

2

Análisis de Fourier

The material essential for a student's mathematical laboratory is very simple. Each student should have a copy of Barlow's tables of squares, etc., a copy of Crelle's Calculation Tables, and a seven-place table of logarithms. Further it is necessary to provide a stock of computing paper, ...and lastly, a stock of computing forms for practical Fourier analysis. With this modest apparatus nearly all the computation hereafter described may be performed, although time and labor may often be saved by the use of multiplying and adding machines, when these are available.

E.T. Whitakker and G. Robinson, *The calculus of observations*, 1924¹.

En este capítulo se resumen algunos conceptos del análisis de Fourier. Se comienza con algunas nociones elementales de la serie de Fourier, que permite representar una señal periódica como una suma infinita de componentes sinusoidales. Se estudia luego la transformada de Fourier, que juega un papel similar en el análisis de las señales no periódicas, y es de aplicación más general que la serie. La motivación principal de la aplicación de la serie o la transformada es obtener el *espectro* de una señal dada, que revela su contenido frecuencial que frecuentemente es más revelador que la representación original en función del tiempo. Se estudian una serie de propiedades, introduciendo el impulso de Dirac que permite resolver muchas transformadas de señales útiles en ingeniería. Se analiza la respuesta de sistemas lineales ante entradas genéricas, lo que permite derivar la integral de convolución. En esta presentación se pondrá especial énfasis en su interpretación gráfica. Los teoremas de las transformadas de señales convolucionadas en tiempo y en frecuencia reciben especial atención, porque son claves para la interpretación de una serie de fenómenos que aparecerán a lo largo de curso, comenzando en este capítulo con el fenómeno de Gibbs. Finalmente, se repasa el principio de incertidumbre del análisis de Fourier, y se culmina con una breve reseña histórica. Una serie de apéndices complementan este capítulo, discutiendo cuestiones de convergencia de la serie de Fourier, presentando la técnica ingenieril detrás del análisis espectral de señales analógicas, con una amplia variedad de ejemplos de señales reales medidas en el laboratorio, y reportando la demostración experimental del efecto Gibbs utilizando un filtro pasabajos de alto orden.

¹“El material indispensable para el laboratorio matemático de un alumno es muy simple. Cada estudiante debería tener una copia de la tabla de cuadrados de Barlow, una copia de las Tablas de Cálculos de Crelle, y una tabla de logaritmos a siete decimales. Además, es necesario que cuente con papel borrador, y finalmente, un cuaderno para hacer análisis práctico de Fourier. Con este modesto equipamiento podrá realizar casi todos los cálculos descriptos aquí, aunque podrá ahorrar tiempo y esfuerzo utilizando máquinas de sumar y multiplicar, si estuviesen disponibles.”

2.1. Series de Fourier

Una señal $\tilde{x}(t)$ es periódica de período T_0 si $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + kT_0)$ para todo k entero, y para todo t . La expansión en *series de Fourier* consiste en expresar esta función como una suma infinita de términos seno y coseno, que habitualmente se escribe como

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}kt\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}kt\right), \quad (2.1)$$

y se suele conocer como *ecuación de síntesis*. Los coeficientes a_k y b_k representan las amplitudes de los términos coseno y seno, respectivamente. La cantidad $2\pi/T_0 \doteq \Omega_0$ es la *frecuencia angular fundamental* de la señal (que se mide en radianes por segundo), y en consecuencia, la cantidad $k(2\pi/T_0) = k2\pi f_0 = k\Omega_0$ representa el k -ésimo armónico de la frecuencia fundamental Ω_0 . En estas notas se enfatizará la unidad de frecuencia en *ciclos por segundo* o Hertz, abreviado Hz. La frecuencia fundamental f_0 es la inversa del período, $f_0 = 1/T_0$, y naturalmente, $\Omega_0 = 2\pi f_0$. En general, la frecuencia medida en Hz se prefiere en aplicaciones en ingeniería, mientras que la unidad de medida en radianes por segundo es frecuente en los campos de la matemática y la física. En el caso de las series y las transformadas, la elección de una u otra unidad de medida implica la aparición de algunas constantes, típicamente 2π o $1/(2\pi)$, en ciertas expresiones.

Cada una de las funciones seno y coseno de la expresión (2.1) se denomina *función base*, y forman un conjunto *ortogonal* sobre el intervalo T_0 , lo que significa que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\int_0^{T_0} \cos\left(m\frac{2\pi}{T_0}t\right) \cos\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt = \begin{cases} T_0/2, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\int_0^{T_0} \cos\left(m\frac{2\pi}{T_0}t\right) \sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt = 0, \quad \text{para todo } m, n, \quad (2.3)$$

$$\int_0^{T_0} \sin\left(m\frac{2\pi}{T_0}t\right) \sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt = \begin{cases} T_0/2, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (2.4)$$

Estas relaciones pueden verificarse analíticamente (calculando la integral) o bien estudiando gráficamente el producto de dos señales de diferentes frecuencias, tal como se ve en la Fig. 2.1: el producto de dos armónicos de distinta frecuencia, en el lapso de un período fundamental de la señal genera una función con idéntica área por encima y por debajo del eje de las abscisas, y por lo tanto el área neta (la integral) es nula.

Para determinar el coeficiente a_0 , se integran ambos miembros de la ecuación (2.1) sobre un período completo:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_0 dt + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) \right] dt = a_0 T_0,$$

ya que las integrales sobre un período de tiempo de los términos $\cos[k(2\pi/T_0)t]$ y $\sin[k(2\pi/T_0)t]$ son nulas. Se encuentra entonces que a_0 es el *valor medio* de la señal periódica $\tilde{x}(t)$ sobre un período, es decir

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) dt. \quad (2.5)$$

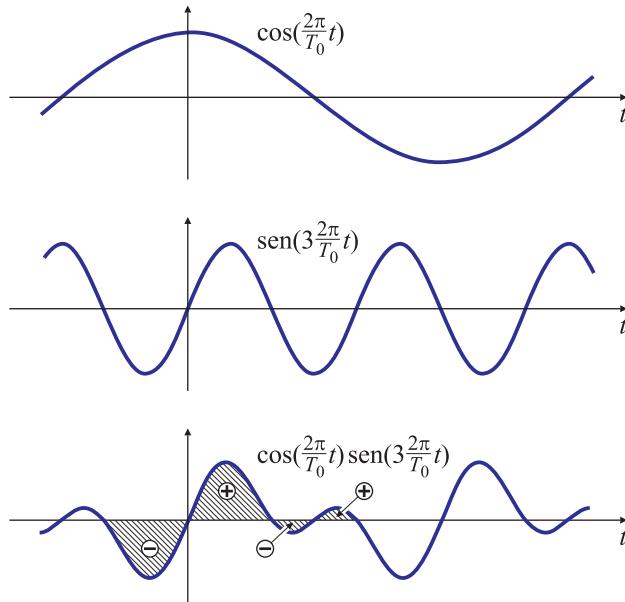


Fig. 2.1. Verificación gráfica de las ecuaciones (2.2) y (2.4), para $m \neq n$, y de la ecuación (2.3).

Para determinar los coeficientes a_k se multiplican ambos miembros de la ecuación (2.1) por la función $\cos[k(2\pi/T_0)t]$, y se integra sobre un período completo. Es indistinto integrar sobre el intervalo $-T_0/2 \leq t < T_0/2$ o sobre el intervalo $0 \leq t \leq T_0$, como se verá en la Sección 2.5 (Ejemplo 2.17). Utilizando las identidades (2.2) y (2.3), se encuentra que

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T_0} t\right) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

De manera análoga, aplicando la ecuación (2.4) puede determinarse que

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T_0} t\right) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7) se conocen como *ecuaciones de síntesis*.

2.1.1. Serie de Fourier con exponentiales complejas

La serie de Fourier de la ecuación (2.1) se puede escribir de una manera más compacta utilizando exponentiales complejas; basta sustituir en (2.1) los términos seno y coseno por su forma exponencial

$$\begin{aligned} \cos(k2\pi f_0 t) &= \frac{1}{2} \left(e^{jk2\pi f_0 t} + e^{-jk2\pi f_0 t} \right), \\ \sin(k2\pi f_0 t) &= \frac{1}{2j} \left(e^{jk2\pi f_0 t} - e^{-jk2\pi f_0 t} \right) = j \frac{1}{2} \left(-e^{jk2\pi f_0 t} + e^{-jk2\pi f_0 t} \right). \end{aligned}$$

Se obtiene entonces

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_k - jb_k}{2} \right) e^{jk2\pi f_0 t} + \left(\frac{a_k + jb_k}{2} \right) e^{-jk2\pi f_0 t} \right]. \quad (2.8)$$

Definiendo el número complejo c_k en base a a_k y b_k como

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_k - jb_k), & k > 0, \\ a_0, & k = 0, \\ \frac{1}{2} (a_{(-k)} + jb_{(-k)}), & k < 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

se puede escribir la ecuación (2.8) de manera más simple:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t}, \quad -\infty < t < \infty \quad (2.10)$$

donde

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

La expansión en series (2.10) se conoce como *serie de Fourier compleja*. Los coeficientes c_k dados por (2.11) son los *coeficientes complejos de Fourier*. La derivación de la ecuación (2.11) también puede obtenerse siguiendo un procedimiento similar al utilizado para la serie de senos y cosenos, sabiendo que

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{jn2\pi f_0 t} e^{-jm2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j(n-m)2\pi f_0 t} dt = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (2.12)$$

como puede demostrarse resolviendo la integral.

La ecuación (2.11) explica cómo calcular todos los coeficientes complejos de Fourier a partir de una señal periódica $\tilde{x}(t)$ dada. Por ello se la suele denominar *ecuación de análisis*. Por otra parte, la ecuación (2.10) indica cómo reconstruir la señal $\tilde{x}(t)$ a partir de un conjunto de coeficientes c_k dados, y por tal motivo se la suele denominar *ecuación de síntesis*.

2.1.2. Algunas propiedades

El análisis de (2.9) y (2.11) muestra que:

1. Si la función $\tilde{x}(t)$ es *par*, es decir $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(-t)$, los coeficientes c_k son reales y pares, $c_k = c_{(-k)} \in \mathbb{R}$, y la serie (2.1) es una serie de cosenos (los coeficientes b_k son nulos).
2. Si $\tilde{x}(t)$ es *ímpar*, i.e. $\tilde{x}(t) = -\tilde{x}(-t)$, los coeficientes c_k son imaginarios e impares, $c_k = -c_{(-k)} \in \mathbb{I}$ y la serie (2.1) es una serie de senos (los coeficientes a_k son nulos).
3. Si $\tilde{x}(t)$ es real

$$c_k = c_{-k}^*, \quad (2.13)$$

donde el símbolo “*” indica conjugación.

2.1.3. ¿Qué significan las frecuencias negativas?

De acuerdo la representación de la serie compleja (2.10), una señal periódica contiene todas la frecuencias (positivas y negativas) que están armónicamente relacionadas –en relación entera– con la frecuencia fundamental f_0 . Según Haykin (1989), la presencia de las frecuencias negativas se debe a que el modelo matemático de la señal descrito por la ecuación (2.10) requiere el uso de frecuencias negativas. De hecho, esta representación utiliza una función base ($e^{jk2\pi f_0 t}$) que toma valores complejos, lo que tampoco tiene significado físico. La razón de utilizar funciones que toman valores complejos y componentes de frecuencia negativas permite una descripción matemática compacta de una señal periódica, que es útil tanto para la teoría como para las aplicaciones.

Sin embargo, para Porat (1997) la existencia física de las frecuencias negativas se manifiesta, por ejemplo, al pensar en el giro de una rueda. Ciertamente la rotación en sentido horario es diferente del giro en sentido antihorario; de modo que si la velocidad angular de una rueda que gira en sentido antihorario se define como positiva, la rotación en sentido horario será negativo. La frecuencia de una señal juega el mismo papel que la velocidad angular de la rueda y puede tomar cualquiera de los dos signos. Para señales que toman valores reales, la propiedad de simetría conjugada $c_k = c_{(-k)}^*$ (2.13) de los coeficientes de la serie de Fourier –o de la transformada de Fourier $X(-f) = X^*(f)$ que se estudia en la Sección 2.6.11– oculta la existencia de frecuencias negativas. Sin embargo, para señales complejas las frecuencias positivas y negativas son diferentes. Por ejemplo, la señal compleja $e^{j2\pi f_0 t}$ con $f_0 > 0$ es distinta de la señal con $f_0 < 0$.

Las señales complejas también son motivo de controversia, debido a que tales señales no suelen encontrarse como entidades físicas. En realidad, sirven como representaciones matemáticas apropiadas para señales reales de cierto tipo. Un ejemplo familiar en de ingeniería eléctrica es la representación fasorial de tensiones y corrientes alternas utilizada en el análisis de estado estacionario de circuitos eléctricos. Una tensión real $v(t) = v_m \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ se representa con el fasor $V = v_m e^{j\phi_0}$; la relación entre $v(t)$ y V es $v(t) = \text{Re}\{V e^{j2\pi f_0 t}\}$. El fasor representa la señal alterna *real* con una señal constante *compleja* V .

2.1.4. Espectro discreto

La representación de una señal periódica por medio de una serie de Fourier es equivalente a *resolver* la señal en sus diferentes componentes armónicos. La expresión de la serie de Fourier compleja (2.10) indica que una señal periódica $\tilde{x}(t)$ de período T_0 tiene componentes de frecuencia $0, \pm f_0, \pm 2f_0, \pm 3f_0, \dots$, donde $f_0 = 1/T_0$ es la frecuencia fundamental. Mientras que $\tilde{x}(t)$ pertenece al dominio tiempo, donde t es una variable definida *continuamente* sobre un intervalo finito o infinito, su descripción en el dominio de la frecuencia consta de componentes c_k concentrados en las frecuencias $\pm kf_0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. El gráfico de c_k en función de la frecuencia $f = kf_0 = k/T_0$ se denomina *espectro* de la señal. El término “espectro” proviene del latín *spectrum*, o imagen, y fue utilizado originariamente por Newton en sus investigaciones sobre la naturaleza de la luz.

Dada una señal $\tilde{x}(t)$ se puede determinar su espectro utilizando la ecuación de análisis (2.11); recíprocamente, si se especifica el espectro, es posible determinar la señal temporal asociada utilizando la ecuación de síntesis (2.10). Esto implica que la señal periódica $\tilde{x}(t)$

puede especificarse de dos formas equivalentes:

1. en el *dominio tiempo*, donde se representa $\tilde{x}(t)$ como una función de la variable real tiempo;
2. en el *dominio frecuencia*, donde la señal es descripta por su espectro: los coeficientes c_k en función de las frecuencias armónicas de f_0 .

Ambas representaciones son aspectos diferentes de un mismo fenómeno, y no son independientes una de otra, sino que están fuertemente relacionadas entre sí por las ecuaciones de síntesis y análisis (2.10) y (2.11), respectivamente.

En general, el coeficiente de Fourier c_k es un número complejo, de modo que se puede expresar en la forma polar

$$c_k = |c_k| e^{j \arg(c_k)}.$$

El término $|c_k|$ define la amplitud de la k -ésima componente armónica de la señal $\tilde{x}(t)$, y la gráfica de $|c_k|$ versus la frecuencia permite obtener el *espectro de amplitud* discreto de la señal. El gráfico del $\arg(c_k)$ en función de la frecuencia se denomina *espectro de fase* discreto de la señal. Se dice que el espectro es *discreto* porque tanto la amplitud como la fase de c_k están concentrados en frecuencias que son múltiplos enteros (positivos y negativos) de la frecuencia fundamental f_0 , y no están definidos para otros valores de frecuencia.

Las propiedades de la Sección 2.1.2 muestran que los coeficientes complejos de Fourier (2.11) de una señal $\tilde{x}(t)$ que toma valores reales verifican $c_{(-k)} = c_k^*$, donde c_k^* es el complejo conjugado de c_k . Es un hecho conocido que

$$|c_{(-k)}| = |c_k^*| = |c_k|,$$

y

$$\arg(c_{-k}) = \arg(c_k^*) = -\arg(c_k).$$

Esto significa que el espectro de amplitud de una señal periódica $\tilde{x}(t)$ que tome valores reales es *simétrico* (una función par de la frecuencia), y que el espectro de fase es *antisimétrico* (una función impar de la frecuencia) respecto de un eje vertical que pase por el origen.

EJEMPLO 2.1. Serie de Fourier de una constante

Si bien una señal constante $\tilde{x}(t) = A$, $-\infty \leq t \leq \infty$ no es una señal periódica típica, es fácil ver que cumple con la condición que $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + T_0)$ para todo t y cualquier T_0 ; es una señal periódica de *período arbitrario*. Los coeficientes de la serie de Fourier se calculan a partir de la ecuación (2.11), resultando para $k = 0$,

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A dt = A,$$

y para $k \neq 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\frac{1}{-jk2\pi f_0} \right) A e^{-jk2\pi f_0 t} \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} \\ &= \frac{A}{-jk2\pi f_0 T_0} \left(e^{-jk2\pi f_0 \frac{T_0}{2}} - e^{jk2\pi f_0 \frac{T_0}{2}} \right) = \frac{A}{-jk2\pi} [-2j \operatorname{sen}(k\pi)] \\ &= \frac{A}{\pi k} \operatorname{sen} k\pi = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

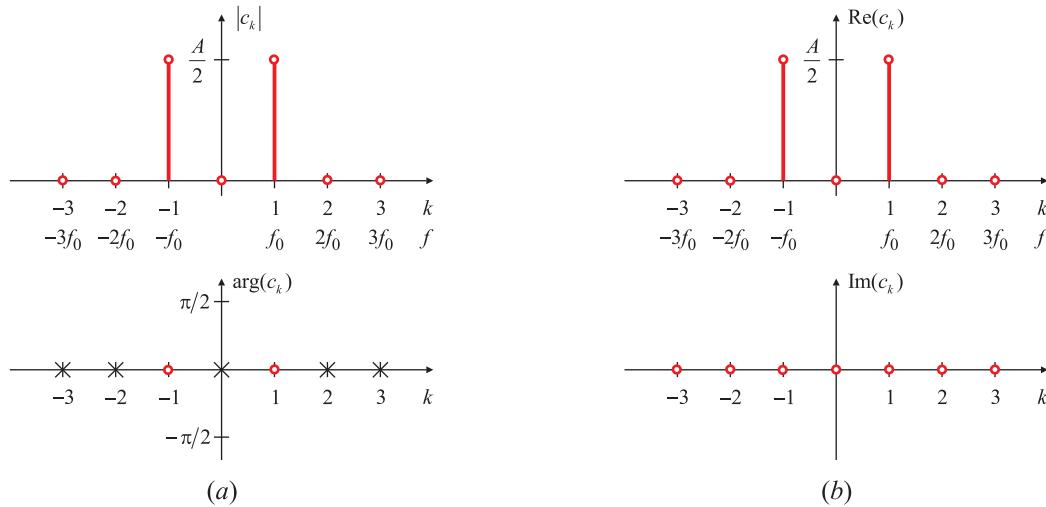


Fig. 2.2. Espectro discreto de $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$: módulo-fase (a) y parte real-parte imaginaria (b).

