

## Capítulo 12

# Filtros FIR

### 12.1 Diseño de filtros FIR por minimización de la integral del error cuadrático

Sea  $H_d(e^{j\omega})$  la respuesta en frecuencia del filtro que se desea implementar. Como  $H_d(e^{j\omega})$  es periódica con período  $2\pi$  se puede expresar en serie de Fourier

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] e^{-j\omega n},$$

donde los coeficientes de Fourier  $h_d[n]$  son precisamente la respuesta impulsiva del sistema, y están dados por

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad -\infty < n < \infty. \quad (12.1)$$

De manera que, dada una especificación de respuesta en frecuencia deseada  $H_d(e^{j\omega})$  se puede calcular  $h_d[n]$  a partir de (12.1), y determinar la función de sistema  $H_d(z)$ . En la mayoría de las aplicaciones prácticas la respuesta en frecuencia deseada es constante a tramos con transiciones abruptas entre las bandas, lo que causa que la respuesta impulsiva  $h_d[n]$  sea de longitud infinita y no causal.

Para lograr un filtro computacionalmente realizable se debe buscar una respuesta impulsiva de longitud finita  $h[n]$  de longitud  $2M + 1$  cuya respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$  aproxime la respuesta en frecuencia deseada  $H_d(e^{j\omega})$  de la mejor manera posible. Un criterio de aproximación habitual es minimizar la integral del error cuadrático

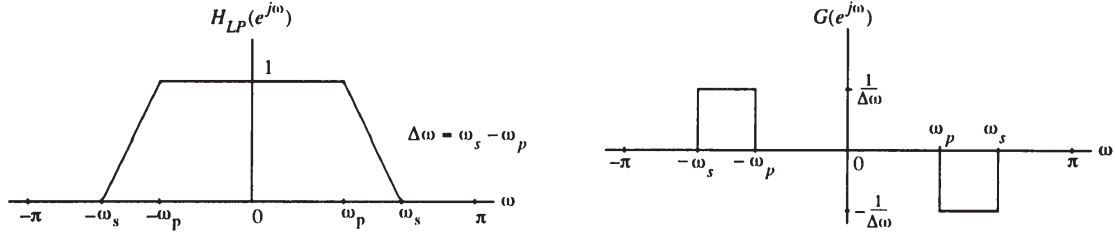
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 d\omega,$$

donde

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M h[n] e^{-j\omega n}.$$

Según la relación de Parseval,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] - h_d[n]|^2$$



**Fig. 12.1:** (a) Especificaciones de un filtro pasabajos con banda de transición suave. (b) Especificaciones del filtro derivado.

$$= \sum_{n=-\infty}^{-M-1} |h_d[n]|^2 + \sum_{n=-M}^M |h[n] - h_d[n]|^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty} |h_d[n]|^2 \quad (12.2)$$

La expresión (12.2) revela que la integral del error cuadrático es mínima cuando  $h[n] = h_d[n]$  para  $-M \leq n \leq M$ , pues se cancela el segundo término de la suma en (12.2). En otras palabras, la mejor aproximación a la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva no causal e infinitamente larga en el sentido de minimizar la integral del error cuadrático es la *truncación* de los coeficientes de la respuesta impulsiva ideal.

A partir de la respuesta impulsiva  $h[n]$  de longitud finita  $2M + 1$  se puede derivar una respuesta causal retardando la respuesta en  $M$  muestras,

$$h_c[n] = h[n - M].$$

El filtro causal con respuesta impulsiva  $h_c[n]$  tiene el mismo módulo de la respuesta en frecuencia que el filtro no causal de longitud finita  $h[n]$ , y su respuesta de fase tiene un desfase lineal de  $\omega M$  radianes con respecto al filtro no causal.

## 12.2 Filtros FIR con banda de transición suave

Los filtros FIR obtenidos por truncación de una respuesta impulsiva de longitud infinita (que se calcula a partir de una especificación de respuesta en frecuencia con discontinuidades abruptas) presentan un comportamiento oscilatorio en su respuesta en frecuencia, llamado fenómeno de Gibbs. Una manera de reducir la ondulación a valores aceptables es pesando la respuesta impulsiva de longitud infinita con una ventana temporal apropiada, cuya respuesta impulsiva tienda suavemente a cero. Otra forma es modificando la especificación de la respuesta en frecuencia del filtro discreto dejando una banda de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo, y permitiendo una transición suave entre ellas.

Para el caso de un filtro pasabajos, la modificación más sencilla es unir la banda de paso y la banda de rechazo con una recta (*spline* de primer orden) como se observa en la Fig. 12.1(a). Aplicando la transformada inversa de Fourier a la respuesta en frecuencia  $H_{LP}(e^{j\omega})$  se pueden calcular los coeficientes  $h_{LP}[n]$  de la respuesta impulsiva. Sin embargo, una manera más sencilla de obtener la respuesta impulsiva es a partir de la transformada inversa de Fourier de la *derivada*  $G(e^{j\omega})$  de la especificación de la respuesta en frecuencia  $H_{LP}(e^{j\omega})$ , Fig. 12.1(b).

Si  $H_{LP}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{LP}[n] e^{-j\omega n}$ , entonces

$$\frac{d}{d\omega} [H_{LP}(e^{j\omega})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{LP}[n] \frac{d}{d\omega} (e^{-j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-jn h_{LP}[n]) e^{-j\omega n}.$$

Definiendo  $G(e^{j\omega}) = \frac{d}{d\omega} H_{LP}(e^{j\omega})$ , resulta  $g[n] = -jn h_{LP}[n]$ . La especificación en frecuencia de  $G(e^{j\omega})$  que se muestra en la Fig. 12.1(b) puede obtenerse a partir de  $H_{LP}(e^{j\omega})$ . Entonces,  $g[n]$  puede calcularse a partir de  $G(e^{j\omega})$ , y después computar  $h_{LP}[n]$  como

$$h_{LP}[n] = \frac{j}{n} g[n].$$

Es sencillo verificar que si  $n \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} g[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s}^{-\omega_p} \frac{1}{\Delta\omega} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_p}^{\omega_s} \frac{-1}{\Delta\omega} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn\Delta\omega} \left( e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_s}^{-\omega_p} - e^{j\omega n} \Big|_{\omega_p}^{\omega_s} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn\Delta\omega} [\cos(-\omega_p n) - \cos(-\omega_s n) + j \sin(-\omega_p n) - j \sin(-\omega_s n) \\ &\quad - \cos(\omega_s n) + \cos(\omega_p n) - j \sin(\omega_s n) + j \sin(\omega_p n)] \\ &= \frac{1}{2\pi j n \Delta\omega} (2 \cos \omega_p n - 2 \cos \omega_s n). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin[(\alpha + \beta)/2] \sin[(-\alpha + \beta)/2]$ , y eligiendo  $\alpha = \omega_s n$  y  $\beta = \omega_p n$ , resulta

$$g[n] = \frac{1}{2\pi j n \Delta\omega} (2 \cos \omega_p n - 2 \cos \omega_s n) = \frac{2}{\pi j n \Delta\omega} \sin\left(\frac{\omega_s + \omega_p}{2} n\right) \sin\left(\frac{\omega_s - \omega_p}{2} n\right).$$

Definiendo

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p, \quad \omega_c = (\omega_s + \omega_p)/2 \quad (12.3)$$

resulta

$$g[n] = \frac{2}{\pi j n \Delta\omega} \sin(\omega_c n) \sin(\Delta\omega n),$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} h_{LP}[n] &= \frac{j}{n} g[n] = \frac{2}{\pi n^2 \Delta\omega} \sin(\omega_c n) \sin(\Delta\omega n/2) = \frac{\sin(\Delta\omega n/2)}{\Delta\omega n/2} \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \\ &= \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} n\right) \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right), \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

El caso  $n = 0$  se analiza más fácilmente a partir de  $H_{LP}(e^{j\omega})$ , ya que

$$h_{LP}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega$$

es el área bajo la curva de respuesta en frecuencia de  $H_{LP}(e^{j\omega})$ , dividida por  $2\pi$ . Entonces,

$$h_{LP}[0] = \frac{2\omega_p + (\omega_s - \omega_p)}{2\pi} = \frac{\omega_p + \omega_s}{2\pi} = \frac{\omega_c}{\pi},$$

y en consecuencia, la respuesta impulsiva del filtro pasabajos modificado es

$$h_{LP}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}n\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right).$$

La respuesta impulsiva del filtro pasabajos con banda de transición suavizada es la respuesta impulsiva de un filtro pasabajos ideal con frecuencia de corte  $\omega_c$  [ $h_{PBI}[n] = \omega_c/\pi \operatorname{sinc}(\omega_c n/\pi)$ ] pesada por una función temporal  $w[n] = \operatorname{sinc}[\Delta\omega n/(2\pi)]$ .

El filtro diseñado no es causal, y su respuesta impulsiva es doblemente infinita. Si se requiere un filtro de longitud  $N$  (por simplicidad se supone que  $N$  es impar), la expresión de la respuesta impulsiva es

$$h_{LP}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta\omega}{2\pi}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right] \operatorname{sinc}\left[\frac{\omega_c}{\pi}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right].$$

Se pueden obtener transiciones más suaves si se utilizan polinomios interpoladores (*splines*) de mayor orden para unir las bandas de paso y de rechazo. La respuesta impulsiva de un filtro diseñado con una polinomio de orden  $P$  es

$$h_{LP}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \left[ \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi P}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right) \right]^P \operatorname{sinc}\left[\frac{\omega_c}{\pi}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right], \quad (12.4)$$

con  $0 \leq n \leq N-1$ . En general, el efecto de  $P$  en la respuesta en frecuencia no es obvio. Para un filtro de longitud  $N$  y banda de transición  $\Delta\omega$  el valor óptimo de  $P$  que minimiza la integral cuadrática del error (Burrus, Soewito y Gopinath, 1992) es

$$P = \left\lceil \frac{\Delta\omega}{4\pi}(N-1) \right\rceil, \quad (12.5)$$

donde  $\lceil \cdot \rceil$  es la función *techo* (el entero superior más próximo). Esta expresión muestra que para mantener un  $\Delta\omega$  dado, el aumento de la “suavidad” de la transición (un  $P$  mayor) implica un incremento de la longitud  $N$  del FIR. Otra forma de ver el mismo fenómeno es que para una interpolación de mayor orden, el ancho de banda efectivo del filtro es menor (por ejemplo, una interpolación de segundo orden impone que la derivada del módulo de la respuesta en frecuencia en las frecuencias esquina de la banda de paso y la banda de rechazo sea nula, ensanchando las bandas de paso y de rechazo, y angostando la banda de transición). Una interpolación de orden alto con una banda de transición  $\Delta\omega$  dada es equivalente a una interpolación de menor orden con una banda de transición más angosta.

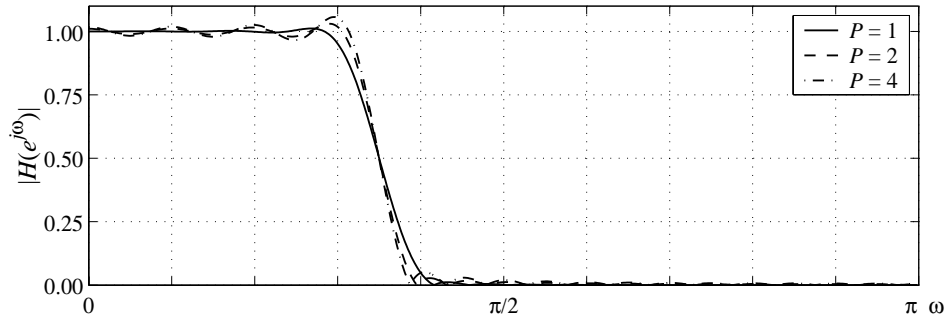
### EJEMPLO 12.1 Diseño de un filtro pasabajos

Se desea diseñar un filtro FIR pasabajos con  $\omega_p = 0.3\pi$  y  $\omega_s = 0.4\pi$ , y  $N = 41$ . De (12.3) resulta  $\Delta\omega = 0.10\pi$ , y  $\omega_c = 0.35\pi$ . Aplicando (12.11), se encuentra que el  $P$  óptimo es  $P = 1$ , y de (12.10) se tiene que

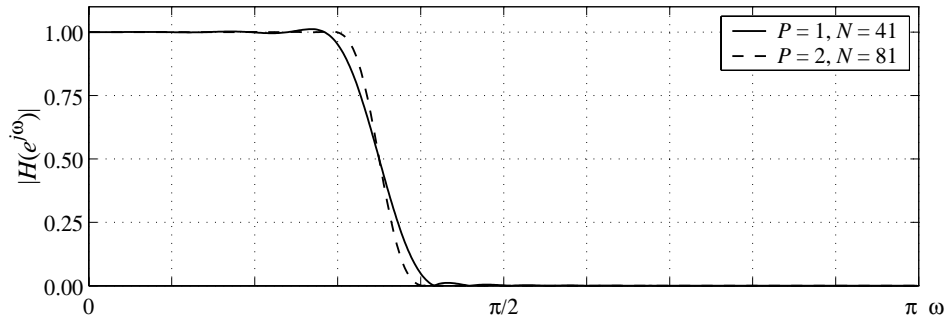
$$h_{LP}^{(1)}[n] = 0.35 \operatorname{sinc}[0.10(n-20)] \operatorname{sinc}[0.35(n-20)].$$

Para comparar, se calculan filtros utilizando polinomios interpoladores de segundo orden ( $P = 2$ ) y de cuarto orden ( $P = 4$ ), obteniéndose

$$\begin{aligned} h_{LP}^{(2)}[n] &= 0.35 \{\operatorname{sinc}[0.050(n-20)]\}^2 \operatorname{sinc}[0.35(n-20)], \\ h_{LP}^{(4)}[n] &= 0.35 \{\operatorname{sinc}[0.025(n-20)]\}^4 \operatorname{sinc}[0.35(n-20)], \end{aligned}$$



**Fig. 12.2:** Respuesta en frecuencia para  $N = 41$ , y  $P = 1, 2, 4$ .



**Fig. 12.3:** Comparación de la respuesta en frecuencia para  $N = 41$ ,  $P = 1$  y  $N = 81$ ,  $P = 2$ .

con  $0 \leq n \leq 40$ . En la Fig. 12.2 se comparan las respuestas en frecuencia de los filtros, observándose que la respuesta con  $P = 2$  tiene mayor ondulación que la de  $P = 1$ , pero menor que la de  $P = 4$ . Aumentando la longitud del FIR se puede obtener una menor ondulación en la banda de paso, pues de acuerdo con (12.11) el  $P$  óptimo es mayor. En la Fig. 12.3 se comparan la respuesta en frecuencia del filtro de longitud  $N = 41$ , y  $P = 1$  con la respuesta del filtro de longitud  $N = 81$ ,  $P = 2$ , y puede apreciarse que efectivamente la ondulación es menor.  $\square$

## 12.3 Ejemplos de diseño

### 12.3.1 Filtros tipo I

Se desea diseñar un filtro FIR pasa altos, que cumpla con las siguientes especificaciones:

banda de paso:	$3\pi/4$ a $\pi$ ,
banda de rechazo:	$0$ a $5\pi/8$ ,
atenuación máxima en la banda de paso:	$\pm 0.08$ dB ( $1 \pm 0.01$ ),
atenuación mínima en la banda de rechazo:	$40$ dB ( $0.01$ ),

#### EJEMPLO 12.2 Diseño utilizando ventanas fijas

El filtro se diseña utilizando las ventanas rectangular, de von Hann, Hamming y Blackman. El orden  $N$  se estima según tablas (Sección 12.8)

Ventana	$\omega_s - \omega_p$	Orden $N$	$M = N/2$
Rectangular (boxcar)	$4\pi/(N+1)$	31	15
Hann	$8\pi/N$	65	32
Hamming	$8\pi/N$	65	32
Blackman	$12\pi/N$	97	48

La respuesta impulsiva  $h_d[n]$  del filtro prototipo (ideal, no causal) es

$$h_d[n] = \delta[n] - \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right),$$

donde  $\omega_c = (\omega_s + \omega_p)/2$ . La respuesta del filtro truncado y causalizado es  $h[n] = w[n - (N - 1)/2]h_d[n - (N - 1)/2]$ , donde  $w[n]$  es la respuesta impulsiva de alguna de las ventanas citadas en la tabla. En general, salvo para el diseño con ventana rectangular, los demás filtros cumplen holgadamente con las especificaciones.  $\square$

### EJEMPLO 12.3 Diseño con ventana de Kaiser

La ventana de Kaiser es una ventana ajustable que permite regular la amplitud de los lóbulos laterales a través de un parámetro, y el ancho del lóbulo principal de acuerdo al largo de la ventana,

$$w[n] = \frac{I_0\left[\beta\sqrt{1 - \left(\frac{n - N/2}{N/2}\right)^2}\right]}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

donde  $I_0$  es la función de Bessel modificada de primer tipo, definida por

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \right].$$

El parámetro  $\beta$  se calcula como

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & A > 50, \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50, \\ 0, & A < 21, \end{cases}$$

donde  $A$  es la atenuación deseada en la banda de rechazo y el orden  $N$  del filtro se estima según

$$N = \begin{cases} \frac{A - 7.95}{2.285 \Delta\omega} + 1, & A > 21 \text{ dB}, \\ \frac{5.794}{\Delta\omega} + 1, & A \leq 21 \text{ dB}. \end{cases}$$

