 1, e^{j\frac{2\pi}{10}3 \times 1}, e^{j\frac{2\pi}{10}3 \times 2}, e^{j\frac{2\pi}{10}3 \times 3}, e^{j\frac{2\pi}{10}3 \times 4}, 0, 0, 0, 0, 0 \right] \\ &= \left[ 1, e^{j\frac{3\pi}{5}}, e^{j\frac{6\pi}{5}}, e^{j\frac{9\pi}{5}}, e^{j\frac{2\pi}{5}}, 0, 0, 0, 0, 0 \right] \end{aligned}$$

que se puede escribir como parte real e imaginaria,

$$\begin{aligned} \text{Re}\{x_2[n]\} &= \left[ 1, -\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, 0, 0, 0, 0, 0 \right] \\ &= [1, -0,3090, -0,8090, 0,8090, 0,3090, 0, 0, 0, 0], \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Im}\{x_2[n]\} &= \left[ 0, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, 0, 0, 0, 0, 0 \right] \\ &= [0, 0,9511, -0,5878, -0,5878, 0,9511, 0, 0, 0, 0], \end{aligned}$$

representadas en la Fig. 4.35(a). Para calcular la TDF  $X_2[k]$  de  $x_2[n]$ , es más conveniente utilizar la expresión (4.70), ya que permite encontrar una expresión cerrada. Recordando que  $N = 10$ ,

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n} x_1[n] \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)n} = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{10}5(k-k_0)} - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{10}(k-k_0)} - 1}$$

y comparando con (4.69) es evidente que

$$X_2[k] = e^{-j\frac{2\pi}{5}(k-k_0)} \frac{\text{sen}[\pi(k-k_0)/2]}{\text{sen}[\pi(k-k_0)/10]}, \quad k = 0, \dots, 9,$$

que para  $k_0 = 3$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} X_2[k] &= \left[ (\sqrt{5}-1)e^{j\frac{\pi}{5}}, 0, (1+\sqrt{5})e^{j\frac{2\pi}{5}}, 5, (1+\sqrt{5})e^{-j\frac{2\pi}{5}}, 0, (\sqrt{5}-1)e^{-j\frac{\pi}{5}}, 0, 1, 0 \right] \\ &= [1,2361e^{j\frac{\pi}{5}}, 0, 3,2361e^{j\frac{2\pi}{5}}, 5, 3,2631e^{-j\frac{2\pi}{5}}, 0, 1,2361e^{-j\frac{\pi}{5}}, 0, 1, 0], \end{aligned}$$

tal como se representa en la Fig. 4.35(b). Es evidente entonces que

$$X_2[k] = X_1[(k-k_0)_N],$$

tal como establece la propiedad (4.68). □

#### 4.8.4. Dualidad

Ya que la TDF están tan relacionada con la SDF, es natural que la TDF posea una propiedad de dualidad similar a la discutida en la Sección 4.3.3 para la SDF. Un examen cuidadoso de las ecuaciones de análisis (4.59) y síntesis (4.60) muestra que sólo difieren en el factor  $1/N$  y en el signo del exponente de las potencias de  $e^{j\frac{2\pi}{N}}$ .

La propiedad de dualidad de la TDF puede demostrarse aplicando la relación entre la TDF y la SDF como se hizo en la derivación de la propiedad de desplazamiento circular de la sección anterior. A este fin, sea  $x[n]$  una sucesión de longitud finita, y  $X[k]$  su TDF. Sus extensiones periódicas son

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N], \quad \tilde{X}[k] = X[((k))_N], \quad (4.71)$$

de modo que

$$\tilde{x}[n] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} \tilde{X}[k].$$

De acuerdo a la propiedad de dualidad para la SDF, dada por las ecuaciones (4.25)-(4.26),

$$\tilde{X}[n] \xLeftrightarrow{\text{SDF}} N\tilde{x}[-k].$$

Si se define la sucesión  $\tilde{x}_1[n] = \tilde{X}[n]$ , donde uno de sus períodos es la sucesión de longitud finita  $x_1[n] = X[n]$ , entonces los coeficientes de la SDF de  $\tilde{x}_1[n]$  son  $\tilde{X}_1[k] = N\tilde{x}[-k]$ , y por lo tanto, la TDF de  $x_1[n]$  es

$$X_1[k] = \begin{cases} N\tilde{x}[-k], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

o, de manera equivalente,

$$X_1[k] = \begin{cases} Nx[(-k)_N], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por lo tanto, la propiedad de dualidad para la TDF puede expresarse como sigue. Si

$$x[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X[k], \quad (4.72)$$

entonces

$$X[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} Nx[(-k)_N], \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (4.73)$$

La sucesión  $Nx[(-k)_N]$  es  $Nx[k]$  con los índices “dados vuelta” módulo  $N$ . Recordando la definición de la función módulo (Ejemplo 4.7), es sencillo verificar que

$$((-k))_N = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 0, \\ N - k, & \text{si } 1 \leq k \leq N-1. \end{cases}$$

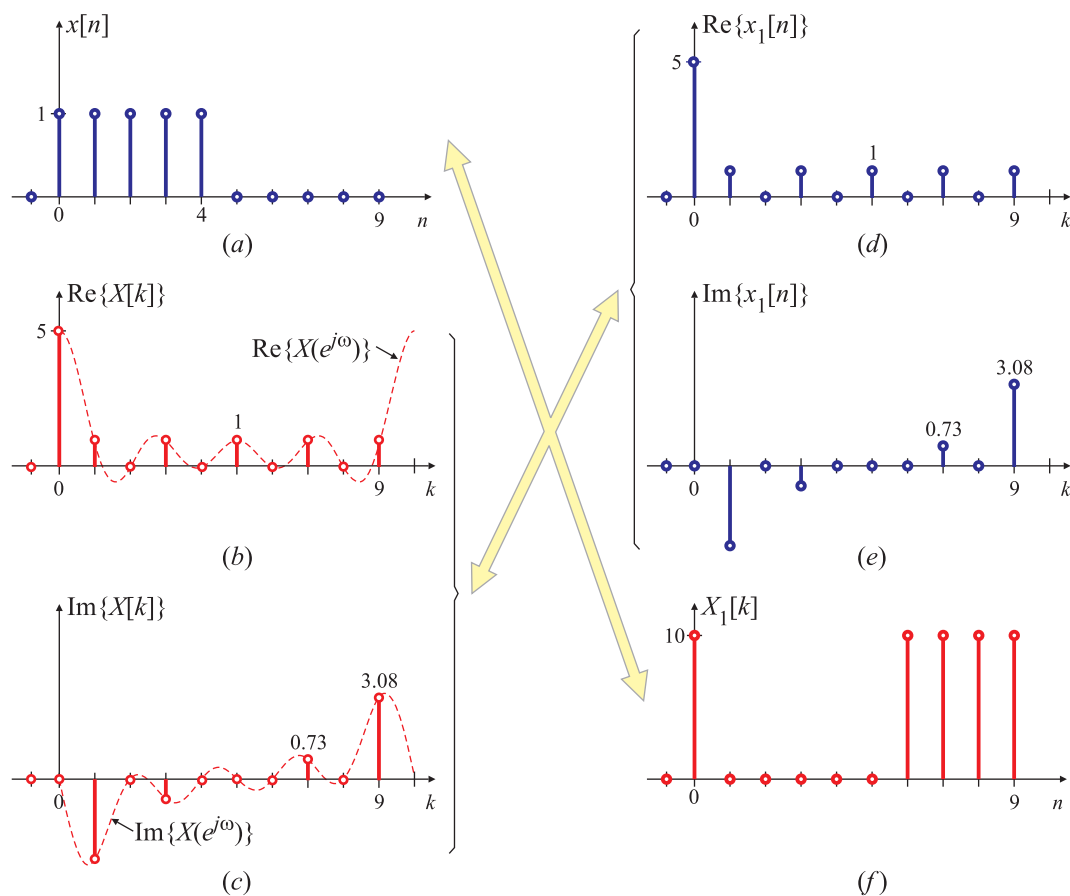
Como ocurre en el caso del desplazamiento circular, el proceso de inversión módulo  $N$  generalmente se aprecia mejor tomando en cuenta las extensiones periódicas de las sucesiones.

#### EJEMPLO 4.21. Relación de dualidad de la TDF

Para mostrar la relación de dualidad representada por las ecuaciones (4.72)-(4.73), sea  $x[n]$  la sucesión del Ejemplo 4.17, graficada en la Fig. 4.36(a),

$$x[n] = \sum_{r=0}^4 \delta[n-r] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4],$$





**Fig. 4.36.** Representación de la propiedad de dualidad: sucesión real de longitud finita  $x[n]$  (a); parte real e imaginaria de la TDF  $X[k]$  (b) y (c); la parte real e imaginaria de la sucesión dual  $x_1[n] = X[n]$  (d) y (e); la TDF de  $x_1[n]$ ,  $X_1[k] = x[((-k))_N]$  (f).

cuya TDF es

$$X[k] = \left[ 5, (1+\sqrt{5})e^{-j\frac{2\pi}{5}}, 0, (1-\sqrt{5})e^{-j\frac{6\pi}{5}}, 0, e^{-j\frac{10\pi}{5}}, 0, (1-\sqrt{5})e^{-j\frac{14\pi}{5}}, 0, (1+\sqrt{5})e^{-j\frac{18\pi}{5}} \right].$$

Las partes real e imaginaria de la TDF son

$$\begin{aligned} X_R[k] &= 5\delta[k] + (1+\sqrt{5})\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\delta[k-1] + (1-\sqrt{5})\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\delta[k-3] + \\ &\quad + \cos\left(\frac{10\pi}{5}\right)\delta[k-5] + (1-\sqrt{5})\cos\left(\frac{14\pi}{5}\right)\delta[k-7] + (1+\sqrt{5})\cos\left(\frac{18\pi}{5}\right)\delta[k-9], \\ &= 5\delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-3] + \delta[k-5] + \delta[k-7] + \delta[k-9] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_I[k] &= (1+\sqrt{5})\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\delta[k-1] + (1-\sqrt{5})\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\delta[k-3] + \\ &\quad + \sin\left(\frac{10\pi}{5}\right)\delta[k-5] + (1-\sqrt{5})\sin\left(\frac{14\pi}{5}\right)\delta[k-7] + (1+\sqrt{5})\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\delta[k-9] \\ &= -3,07768\delta[k-1] + 0,72654\delta[k-3] - 0,72654\delta[k-7] + 3,07768\delta[k-9] \end{aligned}$$

representada en las Figs. 4.36(b) y Fig. 4.36(c), respectivamente. Renombrando el eje horizontal ( $n$  en lugar de  $k$ ) se obtiene la sucesión  $x_1[n] = X[n]$ , como se muestra en las Figs. 4.36(d) y Fig. 4.36(e). De acuerdo a la relación de dualidad, la TDF de 10 puntos de la sucesión (compleja)  $x_1[n] = X[n]$  es la sucesión  $X_1[k] = x[((-k))_{10}]$ , graficada en la Fig. 4.36(f):

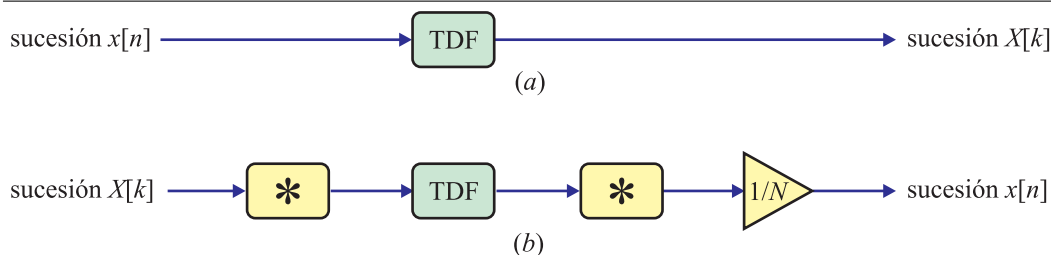
$$X_1[k] = 10\delta[k] + 10\delta[k-5] + 10\delta[k-6] + 10\delta[k-7] + 10\delta[k-8] + 10\delta[k-9]$$

**Código 4.3.** Verificación de la propiedad de dualidad la TDF

```

1 %% verificación de la propiedad de dualidad
2 x = [1 1 1 1 1 0 0 0 0]; % la sucesión temporal x[n]
3 X = fft(x); % X[k], la TDF de x[n]
4 x1 = X; % una señal temporal x1[n] con la "forma" de X[k]
5 X1 = fft(x1) % la TDF de x1[n], que debe coincidir con x[(-k)_N]

```

**Fig. 4.37.** Esquema de un algoritmo para el cálculo de la TDF (a). Empleo del mismo algoritmo para el cálculo de la TDF inversa (b)

Este resultado se puede verificar fácilmente con Matlab ejecutando los comandos indicados en el Listado 4.3. □

#### 4.8.5. Formulación alternativa de la ecuación de síntesis

Dada la gran similitud de las ecuaciones de análisis (4.59) y síntesis (4.60) de la TDF, se puede usar la ecuación de análisis para calcular la TDF inversa de una sucesión. Si  $x[n]$  es una sucesión temporal y  $X[k]$  su TDF, ambas están relacionadas como

$$X[m] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] e^{-j \frac{2\pi}{N} \ell m}, \quad x[m] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X[\ell] e^{j \frac{2\pi}{N} \ell m},$$

donde se han cambiado los índices de las sumatorias y de las variables para poner de manifiesto la similitud de ambas expresiones. Es claro que si se conjuga  $x[m]$ , resulta

$$x^*[m] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X^*[\ell] e^{-j \frac{2\pi}{N} \ell m}$$

y conjugando nuevamente

$$x[m] = \frac{1}{N} \left( \sum_{\ell=0}^{N-1} X^*[\ell] e^{-j \frac{2\pi}{N} \ell m} \right)^*.$$

El término dentro de los paréntesis es el cálculo de la ecuación de análisis que tiene como argumento el conjugado de  $X[k]$ . Por lo tanto, si se quiere calcular la TDF inversa de una sucesión  $X[k]$ , una alternativa posible es conjugarla, calcular la TDF de esta sucesión, conjugar el resultado, y escalarlo por  $1/N$ . De esta forma, la misma rutina de cálculo usada para calcular la TDF  $X[k]$  de una sucesión  $x[n]$  también puede utilizarse para calcular la TDF inversa, como se representa en la Fig. 4.37.

### 4.8.6. Propiedades de simetría

Como la TDF  $X[k]$  de una sucesión  $x[n]$  son los coeficientes de la SDF de la sucesión periódica  $\tilde{x}[n] = x[(n))_N]$  las propiedades de simetría asociadas con la TDF pueden inferirse de las propiedades de simetría de la SDF sintetizadas en la Tabla 4.1 en la Sección 4.3.4. Teniendo en cuenta la relación (4.71), junto con las propiedades 1 y 2 de la Tabla 4.1, se tiene

$$x^*[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X^*[((-k))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

y

$$x^*[((-n))_N] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X^*[k], \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Las propiedades 3 a 6 de la Tabla 4.1 parten de considerar de una sucesión *periódica* cualquiera como la suma de una sucesión periódica conjugada simétrica y otra periódica conjugada antisimétrica. Esto sugiere descomponer la sucesión  $x[n]$  de *longitud finita*  $N$  en dos sucesiones de longitud finita  $N$  correspondientes a un período de las componentes conjugada simétrica y conjugada antisimétrica de  $\tilde{x}[n]$ , que se notarán como  $x_{ep}[n]$  y  $x_{op}[n]$ , respectivamente. Entonces, teniendo en cuenta que

$$\tilde{x}[n] = x[(n))_N]$$

y que la parte conjugada simétrica es

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n]) \quad (4.74)$$

y que la parte conjugada antisimétrica es

$$\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n]) \quad (4.75)$$

se definen las sucesiones conjugadas simétrica  $x_{ep}[n]$  y conjugada antisimétrica  $x_{op}[n]$  de longitud finita como:

$$x_{ep}[n] = \tilde{x}_e[n], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (4.76)$$

$$x_{op}[n] = \tilde{x}_o[n], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (4.77)$$

que también puede notarse como

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}(x[(n))_N + x^*[((-n))_N]), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (4.78)$$

$$x_{op}[n] = \frac{1}{2}(x[(n))_N - x^*[((-n))_N]), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (4.79)$$

donde tanto  $x_{ep}[n]$  como  $x_{op}[n]$  son sucesiones de longitud finita, es decir, ambas son nulas fuera del intervalo  $0 \leq n \leq N-1$ . Como  $((-n))_N = N-n$  y  $((n))_N = n$  para  $0 \leq n \leq N-1$ , las ecuaciones (4.78) y (4.79) también pueden escribirse como

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[N-n]), \quad 1 \leq n \leq N-1$$

$$x_{ep}[0] = \frac{1}{2}(x[0] + x^*[0]) = \text{Re}\{x[0]\}$$

y

$$\begin{aligned}x_{op}[n] &= \frac{1}{2}(x[n] - x^*[N - n]), \quad 1 \leq n \leq N - 1 \\x_{op}[0] &= \frac{1}{2}(x[0] - x^*[0]) = j \operatorname{Im}\{x[0]\}\end{aligned}$$

Esta forma es conveniente porque evita el cálculo “modulo  $N$ ” de los índices.

Las sucesiones  $x_{ep}[n]$  y  $x_{op}[n]$  se denominan las componente *conjugada simétrica periódica* y la componente *conjugada antisimétrica periódica*, respectivamente. Si  $x_{ep}[n]$  y  $x_{op}[n]$  son reales, se denominarán la componente *par periódica* y la componente *impar periódica*, respectivamente. A pesar de estos nombres, ni  $x_{ep}[n]$  ni  $x_{op}[n]$  son señales periódicas: son sucesiones de longitud finita que son iguales a un período de las sucesiones periódicas  $\tilde{x}_e[n]$  y  $\tilde{x}_o[n]$ , respectivamente.

En el caso en que  $x_{ep}[n]$  y  $x_{op}[n]$  son reales, aplicando las ecuaciones (4.78) y (4.79) se puede ver que verifican

$$\begin{aligned}x_{ep}[n] &= x_{ep}[N - n], \quad \text{para } 0 \leq n \leq N - 1, \\x_{ep}[0] &= \text{arbitrario},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}x_{op}[n] &= -x_{op}[N - n], \quad \text{para } 0 \leq n \leq N - 1, \\x_{op}[0] &= 0.\end{aligned}$$

Estas expresiones usualmente permiten verificar más fácilmente la simetría de una sucesión dada.

Naturalmente, las componentes conjugada simétrica/antisimétrica periódicas  $x_{ep}[n]$  y  $x_{op}[n]$ , respectivamente, no son equivalentes a las partes par e impar  $x_e[n]$  y  $x_o[n]$  de una señal, tal como fueron definidas en las ecuaciones (??) y (??) del Capítulo ??, repetidas aquí por conveniencia:

$$\begin{aligned}x_e[n] &= \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]), \\x_o[n] &= \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]).\end{aligned}$$

Sin embargo, se puede mostrar que ambos tipos de componentes están relacionadas por

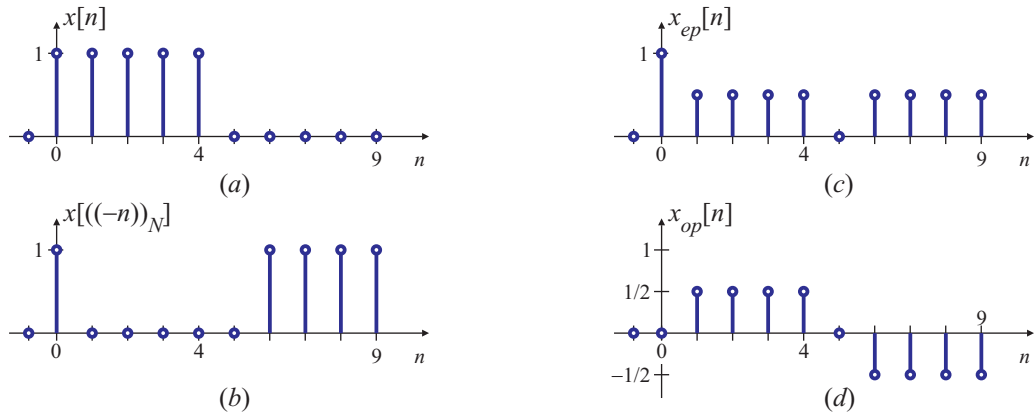
$$x_{ep}[n] = x_e[n] + x_e[n - N], \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad (4.80)$$

$$x_{op}[n] = x_o[n] + x_o[n - N], \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (4.81)$$

Esto significa que  $x_{ep}[n]$  y  $x_{op}[n]$  pueden generarse superponiendo  $x_e[n]$  y  $x_o[n]$  con sus réplicas retardadas  $N$  muestras en el intervalo  $0 \leq n \leq N - 1$ .

Las ecuaciones (4.78) y (4.79) definen  $x_{ep}[n]$  y  $x_{op}[n]$  en función de  $x[n]$ . La relación inversa, que permite expresar  $x[n]$  en función de  $x_{ep}[n]$  y  $x_{op}[n]$  se puede obtener usando (4.74) y (4.75) para expresar  $\tilde{x}[n]$  como

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n].$$



**Fig. 4.38.** Descomposición de la señal  $x[n]$  (a) en sus partes conjugada simétrica  $x_{ep}[n]$  (c) y conjugada antisimétrica  $x_{op}[n]$  (d).

Entonces,

$$x[n] = \tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (4.82)$$

Combinando (4.82) con (4.76) y (4.77) se encuentra que

$$x[n] = x_{ep}[n] + x_{op}[n].$$

Debido a que tanto  $x[n]$  como  $X[k]$  son funciones de un argumento discreto, también la TDF de una señal puede descomponerse en una parte conjugada simétrica periódica y otra conjugada antisimétrica periódica:

$$\begin{aligned} X_{ep}[k] &= \frac{1}{2}(X[k] + X^*[((-k))_N]), \quad 0 \leq k \leq N-1, \\ X_{op}[k] &= \frac{1}{2}(X[k] - X^*[((-k))_N]), \quad 0 \leq k \leq N-1, \end{aligned}$$

donde se tuvo en cuenta que  $((k))_N = k$  para  $0 \leq k \leq N-1$ .

Las siguientes propiedades de simetría de la TDF asociadas a las propiedades 3 a 6 de la Tabla 4.1 de la SDF resultan naturalmente de estos desarrollos:

$$\operatorname{Re}\{x[n]\} \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X_{ep}[k], \quad (4.83)$$

$$j \operatorname{Im}\{x[n]\} \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X_{op}[k], \quad (4.84)$$

$$x_{ep}[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} \operatorname{Re}\{X[k]\}. \quad (4.85)$$

$$x_{op}[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} j \operatorname{Im}\{X[k]\}. \quad (4.86)$$

#### EJEMPLO 4.22. TDF de una sucesión conjugada simétrica

La sucesión

$$x[n] = A \cos\left(\frac{2\pi}{N} k_0 n\right), \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

de la Fig. 4.31(a) es conjugada simétrica, porque

$$x[n] = x[N-n], \quad \text{para } 1 \leq n \leq N-1.$$

La TDF de esta sucesión es

$$X[k] = \frac{NA}{2}\delta[k - k_0] + \frac{NA}{2}\delta[k - (N - k_0)],$$

como se calculó en el Ejemplo 4.18, que es una sucesión real, y que también es conjugada simétrica, ya que

$$X[k] = X[N - k], \quad \text{para } 1 \leq n \leq N - 1.$$

En síntesis, la TDF de una sucesión  $x[n]$  real, conjugada simétrica es una sucesión  $X[k]$  que también es real y conjugada simétrica, como establece la propiedad (4.85).  $\square$

#### EJEMPLO 4.23. TDF de una sucesión conjugada antisimétrica

La sucesión

$$x[n] = A \sin\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right), \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

de la Fig. 4.32(a) es conjugada antisimétrica, porque

$$x[n] = -x[N - n], \quad \text{para } 1 \leq n \leq N - 1.$$

La TDF de esta sucesión es

$$X[k] = -j\frac{NA}{2}\delta[k - k_0] + j\frac{NA}{2}\delta[k - (N - k_0)],$$

que es una sucesión imaginaria pura, y que también es conjugada antisimétrica, ya que

$$X[k] = -X[N - k], \quad \text{para } 1 \leq n \leq N - 1.$$

En síntesis, la TDF de una sucesión  $x[n]$  real, conjugada antisimétrica es una sucesión  $X[k]$  que es imaginaria pura y conjugada antisimétrica, como establece la propiedad (4.86).  $\square$

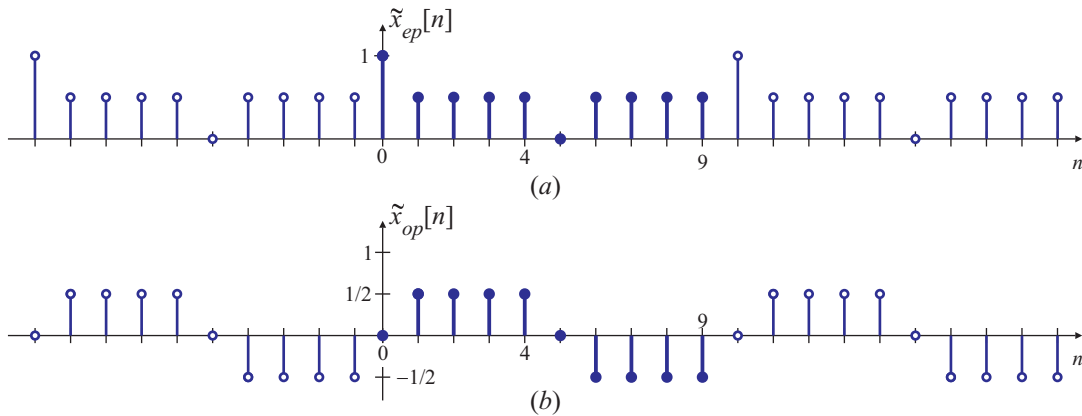
#### EJEMPLO 4.24. Descomposición de una señal

Para calcular las partes conjugada simétrica  $x_{ep}[n]$  y antisimétrica  $x_{op}[n]$  de la señal  $x[n]$  representada en la Fig. 4.38(a) utilizando las ecuaciones (4.78) y (4.79) es necesario calcular previamente  $x[(-n)_N]$ . Para el rango entre 0 y  $N - 1$ , se tiene que

$$x[(-n)_N] = \begin{cases} x[0], & \text{si } n = 0, \\ x[N - n], & \text{si } 1 \leq n \leq N - 1, \end{cases}$$

tal como se muestra en la Fig. 4.38(b). La parte conjugada simétrica  $x_{ep}[n]$  se obtiene aplicando (4.78), resultando en la señal representada en la Fig. 4.38(c). La parte conjugada antisimétrica  $x_{op}[n]$  se calcula con (4.79); su gráfica se muestra en la Fig. 4.38(d).

Como tanto  $x_{ep}[n]$  como  $x_{op}[n]$  están definidas sobre  $0 \leq n \leq N - 1$  no son señales *pares* o *impares*. Sin embargo, sus extensiones periódicas sí lo son:  $\tilde{x}_{ep}[n]$ , la extensión periódica de  $x_{ep}[n]$  es *par*, mientras que  $\tilde{x}_{op}[n]$ , la extensión periódica de  $x_{op}[n]$  es *impar*, como se muestra en las Figs. 4.39(a) y 4.39(b), respectivamente.  $\square$



**Fig. 4.39.** Extensión periódica  $\tilde{x}_{ep}[n]$  (a) y  $\tilde{x}_{op}[n]$  (b) de las partes conjugada simétrica  $x_{ep}[n]$  y conjugada antisimétrica  $x_{op}[n]$  de la señal  $x[n]$  de la Fig. 4.38.

#### EJEMPLO 4.25. Señales paras/impares y conjugadas simétricas/antisimétricas

Para calcular la parte par  $x_e[n]$  e impar  $x_o[n]$  de la señal  $x[n]$  del Ejemplo 4.24, que se muestra nuevamente en la Fig. 4.40(a), es necesario calcular primero  $x[-n]$ , que se representa en la Fig. 4.40(b). Como se estudió en el Capítulo ??, la parte par  $x_e[n]$  se calcula como

$$x_e[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x[-n]),$$

y la parte impar como

$$x_o[n] = \frac{1}{2} (x[n] - x[-n]).$$

Estas señales se grafican en las Figs. 4.40(c) y (d), respectivamente. Comparando con las Figs. 4.38(c) y (d), es evidente que  $x_e[n] \neq x_{ep}[n]$ , y que  $x_o[n] \neq x_{op}[n]$ , porque  $x_{ep}[n]$  y  $x_{op}[n]$  están definidas para  $0 \leq n \leq N-1$ . Pero es sencillo verificar que se cumplen (4.80) y (4.81), es decir

$$\begin{aligned} x_{ep}[n] &= x_e[n] + x_e[n-N], \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ x_{op}[n] &= x_o[n] + x_o[n-N], \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned}$$

como resulta de comparar las señales  $x_e[n]$ ,  $x_o[n]$  de las Figs. 4.40(c) y (d) con las señales  $x_{ep}[n]$ ,  $x_{op}[n]$  de las Figs. 4.38(c) y (d), respectivamente.  $\square$

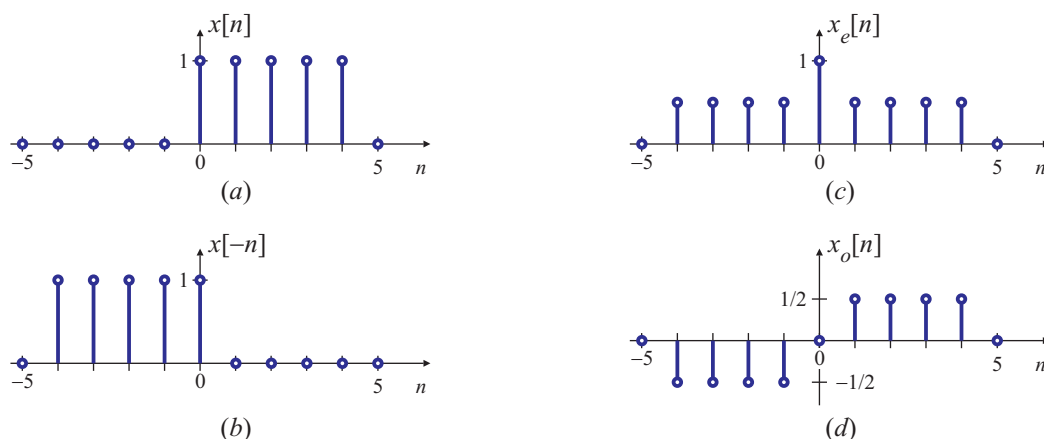
#### EJEMPLO 4.26. TDF de señales conjugadas simétricas y antisimétricas

Para calcular las TDF de las señales  $x_{ep}[n]$  y  $x_{op}[n]$  representadas en las Figs. 4.38(c) y (d) es conveniente aplicar las propiedades de simetría. Considerando que  $N = 10$ , para calcular  $Y[k] = \mathcal{F}\{x_{ep}[n]\}$  se tiene que

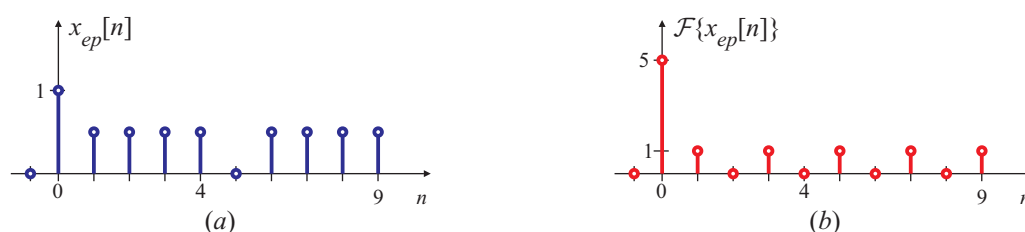
$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_{ep}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Por simetría,  $x_{ep}[n] = x_{ep}[N-n]$  para  $1 \leq n \leq N-1$ , de modo que la sumatoria puede escribirse

$$\begin{aligned} Y[k] &= x_{ep}[0] + \sum_{n=1}^4 x_{ep}[n] \left( e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} + e^{-j \frac{2\pi}{N} k(N-n)} \right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} \left( e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} + e^{-j \frac{2\pi}{N} k(N-n)} \right). \end{aligned}$$



**Fig. 4.40.** Descomposición de la sucesión  $x[n]$  (a) en su parte par  $x_e[n]$  (c) e impar  $x_o[n]$  (d).



**Fig. 4.41.** Señal conjugada simétrica  $x_{ep}[n]$  (a) y su TDF  $\mathcal{F}\{x_{ep}[n]\}$  (b).

Como  $e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-n)} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ ,

$$Y[k] = 1 + \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} \left( e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) = 1 + \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} 2 \cos \left( \frac{2\pi}{N}kn \right)$$

que resulta en

$$Y[k] = \mathcal{F}\{x_{ep}[n]\} = 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{N}k \right) + \cos \left( \frac{4\pi}{N}k \right) + \cos \left( \frac{6\pi}{N}k \right) + \cos \left( \frac{8\pi}{N}k \right), \quad (4.87)$$

Para  $N = 10$ ,  $x_{ep}[n]$  puede escribirse como

$$x_{ep}[n] = \left[ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

y su TDF, dada por (4.87) es

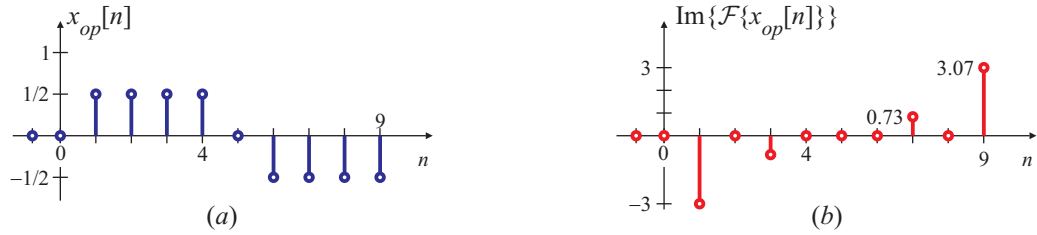
$$\mathcal{F}\{x_{ep}[n]\} = [5, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1].$$

El par transformado se representa en la Fig. 4.41. Como la señal  $x_{ep}[n]$  es conjugada simétrica, su TDF es real, y también conjugada simétrica:  $Y[k] = Y[(-k)]_N$ .

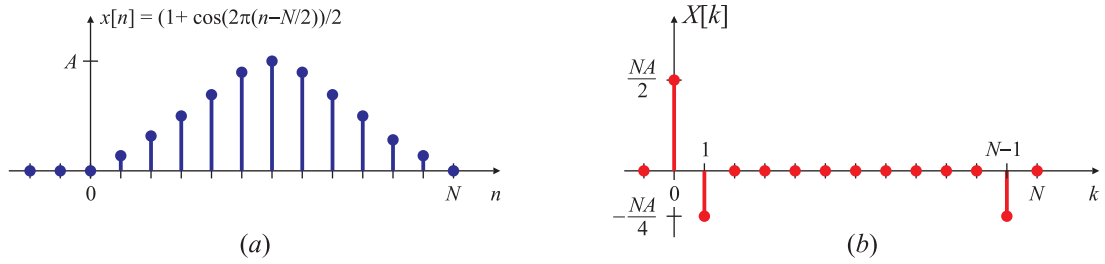
Para el cálculo de  $Z[k] = \mathcal{F}\{x_{op}[n]\}$  (la TDF de  $x_{op}[n]$ ) también es conveniente utilizar la propiedad de antisimetría de  $x_{op}[n]$ :

$$Z[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_{op}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = x_{op}[0] + \sum_{n=1}^4 x_{op}[n] \left( e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-n)} \right),$$





**Fig. 4.42.** Señal conjugada antisimétrica  $x_{op}[n]$  (a) y su TDF  $\mathcal{F}\{x_{op}[n]\}$  (b).



**Fig. 4.43.** Señal  $x[n] = A/2 - (A/2) \cos(2\pi n/N)$  (a) y su TDF  $X[k]$  (b).

donde se tiene en cuenta que  $x_{op}[0] = 0$ , y que  $x_{op}[n] = -x_{op}[N - n]$  para  $1 \leq n \leq N - 1$ . Por lo tanto,

$$Z[k] = \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} \left( e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} - e^{-j \frac{2\pi}{N} k(N-n)} \right) = \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} \left( e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} - e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \right) = -j \sum_{n=1}^4 \sin \left( \frac{2\pi}{N} kn \right), \quad (4.88)$$

que puede escribirse como

$$Z[k] = \mathcal{F}\{x_{op}[n]\} = -j \sin \left( \frac{2\pi}{N} k \right) - j \sin \left( \frac{4\pi}{N} k \right) - j \sin \left( \frac{6\pi}{N} k \right) - j \sin \left( \frac{8\pi}{N} k \right).$$

Para  $N = 10$ ,  $x_{op}[n]$  resulta

$$x_{op}[n] = \left[ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right],$$

y su TDF, dada por (4.88) es

$$\mathcal{F}\{x_{op}[n]\} = \left[ 0, -3.077j, 0, -0.7265j, 0, 0, 0, 0.7265j, 0, j3.077 \right].$$

La señal y su transformada se representan en la Fig. 4.42. Se aprecia que, como la señal  $x_{op}[n]$  es conjugada antisimétrica, su TDF es imaginaria pura, y también conjugada antisimétrica:  $Z[k] = -Z[(-k)_N]$ .  $\square$

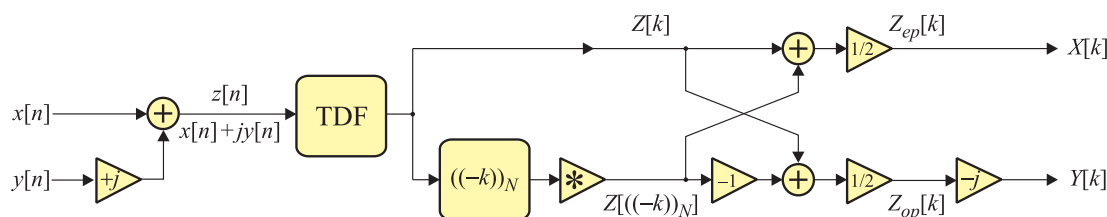
#### EJEMPLO 4.27. TDF de un coseno elevado

Sea

$$x[n] = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{N} n \right), \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

donde se supone que  $N$  es par para simplificar la notación. Esta señal, representada en la Fig. 4.43(a) para  $N = 12$ , es conjugada simétrica pues  $x[n] = x[N - n]$  para  $1 \leq n \leq N - 1$ . Para calcular su TDF se pueden aplicar la propiedad de linealidad, y los resultados de los Ejemplos 4.7 y 4.18,

$$X[k] = \frac{NA}{2} \delta[k] - \frac{NA}{4} \delta[k - 1] - \frac{NA}{4} \delta[k - (N - 1)], \quad 0 \leq k \leq N - 1,$$



**Fig. 4.44.** Esquema para calcular las TDFs  $X[k]$  e  $Y[k]$  de dos señales reales  $x[n]$  e  $y[n]$  usando una sola TDF compleja.

que está graficada en la Fig. 4.43(b) para  $N = 12$ . Se observa que  $x[n]$  es real, y conjugada simétrica, y su transformada también es real y conjugada simétrica, tal como establecen las propiedades de simetría (4.83) a (4.86)  $\square$

#### 4.8.7. Determinación simultánea de la TDF de dos señales reales

A pesar que la mayoría de las señales de interés son reales, la posibilidad de usar el mismo algoritmo para calcular tanto la TDF como la TDF inversa, como se describe en la Sección 4.8.5, hace que pueda calcularse simultáneamente las TDFs de dos señales reales calculando sólo una TDF, aprovechando las propiedades de simetría estudiadas en la Sección 4.8.6.