(En el desarrollo del último término de (2.14) se tuvo en cuenta que $f_0 T_0 = 1$). En consecuencia, el espectro discreto de una señal constante $\tilde{x}(t) = A$ consta de un único valor A para la frecuencia $f = 0$, asociada a $k = 0$. En este caso no tiene sentido hablar de los “armónicos” de la frecuencia fundamental. \square

EJEMPLO 2.2. Serie de Fourier de un coseno

La función periódica $\tilde{x}(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ se puede expresar, aplicando la fórmula de Euler, como

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= A \cos(2\pi f_0 t) \\ &= \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t}.\end{aligned}$$

Una comparación con la ecuación (2.10) revela que esta expresión coincide con la serie de Fourier; por lo tanto, los únicos coeficientes complejos no nulos son $c_{(-1)}$ y c_1 , y su valor es

$$c_{(-1)} = c_1 = \frac{A}{2}.$$

De modo que el espectro discreto de una señal tipo coseno es real, y sólo tiene dos valores no nulos, correspondientes a la primera armónica $k = \pm 1$, o bien a las frecuencias $\pm f_0$, tal como se muestra en la Fig. 2.2, en donde el espectro discreto ha sido graficado en las dos formas típicas: módulo y fase o parte real-parte imaginaria. El coseno es una función par, y sus coeficientes de Fourier son reales y pares, tal como lo indican las propiedades de la Sección 2.1.2. \square

EJEMPLO 2.3. Serie de Fourier de una sinusoida

De manera similar, puede determinarse el espectro de una señal $\tilde{x}(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\sin(2\pi f_0 t) &= -\frac{1}{2j} e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2j} e^{j2\pi f_0 t} \\ &= \frac{j}{2} e^{-j2\pi f_0 t} - \frac{j}{2} e^{j2\pi f_0 t}\end{aligned}$$

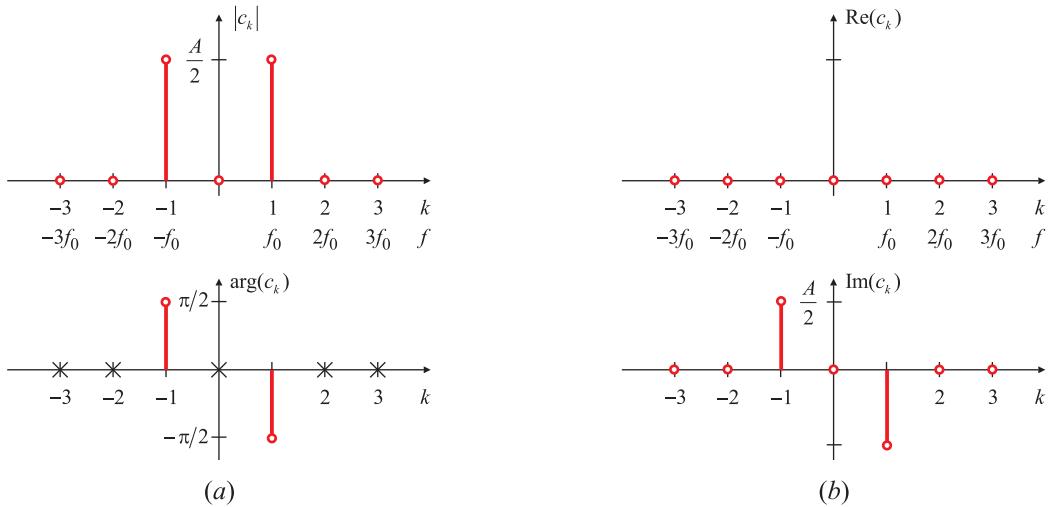


Fig. 2.3. Espectro discreto de $x(t) = A \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$: módulo-fase (a) y parte real-parte imaginaria (b).

se deduce que el espectro discreto consta solamente de dos valores no nulos, correspondientes a la primera armónica (frecuencia f_0), para $k = \pm 1$ y cuyos valores son

$$c_{(-1)} = j \frac{A}{2}, \quad c_1 = -j \frac{A}{2}.$$

Este espectro es imaginario puro e impar, como indican las propiedades de la Sección 2.1.2, y se grafican en la Fig. 2.3 tanto en módulo y fase como en la forma parte real-parte imaginaria. \square

EJEMPLO 2.4. Serie de Fourier de un tren de pulsos rectangulares

La Fig. 2.4 muestra un tren periódico de pulsos rectangulares de amplitud A , duración τ y período T_0 . Por conveniencia se elige que el origen del tiempo ($t = 0$) coincide con el centro del pulso. Sobre un período $T_0/2 < t \leq T_0/2$, la señal puede describirse analíticamente² como

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ A/2, & t = \pm\tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El espectro discreto de $\tilde{x}(t)$ formado por los coeficientes complejos c_k se calcula a partir de la ecuación (2.11). Se encuentra que, si $k = 0$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt \Big|_{k=0} = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt \\ &= \frac{A\tau}{T_0} \end{aligned}$$

²En muchas aplicaciones, el valor de la función en $t = \pm\tau/2$ es irrelevante, y las funciones

$$\tilde{x}_1(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad \tilde{x}_2(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ A/2, & t = \pm\tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad \tilde{x}_3(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

aunque matemáticamente diferentes, suelen ser representaciones equivalentes de un mismo fenómeno físico.

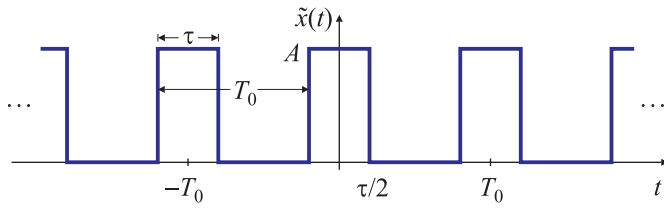


Fig. 2.4. Tren periódico de pulsos rectangulares de amplitud A , duración τ , y período T_0 .

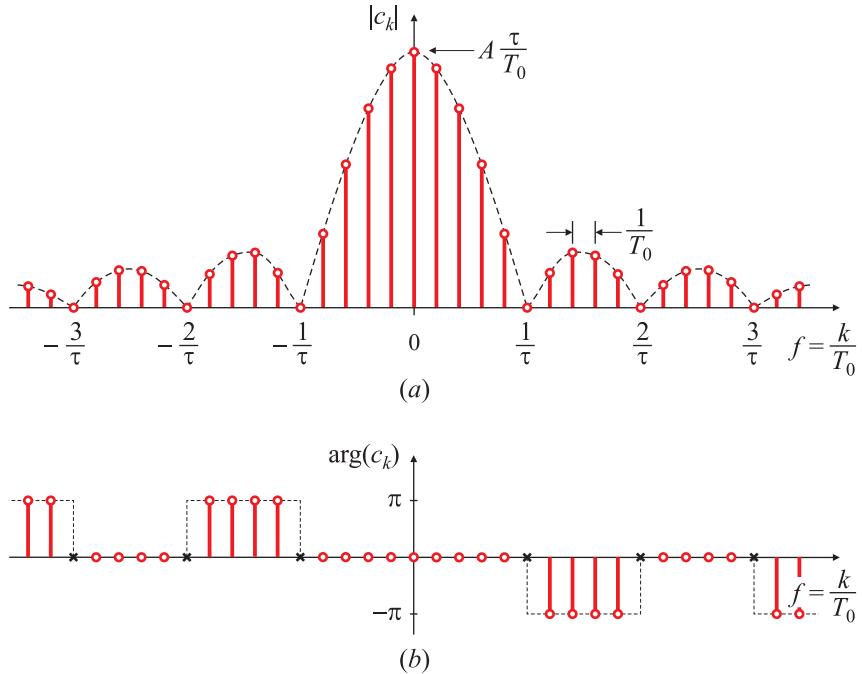


Fig. 2.5. Espectro discreto del tren periódico de pulsos rectangulares para un ciclo de trabajo $\tau/T_0 = 1/5$: amplitud (a) y fase (b).

y si $k \neq 0$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk2\pi f_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T_0} \left(\frac{1}{-jk2\pi f_0} \right) e^{-jk2\pi f_0 t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{T_0} \left(\frac{1}{-jk2\pi f_0} \right) (e^{-jk2\pi f_0 \tau/2} - e^{jk2\pi f_0 \tau/2}) \\ &= A \left(\frac{1}{jk2\pi} \right) 2j \sin(k2\pi f_0 \tau/2) = \frac{A}{\pi k} \sin\left(\pi \tau \frac{k}{T_0}\right), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

que, por motivos que serán evidentes más adelante, también puede escribirse como

$$c_k = A \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin\left(\pi \tau \frac{k}{T_0}\right)}{\pi \tau \frac{k}{T_0}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.15)$$

El espectro de amplitud $|c_k|$ y de fase $\arg(c_k)$ en función de los valores discretos de frecuencia $f_k = k/T_0$, para un *ciclo de trabajo* $\tau/T_0 = 1/5$, se ha graficado en la Fig. 2.5. Se observa que:

1. El *espaciado* entre las líneas del espectro de la Fig. 2.5 está determinado por la frecuencia fundamental f_0 de la señal, que es la inversa del período T_0 , $f_0 = 1/T_0$.

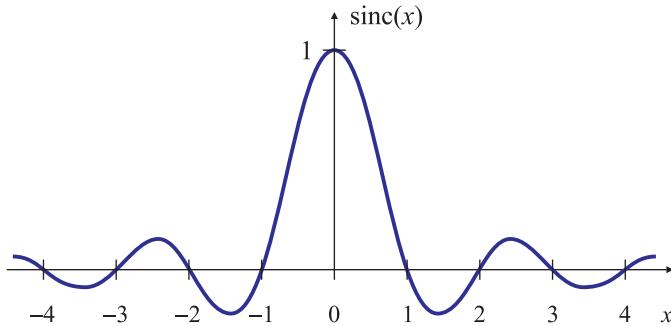


Fig. 2.6. La función $\text{sinc}(x)$.

Tabla 2.1. Ubicación y valor de los extremos relativos.

abscisa x_k	0,000	1,430	2,459	3,471	4,477	5,482	6,484	7,486	8,488
$\text{sinc}(x_k)$	1,000	-0,217	0,128	-0,091	0,071	-0,058	0,049	-0,042	0,037

2. La *envolvente* de la magnitud del espectro está determinada por la amplitud A y la duración τ del pulso, y sigue una forma tipo $(\sin x)/x$. El valor del espectro a la frecuencia $f = 0$ es precisamente el valor medio en un período o valor de continua de la señal $\tilde{x}(t)$, que vale $A\tau/T_0$ (como se deduce de la Fig. 2.4).
3. La envolvente del espectro de amplitud cruza por cero en frecuencias que son múltiplos de $1/\tau$ (el *ancho* del pulso), y que pueden o no coincidir con las líneas espectrales separadas k/T_0 . En este caso particular, como $\tau/T_0 = 1/5$ los ceros de la envolvente del espectro se anulan para los múltiplos de 5 veces la frecuencia fundamental, como revela la Fig. 2.5(a).
4. El espectro de fase toma los valores 0 y $\pm\pi$, según sea el signo de $[\sin(\pi\tau k/T_0)] / (\pi\tau k/T_0)$. La elección del signo de π (positivo o negativo) es irrelevante; en la figura se han elegido de forma de preservar la antisimetría. El valor de la fase es *indefinido* para aquellos armónicos en donde se anula c_k (en este caso, los múltiplos de $5f_0$); esta indefinición en la fase se ha indicado con cruces en la Fig. 2.5(b). \square

2.2. La función $\text{sinc}(\cdot)$

Esta función juega un papel muy importante en el análisis de Fourier, en el estudio de sistemas lineales e invariantes en el tiempo y en la teoría de comunicaciones en general. Se define la función $\text{sinc}(\cdot)$ como

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}, \quad (2.16)$$

cuya grafica se representa en la Fig. 2.6. La función $\text{sinc}(x)$ alcanza su máximo en $x = 0$, donde vale 1 (puede probarse aplicando la regla de l'Hôpital), y tiende a cero cuando x tiende a $\pm\infty$, oscilando entre valores positivos y negativos, con una envolvente que decae según $1/x$. La función pasa por cero para los valores enteros de la variable x , es decir, cuando $x = \pm 1, \pm 2, \dots$ etc. El tramo de la función entre dos ceros consecutivos se denomina *lóbulo*. El tramo comprendido entre $x = \pm 1$ es el *lóbulo principal*, y los demás son los *lóbulos laterales*.

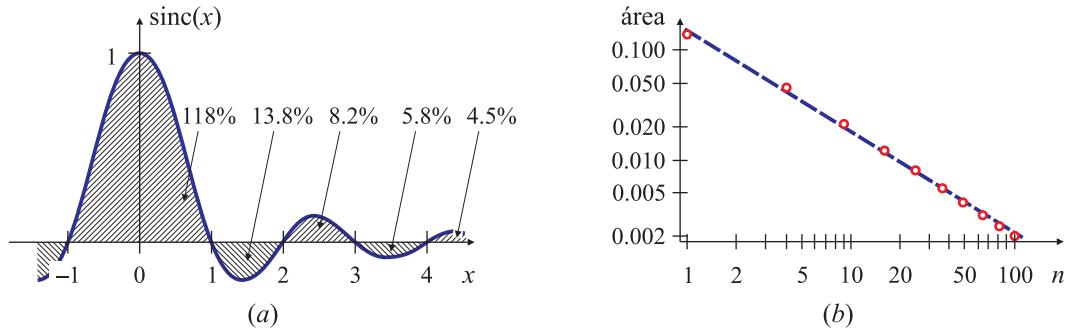


Fig. 2.7. Área de los lóbulos de la función sinc(·).

Tabla 2.2. Área relativa de los lóbulos laterales.

lóbulo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
área (%)	118	-13,8	8,2	-5,8	4,5	-3,7	3,1	-2,7	2,4	-2,1

Los extremos relativos ocurren en $x = x_k$ donde $d[\text{sinc}(x)]/dx = 0$, es decir cuando

$$\pi x_k \cos(\pi x_k) - \sin(\pi x_k) = 0, \quad \text{o bien} \quad \tan(\pi x_k) - \pi x_k = 0.$$

Esta es una ecuación trascendente, y no puede resolverse de forma analítica. Los primeros extremos relativos y los valores de la función en estos puntos se listan en la Tabla 2.1. Esta tabla muestra que la abscisa del extremo y su módulo son aproximadamente $k + 1/2$, y $[\pi(n + 1/2)]^{-1}$ para el k -ésimo lóbulo, cuando $k \rightarrow \infty$.

Aunque no es trivial, puede demostrarse que el área encerrada por la función $\text{sinc}(\cdot)$ es finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x) dx = 1,$$

y en forma general,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(ax) dx = \frac{1}{|a|}, \quad (2.17)$$

es decir, que la integral de la función converge. Esta igualdad se puede demostrar de manera sencilla aplicando los resultados de la Sección 2.6.15. Es interesante comparar el área de los distintos lóbulos. El área del lóbulo principal es

$$A_0 = \int_{-1}^1 \text{sinc}(x) dx = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) = 1,17898,$$

donde $\text{Si}(x) = \int_0^x \text{sen}(\sigma) d\sigma$ es la función *seno integral*, cuyos valores están tabulados. Si A_k indica el área del k -ésimo lóbulo, se encuentra que

$$A_k = \frac{1}{\pi} \text{Si}[(k + 1)\pi] - \frac{1}{\pi} \text{Si}(k\pi).$$

Algunos valores de las áreas de los lóbulos laterales expresados en porcentajes del área total se listan en la Tabla 2.2, y se representan en la Fig. 2.7(a). En la Fig. 2.7(b) se muestra que el área es muy aproximadamente inversamente proporcional al número de lóbulos.

Si bien la función $\text{sinc}(\cdot)$ tiene área acotada, esto no ocurre para su módulo $|\text{sinc}(\cdot)|$, lo que se demuestra fácilmente separando el intervalo de integración en segmentos de longitud $1/a$ (la distancia entre ceros sucesivos del sinc), y notando que $|\text{sen}(\pi ax)/(\pi ax)| \geq |\text{sen}(\pi ax)/(\pi n)|$ para $(n-1)/a \leq x \leq n/a$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left| \frac{\text{sen}(\pi ax)}{\pi ax} \right| dx &\geq \int_0^{1/a} \left| \frac{\text{sen}(\pi ax)}{\pi} \right| dx + \int_{1/a}^{2/a} \left| \frac{\text{sen}(\pi ax)}{2\pi} \right| dx + \cdots + \int_{(n-1)/a}^{n/a} \left| \frac{\text{sen}(\pi ax)}{n\pi} \right| dx + \cdots \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{(n-1)/a}^{n/a} |\text{sen}(\pi ax)| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\cos(n\pi)| = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

La serie del último término, conocida como serie armónica, no converge. Por lo tanto,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |\text{sinc}(ax)| dx \rightarrow \infty.$$

Utilizando la función $\text{sinc}(\cdot)$ la expresión (2.15) de los coeficientes c_k de la serie de Fourier del tren de pulsos rectangulares del Ejemplo 2.4 se puede escribir de manera más compacta como

$$c_k = A \frac{\tau}{T_0} \text{sinc} \left(\tau \frac{k}{T_0} \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2.3. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier juega un papel importante en muchas ramas de la ciencia. Si bien puede ser pensada de manera estrictamente funcional, como es común en el tratamiento de otras transformadas, también asume en muchos casos un significado físico tan preciso como el de las funciones de las cuales se deriva. Una forma de onda –óptica, eléctrica o acústica– y su espectro son apreciados igualmente como representación matemática o entidades medibles: un osciloscopio nos muestra la forma de onda, y un espectrómetro (un prisma!) o un analizador de espectro revela el espectro óptico o eléctrico. La apreciación acústica es más directa, ya que el oído “oye” el espectro. Las formas de onda y los espectros son transformadas unas de los otros; la transformada de Fourier es entonces una relación eminentemente física.

En muchas ramas de la ciencia se conocía la teoría de Fourier no en forma matemática, sino como un conjunto de proposiciones acerca de un fenómeno físico. Frecuentemente, la interpretación física de un teorema es un hecho experimentalmente comprobable, y esto permite al científico mantenerse alejado de lo que matemáticamente puede ser muy abstracto. El énfasis en la interpretación física permite tratar de manera natural con tópicos que normalmente se considerarían mas “avanzados”.

2.3.1. Desarrollo de la transformada de Fourier

En la Sección 2.1 se estudió cómo una señal periódica puede representarse como una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas. Estos resultados pueden extenderse para desarrollar una representación de señales *aperiódicas* como combinación lineal de exponenciales complejas. La introducción de esta representación es una

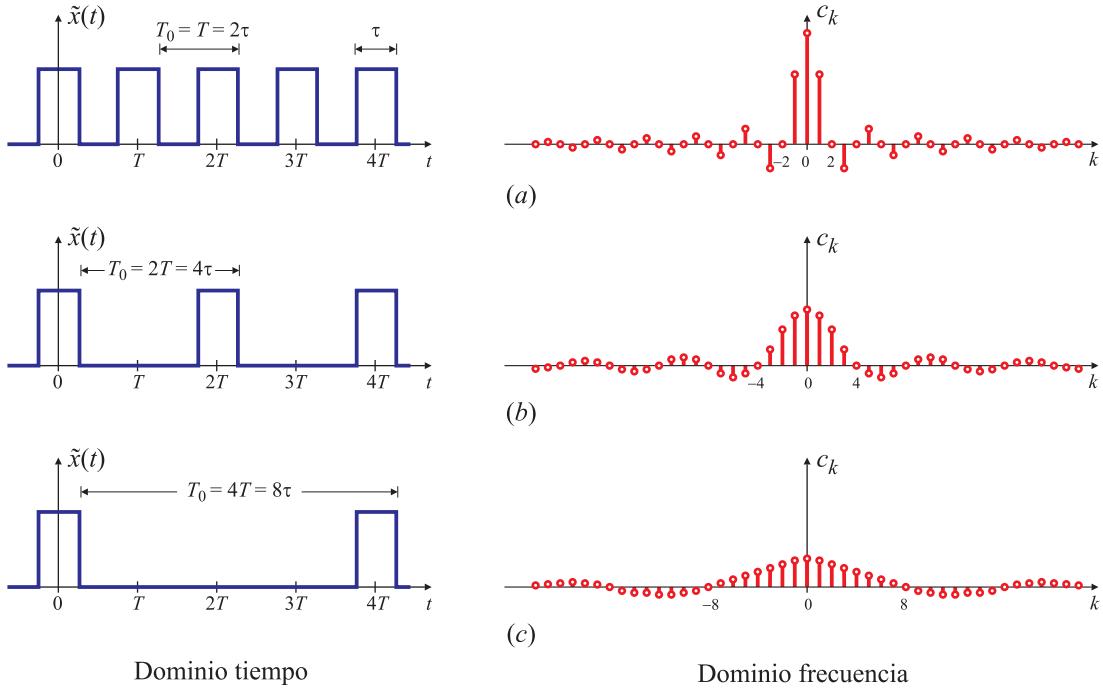


Fig. 2.8. Ondas cuadradas de distintos períodos y sus coeficientes de Fourier en función del número de armónico k . $T_0 = 2\tau$ (a); $T_0 = 4\tau$ (b); $T_0 = 8\tau$ (c).