En MATLAB, el orden puede estimarse con

```
[M,wn,Beta]=kaiserord([ws/pi,wp/pi],[0,1],[0.01 0.01])
```

Usando la función de MATLAB se encuentra que  $\beta = 3.3953$ , y el largo  $N$  del filtro es  $N = 37$ . En las figuras puede apreciarse que el diseño calculado con la ventana de Kaiser es (hasta ahora) el que cumple más ajustadamente las especificaciones, y también el de menor orden.  $\square$

### EJEMPLO 12.4 Diseño con bandas de transición suave

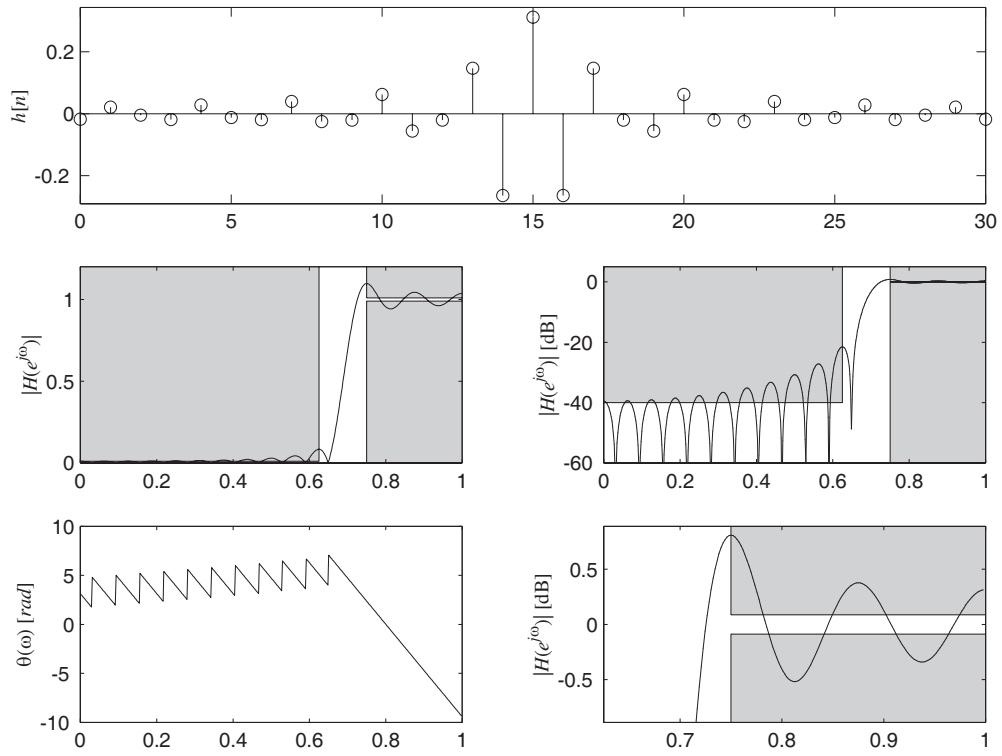
La idea que rige el diseño de estos filtros es suponer que la zona de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo no es abrupta, sino que sigue una función suave (polinomio interpolador o *spline* de orden  $P$ ). En este caso, la respuesta impulsiva del filtro prototipo (ideal, no causal) está dada por

$$h_d[n] = \delta[n] - \frac{\omega_c}{\pi} \left[ \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi P}n\right) \right]^P \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right),$$

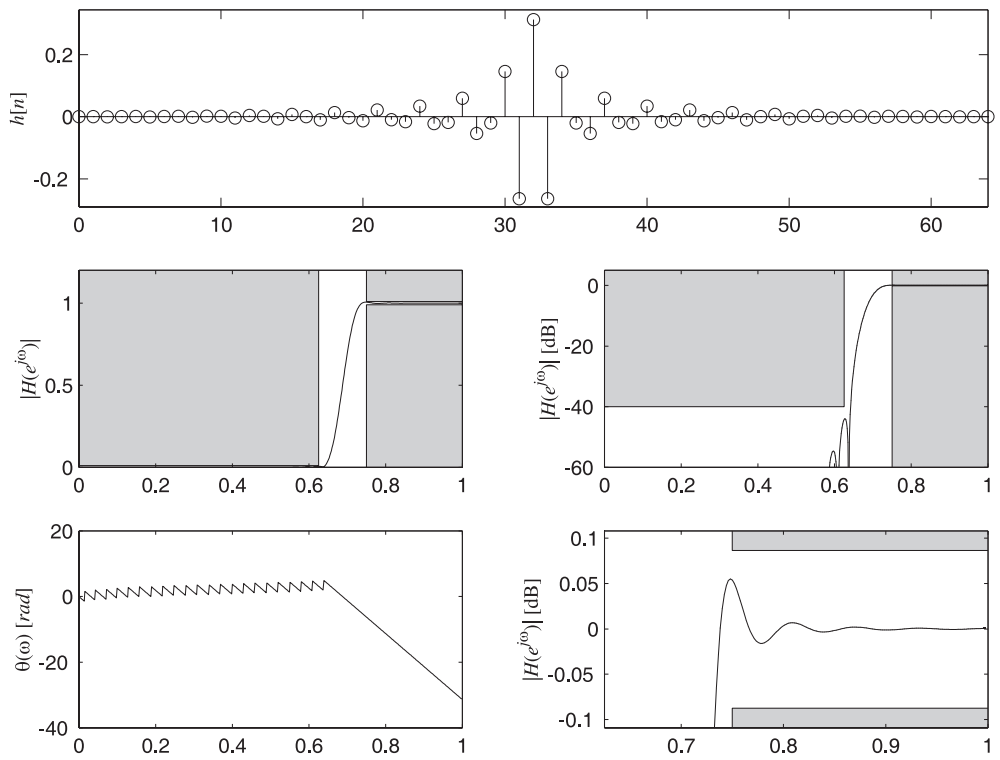
donde se ha elegido  $P = 2$  (polinomio interpolador o *spline* de segundo orden).  $\square$

### EJEMPLO 12.5 Diseño óptimo (algoritmo de Remez)

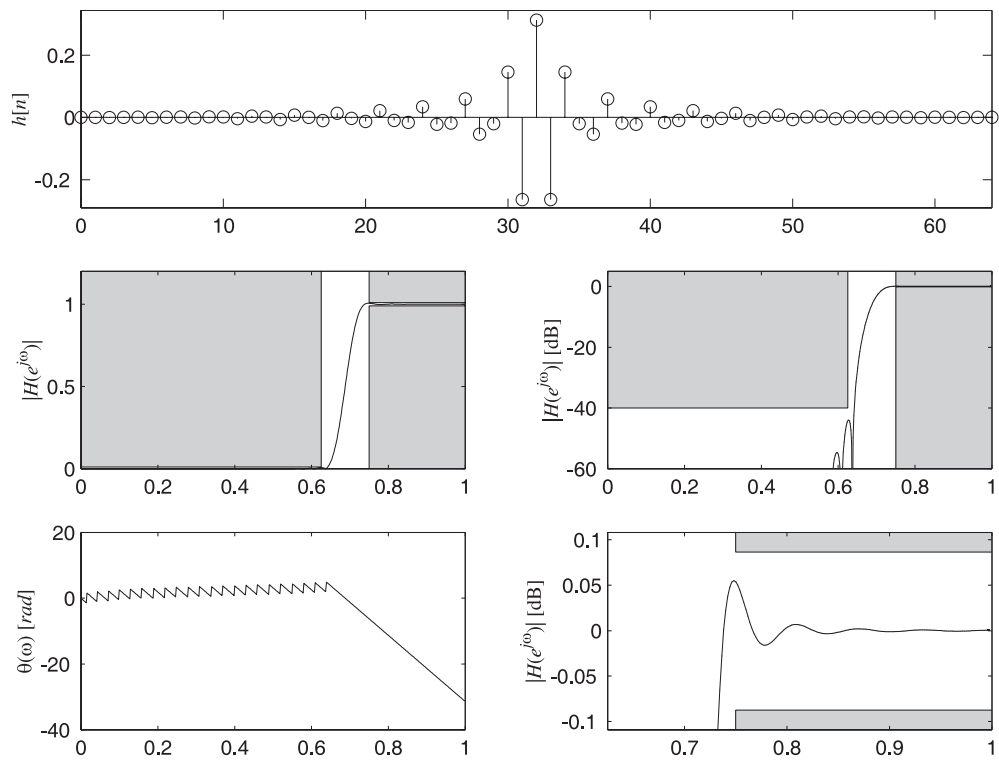
El algoritmo de Remez permite obtener el filtro que cumple más ajustadamente con las especificaciones de diseño con la menor longitud. En la Sección 12.5 se comentan algunos detalles del cálculo usando MATLAB.  $\square$



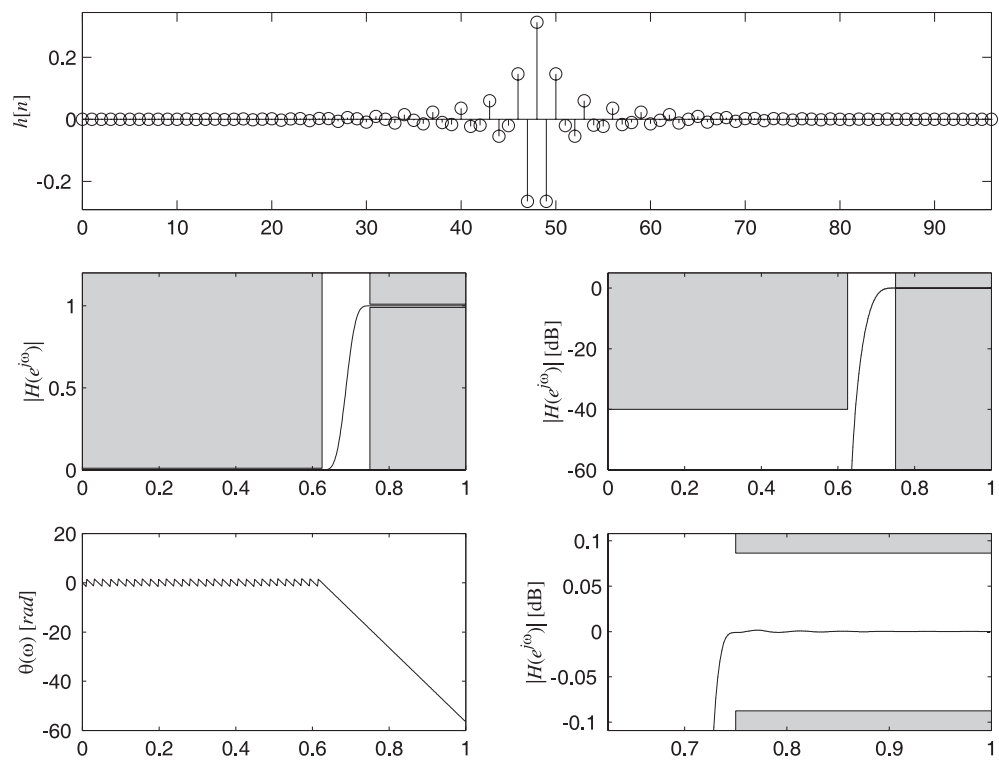
**Fig. 12.4:** Diseño utilizando ventana rectangular ( $N = 31$ ).



**Fig. 12.5:** Diseño utilizando una ventana de von Hann ( $N = 65$ ).

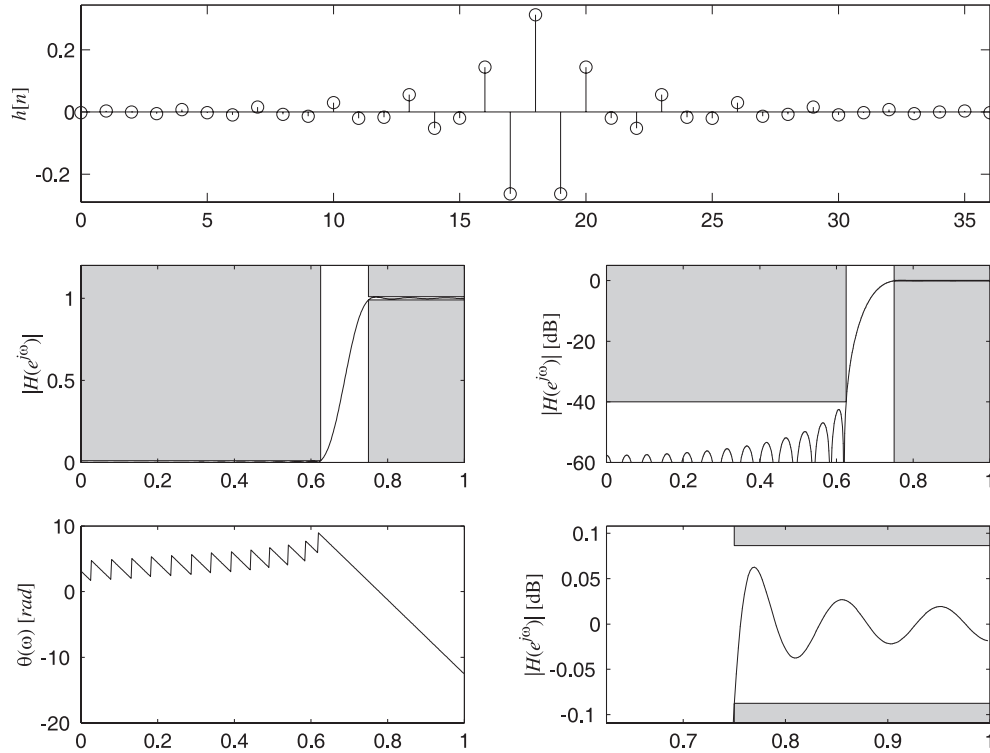


**Fig. 12.6:** Diseño utilizando una ventana de Hamming ( $N = 65$ ).

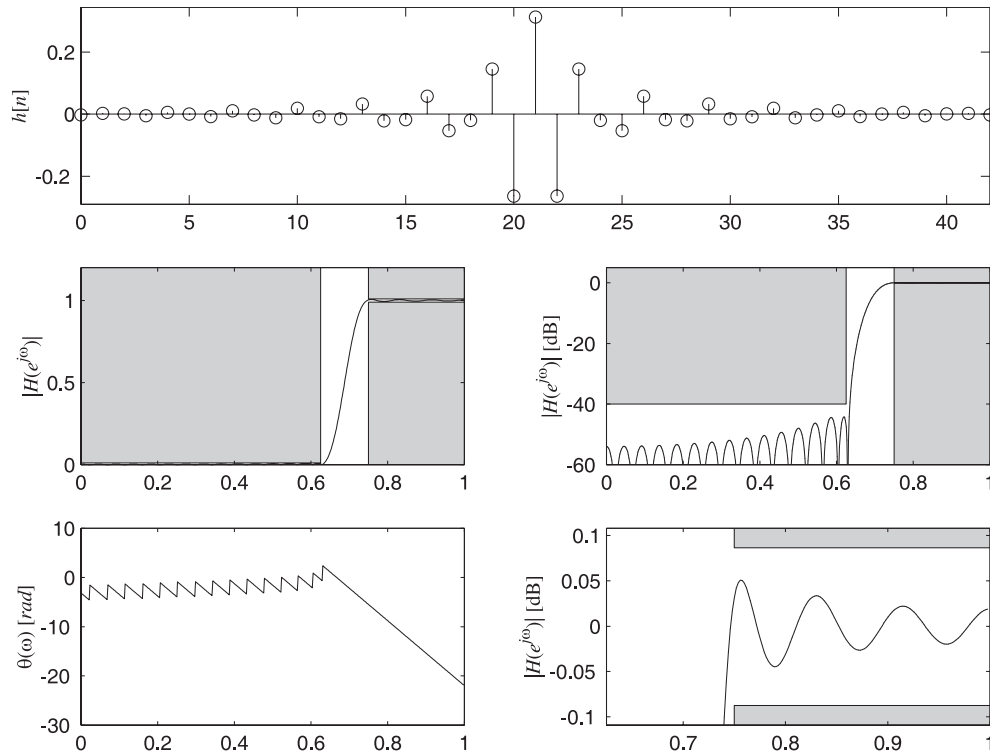


**Fig. 12.7:** Diseño utilizando una ventana de Blackman ( $N = 97$ ).

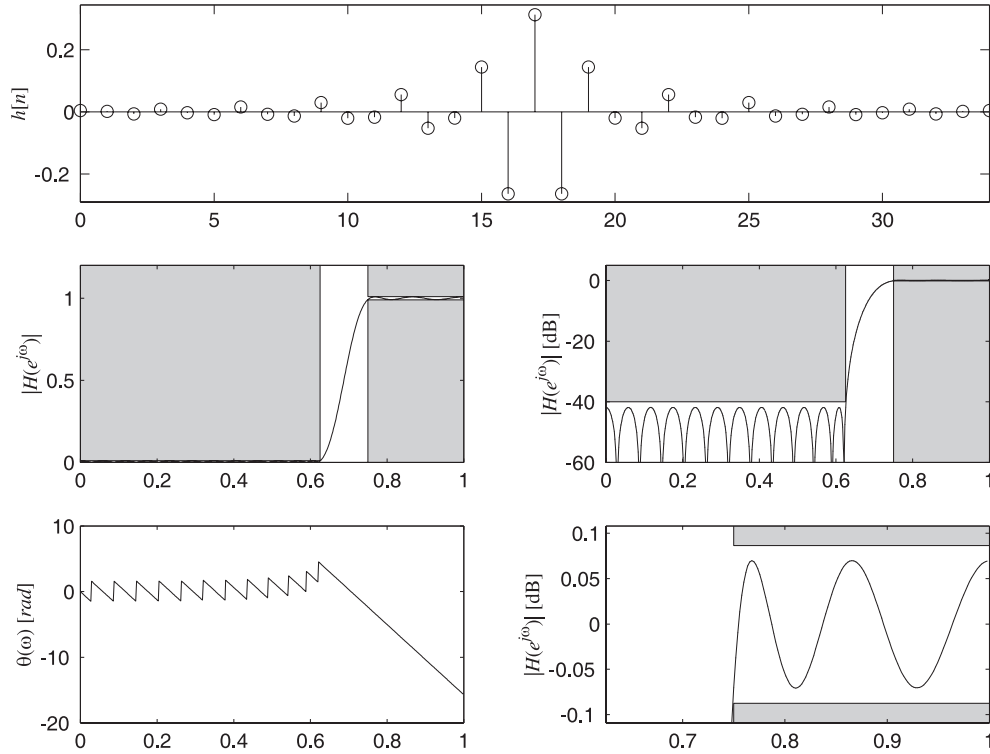




**Fig. 12.8:** Diseño en base a la ventana de Kaiser ( $\beta = 3.3953$ ,  $N = 37$ ).



**Fig. 12.9:** Diseño utilizando banda de transición suavizadas ( $N = 43$ ).

Fig. 12.10: Diseño por métodos óptimos ( $N = 35$ ).

