Procesamiento digital de señales

Sistemas discretos

Integrantes:

- Barco Valentín
- Estrada Anselmo

Ejercicio 1:

a) $$y[n] = \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{2}x[n-2] + \frac{1}{4}x[n-4]$$

$$y_1[n] = S\{x_1[n]\}$$

$$y_2[n] = S\{x_2[n]\}$$

Verifico propiedad aditiva

$$S\{x_1[n] + x_2[n]\} = \overbrace{S\{x_1[n]\}}^{y_1[n]} + \overbrace{S\{x_1[n]\}}^{y_2[n]}$$

$$\frac{1}{4}\left(x_1[n] + x_2[n]\right) - \frac{1}{2}\left(x_1[n-2] + x_2[n-2]\right) + \frac{1}{4}\left(x_1[n-4] + x_2[n-4]\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}x_1[n] - \frac{1}{2}x_1[n-2] + \frac{1}{2}x_1[n-4]}_{y_1[n]} + \underbrace{\frac{1}{4}x_2[n] - \frac{1}{2}x_2[n-2] + \frac{1}{4}x_2[n-4]}_{y_2[n]}$$

<u>Verifica</u> ✓

Verifico propiedad de Homogeneidad

$$S\{a x_1[n]\} = a S\{x_1[n]\} = a y_1[n]$$

$$\frac{1}{4} \cdot a x_1[n] - \frac{1}{2} a x_1[n-2] + \frac{1}{4} a x[n-4] =$$

$$= a\left(\frac{1}{4} x_1[n] - \frac{1}{2} a x_1[n-2] + \frac{1}{4} x[n-4]\right) = a y_1[n]$$

Verifico ✓

S es un sistema lineal.

ii) Verifico si S es invariante en el tiempo. si

$$S\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$$

$$S\{x[n-n_0]\} = \frac{1}{4} x[n-n_0] - \frac{1}{2} x[(n-2)-n_0] + \frac{1}{4} x[(n-4)-n_0]$$

$$S\{x[n-n_0]\} = \frac{1}{4} x[(n-n_0)] - \frac{1}{2} x[(n-n_0)-2] + \frac{1}{4} x[(n-n_0)-4]$$

Realizo un cambio de variable $k = n - n_0$

$$S\{x[k]\} = \frac{1}{4} x[k] - \frac{1}{2} x[k-2] + \frac{1}{4} x[k-4]$$

$$S\{x[k]\} = y[k] = y[n-n_0]$$ Verifica

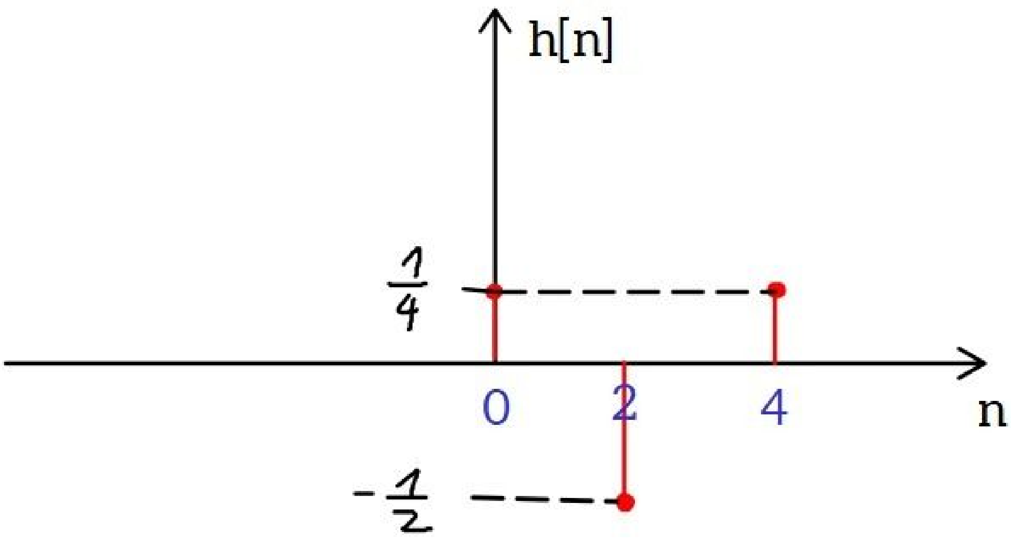
S es invariante en el tiempo

b)