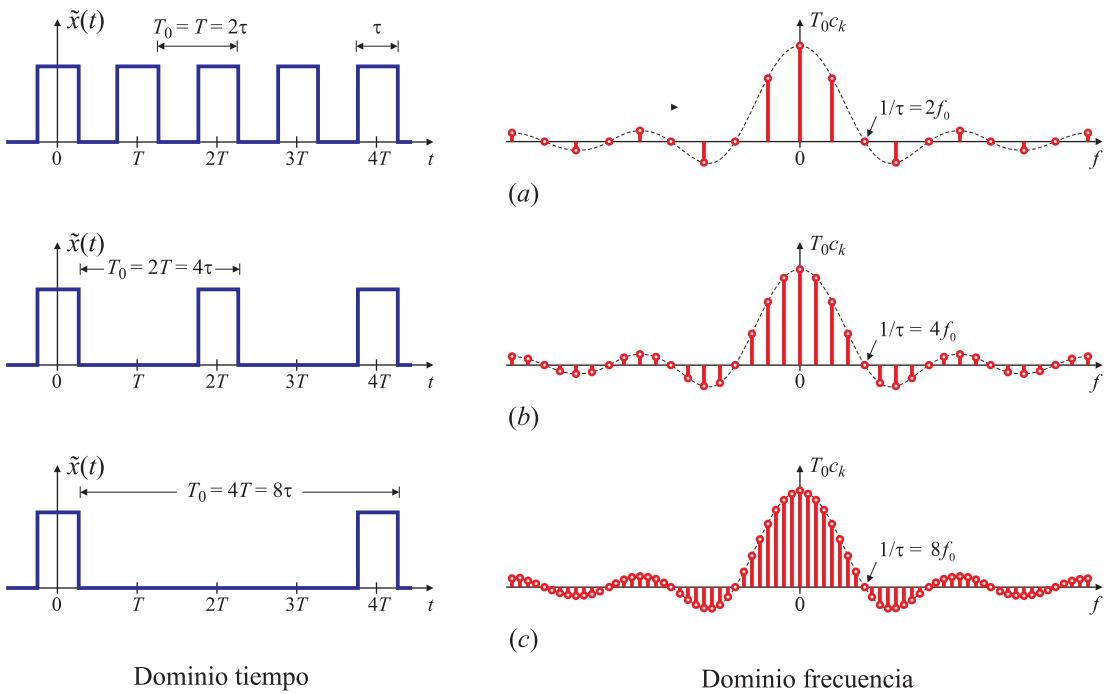


Fig. 2.9. Ondas cuadradas de distintos períodos y sus coeficientes de Fourier escalados por el período T_0 en función de la frecuencia $f_k = k/T_0$. $T_0 = 2\tau$ (a); $T_0 = 4\tau$ (b); $T_0 = 8\tau$ (c).

de las más importantes contribuciones de Fourier, y el desarrollo que se presenta aquí es muy similar al que él desarrolló en su trabajo original.

Los coeficientes complejos de la serie de Fourier de la onda periódica cuadrada del Ejemplo 2.4 están dados por la expresión (2.15), repetida aquí por comodidad,

$$c_k = A \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{k}{T_0}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \quad (2.18)$$

donde T_0 es el período de la señal, y τ el tiempo durante el cual la señal toma el valor A . En la Fig. 2.8 se grafican los valores de estos coeficientes, para un valor fijo de τ y distintos valores del período T_0 , en función del número de armónico k . En la Fig. 2.9 se ha repetido esta figura con algunas modificaciones. En primer lugar, se ha graficado $T_0 c_k$ en lugar de c_k , y se ha modificado el eje de abscisas, graficando los coeficientes en función de la *frecuencia* de los armónicos $f_k = k/T_0$, y no en función del número de armónico k . La importancia de estos cambios puede apreciarse examinando la ecuación (2.18): multiplicando c_k por T_0 se obtiene

$$T_0 c_k = A \tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{k}{T_0}\right) = A \tau \left. \frac{\operatorname{sen}(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right|_{f=k/T_0}.$$

Pensando en f como una variable continua, la función $A \tau \operatorname{sen}(\pi \tau f) / (\pi \tau f)$ representa la envolvente de los coeficientes $T_0 c_k$, y estos coeficientes son simplemente muestras equiespaciadas de esta envolvente. Además, si τ (el “tiempo de encendido”) se deja fijo, la envolvente de $T_0 c_k$ es *independiente de T_0* . Sin embargo, tal como se observa en la Fig. 2.9, a medida que aumenta el espaciado entre los pulsos (T_0 crece o disminuye f_0) la envolvente se “muestrea” más finamente. Cuando T_0 se hace arbitrariamente grande la onda periódica cuadrada original se parece a un pulso: en el dominio tiempo se tiene una señal aperiódica que coincide con un período de la onda cuadrada. Además los coeficientes de la serie de Fourier (multiplicados por T_0) son muestras cada vez más próximas entre sí de la envolvente, de manera que, en un sentido que se especificará en seguida, el conjunto de coeficientes de la serie de Fourier tiende a la función envolvente cuando $T_0 \rightarrow \infty$.

Este ejemplo ilustra la idea básica del desarrollo de Fourier para representar señales aperiódicas. Específicamente, se piensa en una señal aperiódica como el límite de una señal periódica cuando el período se hace arbitrariamente grande, y se examina el comportamiento en el límite de la representación en series de Fourier. Para tal fin se considera una señal aperiódica $x(t)$ cualquiera que tenga duración finita; esto es, que para algún número T , $x(t) = 0$ para $|t| > T$, como se muestra en la Fig. 2.10(a). Si bien esto no es estrictamente necesario –basta que sea de “duración finita” en el sentido que se define en la Sección 2.10.1– esta hipótesis no cambia los resultados fundamentales pero facilita la demostración.

A partir de esta señal aperiódica se puede construir una señal periódica $\tilde{x}(t)$ –de la cual $x(t)$ sea un período– replicando $x(t)$ cada T_0 unidades de tiempo como se observa en la Fig. 2.10(b). A medida que se incrementa T_0 , $\tilde{x}(t)$ se asemeja a $x(t)$ sobre un intervalo de tiempo mayor y en el límite, cuando $T_0 \rightarrow \infty$, $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$: ambas señales son idénticas para cualquier valor finito de t .

Es interesante examinar este efecto sobre la representación en serie de Fourier de la señal periódica $\tilde{x}(t)$. A partir de (2.11) se tiene que

$$T_0 c_k = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.19)$$

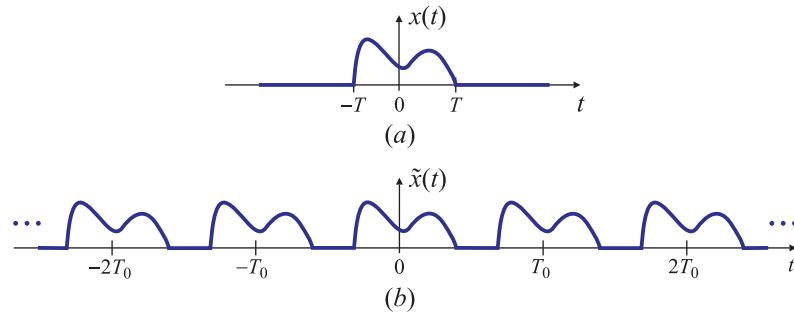


Fig. 2.10. Señal aperiódica $x(t)$ (a) y señal periódica $\tilde{x}(t)$ construida a partir de la replicación de $x(t)$ cada T_0 (b).

Ya que $\tilde{x}(t) = x(t)$ cuando $|t| < T_0/2$, y como $x(t) = 0$ fuera de este intervalo, (2.19) puede reescribirse como

$$T_0 c_k = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt. \quad (2.20)$$

Como $-\infty < k < \infty$, cuando $T_0 \rightarrow \infty$ el cociente k/T_0 tiende a una variable continua que se indicará como f . Entonces (2.20) se vuelve función de esta variable continua f , y se notará como $X(f)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt. \quad (2.21)$$

Comparando (2.19) con (2.21), los coeficientes c_k de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$ pueden calcularse a partir de $X(f)$ como

$$c_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right). \quad (2.22)$$

Combinando (2.22) con (2.10), $\tilde{x}(t)$ se puede escribir

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} \quad (2.23)$$

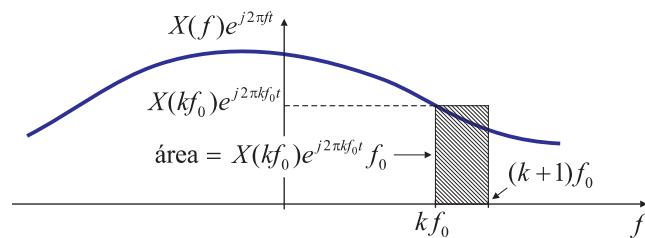


Fig. 2.11. Interpretación gráfica de la ecuación (2.23).

De acuerdo a los comentarios anteriores, cuando $T_0 \rightarrow \infty$, la función periódica $\tilde{x}(t)$ tiende a la función aperiódica $x(t)$. Pero además el cociente k/T_0 tiende a una variable continua f , el término $1/T_0$ se convierte en un diferencial df , y el miembro derecho de (2.23) se convierte en la aproximación de Riemann de la integral, como se muestra en la Fig. 2.11. Si $f_0 = 1/T_0$, cada término de la sumatoria es el área de un rectángulo de altura $X(kf_0)e^{jk2\pi f_0 t}$ y ancho f_0 . En este análisis t no es una “variable”, sino que es el punto en donde se está calculando el valor de $\tilde{x}(t)$. Entonces, cuando $T_0 \rightarrow \infty$, $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$ y las ecuaciones (2.23) y (2.21) se convierten, respectivamente, en

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (2.24)$$

y

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2.25)$$

Las ecuaciones (2.24) y (2.25) se denominan *par transformado de Fourier*; la ecuación (2.24) es la transformada inversa de Fourier de $X(f)$, o también ecuación de *síntesis* mientras que la ecuación (2.25) se denomina *transformada de Fourier* de $x(t)$, o ecuación de *análisis*.

El *núcleo* o *kernel* de la transformada de Fourier es el término $e^{-j2\pi ft}$ y el de la transformada inversa es $e^{j2\pi ft}$. Para el caso de la ecuación (2.25) y para cada valor fijo de f , el núcleo consiste de ondas (senos y cosenos) con un período o longitud de onda $T = 1/f$, medido en las unidades de tiempo t . Estas ondas se llaman *modos*. Análogamente, para la ecuación de síntesis (2.24) los modos correspondientes a un valor fijo de f tienen una frecuencia de f períodos por unidad de tiempo.

La transformada inversa de Fourier (2.24) puede verse como una “receta” para recuperar el valor de la función $x(\cdot)$ en un punto t a partir de una combinación de modos de todas las frecuencias $-\infty < f < \infty$. El modo asociado con una frecuencia particular f tiene un cierto “peso” $X(f)$. El conjunto completo de valores de $X(f)$ se denomina el *espectro* de $x(t)$, ya que brinda información de cómo se combinan ondas sinusoidales de distinta frecuencia para componer la señal $x(t)$. Por ello el nombre de *ecuación de síntesis* ya que a partir del conocimiento de los “pesos” de los modos $X(f)$ se puede generar la función $x(t)$ para cada valor de t que se desee. Igualmente importante es el proceso opuesto, denominado *análisis*: dada la función $x(t)$ se puede encontrar qué “cantidad” $X(f)$ del modo de frecuencia f está presente en $x(\cdot)$, aplicando la transformada (2.25).

EJEMPLO 2.5. Transformada de Fourier de $x(t) = \beta e^{-\alpha t} u(t)$

Sea la función temporal (exponencial decreciente)

$$x(t) = \begin{cases} \beta e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

con $\alpha > 0$. Su transformada se calcula aplicando la ecuación (2.25),

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} \beta e^{-(\alpha+2\pi f)t} dt = \frac{-\beta}{\alpha + j2\pi f} e^{-(\alpha+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty}$$

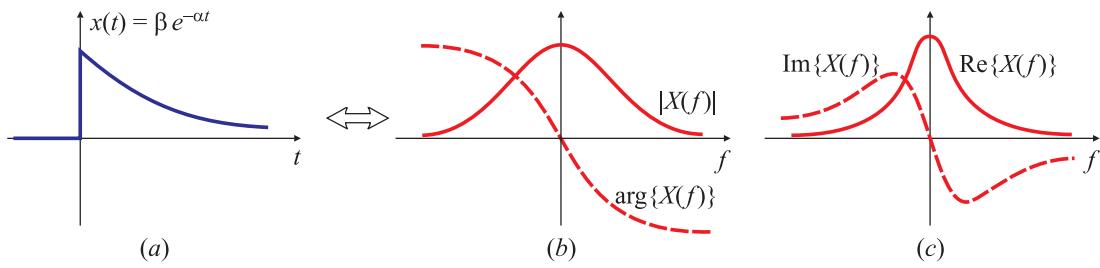


Fig. 2.12. Señal $x(t) = \beta e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, $t > 0$ (a). Representación en módulo y fase (b) y en parte real y parte imaginaria (c) de su transformada de Fourier.

y entonces,

$$X(f) = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f}.$$

La expresión de $X(f)$ es una función compleja de f . La parte real y la parte imaginaria son

$$\operatorname{Re}\{X(f)\} = \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}, \quad \operatorname{Im}\{X(f)\} = \frac{-2\pi f \beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2},$$

como se muestran en la Fig. 2.12(b). La transformada también puede representarse en función del módulo y la fase, $X(f) = |X(f)| e^{j\theta(f)}$, y entonces

$$|X(f)| = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}, \quad \arg\{X(f)\} = \tan^{-1}\left(\frac{-2\pi f}{\alpha}\right)$$

que se grafican en la Fig. 2.12(c).

La Fig. 2.12 ilustra las diversas formas de representar la misma transformada de Fourier. En aplicaciones ingenieriles suele preferirse la forma en módulo y fase. \square

Para probar la validez de la ecuación de síntesis (2.24) se puede determinar la función $x(t)$ del ejemplo anterior a partir de su transformada de Fourier $X(f)$.

EJEMPLO 2.6. Antitransformada de $X(f) = \beta/(\alpha + j2\pi f)$

Dado el espectro

$$X(f) = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f} = \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - j \frac{2\pi f \beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2},$$

calculado en el ejemplo anterior, la transformada inversa $x(t)$ se obtiene aplicando la ecuación de síntesis (2.24),

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - j \frac{2\pi f \beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right] e^{j2\pi f t} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\beta\alpha \cos(2\pi f t)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} + \frac{2\pi f \beta \sin(2\pi f t)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right] df + j \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\beta\alpha \sin(2\pi f t)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - \frac{2\pi f \beta \cos(2\pi f t)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right] df. \end{aligned}$$

La segunda integral es nula porque cada término del integrando es una función impar. La Fig. 2.13 muestra el primer integrando de la segunda integral, lo que permite interpretarla gráficamente. Como la función es impar, $g(t) = -g(-t)$, y en consecuencia, el área bajo la función desde $-f_0$ hasta f_0

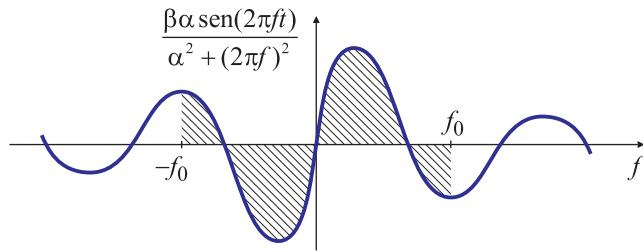


Fig. 2.13. Integración de una función impar.

es nula. En el límite, a medida que $f_0 \rightarrow \infty$ el *valor principal* de la integral de la función es nula. Bajo estas consideraciones,

$$x(t) = \frac{\beta\alpha}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi ft)}{(\alpha/2\pi)^2 + f^2} df + \frac{2\pi\beta}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f \sin(2\pi ft)}{(\alpha/2\pi)^2 + f^2} df.$$

De una tabla de integrales, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{b^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{b} e^{-ab}, \quad a > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{b^2 + x^2} dx = \pi e^{-ab}, \quad a > 0,$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\beta\alpha}{(2\pi)^2} \left[\frac{\pi}{\alpha/2\pi} e^{-(2\pi t)(\alpha/2\pi)} \right] + \frac{2\pi\beta}{(2\pi)^2} \left[\pi e^{-(2\pi t)(\alpha/2\pi)} \right] \\ &= \frac{\beta}{2} e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{2} e^{-\alpha t} \\ &= \beta e^{-\alpha t}, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Si bien el resultado es el esperado, este ejemplo muestra que el cálculo de la antitransformada es bastante más complicado que el cálculo de la transformada realizado en el Ejemplo 2.5. \square

Cualquier integral de $-\infty$ a $+\infty$ es en realidad un límite definido por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \int_{-T_1}^{+T_2} x(t) dt \tag{2.28}$$

donde T_1 y T_2 tienden a infinito *independientemente* uno del otro. El *valor principal de Cauchy* (VPC) de una integral es un límite más específico, definido como

$$VPC \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} x(t) dt. \tag{2.29}$$

Mientras que (2.28) implica (2.29), es posible que exista (2.29) pero no (2.28): por ejemplo, la integral (2.29) de todas las funciones impares es nula, pero la integral (2.28) de estas funciones puede no existir. Para las funciones que satisfacen la CONDICIÓN 1 enunciada en la Sección 2.3.4, las integrales de Fourier pueden interpretarse en el sentido de (2.28). En cambio, para las funciones que satisfacen la CONDICIÓN 2 las transformadas se definen por el valor principal de Cauchy (2.29) de la integral.

Este es un detalle técnico que pone de manifiesto la sutileza matemática del análisis de Fourier; sin embargo, la intuición física salva la mayoría de estas dificultades en las aplicaciones prácticas.

En general, si las funciones $x(t)$ y $X(f)$ están relacionadas por las ecuaciones (2.24) y (2.25) se dice que las dos funciones forman un *par transformado de Fourier*, y esta relación se indica

$$x(t) \iff X(f).$$

Otra notación usual es

$$X(\cdot) = \mathcal{F}\{x\}(\cdot) \quad \text{y} \quad x(\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\{X\}(\cdot).$$

Esta última notación en forma de operadores quita protagonismo a las variables t y f , que en algunos casos puede dificultar la comprensión de algunas propiedades. En (2.24) f es sólo una variable de integración, lo mismo que t en (2.25). Estas ecuaciones podrían escribirse también como

$$x(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma) e^{j2\pi\sigma t} d\sigma, \quad X(\mathbf{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) e^{-j2\pi\sigma f} d\sigma,$$

donde las verdaderas variables de cada expresión se han destacado en negrita. El relacionarlas con el tiempo o la frecuencia es nada más que una convención.

2.3.2. Cálculo de transformadas no triviales.

Los ejemplos precedentes muestran que, si bien en algunos casos el cálculo de las transformadas puede ser trivial, como en el Ejemplo 2.5, en otros casos puede ser un poco más complicado, como en el Ejemplo 2.6. En esta sección se muestra que el cálculo de la transformada de algunas funciones “complicadas” demanda herramientas matemáticas elaboradas. El propósito es que esta sección sirva como motivación para el estudio de una serie de propiedades a desarrollarse en próximas secciones, que aplicadas juiciosamente permiten evitar el empleo de las técnicas desarrolladas aquí.

El cálculo de la transformada de Fourier implica evaluar integrales impropias, y en algunas ocasiones se pueden calcular más fácilmente aplicando la teoría de Cauchy de las funciones analíticas, sobre todo cuando las funciones a transformar no tienen integrales triviales. La idea es aplicar el cálculo de integrales complejas sobre curvas cerradas para evaluar integrales reales sobre la recta real.