Sean  $x[n]$  e  $y[n]$  dos señales reales, de longitud  $N$  con TDF  $X[k]$ ,  $Y[k]$  respectivamente. Sea  $z[n]$  la señal compleja definida como

$$z[n] = x[n] + jy[n]$$

con TDF  $Z[k]$ . De acuerdo a las ecuaciones (4.83) y (4.84) se verifica que:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{z[n]\} &\xrightarrow{\text{TDF}} Z_{ep}[k], \\ j \text{Im}\{z[n]\} &\xrightarrow{\text{TDF}} Z_{op}[k], \end{aligned}$$

y entonces,

$$X[k] = Z_{ep}[k] = \frac{1}{2} (Z[k] + Z^*[((-k))_N]), \quad (4.89)$$

$$Y[k] = \frac{1}{j} Z_{op}[k] = -\frac{j}{2} (Z[k] - Z^*[((-k))_N]). \quad (4.90)$$

El esquema de cálculo de  $X[k]$  e  $Y[k]$  se muestra en la Fig. 4.44. La aplicación de esta propiedad se muestra en el siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 4.28. Determinación simultánea de la TDF de dos señales reales

Sean

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad , \quad y[n] = n, \quad 0 \leq n \leq 9,$$

La TDF de  $N = 10$  puntos de  $x[n]$ , calculada en el Ejemplo 4.21, es

$$\begin{aligned} X[0] &= 5, & X[5] &= 1, \\ X[1] &= 1 + 3,0777j, & X[6] &= 0, \\ X[2] &= 0, & X[7] &= 1 - j0,7265j, \\ X[3] &= 1 + 0,7265j, & X[8] &= 0, \\ X[4] &= 0, & X[9] &= 1 - 3,0777j. \end{aligned} \quad (4.91)$$

y la TED de  $N = 10$  puntos de  $y[n]$  es:

$$\begin{aligned} Y[0] &= 45, & Y[5] &= -5, \\ Y[1] &= -5 - 15,388j, & Y[6] &= -5 + 1,6246j, \\ Y[2] &= -5 - 6,8819j, & Y[7] &= -5 + 3,6327j, \\ Y[3] &= -5 - 3,6327j, & Y[8] &= -5 + 6,8819j, \\ Y[4] &= -5 - 1,6246j, & Y[9] &= -5 + 15,388j. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Sea  $z[n] = x[n] + jy[n]$ . Su TDF de 10 puntos,  $Z[k]$  es

$$\begin{aligned} Z[0] &= 5 - 45j, & Z[5] &= 1 + 5j, \\ Z[1] &= -14,388 + 8,0777j, & Z[6] &= 1,6246 + 5j, \\ Z[2] &= -6,8819 + 5j, & Z[7] &= 4,6327 + 4,2735j, \\ Z[3] &= -2,6327 + 5,7265j, & Z[8] &= 6,8819 + 5j, \\ Z[4] &= -1,6246 + 5j, & Z[9] &= 16,388 + 1,9223j. \end{aligned}$$

Para calcular  $Z_{ep}[k]$  y  $Z_{op}[k]$  es necesario calcular  $Z^*[((-k))_N]$ , que está dada por

$$\begin{aligned} Z^*[((0))_N] &= Z^*[0] = 5 + 45j, & Z^*[((-5))_N] &= Z[5] = 1 - 5j, \\ Z^*[((-1))_N] &= Z^*[9] = 16,388 - 1,9223j, & Z^*[((-6))_N] &= Z[4] = -1,6246 - 5j, \\ Z^*[((-2))_N] &= Z^*[8] = 6,8819 - 5j, & Z^*[((-7))_N] &= Z[3] = -2,6327 - 5,7265j, \\ Z^*[((-3))_N] &= Z^*[7] = 4,6327 - 4,2735j, & Z^*[((-8))_N] &= Z[2] = -6,8819 - 5j, \\ Z^*[((-4))_N] &= Z^*[6] = 1,6246 - 5j, & Z^*[((-9))_N] &= Z[1] = -14,388 - 8,0777j. \end{aligned}$$

Entonces,  $Z_{ep}[k] = (Z[k] + Z^*[((-k))_N])/2$  es

$$\begin{aligned} Z_{ep}[0] &= 5, & Z_{ep}[5] &= 1, \\ Z_{ep}[1] &= 1 + 3,0777j, & Z_{ep}[6] &= 0, \\ Z_{ep}[2] &= 0, & Z_{ep}[7] &= 1 - j0,7265j, \\ Z_{ep}[3] &= 1 + 0,7265j, & Z_{ep}[8] &= 0, \\ Z_{ep}[4] &= 0, & Z_{ep}[9] &= 1 - 3,0777j. \end{aligned} \quad (4.93)$$

y  $Z_{op}[k] = (Z[k] - Z^*[((-k))_N])/2$  está dado por

$$\begin{aligned} Y[0] &= 0 - 45j, & Y[5] &= 5j, \\ Y[1] &= -15,388 + 5j, & Y[6] &= 1,6246 + 5j, \\ Y[2] &= -6,8819 + 5j, & Y[7] &= 3,6327 + 5j, \\ Y[3] &= -3,6327 + 5j, & Y[8] &= 6,8819 + 5j, \\ Y[4] &= -1,6246 + 5j, & Y[9] &= 15,388 + 5j. \end{aligned} \quad (4.94)$$

comparando (4.91) con (4.93) y (4.92) con (4.94), es evidente que

$$X[k] = Z_{ep}[k], \quad Y[k] = -jZ_{op}[k]$$

como muestran (4.89) y (4.90), respectivamente.  $\square$

#### 4.8.8. Convolución circular

En la Sección 4.3.5 se mostró que la multiplicación de los coeficientes de las Series Discretas de Fourier de dos sucesiones periódicas es la Serie discreta de Fourier de la convolución periódica de las dos sucesiones. En esta sección se consideran dos sucesiones de longitud finita  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ , las dos de longitud  $N$ , con Transformadas Discretas de Fourier  $X_1[k]$  y  $X_2[k]$ , respectivamente, y se desea calcular la sucesión  $x_3[n]$  cuya TDF es  $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ . Para encontrar  $x_3[n]$  se pueden usar los resultados de la Sección 4.3.5. En particular,  $x_3[n]$  corresponde a un período de  $\tilde{x}_3[n]$ , dada por la ecuación (4.27). Entonces,

$$x_3[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{x}_1[\ell] \tilde{x}_2[n - \ell], \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad (4.95)$$

que, teniendo en cuenta que  $\tilde{x}_1[\ell] = x_1[((\ell))_N]$ , y que  $\tilde{x}_2[n - \ell] = x_2[((n - \ell))_N]$  también puede escribirse como

$$x_3[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[((\ell))_N] x_2[((n - \ell))_N], \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Como  $((\ell))_N = \ell$  para  $0 \leq \ell \leq N - 1$ , resulta que

$$x_3[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[\ell] x_2[((n - \ell))_N], \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (4.96)$$

Las ecuaciones (4.95) y (4.96) difieren de la convolución lineal entre  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ ,

$$x_3[n] = \sum_{\ell} x_1[\ell] x_2[n - \ell]$$

definida por la ecuación (??) en varios aspectos:

- En la convolución lineal, el cálculo de los valores de la sucesión  $x_3[n]$  requiere multiplicar una sucesión por una versión reflejada y desplazada en tiempo de la otra, y después sumar los valores del producto  $x_1[\ell] x_2[n - \ell]$  sobre todo  $\ell$ . Para obtener los distintos valores de la sucesión resultante de la operación de convolución, una de las sucesiones se desplaza respecto de la otra
- En la convolución definida por la ecuación (4.96), la segunda sucesión está invertida y desplazada “circularmente” en tiempo con respecto a la primera. Por este motivo, la operación de combinar dos sucesiones de longitud finita de acuerdo a la ecuación (4.96) se conoce como *convolución circular de  $N$  puntos*, enfatizando que se trata de dos señales de longitud  $N$  (o menor) y que las sucesiones se desplazan módulo  $N$ .

La convolución circular de  $N$  puntos se notará en forma abreviada como

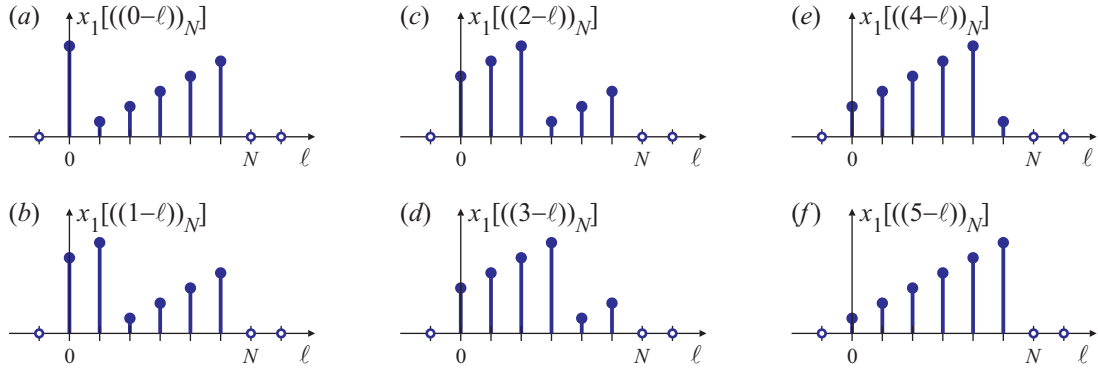
$$x_3[n] = (x_1 \circledast x_2)[n].$$

Como la TDF de  $x_3[n]$  es  $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$  y como  $X_1[k]X_2[k] = X_2[k]X_1[k]$ , se pueden repetir los desarrollos previos para encontrar que

$$x_3[n] = (x_2 \circledast x_1)[n]$$



**Fig. 4.45.** Señales  $x_1[n]$  (a) y  $x_2[n]$  (b) cuya convolución circular de largo  $N = 6$  se calcula en el Ejemplo 4.29.



**Fig. 4.46.** Desplazamientos circulares de la señal  $x_1[n]$ .

o bien

$$x_3[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[((n-\ell))_N] x_2[\ell], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (4.97)$$

que significa que la convolución circular es una operación conmutativa, como la convolución común. Por lo tanto, la convolución circular de orden (o tamaño)  $N$  entre dos sucesiones se define como

$$(x_1 \circledast x_2)[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[\ell] x_2[((n-\ell))_N] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[((n-\ell))_N] x_2[\ell], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (4.98)$$

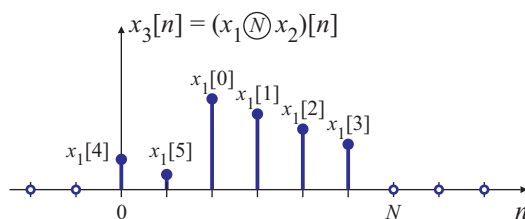
Estos resultados permiten establecer el *teorema de convolución circular en tiempo*:

$$(x_1 \circledast x_2)[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} X_1[k] X_2[k]. \quad (4.99)$$

Una convolución circular de orden  $N$  da como resultado una sucesión de largo  $N$ . Como la convolución circular es básicamente una convolución periódica, el Ejemplo 4.9 y la Fig. 4.14 son representativos de la convolución circular. Sin embargo, si se aplica la noción de desplazamiento circular, no es necesario construir las extensiones periódicas como en la Fig. 4.14. Este procedimiento se muestra en los siguientes ejemplos.

**EJEMPLO 4.29. Convolución circular con un impulso desplazado**

El desplazamiento circular estudiado en la Sección 4.8.3 también puede verse como el resultado de



**Fig. 4.47.** Resultado de la convolución circular entre  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  de la Fig. 4.45.

la convolución circular de dos señales. Sea  $x_1[n]$  la señal representada en la Fig. 4.45(a), y  $x_2[n]$  una señal de duración finita de largo  $N$ , tal que

$$x_2[n] = \delta[n - n_0],$$

donde  $0 \leq n_0 \leq N - 1$ . Naturalmente, esta sucesión puede pensarse como la señal de longitud finita

$$x_2[n] = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < n_0, \\ 1, & n = n_0, \\ 0, & n_0 < n \leq N - 1, \end{cases}$$

que se muestra en la Fig. 4.45(b) para  $n_0 = 2$ , y  $N = 6$ . Para calcular la convolución circular entre  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  utilizando la ecuación (4.97) es necesario calcular la reflexión temporal de  $x_1[n]$ , es decir,  $x_1[((n - \ell))_N]$ . Entonces, para  $N = 6$  y  $n_0 = 2$ , se tiene que:

- Para  $n = 0$ , se debe calcular  $x_3[0] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[((0 - \ell))_N] x_2[\ell]$ . El gráfico de  $x_1[((0 - \ell))_N]$  se representa en la Fig. 4.46(a). Reemplazando  $x_2[\ell] = \delta[\ell - n_0]$ ,

$$x_3[0] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[((-\ell))_N] \delta[\ell - n_0] = x_1[(-(n_0))_N] = x_1[(-2)_6] = x_1[4].$$

- Para  $n = 1$ , se necesita conocer  $x_1[((1 - \ell))_N]$ , mostrado en la Fig. 4.46(b). Resulta entonces

$$x_3[1] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[((1 - \ell))_N] \delta[\ell - n_0] = x_1[((1 - n_0))_N] = x_1[(-1)_6] = x_1[5].$$

- Para  $n = 2$ , en el cálculo de la convolución interviene  $x_1[((2 - \ell))_N]$ , graficado en la Fig. 4.46(c). El valor de  $x_3[2]$  es

$$x_3[2] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[((2 - \ell))_N] \delta[\ell - n_0] = x_1[((2 - n_0))_N] = x_1[(0)_6] = x_1[0].$$

- Para  $n = 3$ , es necesario contar con  $x_1[((3 - \ell))_N]$ , representado en la Fig. 4.46(d). Se tiene que

$$x_3[3] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[((3 - \ell))_N] \delta[\ell - n_0] = x_1[((3 - n_0))_N] = x_1[(1)_6] = x_1[1].$$

- Para  $n = 4$ , hace falta  $x_1[((4 - \ell))_N]$ , que se muestra en la Fig. 4.46(e). Resulta entonces

$$x_3[4] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[((4 - \ell))_N] \delta[\ell - n_0] = x_1[((4 - n_0))_N] = x_1[(2)_6] = x_1[2].$$

- Finalmente, para  $n = 5$ , se necesita conocer  $x_1[((5 - \ell))_N]$ , mostrado en la Fig. 4.46(f). Se tiene que

$$x_3[5] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[((5 - \ell))_N] \delta[\ell - n_0] = x_1[((5 - n_0))_N] = x_1[((3))_6] = x_1[3].$$

El gráfico de la sucesión  $x_3[n] = (x_1 \circledast x_2)[n]$  se muestra en la Fig. 4.47.

La convolución también puede resolverse aplicando el teorema de convolución circular (4.99): si  $x_3[n] = (x_1 \circledast x_2)[n]$ , entonces  $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ . La TDF de  $x_2[n]$  es

$$X_2[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k},$$

y por lo tanto

$$X_3[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k} X_1[k].$$

De acuerdo a los resultados de la Sección 4.8.3, la sucesión  $x_3[n]$  es el desplazamiento circular hacia la derecha de la sucesión  $x_1[n]$  en  $n_0$  muestras en el intervalo  $0 \leq n \leq N - 1$ . La sucesión  $x_3[n] = (x_1 \circledast x_2)[n] = x_1[((n - n_0))_N]$  se muestra en la Fig. 4.47 para  $n_0 = 2$  y  $N = 6$ .  $\square$

En resumen, el ejemplo anterior muestra que la convolución circular de una sucesión  $x_1[n]$  con un único impulso retardado en  $n_0$  muestras resulta en el *desplazamiento circular* de la sucesión  $x_1[n]$  en  $n_0$  muestras, con  $n_0$  en el intervalo  $0 \leq n \leq N - 1$ . En símbolos,

$$x[n] \circledast \delta[n - n_0] = x[((n - n_0))_N] \quad (4.100)$$

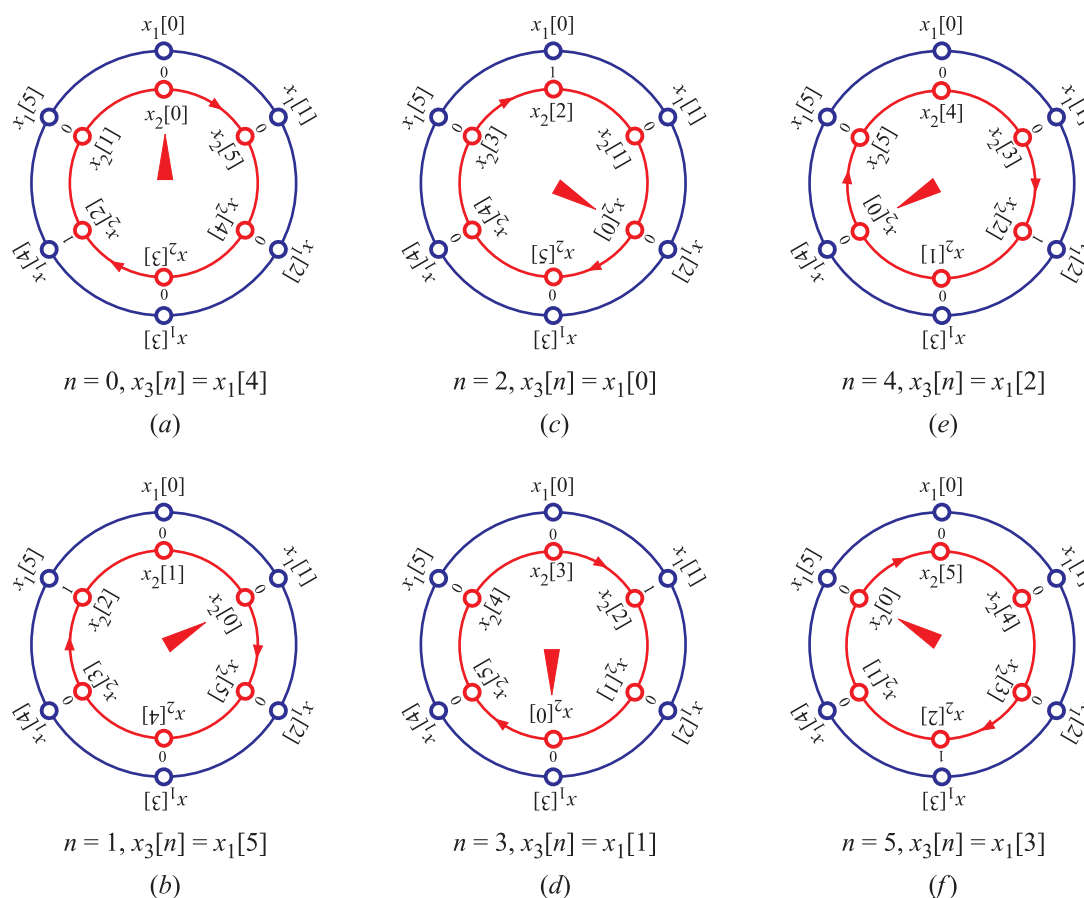
Una forma alternativa de calcular la convolución circular es pensando que las sucesiones están definidas sobre un círculo, siguiendo la idea de la Fig. 4.25. Para calcular la convolución circular, se hacen los siguientes pasos:

- Se escribe la sucesión  $x_1[n]$  sobre un círculo cada  $2\pi/N$ , en sentido horario. La muestra correspondiente a  $n = 0$  se sitúa sobre la hora 12, como se muestra en la Fig. 4.48(a).
- Se escribe la sucesión  $x_2[n]$  sobre un círculo interno al anterior, también en posiciones desplazadas cada  $2\pi/N$ , pero en sentido *antihorario*. La muestra correspondiente a  $n = 0$  se sitúa sobre la hora 12, tal como se representa en la Fig. 4.48(a). En esta figura, los números entre los dos círculos son los valores de la sucesión  $x_2[n]$ .
- Para calcular  $x_3[n]$  se gira  $x_2[n]$  (el disco interno)  $n$  posiciones en sentido horario, se multiplican las sucesiones elemento a elemento, y se suman estos resultados. Por ejemplo, la figura Fig. 4.48(b) muestra la disposición de las sucesiones para calcular  $x_3[1]$ :

$$x_3[1] = x_1[0] \times 0 + x_1[1] \times 0 + x_1[2] \times 0 + x_1[3] \times 0 + x_1[4] \times 0 + x_1[5] \times 1 = x_1[5]$$

- El procedimiento se repite  $N$  veces hasta calcular todos los valores de la sucesión resultado  $x_3[n]$ .

Naturalmente, el resultado de la convolución circular depende del valor  $N$  que se elige para el cálculo, como se muestra en los siguientes ejemplos.



**Fig. 4.48.** Otra forma de calcular la convolución circular de dos sucesiones. Disco exterior: sucesión  $x_1[n]$  ordenada en sentido horario. Disco interno: sucesión  $x_2[n]$  ordenada en sentido antihorario.

**EJEMPLO 4.30. Convolución circular de orden  $L$  de dos pulsos rectangulares de largo  $L$**   
 Como otro ejemplo de la convolución periódica considérense los pulsos rectangulares

$$x_1[n] = x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

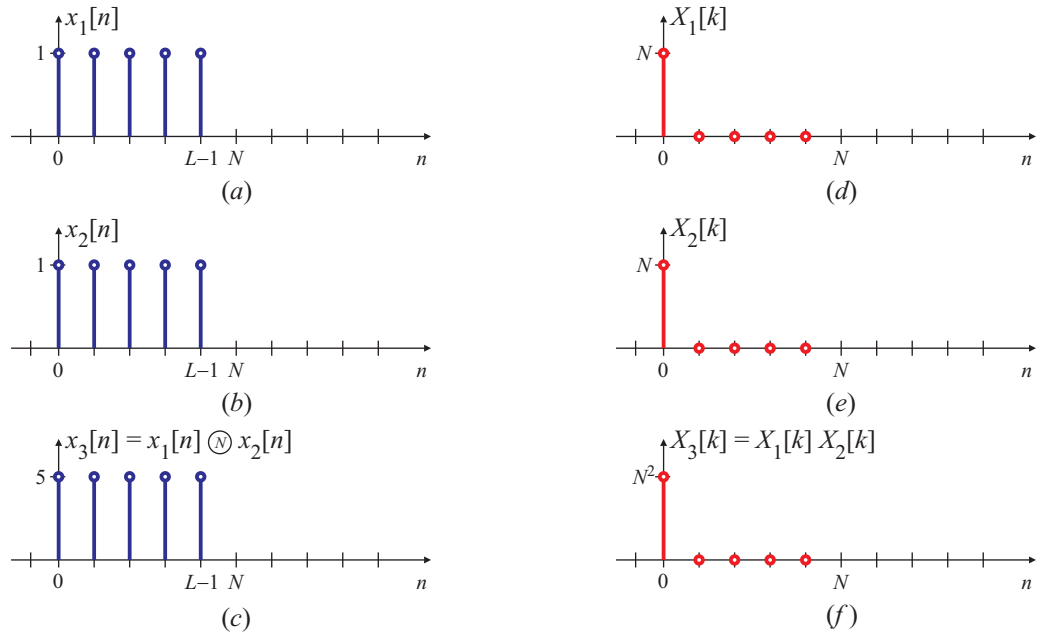
donde  $L = 5$  en la Fig. 4.49(a) y (b). Si  $N$  es el tamaño de la TDF, se tiene que las TDF de orden  $N = L$  son

$$X_1[k] = X_2[k] = \begin{cases} N, & k = 0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

como se calculó en el Ejemplo 4.7, y que se representan en la Fig. 4.49(c) y (d). Si se multiplican punto a punto  $X_1[k]$  y  $X_2[k]$  se obtiene

$$X_3[k] = X_1[k] \times X_2[k] = \begin{cases} N^2, & k = 0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$





**Fig. 4.49.** Convolución circular de  $N$  puntos  $x_3[n]$  (c) entre  $x_1[n]$  (a) y  $x_2[n]$  (b). Módulo de la TDF de  $N$  puntos  $|X_1[k]|$  (d),  $|X_2[k]|$  (e) y  $|X_3[k]| = |X_1[k]X_2[k]|$  (f).

graficada en la Fig. 4.49(f). La TDF inversa es

$$x_3[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = N \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq N-1,$$

tal como se presenta en la Fig. 4.49(e) para  $N = L$ . Si el cálculo se efectúa en el dominio tiempo, utilizando por ejemplo (4.97), es claro que cuando  $x_1[((n-\ell))_N]$  se rota respecto a  $x_2[\ell]$ , la suma de los productos  $x_1[((n-\ell))_N]x_2[\ell]$  siempre será igual a  $N$ , ya que la reflexión y la rotación  $x_1[((n-\ell))_N]$  en este caso es indistinguible de  $x_1[n]$ .  $\square$

**EJEMPLO 4.31. Convolución circular de orden  $2L$  de dos pulsos rectangulares de largo  $L$**

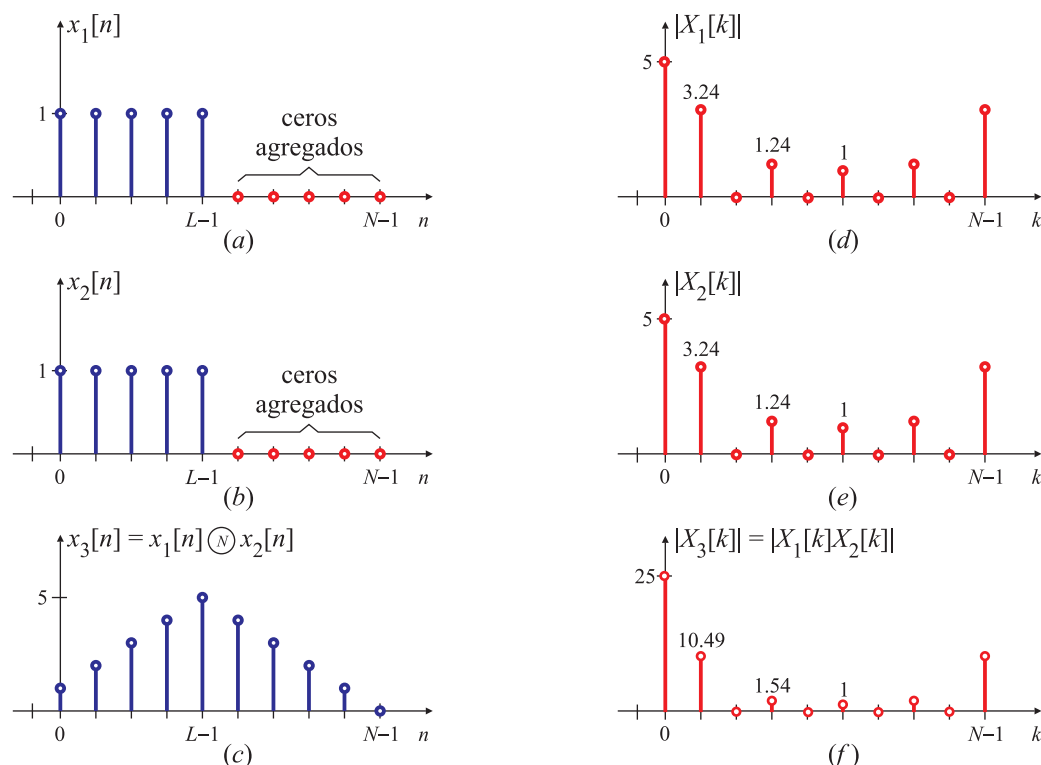
Las sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  del ejemplo anterior también pueden considerarse como sucesiones de largo  $2L$  agregándoles  $L$  ceros, como se muestra en la Fig. 4.50(a) y (b). El detalle paso a paso de la convolución circular de orden  $N = 2L$  entre estas dos sucesiones se muestra en la Fig. 4.51. El resultado es la sucesión  $x_3[n]$  representada en la Fig. 4.50(c), que se puede comprobar que coincide con la convolución lineal entre  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ . Esta importante observación será estudiada en detalle en la Sección 4.10.

Para  $N = 2L$ , la TDF  $X_1[k]$ ,  $X_2[k]$  de las sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  ya fueron calculadas en el Ejemplo 4.7, y representadas en módulo y en fase en la Fig. 4.27(e) y (f), respectivamente,

$$X_1[k] = X_2[k] = \frac{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} kL}}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} k}} = \frac{1 - e^{-j \pi k}}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} k}},$$

donde en la última igualdad se tuvo en cuenta que  $N = 2L$  (por conveniencia, el módulo de esta transformada se repite en la Fig. 4.50(d) y (e)). Por lo tanto,

$$X_3[k] = X_1[k] \times X_2[k] = \left( \frac{1 - e^{-j \pi k}}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} k}} \right)^2$$



**Fig. 4.50.** Convolución circular de  $2N$  puntos  $x_3[n]$  (c) entre  $x_1[n]$  (a) y  $x_2[n]$  (b). Módulo de la TDF de  $2N$  puntos  $|X_1[k]|$  (d),  $|X_2[k]|$  (e) y  $|X_3[k]| = |X_1[k]X_2[k]|$  (f).

o bien

$$X_3[k] = \left[ 25, (6+2\sqrt{5})e^{-j\frac{4\pi}{5}}, 0, (6-2\sqrt{5})e^{-j\frac{12\pi}{5}}, 0, e^{-j\frac{20\pi}{5}}, 0, (6-2\sqrt{5})e^{-j\frac{32\pi}{5}}, 0, (6+2\sqrt{5})e^{-j\frac{36\pi}{5}} \right],$$

cuyo módulo se representa en la Fig. 4.50(f).  $\square$

En virtud de la dualidad de las expresiones de la TDF, también se puede demostrar que la TDF del producto de dos sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  es la convolución circular de las TDFs de cada sucesión. Es decir, si

$$x_3[n] = x_1[n] \times x_2[n],$$

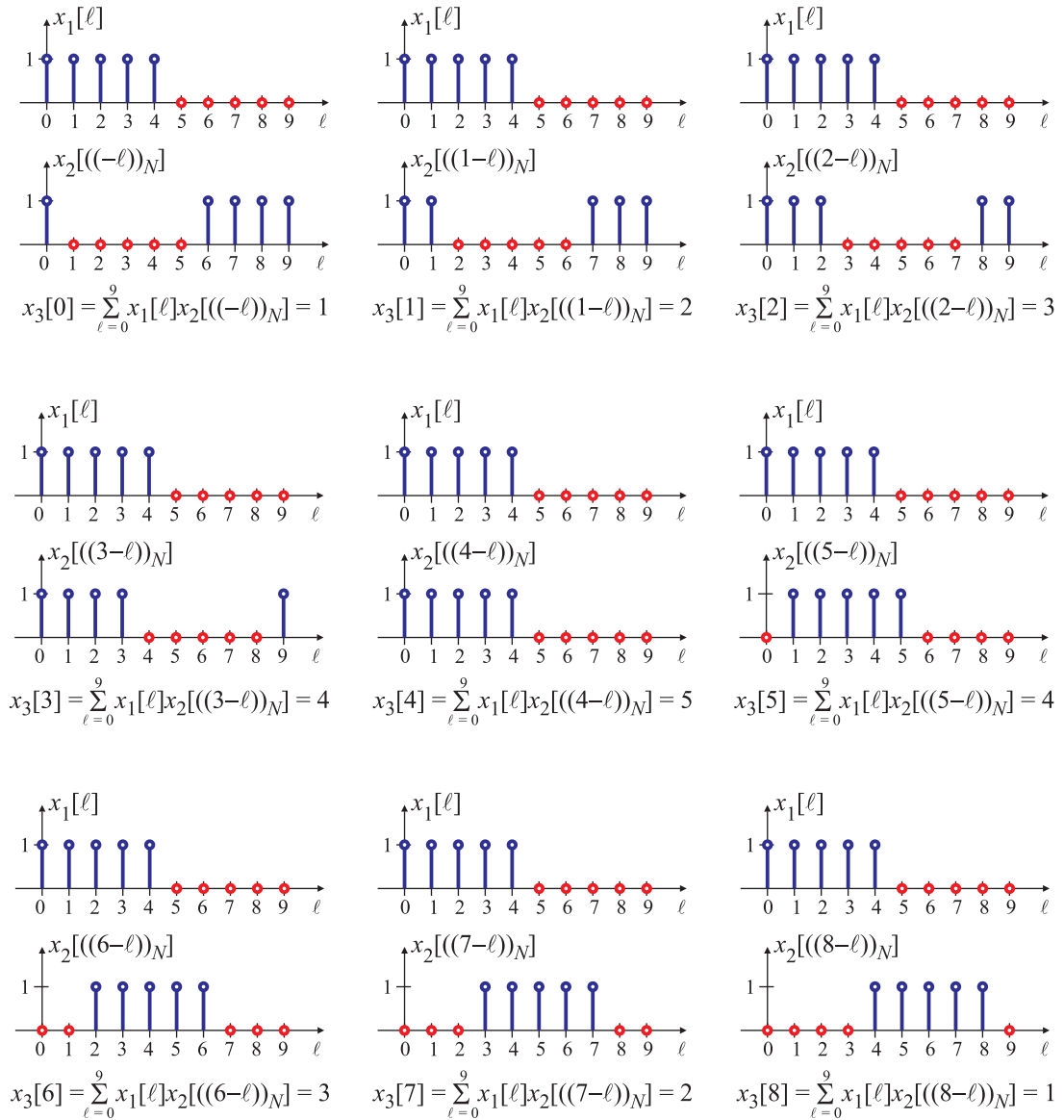
entonces

$$X_3[k] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[((k-\ell))_N] X_2[\ell] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell] X_2[((k-\ell))_N], \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

que también suele notarse

$$x_1[n]x_2[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} \frac{1}{N}(X_1 \otimes X_2)[k] \quad (4.101)$$

Esta propiedad es muy útil en el análisis frecuencial de señales sinusoidales discretas, y será tratada en detalle en el Capítulo ???. El siguiente ejemplo es típico.



**Fig. 4.51.** Desarrollo de la convolución circular de orden  $N = 2L$  entre las sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  de la Fig. 4.50 (a) y (b). El resultado es el pulso triangular que se muestra en la Fig. 4.50 (c).

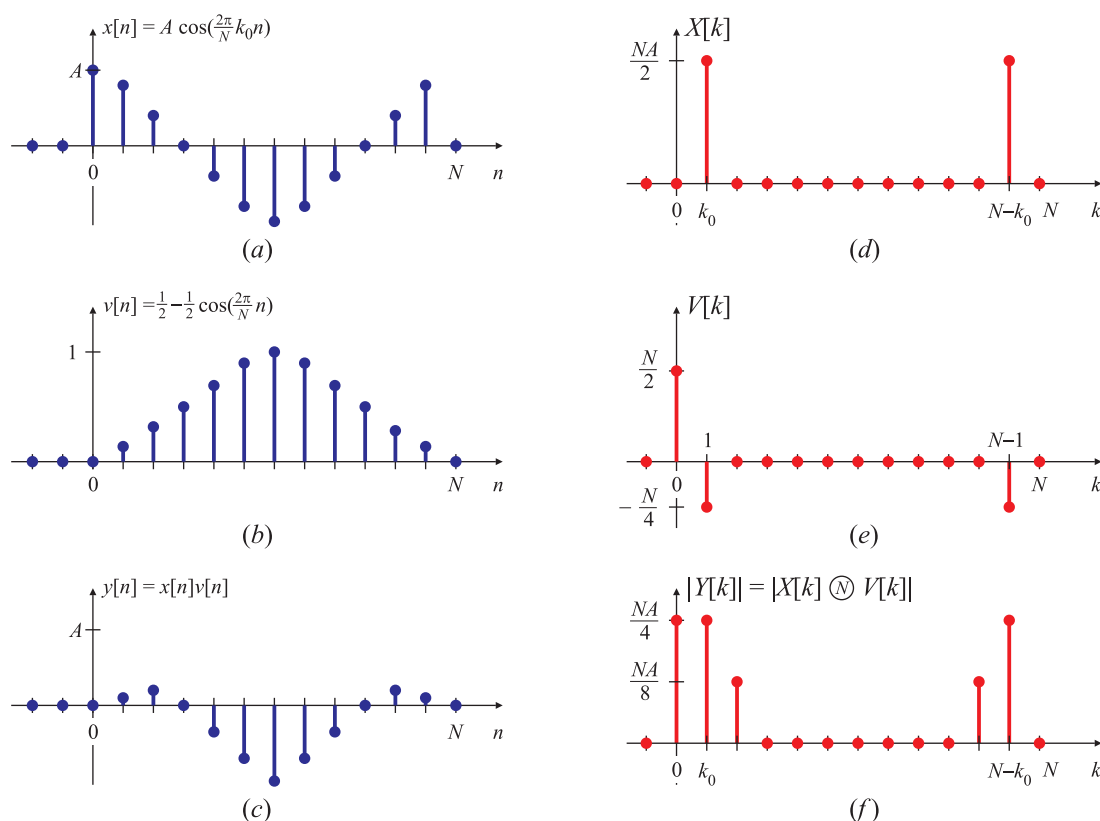
#### EJEMPLO 4.32. Propiedad de convolución frecuencial

Sea  $x[n]$  un pulso coseno de largo  $N$ ,

$$x[n] = \begin{cases} A \cos(\omega_0 n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

como el que se muestra en la Fig. 4.52(a). Su TDF fue calculada en el Ejemplo 4.18 para el caso en que  $\omega_0$  es un múltiplo de  $2\pi/N$ , es decir,  $\omega_0 = 2\pi k_0/N$ , con  $0 \leq k_0 \leq N-1$ , y está dada por

$$X[k] = \frac{NA}{2} \delta[k - k_0] + \frac{NA}{2} \delta[k - (N - k_0)] \quad (4.102)$$



**Fig. 4.52.** Demostración de la propiedad de convolución circular en frecuencia. Sucesión  $x[n] = A \cos(\frac{2\pi}{N} k_0 n)$ ,  $0 \leq n \leq N-1$  (a); ventana temporal  $v[n]$  (b); sucesión ventaneada  $y[n] = x[n]v[n]$  (c); módulo de la TDF  $X[k]$  de  $x[n]$  (d); TDF  $V[k]$  de la ventana  $v[n]$  (e); TDF  $y[k]$  de la sucesión ventaneada  $y[n]$  (f).