### 12.3.2 Comandos MATLAB utilizados para generar los filtros

```
% Ventana RECTANGULAR
M      = 15;
N      = [-M:M];
hn     = -wc/pi*sinc(N*wc/pi);
hn(M+1) = 1-wc/pi;

% Ventana HANN
M      = 32;
N      = [-M:M];
hn     = -wc/pi*sinc(N*wc/pi);
hn(M+1) = 1-wc/pi;
hn     = hn.*hanning(2*M+1)'; % ventaneo

% Ventana HAMMING
M      = 32;
N      = [-M:M];
hn     = -wc/pi*sinc(N*wc/pi);
hn(M+1) = 1-wc/pi;
hn     = hn.*hamming(2*M+1)'; % ventaneo

% Ventana BLACKMANN
M      = 48;
N      = [-M:M];
hn     = -wc/pi*sinc(N*wc/pi);
hn(M+1) = 1-wc/pi;
hn     = hn.*blackman(2*M+1)'; % ventaneo

% ventana KAISER
[M,wn,Beta] = kaiserord([ws/pi,wp/pi],[0,1],[0.01 0.01])
N          = [-M:M];
hn         = -wc/pi*sinc(N*wc/pi);
hn(M+1)    = 1-wc/pi;
hn         = hn.*kaiser(2*M+1,Beta)';

% Filtro con transición suave;
M          = ceil((4*pi/(wp-ws)-1)/2);
M          = M+4; % aumentar M para cumplir las specs.
N          = [-M:M]; P = 2;0.624*(wp-ws)*2*M;
```

```

hn          = -(sinc((wp-ws)/(2*pi*P)*N)). P.*wc/pi.*sinc(N*wc/pi);
hn(M+1)     = 1-wc/pi;

% Fir Optimo (REMEZ)
[M,fo,ao,w] = remezord([ws/pi,wp/pi],[0,1],[0.01 0.01]);
M           = M+2; % (el orden es menor que el necesario)
hn          = remez(M,fo,ao,w);

```

### 12.3.3 Filtros tipo III, IV

En esta sección se diseñarán filtros FIR derivadores y transformadores de Hilbert, de orden impar (longitud  $N$  par, tipo III) y de orden par (longitud  $N$  impar, tipo IV).

#### EJEMPLO 12.6 Diseño de un derivador

La función transferencia del filtro derivador ideal es

$$H_d(e^{j\omega}) = j\omega, \quad |\omega| < \pi,$$

sobreentendiéndose que se repite periódicamente. La respuesta impulsiva del filtro ideal es

$$\begin{aligned}
 h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\omega e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\omega}{n} - \frac{1}{jn^2} \right) e^{j\omega n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi}{n} e^{j\pi n} + \frac{\pi}{n} e^{-j\pi n} \right) - \frac{1}{2\pi j n^2} (e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}) \\
 &= \frac{1}{2\pi n} 2 \cos \pi n - \frac{1}{2\pi j n^2} 2j \sin \pi n = \frac{\cos \pi n}{n} - \frac{1}{n} \operatorname{sinc}(n),
 \end{aligned}$$

que vale para el caso en que  $n \neq 0$ ; es inmediato verificar que  $h[0] = 0$ . En el caso de la respuesta ideal, no causal, es decir  $-\infty < n < \infty$ , la expresión de la respuesta impulsiva se simplifica a

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

La respuesta impulsiva truncada a  $N$  muestras y causalizada es

$$h[n] = \frac{\cos \pi \left[ n - \frac{N-1}{2} \right]}{n - \frac{N-1}{2}} - \frac{1}{n - \frac{N-1}{2}} \operatorname{sinc} \left[ n - \frac{N-1}{2} \right],$$

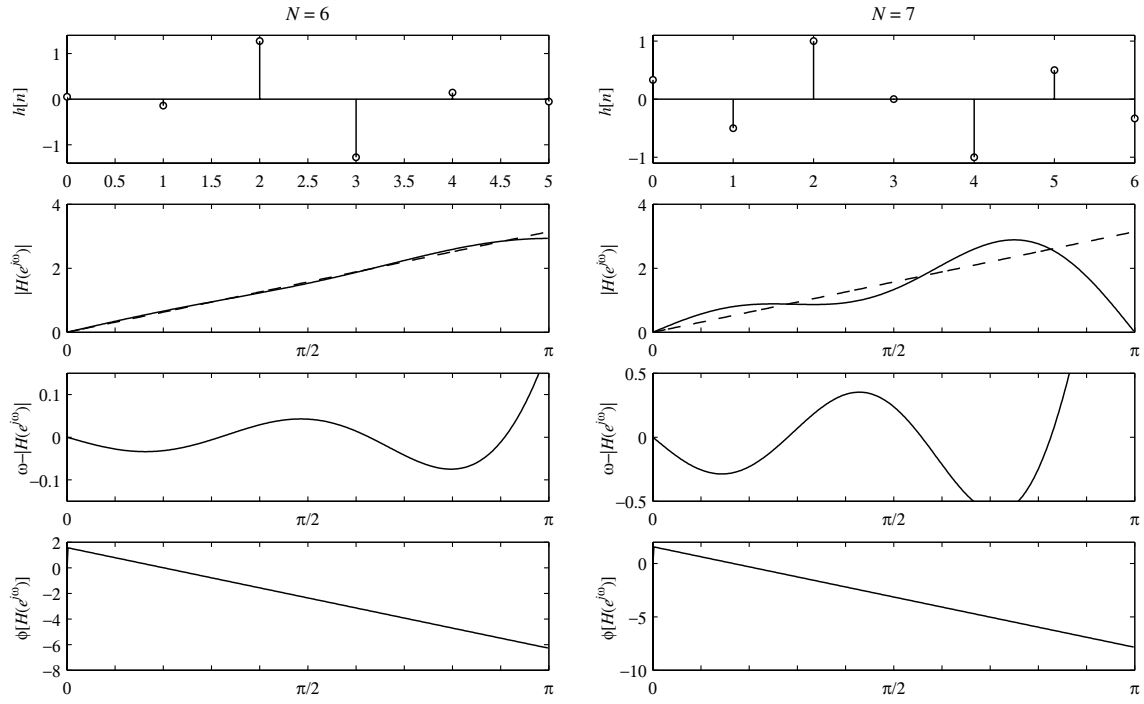
si  $n \neq (N-1)/2$ , y que según sea  $N$  impar o par se puede expresar como

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\cos \pi \left[ n - \frac{N-1}{2} \right]}{n - \frac{N-1}{2}} = \frac{(-1)^{n - \frac{N-1}{2}}}{n - \frac{N-1}{2}}, & \text{si } N \text{ es impar, } n \neq (N-1)/2, \\ -\frac{1}{n - \frac{N-1}{2}} \operatorname{sinc} \left[ n - \frac{N-1}{2} \right] = \frac{(-1)^{n - \frac{N}{2} - 1}}{\pi \left( n - \frac{N-1}{2} \right)^2}, & \text{si } N \text{ es par.} \end{cases} \quad (12.6)$$

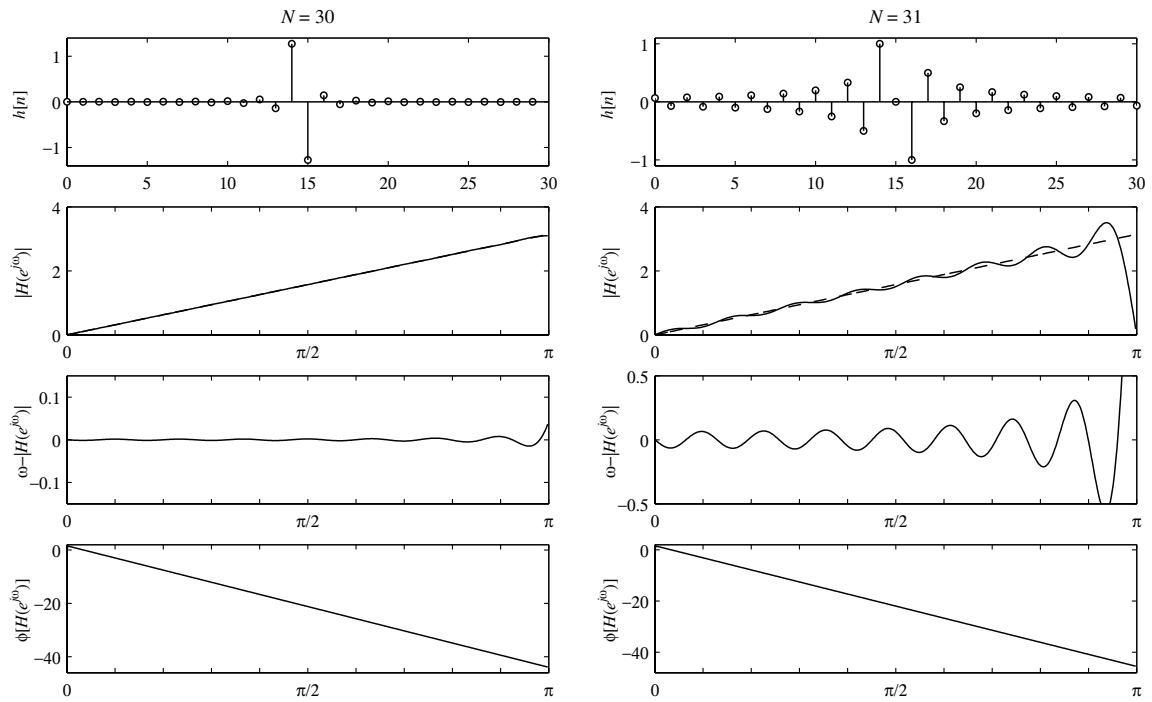
Para el caso en que  $N$  es impar se verifica que  $h[(N-1)/2] = 0$ .

Si  $N$  es impar, el orden  $M = N - 1$  del filtro es par y el filtro FIR es Tipo III. Por lo tanto tiene un cero en  $\omega = 0$  y en  $\omega = \pi$  lo que afecta su comportamiento como derivador, ya que el cero en  $\omega = \pi$  introduce una limitación de banda. Sin embargo, en algunas aplicaciones este es un efecto deseable.

Si  $N$  es par, el orden  $M = N - 1$  es impar, y el filtro resulta de tipo IV, que presenta un cero sólo en  $\omega = 0$ . Este filtro copia mejor la respuesta en frecuencia deseada, como se puede apreciar



**Fig. 12.11:** Filtro FIR derivador tipo IV (izquierda) y tipo III (derecha).



**Fig. 12.12:** Filtro FIR derivador tipo IV (izquierda) y tipo III (derecha).

en la columna de la izquierda de la Fig. 12.11, que muestra la respuesta impulsiva, el módulo de la respuesta en frecuencia, el error de la respuesta en frecuencia del filtro vs. la respuesta ideal, y la respuesta en fase para  $N = 6$ . Observe que la fase del filtro comienza en  $\pi/2$  rad. A fines de comparación, en la columna de la derecha de la Fig. 12.11 se ilustran las mismas respuestas para un derivador de largo  $N = 7$ . Es evidente la desmejora la respuesta en frecuencia debido al cero en  $\omega = \pi$ .

La Fig. 12.12 muestra la respuesta de derivadores de longitud  $N = 30$  y  $N = 31$ . Es interesante notar que el error de aproximación del derivador de orden  $N = 31$  es similar al de orden  $N = 6$ . Para reducir aún más el ripple de la aproximación, los coeficientes calculados a partir de las expresiones (12.6) pueden pesarse por alguna ventana adecuada.  $\square$

### EJEMPLO 12.7 Diseño de un transformador de Hilbert

La respuesta en frecuencia del transformador de Hilbert ideal es

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} j, & -\pi < \omega < 0, \\ -j, & 0 < \omega < \pi, \end{cases}$$

de modo que la respuesta impulsiva del filtro ideal no causal para  $n \neq 0$  es

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} -j e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{j}{2\pi j n} e^{j\omega n} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{-j}{2\pi j n} e^{j\omega n} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi n} (1 - e^{-j\pi n} - e^{j\pi n} + 1) = \frac{1 - \cos \pi n}{\pi n}. \end{aligned}$$

Es sencillo verificar que  $h[0] = 0$ . Notando que  $\cos \pi n = (-1)^n$ , la respuesta impulsiva puede escribirse

$$h_d[n] = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{2}{\pi n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (-\infty < n < \infty)$$

La truncación a  $N$  muestras y la causalización resultan en

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1 - (-1)^{n - \frac{N-1}{2}}}{\pi(n - \frac{N-1}{2})}, & 0 \leq n \leq N-1, n \neq (N-1)/2, \\ 0, & n = (N-1)/2. \end{cases} \quad \text{si } N \text{ es impar,} \quad (12.7)$$

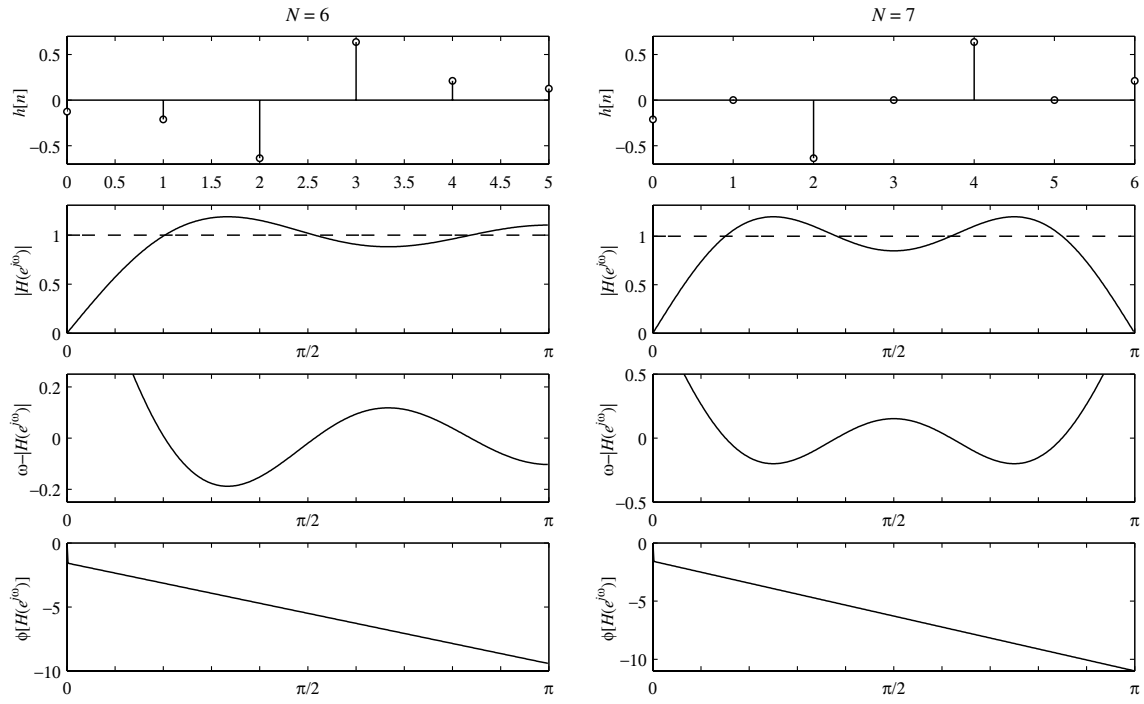
$$h[n] = \frac{1}{\pi(n - \frac{N-1}{2})}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad \text{si } N \text{ es par.} \quad (12.8)$$

pues  $\cos \pi [n - (N-1)/2] = 0$  si  $N$  es par.