Si $g(x)$ es una función de una variable real x , su *extensión analítica* es la función $g(z)$, donde $z = x + jy \in \mathbb{C}$, tal que $g(x) = g(z)|_{\text{Im}\{z\}=0}$. Son útiles estos lemas de Jordan:

1. Sea $g(z)$ es una función analítica en todo punto del semiplano $\text{Im}\{z\} \geq 0$, salvo en un número finito de puntos z_k , $k = 1, \dots, n$, que **no** están sobre el eje real. Si $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$ para $z \in \text{Im}\{z\} > 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{jx} dx = j2\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} \{g(z)e^{iz}\},$$

donde la sumatoria se extiende sobre todos los puntos singulares de $g(z)$ contenidos en $\text{Im}\{z\} > 0$. ■

2. Si la función $g(z)$ posee puntos singulares sobre el eje real la contribución del residuo de ese polo es $j\pi$. ■

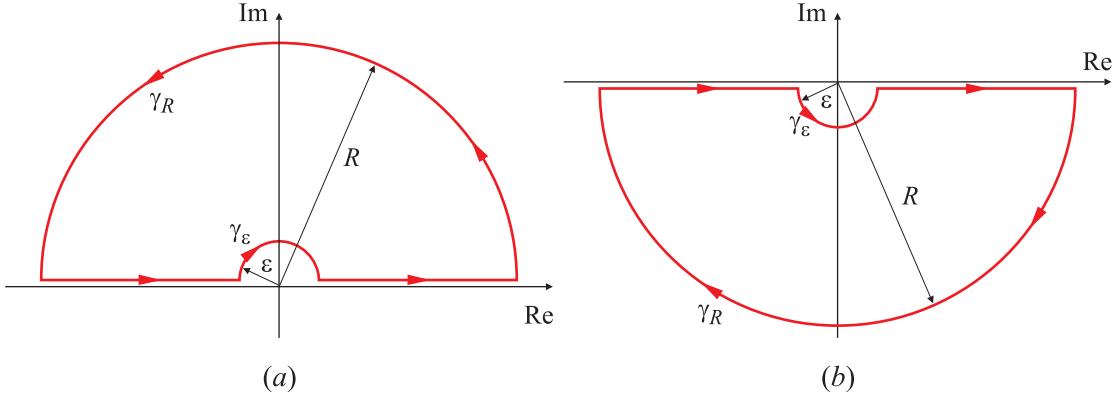


Fig. 2.14. Contorno de integración para el Ejemplo 2.7 para $f < 0$ (a) y para $f > 0$ (b).

En el caso de la transformada o la antitransformada, el integrando es de la forma $e^{\pm j\alpha x}$, donde α es una constante. Dependiendo de su signo, la región de analiticidad será $\text{Im}\{z\} > 0$ si $\pm\alpha > 0$, o $\text{Im}\{z\} < 0$ si $\pm\alpha < 0$, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2.7. Transformada de Fourier de $x(t) = 1/t$

Aunque la función $x(t) = 1/t$ es singular en el origen, aún así puede calcularse la transformada de Fourier considerando

$$X(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-j2\pi ft} dt \right).$$

Extendiendo analíticamente estas expresiones, reemplazando la variable real t con la variable compleja z , las integrales se pueden calcular con la ayuda de la integral de contorno

$$\int_C \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz} dz,$$

donde el contorno de integración C es el borde del semidisco de radio R con una pequeña indentación de radio ε en el origen, donde R se hace tender a infinito, y ε a cero. Bajo estas condiciones, la integral coincide con la transformada que se desea calcular si $\text{Im}\{z\} = 0$. En este caso, la función $g(z) = 1/z$ tiene un polo en el eje real, en $z = 0$.

El semiplano donde yace C se elige de modo que el integrando tienda a cero cuando $R \rightarrow \infty$, y esto impone condiciones sobre la variable f , de manera de satisfacer las condiciones de los lemas de Jordan. En cualquier caso la región de integración debe elegirse de modo que $|e^{-j2\pi fz}| \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$. Si $f > 0$, esta región está dada por $\text{Im}\{z\} < 0$, y si $f < 0$, la región de analiticidad es $\text{Im}\{z\} > 0$.

Para una curva C contenida en la región $\text{Im}\{z\} > 0$, que corresponde a $f < 0$, donde C está formada por la unión de las curvas $\gamma_R = Re^{j\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$, el segmento de recta $[-R, -\varepsilon]$, la curva $\gamma_\varepsilon = \varepsilon e^{j\theta}$, con $-\pi \leq \theta \leq 0$, y el segmento de recta $[\varepsilon, R]$, como se muestra en Fig. 2.14(a), la integral de contorno es nula porque la curva no encierra ningún polo. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} 0 = \int_C \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz} dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz} dz + \\ &\quad \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{t} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{\gamma_R} \frac{1}{z} e^{-j2\pi fz} dz, \end{aligned}$$

donde se efectuó el cambio de variable $z \mapsto t = \operatorname{Re}\{z\}$ sobre las rectas.

Sobre la curva γ_R se hace la sustitución $z \mapsto Re^{j\theta}$, $dz = jRe^{j\theta}d\theta$, resultando

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z} e^{-j2\pi f z} dz = \int_0^\pi \frac{1}{R e^{j\theta}} e^{-j2\pi f(R e^{j\theta})} jR e^{j\theta} d\theta = j \int_0^\pi e^{-j2\pi f R(\cos \theta + j \sin \theta)} d\theta.$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} |e^{-j2\pi f R(\cos \theta + j \sin \theta)}| = \lim_{R \rightarrow +\infty} |e^{f R \sin \theta}|,$$

y como para esta región $\sin \theta \geq 0$, la única manera que el integrando se anule para $R \rightarrow \infty$ es que $f < 0$. Entonces,

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z} e^{-j2\pi f z} dz = 0 \quad \text{para } f < 0.$$

Sobre la curva γ_ε se tiene que $z = \varepsilon e^{j\theta}$, $dz = j\varepsilon e^{j\theta} d\theta$, y por lo tanto,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} e^{-j2\pi f z} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{\varepsilon e^{j\theta}} e^{-j2\pi f(\varepsilon e^{j\theta})} j\varepsilon e^{j\theta} (-d\theta) = -j \int_{-\pi}^0 e^{-j2\pi f \varepsilon (\cos \theta + j \sin \theta)} d\theta.$$

El signo del $d\theta$ tiene en cuenta que la curva γ_ε está orientada en sentido *horario*. Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, el argumento de la integral tiende a 1, y entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} e^{-j2\pi f z} dz = -j\pi.$$

A partir de estos resultados se encuentra que

$$0 = \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} e^{-j2\pi f t} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{X(f)} - j\pi,$$

de modo que

$$X(f) = j\pi \quad \text{si } f < 0. \quad (2.30)$$

Si $f > 0$ se elige el contorno de integración que se muestra en la Fig. 2.14(b). El desarrollo es idéntico, con un par de salvedades:

- Sobre la curva γ_R resulta que $\sin \theta \leq 0$, y la integral sobre γ_R se anula sólo si $f > 0$.
- Sobre la curva γ_ε el recorrido es ahora en sentido *horario*, y se encuentra

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} e^{-j2\pi f z} dz = j\pi,$$

y por lo tanto,

$$X(f) = -j\pi \quad \text{si } f > 0, \quad (2.31)$$

Los resultados (2.30) y (2.31) permiten establecer el par transformado

$$\frac{1}{t} \iff -j\pi \operatorname{sgn}(f)$$

que se muestra en la Fig. 2.15. □

La antitransformada del Ejemplo 2.6 también puede resolverse con este método, como se muestra a continuación.

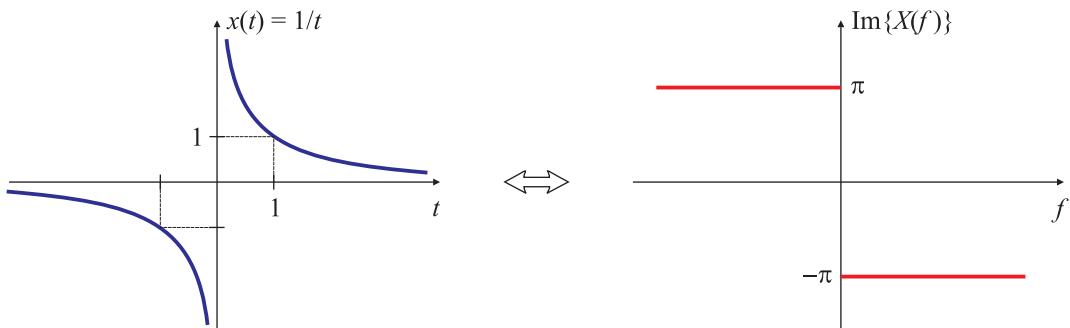


Fig. 2.15. La señal $x(t) = 1/t$ y su transformada de Fourier.

EJEMPLO 2.8. Otra forma de calcular la antitransformada de $X(f) = \beta/(\alpha + j2\pi f)$

En este caso,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \oint_C \frac{\beta}{\alpha + j2\pi z} e^{j2\pi t z} dz = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{\beta}{\alpha/(j2\pi) + z} e^{j2\pi t z} dz.$$

La función $X(f)$ es singular en $z = -\alpha/(j2\pi) = j\alpha/(2\pi)$, que pertenece a la región $\text{Im}\{z\} > 0$ pues $\alpha > 0$. Si $t > 0$, la curva C debe estar contenida en la región $\text{Im}\{z\} > 0$, de modo que $|e^{j2\pi t z}| \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$. El contorno de integración se muestra en la Fig. 2.16(a) y por lo tanto encierra al polo. En consecuencia,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{j2\pi} \oint_{C \subset \text{Im}\{z\} > 0} \frac{\beta}{\alpha/(j2\pi) + z} e^{j2\pi t z} dz = j2\pi \text{Res} \left(\frac{1}{j2\pi} \frac{\beta}{\alpha/(j2\pi) + z} e^{j2\pi t z} \right) \Big|_{z=-\alpha/(j2\pi)} \\ &= \beta e^{-\alpha t}, \quad t > 0, \end{aligned}$$

Para $t < 0$, la curva C debe elegirse dentro del dominio $\text{Im}\{z\} < 0$ como se muestra en la

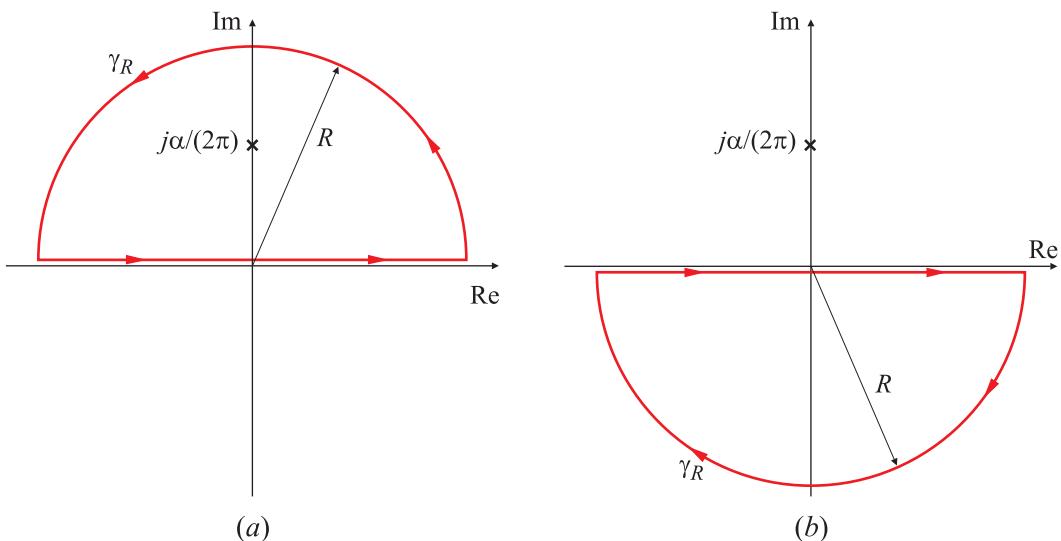


Fig. 2.16. Contorno de integración para el Ejemplo 2.8 para $t > 0$ (a) y para $t < 0$ (b).

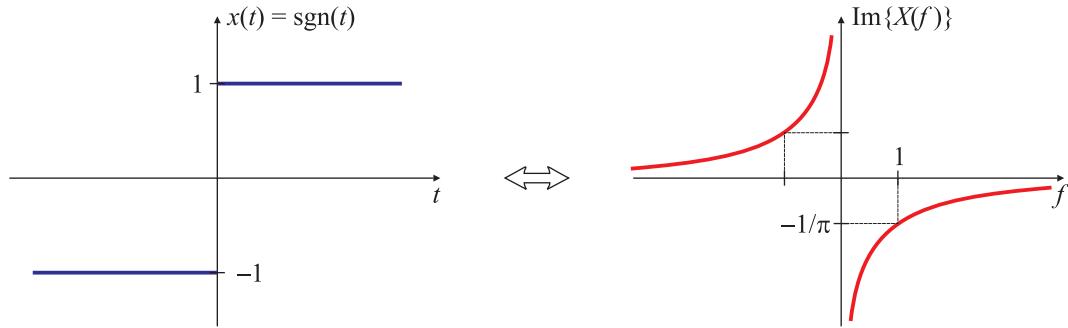


Fig. 2.17. La señal $x(t) = \text{sgn}(t)$ y su transformada de Fourier.

Fig. 2.16(b). Ya que esta curva no encierra ningún polo,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C \subset \text{Im}\{z\} < 0} \frac{\beta}{\alpha/(j2\pi) + z} e^{j2\pi t z} dz = 0, \quad t < 0.$$

Combinando los resultados para $t > 0$ y $t < 0$, se tiene que

$$x(t) = \beta e^{-\alpha t} u(t)$$

que naturalmente coincide con (2.27) del Ejemplo 2.6. \square

Aún contando con herramientas tan poderosas como las presentadas en los ejemplos anteriores, en algunos casos deben utilizarse otras técnicas para calcular las transformadas o antitransformadas, como se muestra a continuación.

EJEMPLO 2.9. Transformada de Fourier de $x(t) = \text{sgn } t$

La función $x(t)$ de este ejemplo no cumple con uno de los requisitos de los lemas de Jordan, específicamente, que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$, y entonces debe buscarse otra forma de resolución. En este caso es conveniente considerar una sucesión de funciones $x_\mu(t)$ parametrizadas por μ que sí tengan transformadas y que tiendan a $x(t)$ en el límite. Por ejemplo, la sucesión $x_\mu(t) = e^{-\mu|t|} \text{sgn } t$ tiende a $x(t) = \text{sgn } t$ cuando $\mu \rightarrow 0$. La transformada de cada uno de los elementos $x_\mu(t)$ de la sucesión es

$$\begin{aligned} X_\mu(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_\mu(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu|t|} \text{sgn } t e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 -e^{(\mu-j2\pi f)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\mu+j2\pi f)t} dt = -\frac{e^{(\mu-j2\pi f)t}}{\mu - j2\pi f} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-(\mu+j2\pi f)t}}{\mu + j2\pi f} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{\mu - j2\pi f} + \frac{1}{\mu + j2\pi f}. \end{aligned}$$

Cuando $\mu \rightarrow 0$, se tiene que

$$X(f) = \lim_{\mu \rightarrow 0} X_\mu(f) = \lim_{\mu \rightarrow 0} -\frac{1}{\mu - j2\pi f} + \frac{1}{\mu + j2\pi f} = \frac{1}{j\pi f} = -j\frac{1}{\pi f},$$

lo que permite establecer el par transformado

$$\text{sgn } t \iff \frac{1}{j\pi f},$$

que se representa en la Fig. 2.17. \square

Si bien las funciones $x(t)$ de los Ejemplos 2.7 y 2.9 no son señales de excitación frecuente en los problemas de procesamiento, sí son características de un sistema que se conoce como *transformador de Hilbert*, de amplia aplicación en el área de comunicaciones, y también están estrechamente vinculadas con la *transformada de Hilbert* que se explora en el Ejercicio 43.

En el resto del Capítulo, en especial a partir de la Sección 2.6, se desarrollarán herramientas que permiten calcular este tipo de transformadas utilizando herramientas más afines a la formación ingenieril, y que permiten inferir propiedades y relaciones que pueden quedar enmascaradas en el formalismo matemático.

2.3.3. Elección de la variable del dominio transformado: Ω o f

En este capítulo se ha definido la transformada de Fourier $X(f)$ de la señal $x(t)$ en función de la variable frecuencial f , que se mide en ciclos por segundo (cps, o Hz). Sin embargo en la literatura proveniente de las áreas de matemática y física es frecuente definir la transformada $X(\Omega)$ de la señal $x(t)$ en función de la *frecuencia angular* Ω , que se mide en rad/s. La relación entre ambas es sencilla: como $\Omega = 2\pi f$, de (2.25) resulta

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt,$$

de modo que

$$X(\Omega) = X(f)|_{f=\frac{\Omega}{2\pi}}. \quad (2.32)$$

Para encontrar la ecuación de síntesis (2.24) basta cambiar la variable de integración:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)|_{f=\frac{\Omega}{2\pi}} e^{j2\pi ft} d(2\pi f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega.$$

Por lo tanto el par transformado de Fourier en función de la frecuencia angular Ω resulta

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt, \quad (2.33)$$

y

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (2.34)$$

Expresar la transformada de una señal en función de la frecuencia f o de la frecuencia angular Ω se limita simplemente a efectuar un cambio de variable.

EJEMPLO 2.10. Transformada de Fourier del pulso exponencial en función de Ω

En el Ejemplo 2.5 se encontró que la transformada de Fourier del pulso exponencial $x(t) = \beta e^{-\alpha t} u(t)$, con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ es

$$X(f) = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f}.$$

Si se quiere expresar esta transformada en función de la frecuencia angular Ω , basta con realizar el cambio de variables indicado en (2.32), es decir

$$X(\Omega) = X(f)|_{f=\frac{\Omega}{2\pi}} = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f} \Big|_{f=\frac{\Omega}{2\pi}} = \frac{\beta}{\alpha + j\Omega}. \quad \square$$

El cálculo de la transformada de algunas funciones especiales requiere ciertas precauciones, como se muestra en el Ejemplo 2.21.

2.3.4. Existencia de la transformada de Fourier

Hasta ahora no se ha cuestionado la validez de las expresiones (2.24) y (2.25), suponiendo que las ecuaciones integrales están bien definidas para todas las funciones. Por “bien definidas” se entiende que las funciones y sus transformadas son “buenas”, es decir que son acotadas, continuas y derivables salvo en un número finito de puntos. Un ejemplo de una señal y una transformada bien definidas son el pulso exponencial y su transformada estudiados en los Ejemplos 2.5 y 2.6.

En general, la transformada de Fourier y la antitransformada están bien definidas para la mayoría de las funciones encontradas en el análisis científico práctico. En esta sección no se intenta presentar una discusión teórica sobre la existencia de las transformadas de Fourier, sino destacar *condiciones* para su existencia y dar ejemplos de estas condiciones. Si las funciones satisfacen estas condiciones, sus transformadas serán acotadas, continuas y derivables salvo en un número finito de puntos. Sin embargo, debido a su importancia práctica, también son útiles las transformadas de algunas funciones que no cumplen estas condiciones, las que serán estudiadas a partir de la Sección 2.4.

Debido a la similitud de las ecuaciones de síntesis (2.24) y de análisis (2.25), las condiciones de existencia son igualmente aplicables tanto a la transformada como a la antitransformada, intercambiando los roles de las variables tiempo (t) y frecuencia (f). Sin embargo, para simplificar la presentación, sólo se enunciarán las condiciones de existencia para la transformada (2.25). La discusión sigue la presentación de Papoulis (1962).

CONDICIÓN 1. Si $x(t)$ es absolutamente integrable,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (2.35)$$

y de *variación acotada*³, la transformada de Fourier $X(f)$ dada por (2.25) existe y está bien definida. ■

La demostración de esta condición es trivial: si se verifica (2.35), se puede establecer una cota sobre $X(f)$:

$$|X(f)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-j2\pi ft}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

³Una función es de *variación acotada* si puede representarse por una curva de longitud finita en cualquier intervalo de tiempo finito. Esto significa que puede escribirse como la diferencia de dos funciones acotadas, monótonamente crecientes. Por ejemplo, la función $t \operatorname{sen}(1/t)$ no es de variación acotada.

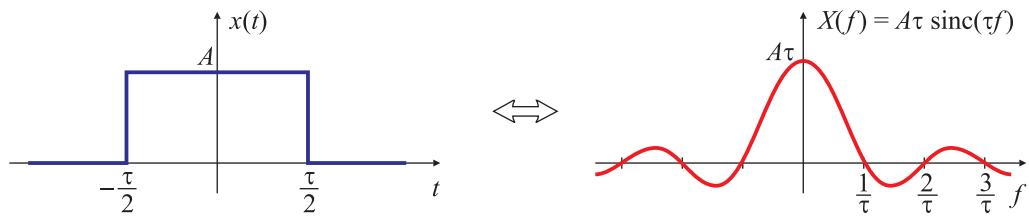


Fig. 2.18. Transformada de Fourier de un pulso rectangular.