Este par transformado se representa en las Figs. 4.52(a) y (d), respectivamente.

Sea  $v[n]$  el pulso coseno elevado del Ejemplo 4.27,

$$v[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

cuya TDF  $V[k]$  es

$$\begin{aligned} V[k] &= \frac{N}{2} \delta[k] - \frac{N}{4} \delta[k-1] - \frac{N}{4} \delta[(k+1)_N] \\ &= \frac{N}{2} \delta[k] - \frac{N}{4} \delta[k-1] - \frac{N}{4} \delta[k-(N-1)], \quad 0 \leq k \leq N-1. \end{aligned} \quad (4.103)$$

El par transformado está graficado en las Figs. 4.52(b) y (e), respectivamente.

Se desea calcular la TDF  $Y[k]$  de la señal  $y[n] = x[n]v[n]$ . El cálculo se puede hacer por definición, o aplicando la propiedad de convolución circular en frecuencia:

■ **Por definición:** La sucesión  $y[n]$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n]v[n] = x[n] \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right) \right] \\ &= x[n] \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{j\frac{2\pi}{N} n} - \frac{1}{4} e^{-j\frac{2\pi}{N} n} \right) \end{aligned}$$

es decir

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{N}n}x[n] - \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}x[n].$$

Para calcular  $Y[k]$  se puede transformar término a término. Teniendo en cuenta la propiedad de desplazamiento frecuencial (4.68), resulta que la TDF de  $x[n]e^{j\frac{2\pi}{N}n}$  es  $X[((k-1))_N]$ , y la de  $x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$  es  $X[((k+1))_N]$ , y por lo tanto

$$Y[k] = \frac{1}{2}X[k] - \frac{1}{4}X[((k-1))_N] - \frac{1}{4}X[((k+1))_N]. \quad (4.104)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Y[k] &= \frac{NA}{4}\delta[k - k_0] + \frac{NA}{4}\delta[k - (N - k_0)] \\ &\quad - \frac{NA}{8}\delta[((k-1) - k_0)_N] - \frac{NA}{8}\delta[((k-1) - (N - k_0))_N] \\ &\quad - \frac{NA}{8}\delta[((k+1) - k_0)_N] - \frac{NA}{8}\delta[((k+1) - (N - k_0))_N] \end{aligned}$$

que puede simplificarse a

$$\begin{aligned} Y[k] &= \frac{NA}{4}\delta[k - k_0] + \frac{NA}{4}\delta[k - (N - k_0)] \\ &\quad - \frac{NA}{8}\delta[((k - k_0 - 1))_N] - \frac{NA}{8}\delta[(k - (N - k_0 + 1))_N] \\ &\quad - \frac{NA}{8}\delta[((k - k_0 + 1))_N] - \frac{NA}{8}\delta[(k - (N - k_0 - 1))_N]. \end{aligned}$$

Para el caso  $N = 12$ ,  $k_0 = 1$ , la sucesión  $y[n]$  se muestra en la Fig. 4.52(c), e  $Y[k]$  resulta

$$\begin{aligned} Y[k] &= \frac{NA}{4}\delta[k - 1] + \frac{NA}{4}\delta[k - 11] - \frac{NA}{8}\delta[((k - 2))_N] - \frac{NA}{8}\delta[((k - 12))_N] \\ &\quad - \frac{NA}{8}\delta[(k)_N] - \frac{NA}{8}\delta[(k - 10))_N]. \end{aligned}$$

Operando

$$Y[k] = \frac{NA}{4}\delta[k - 1] + \frac{NA}{4}\delta[k - 11] - \frac{NA}{8}\delta[k - 2] - \frac{NA}{8}\delta[k] - \frac{NA}{8}\delta[k] - \frac{NA}{8}\delta[k - 10],$$

para finalmente obtener

$$Y[k] = -\frac{NA}{4}\delta[k] + \frac{NA}{4}\delta[k - 1] - \frac{NA}{8}\delta[k - 2] - \frac{NA}{8}\delta[k - 10] + \frac{NA}{4}\delta[k - 11].$$

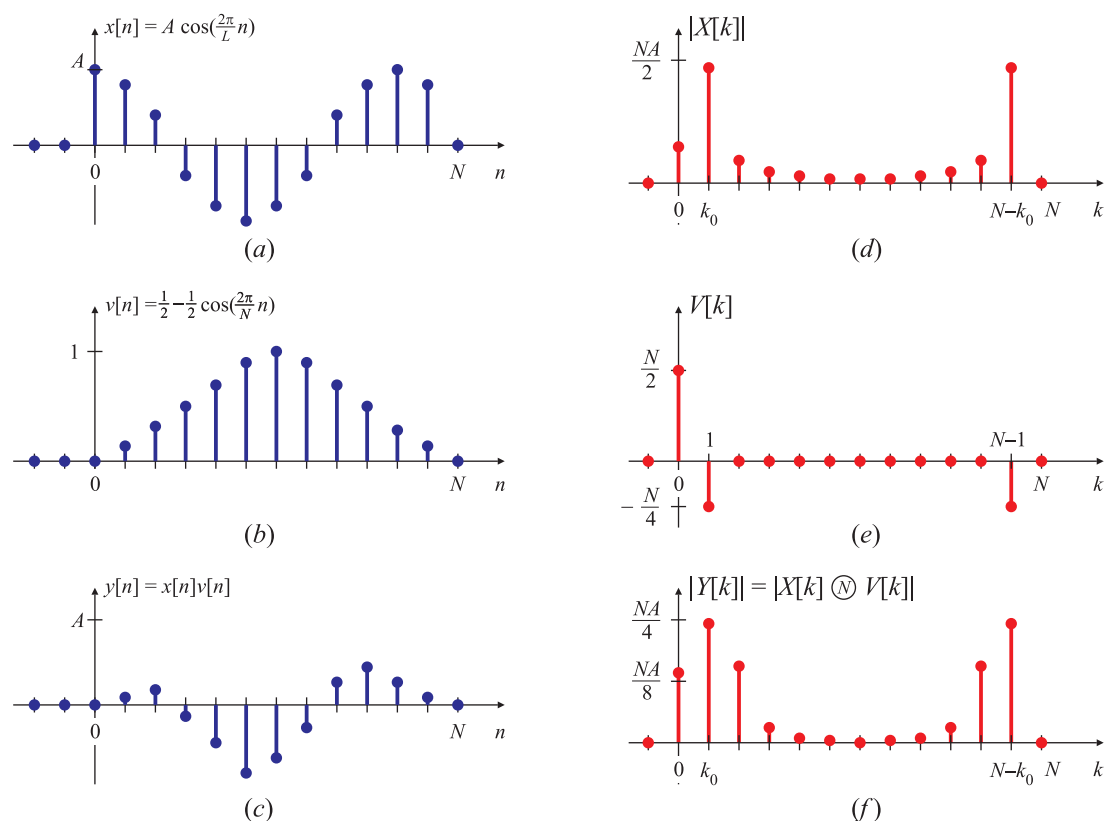
El módulo de esta TDF se representa en la Fig. 4.52(e).

- **Aplicando propiedades:** Como  $y[n] = x[n]v[n]$ , la propiedad de convolución circular en frecuencia (4.101) establece que

$$x[n]v[n] \xLeftrightarrow{\text{TDF}} \frac{1}{N}(X \circledast V)[k].$$

En este caso, como  $V[k]$  está formada por tres impulsos (4.103) es sencillo calcular la convolución circular, aplicando la versión frecuencial de (4.100):

$$\begin{aligned} Y[k] &= (X \circledast V)[k] \\ &= \frac{1}{N}X[k] \circledast \left( \frac{N}{2}\delta[k] - \frac{N}{4}\delta[k - 1] - \frac{N}{4}\delta[((k + 1))_N] \right) \\ &= X[k] \circledast \left( \frac{1}{2}\delta[k] - \frac{1}{4}\delta[k - 1] - \frac{1}{4}\delta[((k + 1))_N] \right) \\ &= \frac{1}{2}X[k] - \frac{1}{4}X[((k - 1))_N] - \frac{1}{4}X[((k + 1))_N], \end{aligned}$$



**Fig. 4.53.** Demostración de la propiedad de convolución circular en frecuencia. Sucesión  $x[n] = A \cos(\frac{2\pi}{L}n)$ ,  $0 \leq n \leq N-1$  (a); ventana temporal  $v[n]$  (b); sucesión ventaneada  $y[n] = x[n]v[n]$  (c); módulo de la TDF  $X[k]$  de  $x[n]$  (d); TDF  $V[k]$  de la ventana  $v[n]$  (e); TDF  $y[k]$  de la sucesión ventaneada  $y[n]$  (f).

que naturalmente coincide con (4.104). Nuevamente, para  $N = 12$  y  $k_0 = 1$ , se pueden repetir los desarrollos previos, para encontrar

$$Y[k] = -\frac{NA}{4}\delta[k] + \frac{NA}{4}\delta[k-1] - \frac{NA}{8}\delta[k-2] - \frac{NA}{8}\delta[k-10] + \frac{NA}{4}\delta[k-11].$$

El par transformado  $y[n]$ ,  $|Y[k]|$  se grafica en las Figs. 4.52(c) y (f), respectivamente.  $\square$

La sucesión  $v[n]$  del ejemplo anterior se conoce como *ventana de von Hann*, y es de uso habitual en el análisis frecuencial de señales. El ejemplo muestra que se puede obtener el mismo resultado haciendo  $N$  multiplicaciones en tiempo (cada muestra de la sucesión por cada muestra de la ventana) y calculando la TDF de la sucesión resultante, o calcular la TDF de la sucesión original y combinar esa TDF con réplicas escaladas y desplazadas (circularmente) una muestra a izquierda y derecha. En general, esta última opción requiere menor cantidad de operaciones.

En el caso en que  $\omega_0$  no es un múltiplo de  $2\pi/N$ , el cálculo es un poco más complicado porque la expresión de  $X[k]$  no tiene tantos términos nulos como la ecuación (4.102).

**EJEMPLO 4.33. Propiedad de convolución frecuencial**

Sea  $x[n]$  el pulso coseno del Ejemplo 4.32, pero donde  $\omega_0$  *no* es un múltiplo de  $2\pi/N$ . La TDF  $X[k]$  es

$$X[k] = Ae^{-j(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)} \frac{\text{sen} \left[ \frac{N}{2} \left( \frac{2\pi}{N}k - \omega_0 \right) \right]}{\text{sen} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{N}k - \omega_0 \right) \right]} + Ae^{-j(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0)} \frac{\text{sen} \left[ \frac{N}{2} \left( \frac{2\pi}{N}k + \omega_0 \right) \right]}{\text{sen} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{N}k + \omega_0 \right) \right]}, \quad (4.105)$$

$0 \leq k \leq N - 1$ . Por ejemplo, si  $\omega_0 = 2\pi/L$ , con  $L = 10$  y  $N = 12$ ,  $X[k]$  resulta

$$\begin{aligned} X[0] &= \frac{NA}{2} \times 0,3015 & X[6] &= \frac{NA}{2} \times 0,0318 \\ X[1] &= \frac{NA}{2} \times 1,0101e^{j0,5236} & X[7] &= \frac{NA}{2} \times 0,0344e^{j0,5236} \\ X[2] &= \frac{NA}{2} \times 0,1863e^{-j2,0944} & X[8] &= \frac{NA}{2} \times 0,0440e^{j1,0472} \\ X[3] &= \frac{NA}{2} \times 0,0712e^{-j1,5708} & X[9] &= \frac{NA}{2} \times 0,0712e^{j1,5708} \\ X[4] &= \frac{NA}{2} \times 0,0440e^{-j1,0472} & X[10] &= \frac{NA}{2} \times 0,1863e^{j2,0944} \\ X[5] &= \frac{NA}{2} \times 0,0344e^{-j0,5236} & X[11] &= \frac{NA}{2} \times 1,0101e^{-j0,5236} \end{aligned}$$

La sucesión  $x[n]$  y el módulo de su TDF  $X[k]$  se muestran en las Figs. 4.53(a) y (d), respectivamente. La sucesión  $v[n]$  es el mismo pulso coseno elevado del Ejemplo 4.32,

$$v[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{N}n \right), & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y su TDF  $V[k]$  es

$$V[k] = \frac{N}{2} \delta[k] - \frac{N}{4} \delta[k - 1] - \frac{N}{4} \delta[k - (N - 1)], \quad 0 \leq k \leq N - 1.$$

Este par transformado está graficado en las Figs. 4.53(b) y (e), respectivamente. Si  $y[n] = x[n]v[n]$ , la TDF  $Y[k]$  es la convolución circular entre  $X[k]$  y  $V[k]$ ,

$$\begin{aligned} Y[k] &= (X \circledast V)[k] \\ &= \frac{1}{2} X[k] - \frac{1}{4} X[((k - 1))_N] - \frac{1}{4} X[((k + 1))_N], \end{aligned}$$

al igual que en el ejemplo anterior, pero con la diferencia que  $X[k]$  está dada por la expresión (4.105). El cálculo de  $Y[k]$  se puede realizar de la misma manera que antes, pero resulta más laborioso porque son números complejos. Haciendo las cuentas se encuentra que

$$\begin{aligned} Y[0] &= \frac{NA}{2} \times 0,2866e^{j3,1416} & Y[6] &= \frac{NA}{2} \times 0,0010 \\ Y[1] &= \frac{NA}{2} \times 0,4839e^{j0,6499} & Y[7] &= \frac{NA}{2} \times 0,0017e^{-j0,5767} \\ Y[2] &= \frac{NA}{2} \times 0,3258e^{-j2,5222} & Y[8] &= \frac{NA}{2} \times 0,0046e^{-j0,7081} \\ Y[3] &= \frac{NA}{2} \times 0,0228e^{j0,6763} & Y[9] &= \frac{NA}{2} \times 0,0228e^{-j0,6763} \\ Y[4] &= \frac{NA}{2} \times 0,0046e^{j0,7081} & Y[10] &= \frac{NA}{2} \times 0,3528e^{j2,5222} \\ Y[5] &= \frac{NA}{2} \times 0,0017e^{j0,5767} & Y[11] &= \frac{NA}{2} \times 0,4839e^{-j0,6499} \end{aligned}$$

El gráfico de  $y[n]$  y el módulo de su TDF  $Y[k]$  se muestran en las Figs. 4.53(c) y (f). □

Los Ejemplos 4.32 y 4.33 muestran un efecto habitual en el análisis frecuencial de señales sinusoidales discretas, que se conoce como *fuga espectral*. En el Ejemplo 4.32 la señal

es un coseno cuya frecuencia es un múltiplo de  $2\pi/N$ , y su espectro  $X[k]$ , representado en la Fig. 4.52(c) “se parece” al espectro de un coseno discreto, concentrado en sólo dos muestras ( $k_0$  y  $N - k_0$ ). En cambio, si la frecuencia de la señal *no* es un múltiplo de  $2\pi/N$  el espectro se “desparrama” sobre todo el eje de frecuencias (ninguno de los  $X[k]$  se anula). Desde el punto de vista del análisis frecuencial, esto no es conveniente porque en ambos casos la señal  $x[n]$  tiene la misma forma, y lo único que cambia es su frecuencia. El espectro de la señal “ventaneada”  $y[n]$  es más parecido en los dos casos. Estos problemas, y las formas de solucionarlos, se estudiarán en detalle en el Capítulo ??.

#### 4.8.9. Identidad de Parseval

La identidad de Parseval establece una relación entre el cálculo de la potencia de una señal en el dominio temporal y frecuencial. El cómputo es más o menos directo: partiendo de la expresión de la potencia, donde sin pérdida de generalidad se supone que la señal  $x[n]$  es compleja,

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x^*[n]$$

y reemplazando  $x^*[n]$  por su ecuación de síntesis,

$$x^*[n] = \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right)^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

resulta

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right).$$

Intercambiando el orden de las sumatorias, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

La última sumatoria del miembro derecho es la definición de la TDF  $X[k]$  de  $x[n]$ , y entonces

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*[k]X[k],$$

de donde resulta

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2.$$

Hay una forma más general de la identidad de Parseval que para un par de sucesiones  $x[n]$  e  $y[n]$  con TDF  $X[k]$  e  $Y[k]$ , respectivamente, establece que

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]Y^*[k].$$

La demostración es enteramente similar, y queda como ejercicio para el lector.



**EJEMPLO 4.34. Igualdad de Parseval**

Sea  $x[n]$  un pulso coseno periódico de largo  $N$ ,

$$x[n] = \begin{cases} A \cos(\frac{2\pi}{N} k_0 n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La energía de este pulso se define como

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2.$$

Este cálculo requiere varios pasos:

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] x^*[n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{A}{2} \left( e^{j\frac{2\pi}{N} k_0 n} + e^{-j\frac{2\pi}{N} k_0 n} \right) \right] \left[ \frac{A}{2} \left( e^{j\frac{2\pi}{N} k_0 n} + e^{-j\frac{2\pi}{N} k_0 n} \right) \right]^* \end{aligned}$$

Distribuyendo el conjugado y realizando el producto, se tiene que

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{A^2}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \left( 1 + e^{j2\frac{2\pi}{N} k_0 n} + e^{-j2\frac{2\pi}{N} k_0 n} + 1 \right) \\ &= \frac{A^2}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \left( 2 + e^{j2\frac{2\pi}{N} k_0 n} + e^{-j2\frac{2\pi}{N} k_0 n} \right) \end{aligned}$$

Distribuyendo la sumatoria

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{A^2}{4} 2N + \frac{A^2}{4} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\frac{2\pi}{N} k_0 n} + \frac{A^2}{4} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\frac{2\pi}{N} k_0 n} \\ &= \frac{NA^2}{2} + \frac{e^{j2\frac{2\pi}{N} k_0 N} - 1}{e^{j2\frac{2\pi}{N} k_0} - 1} + \frac{e^{-j2\frac{2\pi}{N} k_0 N} - 1}{e^{-j2\frac{2\pi}{N} k_0} - 1} \end{aligned}$$

que en definitiva se puede escribir como

$$E_x = \frac{NA^2}{2} + \frac{A^2}{4} \frac{e^{j4\pi k_0} - 1}{e^{j\frac{4\pi}{N} k_0} - 1} + \frac{A^2}{4} \frac{e^{-j4\pi k_0} - 1}{e^{-j\frac{4\pi}{N} k_0} - 1}$$

Si  $k_0$  es un entero distinto de cero, se anula el numerador del segundo y del tercer término, y entonces  $E_x = NA^2/2$ . Si  $k_0 = 0$ , se anula tanto el numerador como el denominador del segundo y tercer término, y en este caso ambos términos valen  $N$  (es el mismo caso analizado en la sección 4.2.2). Por lo tanto, si  $k_0 = 0$ ,  $E_x = NA^2$ . En definitiva,

$$E_x = \begin{cases} NA^2, & \text{si } k_0 = 0, \\ \frac{NA^2}{2}, & \text{si } k_0 \neq 0. \end{cases} \quad (4.106)$$

Si  $k_0 = 0$ , la señal  $x[n]$  es una constante,  $x[n] = A$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ , y es claro que  $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = NA^2$ .

Aplicando la igualdad de Parseval, los cálculos son mucho más sencillos. Recordando que

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

y conociendo el par transformado

$$x[n] = \begin{cases} A \cos(\frac{2\pi}{N} k_0 n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \iff X[k] = \frac{NA}{2} \delta[k-k_0] + \frac{NA}{2} \delta[k-(N-k_0)]$$

se tiene que

$$E_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 = \frac{1}{N} \left[ \left( \frac{NA}{2} \right)^2 + \left( \frac{NA}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{N} \frac{N^2 A^2}{2} = \frac{NA^2}{2}.$$

En este caso, si  $k_0 = 0$ , el par transformado es

$$x[n] = \begin{cases} A & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \iff X[k] = NA \delta[k]$$

y entonces

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 = \frac{1}{N} (NA)^2 = NA^2.$$

Tanto en el caso  $k_0 = 0$  como  $k_0 \neq 0$  se tiene el mismo valor de energía  $E_x$  aplicando la expresión temporal  $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$  como la frecuencial  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$ , pero en este ejemplo es mucho más sencillo aplicar la segunda que la primera.  $\square$

## 4.9. Resumen de propiedades: TDF de sucesiones de longitud finita

Un resumen de las propiedades de la Transformada Discreta de Fourier (TDF) de sucesiones de longitud finita se listan en la Tabla 4.3. La Tabla brinda un listado de pares transformados típicos.

## 4.10. Convolución lineal usando la Transformada Discreta de Fourier

Como se verá en el Capítulo ??, existen algoritmos muy eficientes para calcular la transformada discreta de Fourier, que en conjunto se los conoce como “transformada rápida de Fourier” (o FFT, por sus siglas en inglés). Estos algoritmos están disponibles para una gran variedad de lenguajes de programación, inclusive para plataformas de hardware. Como son tan eficientes, para implementar una convolución entre dos sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  usualmente es más conveniente:

1. Calcular la TDF de  $N$  puntos  $X_1[k]$ ,  $X_2[k]$ , de cada sucesión  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$ , respectivamente.
2. Calcular el producto punto a punto de las TDF,  $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$  para  $0 \leq k \leq N-1$ .
3. Calcular la sucesión  $x_3[n] = (x_1 \circledast x_2)[n]$  como la TDF inversa de  $X_3[k]$ .

**Tabla 4.3.** Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier.

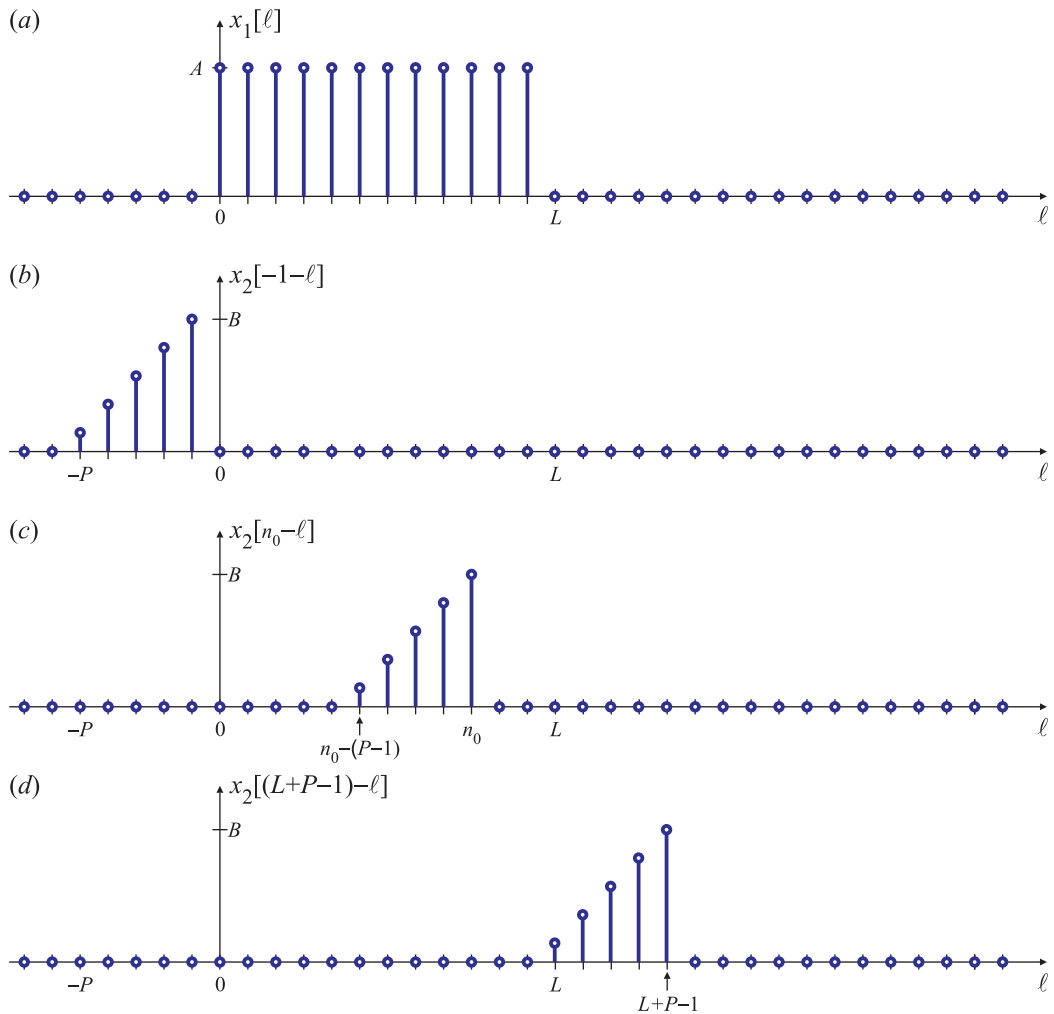
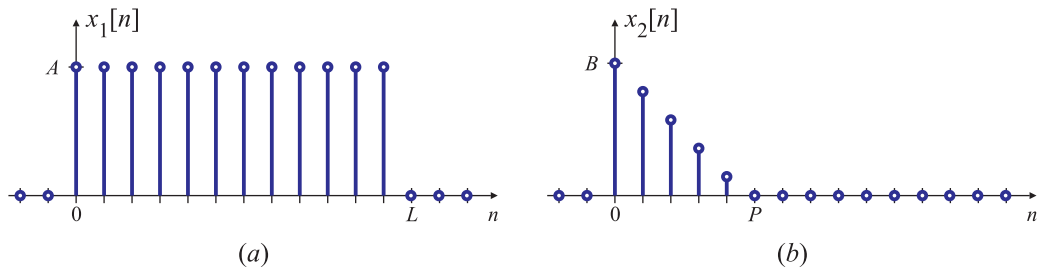
Propiedad	Sucesión de largo $N$ $x_1[n], x_2[n]$	TDF $X_1[k], X_2[k]$
linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
corrimiento temporal	$x_1[((n-n_0))_N] \ (n_d \in \mathbb{Z})$	$e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k} X_1[k]$
corrimiento frecuencial	$e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n} x_1[n]$	$X_1[((k-k_0))_N]$
reflexión	$x_1[(-n))_N]$	$X_1[(-k))_N]$ $X_1^*[k]$ si $x_1[n]$ es real
dualidad	$X[n]$	$Nx[(-k))_N]$
convolución circular en tiempo	$(x_1 \circledast x_2)[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[\ell]x_2[((n-\ell))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
convolución circular en frecuencia	$\tilde{x}_1[n] \times \tilde{x}_2[n]$	$\frac{1}{N}(X_1 \circledast X_2)[k] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[((k-\ell))_N]$
“área” de la TDF	$x_1[n] _{n=0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k]$	
“área” de la sucesión	$\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] = X_1[k] _{k=0}$	
forma alternativa de la ecuación de síntesis	$x[n] = \frac{1}{N} \left( \sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right)^* = \frac{1}{N} (TDF(X^*[k]))^*$	
identidad de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1}  x_1[n] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1}  X_1[k] ^2$	
	$\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]x_2^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k]X_2^*[k]$	
simetría	$x^*[n]$	$X^*[(-k))_N]$
	$x^*[(-n))_N]$	$X^*[k]$
	$\text{Re}\{x[n]\}$	$X_{ep}[k] = \frac{1}{2}(X[(((k)))_N] + X^*[(-k))_N])$
	$j \text{Im}\{x[n]\}$	$X_{op}[k] = \frac{1}{2}(X[(((k)))_N] - X^*[(-k))_N])$
	$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}(x[(((n)))_N] + x^*[(-n))_N])$	$\text{Re}\{X[k]\}$
	$x_{op}[n] = \frac{1}{2}(x[(((n)))_N] - x^*[(-n))_N])$	$j \text{Im}\{X[k]\}$

**Tabla 4.4.** Algunos pares transformados de uso frecuente.

Sucesión $x[n], 0 \leq n \leq N-1$	Transformada de $N$ puntos $X[k], 0 \leq k \leq N-1$
$\delta[n]$	$1 \quad \forall k$
$1 \quad \forall n$	$N\delta[k]$
$\begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 < N \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$	$\frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}Lk} - 1}{e^{-j\frac{2\pi}{N}k} - 1} = e^{-j\frac{\pi}{N}(L-1)k} \frac{\text{sen}(\pi Lk/N)}{\text{sen}(\pi k/N)}$
$e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}, 0 \leq k_0 \leq N-1$	$N\delta[k - k_0]$
$\delta[n - n_0], 0 \leq n_0 \leq N-1$	$e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k}$
$A \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_0n\right), 0 \leq k_0 \leq N-1$	$\frac{NA}{2}\delta[k - k_0] + \frac{NA}{2}\delta[k - (N - k_0)]$
$A \text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}k_0n\right), 0 \leq k_0 \leq N-1$	$-j\frac{NA}{2}\delta[k - k_0] + j\frac{NA}{2}\delta[k - (N - k_0)]$
$A\delta[n - n_0] + A\delta[n - (N - n_0)]$	$2A \cos\left(\frac{2\pi}{N}n_0k\right)$
$A\delta[n - n_0] - A\delta[n - (N - n_0)]$	$j2A \text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}n_0k\right)$
$\frac{A}{2} - A \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ (ventana de von Hann)	$\frac{NA}{2}\delta[k] - \frac{NA}{4}\delta[k-1] - \frac{NA}{2}\delta[k - (N-1)]$

Esta forma de calcular la convolución circular se conoce como **convolución rápida**, y aunque a esta altura del curso no sea evidente, requiere muchas menos operaciones que el cálculo por definición usando la ecuación (4.98).

En la mayoría de las aplicaciones lo que interesa es calcular la convolución *lineal* entre dos sucesiones, es decir, implementar un sistema lineal e invariante en el tiempo: filtrar una señal, calcular una correlación, etc. Como se estudió en la Sección 4.8.8 la antitransformada de la multiplicación de dos transformadas discretas de Fourier es la convolución *circular* de esas sucesiones. El interés entonces es ver en qué condiciones los resultados de la convolución circular coinciden con los de la convolución lineal. De esta forma, en la implementación de un sistema discreto se pueden utilizar convoluciones rápidas en lugar de convoluciones lineales, para disminuir la cantidad de operaciones. El Ejemplo 4.31 da una pista de cómo puede conseguirse este objetivo; a continuación se presenta un análisis más detallado.



#### 4.10.1. Convolución lineal de dos sucesiones de longitud finita

Sea  $x_1[n]$  una sucesión de  $L$  elementos,  $0 \leq n \leq L-1$ , y  $x_2[n]$  una sucesión de  $P$  elementos,  $0 \leq n \leq P-1$ , como las que se muestran en la Fig. 4.54. El resultado de la convolución

entre estas dos sucesiones es una tercera sucesión  $x_3[n]$ ,

$$x_3[n] = (x_1 * x_2)[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_1[\ell]x_2[n-\ell]. \quad (4.107)$$

La Fig. 4.55 ilustra varias etapas del cálculo de la convolución lineal para distintos valores de  $n$ : la Fig. 4.55(a) muestra la sucesión  $x_1[\ell]$ , la Fig. 4.55(b) la sucesión  $x_2[n-\ell]$  para  $n = -1$ , la Fig. 4.55(c) la sucesión  $x_2[n-\ell]$  para un valor genérico  $n = n_0$ , y finalmente la Fig. 4.55(d) la sucesión  $x_2[n-\ell]$  para  $n = L + P - 1$ . De la figura se observa que el producto  $x_1[\ell]x_2[n-\ell]$  es idénticamente nulo cuando  $n < 0$  o cuando  $n > L + P - 2$ , es decir que  $x_3[n]$  no es idénticamente nula en el rango  $0 \leq n \leq L + P - 2$ . Por lo tanto,

la convolución lineal de una sucesión de largo  $L$  con una sucesión de largo  $P$  resulta en una sucesión de longitud  $L + P - 1$ .

#### 4.10.2. Convolución circular como suma de réplicas de la convolución lineal.

Como se mostró en los Ejemplos 4.30 y 4.31, que el resultado de la convolución circular de dos sucesiones de longitud finita (cuya TDF es el producto de las correspondientes TDFs de  $N$  puntos) coincide con la convolución lineal entre esas sucesiones depende del largo  $N$  de la TDF en relación con la longitud de las sucesiones. Una interpretación extremadamente útil de la relación entre la convolución lineal y la convolución circular involucra la *replicación (aliasing) temporal*. Esta interpretación es muy útil para comprender la convolución circular y es vital para entender sus aplicaciones en la implementación de sistemas lineales e invariantes en el tiempo como se verá en la Sección 4.10.3.

En la Sección 4.6 se demostró que si la TFTD  $X(e^{j\omega})$  de una sucesión  $x[n]$  se muestrea en un conjunto de frecuencias  $\omega_k = 2\pi k/N$ ,  $-\infty \leq k \leq \infty$ , entonces la sucesión  $\tilde{X}[k]$  resultante son los coeficientes de la SDF de la sucesión periódica

$$\tilde{x}[n] = \sum_r x[n - rN]. \quad (4.108)$$

De la discusión de la TDF se desprende que la sucesión de longitud finita

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

es la TDF de un período de  $\tilde{x}[n]$ , dada por (4.108) es decir

$$x_p[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si  $x[n]$  tiene longitud menor o igual que  $N$ , en la ecuación (4.108) no se produce solapamiento entre las distintas réplicas de  $x[n]$ , y entonces  $x_p[n] = x[n]$ . Sin embargo, si la longitud de  $x[n]$  es mayor que  $N$ ,  $x_p[n]$  puede no ser igual a  $x[n]$  para algunos o todos los valores de  $n$  en el rango  $0 \leq n \leq N-1$ . De aquí en más se usará el subíndice  $p$  para

indicar que una sucesión es un período de una sucesión periódica resultante de la SDF inversa de una TDF muestreada en  $N$  puntos; el subíndice se descartará cuando sea claro que no se produce solapamiento entre las réplicas.

Volviendo al caso de la convolución, la TTFD de la sucesión  $x_3[n] = (x_1 * x_2)[n]$  de (4.107) es

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}).$$

Si se define la TDF

$$X_3[k] = X_3(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

es claro que

$$X_3[k] = X_1(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} X_2(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

y por lo tanto

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k]. \quad (4.109)$$

Entonces, la sucesión que resulta de la TDF inversa de  $X_3[k]$  es

$$x_{3p}[n] = \begin{cases} \sum_r x_3[n - rN], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (4.110)$$

y de la ecuación (4.109) se tiene que

$$x_{3p}[n] = (x_1 \circledast x_2)[n]. \quad (4.111)$$

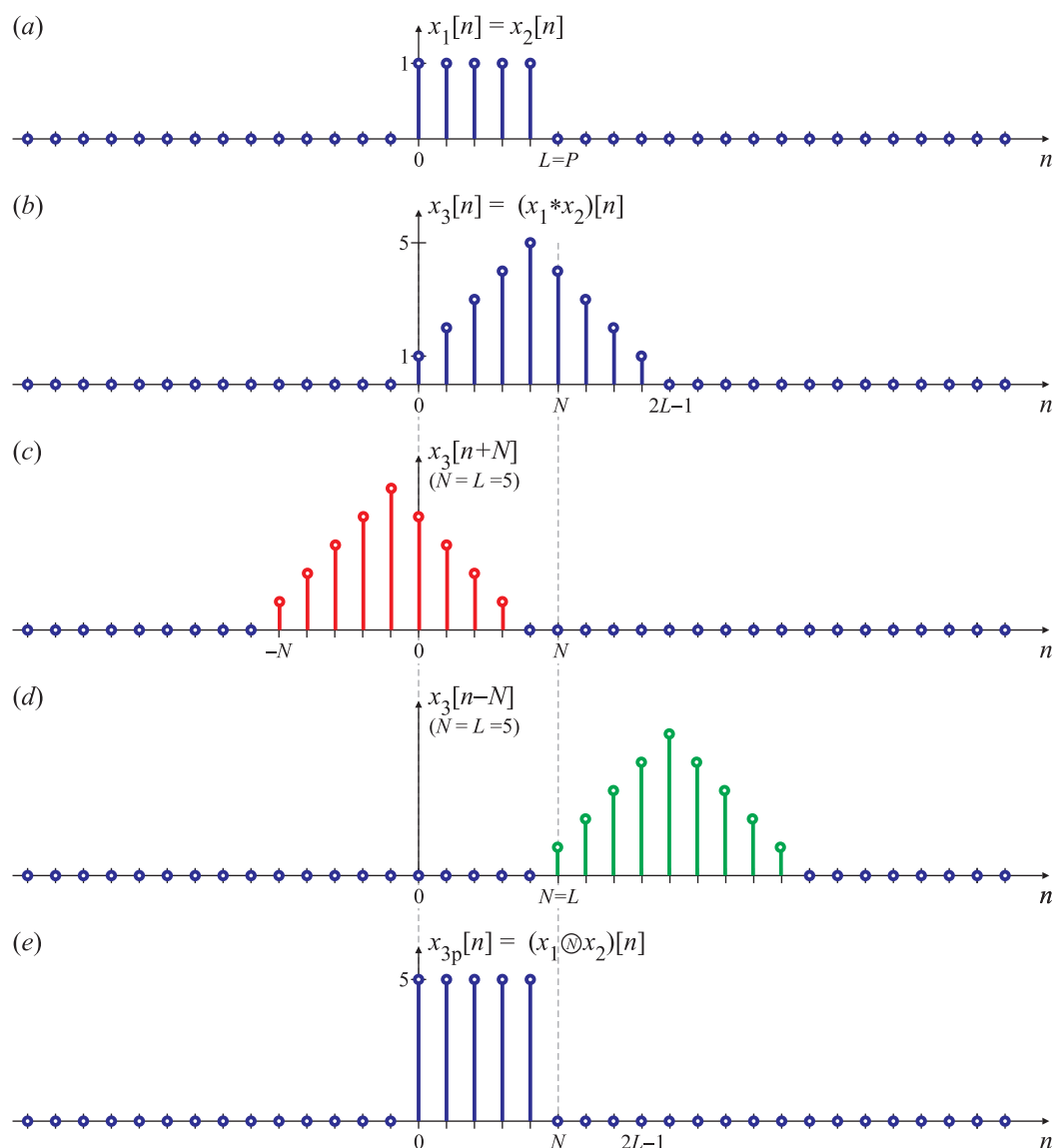
Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación (4.110), la convolución circular de dos sucesiones de longitud finita es equivalente a la suma de réplicas de la convolución lineal entre las dos sucesiones:

$$(x_1 \circledast x_2)[n] = \begin{cases} \sum_r (x_1 * x_2)[n - rN], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4.112)$$

Si  $N$  es mayor o igual a  $L$  o  $P$ ,  $X_1[k]$  y  $X_2[k]$  representan exactamente  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ , pero  $x_{3p}[n] = x_3[n]$  para todo  $n$  solo si  $N$  es mayor o igual al largo de la sucesión  $x_3[n]$ . Como se mostró en la Sección 4.10.1, si  $x_1[n]$  tiene largo  $L$  y  $x_2[n]$  tiene largo  $P$ , entonces  $x_3[n]$  tiene una longitud máxima  $(L + P - 1)$ . Por lo tanto la convolución circular cuya TDF es  $X_1[k]X_2[k]$  es idéntica a la convolución lineal cuya TTFD es  $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$  si  $N$ , el largo de las TDF, satisface  $N \geq L + P - 1$ .