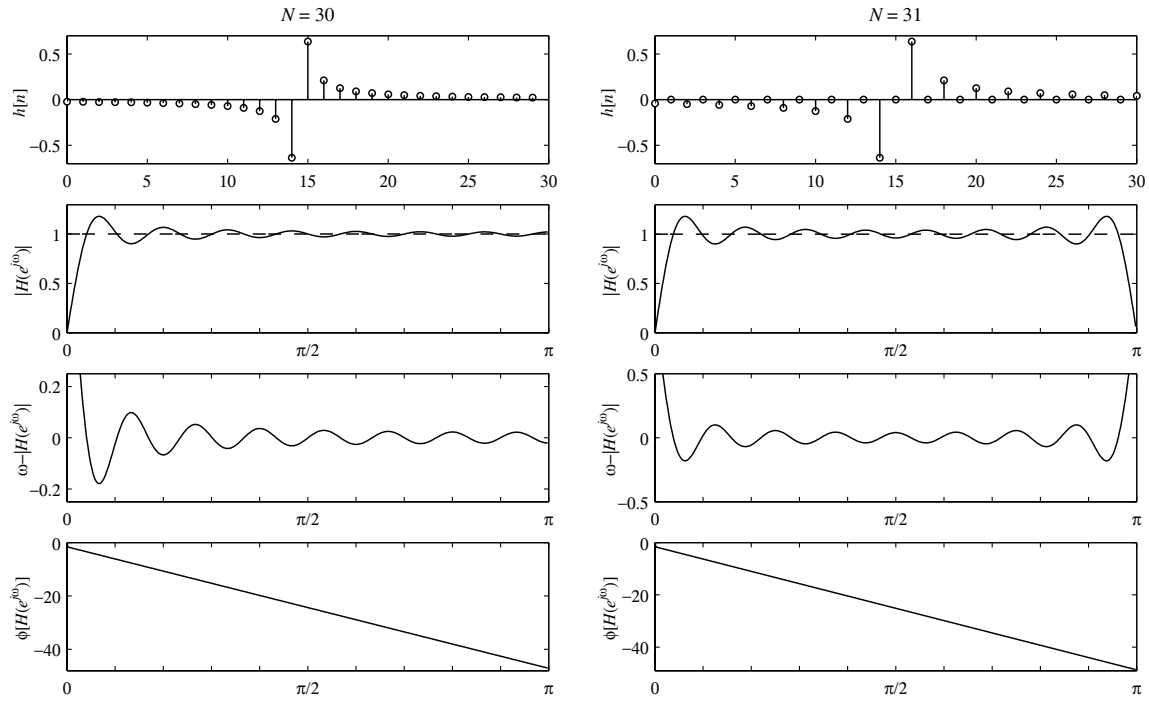
Según sea  $N$  impar o par se obtienen filtros FIR tipo III o IV, respectivamente, que tienen un cero en  $\omega = 0$ ; por lo tanto, el filtro implementable no puede aproximar exactamente la respuesta del transformador ideal (que tiene módulo unitario), sino sólo sobre un cierto ancho de banda que depende del orden del filtro. Si  $N$  es impar el sistema tiene otro cero en  $\omega = \pi$ , lo que desmejora aún más la respuesta. Sin embargo, el análisis de (12.7) muestra que la mitad de las muestras de la respuesta impulsiva del sistema con  $N$  impar son nulas, por lo que el costo computacional un filtro con  $N$  impar es el mismo que uno con  $N$  par de largo mitad.

La Fig. 12.13 ilustra la respuesta de un transformador de Hilbert tipo IV ( $N = 6$ , columna izquierda) y uno tipo III con  $N = 7$ . El módulo de la respuesta en frecuencia revela para el filtro tipo IV el ancho de banda útil es mayor que para el filtro tipo III por la ausencia del cero en  $\omega = \pi$ . La magnitud del error de aproximación es similar para los dos tipos de filtros. La curva de fase es lineal en función de  $\omega$ , con pendiente  $(n-1)/2$ , y comenzando en  $-\pi/2$  para  $\omega = 0$ . La Fig. 12.14 muestra la respuesta de transformadores de longitud  $N = 30$  (columna izquierda) y  $N = 31$  (columna derecha), que se comportan como transformadores de Hilbert sobre un ancho de banda más amplio.

En cualquier caso, la ondulación o *ripple* en la banda de paso puede disminuirse aplicando sobre los coeficientes (12.7) o (12.8) del transformador una ventana apropiada, a costa de disminuir aún más el ancho de banda útil del filtro.  $\square$



**Fig. 12.13:** Filtro FIR transformador de Hilbert tipo IV (izquierda) y tipo III (derecha).



**Fig. 12.14:** Filtro FIR transformador de Hilbert tipo IV (izquierda) y tipo III (derecha).

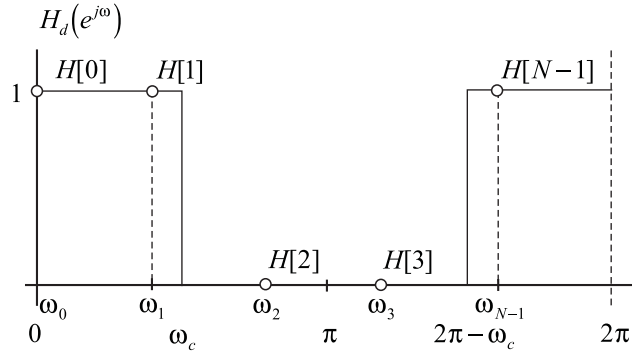


Fig. 12.15: Especificaciones del filtro prototipo.

## 12.4 Método de muestreo en frecuencia

Una manera sencilla de diseñar filtros FIR es a partir de la especificación de la respuesta en frecuencia deseada  $H_d(e^{j\omega_k})$  para un conjunto de frecuencias  $\omega_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Ya que la respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\omega n}$$

de un filtro FIR de longitud  $N$  es un polinomio de grado  $N-1$  en  $e^{-j\omega}$  con  $N$  coeficientes  $h[n]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , la especificación de la respuesta deseada en  $N$  frecuencias  $\omega_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  distintas permite determinar de manera única los coeficientes  $h[n]$  desconocidos.

Si la magnitud de la respuesta en frecuencia deseada a la frecuencia  $\omega_k$ ,  $H_d(e^{j\omega_k})$  se nota  $H[k]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} H[0] &= H_d(e^{j\omega_0}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega_0} + \dots + h[N-1]e^{-j(N-1)\omega_0}, \\ H[1] &= H_d(e^{j\omega_1}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega_1} + \dots + h[N-1]e^{-j(N-1)\omega_1}, \\ &\vdots \\ H[k] &= H_d(e^{j\omega_k}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega_k} + \dots + h[N-1]e^{-j(N-1)\omega_k}, \\ &\vdots \\ H[N-1] &= H_d(e^{j\omega_{N-1}}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega_{N-1}} + \dots + h[N-1]e^{-j(N-1)\omega_{N-1}}, \end{aligned}$$

que puede expresarse en forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H[0] \\ H[1] \\ \vdots \\ H[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_0} & \dots & e^{-j(N-1)\omega_0} \\ 1 & e^{-j\omega_1} & \dots & e^{-j(N-1)\omega_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\omega_{N-1}} & \dots & e^{-j(N-1)\omega_{N-1}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}}$$

y entonces,

$$\mathbf{h} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{H}.$$

Para el caso de un filtro FIR de fase lineal el cálculo podría refinarse aún mas debido a la simetría de  $h[n]$ ; por ejemplo, podrían especificarse solamente las frecuencias comprendidas

entre 0 y  $\pi$ , de manera de calcular sólo la mitad de las muestras de la respuesta impulsiva  $h[n]$  del filtro real.

Las frecuencias donde se “muestra” la respuesta en frecuencia deseada son arbitrarias, pero una simplificación importante –evitar la inversión de la matriz  $\mathbf{W}$ – se obtiene si las  $N$  frecuencias  $\omega_k$  están equiespaciadas. Esto es, si

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

resulta

$$\begin{aligned} H[k] &= H_d(e^{j\omega_k}) = H_d\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) \\ &= h[0] + h[1]e^{-j\frac{2\pi}{N}k} + h[2]e^{-j\frac{2\pi}{N}k^2} + \dots + h[N-1]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-1)}, \end{aligned}$$

que puede escribirse en forma más compacta como

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (12.9)$$

que es la TDF de  $h[n]$ . Por lo tanto, los coeficientes  $h[n]$  del filtro FIR pueden computarse a partir de la TDF inversa de  $H[k]$ . En efecto, multiplicando (12.9) por el factor  $e^{j\frac{2\pi}{N}km}$ , se tiene

$$H[k] e^{j\frac{2\pi}{N}km} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} e^{j\frac{2\pi}{N}km},$$

y sumando para  $k = 0, 1, \dots, N-1$

$$\sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j\frac{2\pi}{N}km} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}.$$

Intercambiando el orden de la suma,

$$\sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j\frac{2\pi}{N}km} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}\right)^k. \quad (12.10)$$

Analizando la segunda sumatoria, se observa que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}\right)^k = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)N}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}} = \frac{1 - e^{-j2\pi(n-m)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}}.$$

Si  $n-m \neq rN$ , para  $r$  entero, la suma da cero pues  $e^{j2\pi\ell} = 1$ . Sin embargo, si  $n-m = rN$ , tanto el numerador como el denominador se anulan. Para analizar que sucede en este caso, es más sencillo analizar la sumatoria, ya que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}\right)^k \Big|_{n-m=rN} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}rN}\right)^k = \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = N$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-m)}\right)^k = \begin{cases} N, & n-m = rN \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



o bien

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN], \quad (12.11)$$

para  $r$  entero. Volviendo a la expresión (12.10), limitando los valores de  $m$  al rango  $0 \leq m \leq N-1$ , se tiene que

$$\sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j\frac{2\pi}{N}km} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] N \delta[n - m] = Nh[m].$$

Cambiando nuevamente  $n$  por  $m$ , finalmente se obtiene

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (12.12)$$

### 12.4.1 Relación entre $h_d[n]$ y $h[n]$

La relación entre la respuesta impulsiva  $h_d[n]$  del filtro ideal o prototipo con respuesta en frecuencia  $H_d(e^{j\omega})$  y la respuesta impulsiva  $h[n]$  del filtro obtenido muestreando  $H_d(e^{j\omega})$  en determinadas frecuencias  $\omega_k = 2\pi k/N$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  se puede establecer como sigue. El filtro prototipo tiene una respuesta en frecuencia

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_d[\ell] e^{-j\omega\ell},$$

donde

$$h_d[\ell] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega\ell} d\omega.$$

Por otra parte, en cada una de las frecuencias  $\omega_k$ , se tiene

$$H_d(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_k} = H[k] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_d[\ell] e^{-j\frac{2\pi}{N}k\ell},$$

y de acuerdo a la expresión (12.12),

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_d[\ell] e^{-j\frac{2\pi}{N}k\ell} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Intercambiando el orden de las sumatorias,

$$h[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_d[\ell] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(\ell-n)},$$

donde la segunda sumatoria es la conocida expresión (12.11). Por lo tanto,

$$h[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d[n + rN]. \quad (12.13)$$

La expresión anterior indica que  $h[n]$  es la suma de infinitas réplicas de  $h_d[n]$ , donde cada réplica está desplazada un múltiplo entero de  $N$  muestras, observando el resultado de la suma solamente en el intervalo  $0 \leq n \leq N-1$ . Por lo tanto, si  $h_d[n]$  es una sucesión de longitud finita de longitud menor o igual que  $N$ , entonces  $h[n] = h_d[n]$  para  $0 \leq n \leq N-1$ . En cambio, si  $h_d[n]$  es una sucesión de longitud infinita existirá un *aliasing temporal* de muestras de  $h_d[n]$  de manera que  $h[n]$  puede ser muy diferente a  $h_d[n]$ .

### 12.4.2 Algunas consideraciones sobre la especificación de la respuesta deseada

En la presentación anterior se supuso que las especificaciones de la respuesta en frecuencia deseada  $H_d(e^{j\omega_k})$  son adecuadas al tipo de respuesta impulsiva que se busca: por ejemplo, si se desea que la respuesta impulsiva  $h[n]$  sea real, el módulo  $|H_d(e^{j\omega_k})|$  de la respuesta en frecuencia deberá ser una función par, y la fase  $\arg[H_d(e^{j\omega_k})]$  una función impar.

Una manera sencilla de diseñar filtros es especificando la respuesta en frecuencia como una función *real* (es decir, con fase nula) que corresponde a una respuesta impulsiva  $h_d[n]$  simétrica respecto a  $n = 0$ , y posiblemente con  $-\infty \leq n \leq \infty$ . Con el cálculo con la TDF inversa se obtiene una respuesta impulsiva  $h[n]$  de longitud finita definida para  $0 \leq n \leq N-1$ . Debido a la periodicidad de la TDF las últimas  $(N-1)/2$  muestras, si  $N$  es impar, o las primeras  $N/2$  muestras si  $N$  es par, respectivamente, corresponden a las muestras para  $n < 0$  de la respuesta no causal  $h_d[n]$ . Por lo tanto, de la causalización de la respuesta impulsiva resulta que

$$h_c[n] = \begin{cases} h[n + (N-1)/2], & 0 \leq n < (N-1)/2, \\ h[n - (N-1)/2], & (N-1)/2 \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (N \text{ impar})$$

$$h_c[n] = \begin{cases} h[n + N/2], & 0 \leq n < N/2, \\ h[n - N/2], & N/2 \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (N \text{ par})$$

donde  $h[n]$  es el resultado de la TDF inversa sobre  $H_d(e^{j\omega_k})$ , y  $h_c[n]$  la respuesta impulsiva del filtro causal.

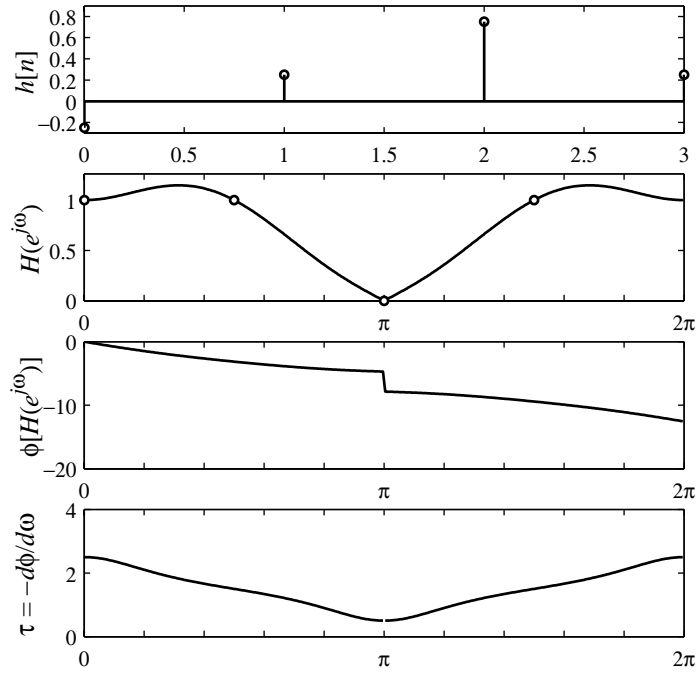
#### EJEMPLO 12.8 Diseño de un filtro pasabajos ( $N = 4$ )

En este ejemplo se diseña un filtro pasabajos con frecuencia de corte  $\omega_c = \pi/2$ . Adoptando  $N = 4$ , las frecuencias  $\omega_k$  donde se evalúa  $H_d(e^{j\omega})$  son

$$\omega_k = \frac{2\pi}{4}k = \left\{0, \frac{2\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}\right\} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

y  $H[k] = \{1, 1, 0, 1\}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} h[0] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{-j\omega_k 0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] = \frac{1+1+0+1}{4} = \frac{3}{4}, \\ h[1] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{-j\omega_k 1} = \frac{1}{4} \left(1 + 1e^{-j\frac{\pi}{2}} + 0 + 1e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right) = \frac{1+j+(-j)}{4} = \frac{1}{4}, \\ h[2] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{-j\omega_k 2} = \frac{1}{4} \left(1 + 1e^{-j2\frac{\pi}{2}} + 0 + 1e^{-j2\frac{3\pi}{2}}\right) = \frac{1+(-1)+(-1)}{4} = -\frac{1}{4}, \\ h[3] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{-j\omega_k 3} = \frac{1}{4} \left(1 + 1e^{-j3\frac{\pi}{2}} + 0 + 1e^{-j3\frac{3\pi}{2}}\right) = \frac{1+(-j)+j}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



**Fig. 12.16:** Respuesta del filtro diseñado por el método de muestreo en frecuencia con  $H_d(e^{j\omega_k}) = \{1, 1, 0, 1\}$ .