En realidad, para la existencia de la transformada basta con que la función sea absolutamente integrable. El requisito adicional de tener variación acotada en el entorno de un punto asegura que la antitransformada permite recuperar el valor de la función en el punto, o el valor medio del salto si la función es discontinua allí.

El inconveniente con esta condición es que no es simétrica: funciones que son absolutamente integrables pueden tener transformadas que no lo sean, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.11. Transformada de Fourier de un pulso

El pulso de la Fig. 2.18 definido como

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| < \tau/2, \\ A/2, & t = \pm\tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases} \quad (2.36)$$

verifica trivialmente la CONDICIÓN 1 [ecuación (2.35)]. Por lo tanto, su transformada de Fourier existe y está dada por

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{A}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{-j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f \tau/2} - e^{j2\pi f \tau/2} \right) \end{aligned}$$

Recordando que $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \operatorname{sen} \theta$, la transformada $X(f)$ se puede escribir como

$$X(f) = \frac{A}{-j2\pi f} [-2j \operatorname{sen}(\pi f \tau)] = A\tau \frac{\operatorname{sen}(\pi f \tau)}{\pi f} = A\tau \operatorname{sinc}(\pi f). \quad (2.37)$$

La ecuación (2.37) muestra que la transformada $X(f)$ es “buena”: acotada, continua, y derivable en todo punto. \square

Este ejemplo permite establecer el par transformado de Fourier

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| < \tau/2, \\ A/2, & t = \pm\tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases} \iff X(f) = A\tau \frac{\operatorname{sin}(\pi f \tau)}{\pi f} = A\tau \operatorname{sinc}(\pi f).$$

que se representa en la Fig. 2.18.

Si bien $X(f) = A\tau \operatorname{sinc}(\pi f)$ no es absolutamente integrable, es evidente que su antitransformada existe, y es (2.36). Es un ejercicio interesante calcular la antitransformada de $X(f)$ para verificar el par transformado, como se muestra en el siguiente ejemplo.

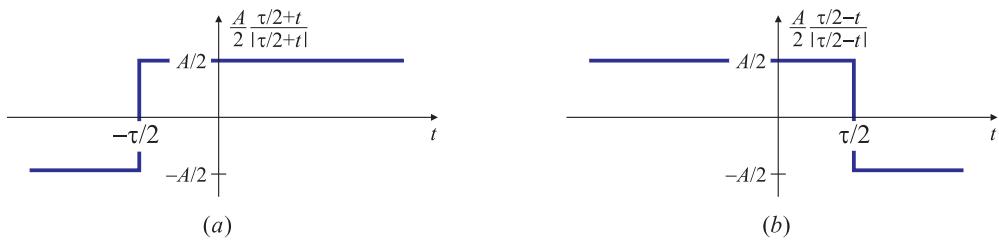


Fig. 2.19. Evaluación gráfica de la ecuación (2.40).

EJEMPLO 2.12. Antitransformada de $A\tau \operatorname{sinc}(\tau f)$

Para obtener la antitransformada de la $X(f)$ dada por (2.37) se emplea la ecuación de síntesis (2.24). Entonces

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A\tau \operatorname{sinc}(\tau f) e^{j2\pi ft} df = A\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} [\cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft)] df.$$

El integrando imaginario es impar, y entonces el valor principal de Cauchy de la integral es nula; por lo tanto,

$$x(t) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\tau f) \cos(2\pi ft)}{f} df. \quad (2.38)$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\sin u \cos v = \frac{1}{2} [\sin(u+v) + \sin(u-v)]$, $x(t)$ se puede expresar como

$$x(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[2\pi f(\tau/2 + t)]}{f} df + \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[2\pi f(\tau/2 - t)]}{f} df,$$

que se puede escribir

$$x(t) = A(\tau/2 + t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[2\pi f(\tau/2 + t)]}{2\pi f(\tau/2 + t)} df + A(\tau/2 - t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[2\pi f(\tau/2 - t)]}{2\pi f(\tau/2 - t)} df. \quad (2.39)$$

Los integrandos se pueden escribir como $\operatorname{sinc}[2f(\tau/2 \pm t)]$, y en la Sección 2.2 se mostró que [ecuación (2.17)]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(ax) dx = \frac{1}{2|a|}.$$

Entonces (2.39) puede escribirse como

$$x(t) = \frac{A}{2} \frac{\tau/2 + t}{|\tau/2 + t|} + \frac{A}{2} \frac{\tau/2 - t}{|\tau/2 - t|}. \quad (2.40)$$

Cada uno de los términos de la ecuación (2.40) se muestran en la Fig. 2.19; por inspección, es evidente que estos términos se suman para dar

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| < \tau/2, \\ A/2, & t = \pm\tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

Al igual que en los Ejemplos 2.5 y 2.6, este ejemplo el cálculo de la antitransformada es un poco más complicado que el de la transformada desarrollado en el Ejemplo 2.11. \square

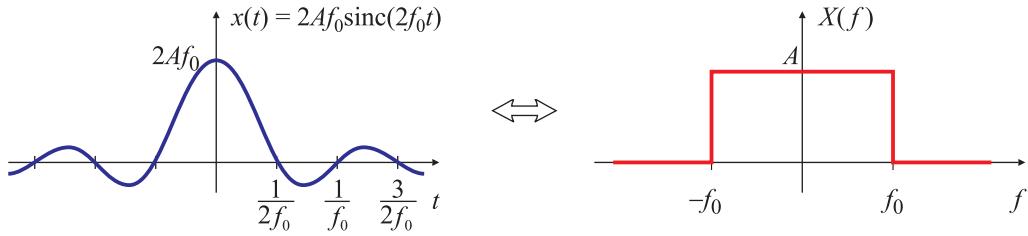


Fig. 2.20. Par transformado de Fourier de $2Af_0 \text{sinc}(2f_0 t)$.

En este ejemplo, lo mismo que en el Ejemplo 2.11, se pudo calcular la antitransformada de $X(f) = A\tau \text{sinc}(\tau f)$ y de $X(f) = \beta/(\alpha + j2\pi f)$ con algo de trabajo pero sin gran problema. Las antitransformadas $x(t)$ son funciones “buenas”, ya que son acotadas, continuas, y derivables *salvo* en dos o en un punto, respectivamente, a pesar que ninguna de las transformadas $X(f)$ es absolutamente integrable. Esto muestra que la CONDICIÓN 1 de integrabilidad absoluta es sólo suficiente, y que funciones que no cumplen con ese requisito también pueden tener transformadas de Fourier “buenas” como asegura la siguiente CONDICIÓN.

CONDICIÓN 2. Si $x(t) = \rho(t) \sin(2\pi ft + \eta)$, donde f y η son constantes arbitrarias, si $|\rho(t+k)| < |\rho(t)|$, $k > 0$ y si para $|t| > \lambda > 0$ la función $x(t)/t$ es absolutamente integrable, entonces la transformada de Fourier $X(f)$ dada por (2.25) existe y está bien definida. ■

Para el caso de la transformada del Ejemplo 2.6 la condición homóloga a la CONDICIÓN 2 (es decir, intercambiando los roles de las variables t y f) se satisface eligiendo $t = 0$, $\eta = \pi/2$, y $\rho(f) = \beta/(\alpha + j2\pi f)$. Es evidente que $|x(f)/f|$ es absolutamente integrable para $|f| > \lambda > 0$. Un caso dual al de la transformada de Fourier $X(f)$ del Ejemplo 2.11 se estudia en el Ejemplo 2.13, que trata de la función temporal $\sin(at)/(at)$, que no es absolutamente integrable, y por lo tanto no cumple con la CONDICIÓN 1.

EJEMPLO 2.13. Transformada de una función del tipo $\text{sinc}(at)$

El gráfico de la función $x(t) = 2Af_0 \text{sinc}(2f_0 t)$ se muestra en la Fig. 2.20. Esta función cumple con los requisitos pedidos por la CONDICIÓN 2, con $\rho(t) = 2Af_0/(2\pi f_0 t)$, $\eta = 0$. Además, $x(t)/t$ cumple con las condiciones de integrabilidad exigidas, ya que

$$\int_{\lambda}^{\infty} \left| \frac{x(t)}{t} \right| dt = \int_{\lambda}^{\infty} \left| \frac{2Af_0 \sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t^2} \right| dt < \frac{2Af_0}{2\pi f_0} \int_{\lambda}^{\infty} \left| \frac{1}{t^2} \right| dt = \frac{A}{\pi \lambda} < \infty.$$

Entonces la CONDICIÓN 2 asegura que existe la transformada de Fourier de $x(t)$, y que está dada por

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2Af_0 \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{t} [\cos(2\pi f t) - j \sin(2\pi f t)] dt \\ &= \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{t} \cos(2\pi f t) dt. \end{aligned}$$

Esta última expresión tiene la misma forma que la ecuación (2.38) del ejemplo anterior, cambiando f por t , y τ por f_0 . Repitiendo los cálculos posteriores teniendo en cuenta estas sustituciones se encuentra que

$$X(f) = \begin{cases} A, & |f| < f_0, \\ A/2, & f = \pm f_0, \\ 0, & |f| > f_0. \end{cases}$$

De esta forma queda establecido el par transformado de Fourier

$$x(t) = 2Af_0 \operatorname{sinc}(2f_0t) \iff X(f) = A, \quad |f| < f_0$$

que se ilustra en la Fig. 2.20. □

Las señales de energía, que se estudiaron en el Capítulo 1, son las que verifican

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty. \quad (2.41)$$

Se puede demostrar que estas funciones, también llamadas de cuadrado integrable, tienen cierto tipo de simetría pues sus transformadas de Fourier también son de cuadrado integrable. Es decir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X^2(f) df < \infty.$$

Sin embargo, aparece un problema de convergencia, ya que en lugar de tener convergencia *puntual*, como en el caso de las transformadas de funciones absolutamente integrables, convergen en *media cuadrática*, como se estudia en detalle en la Sección 2.8.

Los requisitos que una señal sea absolutamente integrable o de cuadrado integrable son muy restrictivos. Como se estudió en el Capítulo 1, hay otras señales de uso frecuente en el análisis de sistemas (las funciones periódicas, el escalón unitario, las señales constantes, etc.) que no son absolutamente integrables ni tampoco de cuadrado integrable, pero sí tienen *potencia promedio* finita, es decir, que satisfacen

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt < \infty. \quad (2.42)$$

Con las herramientas desarrolladas hasta el momento no es posible calcular la transformada de Fourier de una función senoidal o cosenoidal. Sin embargo estas señales se pueden representar usando *series* de Fourier. Sería deseable poder calcular transformadas de una clase más amplia de funciones, y que el espacio de las funciones y sus transformadas coincida, extendiendo la teoría de la transformada para poder:

1. combinar la serie y la transformada de Fourier en una teoría unificada, de modo de tratar la serie como un caso particular de la transformada de Fourier;
2. poder aplicar la transformada de Fourier a señales de potencia promedio finita, ya que son muy usadas en el análisis de sistemas.

Tales objetivos pueden alcanzarse introduciendo funciones generalizadas, que también simplifican grandemente las condiciones de existencia para la transformada de Fourier.

2.4. El impulso o delta de Dirac $\delta(t)$

El *delta de Dirac* o *impulso unitario* permite simplificar derivaciones que de otro modo requerirían desarrollos extensos y complicados. La definición matemática precisa no es trivial porque no se trata de una función “normal”: su desarrollo se basa en la teoría de distribuciones.

En esta presentación se sigue una aproximación física más que un formalismo matemático riguroso. Las propiedades que se enuncian serán de utilidad en los desarrollos futuros.

2.4.1. Definición

Una de las muchas maneras de definir el impulso $\delta(t)$ es a partir de estas dos expresiones:

$$\delta(t - t_0) = 0, \quad t \neq t_0 \quad (2.43)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (2.44)$$

La ecuación (2.43) indica que $\delta(t)$ es cero en todo punto, salvo en $t = t_0$, pero aún así tiene área, y este área vale 1, como expresa (2.44).

Parece difícil relacionar un impulso con una señal física; sin embargo, puede pensarse que un impulso es un pulso de gran amplitud y duración extremadamente breve. Este hecho refleja la situación física en el cual las respuestas a señales tipo *pulso* se pueden producir u observar precisamente, dentro de los límites permitidos por el poder de resolución de los equipos de medición, mientras que los *impulsos* son ficticios. Ejemplos familiares son el momento producido por una masa puntual que descansa sobre una viga, o el campo eléctrico de una carga puntual. En la aproximación física de tales problemas se observa el efecto producido por objetos o volúmenes con cargas cada vez más pequeños pero a su vez cada vez más densos, y se estudia si este efecto tiende a un límite definido. La expresión que contiene el “símbolo impulso” $\delta(\cdot)$ adquiere el significado de un límite que existe en todos los casos. Tratando *con cuidado* las ecuaciones donde intervenga $\delta(\cdot)$ se puede retener el rigor y el procedimiento de manipulación que ha resultado tan práctico.

Ninguna función “común” puede satisfacer las ecuaciones (2.43) y (2.44). Sin embargo, se puede pensar el impulso como una sucesión de funciones $x_\tau(t)$ parametrizadas por τ , como las que se muestran en la Fig. 2.21, que progresivamente incrementan su amplitud y disminuyen su duración a medida que τ disminuye, manteniendo el área constante e igual a la unidad. Cuando τ tiende a cero, la función $x_\tau(t)$ tiende a cero en todo punto, excepto en el origen donde “tiende a infinito” para poder mantener el área constante. En el límite “convergen” al impulso:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} x_\tau(t) = \delta(t).$$

La definición del impulso basada en la función $x_\tau(t) = (1/\tau) \operatorname{sinc}(t/\tau)$ representada en la Fig. 2.21(e) permite demostrar la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi ft) df = \delta(t). \quad (2.45)$$

Para ello basta tener en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df = \lim_{F \rightarrow \infty} \int_{-F}^F e^{j2\pi ft} df = \lim_{F \rightarrow \infty} \int_{-F}^F \cos(2\pi ft) df + j \lim_{F \rightarrow \infty} \int_{-F}^F \sin(2\pi ft) df \quad (2.46)$$

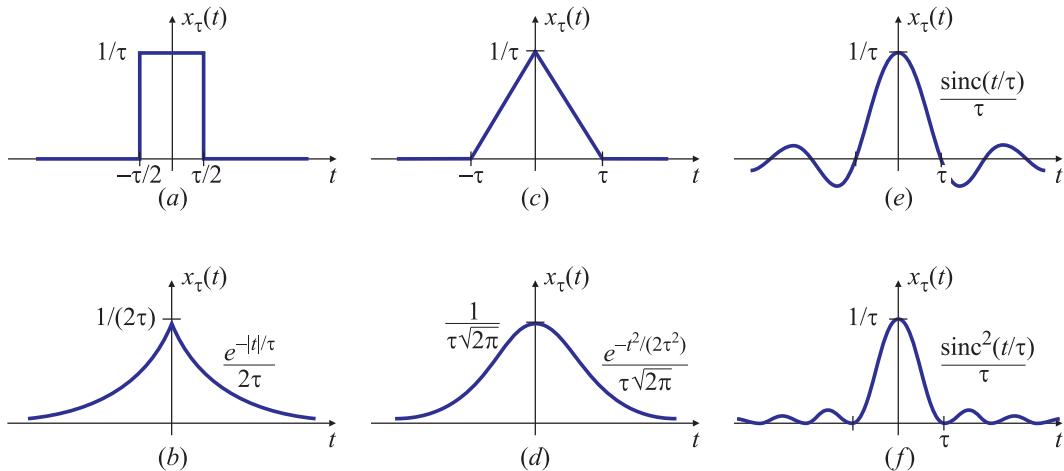


Fig. 2.21. Distintas funciones utilizadas para definir el impulso de Dirac $\delta(t)$.

donde el valor principal de Cauchy de la segunda integral del último término es nulo porque es la integral de una función impar. Además

$$\lim_{F \rightarrow \infty} \int_{-F}^F \cos(2\pi t f) df = \lim_{F \rightarrow \infty} \frac{2 \sin(2\pi F t)}{2\pi t} = \lim_{F \rightarrow \infty} 2F \operatorname{sinc}(2Ft) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sinc}(t/\tau)}{\tau} = \delta(t) \quad (2.47)$$

De (2.46) y (2.47) resulta la identidad (2.45) buscada. Un cambio de variables permite obtener una identidad similar en el dominio frecuencial:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f t) dt = \delta(f). \quad (2.48)$$

Las diferentes propiedades de los impulsos pueden determinarse directamente a partir de las definiciones (2.43) y (2.44). En un sentido matemático estricto estas definiciones carecen de sentido si se piensa $\delta(t)$ como una función común y corriente; tal es el caso, por ejemplo, de la ecuación (2.44), con la interpretación de Riemann de la integral. Por ello el impulso debe pensarse como una función generalizada (o una distribución).

2.4.2. Propiedades

El impulso $\delta(t)$ tiene varias propiedades interesantes que son consecuencia directa de las ecuaciones (2.43) y (2.44) que lo definen. Entre ellas se destacan:

1. La función delta es par: $\delta(t) = \delta(-t)$.
2. El escalado de la variable independiente resulta en un escalado del área del pulso:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad (2.49)$$

como se desprende al analizar una sucesión de pulsos escalados en el tiempo. En la Fig. 2.22(a) se muestra la función $x_\tau(t)$ y cómo tiende a un impulso de área unitaria cuando $\tau \rightarrow 0$. En la Fig. 2.22(b) se muestra la función $x_\tau(at)$, con $a > 1$, que por

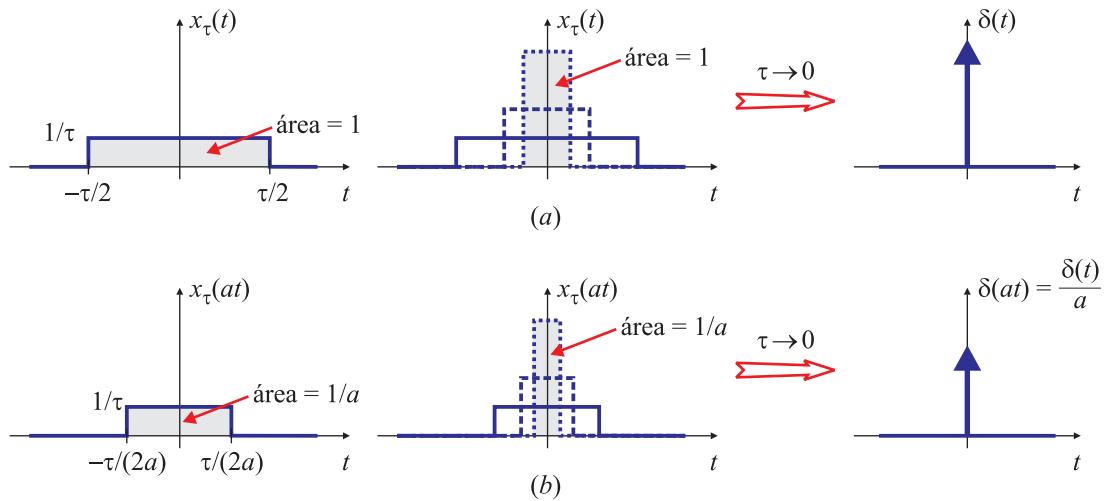


Fig. 2.22. Sucesión de funciones $x_\tau(t)$ que tienden a $\delta(t)$ (a) y sucesión de funciones $x_\tau(at)$ escaladas en tiempo, que tienden a $\delta(at)/a$ (b).

efecto del escalado tiene un área $1/a$. Si $0 < a < 1$, la función escalada $x_\tau(at)$ resulta más “ancha” que $x_\tau(t)$, y más “angosta” si $a > 1$. Si $a < 0$ las funciones se reflejan sobre el eje $x = 0$, pero el signo del área no cambia. Éste es el motivo de $|a|$ en el denominador de la ecuación (2.49). La sucesión de estas funciones tiende a un impulso de área $1/a$ cuando $\tau \rightarrow 0$.