#### EJEMPLO 4.35. Convolución circular como suma de réplicas de la convolución lineal

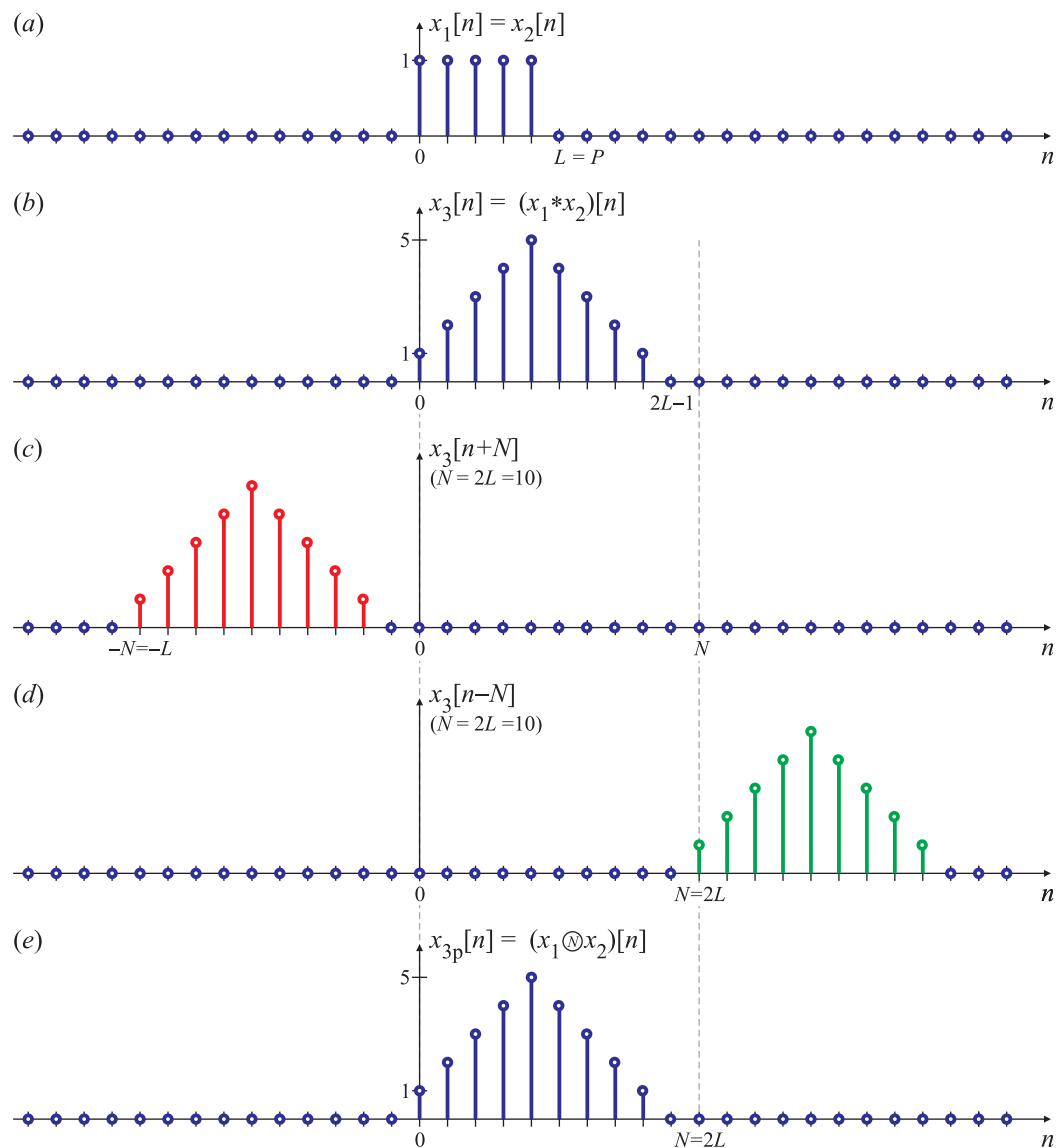
Los resultados del Ejemplo 4.30 se pueden comprender bajo la interpretación desarrollada más arriba. Las sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  son dos sucesiones constantes idénticas de longitud  $L = P = 5$ , como se muestra en la Fig. 4.56(a). La convolución lineal  $x_3[n] = (x_1 * x_2)[n]$  es de largo  $L + P - 1 = 2L - 1 = 9$ , y tiene la forma triangular representada en la Fig. 4.56(b). En las Fig. 4.56(c) y (d) se ilustran dos réplicas desplazadas de  $x_3[n - rN]$  de la ecuación (4.110), en particular  $x_3[n + N]$  y  $x_3[n - N]$ , respectivamente, para  $N = L = P = 5$ . La convolución circular  $x_{3p}[n]$  de  $N = 5$  puntos de  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ ,  $x_{3p}[n] = (x_1 \circledast x_2)[n]$  se puede calcular usando la ecuación (4.110). Este



**Fig. 4.56.** Ilustración que muestra que la convolución circular es equivalente a la suma de réplicas de la convolución lineal. Las sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  a ser convolucionadas (a). La convolución lineal  $x_3[n] = (x_1 * x_2)[n]$  (b). La sucesión  $x_3[n + N]$  para  $N = L = 5$  (c). La sucesión  $x_3[n - N]$  para  $N = L = 5$  (d). La convolución circular de  $N = 5$  puntos entre  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ ,  $x_4[n] = (x_1 \circledast x_2)[n]$  (e) que es igual a la suma de (b), (c) y (d) en el intervalo  $0 \leq n \leq 5$ .

método se ilustra en la Fig. 4.56(e) para  $N = 5$ . Para el cálculo de la convolución circular, sólo interesan  $x_3[n]$  y su réplica  $x_3[n - N]$ , porque la convolución circular de orden  $N$  sólo tiene  $N$  valores, para  $0 \leq n \leq N - 1$ . En la Fig. 4.57 se muestra el cálculo de la convolución circular entre  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  pero para  $N = 9$ . En la Fig. 4.57(b) se repite el resultado de la convolución lineal  $x_3[n] = (x_1 * x_2)[n]$ , y en la Fig. 4.57(c) y (d) sus réplicas  $x_3[n + N]$  y  $x_3[n - N]$  pero ahora para  $N = 9$ . Como el orden (tamaño) de la convolución circular ( $N = 9$ ) es mayor o igual que el largo de la convolución circular ( $L + P - 1 = 9$ ) las réplicas  $x_3[n + N]$  y  $x_3[n - N]$  no se solapan, y entonces el resultado de la convolución circular  $x_{3p}[n]$  coincide con el de la convolución lineal  $x_3[n]$ . Esta





**Fig. 4.57.** Ilustración que muestra que la convolución circular es equivalente a la suma de réplicas de la convolución lineal. Las sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  a ser convolucionadas (a). La convolución lineal  $x_3[n] = (x_1 * x_2)[n]$  (b). La sucesión  $x_3[n - N]$  para  $N = L = 5$  (c). La sucesión  $x_3[n + N]$  para  $N = 2L = 10$  (d). La convolución circular de  $N = 2L = 10$  puntos entre  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ ,  $x_4[n] = (x_1 \otimes x_2)[n]$  (e) que es igual a la suma de (b), (c) y (d) en el intervalo  $0 \leq n \leq 9$ . En este caso, las sucesiones  $x_3[n]$  y  $x_4[n]$  son iguales.

“coincidencia” entre la convolución circular y la convolución lineal ocurre siempre que el tamaño  $N$  de la convolución circular sea mayor que el largo  $L + P - 1$  de la convolución lineal.  $\square$

Como muestra el Ejemplo 4.35 el solapamiento de las réplicas temporales que aparecen en esta interpretación de la convolución circular de dos sucesiones de longitud finita puede evitarse si  $N \geq L + P - 1$ . También queda en evidencia que si  $N = L = P$  todos los

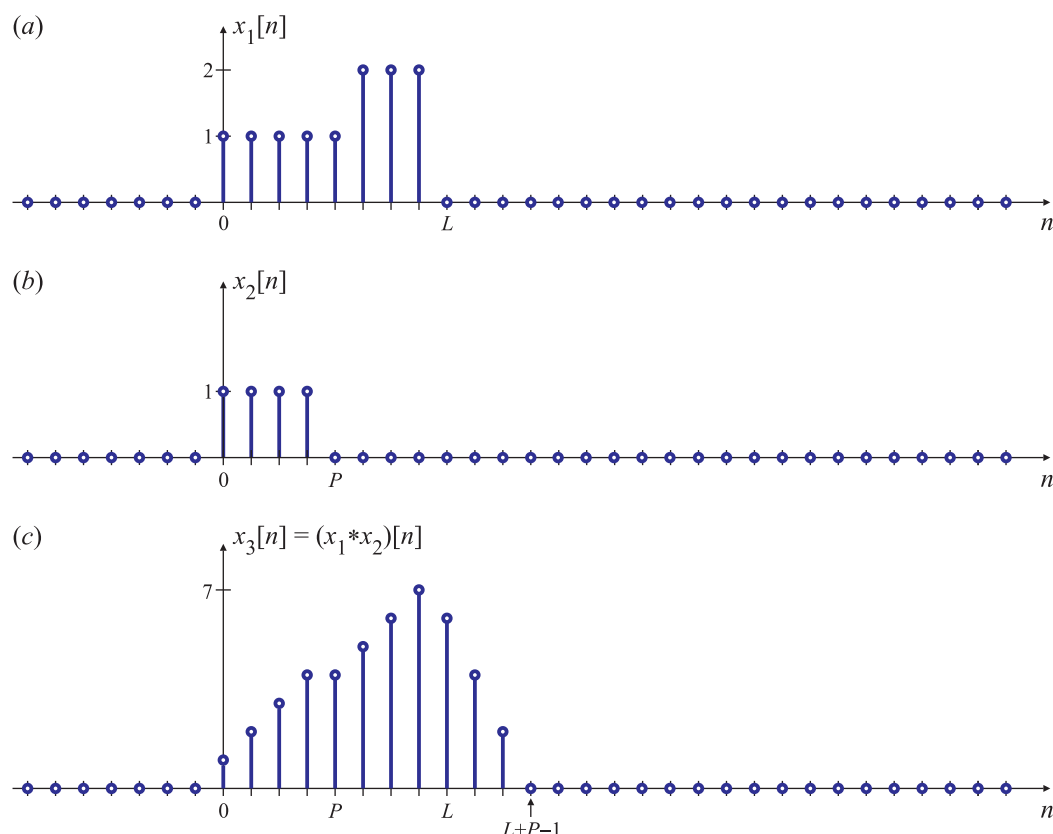


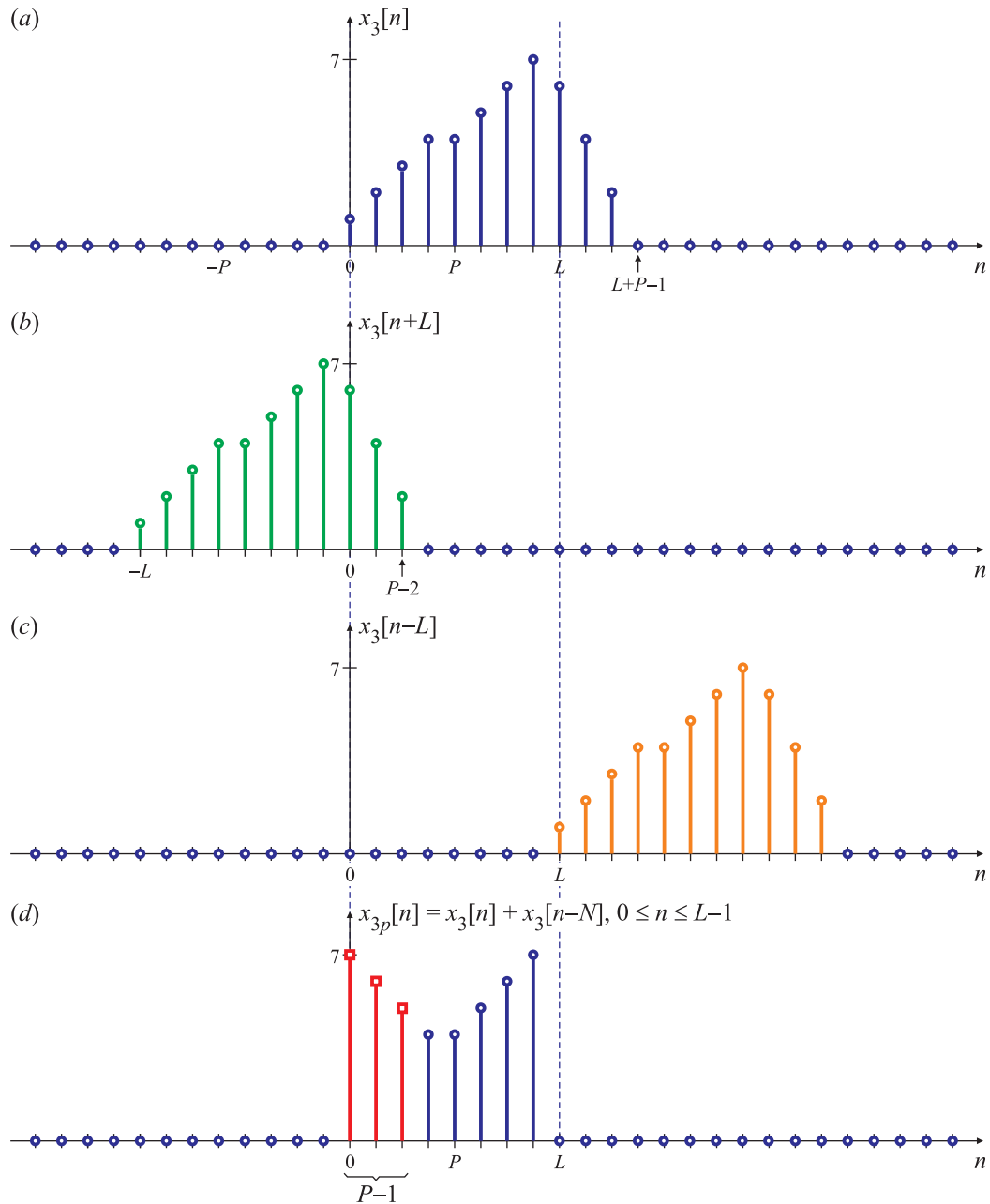
Fig. 4.58. Ejemplo de la convolución lineal de dos sucesiones de longitud finita.

valores de la convolución circular pueden ser distintos de los valores de la convolución lineal. Sin embargo, si las sucesiones a convolucionar tienen largo distinto, por ejemplo  $P < L$ , algunos de los valores de la convolución circular de  $L$  puntos coinciden con algunos de los valores de la convolución lineal. La interpretación basada en la suma de las réplicas es útil para explicar este efecto.

Sean dos sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  de largo  $L$  y  $P$ , respectivamente, donde  $P < L$ , como se muestra en la Fig. 4.58(a) y (b), respectivamente. La idea es calcular la convolución lineal y la convolución circular de largo  $L$  entre  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ , y estudiar cuáles son las muestras que tienen valores coincidentes y cuáles no. La convolución lineal  $x_3[n] = (x_1 * x_2)[n]$  es una sucesión de longitud  $L + P - 1$ , como se muestra en la Fig. 4.58(c). Para calcular la convolución circular entre  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  se utiliza la ecuación (4.112), de modo que

$$x_{3p}[n] = \begin{cases} (x_1 \circledast x_2)[n] = \sum_r (x_1 * x_2)[n - rN], & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4.113)$$

La Fig. 4.59(a) muestra el término de la sumatoria de la ecuación (4.113) correspondiente a  $r = 0$ , y las Figs. 4.59(b) y (c) los términos correspondientes a  $r = -1$  y  $r = 1$ , respectivamente. De la Fig. 4.59 se desprende que los valores de las muestras de la convolución circular, que quedan comprendidos en el intervalo  $0 \leq n \leq L - 1$  sólo dependen de  $x_3[n]$  y  $x_3[n + N]$ .



**Fig. 4.59.** Interpretación de la convolución circular como la suma de réplicas de la convolución lineal para las sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  de la Fig. 4.58.

En general, cuando  $P < L$ ,  $x_3[n]$  sólo se solapa con el término  $x_3[n+N]$  en el intervalo  $0 \leq n \leq L-1$ . Además, cuando estos términos se suman, sólo las últimas  $(P-1)$  muestras de  $x_3[n+N]$ , que corresponden a los índices  $n = 0$  hasta  $n = P-2$  se superponen con las primeras  $(P-1)$  muestras de  $x_3[n]$ , y las últimas  $(P-1)$  muestras de  $x_3[n]$ , que van desde  $n = L$  hasta  $n = L+P-2$  no se tienen en cuenta para el resultado de la convolución circular (porque sólo toma valores en el rango  $0 \leq n \leq L-1$ ). La sucesión  $x_{3p}[n]$  se forma extrayendo la porción  $0 \leq n \leq L-1$ . Como las últimas  $(P-1)$  muestras de  $x_3[n+N]$  son

iguales a las últimas  $(P - 1)$  muestras de  $x_3[n]$ , se puede calcular la convolución circular  $x_{3p}[n]$  a partir de la convolución lineal recortando los últimos  $(P - 1)$  muestras, desde  $n = L$  hasta  $n = L + P - 2$  y sumándoselas a las primeras  $(P - 1)$  muestras de  $x_3[n]$ . Este proceso se representa en la Fig. 4.60 para el caso  $P = 4$  y  $L = 8$ . La Fig. 4.60(a) muestra el resultado  $x_3[n]$  de la convolución lineal, donde las muestras correspondientes a  $n \geq L$  se representan con círculos vacíos. Solamente  $(P - 1)$  puntos para  $n \geq L$  son no nulos. La Fig. 4.60(b) muestra la formación de  $x_{3p}[n]$  “enrollando”  $x_3[n]$  sobre sí misma. Los primeros  $(P - 1)$  puntos quedan alterados por el solapamiento, y el resto de los puntos, desde  $n = P$  hasta  $n = L - 1$  (es decir, las últimas  $L - P + 1$  muestras) *no* se ven afectadas: son las mismas que se obtendrían con una convolución lineal.

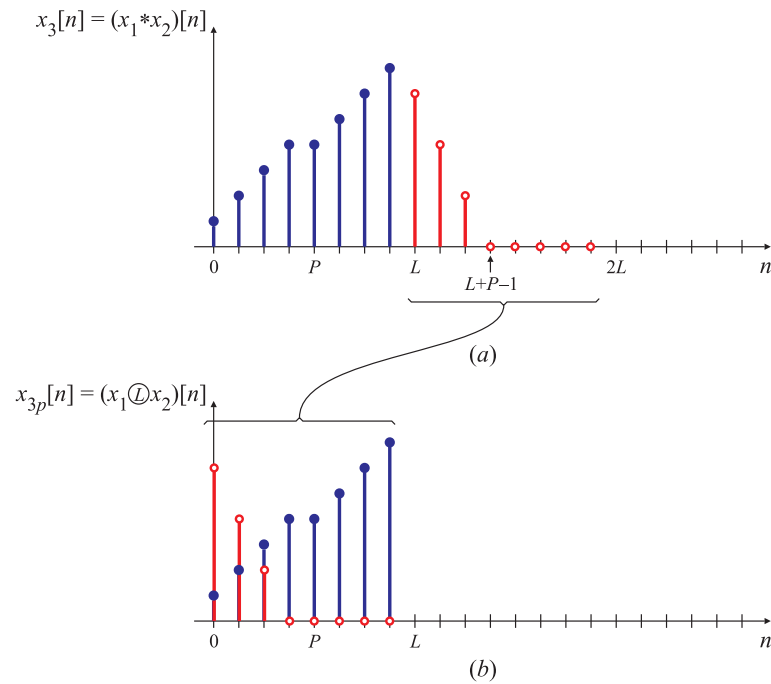
De esta discusión debería quedar claro que si el tamaño  $N$  de la convolución circular es adecuado respecto al largo de las sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ , se puede evitar el solapamiento con muestras no nulas, en cuyo caso las muestras no nulas de la convolución circular coinciden exactamente con las muestras de la convolución lineal. Específicamente, para el caso considerado aquí, si  $x_3[n]$  se replica cada  $N \geq L + P - 1$ , no ocurre solapamiento con muestras no nulas. Las Figs. 4.61(a) y (b) muestran este caso para  $L = 8$  y  $P = 4$ , con  $N = L + P - 1 = 11$ .

### 4.10.3. Implementación de sistemas lineales e invariantes en el tiempo usando la TDF

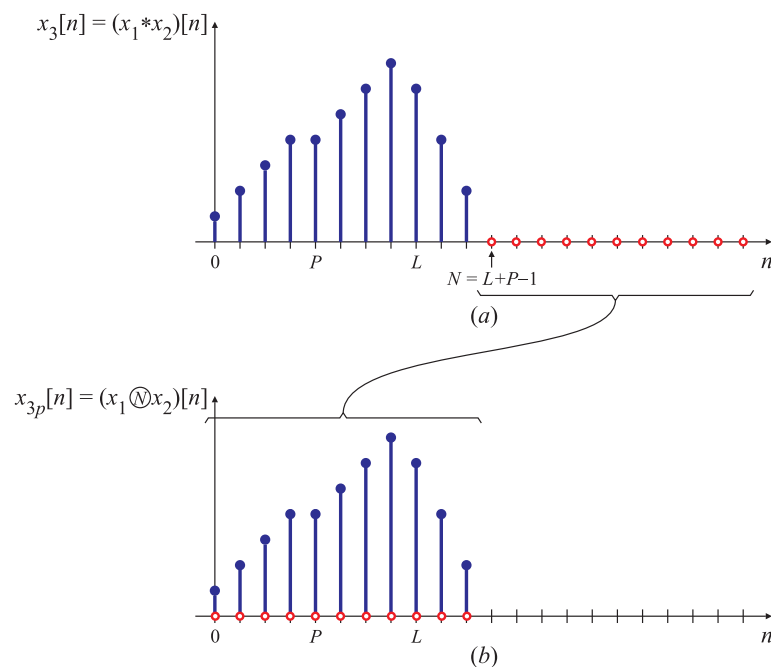
En la sección anterior se mostró una forma de calcular la convolución *lineal* usando la convolución *circular*. Como en procesamiento digital de señales la convolución lineal se utiliza para implementar sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLIT), entonces estos sistemas pueden también implementarse de manera muy eficiente utilizando la convolución circular (en especial, la convolución rápida indicada al comienzo de la Sección 4.10).

Sea  $x[n]$  una sucesión de largo  $L$  y  $h[n]$  una respuesta impulsiva de largo  $P$ . La convolución lineal entre ambas sucesiones, que se notará  $y[n]$ , es una sucesión de largo  $L + P - 1$ . De acuerdo a los resultados de la Sección anterior, para que los resultados de la convolución circular coincidan con los de la convolución lineal el tamaño de la convolución circular debe ser al menos de  $L + P - 1$  puntos. La forma usual de calcular la convolución circular es multiplicando las TDF de  $x[n]$  y  $h[n]$ , y entonces estas TDF tienen que ser de largo  $L + P - 1$ . Esto hace que sea necesario completar  $x[n]$  y  $h[n]$  con muestras nulas, de manera de alcanzar la longitud deseada: a  $x[n]$  se le agregan  $P - 1$  ceros, y a  $h[n]$ ,  $L - 1$ . Este proceso de agregar muestras nulas se conoce como completar con ceros (*zero padding* en inglés).

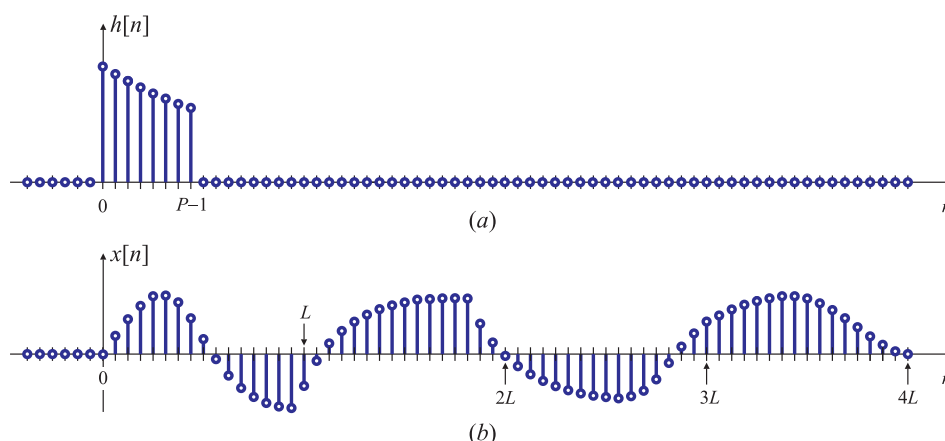
Este proceso permite el cálculo de la convolución lineal de dos sucesiones de longitud finita usando la TDF: la salida de un sistema FIR (cuya respuesta impulsiva es de longitud finita) ante una entrada que también es una señal de longitud finita puede obtenerse usando la TDF. Sin embargo puede no ser muy práctico, porque la longitud de la señal puede ser finita pero muy grande. Por ejemplo, uno podría pensar en filtrar un tema musical armando un arreglo con todas las muestras de la señal (un tema de tres minutos tiene más de 17 millones de muestras), y aplicar el procedimiento descrito utilizando unas TDF de orden  $N > 17 \times 10^6$ : necesitaría una cantidad de memoria similar, para guardar todas las muestras, y la señal de salida solo estaría disponible después de realizar todos los cálculos, lo que implicaría un retardo importante entre la señal de entrada, y la



**Fig. 4.60.** Solapamiento de las muestras de la convolución lineal para obtener la convolución circular de orden  $N = L$ , en donde la “cola” de la convolución se solapa con las  $(P - 1)$  primeras muestras.



**Fig. 4.61.** Solapamiento de las muestras de la convolución lineal para obtener la convolución circular de orden  $N = L + P - 1$ . En este caso, el solapamiento se produce con muestras nulas, y entonces el resultado de la convolución circular coincide con el de la convolución lineal.



**Fig. 4.62.** Respuesta impulsiva  $h[n]$  de longitud finita (a) y señal de entrada  $x[n]$  de longitud indefinida (b).

de salida. Aún así, esta “solución” sería inviable para señales de duración indefinida (por ejemplo, ecualizar un concierto en vivo). La solución a ambos problemas es la *convolución por bloques*, en la cual la señal a ser filtrada se parte en secciones de largo finito. Cada uno de estos bloques se convoluciona con la respuesta impulsiva  $h[n]$  de longitud finita  $P$ , y para obtener la salida estos bloques (parciales) de la salida deben combinarse de manera adecuada. El filtrado lineal de cada bloque puede implementarse con la TDF.

En un sistema de tiempo real, se utiliza un *buffer* para ir almacenando las muestras de entrada, y cuando se alcanza el largo especificado, se hace una convolución entre ese bloque y la respuesta impulsiva. En las secciones que siguen, se verá que el bloque resultante tiene algunas muestras que coinciden exactamente con una parte de la convolución *lineal* entre la entrada y la respuesta impulsiva, y otras no. Las muestras “útiles” de cada bloque se pueden almacenar en un *buffer* de salida, que se encarga de ir produciendo la señal de salida. En este caso también hay un retraso o latencia entre la primera muestra de la señal de entrada y la primera muestra de la señal de salida, pero en general puede controlarse ajustando el tamaño de los bloques. En otras palabras, el retardo entre entrada y salida depende del tamaño del bloque elegido y no de la longitud de la señal.

En la bibliografía hay muchas maneras de indizar los bloques tanto de entrada como los de salida parcial, pero lo realmente importante es comprender la idea detrás de estos métodos y la forma correcta de concatenar los bloques para que el resultado coincida con el de la convolución lineal.

#### 4.10.3.1. Solapar y sumar (overlap-add)

Para estudiar cómo “pegar” cada uno de los bloques de salida, sea  $h[n]$  una respuesta impulsiva de largo  $P$ , y  $x[n]$  una señal de entrada de longitud arbitraria, como se muestra en la Fig. 4.62. Se supone que  $x[n] = 0$  para  $n < 0$  y que la longitud de  $x[n]$  es mucho mayor que  $P$ . La sucesión  $x[n]$  se puede representar como una suma de segmentos de

longitud finita  $L$ , por ejemplo

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL], \quad (4.114)$$

donde

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En cada segmento la primera muestra no nula del bloque  $x_r[n]$  es la muestra  $rL$  de la señal de entrada  $x[n]$ , tal como se muestra la Fig. 4.63(a). Lo importante es que  $x_r[n]$  se puede pensar como un bloque de  $L$  muestras.

Como la convolución es una operación lineal e invariante en el tiempo, aplicando (4.114) resulta natural que

$$y[n] = (x * h)[n] = h[n] * \left( \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL] \right) = \sum_{r=0}^{\infty} h[n] * x_r[n - rL] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL] \quad (4.115)$$

donde

$$y_r[n] = (h * x_r)[n].$$

Como las sucesiones  $x_r[n]$  tienen sólo  $L$  muestras no idénticamente nulas, y  $h[n]$  es de largo  $P$ , cada uno de los bloques  $y_r[n] = (h * x_r)[n]$  tiene largo  $(L + P - 1)$ . Por lo tanto, la convolución lineal  $(h * x_r)[n]$  puede obtenerse usando convoluciones circulares de largo  $N \geq L + P - 1$ . La última sumatoria de (4.115) indica que el bloque  $r$ -ésimo de  $y_r[n]$  queda desplazado en  $rL$  muestras, es decir que toma valores no idénticamente nulos en el intervalo  $rL \leq n \leq (r + 1)L + P - 2$ . Así como la señal de entrada se reconstruye sumando las secciones de la Fig. 4.63(a), el resultado final  $(x * h)[n]$  se obtiene sumando las salidas parciales  $y_r[n] = (h * x_r)[n]$ . Como cada bloque de entrada tiene largo  $L$ , y cada bloque de salida parcial  $y_r[n]$  tiene largo  $L + P - 1$ , las últimas  $(P - 1)$  muestras de un bloque parcial de salida  $y_r[n]$  se solapanán con las primeras  $(P - 1)$  muestras del bloque siguiente  $y_{r+1}[n]$ , los que deben sumarse de acuerdo a lo indicado por la ecuación (4.115), tal como se representa<sup>3</sup> en la Fig. 4.63(b). Este proceso de obtener la salida sumando salidas parciales se conoce como *solapar y sumar* (*overlap-add* en inglés), porque para calcular la salida las secciones filtradas se solapan y se suman. El solapamiento ocurre porque la convolución lineal de cada bloque  $x_r[n]$  de largo  $L$  de la entrada con la respuesta impulsiva  $h[n]$  de largo  $P$  es más largo  $(L + P - 1)$  que la longitud de cada sección.

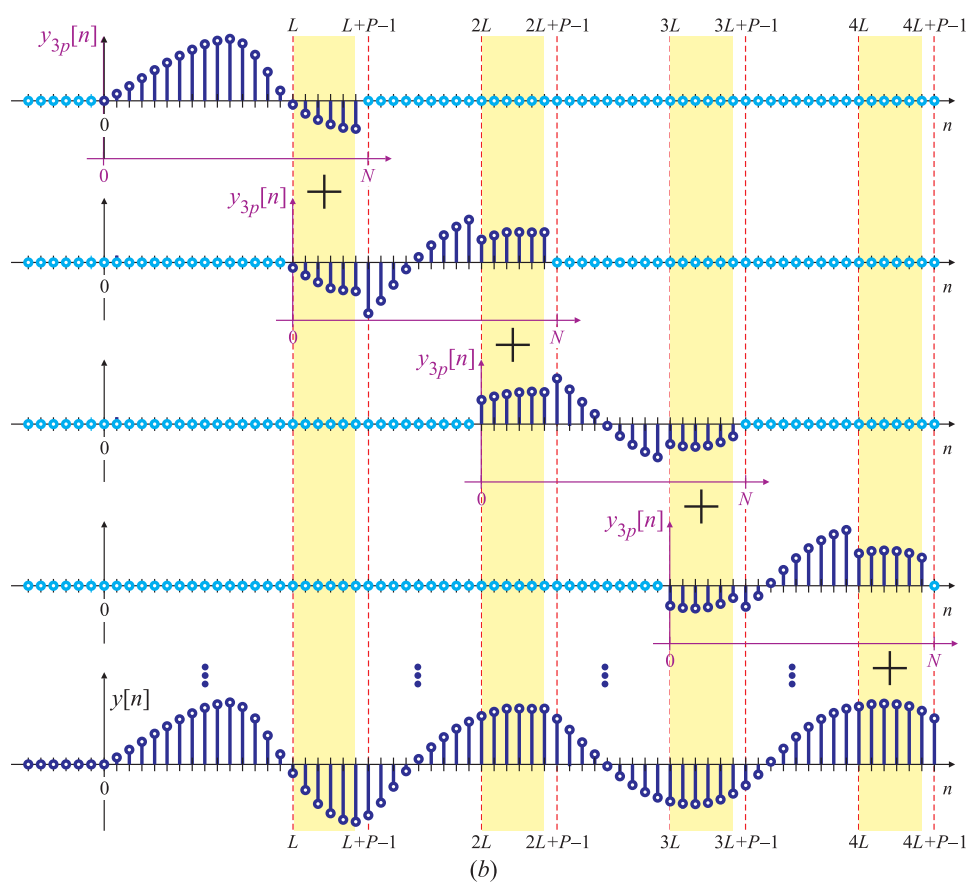
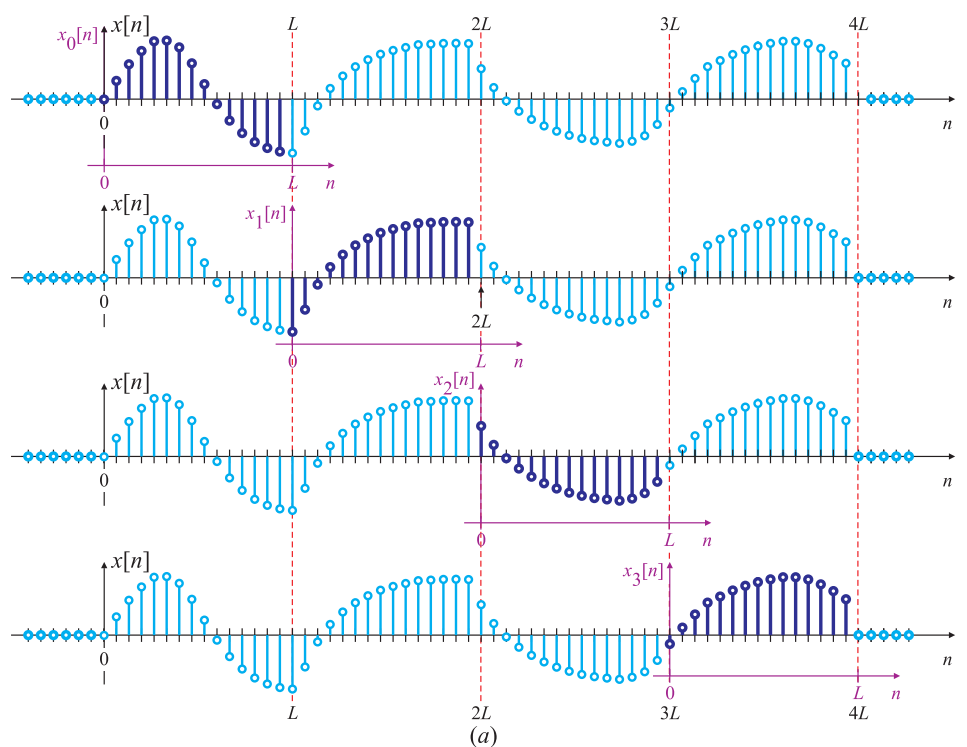
El método de convolución por bloques de *solapar y sumar* no está atado a la TDF y/o a la convolución circular: el método de cálculo de la convolución de cada bloque puede ser cualquiera. Lo que es importante es el mecanismo con que seleccionan los bloques de entrada y se combinan los bloques de salida.

#### EJEMPLO 4.36. Convolución por bloques: Solapar y sumar

Se desea calcular la convolución entre las sucesiones

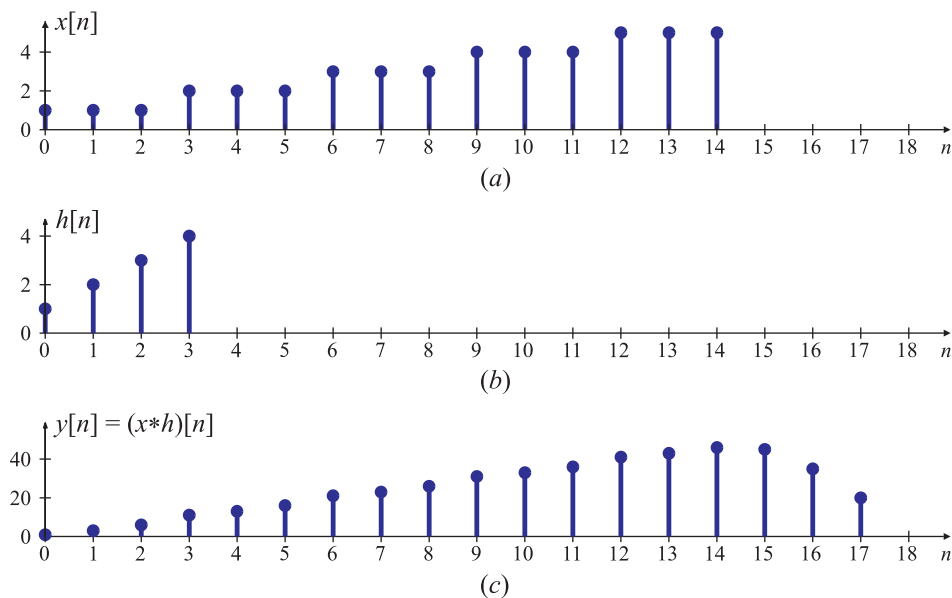
$$\begin{aligned} x[n] &= \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5\}, \\ h[n] &= \{1, 2, 3, 4\}, \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Esta figura es sólo cualitativa, para explicar el proceso de solapar y sumar: cada una de las salidas parciales es una representación de la convolución entre  $x_r[n]$  y  $h[n]$ , y no necesariamente el resultado real.



**Fig. 4.63.** Método “solapar y sumar”: Segmentación de la sucesión  $x[n]$  de la Fig. 4.62 en secciones de longitud  $L$  que no se solapan (a). Resultado de convolucionar cada bloque con la respuesta impulsiva  $h[n]$  (b). Las zonas grisadas indican las zonas donde se solapan y suman las muestras de una y otra sección.