La respuesta impulsiva causalizada es

$$h_c[n] = \{h[2], h[3], h[0], h[1]\} = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\}$$

La respuesta impulsiva  $h[n]$  se grafica en la Fig. 12.16(a), y el módulo de la respuesta en frecuencia en la Fig. 12.16(b). El valor de la especificación del módulo de la respuesta deseada en cada frecuencia se ha indicado con círculos: aunque el filtro diseñado cumple con los requisitos de diseño, la respuesta en frecuencia difiere bastante de la de un filtro ideal. Además, como la respuesta impulsiva no es simétrica, el filtro no es de fase lineal, tal como se aprecia en el gráfico de la fase y del retardo de grupo de la Fig. 12.16(c) y (d), respectivamente.  $\square$

En el siguiente ejemplo se analiza el diseño de un filtro FIR cuya longitud se incrementa en una muestra.

#### EJEMPLO 12.9 Diseño de un filtro pasabajos ( $N = 5$ )

Para el mismo filtro del ejemplo anterior, se desea diseñar un filtro de longitud  $N = 5$ . En consecuencia, las frecuencias de interés son

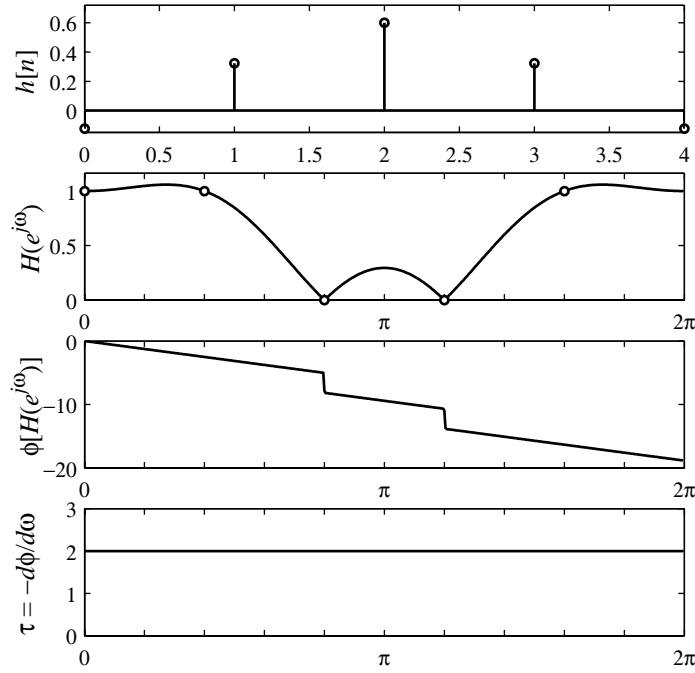
$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k = \left\{0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}\right\},$$

y el módulo de la respuesta en frecuencia deseado es

$$H_d(e^{j\omega_k}) = \{1, 1, 0, 0, 1\}.$$

La respuesta impulsiva se puede calcular con MATLAB usando el comando `ifft`, obteniéndose

$$\begin{aligned} h[n] &= \left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{5} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \frac{2}{5} \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right), \frac{2}{5} \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right), \frac{2}{5} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right\} \\ &\approx \{0.6000, 0.3236, -0.1236, -0.1236, 0.3236\}, \end{aligned}$$



**Fig. 12.17:** Respuesta del filtro diseñado por el método de muestreo en frecuencia con  $H_d(e^{j\omega_k}) = \{1, 1, 0, 0, 1\}$ .

y en consecuencia, la respuesta impulsiva del filtro es

$$h_c[n] = \{-0.1236, 0.3236, 0.6000, 0.3236, -0.1236\},$$

que se ilustra en la Fig. 12.17(a). La respuesta en frecuencia del filtro se grafica en la Fig. 12.17(b), y se observa que pasa por los valores especificados. En este caso, como la respuesta impulsiva resulta simétrica, el filtro es de fase lineal, tal como se evidencia en las Fig. 12.17(c) y (d).  $\square$

### Diseño de filtros de fase lineal

Si se desea que el filtro resultante sea de fase lineal, la respuesta impulsiva debe verificar

$$h[n] = \pm h[N-1-n],$$

donde el signo positivo corresponde a los filtros FIR de fase lineal tipo I y II, y el signo negativo a los de tipo III y IV, respectivamente. Esto se traduce en que las muestras de la respuesta en frecuencia deseada deben satisfacer

$$\begin{aligned} |H[k]| &= |H[N-k]|, & 0 \leq k \leq (N-1)/2, & \quad \text{si } N \text{ es impar} \\ |H[k]| &= \begin{cases} |H[N-k]|, & 0 \leq k \leq N/2-1, \\ 0, & k = N/2, \end{cases} & \quad \text{si } N \text{ es par} \end{aligned}$$

y además

$$\arg(H[k]) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} \frac{N-1}{2} k, & 0 \leq k \leq \lfloor (N-1)/2 \rfloor, \\ \frac{2\pi}{N} \frac{N-1}{2} (N-k) & \lfloor (N-1)/2 \rfloor \leq k \leq N-1, \end{cases} \quad (\text{Tipos I y II}),$$

o

$$\arg(H[k]) = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{N} \frac{N-1}{2} k, & 0 \leq k \leq \lfloor (N-1)/2 \rfloor, \\ \mp \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{N} \frac{N-1}{2} (N-k) & \lfloor (N-1)/2 \rfloor \leq k \leq N-1, \end{cases} \quad (\text{Tipos III y IV}).$$

donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  es la función *pisó*, definida como el mayor entero menor que su argumento, y el símbolo  $\lceil \cdot \rceil$  define la función *techo*: el menor entero mayor que su argumento<sup>1</sup>. Por ejemplo,  $\lfloor 2.4 \rfloor = 2$ ,  $\lfloor -2.4 \rfloor = -3$ ,  $\lceil 2.4 \rceil = 3$ ,  $\lceil -2.4 \rceil = -2$ . En particular, es sencillo verificar que

$$\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{N}{2} - 1, & \text{si } N \text{ es par,} \\ \frac{N-1}{2}, & \text{si } N \text{ es impar,} \end{cases} \quad \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil = \begin{cases} \frac{N}{2}, & \text{si } N \text{ es par,} \\ \frac{N+1}{2}, & \text{si } N \text{ es impar.} \end{cases}$$

Las ecuaciones de la fase tienen en cuenta que, para obtener un filtro causal, el retardo de fase del FIR es de  $(N-1)/2$ . Como cada cero del módulo de la respuesta en frecuencia introduce un desfase de  $\pi$  radianes, este aporte debe tenerse en cuenta al especificar la fase. El siguiente programa de MATLAB para el diseño de filtros FIR de fase lineal por el método del muestreo en frecuencia tiene en cuenta estos hechos.

```
function h=firfs(Hd)
%h = firfs(Hd)
% Esta funcion calcula la respuesta impulsiva de un filtro FIR
% por el metodo de muestreo en frecuencia.
% El vector Hd tiene la informacion del MODULO de la respuesta en
% frecuencia. La funcion se encarga de acomodar la fase para
% obtener un FIR de fase lineal

N = length(Hd);
k = 0:N-1;
DPi = zeros(size(Hd)); % DPi: vector con los saltos de pi
DPi(find(Hd==0)) = 1;
DPi = pi*cumsum(DPi);
Ang = -j*(2*pi*k/N*(N-1)/2+DPi); % fase lineal + saltos de pi
Hdc = Hd.*exp(Ang);
h = real(ifft(Hdc)); % no debiera hacer falta...
```

En el siguiente ejemplo se repite el diseño del Ejemplo 12.8 pero con especificación de fase lineal.

#### EJEMPLO 12.10 Diseño de un filtro pasabajos ( $N = 4$ , fase lineal)

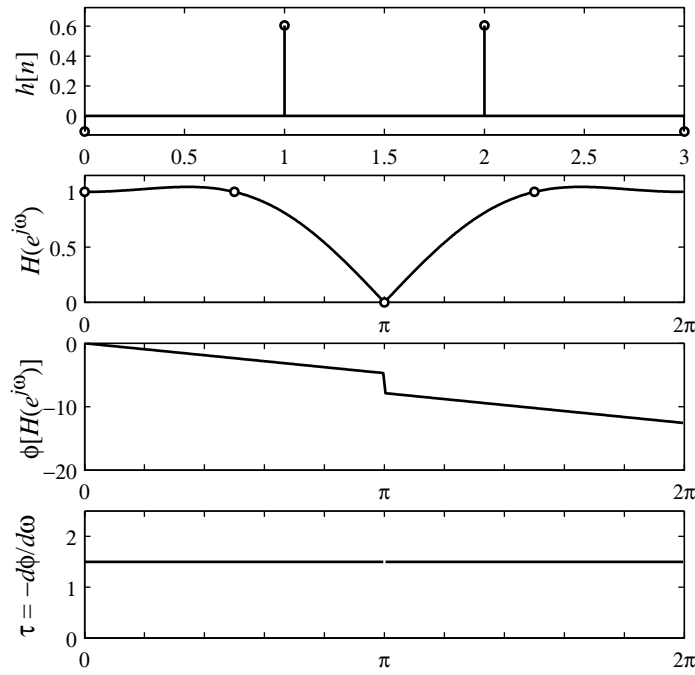
Las especificaciones de la respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos con frecuencia de corte  $\omega_c = \pi/2$  para obtener un filtro FIR de fase lineal de longitud  $N = 4$  son

$$\begin{aligned} |H[k]| &= \{1, 1, 0, 1\}, \\ \arg(H[k]) &= \left\{ \frac{2\pi}{4} \frac{4-1}{2} \times 0, \frac{2\pi}{4} \frac{4-1}{2} \times 1, *, \frac{2\pi}{4} \frac{4-1}{2} \times 3 + \pi \right\}, \end{aligned}$$

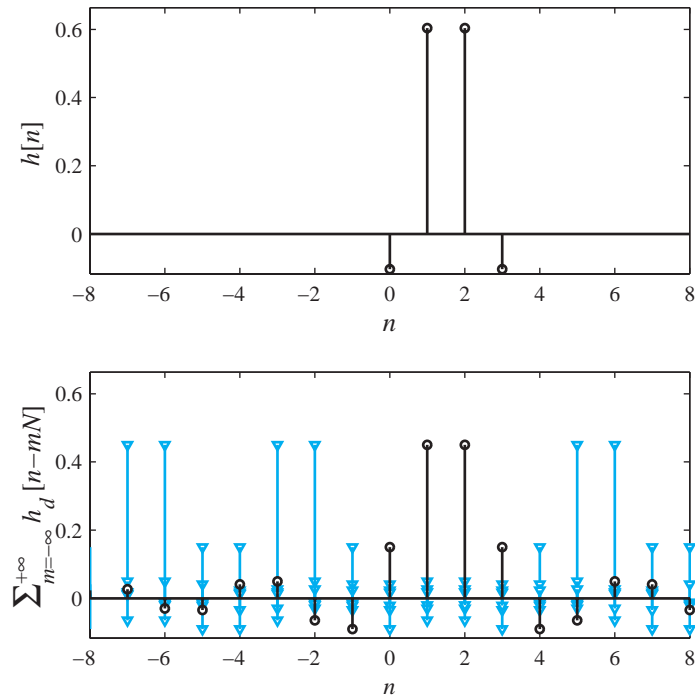
donde el símbolo “\*” indica que la fase es irrelevante porque el módulo de la respuesta en frecuencia es nulo, y al último elemento se le ha sumado un desfase de  $\pi$  radianes por el cambio de fase introducido por el cero. En consecuencia,

$$H[k] = \left\{ 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

<sup>1</sup>Estas funciones se corresponden con los comandos MATLAB `floor(·)` y `ceil(·)`, respectivamente.



**Fig. 12.18:** Respuesta del filtro FIR de fase lineal diseñado por el método de muestreo en frecuencia con  $H_d(e^{j\omega_k}) = \left\{1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ .



**Fig. 12.19:** Respuesta impulsiva del filtro del Ejemplo 12.10, y la suma de las réplicas de la respuesta impulsiva del filtro ideal.

La TDF inversa de  $H[k]$  es

$$h[n] = \left\{ \frac{1-\sqrt{2}}{4}, \frac{1+\sqrt{2}}{4}, \frac{1+\sqrt{2}}{4}, \frac{1-\sqrt{2}}{4} \right\}.$$

La Fig. 12.18 muestra la respuesta del filtro; compare con la respuesta del Ejemplo 12.8 (Fig. 12.16). El efecto del aliasing temporal en la respuesta impulsiva del filtro se observa en la Fig. 12.19, que muestra la respuesta impulsiva  $h[n]$  del filtro FIR diseñado (vea la Fig. 12.18) y las réplicas (cada  $N = 4$ ) de la respuesta impulsiva  $h_d[n]$  del filtro ideal

$$h_d[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right), \quad -\infty \leq n \leq \infty.$$

Es evidente que cada una de las muestras de la respuesta impulsiva es la suma de las infinitas réplicas de  $h_d[n]$ , para  $0 \leq n \leq 3$ . También puede apreciarse que la respuesta impulsiva  $h[n]$  no es exactamente igual a ninguna de las réplicas de  $h_d[n]$ .  $\square$

En los ejemplos anteriores la respuesta del filtro diseñada difiere bastante de la del filtro ideal. Esto puede atribuirse a que el muestreo en frecuencia no tiene la resolución suficiente, o bien que la respuesta impulsiva es de longitud reducida. La Fig. 12.20 muestra la respuesta del filtro del Ejemplo 12.10 para  $N = 15$ . Aún en este caso puede apreciarse que la ganancia del filtro en la banda de rechazo tiene picos de amplitud significativa (la atenuación en la banda de rechazo es menor a 20 dB). Este comportamiento se debe al efecto Gibbs, y puede disminuirse proponiendo una transición suave. Esta aproximación se observa en la Fig. 12.21, donde las muestras vecinas a la zona de transición se cambiaron de 1 a 0.4. Con este procedimiento la atenuación en la banda de rechazo excede los 40 dB.

El ajuste de la ganancia propuesta en la zona de transición puede hacerse por prueba y error, como en este caso, o bien aplicando métodos de programación lineal de forma de encontrar los valores que permitan obtener las mayores atenuaciones en la banda de rechazo con la zona de transición más angosta posible. Estos resultados se encuentran tabulados, por ejemplo en Proakis (1992).

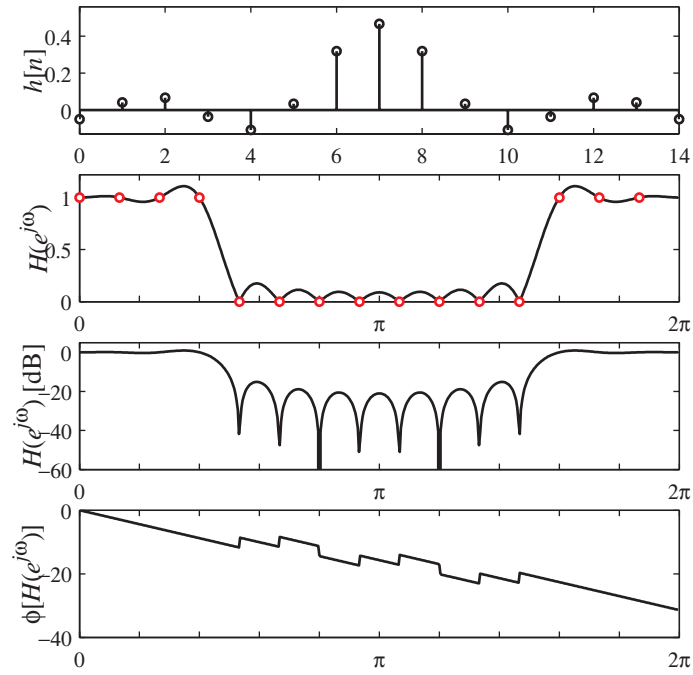
### 12.4.3 Implementación

Un filtro FIR diseñado por la técnica de muestreo en frecuencia se puede implementar de manera recursiva. Partiendo de la expresión de la transformada  $z$  de la respuesta impulsiva

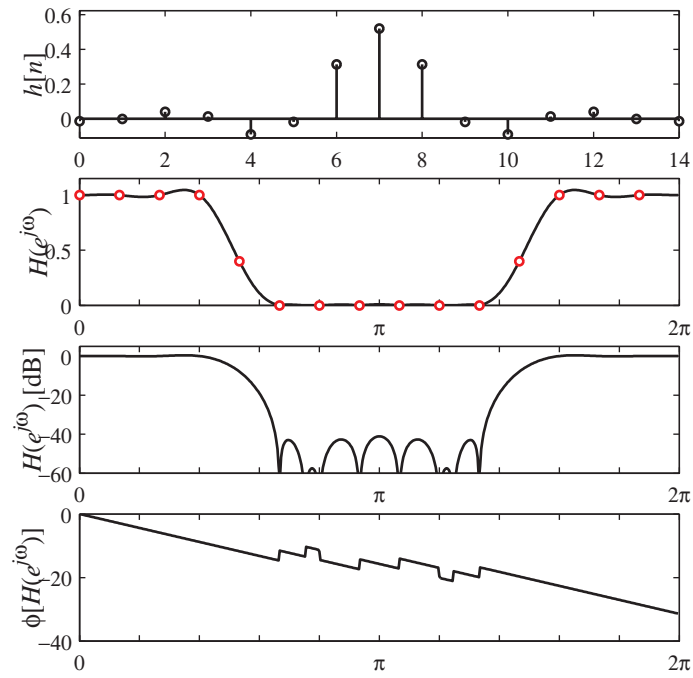
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n}$$

y de acuerdo con (12.12).