3. El producto de una función continua cualquiera $x(t)$ y un impulso aplicado en t_0 es otro impulso con área $x(t_0)$:

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0). \quad (2.50)$$

Esta relación se conoce como propiedad de *criba* o de “colador” del impulso, ya que de la función sólo queda un impulso cuyo área es el valor que toma $x(t)$ en la abscisa donde está ubicado el impulso, como se muestra en la Fig. 2.23. La ubicación del impulso “representa” uno de los agujeros del colador. La integral del producto de una función $x(t)$ continua en t_0 , y un impulso $\delta(t - t_0)$ es igual a $x(t_0)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = x(t_0). \quad (2.51)$$

La aplicación de la propiedad de colador (2.50) da como resultado un impulso, mientras que la integral de (2.51) da como resultado un número. En general, el producto de dos distribuciones es indefinido.

4. Esta propiedad y la que sigue aplican el concepto de *integral de convolución* que recién será estudiado en la Sección 2.7. Sin embargo, se enuncian aquí por completitud. Como el impulso es una función par, se puede reescribir la ecuación (2.51) de forma similar a la integral de convolución: cambiando t por τ , dt por $d\tau$ y t_0 por t resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = x(t), \quad \text{es decir} \quad (x * \delta)(t) = x(t).$$

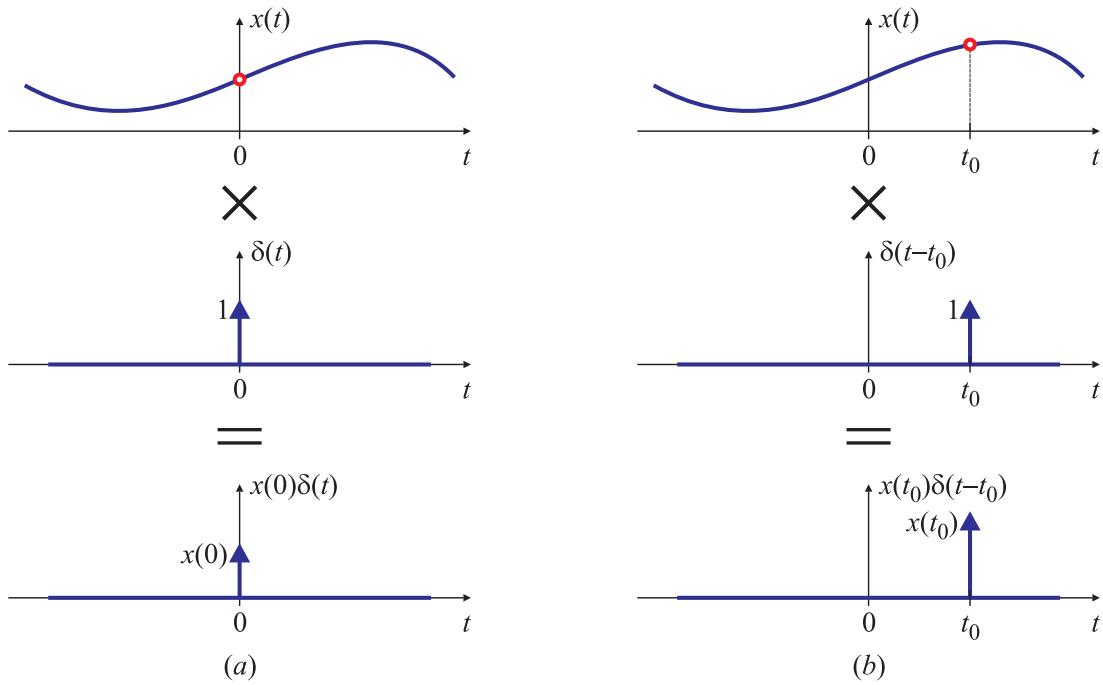


Fig. 2.23. Propiedad de colador para un impulso ubicado en $t = 0$ (a) y en $t = t_0$ (b).

Por lo tanto, la convolución de cualquier función con un impulso da como resultado la misma función original: esto se conoce como la propiedad de *replicación* del impulso. Si el impulso está desplazado en t_0 ,

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta[(t - t_0) - \tau] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = x(t - t_0).$$

Es decir que la convolución de una función continua con un impulso desplazado resulta en un corrimiento de la función al lugar donde está aplicado el impulso.

5. La Propiedad 4 puede generalizarse para la convolución de dos impulsos:

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta[t - (t_1 + t_2)].$$

6. El impulso y la función escalón unitario

$$u(t) = \frac{1 + \text{sgn}(t)}{2} = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

donde $u(0)$ toma cualquier valor finito, están relacionados por

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(s) ds, \quad \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t).$$

7. Para cualquier señal $x(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \delta(t) dt = (-1)^n \left. \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right|_{t=0}.$$

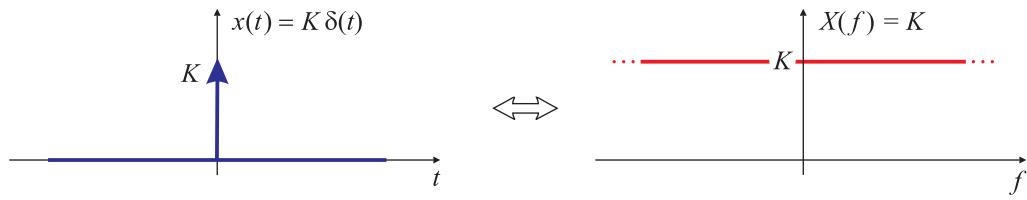


Fig. 2.24. Transformada de Fourier de un impulso.

La aplicación de estas propiedades facilita el cálculo de la transformada de Fourier de muchas señales importantes en la teoría de sistemas lineales.

EJEMPLO 2.14. Transformada de un impulso

La transformada de Fourier del impulso $x(t) = K \delta(t)$ se obtiene a partir de la Propiedad 3 o propiedad de colador:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = K e^0 = K.$$

El cálculo de la transformada inversa es un poco más complicado, y usa el resultado (2.45). Se tiene entonces que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} K \cos(2\pi f t) df = K \delta(t).$$

Con estas dos expresiones queda establecido el par transformado

$$x(t) = K \delta(t) \iff X(f) = K,$$

que se muestra en la Fig. 2.24. □

Una forma intuitiva de deducir la transformada de un impulso es considerando nuevamente el Ejemplo 2.11, haciendo tender a cero el ancho del pulso ($T_0 \rightarrow 0$). Para mantener la energía del pulso constante, cada disminución del ancho se acompaña por un incremento en la altura del pulso: cada uno de los pulsos de la Fig. 2.25(a) tienen el mismo área. A medida que el ancho del pulso disminuye, aumenta el valor de la abscisa para el cual se produce el primer cero de la transformada (el primer cero del “sinc”). En el límite, cuando

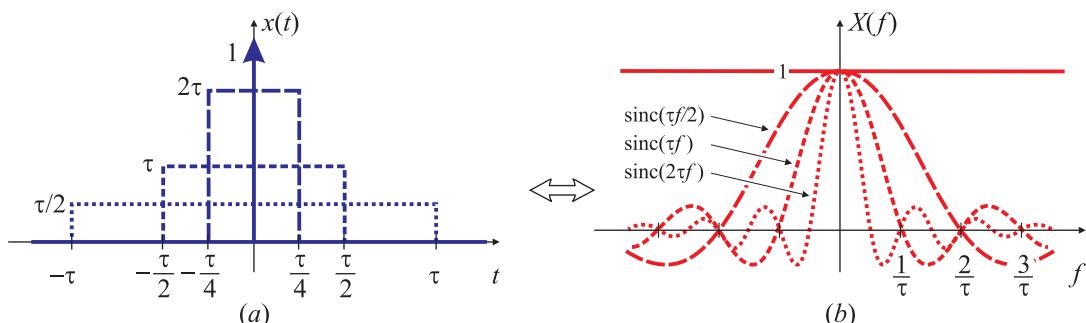


Fig. 2.25. Transformada de Fourier de pulsos de distinto ancho.

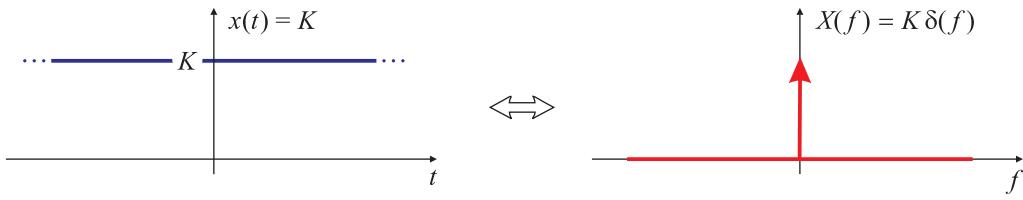


Fig. 2.26. Transformada de Fourier de una función constante.

el ancho del pulso tiende a cero (y su altura a infinito, pese a lo cual el área queda constante), la transformada tiende a una constante, como se representa en la Fig. 2.25(b). Este comportamiento es un ejemplo típico de la relación inversa que existe entre los dominios tiempo y frecuencia, que se formalizará en las Secciones 2.6.3 y 2.6.4 cuando se discutan las propiedades de escalado en tiempo y en frecuencia.

EJEMPLO 2.15. Transformada de una constante

De manera similar al desarrollo del Ejemplo 2.14, pero partiendo del dominio frecuencial, se puede obtener el par transformado

$$x(t) = K \iff X(f) = K \delta(f)$$

que se ilustra en la Fig. 2.26. Es ilustrativo comparar este resultado con el obtenido en el Ejemplo 2.1 para la serie de Fourier de una función constante. \square

El ejemplo anterior muestra que es posible calcular la transformada de Fourier de una señal periódica: una constante. Ciertamente esta es una función periódica muy particular, pero en el siguiente ejemplo se generaliza este resultado para una función periódica un poco más interesante.

EJEMPLO 2.16. Transformada de Fourier de una exponencial compleja $\tilde{x}(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

Para calcular la transformada de Fourier de $\tilde{x}(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ se aplica la ecuación de análisis

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt$$

y teniendo en cuenta (2.48) resulta que

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \delta(f - f_0),$$

como se muestra en la Fig. 2.27. Para confirmar este resultado se puede antitransformar esta expresión:

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} e^{j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f t} dt = e^{j2\pi f t} \Big|_{f=f_0} = e^{j2\pi f_0 t}$$

donde la anteúltima igualdad resulta de aplicar la Propiedad 3 (de colador) del impulso. \square

El ejemplo 2.16 establece el par transformado de Fourier, representado en la Fig. 2.27,

$$\tilde{x}(t) = e^{j2\pi f_0 t} \iff \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \delta(f - f_0).$$

El conocimiento los pares transformados desarrollados en los Ejemplos 2.14, 2.15 y 2.16 facilita la obtención de otros pares transformados, pero específicamente, permite el cálculo de las transformadas de funciones periódicas, que se desarrolla en la siguiente sección.

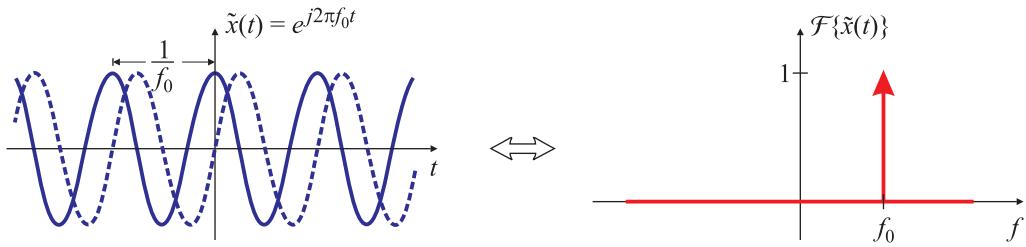


Fig. 2.27. Transformada de Fourier de la exponencial compleja $\tilde{x}(t) = ej2\pi f_0 t$.

2.5. Señales periódicas y la transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una señal periódica se puede obtener directamente a partir de su representación en *series de Fourier*. En la Sección 2.1.1 se estudió que una señal periódica $\tilde{x}(t)$ de período T_0 se puede expresar como

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi f_0 k t}, \quad (2.52)$$

donde $f_0 = 1/T_0$. Esta es una suma infinita de exponentiales complejas de frecuencia $k f_0$. La propiedad de linealidad que se verá en la Sección 2.6.2 demostrará que su transformada es la suma de cada una de las transformadas, es decir

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi f_0 k t}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{c_k e^{j2\pi f_0 k t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 k t}\}.$$

Teniendo en cuenta los resultados del Ejemplo 2.16, y transformando término a término la expresión anterior, se encuentra que la transformada de Fourier de una señal periódica es

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - k f_0) \quad (2.53)$$

es decir que la transformada de Fourier de una señal T_0 -periódica con coeficientes c_k puede interpretarse como un tren de impulsos ubicados en frecuencias armónicamente relacionadas con $f_0 = 1/T_0$ y tales que el área del impulso de la armónica $k f_0$ es el valor del k -ésimo coeficiente c_k de la serie de Fourier.

Los coeficientes c_k de la serie se pueden calcular utilizando la ecuación de análisis (2.11). Pero muchas veces es más conveniente calcularlos a partir de una transformada. Al presentar la transformada de Fourier (Sección 2.3.1) se determinó la relación entre los coeficientes de la serie de Fourier de una señal $\tilde{x}(t)$ de período T_0 y la transformada de Fourier de la función $x(t)$ formada por un período de esa señal, es decir

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & |t| \leq T_0/2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (2.54)$$

La relación entre los coeficientes y la transformada está dada por (2.22), repetida aquí por comodidad

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(f) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = f_0 X(k f_0). \quad (2.55)$$

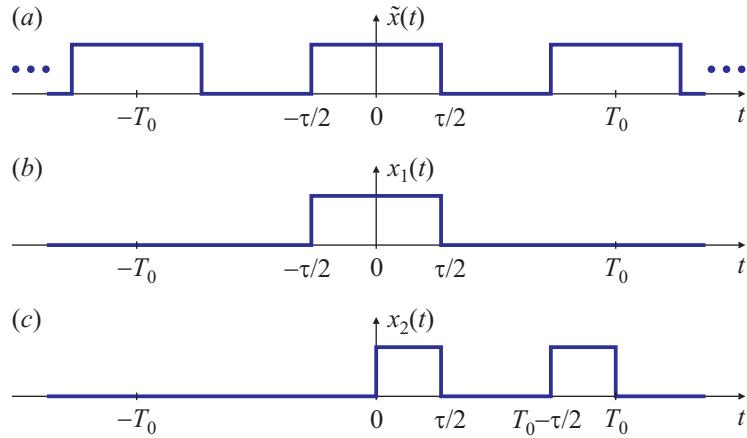


Fig. 2.28. Onda cuadrada periódica $\tilde{x}(t)$ (a); dos señales aperiódicas cada una de las cuales coincide con $\tilde{x}(t)$ sobre intervalos diferentes de longitud T_0 (b)-(c).

Por lo tanto, los coeficientes de la serie de Fourier de una señal periódica $\tilde{x}(t)$ de período T_0 son *muestras* tomadas cada $f_0 = 1/T_0$ de la transformada de Fourier de la función (aperiódica) $x(t)$ determinada por un único período de $\tilde{x}(t)$. En la Sección 2.7.5 se obtendrán estos mismos resultados aplicando propiedades.

En realidad, la ecuación (2.54) es un poco restrictiva, porque los coeficientes de la serie de Fourier se pueden obtener eligiendo $x(t)$ igual a la función periódica $\tilde{x}(t)$ sobre *cualquier* intervalo de longitud T_0 . Específicamente, si σ es un punto cualquiera en el eje de tiempos, se define la señal $x(t)$ igual a $\tilde{x}(t)$ sobre el intervalo $\sigma \leq t \leq \sigma + T_0$, y cero fuera de él,

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & \sigma \leq t \leq \sigma + T_0, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (2.56)$$

Los coeficientes de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$ están dados por (2.55), donde $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$ definida por (2.56). La ecuación (2.55) es válida para cualquier valor de σ , y no necesariamente el valor $\sigma = -T_0/2$ utilizado en (2.54) y (2.20). Esto *no significa* que la transformada $X(f)$ es la misma para todos los valores de σ *pero sí* que el conjunto de *muestras* $X(k/T_0)$ es independiente de σ , como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.17. Coeficientes de la serie de Fourier a partir de la transformada

Sea $\tilde{x}(t)$ la señal cuadrada periódica de período T_0 que se muestra en la Fig. 2.28. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales aperiódicas que coinciden con $\tilde{x}(t)$ sobre diferentes intervalos de tiempo de longitud T_0 .

La transformada de Fourier de $x_1(t)$ es:

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{-1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{1}{\pi f} \sin(\pi \tau f) = \tau \operatorname{sinc}(\pi f). \end{aligned} \quad (2.57)$$

La transformada de Fourier de $x_2(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} X_2(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\tau/2} e^{-j2\pi f t} dt + \int_{T_0-\tau/2}^{T_0} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{-1}{j2\pi f} (e^{-j2\pi f \tau/2} - 1) + \frac{-1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f T_0} (1 - e^{j2\pi f \tau/2}) \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-j\pi\tau f/2}}{-j2\pi f} (e^{-j\pi\tau f/2} - e^{j\pi\tau f/2}) + \frac{e^{-j2\pi(T_0-\tau/4)f}}{-j2\pi f} (e^{-j\pi\tau f/2} - e^{j\pi\tau f/2}) \\ &= \frac{1}{\pi f} \sin(\pi\tau f/2) (e^{-j\pi\tau f/2} + e^{-j2\pi(T_0-\tau/4)f}) \end{aligned}$$

para finalmente encontrar

$$X_2(f) = \frac{2}{\pi f} e^{-j\pi T_0 f} \sin(\pi\tau f/2) \cos[\pi(T_0 - \tau/2)f]. \quad (2.58)$$

Comparando (2.57) con (2.58) se advierte que las dos transformadas no son iguales: mientras que $X_1(f)$ es real $X_2(f)$ es compleja. Sin embargo, para las frecuencias $f_k = k/T_0$, (2.58) se puede escribir

$$\begin{aligned} X_2\left(\frac{k}{T_0}\right) &= \frac{2}{\pi(k/T_0)} e^{-j\pi T_0 \frac{k}{T_0}} \sin\left(\pi\tau \frac{k}{T_0}\right) \cos\left[\pi(T_0 - \frac{\tau}{2}) \frac{k}{T_0}\right] \\ &= \frac{2}{\pi(k/T_0)} \sin\left(\pi\tau \frac{k}{2T_0}\right) \cos\left(\pi\tau \frac{k}{2T_0}\right). \end{aligned}$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, se tiene

$$X_2\left(\frac{k}{T_0}\right) = \frac{1}{\pi(k/T_0)} \sin\left(\pi\tau \frac{k}{T_0}\right) = \frac{T_0}{k\pi} \sin\left(\pi\tau \frac{k}{T_0}\right) = \tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{k}{T_0}\right) = X_1(f)|_{f=\frac{k}{T_0}}, \quad (2.59)$$

y por lo tanto,

$$c_k = \frac{1}{T_0} X_1(f)|_{f=\frac{k}{T_0}} = X_2(f)|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0} k\right),$$

lo que muestra que, a pesar que las transformadas de Fourier $X_1(f)$ y $X_2(f)$ son diferentes, sus muestras en las frecuencias armónicas $f_k = kT_0$ coinciden. En definitiva, los coeficientes de la serie de Fourier de una señal *periódica* de período T_0 pueden calcularse a partir de la transformada de Fourier de una señal *aperiódica* que coincide con aquella sobre un intervalo arbitrario de longitud igual al período T_0 , y que valga cero fuera de él utilizando la ecuación (2.55). \square

Sintetizando, la relación entre la *serie* de Fourier y la *transformada* de Fourier de una señal periódica $\tilde{x}(t)$ queda establecida por las expresiones (2.52), (2.53) y (2.55) repetidas aquí por completitud:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t} \\ &\Updownarrow \\ \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0) \delta(f - kf_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \end{aligned}$$

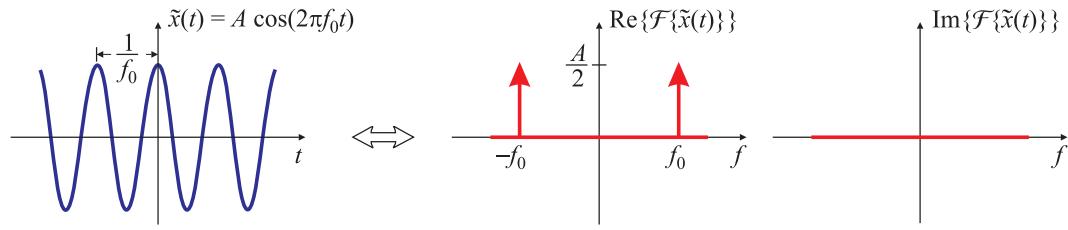


Fig. 2.29. Transformada de Fourier de $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$.

donde $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$, definida como un período de la señal periódica,

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & t_0 \leq t \leq t_0 + T_0, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

EJEMPLO 2.18. Transformada de Fourier de un coseno

La transformada de Fourier de la función periódica

$$\tilde{x}(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad (2.60)$$

puede calcularse usando el resultado del Ejemplo 2.16

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j2\pi t(f-f_0)} + e^{-j2\pi t(f+f_0)}) dt. \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad (2.48) se encuentra que

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0).$$

Este resultado también puede obtenerse recordando que los coeficientes de la serie de Fourier de la función $\tilde{x}(t)$ dada por (2.60) son $c_1 = c_{-1} = A/2$, y que el resto de los c_k son nulos, como se calculó en el Ejemplo 2.2. Aplicando (2.53) se encuentra que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0) = c_1 \delta(f - f_0) + c_{-1} \delta(f + f_0) \\ &= \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0). \end{aligned}$$

La ecuación de síntesis (2.24) y la propiedad de colador permiten obtener $x(t)$ a partir de $X(f)$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0) \right] e^{j2\pi f t} df = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= A \cos(2\pi f_0 t). \end{aligned}$$

De esta forma se puede establecer el par transformado de Fourier

$$A \cos(2\pi f_0 t) \iff \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$

que se muestra en la Fig. 2.29. □

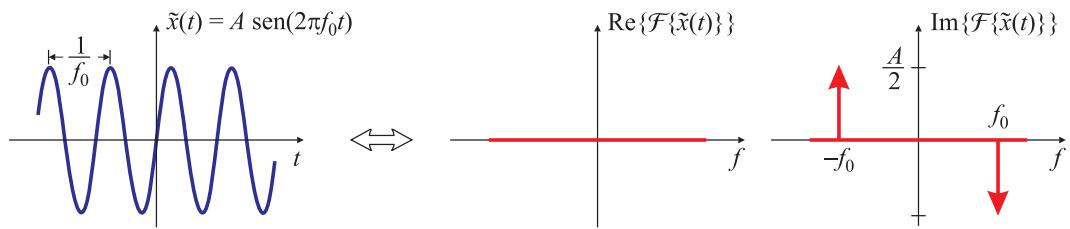


Fig. 2.30. Transformada de Fourier de $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$.