**Fig. 4.64.** Señal de entrada  $x[n]$  (a), respuesta impulsiva  $h[n]$  (b) y el resultado de la convolución lineal  $y[n] = (x * h)[n]$  (c).

que se muestran en las Figs. 4.64(a) y (b), respectivamente, por el método de convolución por bloques, utilizando una TDF de tamaño  $N = 8$ . El largo de  $h[n]$  es  $P = 4$ , y entonces los bloques de entrada se eligen de longitud  $L_a = N - (P - 1) = 5$ .

- **Etapá 1:** se toman las  $L_a = 5$  primeras muestras de la sucesión  $x[n]$ , y se construye una sucesión  $x_0[n]$ ,

$$x_0[n] = \{1, 1, 1, 2, 2\}, \quad 0 \leq n \leq 4.$$

La salida parcial que resulta de convolucionar el primer bloque de la entrada  $x_1[n]$  con la respuesta impulsiva  $h[n]$  es

$$y_0[n] = (h * x_0)[n] = \{1, 3, 6, 11, 13, 14, 14, 8\}, \quad 0 \leq n \leq 7.$$

Los bloques intervinientes en esta etapa se muestran en la Fig. 4.65. De la salida parcial  $y_0[n]$  las  $P - 1 = 3$  últimas muestras ( $\{14, 14, 8\}$ ), indicadas en línea de puntos deberán sumarse a las  $P - 1 = 3$  primeras muestras de la próxima salida parcial. Sin embargo, las primeras  $L = 5$  muestras son “correctas”, y pueden escribirse en el *buffer* de salida:

$$y[n] = \{1, 3, 6, 11, 13\}, \quad 0 \leq n \leq 4.$$

- **Etapá 2:** El segundo bloque de 5 muestras de la entrada  $x[n]$  es

$$x_1[n] = \{2, 3, 3, 3, 4\}, \quad 5 \leq n \leq 9,$$

y la segunda salida parcial es

$$y_1[n] = (h * x_1)[n] = \{2, 7, 15, 26, 31, 29, 24, 16\}, \quad 5 \leq n \leq 12,$$

como se representa en la Fig. 4.66. A las  $P - 1 = 3$  primeras muestras de la salida parcial  $y_2[n]$  deben sumarse las últimas  $P - 1 = 3$  muestras de la salida parcial anterior, de modo que en el *buffer* de salida puede escribirse el segundo bloque formado por las muestras

$$\begin{aligned} y[n] &= \{2 + 14, 7 + 14, 15 + 8, 26, 31\}, \\ &= \{16, 21, 23, 26, 31\}. \end{aligned} \quad 5 \leq n \leq 9.$$

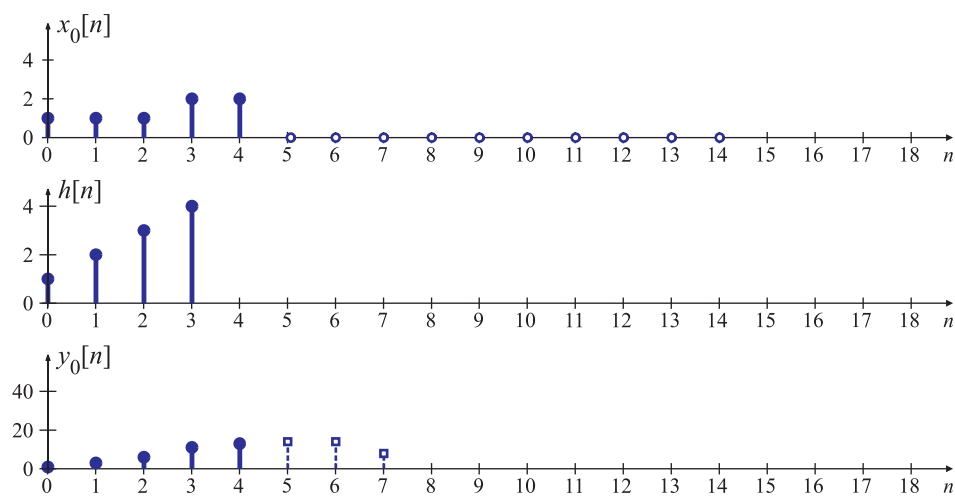


Fig. 4.65. Primera etapa del método "solapar y sumar".

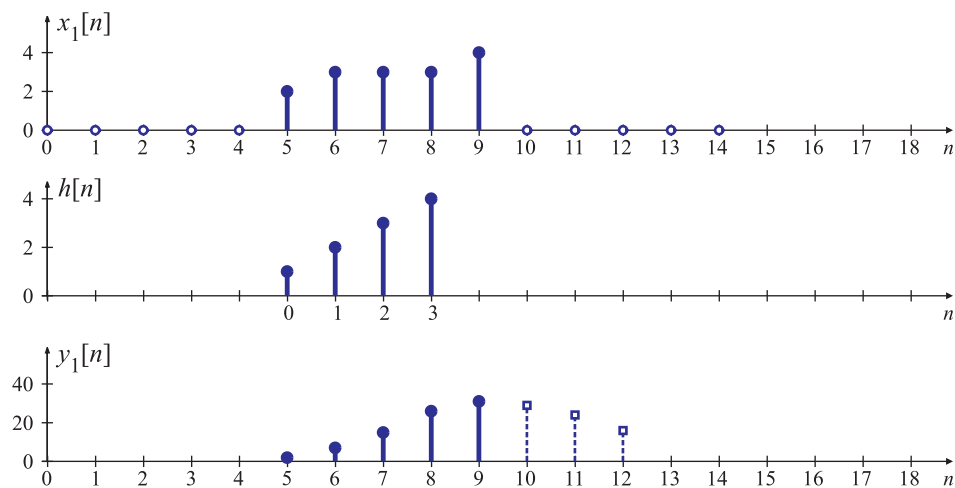


Fig. 4.66. Segunda etapa del método "solapar y sumar".

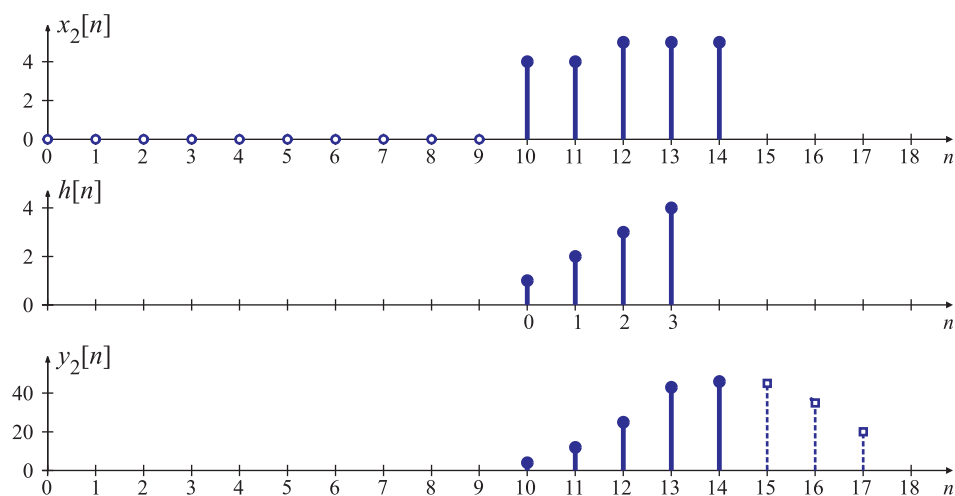
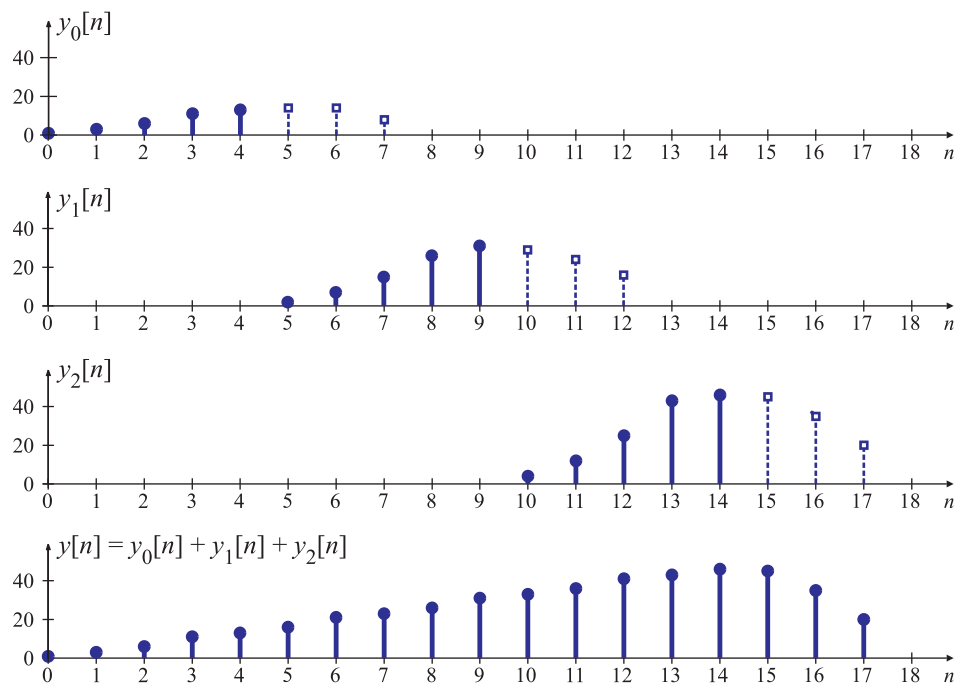


Fig. 4.67. Tercera etapa del método "solapar y sumar".



**Fig. 4.68.** Método “solapar y sumar”: obtención de la salida  $y[n]$  a partir de las salidas parciales  $y_r[n]$ ,  $r = 0, 1, 2$ .

Las últimas  $P - 1 = 3$  muestras,  $\{29, 24, 16\}$  correspondientes a  $10 \leq n \leq 12$ , se deben sumar a las primeras tres muestras de la salida parcial siguiente.

- **Etapla 3:** El tercer bloque de  $L_a = 5$  muestras de la entrada está formado por

$$x_2[n] = \{4, 4, 5, 5, 5\}, \quad 10 \leq n \leq 14,$$

y la salida parcial correspondiente a este bloque es

$$y_2[n] = (h * x_2)[n] = \{4, 12, 25, 43, 46, 45, 35, 20\}, \quad 10 \leq n \leq 17,$$

como se muestra en la Fig.4.67. Para calcular el último bloque de salida se deben sumar las últimas 3 muestras del bloque  $y_2[n]$  a las primeras 3 muestras de  $y_3[n]$ . Entonces

$$\begin{aligned} y[n] &= \{4 + 29, 12 + 24, 25 + 16, 43, 46, 45, 35, 20\}, \quad 10 \leq n \leq 17, \\ &= \{33, 36, 41, 43, 46, 45, 35, 20\} \end{aligned}$$

La contribución de cada salida parcial a la salida final y el solapamiento entre ellas se ponen de manifiesto en esta tabla

$n \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$y_0[n] \rightarrow$	1	3	6	11	13	14	14	8										
						+	+	+										
$y_1[n] \rightarrow$						2	7	15	26	31	29	24	16					
											+	+	+					
$y_2[n] \rightarrow$											4	12	25	43	46	45	35	20
$y[n] \rightarrow$	1	3	6	11	13	16	21	23	26	31	33	36	41	43	46	45	35	20

y se representa pictóricamente en la Fig. 4.68. El resultado de la convolución por bloques es entonces

$$y[n] = \underbrace{\{1, 3, 6, 11, 13\}}_{1^{\text{er}} \text{ etapa}}, \underbrace{\{16, 21, 23, 26, 31\}}_{2^{\text{da}} \text{ etapa}}, \underbrace{\{33, 36, 41, 43, 46, 45, 35, 20\}}_{3^{\text{ra}} \text{ etapa}}, \quad 0 \leq n \leq 17.$$

Queda como ejercicio para el lector revisar que la salida  $y[n]$  calculada con el método de solapar y sumar coincide con la convolución lineal  $(x * h)[n]$  que se muestra en las Fig. 4.64(c).  $\square$

#### 4.10.3.2. Solapar y guardar (overlap-save)

Otro método de realizar una convolución por bloques, conocido como *solapar y guardar* (*overlap-save*, en inglés) se basa en utilizar una convolución circular de orden  $N$  entre la respuesta impulsiva  $h[n]$  de largo  $P$ , eligiendo bloques de entrada  $x_r[n]$  del mismo largo  $N$  de la convolución circular, identificando qué parte de este resultado  $(x_r \circledast h)[n]$  coincide con la convolución lineal  $(x_r * h)[n]$ , y estudiando la manera correcta de “pegar” los bloques de salida.

En la Sección 4.10.2 se estudió que si se realiza la convolución circular de largo  $N$  de una sucesión de  $N$  puntos con una de  $P$  puntos ( $P < N$ ), las primeras  $(P - 1)$  muestras del resultado difieren de la convolución lineal por el solapamiento de las réplicas, mientras que el resto ( $N - P + 1 = L$ ) son coincidentes. Se dirá entonces que estas  $(P - 1)$  muestras son “erróneas”, mientras que el resto son idénticas a parte de la convolución lineal entre  $x_r[n]$  y  $h[n]$ . Entonces se puede segmentar la sucesión de entrada en bloques de largo  $N$ , de forma que un bloque se solape  $P - 1$  muestras con el que lo precede. Es decir, se pueden definir las secciones de entrada como

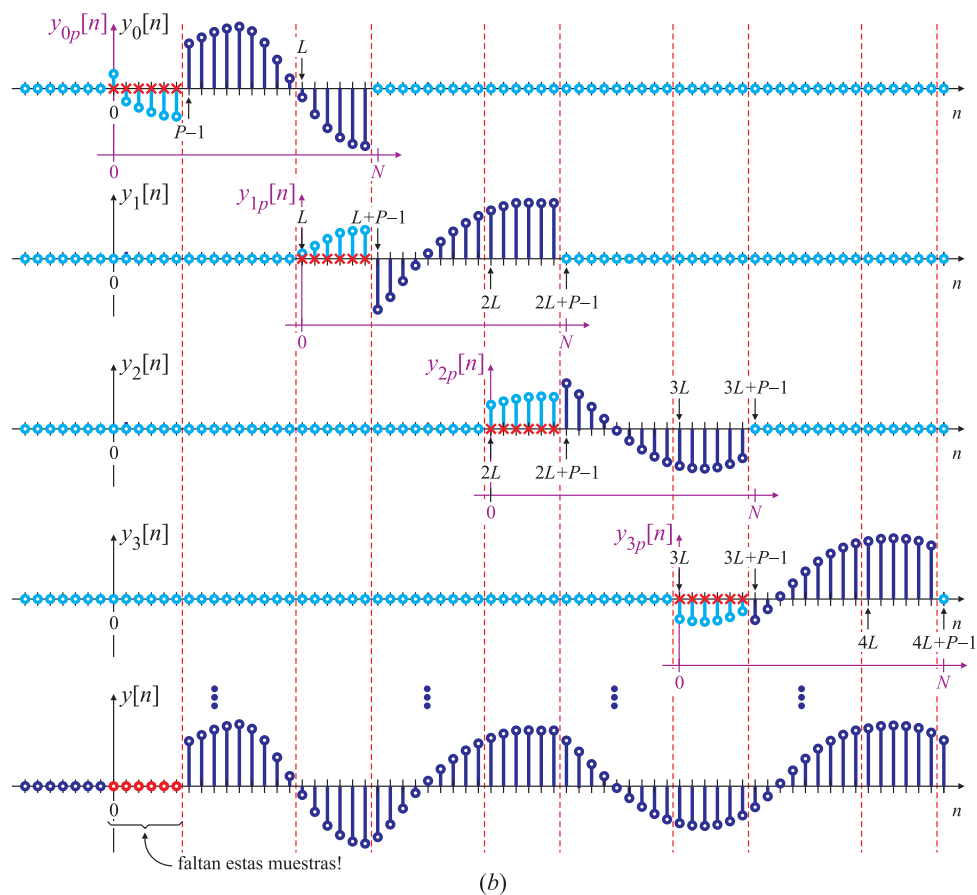
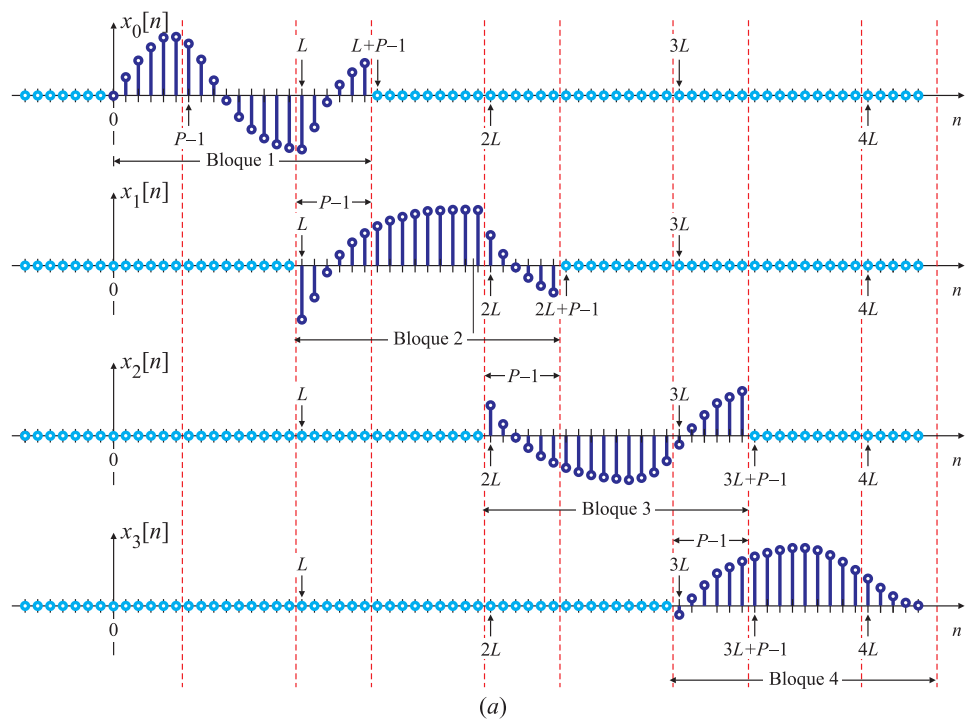
$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde la primera muestra de la sección  $r$ -ésima corresponde a la muestra  $rL$  de la sucesión original. Este método de partición de la entrada se representa en la Fig. 4.69(a): los bloques tienen longitud  $N = L + P - 1$ , y las últimas  $(P - 1)$  muestras de un bloque se solapan con las primeras  $(P - 1)$  del siguiente. La convolución circular de cada sección con la respuesta impulsiva  $h[n]$  se nota  $y_{rp}[n]$ ; el subíndice  $p$  indica que  $y_{rp}[n] = (x_r \circledast h)[n]$  es el resultado de una convolución circular en la que se ha producido distorsión por solapamiento. Estas sucesiones se representan en la Fig. 4.69(b). La porción de cada sección de salida en el rango  $0 \leq n \leq P - 2$  (las primeras  $P - 1$  muestras) es la parte que debe descartarse. Las muestras restantes de las secciones sucesivas se concatenan (se “pegan” unas al lado de las otras) para obtener la salida. Esto es,

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_{rp}[n - rN]$$

donde

$$y_r[n] = \begin{cases} y_{rp}[n], & P - 1 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4.116)$$



**Fig. 4.69.** Método “solapar y guardar”: Partición de la sucesión  $x[n]$  de la Fig. 4.62 en secciones de largo  $N = L + P - 1$  que se solapan  $P - 1$  muestras (a). Resultado de la convolución circular de largo  $N = L + P - 1$  de cada bloque con la respuesta impulsiva  $h[n]$  (b). Las muestras que se descartan por causa de la convolución circular se notan con  $\times$ .

Nótese la diferencia de los ejes coordinados para  $y_{rp}[n]$  y para  $y_r[n]$  en la Fig. 4.69(b). Este procedimiento se denomina *solapar y guardar* porque los segmentos  $x_r[n]$  de entrada se solapan  $(P - 1)$  muestras, de manera que las primeras  $(P - 1)$  muestras de cada segmento son las últimas  $(P - 1)$  muestras que se *guardaron* del segmento anterior, y  $N - P + 1 = L$  muestras nuevas.

El inconveniente con este método es que las primeras  $(P - 1)$  muestras de la señal de salida  $y[n]$  no están disponibles, porque son las primeras  $(P - 1)$  muestras del primer bloque que se descartaron. Esto se resuelve fácilmente agregando  $(P - 1)$  muestras nulas al principio de la sucesión  $x[n]$ , como se representa en la Fig. 4.70(a). Ahora, cada bloque de la sucesión de entrada es de la forma

$$x_r[n] = x[n + rL - (P - 1)], \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

donde se asume que  $x[-(P - 1)] = \dots = x[-1] = 0$ . Nuevamente,  $y_{rp}[n]$  es el resultado de la convolución circular de  $N$  puntos entre  $x_r[n]$  y  $h[n]$ ,  $y_{rp}[n] = (x_r \circledast h)[n]$ , pero ahora los segmentos que forman la señal de salida son

$$y_r[n] = \begin{cases} y_{rp}[n - (P - 1)], & P - 1 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ahora la primera muestra de  $y[n]$ , cuando  $r = 0$  es  $y_{0p}[0]$ , mientras que en (4.116) es  $y_{0p}[P - 1]$ , como se aprecia en la Fig. 4.70(b).

#### EJEMPLO 4.37. Convolución por bloques: solapar y guardar

Se desea calcular la convolución por bloques de las mismas sucesiones del Ejemplo 4.36, pero esta vez usando la técnica de solapar y guardar usando TDF de largo  $N = 8$ . En este caso, los bloques de las muestras de entrada también serán de longitud  $L_s = 8$ . Como la respuesta impulsiva tiene largo  $P = 4$ , resulta  $L = N - (P - 1) = 5$ , y de acuerdo con estos valores, se deben descartar las primeras  $P - 1 = 3$  muestras de cada convolución circular, y para evitar perder las primeras 3 muestras de la convolución, se agregan 3 ceros al principio de la sucesión  $x[n]$ , en los índices  $\{-3, -2, -1\}$ , como se muestra en la gráfica de  $x[n]$  en la Fig. 4.71.

- **Etapas 1:** El primer bloque de la sucesión de entrada es

$$x_0[n] = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, 1, 1, 2, 2\}, \quad -3 \leq n \leq 4,$$

donde se resaltaron en negrita las muestras nulas agregadas al comienzo de  $x[n]$ . La sucesión  $h[n]$  se debe completar con ceros, de manera de llevar su longitud total a  $N = 8$  muestras:

$$h[n] = \{1, 2, 3, 4, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}.$$

El resultado de la convolución circular de  $x_0[n]$  con  $h[n]$  es

$$(h \circledast x_0)[n] = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{11}, 1, 3, 6, 11, 13\}, \quad -3 \leq n \leq 4.$$

Las primeras  $P - 1 = 3$  muestras deben descartarse (por eso se escriben tachadas), de modo que el primer bloque de la salida está formado por el conjunto de 5 muestras dado por

$$y_0[n] = \{1, 3, 6, 11, 13\}, \quad 0 \leq n \leq 4.$$

como se muestra en la Fig. 4.72. Las muestras que se deben descartar se indican con línea de trazos, y cruces en los índices respectivos.

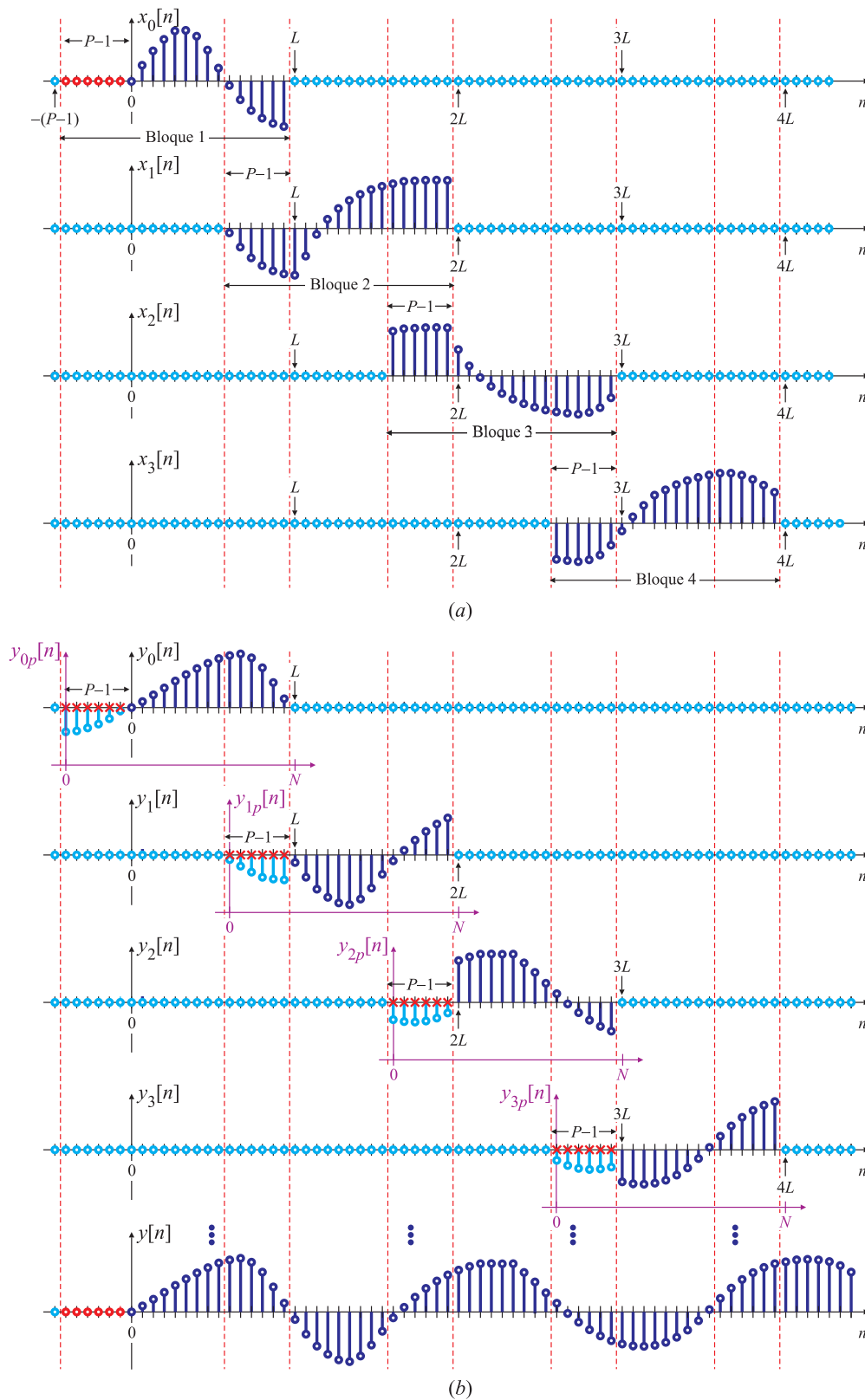
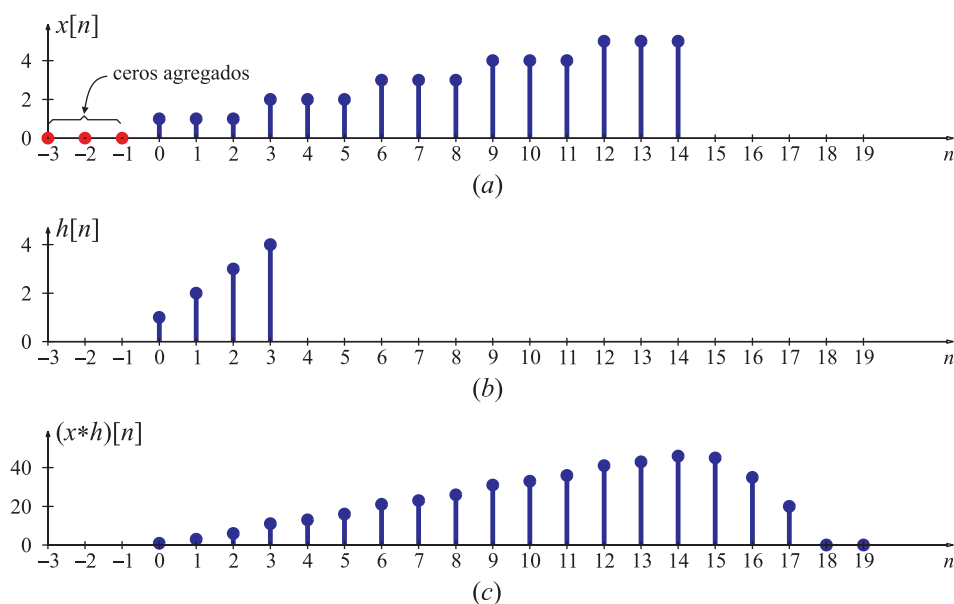


Fig. 4.70. Método "solapar y guardar": Modificación de la sucesión  $x[n]$  agregándole  $P-1$  ceros al comienzo para evitar a pérdida de las primeras muestras.



**Fig. 4.71.** Señal de entrada  $x[n]$  con  $P - 1$  ceros agregados al principio (a), respuesta impulsiva  $h[n]$  (b) y el resultado de la convolución lineal  $y[n] = (x * h)[n]$  (c).

- **Etapla 2:** En esta etapa, el segundo bloque de la sucesión de entrada se elige de modo que se solape con las  $P - 1 = 3$  últimas muestras del bloque anterior, de modo que

$$x_1[n] = \{1, \mathbf{2}, \mathbf{2}, 2, 3, 3, 3, 4\}, \quad 2 \leq n \leq 9.$$

En negrita se indican las muestras que se “guardaron” de  $x_0[n]$ . El resultado de la convolución circular entre  $x_1[n]$  y  $h[n]$  es

$$(h \circledast x_1)[n] = \{\cancel{30}, \cancel{28}, \cancel{26}, 16, 21, 23, 26, 31\}, \quad 2 \leq n \leq 9,$$

y como se deben descartar las primeras  $P - 1$  muestras (tachadas), el segundo bloque de salida resulta

$$y_1[n] = \{16, 21, 23, 26, 31\}, \quad 5 \leq n \leq 9,$$

como se muestra en la Fig. 4.73

- **Etapla 3:** El bloque de entrada de esta etapa es

$$x_2[n] = \{\mathbf{3}, \mathbf{3}, 4, 4, 4, 5, 5, 5\}, \quad 7 \leq n \leq 14,$$

que repite en los  $P - 1 = 3$  primeros lugares las últimas  $P - 1 = 3$  muestras almacenadas del bloque de entrada anterior (resaltados en negrita). La convolución circular entre  $x_2[n]$  y  $h[n]$  es

$$(h \circledast x_2)[n] = \{\cancel{48}, \cancel{44}, \cancel{40}, 33, 36, 41, 43, 46\}, \quad 7 \leq n \leq 14,$$

donde se han tachado las  $P - 1$  muestras que se deben descartar. Por lo tanto, el tercer bloque de salida es

$$y_2[n] = \{33, 36, 41, 43, 46\}, \quad 10 \leq n \leq 14,$$

como se representa en la Fig. 4.74.

- **Etapla 4:** Finalmente, el bloque de entrada de esta última etapa es

$$x_3[n] = \{\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{5}, 0, 0, 0, 0, 0\}, \quad 12 \leq n \leq 19.$$



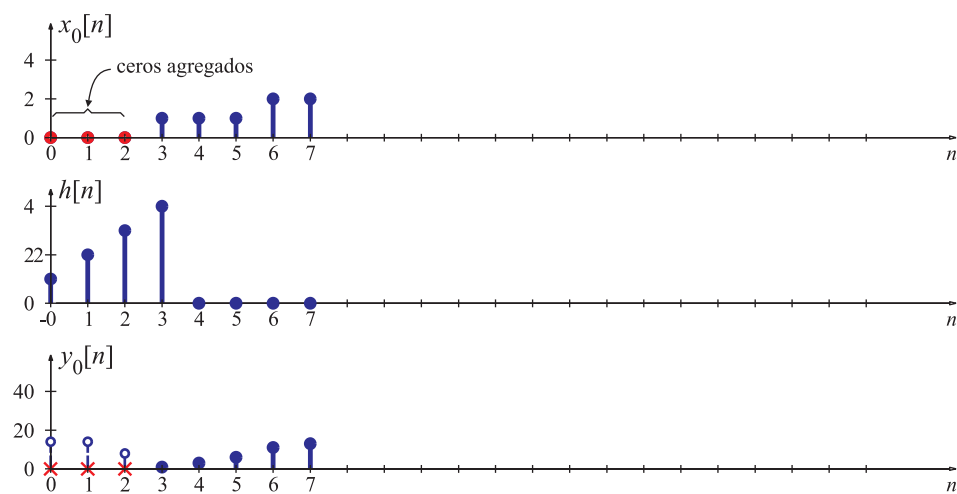


Fig. 4.72. Primera etapa del método "solapar y guardar".

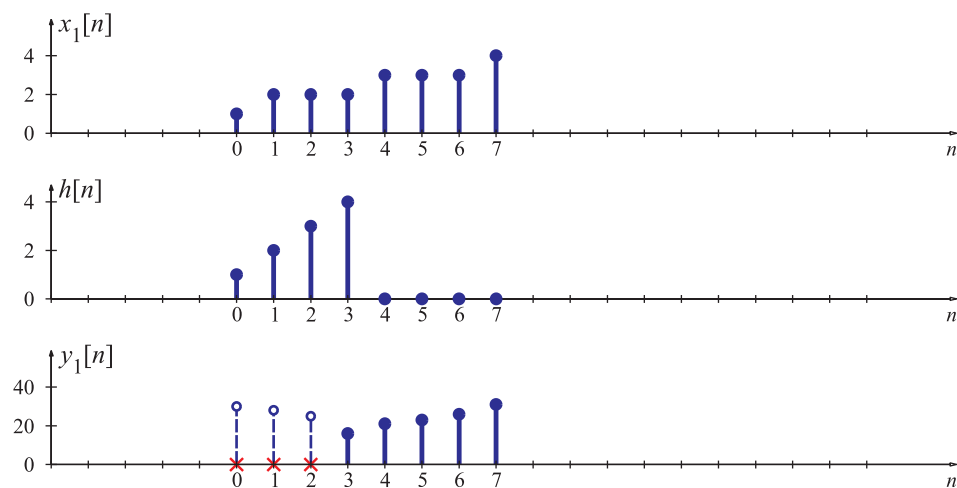


Fig. 4.73. Segunda etapa del método "solapar y guardar".

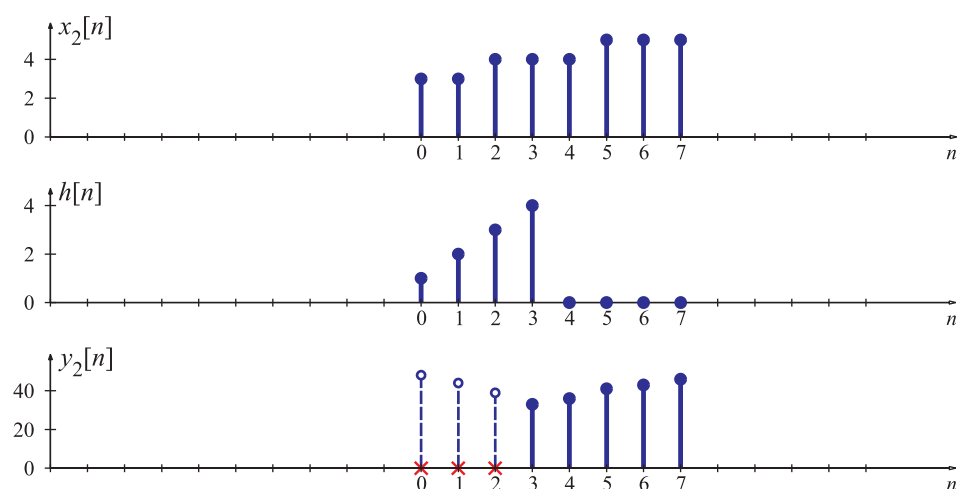


Fig. 4.74. Tercera etapa del método "solapar y guardar".

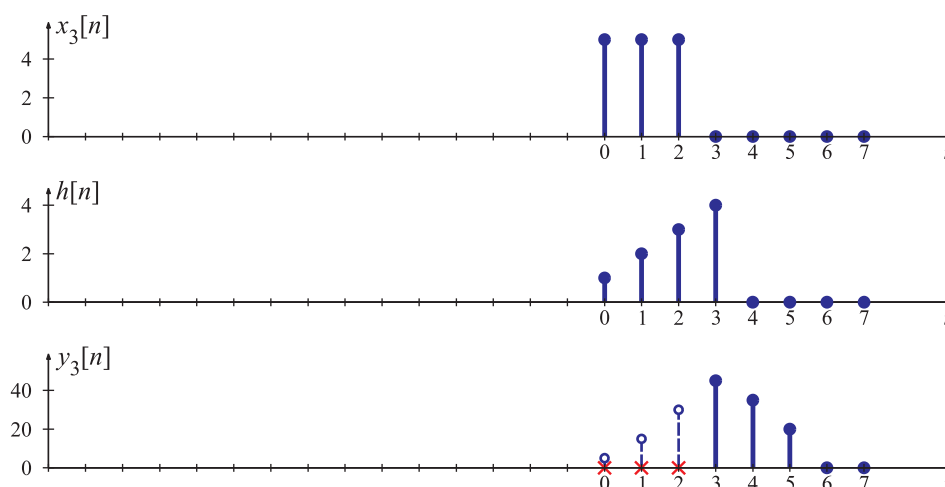


Fig. 4.75. Cuarta etapa del método “solapar y guardar”.