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} z^{-n} = \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \frac{1}{N} \frac{1 - \left( e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right)^N}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \\ &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}. \end{aligned}$$

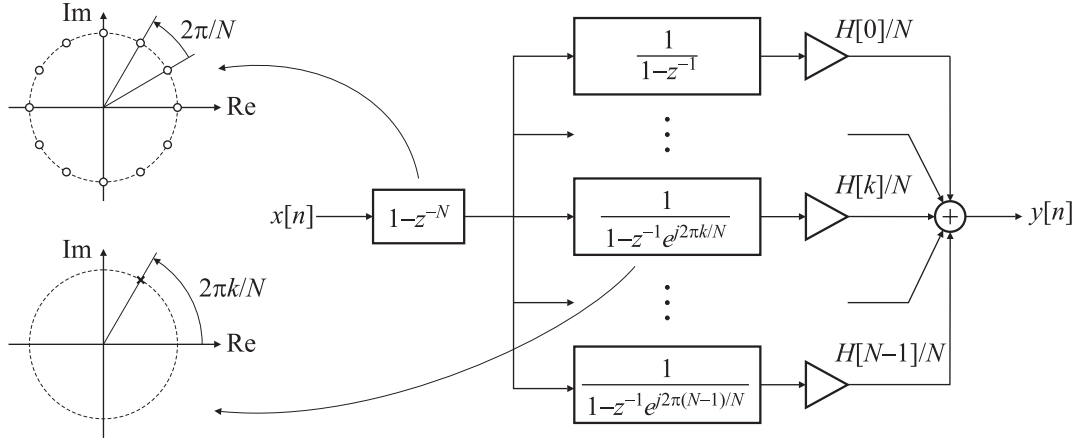


**Fig. 12.20:** Respuesta en frecuencia del filtro del Ejemplo 12.10, con  $N = 15$ .



**Fig. 12.21:** Respuesta en frecuencia del filtro del Ejemplo 12.10, con  $N = 15$ , donde se han alterado las muestras vecinas a la zona de transición.





**Fig. 12.22:** Implementación IIR del filtro FIR diseñado por muestreo en frecuencia.

Una realización basada en la última expresión se muestra en la Fig. 12.22. La estructura usa resonadores recursivos (y por lo tanto de tipo IIR) para realizar la función transferencia de un filtro FIR. El polo de cada resonador en el círculo unidad es cancelado exactamente por cada uno de los  $N$  ceros de  $(1 - z^{-N})$ . Tal cancelación puede no ocurrir en la práctica debido a la representación de los coeficientes de los filtros utilizando aritmética de precisión finita, y en consecuencia, puede resultar en un filtro inestable. Sobre el círculo unidad es relativamente sencillo demostrar que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \frac{\sin[(\omega N - 2\pi k)/2]}{\sin[(\omega N - 2\pi k)/(2N)]} e^{j\pi k \frac{N-1}{N}}$$

y en consecuencia,

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = H[k], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

de modo que la respuesta en frecuencia del filtro FIR diseñado por el método de muestreo en frecuencia tiene exactamente la respuesta deseada,  $H[k] = H_d(e^{j\omega_k})$ , donde  $\omega_k = 2\pi k/N$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ .

## 12.5 Métodos óptimos: algoritmo de Remez

Se debe diseñar un filtro FIR pasabanda, utilizando el algoritmo de Remez, de manera de cumplir con las siguientes especificaciones:

Frecuencia de muestreo:	20 kHz
Banda de paso:	5 kHz a 8 kHz
Banda de rechazo:	0 kHz a 4 kHz y 8.5 kHz a 10 kHz
Atenuación en la banda de rechazo:	46 dB
Atenuación máxima en la banda de paso:	$\pm 0.41$ dB

En primer lugar, debe estimarse el orden del filtro usando la función **remezord**. El comando `[N,Fo,Mo,W] = remezord(F,M,DEV,Fs)` calcula el orden  $N$  aproximado del filtro, el vector de las frecuencias esquina normalizadas  $Fo$ , el vector de magnitudes en cada banda  $Mo$  y el vector de pesos  $W$  requeridos por la función **remez** que calcula el filtro deseado. El filtro resultante cumplirá aproximadamente con las especificaciones dadas por los vectores de entrada  $F$ ,  $M$  y  $DEV$ .

- El vector **F** especifica las frecuencias de corte en Hz, en orden ascendente entre 0 y la mitad de la frecuencia de muestreo **F<sub>s</sub>**. Si no se especifica **F<sub>s</sub>**, se toma igual a 2Hz. De esta forma las especificaciones frecuenciales pueden darse en el estilo normalizado de MATLAB ( $F_N = F_s/2 = 1$ ).
- El vector **M** especifica la magnitud de la función deseada en las bandas definidas por **F**. La longitud de **F** es el doble de la longitud de **M** menos 2. La primera banda de frecuencias comienza en 0, y la última siempre termina en **F<sub>s</sub>/2**.
- El vector **DEV** especifica las desviaciones máximas (ondulación o *ripple*) aceptables para cada banda.

Es conveniente tener en cuenta que:

- El comando **remezord** frecuentemente subestima el orden **N**. Si el filtro no cumple con las especificaciones, debe elegirse un orden mayor (por ejemplo, **N+1** o **N+2**).
- Los resultados no son precisos si las frecuencias de corte son próximas a la frecuencia de Nyquist o a cero.

Para el diseño del filtro, se adopta **F** = [0.4 0.5 0.8 0.85], **M** = [0 1 0]. La atenuación pedida para la banda de rechazo (46 dB) corresponde a  $\delta_r = 10^{-46/20} \cong 0.005012$ ; se elige  $\delta_r = 0.005$ . Análogamente, en la banda de paso la máxima ondulación es de 1 dB. Entonces  $|20 \log_{10}(1 \pm \delta_p)| < 8.82$ , es decir,  $\delta_p \cong 0.05$ . Resulta entonces **DEV** = [0.005 0.05 0.005]. El comando MATLAB necesario para calcular el orden del filtro es:

```
[N,F,M,W] = remezord([0.4 0.5 0.8 0.85],[0 1 0],[0.005 0.05 0.005])
```

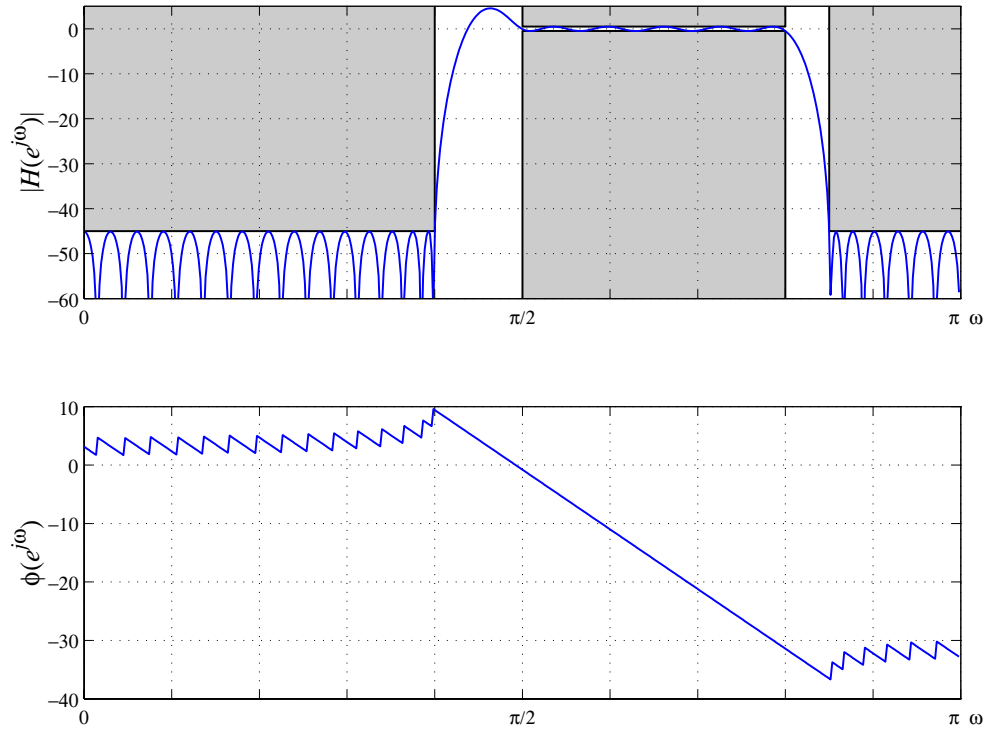
y los valores obtenidos son

```
N = 65
F = [0.0000 0.4000 0.5000 0.8000 0.8500 1.0000]
M = [0 0 1 1 0 0]
W = [10 1 10]
```

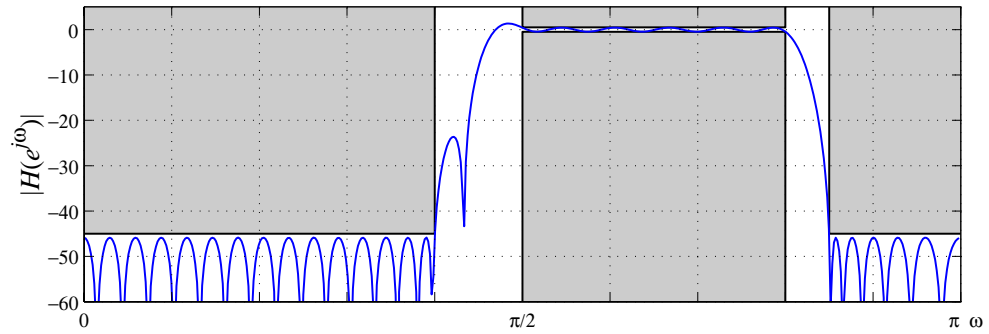
Una vez estimado el orden se puede diseñar el filtro usando el comando **remez** de MATLAB, que implementa el método de diseño de Parks-McClellan para filtros FIR equiripple óptimos. **B** = **remez**(**N**,**F**,**M**) devuelve un vector de longitud  $N + 1$ , cuyos elementos son los coeficientes del filtro FIR de fase lineal que mejor aproxima la respuesta en frecuencia deseada descrita por **F** y **M**, minimizando los máximos de las diferencias. **F** es un vector de bandas de frecuencias (cada banda está especificada por un par de números), en orden ascendente entre 0 y 1, que corresponde a la mitad de la frecuencia de muestreo. **M** es un vector de números reales de la misma dimensión que **F**, que especifica la magnitud de la respuesta en frecuencia deseada. La respuesta en frecuencia prototipo está dada por la unión con rectas de los puntos  $[F(k), M(k)]$  y  $[F(k + 1), M(k + 1)]$  para  $k$  impar; en este caso, **remez** trata la zona entre  $F(k + 1)$  y  $F(k + 2)$  como bandas de transición. De esta forma, la magnitud deseada es lineal a tramos con bandas de transición. El error entre la respuesta obtenida y la deseada se minimiza sobre las bandas especificadas, ignorando las bandas de transición.

También es posible ponderar el error usando un vector de pesos **W**, formado por una componente por cada banda, y por lo tanto su longitud es la mitad que la de **F** (o **M**). Los valores de **W** indican cuánto énfasis pone el algoritmo en minimizar el error de una banda respecto a las demás.

El filtro se diseña en base a los resultados obtenidos por **remezord**:



**Fig. 12.23:** Respuesta en frecuencia (módulo y fase) del filtro FIR óptimo de longitud  $N = 65$  diseñado en base al algoritmo de Remez. Observe el incremento de ganancia (casi +5 dB) en la primera banda de transición.



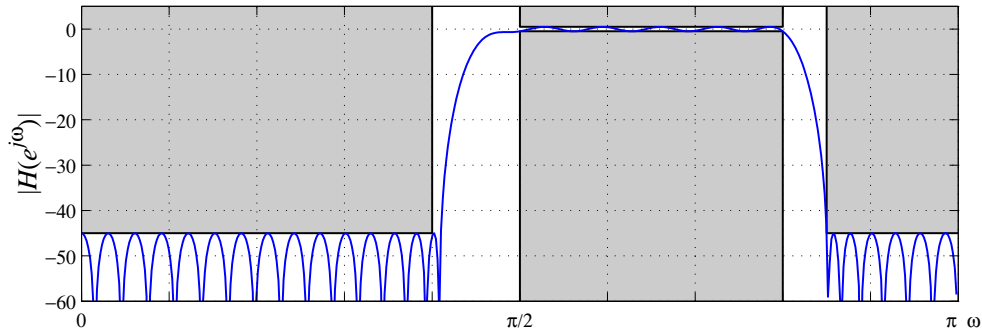
**Fig. 12.24:** Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro FIR óptimo de orden  $N = 66$ .

```
hn = remez(N,F,M,W); freqz(hn);
```

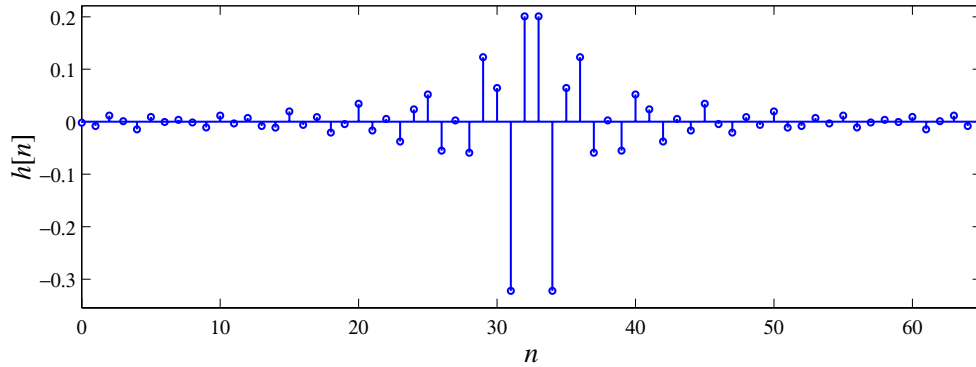
La respuesta en frecuencia del filtro se muestra en la Fig. 12.23, donde se aprecia que las especificaciones se cumplen con exceso. Sin embargo, en la banda de transición entre 0.4 y 0.5 se nota un sobrepico de +5 dB, que si bien no viola las especificaciones pedidas, puede resultar indeseable para alguna aplicación. Un ligero cambio en el orden del filtro ( $N = 66$ ) alivia el problema, tal como se ve en la Fig. 12.24. Si se desea aún un mejor comportamiento en la banda de transición, también puede alterarse ligeramente el vector de frecuencias esquinas (aquí es nuevamente  $N = 65$ ).

```
hn = remez(N,[0 0.41 0.5 0.8 0.85 1],M,W); freqz(hn)
```

En este caso las especificaciones se cumplen satisfactoriamente (Fig. 12.25), y el diseño queda completo. La Fig. 12.26 muestra la respuesta impulsiva del tercer diseño.



**Fig. 12.25:** Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro FIR óptimo de longitud  $N = 65$  diseñado por el algoritmo de Remez. En este caso, se alteró ligeramente la frecuencia esquina de la primera banda de rechazo.