De manera similar se puede obtener la transformada de la función $\tilde{x}(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$, estableciendo el par transformado

$$A \sin(2\pi f_0 t) \iff j \frac{A}{2} \delta(f + f_0) - j \frac{A}{2} \delta(f - f_0) \quad (2.61)$$

que se representa en Fig. 2.30. En este caso, la transformada de Fourier es imaginaria.

Es instructivo comparar las similitudes y diferencias de estos resultados con los obtenidos al calcular la *serie* de Fourier de las señales coseno y seno (Ejemplos 2.2 y 2.3, respectivamente).

EJEMPLO 2.19. Transformada de Fourier de una onda cuadrada

Para calcular la serie de Fourier de la señal cuadrada $\tilde{x}(t)$ de la Fig. 2.28(a), es necesario conocer los coeficientes c_k . En lugar de utilizar la ecuación de análisis (2.11), se utilizan las *muestras* de la transformada de Fourier de la señal $x_1(t)$ de la Fig. 2.28(b), que está compuesta por un período de $\tilde{x}(t)$. En el Ejemplo 2.17 se encontró que

$$X_1(f) = \tau \operatorname{sinc}(\tau f)$$

y entonces los coeficientes de la serie de Fourier para $\tilde{x}(t)$ son

$$c_k = \frac{1}{T_0} X_1(f) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{T_0} \tau \operatorname{sinc}(\tau f) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0} k\right).$$

La transformada de Fourier de $\tilde{x}(t)$ está dada por (2.53):

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0} k\right) \delta(f - kf_0),$$

que se muestra en la Fig. 2.31 para $\tau = T_0/5$. Es ilustrativo comparar el gráfico de este espectro con el de los coeficientes de Fourier c_k en función de k del Ejemplo 2.4, representados en la Fig. 2.5. □

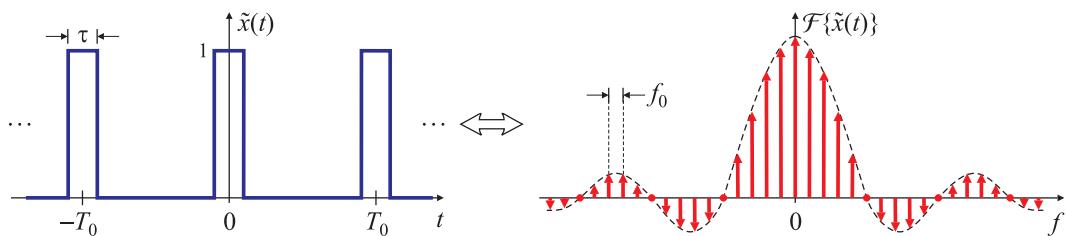


Fig. 2.31. Transformada de Fourier de una onda cuadrada con un ciclo de trabajo del 20%.

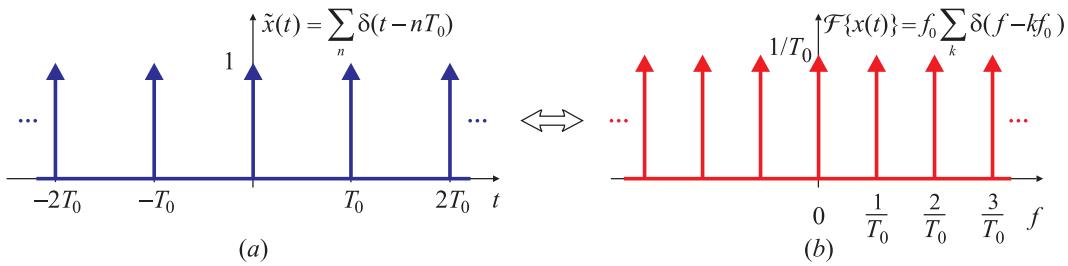


Fig. 2.32. Tren de impulsos periódico (a) y su transformada de Fourier (b).

A continuación se calcula la transformada de Fourier de una de las señales más patológicas que se estudiarán en este curso: un tren periódico de impulsos. Esta señal y su transformada, junto con el teorema de convolución frecuencial de la Sección 2.7.6, serán de gran utilidad para los desarrollos del Capítulo 5 que vinculan las señales continuas y discretas.

EJEMPLO 2.20. Transformada de Fourier de un tren periódico de impulsos

Un tren infinito de impulsos separados entre sí cada T_0 se expresa matemáticamente como

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0).$$

Esta señal es periódica, con período fundamental T_0 . Los coeficientes de la serie de Fourier se pueden calcular utilizando la ecuación de análisis (2.11), de donde resulta que

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \right] e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t} dt = \frac{1}{T_0}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. En el pasaje del segundo al tercer término se tuvo en cuenta que en el intervalo $(-T/2, T/2]$ sólo queda comprendido el impulso ubicado en $t = 0$. También se pueden calcular utilizando la ecuación (2.55). En este caso, la función formada por un período de $\tilde{x}(t)$ es $x(t) = \delta(t)$, y entonces $X(f) = 1$. Aplicando (2.55) se tiene que

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(f) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{T_0} \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{T_0}.$$

En base a estos resultados y la ecuación (2.53) la transformada de Fourier de un tren de impulsos es

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_0).$$

Este resultado muestra que la transformada de un tren de impulsos de período T_0 [Fig. 2.32(a)] es otro tren de impulsos de período $1/T_0$ y escalados por $1/T_0$ [Fig. 2.32(b)]. Se vuelve a notar aquí la relación inversa entre los dominios tiempo y frecuencia: a medida que el espaciado entre los impulsos en tiempo se hace mayor (aumenta el período T_0), el espaciado entre los impulsos en el dominio frecuencia (la frecuencia fundamental $1/T_0 = F_0$) disminuye. \square

Este ejemplo permite establecer el siguiente par transformado, representado en la Fig. 2.32:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \iff \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right). \quad (2.62)$$

Es habitual que muchos textos, sobre todo en los campos de las ciencias físicas y matemáticas, expresen los pares transformados de Fourier en función de la frecuencia angular Ω . En la Sección 2.3.3 se encontró que la relación entre $X(\Omega)$ y $X(f)$ está dada por la ecuación (2.22) o (2.55):

$$X(\Omega) = X(f)|_{f=\frac{\Omega}{2\pi}}$$

Si se intenta expresar este par transformado en función de la frecuencia angular Ω deben tomarse algunas precauciones debido a la propiedad de escalado del impulso, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.21. El tren de impulsos en función de la frecuencia angular Ω

En el ejemplo anterior se ha demostrado que la transformada de Fourier del tren de impulsos $\tilde{x}(t)$ de período T_0 es

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right).$$

Como $\Omega = 2\pi f$, definiendo $\Omega_0 = 2\pi/T_0$, y aplicando la propiedad de escalado del impulso resulta

$$\frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \Big|_{f=\frac{\Omega}{2\pi}} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left[\frac{1}{2\pi} \left(2\pi f - \frac{2\pi}{T_0} k\right)\right] = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 k)$$

y entonces el par transformado (2.62) puede escribirse en función de la frecuencia angular Ω como

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \iff \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \Omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0).$$

La diferencia con la expresión en función de la frecuencia f en ciclos por segundo es que cambia el factor de escalado de los impulsos que no es evidente en la ecuación (2.32). \square

Este par transformado es tan útil que se estudiarán a continuación otras dos formas de obtenerlo. En estos desarrollos se aplica la propiedad de linealidad que se demostrará rigurosamente en la Sección 2.6.2.

EJEMPLO 2.22. Transformada de un tren de impulsos

En este ejemplo se busca demostrar “intuitivamente” (y no de manera rigurosa como en Ejemplo 2.20) que la transformada de Fourier de un tren de impulsos equiespaciados en tiempo es otro tren de impulsos equiespaciados en frecuencia

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \iff X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right). \quad (2.63)$$

Este enfoque se basa en partir de un conjunto finito de impulsos separados $f_0 = 1/T_0$ en el dominio frecuencia, calcular la forma de sus antitransformadas, y tratar de deducir el comportamiento de estos pares cuando el número de impulsos tiende a infinito, como se representa en la Fig. 2.33. Comenzando con tres impulsos en el dominio frecuencia, como se muestra en la Fig. 2.33(a) (derecha), se tiene que:

$$X_1(f) = \delta(f) + \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0),$$

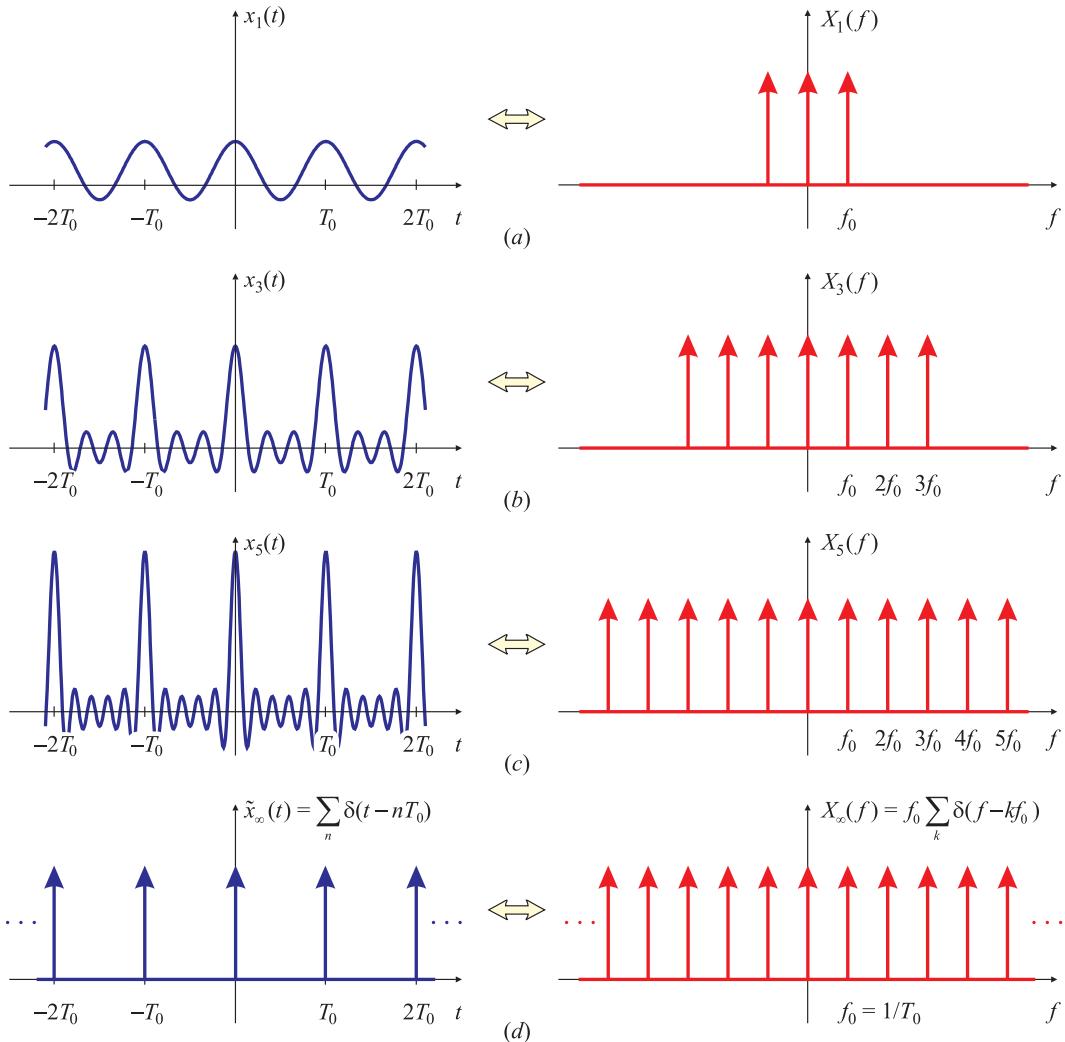


Fig. 2.33. Desarrollo de la transformada de Fourier de una sucesión de impulsos equiespaciados.

y en consecuencia su antitransformada, que resulta de aplicar el resultado del Ejemplo 2.16 es

$$x_1(t) = 1 + e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} = 1 + 2 \cos(2\pi f_0 t),$$

función que se puede observar en la Fig. 2.33(a) (izquierda). Si en el dominio frecuencia se agregan pares de impulsos de la forma $\delta(f + kf_0) + \delta(f - kf_0)$, donde k es un entero positivo, en la función en el dominio tiempo aparecen términos de la forma $2 \cos[2\pi(kf_0)t]$. Para tres pares de términos (además del impulso en el origen) como los representados en la Fig. 2.33(b), la transformada de Fourier es

$$X_3(f) = \delta(f) + \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0) + \delta(f - 3f_0) + \delta(f + 3f_0),$$

y su antitransformada resulta

$$\begin{aligned} x_3(t) &= 1 + e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi(2f_0)t} + e^{-j2\pi(2f_0)t} + e^{j2\pi(3f_0)t} + e^{-j2\pi(3f_0)t} \\ &= 1 + 2 \cos(2\pi f_0 t) + 2 \cos[2\pi(2f_0)t] + 2 \cos[2\pi(3f_0)t] \end{aligned} \quad (2.64)$$

que se muestra en el panel de la izquierda de la Fig. 2.33(b). A medida que se incrementa el número de impulsos en el dominio frecuencia, se incrementa el número de términos $2 \cos(2\pi n f_0 t)$ que

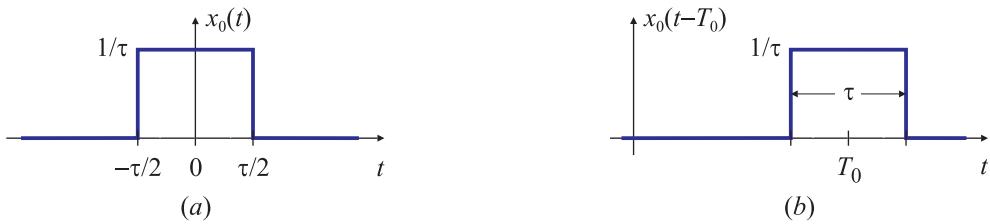


Fig. 2.34. El pulso prototipo $x_0(t)$ (a) y el pulso desplazado $x_0(t - T_0)$ (b).

aparecen en el dominio tiempo. Para N pares de impulsos, la transformada es

$$X_N(f) = \sum_{k=-N}^N \delta(f - kf_0)$$

y la antitransformada

$$x_N(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2\pi f_0 kt).$$

Como se están sumando cosenos de frecuencias múltiplos de f_0 la función temporal alcanza un máximo de $2N + 1$ en $t = T_0$ y sus múltiplos, mientras que en los valores intermedios los diferentes cosenos se suman algebraicamente reduciendo su amplitud, como se representa en la Fig. 2.33(c). A medida que crece el número de pares de impulsos separados $\pm kf_0$ que se agregan en el dominio frecuencia, la forma de onda de $x(t)$ se parece “cada vez más” a un tren de impulsos. Finalmente, en el límite, cuando el dominio frecuencia se tienen “infinitos” pulsos, se obtienen también “infinitos” impulsos en el dominio tiempo, como se representa en la Fig. 2.33(d). \square

En la siguiente interpretación se repite la idea del ejemplo anterior, pero sumando pares de *pulsos* (no impulsos) en el dominio temporal.

EJEMPLO 2.23. Transformada de un tren de pulsos

El pulso temporal prototipo se muestra en la Fig. 2.34(a), y se define como

$$x_0(t) = \begin{cases} 1/\tau, & |t| < \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

Su transformada $X_0(f)$ fue calculada en el Ejemplo 2.11, $X_0(f) = \text{sinc}(\tau f)$, y se grafica en la Fig. 2.36(a), (f) y (k) para $\tau = 0,5, 0,2$ y $0,1$, respectivamente. A medida que disminuye el ancho del pulso, el lóbulo principal del $\text{sinc}(\cdot)$ es cada vez más amplio, porque el primer cero está ubicado en $f = 1/\tau$. Cuando $\tau \rightarrow 0$, $x_0(t) \rightarrow \delta(t)$, y $X_0(f) \rightarrow 1$.

Una señal compuesta por tres pulsos como la que se muestra en la Fig. 2.35(a) puede escribirse en función del pulso prototipo como

$$x_1(t) = x_0(t + T_0) + x_0(t) + x_0(t - T_0).$$

Para calcular su transformada de Fourier es necesario conocer la transformada de las funciones $x_0(t \pm T_0)$. Es sencillo demostrar mediante un cambio de variables que

$$\mathcal{F}\{x_0(t \pm T_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t \pm T_0) e^{-j2\pi ft} dt = e^{\pm j2\pi f T_0} X_0(f)$$

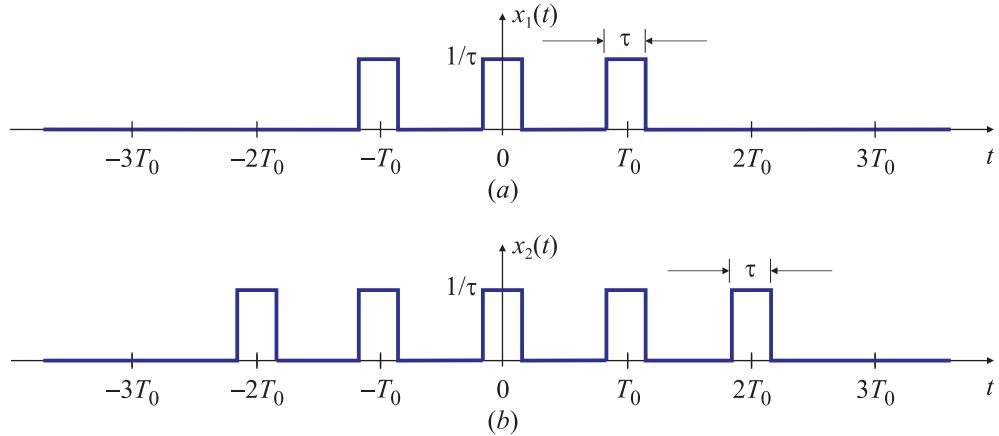


Fig. 2.35. Trenes de pulsos.