Este bloque está formado por las últimas tres muestras del bloque de entrada anterior (indicadas en negrita), y cinco muestras nulas que resultan de efectuar un *padding* de ceros para ajustar al largo de la TDF. El resultado de la convolución circular entre  $x_3[n]$  y  $h[n]$  es

$$(h \circledast x_3)[n] = \{\text{tachados}, \text{tachados}, \text{tachados}, 45, 35, 20, 0, 0\}, \quad 12 \leq n \leq 19.$$

Nuevamente, las tres primeras muestras (tachadas) deben descartarse, y por lo tanto el último bloque de salida es

$$y_3[n] = \{45, 35, 20, 0, 0\}, \quad 15 \leq n \leq 19,$$

como se muestra en la Fig. 4.75

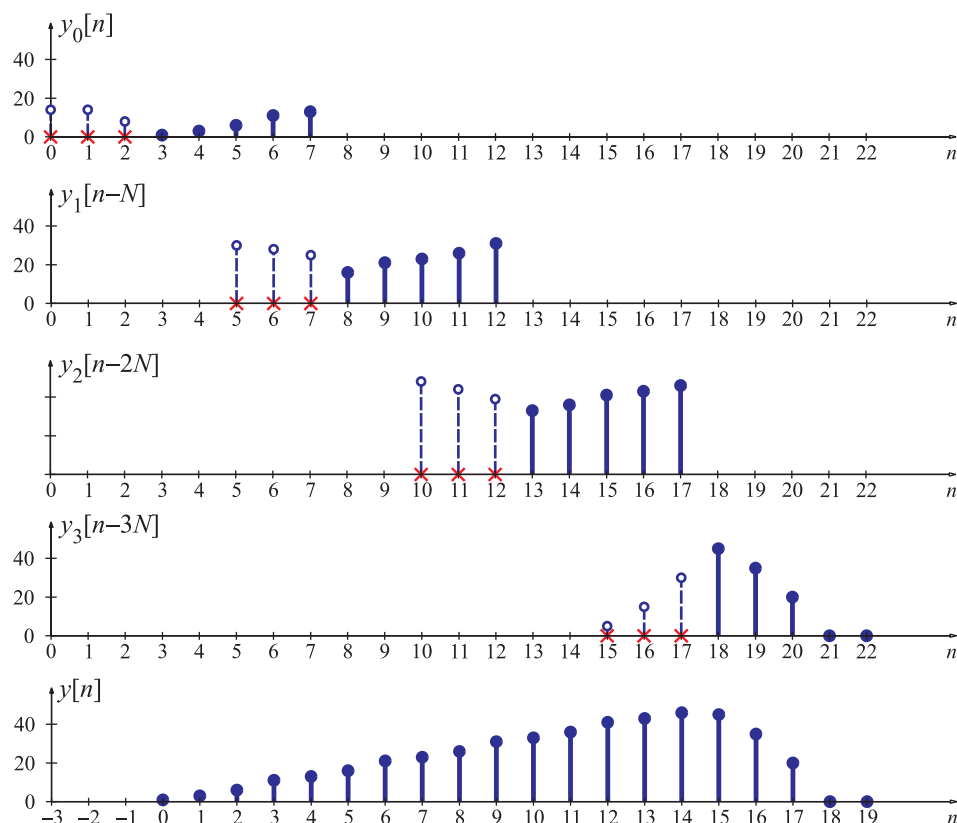
La forma de segmentar la entrada y de concatenar los bloques de salida se resumen en la siguiente tabla

$n \rightarrow$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$x_0[n] \rightarrow$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	1	1	1	2	2															
$x_1[n] \rightarrow$						1	2	2	2	3	3	3	4										
$x_2[n] \rightarrow$											3	3	4	4	4	5	5	5					
$x_3[n] \rightarrow$																5	5	5	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
$y_0[n] \rightarrow$	<del>1</del>	<del>3</del>	<del>6</del>	1	3	6	11	13															
$y_1[n-N] \rightarrow$						<del>16</del>	<del>21</del>	<del>23</del>	16	21	23	26	31										
$y_2[n-2N] \rightarrow$											<del>33</del>	<del>36</del>	<del>41</del>	33	36	41	43	46					
$y_3[n-3N] \rightarrow$																<del>45</del>	<del>35</del>	<del>20</del>	45	35	20	0	0
$y[n] \rightarrow$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	1	3	6	11	13	16	21	23	26	31	33	36	41	43	46	45	35	20	0	0

donde se destacan las muestras agregadas al principio de la sucesión (tres ceros, en negrita), y al final de la misma (cinco ceros, en negrita) y los términos que se descartan de cada convolución lineal (tachados). Este resultado se representa pictóricamente en la como se muestra en la Fig. 4.76. Por lo tanto, el resultado de convolucionar  $x[n]$  con  $h[n]$  usando el método solapar y guardar es:

$$y[n] = \{\underbrace{1, 3, 6, 11, 13}_{1^{\text{er}} \text{ etapa}}, \underbrace{16, 21, 23, 26, 31}_{2^{\text{da}} \text{ etapa}}, \underbrace{33, 36, 41, 43, 46}_{3^{\text{ra}} \text{ etapa}}, \underbrace{45, 35, 20, 0, 0}_{4^{\text{ta}} \text{ etapa}}\}, \quad 0 \leq n \leq 19.$$

Obviando las muestras nulas que aparecen en la última etapa del método *solapar y guardar* a consecuencia del *padding* de ceros en el último bloque de muestras de la entrada, se comprueba que la  $y[n]$  calculada coincide con la convolución lineal entre  $x[n]$  y  $h[n]$ .  $\square$



**Fig. 4.76.** Método “solapar y guardar”: obtención de la salida  $y[n]$  a partir de las salidas parciales  $y_r[n]$ ,  $r = 0, 1, 2, 3$ .

#### 4.10.3.3. Comparación de ambos métodos

Suponiendo una respuesta impulsiva  $h[n]$  de largo  $P$ , en el método solapar y sumar se segmenta la entrada  $x[n]$  en bloques de largo  $L$  y se hace una convolución de largo  $N = L + P - 1$  (siempre se supone que  $P < L$ ). De estas  $N$  muestras, a las primeras  $P - 1$  muestras se les suman las últimas  $P - 1$  de la convolución previa, y una vez realizada esta suma, las  $L$  primeras muestras resultantes conciden con el resultado de la convolución lineal entre  $x[n]$  y  $h[n]$ . Las restantes  $P - 1$  (de las  $N$ ) deben sumarse al principio de la convolución siguiente. Para mayor claridad, véase la Fig. 4.63(b). Es decir, hay  $L$  muestras “útiles”, que pueden escribirse en el buffer de salida, y  $P - 1$  que deben sumarse al principio de la próxima convolución.

En el método solapar y guardar se segmenta la entrada  $x[n]$  en bloques de largo  $N$ , y se realiza la convolución circular con la respuesta impulsiva de largo  $P$ . De esta convolución circular, hay  $P - 1$  muestras que deben descartarse, y  $L$  que coinciden con la convolución lineal entre  $x[n]$  y  $h[n]$ . Estas  $L$  muestras “útiles” pueden escribirse en el buffer de salida.

De aquí se desprende que, mientras que el tamaño  $N$  de la convolución se mantenga constante, con cualquiera de los métodos se obtienen  $L$  muestras “útiles” por cada etapa. Puede haber una pequeña diferencia en el número de etapas dependiendo si el largo de la sucesión de entrada es múltiplo o no de  $L$  o de  $N$ , pero no hay ninguna diferencia

significativa en favor de uno u otro método.

En los Ejemplos 4.36 y 4.37 el tamaño de la convolución es  $N = 8$ , y en cada etapa se obtienen  $L = 5$  muestras “útiles”, mientras que  $P - 1 = 3$  son las que deben solaparse o descartarse, respectivamente. La diferencia es que en el método solapar y sumar (Ejemplo 4.36) fueron necesarias sólo 3 etapas, mientras que con el método solapar y guardar hacen falta 4. Para señales muy largas, una diferencia de mas o menos un bloque no es significativa.

Después de esta descripción, el mecanismo de los métodos de convolución por bloque (ya sea solapar y sumar o solapar y guardar) parecen una forma complicada de calcular la convolución. Pero como se verá en el Capítulo ?? existen algoritmos muy eficientes para calcular la TDF. Estos algoritmos, conocidos colectivamente como Transformada Rápida de Fourier, o más usualmente como FFT (por *Fast Fourier Transform* en inglés) son tan eficientes que aún para filtros FIR de moderada longitud (del orden de 25 o 30 muestras) puede ser mucho menos costoso en número de operaciones realizar el cálculo utilizando la convolución por bloques que implementando la convolución lineal. La longitud  $P$  y  $L$  y el tamaño  $N$  de la convolución circular para los cuales este procedimiento resulta más conveniente dependen del hardware y del software disponibles para implementar estos sistemas.

### 4.11. Interpretación matricial de la TDF

La TDF puede pensarse como una operación lineal, que toma un conjunto  $x[n]$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$  de  $N$  muestras, y devuelve otro conjunto  $X[k]$ ,  $0 \leq k \leq N - 1$  de  $N$  muestras. y entonces la TDF

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi}{N}} & e^{-j \frac{2\pi}{N} 2} & \cdots & e^{-j \frac{2\pi}{N} (N-1)} \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi}{N} 2} & e^{-j \frac{2\pi}{N} 4} & \cdots & e^{-j \frac{2\pi}{N} 2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi}{N} (N-1)} & e^{-j \frac{2\pi}{N} 2(N-1)} & \cdots & e^{-j \frac{2\pi}{N} (N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Definiendo los vectores

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix},$$

y la matriz

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}4} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix},$$

la TDF puede escribirse de manera más compacta como

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N.$$

La matriz  $\mathbf{W}_N$  tiene las siguientes propiedades:

1. Los elementos de la primera fila (asociados a  $k = 0$ ) y de la primera columna (asociados a  $n = 0$ ) son todos 1, porque  $e^{j\frac{2\pi}{N}0n} = e^{j\frac{2\pi}{N}k0} = 1$ .
2. La matriz  $\mathbf{W}_N$  es simétrica porque el elemento  $(k, n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$  es simétrico en  $k$  y en  $n$ .
3. Si  $\mathbf{W}_N^*$  es el complejo conjugado de  $\mathbf{W}_N$ , se verifica que

$$\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^* = N \mathbf{I}_N, \quad (4.117)$$

donde  $\mathbf{I}_N$  es la matriz identidad de  $N \times N$ . Esta igualdad surge de los resultados de la Sección 4.2.2:

$$(\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^*)_{\ell, m} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell n} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-\ell)n} = N \delta[(k-\ell)_N].$$

Una matriz compleja  $\mathbf{Q}$  de dimensión  $N \times N$  que satisface que  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^* = \mathbf{I}_N$  se denomina *matriz unitaria*. Resulta de (4.117) que la matriz

$$\mathbf{W}_N^U = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N$$

es unitaria. Como además es *simétrica* (propiedad 2), es una *matriz unitaria simétrica*. La matriz  $\mathbf{W}_N^U$  se conoce como la matriz normalizada de la TDF.

A partir de (4.117) es fácil verificar que

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}_N,$$

es decir que la transformada inversa se obtiene conjugando la matriz de la TDF y dividiendo por  $N$ .

Los miembros de cualquier conjunto de  $N$  vectores ortonormales en un espacio vectorial de dimensión  $N$  forman una base ortonormal de ese espacio. Por ejemplo, las columnas de la matriz identidad  $\mathbf{I}_N$  son ortonormales, y entonces forman una base ortonormal, la

base natural. Las columnas de la matriz identidad  $\mathbf{I}_N$  se notarán como  $\mathbf{e}_{N,\ell}$ ,  $0 \leq \ell \leq N-1$ , donde

$$\mathbf{e}_{N,\ell} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{elemento } (\ell + 1).$$

Esta puede ser una base tanto de un espacio real  $\mathbb{R}^N$  o complejo  $\mathbb{C}^N$ , según las sucesiones  $x[n]$  sean sucesiones reales o complejas, respectivamente. Entonces, una sucesión arbitraria  $x[n]$  de longitud finita  $N$ , puede pensarse como un vector  $\mathbf{x}_N$  y expresarse como

$$\mathbf{x}_N = \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] \mathbf{e}_{N,\ell}.$$

Los números  $x[n]$ ,  $0 \leq n \leq N-1$  son las coordenadas de  $\mathbf{x}_N$  en esa base. Como los vectores  $\mathbf{x}_N$  representan señales discretas, el elemento  $\ell$ -ésimo de un vector es el valor de la sucesión  $x[n]$  en el instante  $(\ell + 1)$ .

Como las columnas de la matriz  $\mathbf{W}_N/\sqrt{N}$  son ortonormales, se pueden pensar como las base de un espacio vectorial complejo  $N$ -dimensional. Si estos vectores se notan como  $\mathbf{f}_{N,k}/\sqrt{N}$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ . la TDF inversa se puede escribir como

$$\mathbf{x}_N = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} X[k] \right) \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{f}_{N,k} \right).$$

Por lo tanto, los números  $X[k]/\sqrt{N}$  son las coordenadas de  $\mathbf{x}_N$  en esta base. Como esta base es ortonormal, son las *proyecciones* del vector señal sobre los vectores de la base.

#### EJEMPLO 4.38. Versión matricial de la TDF

Las matrices TDF de orden 2, 3 y 4 son

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & 1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}.$$

Estas matrices son convenientes cuando se desea calcular a mano las TDFs de sucesiones "cortas". Por ejemplo, sea  $x[n]$  la sucesión

$$x[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-3].$$

La versión vectorial de esta sucesión es

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

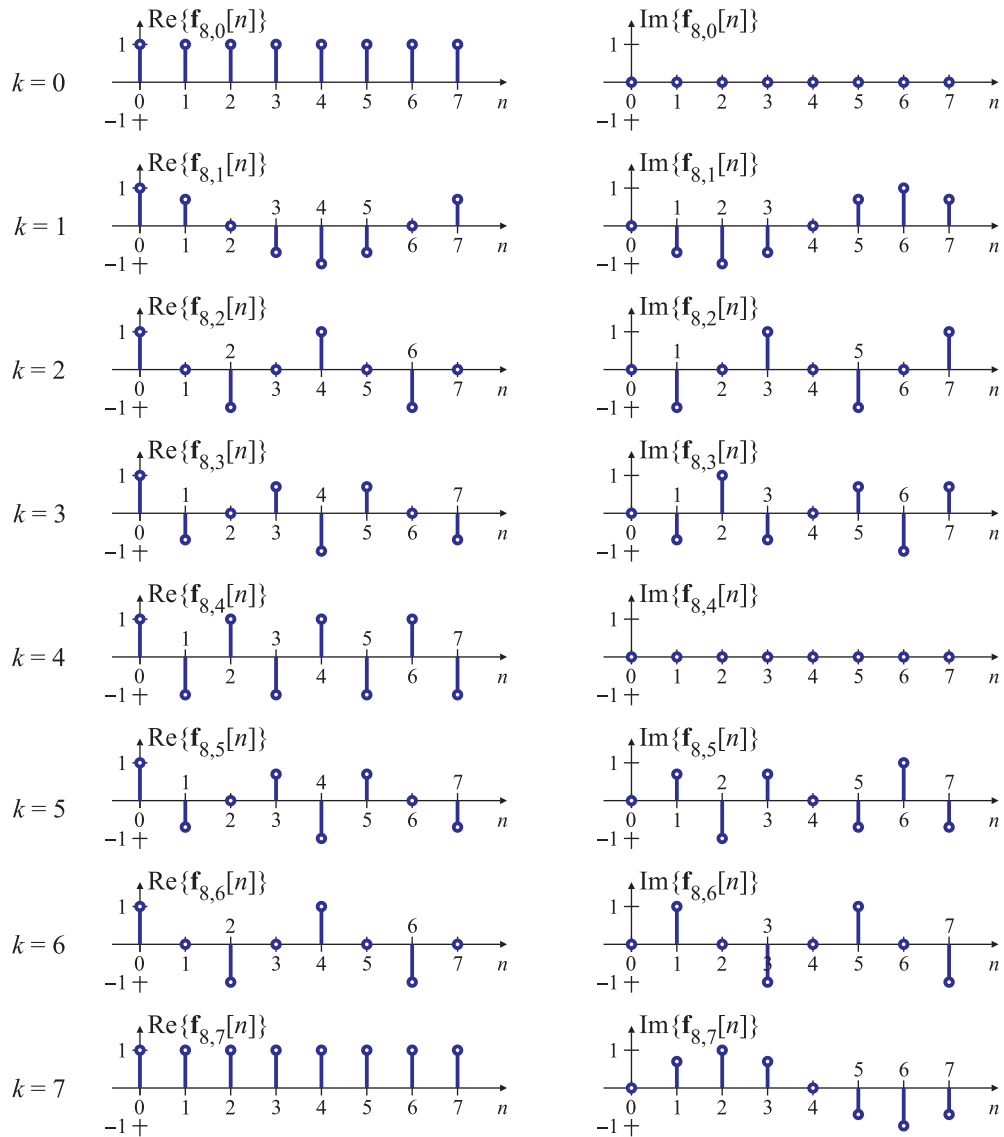


Fig. 4.77. Parte real e imaginaria de los vectores base de la TDF para  $N = 8$ .

y su TDF se puede calcular como

$$\mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & 1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - 5j \\ 0 \\ 1 + 5j \end{bmatrix}.$$

Entonces la TDF  $X[k]$  de  $x[n]$  es

$$X[k] = 2\delta[k] + (1 - 5j)\delta[k - 1] + (1 + 5j)\delta[k - 2]$$

□

En resumen, los valores de la TDF  $X[k]$  de una sucesión  $x[n]$  pueden pensarse como las coordenadas de la sucesión en cierta base ortonormal particular (salvo un factor de escala

$1/\sqrt{N}$ ). Los vectores que forman la base son las columnas de la matriz de la TDF (de vuelta, salvo un factor de escala), y por eso se los suele llamar la *base de la TDF*. La Fig. 4.77 muestra la base de la TDF para  $N = 8$ . El eje horizontal es el tiempo  $n$ , de manera que el elemento  $n$ -ésimo de la  $k$ -ésima forma de onda es la  $n$ -ésima coordenada del  $k$ -ésimo vector base en la base natural. En este caso hay 8 vectores base, cada uno con una parte real y una parte imaginaria.

## 4.12. Dualidad tiempo-frecuencia

Las herramientas de análisis frecuencial que se han desarrollado hasta ahora suelen aplicarse a una variedad de señales (biológicas, sísmicas, electromagnéticas, etc.). El objetivo del análisis frecuencial es extraer información de la señal observada. Las herramientas de análisis frecuencial ayudan al diagnóstico en el caso de señales biológicas, por ejemplo a partir de un electrocardiograma. En el caso de señales sísmicas, son útiles para detectar la presencia o ausencia de explosiones, o para determinar las características y ubicación del epicentro de un terremoto. El espectro de algunas señales electromagnéticas, por ejemplo un eco radar reflejado por un avión permite conocer su posición y velocidad radial.

En esta sección se discuten algunas dualidades importantes entre las características frecuenciales y temporales de las señales.

### 4.12.1. Dualidades físicas y matemáticas

En los capítulos previos se han introducido varios métodos y técnicas que permiten analizar el contenido frecuencial de una señal. Las herramientas principales son:

1. La Serie de Fourier (SF) para señales  $\tilde{x}(t)$  periódicas y continuas; en este caso, “continuo” o “discreto” se refiere a señales en el cuales la variable independiente es continua o discreta, respectivamente:

$$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, \quad 0 \leq t < T, \quad (4.118)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt, \quad -\infty < k < \infty. \quad (4.119)$$

2. La Transformada de Fourier (TF) para señales  $x(t)$  aperiódicas y continuas:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \quad -\infty < t < \infty, \quad (4.120)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad -\infty < f < \infty. \quad (4.121)$$

3. La Serie Discreta de Fourier (SDF) para señales  $\tilde{x}[n]$  periódicas y discretas:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (4.122)$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad -\infty < k < \infty. \quad (4.123)$$



4. La Transformada de Fourier de señales de Tiempo Discreto (TFTD) para señales  $x[n]$  aperiódicas y discretas, de longitud arbitraria:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega, \quad -\infty < n < \infty, \quad (4.124)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \quad 0 \leq \omega < 2\pi. \quad (4.125)$$

5. La Transformada de Fourier (TDF), derivada a partir de la SDF, para señales  $x[n]$  aperiódicas y discretas de longitud  $N$  finita:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (4.126)$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (4.127)$$

La Fig. 4.78 resume las ecuaciones de análisis y síntesis para estos tipos de señales. Como se ha indicado anteriormente, son dos las características temporales que determinan el tipo de espectro que presenta una señal, de acuerdo a si la variable temporal es continua o discreta, y si la señal es periódica o no (aperiódica).

1. **Las señales continuas (en tiempo) tienen espectro aperiódico.** Una inspección detallada de las expresiones de análisis de la Serie de Fourier (SF) y de la Transformada de Fourier (TF) no revelan ningún tipo de periodicidad en el dominio espectral. Esta falta de periodicidad es consecuencia que la exponencial compleja  $e^{j2\pi ft}$  es una función de la variable continua  $t$ , y por lo tanto no es periódica en  $f$ . Por ello el rango de frecuencias de las señales continuas se extiende desde  $f \rightarrow -\infty$  hasta  $f \rightarrow +\infty$ . Por ejemplo,

$$x(t) = be^{-at}u(t) \quad \xLeftrightarrow{TF} \quad X(f) = \frac{b}{a + j2\pi f}, \quad -\infty < f < +\infty. \quad (4.128)$$

Para el caso de señales periódicas, los coeficientes de Fourier  $c_k$  quedan definidos para todo  $k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ); por ejemplo, si  $x(t)$  es una onda cuadrada con período  $T$  y ciclo de trabajo  $\tau/T$

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \text{mod}(t, T) < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad \xLeftrightarrow{SF} \quad c_k = \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau}{T}k\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.129)$$

2. **Las señales discretas (en tiempo) tienen espectro periódico.** La Transformada de Fourier de señales de Tiempo Discreto (TFTD) es continua y periódica con período  $\omega = 2\pi$ . Como resultado de esta periodicidad, el rango de frecuencia de las señales discretas es finito, y se extiende desde  $\omega = -\pi$  hasta  $\omega = +\pi$  radianes (o para  $0 \leq \varepsilon < 2\pi$ ), donde  $\omega = \pm\pi$  es la máxima velocidad posible de oscilación. Por ejemplo,

$$x[n] = \beta a^n u[n] \quad \xLeftrightarrow{TFTD} \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \quad (4.130)$$

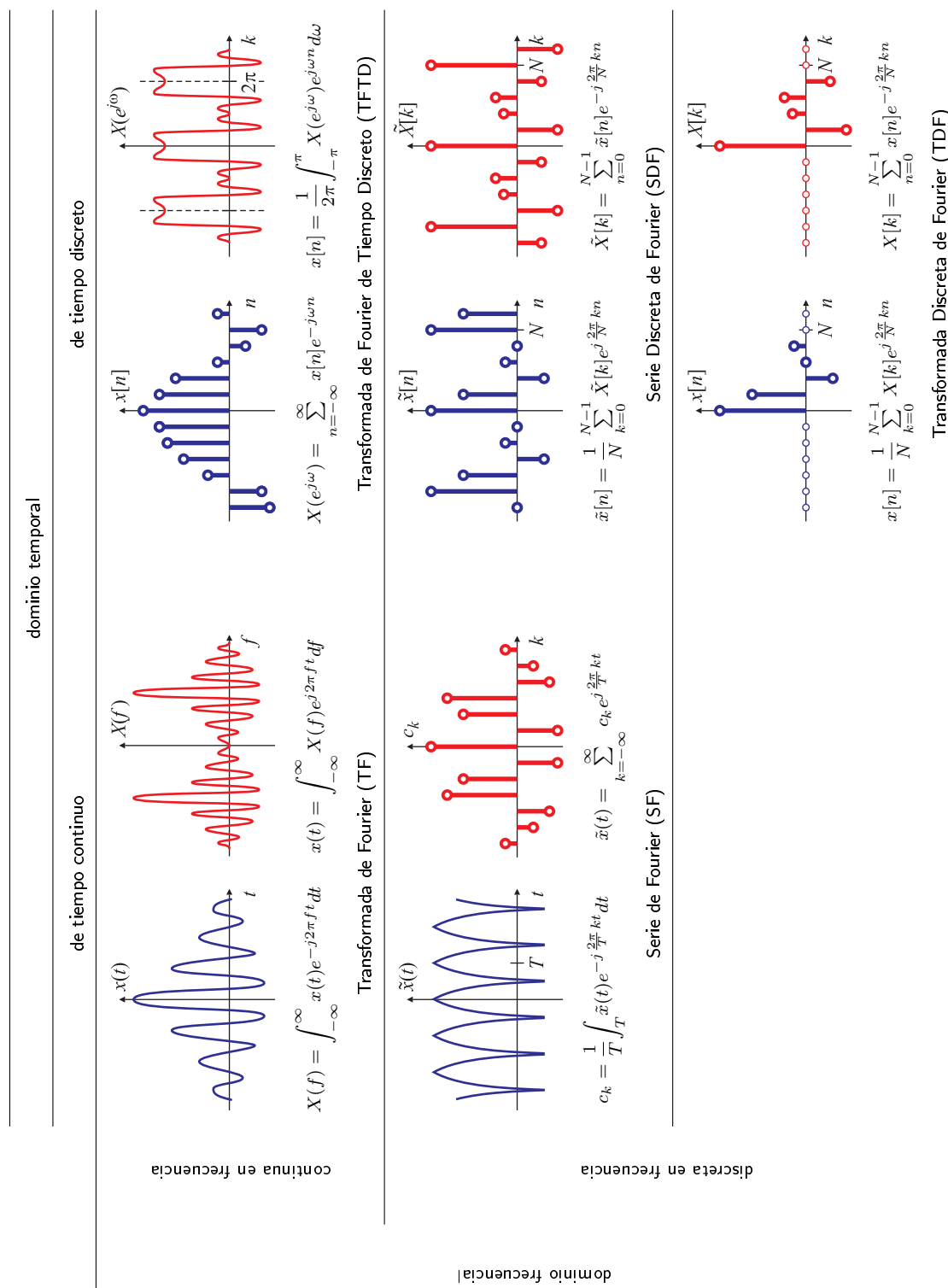


Fig. 4.78. Resumen de ecuaciones de análisis y síntesis de las distintas transformadas.

Si las señales discretas son periódicas de período  $N$ , los coeficientes de Fourier  $\tilde{X}[k]$  de la serie discreta de Fourier también tienen periodicidad  $N$ . Por ejemplo,

$$\tilde{x}[n] = \sum_r \delta[n - rN] \quad \xLeftrightarrow{SDF} \quad \tilde{X}[k] = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (4.131)$$

3. **Las señales continuas (en frecuencia) corresponden a señales aperiódicas.** Tanto la Transformada de Fourier (TF) como la Transformada de Fourier de señales de Tiempo Discreto (TFTD) están relacionadas con señales no periódicas en el dominio tiempo. Valen como ejemplo los pares transformados (4.128) y (4.130) dados más arriba.
4. **Se pueden definir transformadas para funciones periódicas.** La idea es ampliar la clase de funciones que tienen transformada de Fourier incluyendo funciones generalizadas (los impulsos). De esta manera, a partir de las Series de Fourier se pueden obtener las Transformadas, tanto para el caso continuo

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} &\implies X(f) = \sum_k c_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right), \\ &X(\Omega) = \sum_k 2\pi c_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T}k\right) \end{aligned}$$

como para el caso discreto

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \implies X(e^{j\omega}) = \sum_k \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right).$$

5. **Las señales periódicas tienen espectro discreto.** Como se ha notado, las señales periódicas (continuas o discretas en tiempo) se describen utilizando la Serie de Fourier o la Serie Discreta de Fourier, respectivamente. Las transformadas respectivas se derivan a partir de los coeficientes de la serie, que determinan la amplitud de los impulsos que forman el espectro discreto. El espaciado entre líneas  $\Delta f = 1/T$ , para el caso continuo, o  $\Delta\omega = 2\pi/N$ , para el caso discreto, son la inversa del período  $T$  o  $N$ , respectivamente, en el dominio temporal. Por ejemplo, para el caso continuo

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \text{mod}(t, T) < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad \xLeftrightarrow{TF} \quad X(f) = \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau}{T}k\right),$$

que se deriva de (4.129) o, para el caso discreto

$$\tilde{x}[n] = \sum_r \delta[n - rN] \quad \xLeftrightarrow{TFTD} \quad \tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_k \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right).$$

que se obtiene a partir de (4.131)

6. **Las señales aperiódicas de energía finita tienen espectro continuo.** Esta propiedad es una consecuencia directa del hecho que tanto  $X(f)$  como  $X(e^{j\omega})$  son funciones de  $e^{j2\pi ft}$  y de  $e^{j\omega n}$ , respectivamente. La continuidad del eje de frecuencias es necesaria para “romper” la relación armónica entre las distintas componentes frecuenciales, creando así señales aperiódicas. Valen como ejemplo los pares transformados (4.128) o (4.130).

7. **La serie de Fourier se puede determinar a partir de la transformada.** Si se conoce la transformada de Fourier de *un período* de la señal periódica, los coeficientes de la serie de Fourier ( $c_k$  para señales continuas, y  $X[k]$  para señales discretas en tiempo) se pueden determinar tomando muestras de la transformada. Para el caso continuo,

$$c_k = \frac{1}{T} X(f)|_{f=\frac{k}{T}} = f_0 X(f)|_{f=kf_0}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

y para el caso discreto,

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para el caso particular de la SDF  $\tilde{X}[k]$  y la TDF  $X[k]$ , la relación es trivial:

$$\tilde{X}[k] = X[(k)_N], \quad k \in \mathbb{Z}$$

8. **La propiedad de dualidad sólo se aplica para la TF, la SF y la TDF**, ya que es necesario que las variables independientes sean de la misma naturaleza (continuas o discretas) en ambos dominios (temporal y frecuencial). Para el caso continuo,

$$x(t) \xleftrightarrow{TF} X(f) \quad X(t) \xleftrightarrow{TF} x(-f)$$

y para el caso discreto,

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &\xleftrightarrow{SDF} \tilde{X}[k] & \tilde{X}[n] &\xleftrightarrow{SDF} N \tilde{x}[-k] \\ x[n] &\xleftrightarrow{TDF} X[k] & X[n] &\xleftrightarrow{TDF} N x[(-k)_N] \end{aligned}$$

9. **La Transformada Discreta de Fourier (TDF) puede no cumplir con algunas de estas propiedades**, porque en realidad está formada por un período de una función periódica. En particular, la TDF no cumple con las Propiedades 2 a 6.

En síntesis, se puede concluir que la periodicidad con período  $\alpha$  en un dominio automáticamente implica discretización con espaciado  $1/\alpha$  en el dominio transformado, y viceversa.

#### 4.12.2. Simetrías y dualidades

Estas dualidades tiempo-frecuencia son evidentes de la observación de la Fig. 4.78. Las funciones utilizadas en la figura son sólo ilustrativas y no corresponden necesariamente a pares transformados. La observación cuidadosa de la Fig. 4.78 revela también algunas simetrías matemáticas y dualidades entre las diferentes ecuaciones de análisis y síntesis. En particular, se destacan las siguientes:

- Las ecuaciones de síntesis y análisis de la Transformada de Fourier de señales continuas (TF): ecuaciones (4.120)-(4.121)
- Las ecuaciones de síntesis y análisis de la Serie Discreta de Fourier (SDF) -Transformada Discreta de Fourier (TDF): ecuaciones (4.122)-(4.123) y (4.126)-(4.127).
- La ecuación de análisis de la Serie de Fourier (SF) de señales continuas con la ecuación de síntesis de la Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD): ecuaciones (4.119)-(4.124).

- La ecuación de análisis de la Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD) y la ecuación de síntesis de la Serie de Fourier para señales continuas (SF): ecuaciones (4.125)-(4.118).

### 4.12.3. Características comunes

Algunas características comunes de los pares transformados son:

- La transformada de Fourier  $X(\cdot)$  tiene un argumento real  $f$  (o  $\omega$ ) cuando  $x(\cdot)$  es aperiódica, y un argumento entero  $k$  cuando  $x(\cdot)$  es periódica. La función  $x(\cdot)$  tiene un argumento real  $t$  cuando  $X(\cdot)$  es aperiódica, y un argumento entero  $n$  cuando  $X(\cdot)$  es periódica.

$$x(\cdot) \text{ es } \begin{cases} \text{aperiódica} \\ \text{periódica} \end{cases} \Rightarrow \text{el argumento } \begin{cases} f \text{ de } X(f), \omega \text{ de } X(e^{j\omega}) \text{ es real.} \\ k \text{ de } c_k, k \text{ de } X[k] \text{ es entero.} \end{cases}$$

$$X(\cdot) \text{ es } \begin{cases} \text{aperiódica} \\ \text{periódica} \end{cases} \Rightarrow \text{el argumento } \begin{cases} t \text{ de } x(t) \text{ es real.} \\ n \text{ de } x[n] \text{ es entero.} \end{cases}$$

- El argumento de las exponenciales que aparecen en las ecuaciones de análisis-síntesis es el producto de  $\pm j2\pi$ , el argumento  $f$  o  $k$  de  $X(\cdot)$ , el argumento  $t$  o  $n$  de  $x(\cdot)$  y el recíproco  $1/T$  o  $1/N$  del período si la función  $x(\cdot)$  o  $X(\cdot)$  es periódica.
- Todas las relaciones duales difieren en el signo del exponente de la exponencial compleja asociada a la serie o a la transformada. El cambio de signo puede pensarse bien como un cambio de sentido del eje de tiempo, o un cambio de sentido del eje de frecuencias, ya que

$$e^{-j2\pi ft} = e^{j2\pi(-f)t} = e^{j2\pi f(-t)}.$$

Sin embargo, debe notarse que la ecuación de *síntesis* utiliza la exponencial *positiva*, y todos los valores de  $X(\cdot)$  para hallar  $x(\cdot)$ . La ecuación de *análisis*, en cambio, utiliza la exponencial *negativa*, y todos los valores de  $x(\cdot)$  para determinar  $X(\cdot)$ .

- Desafortunadamente, los factores de escala  $1/T$ ,  $1/2\pi$ ,  $1/N$  no aparecen de manera uniforme. Para el caso de la TF (cuando se emplea como variable la frecuencia  $\Omega$  en radianes por segundo), la TFTD y la SDF/TDF, el factor de escala pesa la ecuación de *síntesis*. Sin embargo para la Serie de Fourier (SF) el factor  $1/T$  acompaña a la ecuación de *análisis*. En algunos libros de orientación más matemática (Kammler, 2000; Bracewell, 1978), todos los factores recíprocos del período afectan a la ecuación de *análisis*, siguiendo la línea de la SF. Sin embargo, la notación que se sigue en el curso es la preferida desde el punto de vista ingenieril.
- Frecuentemente se utiliza la expresión *espectro de densidad de energía* para caracterizar señales de energía finita, aperiódicas, y la expresión *espectro de densidad de potencia* para señales que son periódicas. Esta nomenclatura es consistente con el hecho que las señales periódicas son señales de potencia finita, es decir que verifi-

can

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\tilde{x}(t)|^2 dt < \infty, \quad \text{para señales continuas,}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2 < \infty, \quad \text{para señales discretas,}$$

y que las señales aperiódicas con energía finita son las que verifican

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(t)|^2 dt < \infty, \quad \text{para señales continuas,}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}[n]|^2 < \infty, \quad \text{para señales discretas.}$$

#### 4.12.4. Evolución

Las señales temporales  $x(t)$  que son aperiódicas y continuas puede ser consideradas como las funciones más generales en el dominio temporal. Tales señales están definidas para todo  $t$ , es decir  $-\infty \leq t \leq \infty$ . La transformada de una señal aperiódica y continua en el tiempo, que se obtiene por medio de la integral de Fourier, también es continua y aperiódica, y está definida para todo  $f$ :  $-\infty \leq f \leq \infty$ .

Mientras que la transformada de Fourier (TF) es la transformación dominante desde un punto de vista teórico, la transformada discreta de Fourier (TDF), junto con su implementación eficiente (la *transformada rápida* de Fourier, o FFT por las iniciales en inglés) es la herramienta que se utiliza en la práctica para computar todo tipo de transformadas de Fourier. Para reducir una función temporal que es continua y aperiódica, que debe analizarse con la Transformada de Fourier (TF) a una señal que sea discreta y de longitud finita, apropiada para el análisis con la TDF, se deben hacer un par de modificaciones. La primera modificación consiste en efectuar un muestreo temporal de la señal, que convierta la señal continua en una discreta:

$$x[n] = x(t)|_{t=nT}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La segunda modificación es la truncación de la señal  $x[n]$  de manera de restringirla a un intervalo finito. Los efectos de estas dos modificaciones serán estudiados en los siguientes Capítulos.

#### 4.13. Referencias

1. Bracewell, R. *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill Book Co., Electrical and Electronic Engineering Series, New York, 1978.
2. Kammler, D. *A First Course in Fourier Analysis*, Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2000.
3. Roberts, R. A, Mullis, C. T. *Digital Signal Processing*, Addison Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1987.

**Tabla 4.5.** Datos de la órbita del asteroide Pallas.

Ascensión $\theta$ (grados)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
Declinación $x$ (minutos)	408	89	-66	10	338	807	1238	1511	1583	1462	1183	804

#### 4.13.1. La determinación de las órbitas de los planetas

El problema que anticipó las bases del análisis discreto de Fourier fue la determinación de las órbitas de los cuerpos celestes. Euler, Lagrange y Alexis Claude Clairaut hicieron contribuciones fundamentales al proponer que los datos obtenidos a partir de las observaciones podían ser aproximados por combinaciones lineales de funciones periódicas. El cálculo de los coeficientes de esas expansiones trigonométricas llevó al cálculo de lo que hoy llamamos transformada discreta de Fourier. En realidad, un artículo escrito en 1754 por Clairaut contiene la primera fórmula explícita para el cálculo de la transformada discreta de Fourier (TDF).

Clairaut y Lagrange habían estudiado el problema de ajustar datos astronómicos; como estos datos tienen patrones periódicos, era natural emplear funciones aproximadoras formadas por una suma ponderada de un número finito de funciones seno y coseno. La solución del cálculo de los pesos de las funciones trigonométricas condujo a una de las primeras expresiones de la transformada discreta de Fourier. Una página del trabajo de Lagrange publicado en 1759, que se muestra en la Fig. 4.79, contiene todos los ingredientes de una serie discreta de Fourier de senos; en la figura, el símbolo  $\tilde{\omega}$  representa a  $\pi$ .

En junio de 1801 el astrónomo Zach publicó las posiciones orbitales de Ceres, un nuevo “pequeño planeta” que había sido descubierto por G. Piazzi en enero del mismo año. Desafortunadamente Piazzi sólo pudo observar 9 grados de la órbita antes que desapareciera detrás del sol. Zach publicó varias predicciones de su posición, incluyendo una calculada por Gauss que difería notoriamente de las demás. Cuando Ceres fue redescubierto por Zach en diciembre de 1801 estaba casi exactamente donde Gauss había predicho. Casi al mismo tiempo Gauss obtuvo los datos de posición del asteroide Pallas, que se muestran en la Tabla 4.5. La variable  $\theta$  representa la ascensión en grados, y la variable  $x$  la declinación en minutos. La dupla  $(\theta_n, x_n)$  representa un par de datos, donde  $n = 0, \dots, 11$ . Para determinar la órbita es necesario encontrar una función continua de  $\theta$  que pase por cada uno de los 12 pares de puntos con el menor error posible. Como los valores de  $x$  parecen tener una distribución periódica en función de  $\theta$ , Gauss propuso una función de la forma

$$x = f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^5 \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{360}\theta\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{360}\theta\right) \right] + a_6 \cos\left(\frac{2\pi 6}{360}\theta\right). \quad (4.132)$$

Esta ecuación tiene doce coeficientes desconocidos (los  $a_k$  y los  $b_k$ ) cada uno de los cuales multiplica a una función coseno o seno de un cierto período o frecuencia, denominados *modos*. El período fundamental, representado por los términos con coeficientes  $a_1$  y  $b_1$ , es de 360 grados; los modos con  $k > 1$  poseen períodos menores, de  $360/k$  grados. El coeficiente  $a_0$  representa el valor medio de la función.