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{2}x[n-2] + \frac{1}{4}x[n-4]$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$S\{\delta[n]\} = \frac{1}{4}\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{1}{4}\delta[n-4] = h[n]$$



Al aplicar un impulso al Sistema S, la respuesta impulsiva está formado por un numero finito de terminos entonces esto se puede denominar como FIR (por respuesta impulsiva finita)

c) i) El sistema S es causal ya que la salida en un instante $n = n_0$ depende de la entrada en $n_0 - 2$ y $n_0 - 4$, por lo que la salida no depende de entradas futuras, solo de entradas pasadas.

ii) Suponiendo que $x[n]$ está acotada para todo n como $|x[n]| \leq B_x < \infty$ y $|y[n]| \leq B_y < \infty$

$$|y[n]| \leq \frac{1}{4}|x[n]| + \frac{1}{2}|x[n-2]| + \frac{1}{4}|x[n-4]|$$

$$|y[n]| \leq \frac{1}{4}B_x + \frac{1}{2}B_x + \frac{1}{4}B_x = 1 \cdot B_x$$

Es decir que la cota para la salida $|y[n]|$ es $B_y = B_x < \infty$ y el sistema es estable

2)

a) $y[n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} x[n-k] \quad , \quad n \geq 0$

b) Pruebo principio de superposición

$$S\{a x_1[n] + b x_2[n]\} = a S\{x_1[n]\} + b S\{x_2[n]\}$$

$$x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$$

$$S\{x_3[n]\} = a S\{x_1[n]\} + b S\{x_2[n]\}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \cdot x_3[n-k] = a \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} x_1[n-k] + b \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} x_2[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \left(a x_1[n-k] + b x_2[n-k] \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} a x_1[n-k] + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} b x_2[n-k] =$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} x_1[n-k] + b \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} x_2[n-k] \quad \checkmark$$

Es lineal

ii) La salida $y[n]$ desplazada n_0 muestras

$$y[0-n_0] = x[0-n_0]$$

$$y[1-n_0] = x[1-n_0] + \frac{1}{2}x[-n_0]$$

$$y[2-n_0] = x[2-n_0] + \frac{1}{2}x[1-n_0] + \frac{1}{3}x[-n_0]$$

$$y[n_0-n_0] = x[0] + \frac{1}{2}x[-1] + \dots + \frac{1}{1+n_0}[-n_0]$$

La salida $y_1[n]$ ante una entrada $x_1[n] = x[n-n_0]$

$$y_1[0] = x[0-n_0]$$

$$y_1[1] = x[1-n_0] + \frac{1}{2}x[-n_0]$$

$$y_1[2] = x[2-n_0] + \frac{1}{2}x[1-n_0] + \frac{1}{3}x[-n_0]$$

$$y_1[n_0] = x[0] + \frac{1}{2}x[-1] + \dots + \frac{1}{1+n_0}[-n_0]$$

Se puede ver que $S\{x[n-n_0]\} = y(n-n_0)$
por lo tanto el sistema es invariante en el tiempo

iii) Si el sistema es causal su salida $y[n]$ en un instante $n = n_0$ depende solamente de los valores $n \leq n_0$ de la sucesion de entrada $x[n]$. Esto implica que si $x_1[n] = x_2[n]$ para todo $n \leq n_0$, entonces $y_1[n] = y_2[n]$ para todo $n \leq n_0$

$$y_1[n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} x_1[n-k]$$

$$y_2[n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} x_2[n-k]$$

y como $x_1[n] = x_2[n]$, entonces $x_1[n-k] = x_2[n-k]$

por lo que se verifica que $y_1[n] = y_2[n]$

por lo tanto el sistema <u>es causal</u>

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} x_1[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} x_2[n-k]$$

✓

<u>Verifica</u>

Respuesta impulsiva

$$S\{\delta[n]\} = h[n] \qquad \text{donde} \quad \delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \delta[n-k]$$