**Fig. 12.26:** Respuesta impulsiva del filtro FIR óptimo diseñado por el algoritmo de Remez.

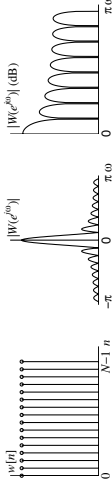
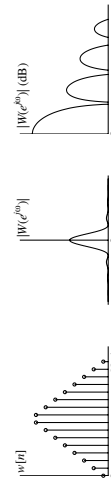
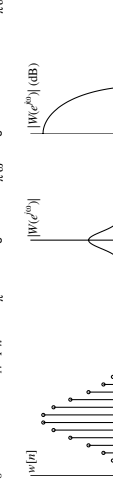
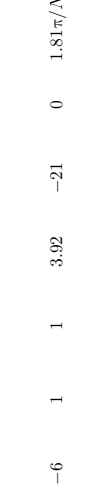
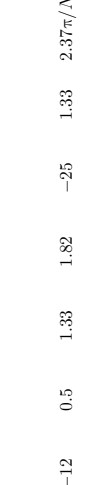
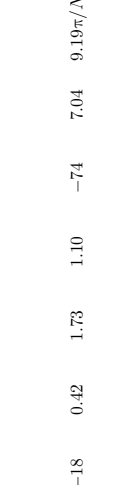

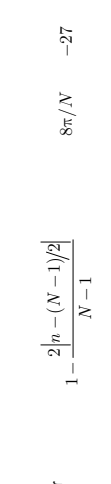
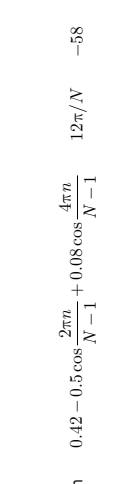

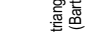
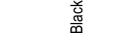
## 12.6 Referencias

1. Burrus, C., Soewito, A., Gopinath, R.. “Least Squared Error FIR Filter Design with Transition Bands”, *IEEE Trans. Signal Proc.*, Vol. 40, no. 6, Junio 1992, pp. 1327–1340.
2. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing: A computer-based approach*, McGraw Hill, 1998.
3. Proakis, J., Manolakis, D. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, 2da ed., Macmillan, New York, 1992.

## 12.7 Tabla de respuestas impulsivas de filtros ideales

Filtro	Respuesta en frecuencia ideal	Respuesta impulsiva	
		$h_c[n]$ (causal), $0 \leq n \leq N-1$ .	$h_c[n]$ (no causal), $-\infty < n < \infty$ .
		$N$ impar	$N$ par
<b>Pasa bajos</b>			
		$h_c[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right)$	$h_c[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\omega_c}{\pi} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$
<b>Pasa altos</b>			
		$h_c[n] = \delta\left[n - \frac{N-1}{2}\right] - \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\omega_c}{\pi} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$	No es aplicable
<b>Pasa banda</b>			
		$h_c[n] = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\omega_{c2}}{\pi} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right] - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\omega_{c1}}{\pi} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$	$h_c[n] = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\omega_{c2}}{\pi} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right] - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\omega_{c1}}{\pi} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$
<b>Elimina banda</b>			
		$h_c[n] = \delta[n] - \frac{\omega_{c2}}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_{c2}}{\pi} n\right) + \frac{\omega_{c1}}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_{c1}}{\pi} n\right)$	No es aplicable
<b>Derivador</b>			
	$H(e^{j\omega}) = j\omega,  \omega  < \pi$	$h_c[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n}, & \text{si } n \neq 0, \\ 0, & \text{si } n = 0, \end{cases}$	$h_c[n] = \begin{cases} 0, & n = (N-1)/2, \\ \frac{(-1)^{n-1}}{n - (N-1)/2}, & \text{caso contrario.} \end{cases}$
<b>Transf. Hilbert</b>			
	$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j, & -\pi < \omega < 0, \\ -j, & 0 < \omega < \pi. \end{cases}$	$h_c[n] = \begin{cases} \frac{2}{\pi n}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$	$h_c[n] = \begin{cases} 0, & n = (N-1)/2, \\ \frac{1 - (-1)^{n-(N-1)/2}}{\pi[n - (N-1)/2]}, & \text{caso contrario.} \end{cases}$

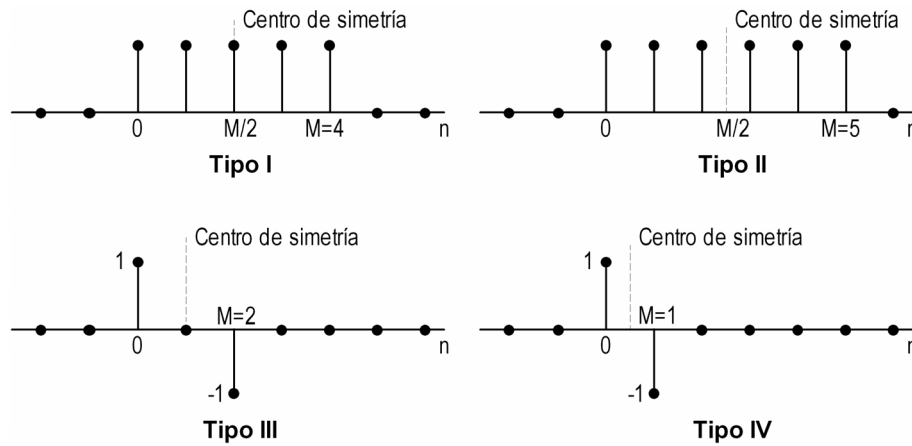
## 12.8 Tabla de ventanas típicas

Nombre	Sucesión temporal $h[n]$ , $0 \leq n \leq N-1$	Ancho del lóbulo principal	Amplitud lóbulo lateral (dB)	Pendiente lóbulos (dB/oct)	Ganancia	AB ruido equiv. (muestras)	Pérdida ondul. (dB)	Error de aprox. pico (dB)	$\beta$ equiv. de vent. Kaiser	Ancho de transición de vent. Kaiser equiv	Respuesta Temporal - Respuesta en frecuencia (relativo y dB normalizado)		
rectangular (boxcar)	1	$4\pi/N$	-13	-6	1	1	3.92	-21	0	$1.81\pi/N$			
triangular (Bartlett)	$1 - \frac{2 n - (N-1)/2 }{N-1}$	$8\pi/N$	-27	-12	0.5	1.33	1.82	-25	1.33	$2.37\pi/N$			
Blackman	$0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}$	$12\pi/N$	-58	-18	0.42	1.73	1.10	-74	7.04	$9.19\pi/N$			
Hamming	$0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$	$8\pi/N$	-43	-6	0.54	1.36	1.78	-53	4.86	$6.27\pi/N$			
von Hann	$\frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right)$	$8\pi/N$	-32	-18	0.5	1.5	1.42	-44	3.86	$5.01\pi/N$			
Kaiser	$I_0 \left( \beta \sqrt{1 - \frac{n - (N-1)/2}{(N-1)/2}} \right)$	Depende de $\beta$			Depende de $\beta$	Depende de $\beta$	Depende de $\beta$	Depende de $\beta$	Depende de $\beta$				
Ecuaciones para estimar el $\beta$ y el orden $N$ de la ventana de Kaiser													
<div><div><math display="block">N = \begin{cases} \left\lceil \frac{A - 7.95}{2.285 \Delta\omega} \right\rceil, &amp; A &gt; 21, \\ \left\lceil \frac{5.79}{\Delta\omega} + 1 \right\rceil, &amp; A \leq 21. \end{cases}</math></div><div><math display="block">\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), &amp; A &gt; 50, \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), &amp; 21 \leq A \leq 50, \\ 0, &amp; A &lt; 21. \end{cases}</math></div><div><math display="block">\Delta\omega = \omega_s - \omega_p, A = -20 \log_{10} \delta</math></div></div>													

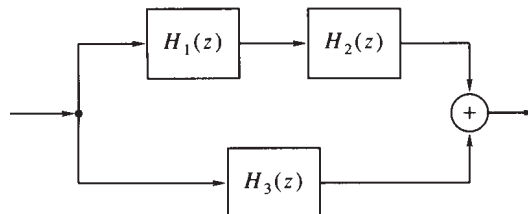
## 12.9 Ejercicios

**Ejercicio 1** En la figura se muestran las respuestas impulsivas  $h[n]$  de cuatro filtros FIR. Para cada una de ellas:

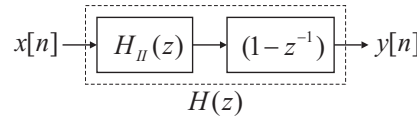
1. Calcule la respuesta en frecuencia (módulo y fase).
2. Calcule el retardo de grupo  $[\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega})]$ .
3. Grafique los ceros de la función transferencia.
4. Observe la relación entre la simetría de la respuesta impulsiva alrededor de  $M/2$  y el hecho que  $M$  sea par o impar en la ubicación de los ceros y en la respuesta en frecuencia. Intente extender sus razonamientos para el caso en que  $M$  es un entero “grande” (típicamente mayor que 100).
5. En base a las conclusiones obtenidas en el inciso 4, ¿qué condiciones debe cumplir la respuesta impulsiva de un filtro FIR pasabajos, según sea el orden  $M$  par o impar? Ídem para un filtro pasaaltos.



- © **Ejercicio 2** Los filtros de la figura son FIR de fase lineal generalizada, causales, y con respuesta impulsiva  $h[n]$  real. Sus órdenes son  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3 = M_1 + M_2$ , y sus longitudes  $N_1 = M_1 + 1$ ,  $N_2 = M_2 + 1$ ,  $N_3 = M_1 + M_2 + 1$ , respectivamente. Cada uno de los tres filtros puede tener respuesta impulsiva simétrica o antisimétrica, de modo que se pueden considerar en total ocho posibilidades. ¿Para cuál de estos ocho casos el filtro equivalente tiene fase lineal (exacta o generalizada)? Determine en cada caso si la respuesta impulsiva del filtro equivalente es simétrica o antisimétrica.



**Ejercicio 3** La función de sistema  $H_{II}(z)$  representa un filtro FIR tipo II de fase lineal generalizada, con respuesta impulsiva  $h_{II}[n]$ . En cascada con este sistema se conecta un sistema lineal e invariante en el tiempo con función de sistema  $(1 - z^{-1})$  para producir un tercer sistema con función de sistema  $H(z)$  y respuesta impulsiva  $h[n]$ . Determine si el sistema completo tiene fase lineal generalizada, y en caso afirmativo, qué tipo de sistema es (I, II, III o IV).



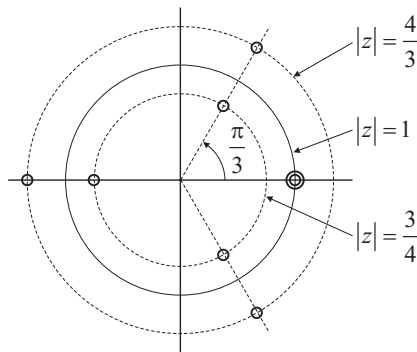
**Ejercicio 4** Para un filtro FIR de fase lineal con función de sistema  $H(z)$ , demuestre que:

1. si  $c_k$  es un cero de  $H(z)$ , también lo son  $c_k^*$ ,  $c_k^{-1}$ , y  $(c_k^*)^{-1}$  (“\*” indica conjugación).
2. si el filtro FIR es tipo II tiene un cero en  $\omega = \pi$ .

**Ejercicio 5** La respuesta impulsiva de un filtro FIR pasabajos de fase lineal es  $h_{PB}[n]$ . La respuesta impulsiva de un filtro FIR pasaaltos se calcula como  $h_{PA}[n] = (-1)^n h_{PB}[n]$ . Si se decide diseñar un filtro pasaaltos usando esta transformación, ¿cuál de los cuatro tipos de FIR de fase lineal generalizada pueden usarse para el diseño del filtro pasabajos?

**Ejercicio 6** La figura muestra el diagrama de polos y ceros de un filtro FIR.

1. ¿Puede asegurar que el sistema tiene fase lineal a partir del diagrama de polos y ceros? Justifique.
2. Calcule la respuesta impulsiva  $h[n]$ .
3. Escriba la ecuación a diferencias.
4. ¿Es causal? ¿Por qué? Si la respuesta es negativa, indique cómo sería el diagrama de polos y ceros de un FIR causal con idéntico módulo de la respuesta en frecuencia, y escriba la ecuación a diferencias.



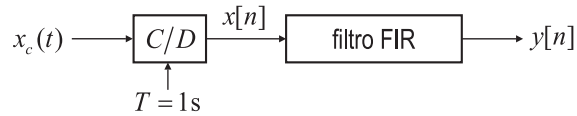


**Ejercicio 7** En el sistema de la figura, la señal  $x(t)$  tiene ancho de banda limitado, con  $X(f) = 0$  para  $|f| > 0.5$  Hz. El período de muestreo es  $T = 1$  s. El filtro FIR es de orden  $M$  par (longitud impar  $N = M + 1$ ). El filtro debe diseñarse de manera de satisfacer

$$y[n] \approx x[n - L - 0.25]$$

donde  $L$  es un entero positivo.

1. ¿Cuál es la respuesta en frecuencia ideal  $H_d(e^{j\omega})$  del filtro?
2. Elija una longitud  $N$  apropiada (que depende de  $L$ ) y diseñe el filtro truncando la respuesta impulsiva del filtro ideal.
3. La función de sistema  $H(z)$  ¿tiene fase exactamente lineal, fase lineal generalizada, o respuesta en fase arbitraria?



**Ejercicio 8** Determine las respuestas impulsivas  $h[n]$  de los filtros ideales:

1. Pasabajos con banda de paso 0 a  $\omega_p$ , y banda de rechazo de  $\omega_r$  a  $\pi$ .
2. Pasaaltos con banda de paso de  $\omega_p$  a  $\pi$ , y banda de rechazo de 0 a  $\omega_r$ .
3. Pasabanda con banda de paso entre  $\omega_{p1}$  y  $\omega_{p2}$ , y banda de rechazo desde 0 a  $\omega_{r1}$  y desde  $\omega_{r2}$  a  $\pi$ .
4. Eliminabanda con banda de paso entre 0 a  $\omega_{p1}$  y desde  $\omega_{p2}$  a  $\pi$  y banda de rechazo entre  $\omega_{r1}$  y  $\omega_{r2}$ .

**Ejercicio 9** Calcule las respuestas impulsivas  $h[n]$  de los filtros con banda de transición suavizada a partir de las respuestas impulsivas de los filtros ideales del Ejercicio 8.

**Ejercicio 10** Un filtro FIR con respuesta impulsiva  $h[n]$  real debe bloquear todas las señales sinusoidales reales de frecuencia  $\omega_k = \pi k/8$ , para todo entero  $k$ . El filtro debe tener el menor orden posible.

1. Especifique el orden y la función transferencia del filtro.
2. El filtro ¿tiene fase exactamente lineal, fase lineal generalizada, o respuesta en fase arbitraria?

**I Ejercicio 11 Diseño de filtros FIR utilizando ventanas.** Diseñe un filtro FIR causal pasaaltos de longitud 3 con frecuencia de corte  $\omega_c$  usando una ventana triangular.

1. Calcule la respuesta impulsiva  $h_i[n]$  del filtro ideal.

2. Calcule la ventana  $w[n]$  sugerida, y escriba la respuesta impulsiva  $h_r[n]$  del filtro a implementar.
3. Calcule la respuesta en frecuencia  $H_r(e^{j\omega})$  del filtro diseñado (módulo y fase) indicando los puntos significativos de la respuesta. Compárela con la respuesta del filtro ideal.
4. Escriba la ecuación a diferencias que permite implementar el filtro.

**(M) Ejercicio 12 Diseño de filtros FIR utilizando ventanas.** Diseñar un filtro FIR pasabajos utilizando una ventana apropiada de manera de satisfacer las siguientes especificaciones:

Banda de paso:	0 a 1 kHz
Banda de rechazo:	1.4 kHz ~ 4 kHz
Ripple máximo en la banda de paso:	1 dB ( $\pm 0.5$ dB)
Atenuación mínima en la banda de rechazo:	50 dB
Frecuencia de muestreo	8 kHz

1. Calcule los coeficientes del filtro.
2. Grafique la respuesta en frecuencia (módulo y fase).

**(M) Ejercicio 13 Diseño de filtros FIR utilizando ventanas.** Diseñar un filtro FIR pasabanda utilizando una ventana adecuada para cumplir los siguientes requerimientos:

Banda de paso:	1 kHz a 2 kHz
Banda de rechazo:	0 a 0.6 kHz y 2.4 kHz a 4 kHz
Ripple máximo en la banda de paso:	1 dB ( $\pm 0.5$ dB)
Atenuación mínima en la banda de rechazo:	40 dB
Frecuencia de muestreo	8 kHz

1. Calcule los coeficientes del filtro.
2. Grafique la respuesta en frecuencia (módulo y fase) utilizando el comando `freqz`.
3. Grafique la ubicación de los polos y ceros del filtro en el plano complejo usando la función `zplane`.

**(M) Ejercicio 14 Comparación con filtros IIR.** Diseñe un filtro FIR que cumpla las especificaciones del Ejercicio ?? de la práctica de Filtros IIR (que se repiten abajo) utilizando el método de diseño de ventanas y un método óptimo (Remez). Compare los resultados de los tres diseños, prestando especial atención a la banda de transición, orden del filtro, y retardo de grupo.