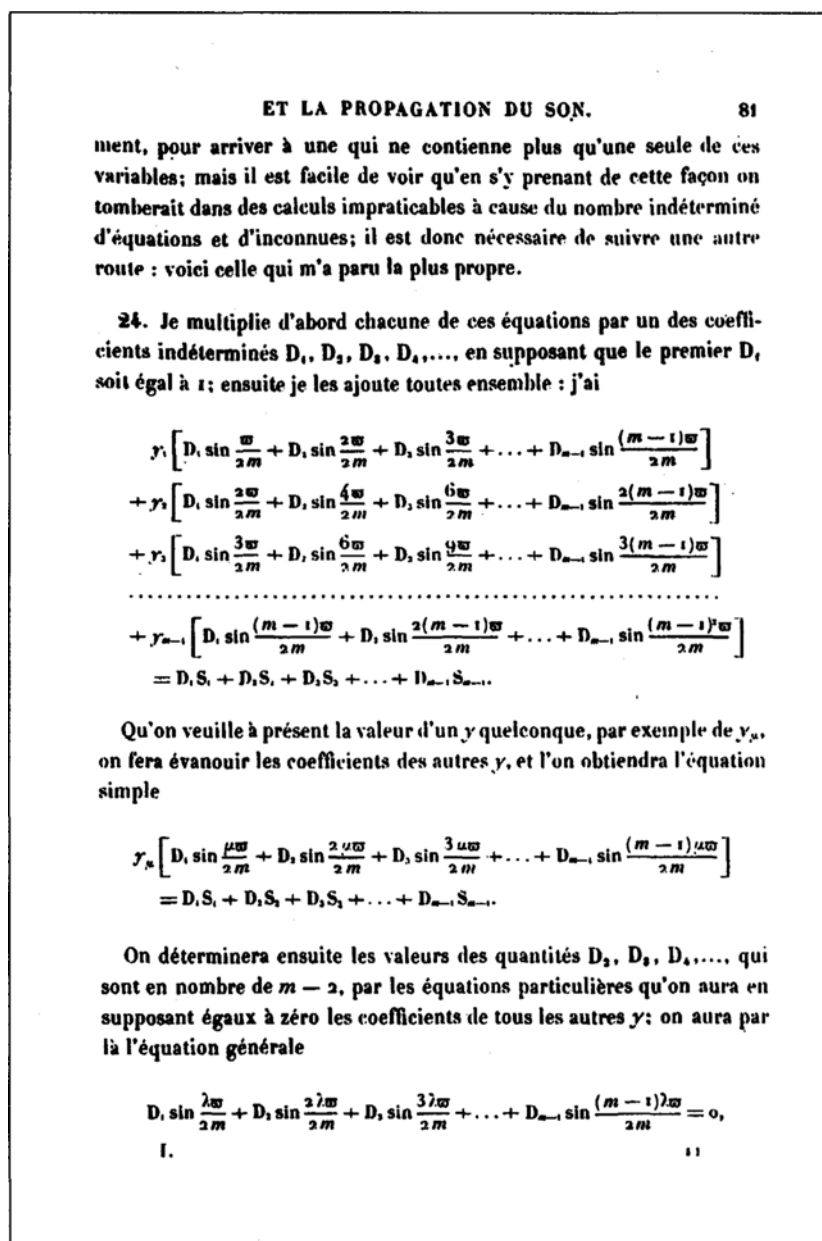


Fig. 4.79. Página de *La Natureza y Propagación del Sonido*, escrito por Lagrange en 1759, donde trata la solución del problema de la cuerda vibrante, supuesta formada por  $m-1$  partículas cuyos desplazamientos  $y_n$  son sumas de funciones senoidales de distinta frecuencia. Esta representación es esencialmente una transformada discreta de Fourier de senos.

Para determinar los 12 coeficientes son necesarias 12 condiciones, que resultan de exigir que la función  $f(\theta)$  pase por los datos  $X$ , es decir

$$x_n = f(\theta_n)$$



para  $n = 1, \dots, 12$ . Esto conduce a un sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 + \sum_{k=1}^5 [a_k \cos(\frac{2\pi k}{360}\theta_1) + b_k \sin(\frac{2\pi k}{360}\theta_1)] + a_6 \cos(\frac{2\pi 6}{360}\theta_1) \\ &\vdots \\ x_{12} &= a_0 + \sum_{k=1}^5 [a_k \cos(\frac{2\pi k}{360}\theta_{12}) + b_k \sin(\frac{2\pi k}{360}\theta_{12})] + a_6 \cos(\frac{2\pi 6}{360}\theta_{12}) \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{c},$$

donde

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{12})', \quad \mathbf{c} = (a_0, a_1, b_1, \dots, a_5, b_5, a_6)'$$

y

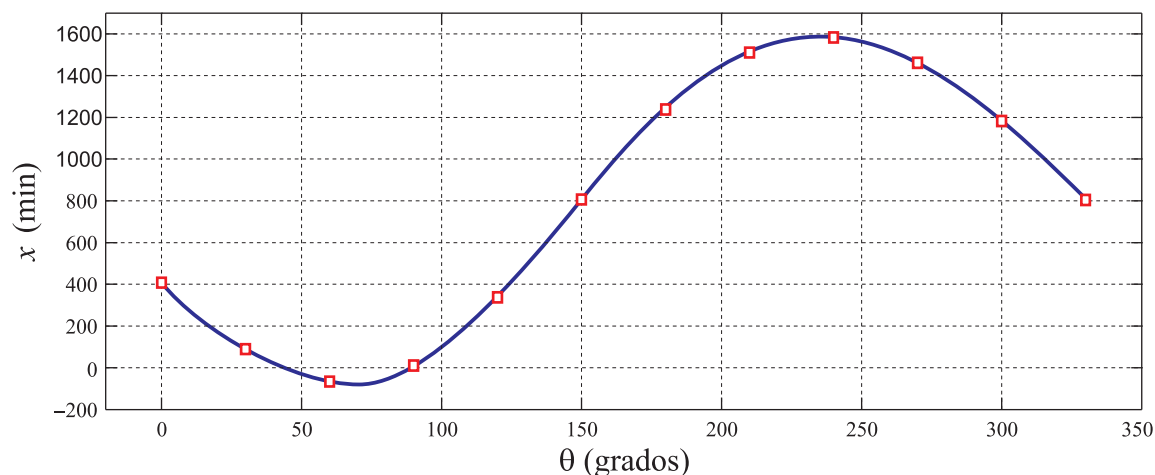
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\frac{2\pi 0}{360}\theta_1) & \sin(\frac{2\pi 0}{360}\theta_1) & \cdots & \cos(\frac{2\pi 5}{360}\theta_1) & \sin(\frac{2\pi 5}{360}\theta_1) & \cos(\frac{2\pi 6}{360}\theta_1) \\ 1 & \cos(\frac{2\pi 0}{360}\theta_2) & \sin(\frac{2\pi 0}{360}\theta_2) & \cdots & \cos(\frac{2\pi 5}{360}\theta_2) & \sin(\frac{2\pi 5}{360}\theta_2) & \cos(\frac{2\pi 6}{360}\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\frac{2\pi 0}{360}\theta_{12}) & \sin(\frac{2\pi 0}{360}\theta_{12}) & \cdots & \cos(\frac{2\pi 5}{360}\theta_{12}) & \sin(\frac{2\pi 5}{360}\theta_{12}) & \cos(\frac{2\pi 6}{360}\theta_{12}) \end{pmatrix}.$$

El vector de coeficientes  $\mathbf{c}$  se puede calcular como  $\mathbf{c} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$ , y sus valores son

$$\begin{aligned} a_0 &= 780,6, & b_1 &= -720,2, \\ a_1 &= -411,0, & b_2 &= -2,2, \\ a_2 &= 43,4, & b_3 &= 5,5, \\ a_3 &= -4,3, & b_4 &= -1,0, \\ a_4 &= -1,1, & b_5 &= -0,3. \\ a_5 &= 0,3, \\ a_6 &= 0,1, \end{aligned}$$

En la Fig. 4.80 se comparan los datos, marcados “□”, y la función  $f(\cdot)$  graficada como una curva suave. Más allá de que la función pasa exactamente por los puntos que representan los datos medidos, lo importante es que los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  permiten otra interpretación: representan la “estructura” o “comportamiento frecuencial” de los datos. Los coeficientes de mayor valor corresponden al modo constante  $a_0$  y al modo fundamental ( $a_1$  y  $b_1$ ). Los coeficientes de los modos de frecuencia mayor tienen magnitudes que apenas alcanzan el 10% de la magnitud de los primeros, pero igual son necesarios para aproximar los datos con exactitud.

El sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas podía resolverse sin mayor esfuerzo aún en épocas de Gauss. Sin embargo, ya sea por buscar un atajo o sorprendido por las simetrías de las funciones seno y coseno, Gauss descubrió una forma de reordenar los coeficientes y las ecuaciones en tres subproblemas que se resolvían de manera más sencilla. Un pequeño cálculo contenido en su tratado sobre interpolación *Theoria Interpolationes Methodo Nova Tractata*, datado en 1805 pero publicado póstumamente en 1866, contiene la primera



**Fig. 4.80.** Los doce puntos marcados “□” describen la posición del asteroide Pallas. La declinación  $x$  en minutos se grafica en función de la ascensión  $\theta$  en grados. Para aproximar los datos se utiliza una suma ponderada de doce funciones seno y coseno con diferentes períodos (curva continua). Los coeficientes de la suma ponderada se calculan con una transformada discreta de Fourier.

prueba clara e indudable del empleo de la transformada rápida de Fourier (más conocida por sus siglas en inglés FFT), cuya autoría se atribuye generalmente a Cooley y Tukey por su trabajo publicado en 1965. Es una ironía del destino que el trabajo de Gauss fuese citado en la enciclopedia matemática de Burkhardt *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, publicada en 1904, y nuevamente en 1977 en un trabajo de Goldstine, quien reprodujo estos resultados y mostró que el particionado ideado por Gauss es el corazón del método de cálculo de la moderna transformada rápida de Fourier. En 1985 Heideman, Johnson y Burrus reconstruyeron la historia completa de la FFT en una fascinante pieza de investigación, donde resaltan:

*Los trabajos de Burkhardt y de Goldstine pasaron tan desapercibidos como el mismo trabajo de Gauss.*

La transformada rápida de Fourier (FFT) tuvo una difusión tan masiva que en 1993 se estimó que casi la mitad de todo el tiempo de cálculo de las supercomputadoras se gastaba calculando FFT, aún para tareas tales como la multiplicación de grandes números.

## 4.14. Ejercicios

**Ejercicio 1.** Determine los coeficientes de la SDF de las siguientes sucesiones periódicas utilizando la definición, y verifique usando MATLAB. **Observación:** en cada caso, se indica sólo un período de la sucesión periódica.

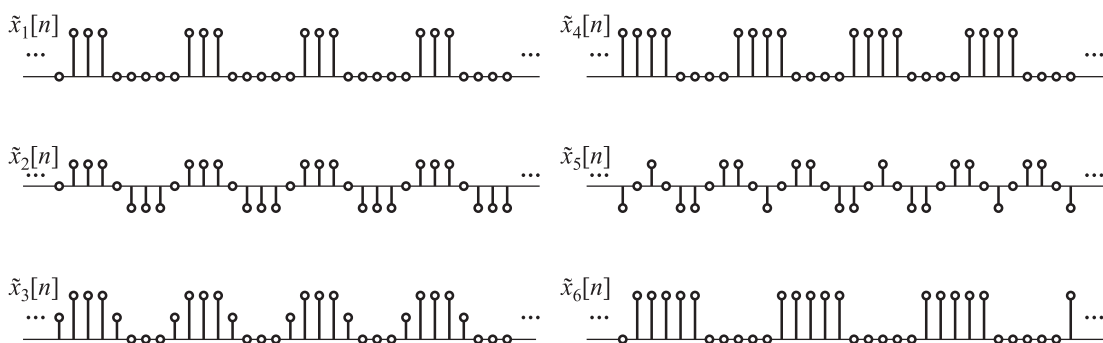
1.  $\tilde{x}_1[n] = \{2, 0, 0, 2\}$ ,  $N = 4$ .
2.  $\tilde{x}_2[n] = \{0, 0, 1, 0, 0\}$ ,  $N = 5$ .
3.  $\tilde{x}_3[n] = \{3, -3, 3, -3\}$ ,  $N = 4$ .
4.  $\tilde{x}_4[n] = \{1, j, j, 1\}$ ,  $N = 4$ .

**Ejercicio 2.** Determine las sucesiones a partir de los siguientes coeficientes de (un período de) la SDF usando la definición. Verifique usando MATLAB.

1.  $\tilde{X}_1[k] = \{5, -2j, 3, 2j\}$ ,  $N = 4$ .
2.  $\tilde{X}_2[k] = \{4, -5, 3, -5\}$ ,  $N = 4$ .
3.  $\tilde{X}_3[k] = \{0, j, -2j, -j\}$ ,  $N = 4$ .
4.  $\tilde{X}_4[k] = \{0, 0, 2, 0\}$ ,  $N = 4$ .

**Ejercicio 3.** Para las sucesiones que se muestran en la figura, especifique si el origen de coordenadas puede elegirse de modo que

1.  $\tilde{X}[k]$  sea real;
2.  $\tilde{X}[k]$  sea imaginaria (salvo para los  $k$  que sean múltiplos de  $N$ );
3. ¿Para cuáles sucesiones se verifica que  $\tilde{X}[k] = 0$ ,  $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ ?



**Ejercicio 4.** Sea  $\tilde{x}_1[n]$  una sucesión periódica, con período  $N = 50$ , donde un período está dado por

$$\tilde{x}_1[n] = \begin{cases} ne^{-0.3n}, & 0 \leq n \leq 25, \\ 0, & 26 \leq n \leq 49, \end{cases}$$

y sea  $\tilde{x}_2[n]$  periódica con período  $N = 100$ , uno de cuyos períodos es

$$\tilde{x}_2[n] = \begin{cases} ne^{-0,3n}, & 0 \leq n \leq 25, \\ 0, & 26 \leq n \leq 99. \end{cases}$$

Las dos sucesiones difieren en su periodicidad, pero tienen la mismas muestras no nulas.

1. Encuentre la SDF  $\tilde{X}_1[k]$  de  $\tilde{x}_1[n]$ , y grafique las muestras del módulo y la fase en función de  $k$  usando el comando `stem`.
2. Encuentre la SDF  $\tilde{X}_2[k]$  de  $\tilde{x}_2[n]$ , y grafique las muestras del módulo y la fase en función de  $k$ .
3. ¿Cuál es la diferencia entre ambos gráficos de las SDF?

**I Ejercicio 5.** A partir de la sucesión  $\tilde{x}_1[n]$  del Ejercicio 4, considere la sucesión  $\tilde{x}_3[n]$  de período  $N = 100$ , cuyo período se obtiene concatenando dos períodos de  $\tilde{x}_1[n]$

$$\tilde{x}_3[n] = [\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_1[n]].$$

Evidentemente, esta sucesión es diferente de la sucesión  $\tilde{x}_2[n]$  del Ejercicio 4, aunque ambas tienen período  $N = 100$ .

1. Calcule los coeficientes de (un período de) la SDF  $\tilde{X}_3[k]$  de  $\tilde{x}_3[n]$ , y grafique el módulo y la fase en función de  $k$ .
2. ¿Cuáles son los efectos de duplicar la periodicidad en los coeficientes de la SDF?
3. Extienda los resultados anteriores para el caso en que el período se multiplica por  $M$ . En particular, muestre que si

$$\tilde{x}_M[n] = \underbrace{[\tilde{x}_1[n], \dots, \tilde{x}_1[n]]}_{M \text{ veces}}$$

entonces

$$\tilde{X}_M[Mk] = \begin{cases} M \tilde{X}_1[k], & k = 0, 1, \dots, N-1, \\ 0, & Mk \neq 0, M, \dots, MN. \end{cases}$$

**M Ejercicio 6.** Grafique el módulo de la Transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  de las sucesiones discretas que se listan a continuación usando la TDF como herramienta de cálculo (es decir, calculando  $X[k]$ ). Elija apropiadamente la longitud  $N$  de la transformada de modo que sus gráficos “tengan sentido”.

1.  $x_1[n] = 2 \cos(0,2\pi n) (u[n] - u[n-10])$ .
2.  $x_2[n] = \sin(0,45\pi n) \sin(0,55\pi n)$ .
3.  $x_3[n] = 3(2^n), -10 \leq n \leq 10$ .
4.  $x_4[n] = (-0,5)^n, -10 \leq n \leq 10$ .

5.  $x_5[n] = (4/5)^n u[n]$ .

**C Ejercicio 7.** Se ha visto en la teoría que existe una relación directa entre  $X(e^{j\omega})$  y  $\tilde{X}[k]$ , donde  $X[k]$  son las “muestras” de  $X(e^{j\omega})$  tomadas en las frecuencias  $\omega_k = (2\pi/N)k$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ . El propósito de este problema es mostrar que se puede conocer el valor de  $X(e^{j\omega_0})$  para cualquier valor de frecuencia  $\omega_0$  en base al conocimiento de las  $N$  muestras  $X[k]$ ; esto es, se puede obtener una fórmula de interpolación. El siguiente procedimiento permite obtener tal ecuación.

1. Si  $\tilde{X}[k]$  es la SDF de  $\tilde{x}[n]$ , exprese la transformada de Fourier  $\tilde{X}(e^{j\omega})$  de  $\tilde{x}[n]$  como un tren de impulsos.
2. Observe que  $x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$ , donde  $w[n]$  es una función apropiada de longitud finita (una “ventana”). Calcule  $w[n]$ .
3. De acuerdo al inciso anterior,  $X(e^{j\omega})$  puede expresarse como la convolución (periódica) de  $\tilde{X}(e^{j\omega})$  y  $W(e^{j\omega})$ .

Evaluando en detalle el procedimiento descrito, muestre que  $X(e^{j\omega})$  puede calcularse como

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_k \tilde{X}[k] \frac{\sin[\frac{N}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N}k)]}{\sin[\frac{1}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N}k)]} e^{-j\frac{N-1}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}.$$

Calcule explícitamente los límites de la sumatoria.

**Ejercicio 8.** Sea  $x[n]$  una sucesión de longitud  $N$ , tal que  $x[n] = 0$  si  $n < 0$  o  $n > N-1$ , y que por lo menos tiene una muestra no nula. ¿Es posible que para tal sucesión  $X(e^{j\omega_k}) = 0$ , donde  $\omega_k = \frac{2\pi}{M}k$ ,  $0 \leq k \leq M-1$ ? Si la respuesta es afirmativa, construya un ejemplo. En caso contrario, explique su razonamiento. Analice los casos en que:

1.  $M \geq N$ ,
2.  $M < N$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $X[k]$  la TDF de  $N$  puntos de la sucesión  $x[n]$  de  $N$  puntos de longitud.

1. Muestre que si  $x[n] = -x[N-1-n]$ , entonces  $X[0] = 0$ . Considere por separado los casos en que  $N$  es par o impar.
2. Muestre que si  $N$  es par y  $x[n] = x[N-1-n]$ , entonces  $X[N/2] = 0$ .

**Ejercicio 10.** Se sabe que  $x[n]$  es una sucesión de longitud  $N = 6$ , y que su TDF  $X[k]$  es  $X[k] = \{12, 7, 3, 0, 3, 7\}$ , para  $0 \leq k < 6$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? Justifique su respuesta.

1. La sucesión  $x[n]$  es real.
2. La sucesión  $x[n]$  es imaginaria pura.

3. La sucesión  $x[n]$  es compleja.
4. La información dada es insuficiente para obtener una conclusión.

**Ejercicio 11.** Las sucesiones complejas de longitud finita  $N$  pueden descomponerse en sucesiones de  $N$  puntos conjugadas simétricas y antisimétricas a partir de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}x_{ep}[n] &= \frac{1}{2} (x[n] + x^*[((-n))_N]), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\x_{op}[n] &= \frac{1}{2} (x[n] - x^*[((-n))_N]), \quad 0 \leq n \leq N-1,\end{aligned}$$

respectivamente.

1. Verifique analíticamente las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{x[n]\} &\xleftrightarrow{TDF} X_{ep}[k], \\j \operatorname{Im}\{x[n]\} &\xleftrightarrow{TDF} X_{op}[k], \\x_{ep}[n] &\xleftrightarrow{TDF} \operatorname{Re}\{X[k]\} = \operatorname{Re}\{X[((-k))_N]\} \\x_{op}[n] &\xleftrightarrow{TDF} j \operatorname{Im}\{X[k]\} = j \operatorname{Im}\{X[((-k))_N]\}\end{aligned}$$

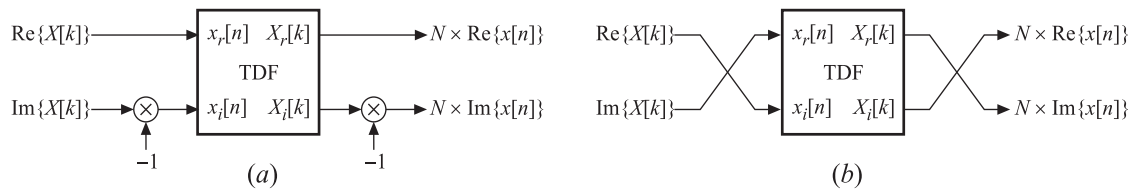
2. Construya una función en MATLAB que, a partir de la sucesión  $x[n]$  calcule las sucesiones conjugadas simétricas y antisimétricas  $x_{ep}[n]$  y  $x_{op}[n]$ , respectivamente.
3. Verifique las propiedades de simetría enunciadas arriba utilizando la sucesión  $x[n] = (0,9e^{j\frac{\pi}{3}n})(u[n] - u[n-20])$ .
4. Utilice las propiedades enunciadas arriba para computar *simultáneamente* la TDF de dos sucesiones reales  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ , ambas de longitud  $N$ , formando la sucesión compleja  $x[n] = x_1[n] + jx_2[n]$ , recuperando  $X_1[k]$  y  $X_2[k]$  a partir de  $X[k]$ . Compruebe sus resultados para las siguientes dos sucesiones:

$$x_1[n] = \cos(0,25\pi n), \quad x_2[n] = \sin(0,75\pi n), \quad 0 \leq n \leq 63.$$

**Ayuda:** Aunque la operación módulo, indicada aquí como  $((n))_N$  se puede implementar con el comando `rem(n,N)`, no resulta útil si  $n < 0$ . Por ello se sugiere implementar la función `mod`, tal como se detalla a continuación:

```
function m = mod(n,N)
% Esta función calcula ((n))N, aun para n<0.
%
m = rem(n,N);
m = m+N;
m = rem(m,N);
```

**Ejercicio 12.** El en Capítulo 2 se estudió cómo calcular la transformada de Fourier inversa a partir de la transformada directa. Algunas relaciones similares pueden aplicarse para calcular la TDF inversa a partir de la TDF. En los gráficos de la figura, el bloque indicado TDF calcula la transformada de Fourier de la sucesión  $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ , dando como resultado  $X[k] = X_r[k] + jX_i[k]$ .



1. Demuestre que la sucesión  $x[n]$  se puede calcular a partir de  $X[k]$  aplicando los siguientes pasos, como se sugiere en la Fig. (a) :

- Conjugar  $X[k]$ .
- Calcular la TDF directa de  $X^*[k]$ .
- Conjugar el resultado de la TDF directa. En definitiva,

$$x[n] = \frac{1}{N} \mathcal{F}\{X^*[k]\}^*.$$

2. Otra forma de calcular la transformada inversa también hace uso de la propiedad de conjugación, como se muestra en la Fig. (b)

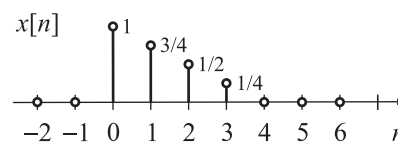
- Intercambiar las partes real e imaginaria de  $X[k]$ , definiendo un vector  $v[n] = \text{Im}\{X[k]\}_{k=n} + j \text{Re}\{X[k]\}_{k=n}$ .
- Calcular  $V[k]$ , la TDF directa de  $v[n]$ .
- Intercambiar la parte real e imaginaria de  $V[k]$ . En síntesis,

$$x[n] = \frac{1}{N} \text{Im}\{\mathcal{F}\{\text{Im}\{X[k]\} + j \text{Re}\{X[k]\}\}\} + \frac{j}{N} \text{Re}\{\mathcal{F}\{\text{Im}\{X[k]\} + j \text{Re}\{X[k]\}\}\}.$$

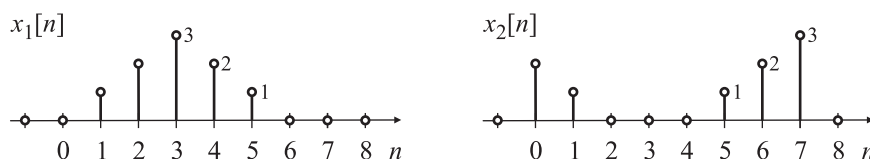
3. Una tercera manera hace uso de rotaciones.

- Defina  $v[n] = X[k]_{k=((n))_N}$ .
- Calcule  $V[k]$ , la TDF de  $v[n]$ .
- Verifique que  $x[n] = (1/N) V[k]_{k=n}$ .

**Ejercicio 13.** Si  $X[k]$  es la TDF de 4 puntos de la sucesión de longitud finita  $x[n]$  que se muestra en la figura, grafique la secuencia  $y[n]$  cuya TDF es  $Y[k]$  es  $Y[k] = W_4^{3k} X[k]$ .



**Ejercicio 14.** Determine la relación entre  $X_1[k]$  y  $X_2[k]$ , las TDF de dos sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  de longitud finita ( $N = 8$  muestras) que se muestran en la figura.



**Ejercicio 15.** Sea  $X[k]$  es la TDF de 6 puntos de la sucesión  $x[n]$  real y de longitud finita que se muestra en la figura.



1. Grafique la secuencia de longitud finita  $y[n]$  cuya TDF de 6 puntos es  $Y[k] = W_6^{4k} X[k]$ .
2. Grafique la secuencia de longitud finita  $w[n]$  cuya TDF de 6 puntos es  $W[k] = \text{Re}\{X[k]\}$ .
3. Grafique la secuencia de longitud finita  $q[n]$  cuya TDF de 3 puntos es  $Q[k] = X[2k]$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

**Ejercicio 16.** Una sucesión  $x[n]$  de duración finita  $N = 8$  tiene la TDF  $X[k]$  que se muestra en la Fig. I. Una sucesión nueva, de longitud  $N = 16$  se genera a partir de  $x[n]$  como

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2], & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De la Fig. II, elija la TDF de 16 puntos correspondiente a  $y[n]$ .

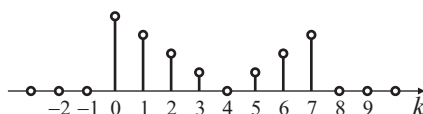


Figura I

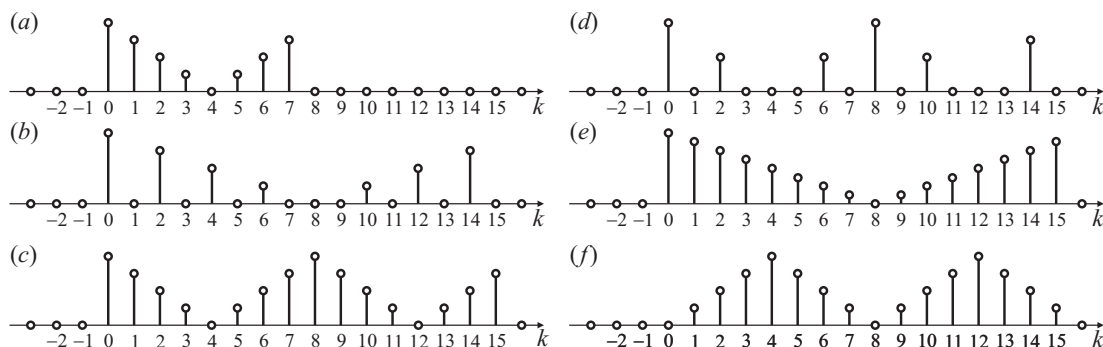


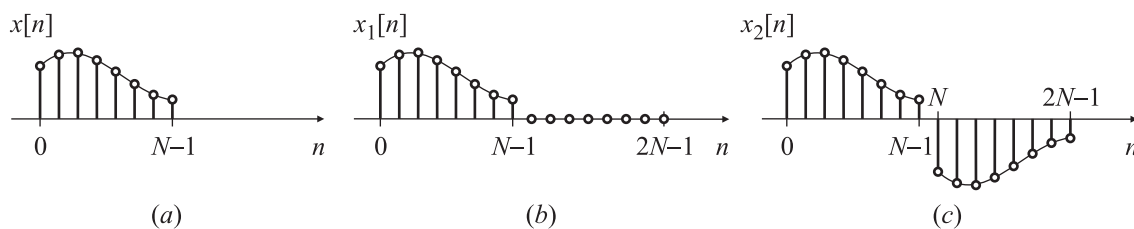
Figura II

**Ejercicio 17.** Sea  $x[n]$  una sucesión de longitud finita  $N$  que se muestra en la figura (a). Las líneas llenas sugieren la envolvente de los valores de la sucesión entre 0 y  $N - 1$ . A partir de  $x[n]$  se construyen dos sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  de longitud finita  $2N$ , como se indica en las figuras (b) y (c), y expresadas matemáticamente como:

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad x_2[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N - 1, \\ -x[n - N], & N \leq n \leq 2N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$



Sea  $X[k]$  la TDF de  $N$  puntos de  $x[n]$ , y  $X_1[k]$  y  $X_2[k]$  las TDF de  $2N$  puntos de  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ , respectivamente.



1. Determine la forma más simple de obtener  $X[k]$  a partir de  $X_1[k]$ .
2. Calcule  $X_2[k]$  a partir de  $X_1[k]$ .
3. Justifique si  $X_2[k]$  se puede obtener a partir de  $X[k]$ .

**Ejercicio 18.** Si  $X[k]$  es la TDF de  $N$  puntos de  $x[n]$  ( $N$  es par), determine las sucesiones  $y[n]$  cuyas TDF de  $N$  puntos se listan a continuación, y expresaselas en función de  $x[n]$ .

$$Y[k] = (-1)^k X[k].$$

$$Y[k] = \operatorname{Re} \{X[k]\} = \frac{1}{2} (X[k] + X^*[k]).$$

$$Y[k] = \begin{cases} X[k - N/2], & k \geq N/2, \\ X[k + N/2], & k < N/2. \end{cases}$$

**Ejercicio 19.** Para la sucesión temporal  $x[n] = (1/2)^n u[n]$ ,

1. Calcule  $X(e^{j\omega})$
2. Muestree  $X(e^{j\omega})$  en 4 puntos, y determine  $X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{4}k}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .
3. Compute  $\hat{x}[n]$ , la TDF inversa de  $X[k]$ .
4. Compare  $x[n]$  e  $\hat{x}[n]$ , y justifique el resultado expresando analíticamente  $\hat{x}[n]$  en función de  $x[n]$ .

**Ayuda:** para resolver este problema es conveniente repasar los contenidos de la Sección 8.4, “Sampling the Fourier Transform” del libro de Oppenheim *et al.*

- ① **Ejercicio 20.** Las sucesiones  $x[n]$  e  $y[n]$  tienen longitud  $N$ . A partir de ellas se genera una tercera sucesión  $w[n]$  de largo  $3N$  como se indica a continuación:

$$w[n] = \{x[0], y[0], 0, x[1], y[1], 0, x[2], y[2], 0, \dots, x[N-1], y[N-1], 0\}.$$

Expresa  $W[k]$  en función de  $X[k]$  e  $Y[k]$ .

**Ejercicio 21.** Considere la sucesión  $x[n] = A \cos \omega_0 n + B \cos \omega_1 n$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ , con  $A = 1$ ,  $B = 0.5$ ,  $\omega_0 = (1/N)2\pi$ ,  $\omega_1 = (3/N)2\pi$ ,  $N = 8$ .

1. Calcule y grafique  $X(e^{j\omega})$ .
2. Calcule y grafique  $X_N[k]$ , la TDF de  $N$  puntos de  $x[n]$ .
3. Si la transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  de  $x[n]$  se muestrea en  $\omega_k = (2\pi/Q)k$ ,  $0 \leq k \leq Q-1$ , donde  $Q = N/2 = 4$ , se obtiene una transformada discreta  $Z[k]$ ,  $0 \leq k \leq Q-1$ . Escriba  $z[n]$  en función de  $x[n]$ , y calcule explícitamente  $z[n]$  para  $0 \leq n \leq Q-1$ .
4. Se “acorta” la sucesión  $x[n]$  a la mitad, obteniéndose la sucesión  $w[n] = x[n]$ ,  $0 \leq n \leq Q-1$ . Grafique  $W(e^{j\omega})$  y  $W[k]$ ,  $0 \leq k \leq Q-1$ .
5. ¿Es cierto que  $Z[k] = W[k]$ ,  $0 \leq n \leq Q-1$ , donde  $Z[k]$  y  $W[k]$  son las TDF de los incisos 3 y 4, respectivamente? Justifique.

Ⓒ **Ejercicio 22.** Sean  $(x[n], y[n])$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  las coordenadas cartesianas de los vértices de un polígono simple  $\mathcal{P}$  de  $N$  lados, orientado positivamente, y sea  $z[n] \triangleq x[n] + jy[n]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

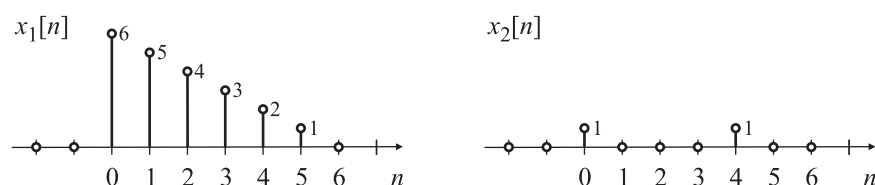
1. Verifique que el área del triángulo con vértices  $0$ ,  $ae^{j\alpha}$ ,  $be^{j\beta}$ , donde  $a > 0$ ,  $b > 0$ , y  $0 \leq \alpha < \beta < \pi$  es  $A_T = \frac{1}{2} \text{Im}\{(be^{j\beta})(\overline{ae^{j\alpha}})\}$ .
2. Demuestre que el polígono  $\mathcal{P}$  tiene área

$$A_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \text{Im} \sum_{n=0}^{N-1} z[n+1] \overline{z[n]} = \frac{N}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right) |Z[k]|^2.$$

3. Muestre que

$$A_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \text{Im} \sum_{n=0}^{N-1} \{y[n+1] - y[n-1]\} x[n] = -iN \sum_{k=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \overline{Y[k]} X[k].$$

**Ejercicio 23.** Calcule la convolución circular de  $N = 6$  y  $N = 10$  puntos para las dos sucesiones de la figura, y verifique sus resultados usando Matlab (calculando la antitransformada del producto de las transformadas).



**Ejercicio 24.** Para las dos sucesiones de 4 puntos  $x[n]$  y  $h[n]$ , definidas por

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(\pi n/2), & n &= 0, 1, 2, 3, \\ h[n] &= 2^n, & n &= 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

1. Calcule  $X[k]$ , la TDF de 4 puntos de  $x[n]$ .

- Calcule  $H[k]$ , la TDF de 4 puntos de  $h[n]$ .
- Calcule  $y[n] = (x \circledast h)[n]$  usando la convolución circular

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[(n-m)_N].$$

- Calcule  $y[n] = x[n] \circledast h[n]$  multiplicando las TDF de  $x[n]$  y  $h[n]$  y calculando la transformada inversa.

**Nota:** Se sugiere resolver el inciso 3 “a mano” para comprender el funcionamiento de la convolución circular.

**Ejercicio 25.** Si  $x[n] = \{1, -3, 1, 5\}$  e  $y[n] = \{7, -7, 9, 3\}$ , ¿existe una sucesión  $w[n]$  de longitud  $N = 4$  tal que  $y[n] = x[n] \circledast w[n]$ ?

- Ⓒ **Ejercicio 26.** Sea  $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$ ,  $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_{N-1})$  la representación vectorial de dos sucesiones  $c[n]$ ,  $d[n]$  de longitud finita,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Se definen las *matrices circulantes*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N-1} & c_{N-2} & c_{N-3} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_0 & d_{N-1} & d_{N-2} & \cdots & d_1 \\ d_1 & d_0 & d_{N-1} & \cdots & d_2 \\ d_2 & d_1 & d_0 & \cdots & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{N-1} & d_{N-2} & d_{N-3} & \cdots & d_0 \end{bmatrix}.$$

- Muestre cómo relacionar el producto matricial  $\mathbf{C}\mathbf{x}^T$  con la convolución  $\mathbf{c} \circledast \mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  es la representación vectorial una sucesión  $x[n]$ .
- Usando los resultados del inciso anterior, muestre que  $\mathbf{CD}$  es la matriz circulante correspondiente a  $\mathbf{c} \circledast \mathbf{d}$ .
- Pruebe que  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  conmutan:  $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$ .

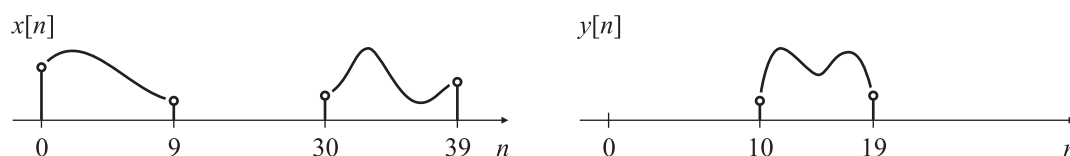
- Ⓘ **Ejercicio 27.** En este problema se investiga el resultado del cálculo reiterado de la TDF.

- Suponga que  $x[n]$  es una sucesión de longitud  $N$ , y sea  $y[n] = TDF_N\{TDF_N\{x[n]\}\}$ . Exprese la sucesión  $y[n]$  en función de los elementos de la sucesión  $x[n]$  de la forma más sencilla posible.
- La sucesión  $w[n]$  se obtiene por la aplicación reiterada  $P$  veces de la TDF a una sucesión  $x[n]$ . ¿Cuál es el mínimo valor de  $P$  para el cual  $w[n] = Ax[n]$ , donde  $A$  es una constante? ¿Cuánto vale  $A$ ?

- I Ejercicio 28.** Sean  $x[n]$  e  $y[n]$  dos sucesiones de longitud finita, tales que  $x[n]$  se anula para  $n < 0$  y  $n > 40$ , y para  $9 < n < 30$ , e  $y[n]$  se anula para  $n < 10$  y  $n > 19$ , tal como se muestra en la figura. Sea  $w[n]$  la convolución lineal entre  $x[n]$  e  $y[n]$ , y  $g[n]$  la convolución circular de  $N = 40$  puntos entre  $x[n]$  e  $y[n]$

$$w[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k],$$

$$g[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[(n-k)_N].$$



1. Determine los valores de  $n$  para los cuales  $w[n]$  puede ser no nula.
2. Especifique los valores de  $n$  para los cuales  $w[n]$  puede calcularse a partir de  $g[n]$ .

**Ejercicio 29.** Considere dos sucesiones  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  definidas como

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 99, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1. Calcule y grafique la convolución lineal  $(x_1 * x_2)[n]$ .
2. Calcule y grafique la convolución circular de 100 puntos  $x_1[n] \circledast x_2[n]$ .
3. Calcule y grafique la convolución circular de 110 puntos  $x_1[n] \circledast x_2[n]$ .

- I Ejercicio 30.** Se desea filtrar la sucesión de datos  $x[n] = u[n]$  con un filtro con respuesta impulsiva  $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$ . Calcule la salida del sistema  $y[n] = (h * x)[n]$  por medio de:

1. la definición de suma convolución:  $y[n] = \sum_k h[k]x[n-k]$ ;
2. el método overlap-add;
3. el método overlap-save.

Para los incisos (2) y (3), utilice una TDF de orden 4, y ajuste la longitud de los bloques de la entrada y de la respuesta impulsiva según corresponda. Verifique que se obtiene el mismo resultado en los tres casos. **Nota:** Aunque en una implementación real las convoluciones de cada etapa se calcularían efectuando la TDF inversa del producto de  $H[k]$  con la TDF de cada bloque de entrada, para simplificar el ejercicio es suficiente calcular la convolución (lineal o circular, según el caso) en el dominio tiempo. Las sucesiones se han elegido de manera que las convoluciones puedan efectuarse por inspección.

① **Ejercicio 31.** Usualmente, el funcionamiento de la técnica de filtrado por bloques overlap-save es más difícil de entender que el método overlap-add. En este ejercicio se exploran algunas alternativas para tratar de facilitar la comprensión. En todos los casos, utilice las mismas señales  $x[n]$  y  $h[n]$  del Ejercicio 30, y compare sus resultados con los de la convolución lineal  $(x * h)[n]$ .

1. Calcule las tres primeras etapas de la convolución por bloques por el método overlap-save *sin* solapar los bloques de entrada. Explique sus resultados.
2. Como al aplicar la convolución circular se descartan las primeras  $P - 1$  muestras, uno estaría tentado a reemplazar las primeras  $P - 1$  muestras de los bloques de entrada (las que se solapan) por valores arbitrarios, por ejemplo muestras nulas. Calcule los tres primeras etapas de la convolución por bloques efectuando el solapamiento de los bloques de las muestras de entrada, pero reemplazando las muestras solapadas por ceros. Justifique sus resultados.

① **Ejercicio 32.** Se desea filtrar un arreglo de datos muy largo con un filtro FIR cuya respuesta impulsiva tiene una longitud  $P = 50$  muestras utilizando la técnica de procesamiento por bloques. Para hacer esto:

- las secciones de entrada se solapan en  $V$  muestras;
- de la salida de cada sección se extraen  $M$  muestras tal que cuando estas muestras son agrupadas, la secuencia resultante es la salida filtrada deseada.

La entrada se segmenta en bloques de  $L = 100$  muestras de longitud, y el tamaño de la TDF utilizada para calcular las convoluciones parciales es  $N = 128$  puntos. Suponga además que la secuencia de salida de la convolución circular está indexada de 0 a 127.

1. Determine  $V$ .
2. Determine  $M$ .
3. Determine el índice del comienzo y el final de los  $M$  puntos extraídos; es decir, determine cuál de los 128 puntos resultantes de la convolución circular son extraídos y anexados con los resultados de la sección previa.

① **Ejercicio 33.** Calcule la convolución por bloques entre las señales  $x[n]$  y  $h[n]$  del Ejercicio 30 utilizando bloques entrada de tamaño  $L = 4$ , y TDF de tamaño  $N = 4$ . Para cada convolución parcial, determine el número de puntos que se deben descartar ( $V$ ), y la cantidad de puntos que debe reservarse para sumarlos al resultado del cálculo del próximo bloque.

**Ejercicio 34.** Se desea implementar la convolución lineal de una sucesión de 10000 puntos con un FIR cuya respuesta impulsiva tiene una longitud de 100 muestras. La convolución se efectuará usando TDF y TDF inversas de 256 puntos.

1. ¿Cuál es el mínimo número de TDF de 256 puntos, y de TDF inversas de 256 puntos necesarias para implementar la convolución de la secuencia de 10000 puntos si se utiliza el método overlap-add? Justifique.

2. ¿Cuál es el mínimo número de TDF de 256 puntos, y de TDF inversas de 256 puntos necesarias para implementar la convolución de la secuencia de 10000 puntos si se utiliza el método overlap-save? Justifique.
3. Se verá más adelante que, cuando  $N$  es potencia de 2, la TDF o la TDF inversa se puede efectuar con  $(N/2) \log_2 N$  multiplicaciones complejas, y  $(N/2) \log_2 N$  adiciones complejas. Para el mismo filtro usado en (1) y en (2), compare el número de operaciones aritméticas (sumas y productos) necesarias para implementar el método overlap-add, overlap-save, y la convolución directa.

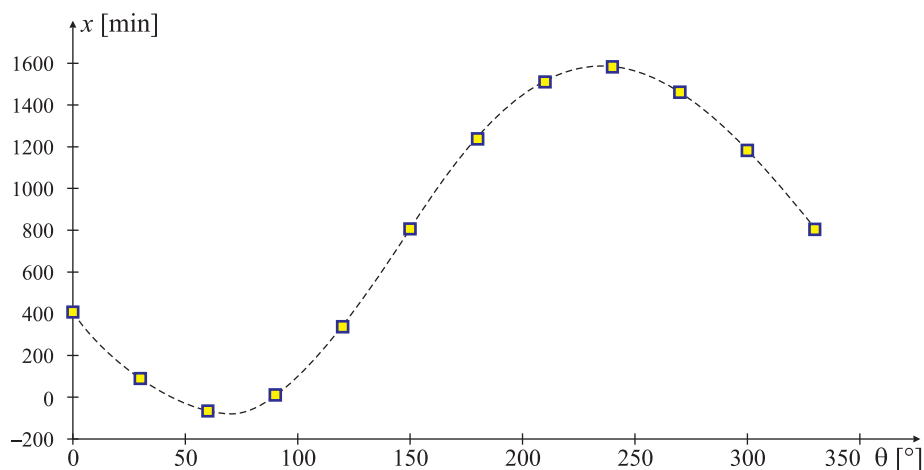
**C) Ejercicio 35.** En la reseña histórica del Capítulo 2 se incluye la tabla siguiente, que consigna los datos de posición del asteroide Pallas, donde variable  $\theta$  representa la ascensión en grados, y la variable  $x$  la declinación en minutos.

$\theta$ (grados)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
$x$ (minutos)	408	89	-66	10	338	807	1238	1511	1583	1462	1183	804

Encuentre una función  $x(\theta)$  continua y periódica que pase por cada uno de los 12 pares de puntos con el menor error posible.

**Ayuda:** exprese  $x(\theta)$  en series de Fourier, y use la TDF para encontrar los coeficientes de la serie.

**Nota:** Para resolver este problema Gauss ideó un método de cálculo muy eficiente, que sería redescubierto años más tarde como la FFT.



### Ejercicio 36. Compresión con pérdida

Las técnicas de compresión son muy útiles para la transmisión de señales: en lugar de utilizar la señal original  $x[n]$ , se transmite otra señal  $y[n]$  derivada de aquella  $y[n] = f(x[n])$ , que tenga menos muestras, o necesite longitud de palabra más corta, etc. En general, estas técnicas están pensadas para ser aplicadas junto con el procesamiento por bloques, y lo que se busca es que el bloque comprimido “pese” menos que el bloque original.

El diseño del algoritmo consiste en encontrar la función  $f(\cdot)$  que resulte en el bloque  $y[n]$  más chico posible, pero también tiene que permitir recuperar la señal  $x_r[n] = f^{-1}(y[n])$  a partir de la señal comprimida  $y[n]$ . Existen dos alternativas:

- que la señal recuperada sea idéntica a la señal original:  $x[n] = x_r[n] = f^{-1}(y[n])$ , en cuyo caso el método de compresión es sin pérdida (*lossless*, en inglés),
- que la señal recuperada sea *parecida* a la señal original:  $x[n] \cong x_r[n] = f^{-1}(y[n])$ , es decir que  $|x[n] - x_r[n]| < \varepsilon$  para todo  $n$  y para  $\varepsilon$  pequeño. En este caso el método de compresión es con pérdida (*lossy* en inglés).

Para las señales de audio un ejemplo del primer caso es la codificación *flac*, y un ejemplo del segundo el formato *mp3* (más correctamente, MPEG capa 3).

En este ejercicio se estudia un método muy rudimentario de compresión con pérdida para señales de audio. La función de codificación  $f(\cdot)$  es la transformada discreta de Fourier,  $X[k]$ . El método de compresión consiste en obtener un vector  $X_c[k]$  que sea igual a  $X[k]$  salvo para aquellas componentes frecuenciales cuya energía esté por debajo de cierto umbral  $u$ , especificado al momento de comprimir la señal. En el vector  $X_c[k]$  estas componentes se reemplazan por 0 (el subíndice “c” indica tanto “comprimido” como “cero”).

La señal  $x_r[n]$  que se recupera haciendo la transformada inversa de Fourier no es igual a  $x[n]$ , pero se espera que sea “bastante parecida” ya que las componentes frecuenciales que se removieron aportan poca energía. La cantidad de muestras nulas será mayor cuanto más grande sea el valor del umbral  $u$ , pero también será mayor la diferencia entre  $x[n]$  y  $x_r[n]$ . El método “comprime” la información porque en lugar de transmitir  $x[n]$ , se podrían transmitir las muestras no nulas de  $X_c[k]$ . El índice de compresión es proporcional al número de muestras de  $X[k]$  cuya energía es menor que el umbral  $u$ , o bien el número de muestras que se reemplazaron por ceros en  $X_c[k]$ .

El propósito del ejercicio es comparar cómo afecta el algoritmo de compresión a la señal recuperada en función del umbral  $u$ . Para ello se determina :

- $e$ , el *error medio cuadrático normalizado*, entre  $x[n]$  y  $x_r[n]$ :

$$e = \left( \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - x_r[n])^2}{\sum_{n=0}^{N-1} (x[n])^2} \right)^{1/2} \quad (4.133)$$

que por Parseval también se puede calcular a partir de  $X[k]$  y  $X_c[k]$ , y

- $i_c$ , el *índice de compresión*, calculado como la cantidad de muestras reemplazadas por cero en el cálculo de  $X_c[k]$ .

La señal  $x[n]$ , que se puede descargar de la página web de la materia, es un vector de  $N = 32768$  muestras de longitud de una señal de voz (artificial) muestreada a  $F_s = 12$

kHz, codificada en formato \*.wav. En las actividades que se listan a continuación se indican algunas funciones de Matlab que pueden ser útiles para completar el ejercicio. Se puede obtener información detallada de estas funciones o comandos a través de la ayuda, o tipeando `doc nombre_de_comando` en la ventana de comandos. Si se tipea `help nombre_de_comando` se consigue una versión resumida de la ayuda.

### Actividades:

1. **La función de compresión.** Construya una función para Matlab con tres argumentos de entrada (el vector de datos  $x[n]$ , la frecuencia de muestreo  $F_s$  y el umbral  $u$ ) y tres argumentos de salida (el error medio cuadrático  $e$ , el índice de compresión  $i_c$ , y el vector de datos  $x_r[n]$  recuperado a través de la información comprimida). Si la función se llama `comprime`, la primera línea del archivo \*.m debe ser:

```
function [e,ic,xr] = comprime(x, Fs, u)
```

- a) Calcule la transformada de Fourier (`fft`) de la señal  $x[n]$ , que se pasa como primer argumento de la función.
- b) Calcule un vector  $E$  con la energía de la señal para cada componente de frecuencia ( $\cdot^2$ ), normalizado entre 0 y 1.
- c) A partir del vector  $X[k]$ , genere un vector  $X_c[k]$  anulando las componentes de frecuencia cuya energía sea menor que un determinado umbral  $u$  (el tercer argumento de entrada a la función):

$$X_c[k] = \begin{cases} X[k], & \text{si } E[k] > u, \\ 0, & \text{si } E[k] \leq u, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{para } 0 \leq k \leq N-1 \\ \text{(en Matlab, } 1 \leq k \leq N) \end{matrix}$$

Para esto es muy útil el comando `find`, y la asignación vectorial: la ecuación anterior puede implementarse como:

```
Xkc = Xk;
Indice = find(E<u);
Xkc(Indice)=0;
```

o también

```
Xkc = Xk;
Xkc(E<u)=0;
```

(para vectores de gran longitud la segunda forma puede ser más eficiente que la primera, pero en este caso no se nota que una sea preferible a la otra).

- d) Calcule una de las variables de salida: la **señal recuperada**  $x_r[n]$ , que es la transformada inversa de  $X_c[k]$  (`ifft`). Ésta debería ser una señal real, pero por problemas numéricos puede tener una parte imaginaria pequeña. Si éste es el caso (`isreal`, `imag`, `real`), verifique que el módulo o la norma (`norm`) de la parte imaginaria sea mucho menor que la norma de la parte real, y reemplace  $x_r[n]$  por su parte real.
- e) Calcule las dos variables de salida restantes:
  - el **error medio cuadrático normalizado**  $e$  entre  $x[n]$  y  $x_r[n]$  (o usando Parseval, entre  $X[k]$  y  $X_c[k]$ ) (`norm`),



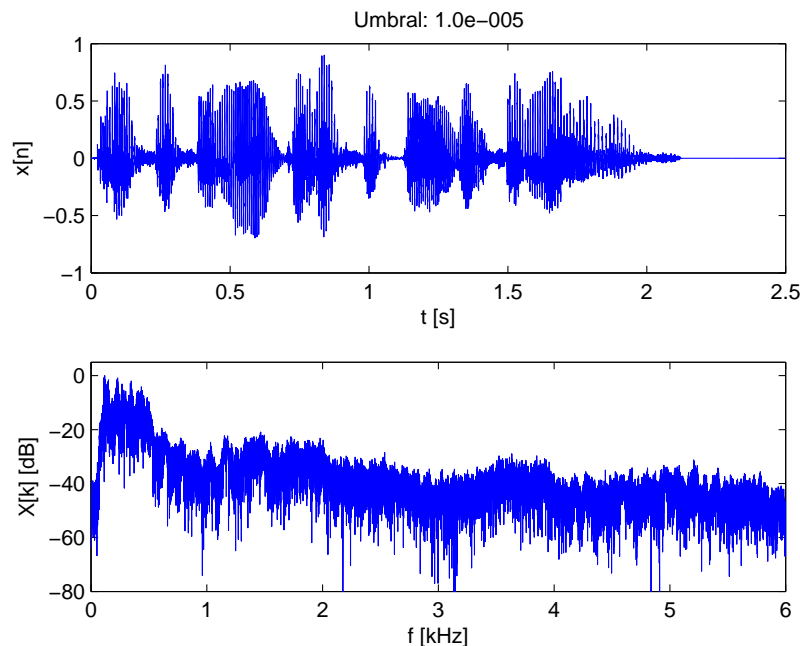


Fig. 4.81. La señal temporal  $x[n]$  y su transformada de Fourier  $X[k]$ .

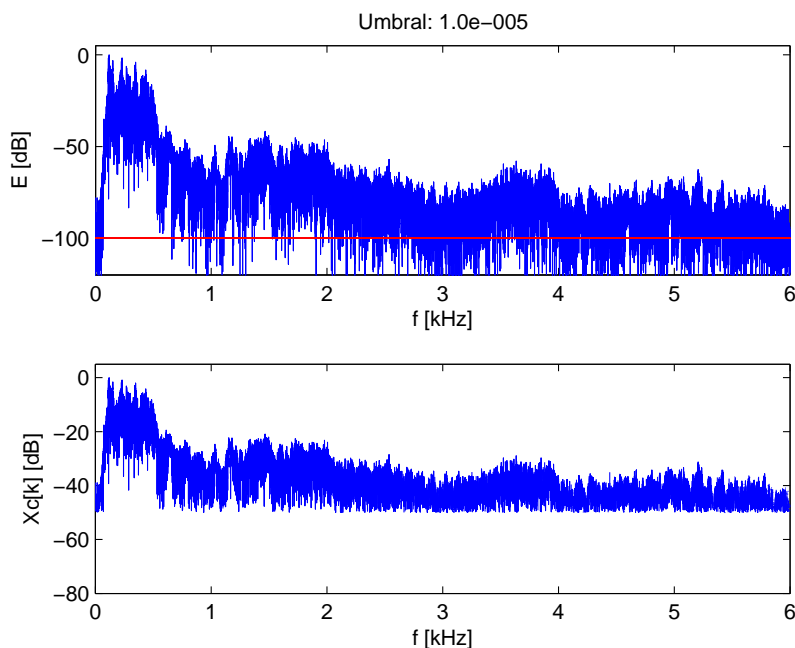
- el **índice de compresión**  $i_c$ : El vector  $X_c[k]$  contiene *casi* la misma información que el vector  $X[k]$ , pero las componentes de frecuencia con una energía menor que  $u$  se anulan. Esto significa que el vector  $X_c[k]$  tiene menos componentes distintas de cero que el vector  $X[k]$ . Por ello se define el índice de compresión  $i_c$  como la cantidad de ceros en  $X_c[k]$  (la longitud del vector `Indice` en el inciso 1c) dividido por la longitud  $N$  de la señal.

f) Figura 1: grafique en dos subfiguras (`subplot`):

- la señal  $x[n]$  en función del tiempo, ajustando el eje de amplitudes entre  $-1$  y  $1$ , y el eje de tiempo entre  $0$  y  $2.5$  s (`length`, `axis`). La separación temporal entre cada muestra es  $1/F_s$ , por lo que la duración total de la señal es de  $32768/F_s = 2.73$  s.
- su transformada de Fourier en dB (`abs`, `log10`), normalizada en amplitud (el máximo es  $0$  dB) y con el eje de frecuencias escalado en kHz. El primer elemento de la FFT corresponde a la frecuencia  $f = 0$ , y el último a la frecuencia  $f = F_s(N - 1)/N \cong F_s$ . Grafique el espectro de la señal para el rango de frecuencias comprendido entre  $0$  y  $F_s/2 = 6$  kHz, y un rango de amplitudes comprendido entre  $-80$  dB y  $5$  dB.
- anote los ejes de los gráficos con las unidades y variables adecuadas, como se muestra en la Fig. 4.81.

g) Figura 2: grafique en dos subfiguras (`subplot`):

- El espectro de potencia (el vector `E` del inciso 1c) expresado en dB en función de la frecuencia, para un rango de frecuencias entre  $0$  y  $F_s/2$ , y un rango de amplitudes entre  $-120$  dB y  $5$  dB (`axis`). Grafique una línea indicando el umbral  $u$ .



**Fig. 4.82.** Espectro de energía  $E$  en función de la frecuencia, y espectro  $X_c[k]$  donde las componentes de frecuencia con energía menor que el umbral  $u$  se han anulado ( $u = 10^{-5}$ ).

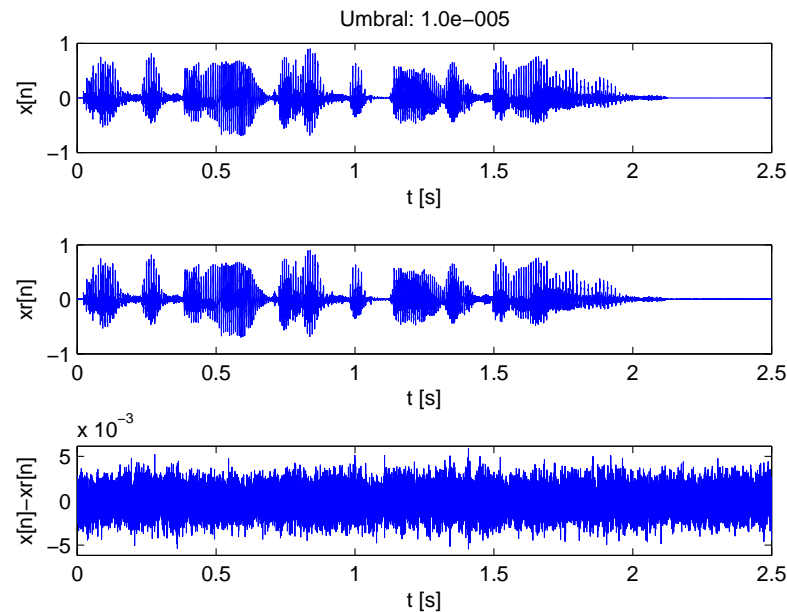
- El espectro “comprimido”  $X_c[k]$  expresado en dB en función de la frecuencia, para un rango de frecuencias entre 0 y  $F_s/2$ , y un rango de amplitudes entre  $-80$  dB y  $5$  dB (axis). Como algunos elementos son nulos, el logaritmo de estos valores no está definido, y no se representan en los gráficos.
- anote los ejes de los gráficos con las unidades y variables adecuadas, como se muestra en la Fig. 4.82.

h) Figura 3: grafique en tres subfiguras (subplot):

- La señal  $x[n]$  original, con amplitudes comprendidas entre  $-1$  y  $1$ , y el eje de tiempos entre  $0$  y  $2,5$  s.
- La señal  $x_r[n]$  con amplitudes comprendidas entre  $-1$  y  $1$ , y el eje de tiempos entre  $0$  y  $2,5$  s.
- la diferencia  $\Delta x[n] = x[n] - x_r[n]$ , con las amplitudes comprendidas entre  $\pm 1,05$  veces el máximo del valor absoluto de  $\Delta x[n]$ , y el eje de tiempos entre  $0$  y  $2,5$  s.
- anote los ejes de los gráficos con las unidades y variables adecuadas, como se muestra en la Fig. 4.83.

## 2. Ensayos.

- a) Utilice el comando `wavread` para cargar algunas de las señales de audio en el ambiente de trabajo de Matlab.
- b) Utilice la función desarrollada en el inciso anterior para generar dos señales con umbrales de compresión  $u_1 = 10^{-5}$  y  $u_2 = 10^{-3}$ . Salve las tres figuras generadas por la función para cada caso (para incluirlas en el informe) y registre el error medio cuadrático  $e$  y el índice de compresión  $i_c$ .



**Fig. 4.83.** Señal temporal original  $x[n]$ , señal recuperada  $x_r[n]$  y la diferencia  $x[n] - x_r[n]$  para un umbral  $u = 10^{-5}$ .

- c) La señal original  $x[n]$  y la señal  $x_r[n]$  recuperada a partir de la información comprimida se pueden comparar “auditivamente” utilizando el comando `sound`.

**3. Análisis del error medio cuadrático y la compresión en función del umbral.**  
 Construya un archivo de comandos para Matlab que:

- a) Lea la señal  $x[n]$  (`wavread`)  
 b) llame a la función desarrollada en el inciso 1 para los valores de umbral

$$u = [10^{-7}, 3 \cdot 10^{-7}, 10^{-6}, 3 \cdot 10^{-6}, 10^{-5}, 3 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}].$$

(con estos valores se tienen puntos aproximadamente equiespaciados en un gráfico con eje de abscisas logarítmico). En este caso, puede ser conveniente (y más rápido) deshabilitar la generación de los gráficos.

- c) Una vez finalizado el cálculo, grafique el error medio cuadrático  $e$  y el índice de compresión  $i_c$  en función de  $u$  en un gráfico log-log (`loglog`), como se muestra en la Fig. 4.84. Un ejemplo de un archivo de comandos que implementa estos pasos se lista a continuación

```
close all;
clear all;

[x, Fs] = wavread('x1');           % lee la señal de audio

% reserva espacio de memoria
```

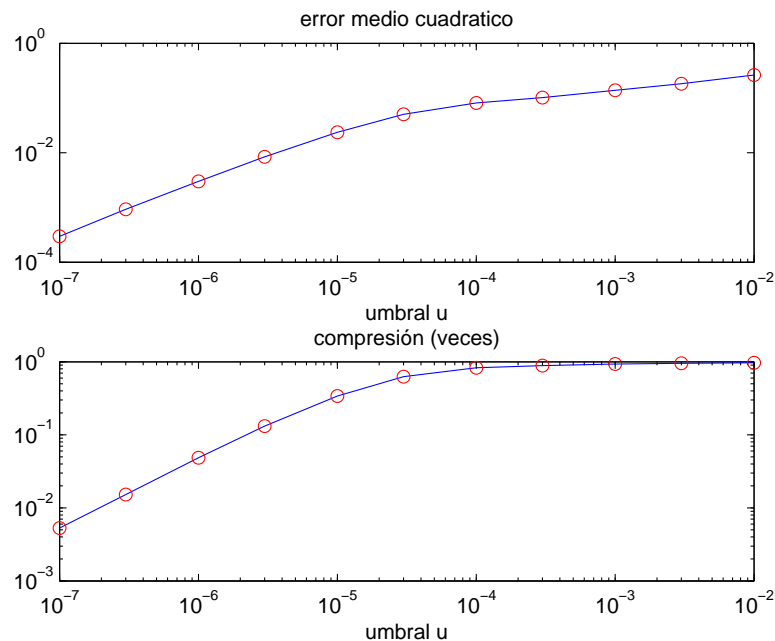


Fig. 4.84. Error medio cuadrático  $e$  e índice de compresión  $i_c$  en función del umbral  $u$ .

```

U = [1e-7, 3e-7, 1e-6, 3e-6, 1e-5, 3e-5, ...
     1e-4, 3e-4, 1e-3, 3e-3, 1e-2];
EMC = zeros(size(U)); % error medio cuadrático
IC = zeros(size(U)); % índice de compresión
xr = zeros(length(x),length(U)); % señal xr en c/columna

% evalúa la función para los distintos valores de U
for ii = 1:length(U)
    [EMC(ii),IC(ii),xr(:,ii)] = comprime(x,Fs,U(ii));
end;

% grafica las curvas
subplot(211);
loglog(U,EMC,'- ',U,EMC,'ro');
xlabel('umbral u');
title('error medio cuadrático');

subplot(212);
loglog(U,IC,'- ',U,IC,'ro');
xlabel('umbral u');
title('índice de compresión');

```

- d) Reporte en una tabla los valores del error medio cuadrático  $e$  y del índice de compresión  $i_c$  en función de  $u$ .

$u$	$e$	$i_c$
$10^{-7}$	_____	_____
$3 \times 10^{-7}$	_____	_____
$10^{-6}$	_____	_____
$3 \times 10^{-6}$	_____	_____
$10^{-5}$	_____	_____
$3 \times 10^{-5}$	_____	_____
$10^{-4}$	_____	_____
$3 \times 10^{-4}$	_____	_____
$10^{-3}$	_____	_____
$3 \times 10^{-3}$	_____	_____
$10^{-2}$	_____	_____

- e) Las columnas de la matriz `xr` del archivo de comandos del inciso 3c contienen las señales recuperadas  $x_r[n]$  para cada valor del umbral  $u$ . ¿Para qué valor de  $u$  la señal original  $x[n]$  y la recuperada  $x_r[n]$  se oyen “casi” iguales?
4. Documente en un reporte breve las figuras producidas en el inciso 2b para  $u = 10^{-5}$  y  $u = 10^{-3}$ , y en el inciso 3c para el vector de valores de  $u$ . Adjunte también la tabla del inciso 3d y un listado de la función `comprime`.

**Ejercicio 37. Convolución por bloques**

Se debe calcular la convolución entre  $x[n]$  y  $h[n]$  utilizando los métodos de procesamiento por bloques. El largo de la sucesión  $x[n]$  es  $N_x$ , y el de  $h[n]$  es  $P$ . Las convoluciones se calcularán con el método de la convolución rápida usando TDFs de largo  $N = 8$ .

1. Para el método *overlap-add*:
  - a) Determinar el largo  $L_a$  de los bloques  $x_i[n]$  en que debe partirse la sucesión de entrada  $x[n]$ .
  - b) Calcular la salida  $y_i[n]$  que resulta de la convolución de  $h[n]$  con cada uno de los bloques  $x_i[n]$ .
  - c) Indicar para cada bloque las muestras que deben solaparse con las del bloque anterior y el siguiente.
  - d) Sumar apropiadamente las salidas de cada bloque para obtener la salida completa  $y[n]$ .
  - e) Comparar la salida calculada con el resultado de la convolución común entre  $x[n]$  y  $h[n]$ .
2. Para el método *overlap-save*:
  - a) Determinar el largo  $L_s$  de los bloques  $x_i[n]$  en que debe partirse la sucesión de entrada  $x[n]$ .
  - b) Calcular la salida  $y_i[n]$  que resulta de la convolución de  $h[n]$  con cada uno de los bloques  $x_i[n]$ .
  - c) Indicar para cada bloque las muestras que deben descartarse y el rango de las muestras “útiles”.
  - d) A partir de la salidas  $y_i[n]$  de cada bloque indique cómo obtener la salida completa  $y[n]$ .
  - e) Comparar la salida calculada con el resultado de la convolución común entre  $x[n]$  y  $h[n]$ .
3. Una variante del método *overlap-add* es elegir el largo  $L$  de los bloques menor que  $L_a = N - (P - 1)$ . Elija  $L = L_a - 1$ . Explique el funcionamiento del método en este caso, y comente sobre su eficiencia respecto al indicado en el inciso 1.
4. Para el método *overlap-save*, también se puede elegir el largo  $L$  de los bloques menor que  $L_s$ , (pero mayor que  $L_a$ ). Elija  $L = L_s - 1$ . Explique en este caso una forma de implementar el método de convolución por bloques indicando las muestras que se deben descartar en cada bloque, el número de muestras “útiles”, y comente sobre la eficiencia de esta técnica respecto a la del inciso 2.

**Observaciones**

- Este es un ejercicio más de la práctica de problemas. La idea es presentar los resultados en una forma legible, pero no necesariamente “linda”. Lo que se espera es que se indiquen cómo queda conformado cada bloque (de entrada, resultados intermedios, convolución), los índices correspondientes a cada bloque, qué muestras se “solapan”, “guardan” o “descartan”, etc.
- **No es necesario hacer las gráficas** (aunque se incluirán en las soluciones entregadas por la cátedra).
- El informe puede presentarse en forma manuscrita o impresa; la idea es no gastar más tiempo del necesario.

- El ejercicio tiene fecha de vencimiento. La presentación en una fecha posterior será penada con una reducción de la nota.
- Para calcular la convolución circular se puede utilizar la siguiente función

```
function y = ccirc(x,h,N)
if nargin <3
    N = max([length(x) length(h)]);
end
y = ifft(fft(x,N).*fft(h,N));
```





# Apéndice 4. $\mathcal{A}$

## Matrices circulantes

Las propiedades de las matrices circulantes son bien conocidas, y fácilmente derivables (Davies, 1979; Lancaster, 1969, p.267); esta nota está basada en un apunte de Gray (2002). Dado un vector  $N$ -dimensional

$$\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}],$$

la matriz circulante asociada al vector tiene la forma

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_{N-1} & c_0 & \cdots & c_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \quad (4.A.1)$$

donde cada fila es un desplazamiento cíclico de la fila anterior. El elemento  $(i, k)$  de  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}_{i,k}$  está dado por

$$\mathbf{C}_{i,k} = c_{((k-i))_N},$$

donde  $((i))_N$  representa la operación módulo:  $((i))_N = i \bmod N$ . Los autovalores  $\lambda_i$  y los autovectores  $\mathbf{v}^{(i)}$  de  $\mathbf{C}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , son las soluciones de

$$\mathbf{C}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

o, de forma equivalente, de las  $N$  ecuaciones a diferencias

$$\sum_{n=0}^{m-1} c_{N-m+n} v_n + \sum_{n=m}^{N-1} c_{n-m} v_n = \lambda v_m,$$

donde  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , y  $v_m$  es la  $m$ -ésima componente del vector  $\mathbf{v}$ . Cambiando el índice de la sumatoria, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{N-1-m} c_n v_{n+m} + \sum_{n=N-m}^{N-1} c_n v_{n-(N-m)} = \lambda v_m. \quad (4.A.2)$$

La ecuación a diferencias (4.A.2) lineal y con coeficientes constantes tiene una solución de la forma  $y_k = \rho^k$ . Sustituyendo en (4.A.2) y cancelando  $\rho^m$  resulta

$$\sum_{n=0}^{N-1-m} c_n \rho^n + \rho^{-N} \sum_{n=N-m}^{N-1} c_n \rho^n = \lambda. \quad (4.A.3)$$

Si se elige  $\rho^{-N} = 1$  se simplifica (4.A.3) lo que permite expresar el autovalor  $\lambda$  como

$$\lambda = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \rho^n.$$

El autovector asociado es

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \\ \vdots \\ \rho^{N-1} \end{bmatrix},$$

donde el coeficiente  $1/\sqrt{N}$  se elige de manera que  $\|\mathbf{v}\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{N-1} |v_n|^2 \right) = 1$ , es decir, que el autovector –pensado como una sucesión de valores– tiene energía unitaria. Como  $\rho^{-N} = 1$ , cada uno de los  $\rho_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  es una de las  $N$ -ésimas raíces de la unidad,  $\rho_k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$ . Por lo tanto, el  $k$ -ésimo autovalor  $\lambda_k$  está dado por

$$\lambda_k = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \left( e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right)^n, \quad (4.A.4)$$

que no es otra cosa que la  $k$ -ésima muestra de la TDF del vector  $\mathbf{c}$  pensado como la sucesión  $c[n] = \{c_0, c_1, \dots, c_{N-1}\}$ . El  $k$ -ésimo autovector es entonces

$$\mathbf{v}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \\ \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} \end{bmatrix}. \quad (4.A.5)$$

De (4.A.4) se puede escribir

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^*, \quad (4.A.6)$$

donde  $\mathbf{U}$  es la matriz cuya columna  $m$ -ésima es el  $m$ -ésimo autovector

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{v}^{(0)} \mid \mathbf{v}^{(1)} \mid \dots \mid \mathbf{v}^{(N-1)} \right\},$$

o, expresado de otra manera,

$$U_{i,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}ik},$$

con  $i, k = 0, 1, \dots, N-1$ . Además, se verifica que  $\mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I}$ .

La matriz  $\mathbf{\Lambda}$  es una matriz diagonal dada por

$$\Lambda_{ii} = \lambda_i,$$

lo que muestra que (4.A.6) puede interpretarse como una combinación de la TDF inversa y desplazamientos circulares. Para verificar (4.A.6), sea  $\mathbf{A}_{ik}$  el elemento  $(i, k)$  de  $\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^*$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{ik} &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-i)m} \lambda_m \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-i)m} \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{-j\frac{2\pi}{N}mr} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} c_r \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-i-r)m}.\end{aligned}\quad (4.A.7)$$

Recordando que

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-i-r)m} = \begin{cases} N, & \text{si } k-i-r = ((r))_N, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

resulta

$$\mathbf{A}_{ik} = c_{((k-i))_N},$$

de modo que (4.A.6) y (4.A.1) son equivalentes. Más aún, la expresión (4.A.7) muestra que cualquier matriz de la forma (4.A.6) es circulante.

Como la matriz  $\mathbf{C}$  es unitariamente similar a una matriz diagonal (Horn y Johnson, 1999), es normal ( $\mathbf{C}\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^*\mathbf{C}$ ). Además ya que todas las matrices circulantes tienen los mismos autovectores (4.A.5), poseen las siguientes propiedades.

**Teorema** Sean  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{B}$  matrices circulantes de dimensión  $N \times N$  generadas por los vectores  $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]$ ,  $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]$ :  $\mathbf{C}_{k,j} = c_{((k-j))_N}$ ,  $\mathbf{B}_{k,j} = b_{((k-j))_N}$ , con autovalores

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-j\frac{2\pi}{N}km}, \quad \beta_m = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-j\frac{2\pi}{N}km},$$

respectivamente. Entonces:

1. Las matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{B}$  conmutan, y

$$\mathbf{CB} = \mathbf{BC} = \mathbf{U}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{U}^*$$

donde  $\boldsymbol{\gamma}$  es una matriz diagonal,  $\gamma_{ii} = \lambda_i \beta_i$ , y  $\mathbf{CB}$  también es circulante.

2. La matriz  $\mathbf{C} + \mathbf{B}$  es circulante, y

$$\mathbf{C} + \mathbf{B} = \mathbf{U}^* \boldsymbol{\Omega} \mathbf{U},$$

donde  $\boldsymbol{\Omega}$  es una matriz diagonal,  $\Omega_{ii} = \lambda_i + \beta_i$ .

3. Si  $\lambda_m \neq 0$  para  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , entonces  $\mathbf{C}$  es no singular, y

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}^*$$

es decir que la inversa de  $\mathbf{C}$  se puede calcular de forma inmediata.

**Prueba** Las matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{B}$  se pueden expresar como  $\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\beta}\mathbf{U}^*$ , donde  $\mathbf{\Lambda}$  y  $\mathbf{\beta}$  son matrices diagonales con elementos  $\lambda_{ii} = \lambda_i$ ,  $\beta_{ii} = \beta_i$ , respectivamente.

1.  $\mathbf{CB} = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*)(\mathbf{U}\mathbf{\beta}\mathbf{U}^*) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\beta}\mathbf{U}^* = \mathbf{BC}$ , pues como  $\mathbf{\Lambda}\mathbf{\beta}$  es diagonal, (4.A.7) implica que  $\mathbf{CB}$  es circulante. Otra forma de probar esta propiedad es notando que, para que dos matrices conmuten tienen que tener el mismo conjunto de autovectores (Kailath, 1980). Como todas las matrices circulantes comparten los mismos autovectores (4.A.5), cualquier par de matrices circulantes conmutan.
2.  $\mathbf{C} + \mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^* + \mathbf{U}\mathbf{\beta}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\beta})\mathbf{U}^*$ .
3.  $\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*)^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^*$  si  $\mathbf{\Lambda}$  es no singular. □

Las matrices circulantes son una clase de matrices particularmente tratable porque las inversas, productos y sumas también son circulantes, y por lo tanto normales y de construcción directa. Además, los autovalores de tales matrices pueden ser calculados fácil y exactamente.

### 4.A.1. Referencias

Davies, P. J., *Circulant Matrices*, Wiley-Interscience, NY, 1979.

Gray, R. M., *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*, Information Sciences Laboratory, Stanford University, August 2002. Disponible electrónicamente en <http://ee.stanford.edu/~gray/toeplitz.pdf>

Horn, R., Johnson, C., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, UK, 1999.

Kailath, T., *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

Lancaster, P., *Theory of Matrices*, Academic Press, NY, 1969.