Banda de paso:	0.5 a 0.8 Hz
Banda de rechazo:	0 a 0.4 Hz; 0.85 Hz a $f_s$ Hz
Atenuación máxima en la banda de paso:	1 dB
Atenuación mínima en la banda de rechazo:	40 dB
Frecuencia de muestreo:	$f_s = 2$ Hz

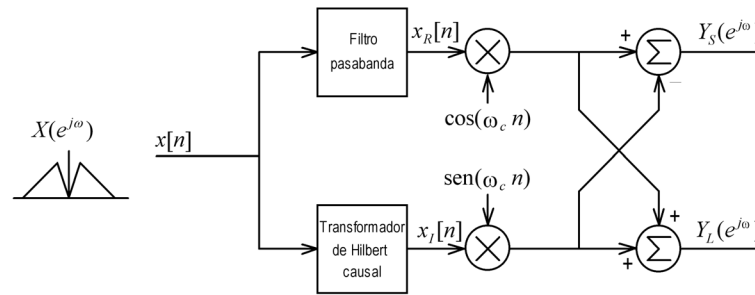
### 12.9.1 Aplicaciones especiales

En los siguientes problemas se estudian aplicaciones especiales de filtros FIR. Explique en cada caso porqué resulta inconveniente una realización IIR.

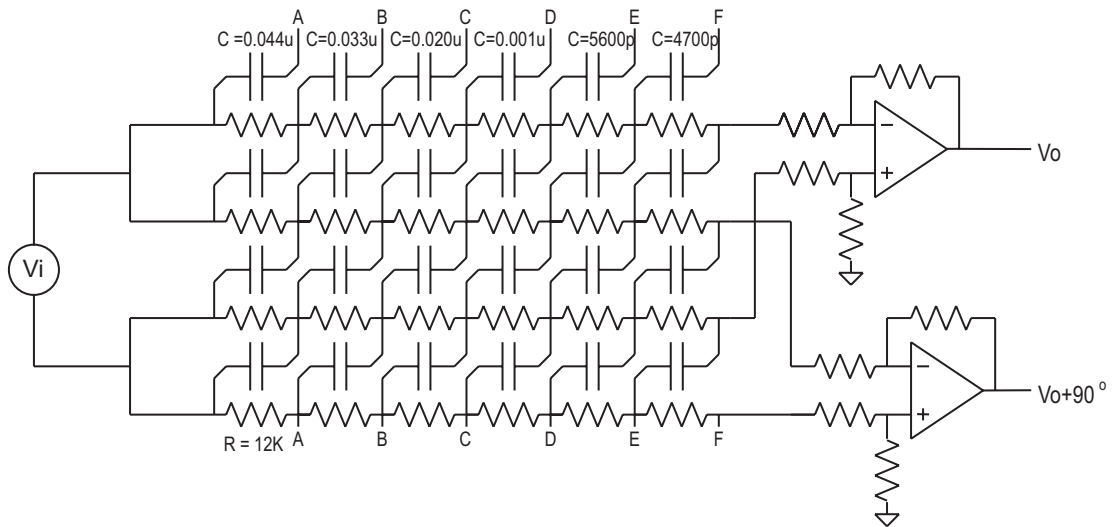
**(M) Ejercicio 15** La respuesta en frecuencia ideal de un transformador de Hilbert es

$$H_d(j\omega) = \begin{cases} -j, & 0 \leq \omega < \pi, \\ j, & -\pi < \omega < 0. \end{cases}$$

1. Diseñe un transformador de Hilbert tipo FIR de orden  $M \geq 50$ . ¿ $M$  debe ser par o impar?
2. Grafique la respuesta en frecuencia (módulo y fase). ¿La fase es como la deseada?
3. Este filtro se utiliza de telecomunicaciones, por ejemplo en moduladores de banda lateral única (BLU) como muestra la figura. ¿Cómo son los espectros  $Y_S(e^{j\omega})$  e  $Y_L(e^{j\omega})$ ?



**Curiosidad.** La figura muestra un transformador de Hilbert analógico, al menos para el rango de frecuencias comprendido entre 200 Hz y 4 kHz. ¿Cómo calcularía la función transferencia del circuito?



**(M) Ejercicio 16** Ensaye el circuito del problema anterior usando MATLAB. Una señal  $x[n]$  de longitud “aproximadamente finita” y ancho de banda “aproximadamente limitado” se puede generar con

```
% Señal de espectro preestablecido
frq = [0.0 0.01 0.1 0.15 0.18 0.2 1.0];
mag = [0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0];
x    = fir2(200,frq,mag);
```

La señal  $x$  tiene una longitud de 201 muestras. Su espectro puede graficarse con

```
[X,w] = freqz(x); plot(w/pi,abs(X));
```

1. Diseñe el transformador de Hilbert y el filtro pasabanda utilizando algunos de los métodos conocidos. Elija el orden del filtro pasabanda igual al del Transformador de Hilbert. ¿Cuál es la finalidad del filtro pasabanda? ¿Cómo elije la banda de paso del filtro?
2. Genere las señales  $x_R[n]$  y  $x_I[n]$  filtrando la señal  $x[n]$  con el filtro pasabanda y el transformador de Hilbert, respectivamente. Para filtrar las señales puede utilizar los comandos `conv` o `filter`. Compare el módulo y la fase del espectro  $X_R(e^{j\omega})$  y  $X_I(e^{j\omega})$  de estas señales. Si el módulo de los mismos coincide (aproximadamente), grafique la diferencia de fase de los espectros. ¿Qué observa?
3. Elija  $\omega_c = 0.7\pi$ . Las sucesiones  $\cos(\omega_c n)$  y  $\sin(\omega_c n)$  deben tener una longitud de por lo menos  $N = 1000$  muestras. Para modular  $x_R[n]$  y  $x_I[n]$  con estas señales deberá hacerlas de igual longitud completándolas con ceros (“padding” de ceros). Calcule las señales  $y_S[n]$  e  $y_L[n]$ , y sus espectros  $Y_S(e^{j\omega})$  e  $Y_L(e^{j\omega})$ .
4. Compare los espectros  $Y_S(e^{j\omega})$  e  $Y_L(e^{j\omega})$  calculados en el inciso anterior con el que resulta de modular  $x[n]$  con la señal  $\cos(\omega_c n)$ .

**Ejercicio 17** En muchas aplicaciones, como el generador de BLU del inciso 3 del Ejercicio 15, se necesitan simultáneamente la señal  $x[n]$  y su transformada de Hilbert  $x_H[n]$ . Para compensar el retardo de fase introducido por un transformador de Hilbert causal, la señal  $x[n]$  suele filtrarse con un filtro FIR pasabanda del mismo ancho de banda y el mismo orden que el transformador, como en la figura del Ejercicio 15. Una alternativa a esta implementación es utilizar dos filtros IIR o FIR cuya respuesta en fase difiera  $90^\circ$ . Para el caso de filtros FIR se aplica una transformación “pasabanda en cuadratura” a un filtro pasabajos, que consiste en multiplicar la respuesta impulsiva  $h_{PB}[n]$  del filtro pasabajos por sucesiones  $c[n] = \cos(\omega_0 n)$ ,  $s[n] = \sin(\omega_0 n)$  para obtener las respuestas impulsivas:

$$\begin{aligned} h_C[n] &= h_{PB}[n]c[n] = h_{PB}[n]\cos(\omega_0 n), \\ h_S[n] &= h_{PB}[n]s[n] = h_{PB}[n]\sin(\omega_0 n). \end{aligned}$$

Cada uno de estos filtros pasabanda está centrado en la frecuencia  $\omega_0$ , y tiene el doble ancho de banda que el filtro pasabajos. Una de las principales ventajas de este diseño es que ambos filtros tienen la misma característica de ondulación (ripple) en la banda de paso, una propiedad altamente deseable en muchos algoritmos de procesamiento de señales en cuadratura.

1. Demuestre que el diseño propuesto se comporta como un transformador de Hilbert, es decir, muestre que si se excitan ambos filtros  $h_C[n]$ ,  $h_S[n]$  con una señal  $x[n]$ , la salida de un filtro está en cuadratura respecto a la otra.
2. Determine el máximo ancho de banda posible para el filtro pasabajos  $h_{PB}[n]$ .

3. Determine los rangos admisibles de  $\omega_0$  en función del ancho de banda del filtro pasabajos prototipo, y calcule la banda de paso del transformador de Hilbert
4. El orden de los filtros ¿puede ser par? ¿Por qué?

**Nota:** Esta técnica de diseño sólo es aplicable para filtros FIR.

**Ejercicio 18** En este Ejercicio se explora el uso de la transformada de Hilbert para determinar la envolvente de una señal, en especial aquellas señales oscilatorias de alta frecuencia que decaen lentamente, como las de resonancia magnética. Si  $x_H[n]$  es la transformada de Hilbert de  $x[n]$ , la señal  $x_A[n] = x[n] + x_H[n]$  se denomina *analítica*.

1. Si  $x[n]$  es una señal real con espectro  $X(e^{j\omega})$ , calcule los espectros  $X_H(e^{j\omega})$  de  $x_H[n]$  y  $X_A(e^{j\omega})$  de  $x_A[n]$ .
2. Calcule  $x_H[n]$  y  $x_A[n]$  si  $x[n] = a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$ ,  $|a| < 1$ .
3. Calcule  $|x_A[n]|$ , y compárela con la envolvente de  $x[n]$ .

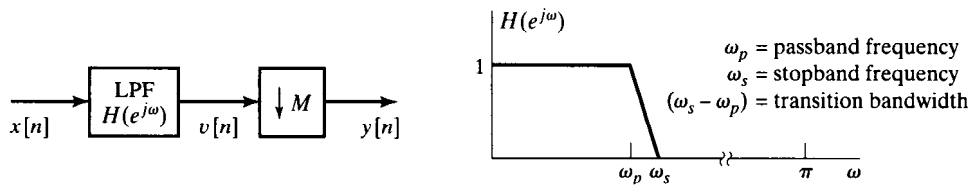
Otras aplicaciones de la transformada de Hilbert se detallan en N. Thrane, J. Wismer, H. Konstantin-Hansen y S. Gade, "Practical use of the Hilbert transform", Application Note BO 0437-11, Brüel & Kjaer, Denmark (sin fecha).

**(M) Ejercicio 19** Diseñar un diferenciador FIR utilizando una ventana de Blackman. La respuesta en frecuencia de un diferenciador ideal es:

$$H_d(e^{j\omega}) = (j\omega)e^{-j\omega M/2}, \quad -\pi < \omega < \pi.$$

1. Diseñe un diferenciador con  $M = 40$ .
2. Grafique la respuesta en frecuencia, y el error de aproximación.
3. ¿Qué problema detecta? Modifique el diseño para eliminar este inconveniente. Grafique la nueva respuesta en frecuencia y el error de aproximación.

**(C) Ejercicio 20** Luego que una señal se filtra con un pasabajos FIR de fase lineal es frecuente efectuar una decimación, como se muestra en la Fig. 12.27. Si el filtro tiene una banda de transición muy angosta, el FIR tendrá una respuesta impulsiva de gran longitud y por lo tanto deberán efectuarse un gran número de operaciones por cada muestra de salida.



**Fig. 12.27:** Decimador de una etapa.

1. La Fig. 12.28 muestra una implementación multietapa que es ventajosa cuando la frecuencia de corte  $\omega_c = (\omega_r - \omega_p)/2$  es pequeña y el factor de decimación  $M$  es grande. La idea es adoptar bandas de transición más amplias en las primeras etapas y reducir la longitud de la respuesta impulsiva. La decimación reduce el número de muestras de la señal disminuyendo significativamente el número de operaciones necesarias para implementar el decimador.

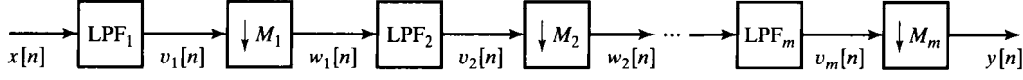


Fig. 12.28: Decimador de múltiples etapas.

- (a) Determine el máximo factor de decimación  $M$  admisible para el esquema de la Fig. 12.27 en función de  $\omega_r$  si se desea evitar el aliasing.
  - (b) Si  $M = 100$ ,  $\omega_c = \pi/100$ , y  $\omega_p = 0.9\pi/100$ , grafique  $V(e^{j\omega})$  e  $Y(e^{j\omega})$  cuando  $x[n] = \delta[n]$ .
2. Considere ahora una implementación en dos etapas con  $M = 100$ , como se muestra en la Fig. 12.29, donde  $M_1 = 50$ ,  $M_2 = 2$ ,  $\omega_{p1} = 0.9\pi/100$ ,  $\omega_{p2} = 0.9\pi/2$ , y  $\omega_{r2} = \pi/2$ . Se debe elegir  $\omega_{r1}$  o bien el ancho de la zona de transición del filtro I ( $\omega_{r1} - \omega_{p1}$ ) de modo que la implementación en dos etapas tenga las mismas frecuencias de paso y de rechazo que el decimador de una única etapa.
- (a) Para el decimador de la Fig. 12.29 grafique  $V_1(e^{j\omega})$ ,  $W_1(e^{j\omega})$ ,  $V_2(e^{j\omega})$ , e  $Y(e^{j\omega})$  para una frecuencia  $\omega_{r1}$  arbitraria, y la entrada  $x[n] = \delta[n]$ .
  - (b) Encuentre el mayor valor de  $\omega_{r1}$  tal que el decimador de dos etapas tenga las mismas frecuencias de paso y de rechazo que el decimador de una sola etapa de la Fig. 12.27.

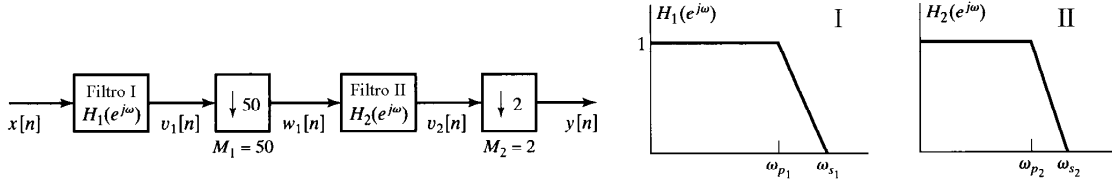


Fig. 12.29: Decimador de dos etapas.

1. Además de tener una banda de transición finita, los filtros pasabajos difieren del filtro ideal por los errores de aproximación en la banda de paso y en la banda de rechazo, notados  $\delta_p$  y  $\delta_r$ , respectivamente. Si se utilizan filtros FIR de fase lineal óptimos (equirriple), el orden aproximado del filtro es

$$N \approx \frac{-10 \log_{10}(\delta_p \delta_r) - 13}{2.324 \Delta\omega} + 1$$

donde  $\Delta\omega = \omega_r - \omega_p$  es el ancho de la zona de transición del filtro. Esta ecuación sirve para comparar las dos implementaciones del interpolador. Si el filtro se diseña usando la ventana de Kaiser, el orden del filtro viene dado por

$$N = \frac{A - 8}{2.285 \Delta\omega},$$

donde  $A = -20 \log_{10} \delta_r$ .

- (a) Suponga que para el filtro pasabajos implementado con una única etapa  $\delta_p = 0.01$  y  $\delta_r = 0.001$ . Calcule la longitud de la respuesta impulsiva del filtro pasabajos, y determine el número de sumas y productos necesarios para calcular cada muestra de la salida. Aproveche la simetría de la respuesta impulsiva del filtro FIR de fase lineal. (En esta aplicación de decimación, sólo necesita calcularse una de cada  $M$  muestras de la salida.)

- (b) Para el valor de  $\omega_{r1}$  calculado en el inciso 2b, determine las longitudes  $N_1$  y  $N_2$  de las respuestas impulsivas de los filtros pasabajos I y II. Estime el número total de operaciones necesarias para calcular cada muestra de salida en el decimador de dos etapas.
  - (c) Si en el decimador de dos etapas se utilizan las mismas especificaciones de error que para el de una etapa, la ondulación total en la banda de paso será mayor que 0.01 pues las ondulaciones de las dos etapas pueden reforzarse entre sí, ya que  $(1 + \delta_p)(1 + \delta_p) > (1 + \delta_p)$ . Para corregir este inconveniente los filtros del decimador de dos etapas se diseñan con una ondulación en la banda de paso igual a la mitad de la ondulación de la implementación de una única etapa. Entonces para cada uno de los filtros I y II,  $\delta_p = 0.005$ , y  $\delta_r = 0.001$ . Calcule las longitudes  $N_1$  y  $N_2$  de las respuestas impulsivas de estos filtros, y determine el número total de operaciones requeridas para calcular cada muestra de salida.
  - (d) ¿Es necesario reducir la especificación del error de aproximación en la banda de rechazo para los filtros del decimador de dos etapas?
2. La combinación  $M_1 = 50$  y  $M_2 = 2$  puede no minimizar el número total de sumas y productos necesarios por cada muestra de salida; cualquier elección de  $M_1$  y  $M_2$  es válida siempre que  $M_1 M_2 = 100$ . Determine los valores de  $M_1$  y  $M_2$  que minimizan el número de productos por cada muestra de salida.