(la demostración rigurosa se desarrollará en la Sección 2.6.7). Por lo tanto la transformada de Fourier de la señal $x_1(t)$ con tres pulsos de la Fig. 2.35(a) es

$$\begin{aligned} X_1(f) &= X_0(f) + e^{j2\pi f T_0} X_0(f) + e^{-j2\pi f T_0} X_0(f) = X_0(f) (1 + e^{j2\pi f T_0} + e^{-j2\pi f T_0}) \\ &= X_0(f) [1 + 2 \cos(2\pi T_0 f)]. \end{aligned}$$

El término entre corchetes es un coseno elevado, con picos que varían entre -1 y 3 , y $X_1(f)$ es una “modulación” de esta señal por $X_0(f)$, que es una función sinc(\cdot), como se muestra en la Fig. 2.36(b)-(g)-(l) para diferentes valores de τ . Dependiendo del ancho τ del pulso, algunos de los “picos” pueden no aparecer: por ejemplo para $\tau = T_0/2$ el segundo pico del coseno queda multiplicado por el cero del sinc(\cdot) como se observa en la Fig. 2.36(b).

Siguiendo el mismo razonamiento, la señal $x_2(t)$ graficada en la Fig. 2.35(b) y formada por cinco pulsos se puede escribir como

$$x_2(t) = x_0(t + 2T_0) + x_0(t + T_0) + x_0(t) + x_0(t - T_0) + x_0(t - 2T_0)$$

y su transformada de Fourier es

$$X_2(f) = X_0(f) [1 + 2 \cos(2\pi T_0 f) + 2 \cos(2\pi 2T_0 f)].$$

Generalizando estos resultados, la transformada de la función $x_N(t)$ formada por $2N + 1$ pulsos es

$$X_N(f) = X_0(f) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2\pi k T_0 f) \right] \quad (2.65)$$

Los casos para $N = 5, 25, 75, (11, 51, 151)$ pulsos, respectivamente) se muestran también en la Fig. 2.36. Como todos los cosenos que aparecen en la sumatoria tienen frecuencias múltiplos de $f_0 = 1/T_0$, el término entre corchetes alcanza el valor máximo $2N + 1$ en todos los múltiplos de T_0 . Por lo tanto, a medida que N crece, la amplitud de los picos también crece.

La figura muestra también que los picos que aparecen en las transformadas se hacen más angostos a medida que aumenta N . Esta suma de cosenos queda modulada por $X_0(f)$, que tiene la forma de un sinc(\cdot), ya que es la transformada de Fourier del pulso $x_0(t)$, y por lo tanto, a medida que disminuye el ancho del pulso τ la envolvente del espectro se hace más plana.

En el límite, cuando el número de pulsos es infinito, y el ancho de los pulsos tiende a cero, la transformada de un tren de impulsos separados cada T_0 (como los de la Fig. 2.35) tiende a un tren de impulsos separados cada $f_0 = 1/T_0$ como los que se muestran en la Fig. 2.36. Este resultado se formaliza con el desarrollo de la siguiente Sección. \square

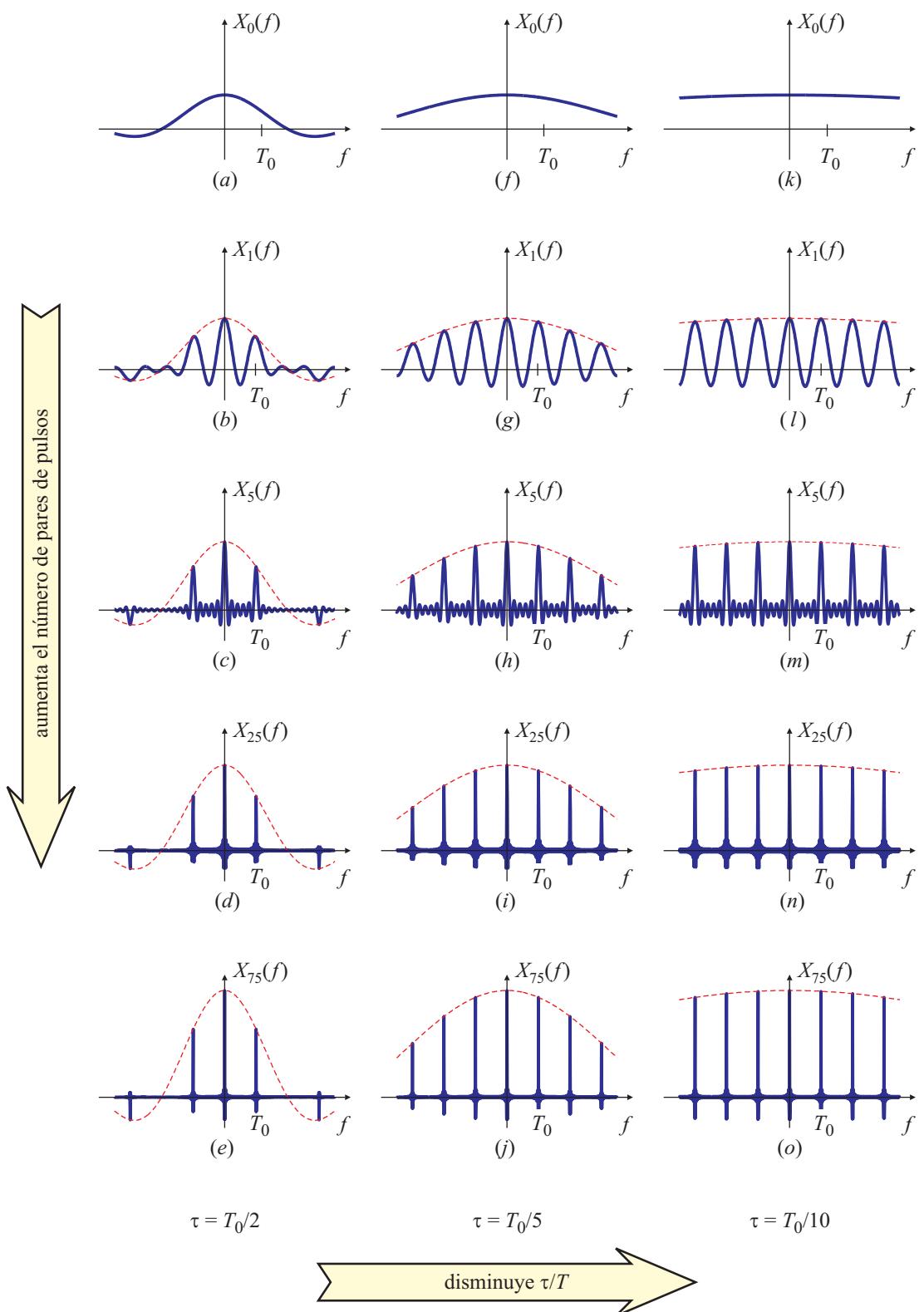


Fig. 2.36. Transformadas de los trenes de pulsos de la Fig. 2.35 para un ancho de pulso $\tau = T_0/2$ (a)-(e), $\tau = T_0/5$ (f)-(j) y $\tau = T_0/10$ (k)-(o). Cada fila corresponde a distinto número de pulsos (uno, tres, once, cincuenta y uno y ciento cincuenta y uno, respectivamente).

2.5.1. El núcleo de Dirichlet

En las expresiones de la antitransformada de Fourier de un número finito de impulsos en frecuencia [ecuación (2.64)], o en la de la transformada de Fourier de un número finito de pulsos en el dominio tiempo [ecuación (2.65)] aparece un término similar, que tiene la forma

$$1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2\pi k f_0 t)$$

en (2.64), y

$$1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2\pi k T_0 f)$$

en (2.65). Por brevedad, y debido a la similitud de las expresiones, se analizará este último. Definiendo la función

$$\Phi_{T_0,2N+1}(f) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N e^{2\pi k T_0 f}$$

la transformada de $x_N(t)$ (un conjunto de $2N+1$ pulsos en el dominio tiempo) puede escribirse como

$$X_N(f) = X_0(f)(2N+1)\Phi_{T_0,2N+1}(f). \quad (2.66)$$

Es posible encontrar una expresión cerrada para $\Phi_{T_0,2N+1}(f)$:

$$\Phi_{T_0,2N+1}(f) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N e^{2\pi k T_0 f} = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=0}^{2N} e^{2\pi(k-N)T_0 f} = \frac{e^{-j2\pi N T_0 f}}{2N+1} \sum_{k=0}^{2N} e^{2\pi k T_0 f}.$$

Recordando que $\sum_{k=0}^N \rho^k = (\rho^{N+1} - 1)/(\rho - 1)$, $\Phi_{T_0,2N+1}(f)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Phi_{T_0,2N+1}(f) &= \frac{e^{-j2\pi N T_0 f}}{2N+1} \frac{e^{2\pi(2N+1)T_0 f} - 1}{e^{2\pi T_0 f} - 1} \\ &= \frac{e^{-j2\pi N T_0 f}}{2N+1} \frac{e^{2\pi(2N+1)T_0 f/2} [e^{2\pi(2N+1)T_0 f/2} - e^{-2\pi(2N+1)T_0 f/2}]}{e^{2\pi T_0 f/2} (e^{2\pi T_0 f/2} - e^{-2\pi T_0 f/2})} \\ &= \frac{1}{2N+1} \frac{\sin[\pi T_0 (2N+1) f]}{\sin(\pi T_0 f)} \end{aligned}$$

que se puede generalizar como

$$\Phi_{T_0,M}(x) = \frac{\sin(\pi T_0 M x)}{M \sin(\pi T_0 x)}, \quad (2.67)$$

donde se reemplaza $2N+1$ por M , que puede ser un número par o impar, y el cambio de variable f por x permite independizarse de la interpretación frecuencial. Esta función, que aparecerá frecuentemente a lo largo del curso, se denomina *kernel* (o *núcleo*) de Dirichlet y se representa en la Fig. 2.37. En algunos textos también se la conoce como “sinc periódico”.

Para los x que son múltiplos de $1/T_0$ se anulan tanto el numerador como el denominador. Aplicando l'Hôpital, se encuentra que

$$\Phi_{T_0,M}(x)|_{x=k/T_0} = \frac{\cos(\pi M k)}{M \cos(\pi k)}, \quad M \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$$

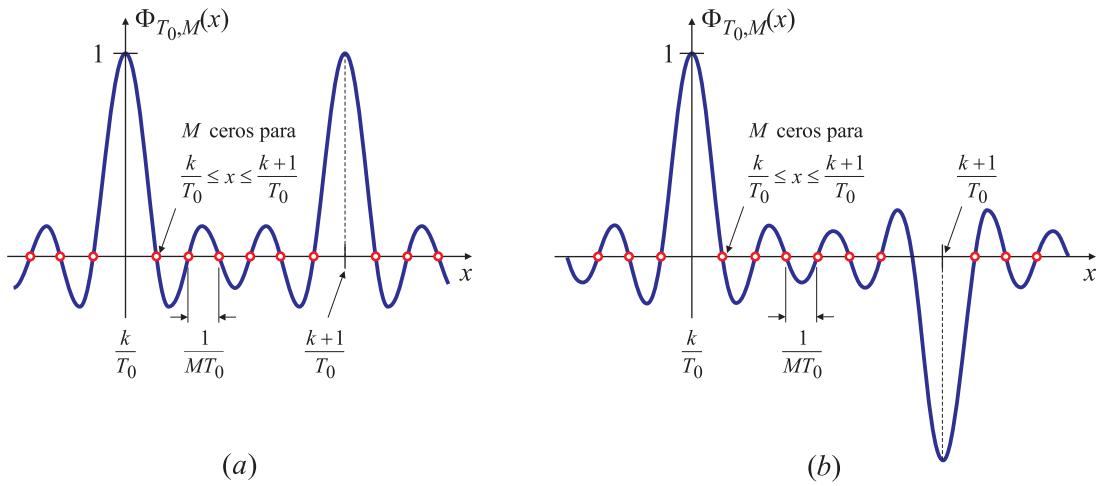


Fig. 2.37. Detalles de la función $\Phi_{T_0,M}(x)$ para M impar (a) y para M par (b).

y entonces

$$\Phi_{T_0,M}(x)|_{x=k/T_0} = \begin{cases} 1, & k \in \mathbb{Z}, M \text{ impar}, \\ (-1)^k, & k \in \mathbb{Z}, M \text{ par}, \end{cases} \quad (2.68)$$

como se muestra en la Fig. 2.37(a) y Fig. 2.37(b), respectivamente. También es evidente de (2.67) que la función $\Phi_{T_0,M}(x)$ es periódica, de período $1/T_0$ si M es impar, y de período $2/T_0$ si M es par:

$$\Phi_{T_0,M}(x) = \begin{cases} \Phi_{T_0,M}\left(x + \frac{1}{T_0}k\right), & k \in \mathbb{Z}, M \text{ impar}, \\ \Phi_{T_0,M}\left(x + \frac{2}{T_0}k\right), & k \in \mathbb{Z}, M \text{ par}. \end{cases}$$

Además, se puede comprobar que

$$\int_0^{1/T_0} \Phi_{T_0,M}(x) dx = \frac{1}{MT_0}, \quad \text{si } M \text{ es impar},$$

$$\int_0^{2/T_0} \Phi_{T_0,M}(x) dx = 0, \quad \text{si } M \text{ es par}.$$

La función (2.67) tiene $M-1$ ceros cada $f_0 = 1/T_0$, localizados en

$$x_i = \frac{k}{T_0} \left(1 + \frac{i}{M}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (2.69)$$

donde $k/T_0 \leq x_i < (k+1)/T_0$, $k \in \mathbb{Z}$. El numerador se anula M veces cada $1/T_0$, pero uno de esos ceros, ubicado en $x = k/T_0$ [correspondiente a $i = 0$ en (2.69)], se cancela con el cero del denominador: en esos puntos el valor de la función está dado por (2.68).

2.5.2. La transformada del tren de pulsos aplicando el núcleo de Dirichlet

Retomando el análisis de la transformada del tren de $2N+1$ pulsos, la ecuación (2.66) muestra $X_N(f)$ que está formada por el producto de la transformada de un pulso (2.37)

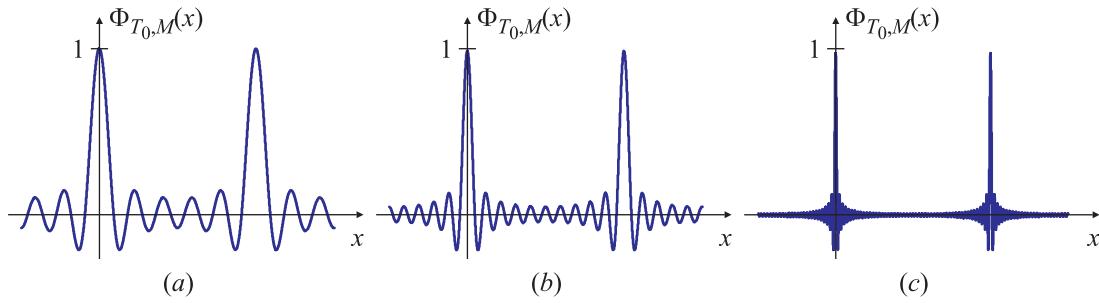


Fig. 2.38. Función $\Phi_{T_0,M}(x)$ para $M = 11$ (a), $M = 21$ (b) y $M = 101$ (c).

y la función $\Phi_{T_0,2N+1}(f)$ escalada por $(2N+1)$: la transformada del tren de pulsos es la función $\Phi_{T_0,2N+1}(f)$ modulada por la transformada del pulso, lo que permite explicar la Fig. 2.36 a partir de las Figs. 2.18 y 2.38. Como $\Phi_{T_0,2N+1}(f)$ tiene $2N$ ceros por período, cuando $N \rightarrow \infty$ la función será virtualmente nula en todo el período, excepto en los múltiplos enteros de $1/T_0$ donde se anulan simultáneamente el numerador y denominador de la función. Cuando $N \rightarrow \infty$ el núcleo de Dirichlet escalado $(2N+1)\Phi_{T_0,2N+1}(f)$ tiende a un tren de impulsos en frecuencia, equiespaciados $1/T_0$ unidades entre sí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)\Phi_{T_0,2N+1}(f) = \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right), \quad (2.70)$$

como se muestra en la Fig. 2.38 para distintos valores de N .

Mientras N sea finito, la función temporal no será periódica, de modo que, aunque $\tau \rightarrow 0$, la transformada de Fourier del tren de $2N+1$ pulsos se asemeja a las gráficas de la Fig. 2.36, y no a un tren de impulsos. Sólo cuando $N \rightarrow \infty$ y $\tau \rightarrow 0$ el tren de $2N+1$ pulsos se convierte en un tren periódico de impulsos, y la transformada $X_N(f) = X_0(f) (2N+1)\Phi_{T_0,2N+1}(f)$ converge a otro tren periódico de impulsos verificándose la relación (2.63).

2.6. Propiedades de la transformada de Fourier

El conocimiento de las propiedades de la transformada de Fourier permite resolver con facilidad muchos problemas de procesamiento de señales que normalmente podrían requerir conocimientos matemáticos avanzados, enfocándolos desde una perspectiva más ingenieril. Esto no significa que se puedan soslayar los aspectos matemáticos, sino que es muy útil comprender el significado de estas propiedades, que son de gran ayuda al momento de analizar resultados experimentales como los que se comentan en el Apéndice B. En esta sección se tratará de enfatizar este aspecto a través de numerosos ejemplos.

2.6.1. Propiedad de área

El valor de la transformada de Fourier $X(f)$ (ecuación de análisis) en $f = 0$ es igual al área bajo la función temporal $x(t)$:

$$X(f) \Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \text{área bajo la función } x(t), \quad (2.71)$$

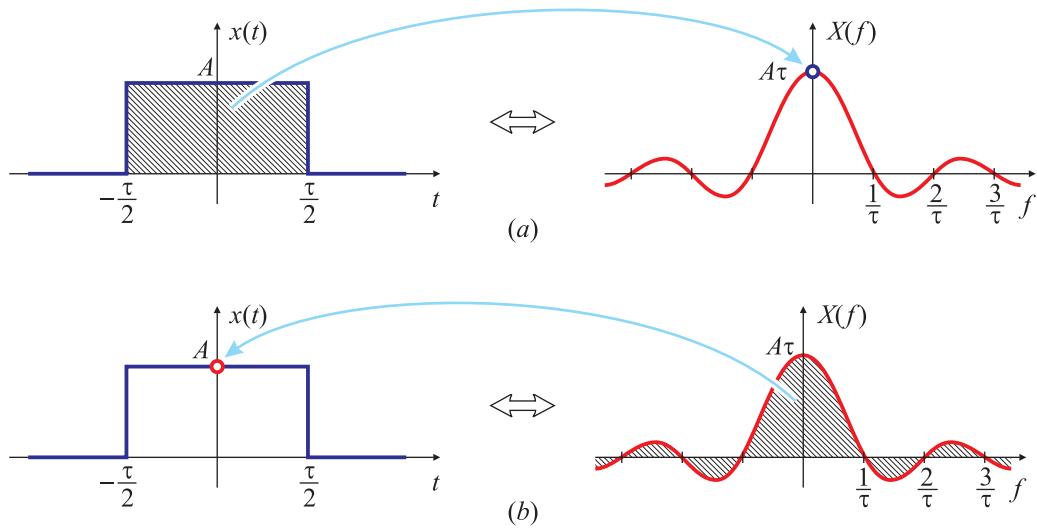


Fig. 2.39. Propiedad de área de la transformada de Fourier. El área bajo $x(t)$ es el valor de $X(f)|_{f=0}$ (a) y el área bajo $X(f)$ es el valor de $x(t)|_{t=0}$ (b).

como se representa en la Fig. 2.39(a). Es frecuente referirse al valor $X(f)|_{f=0}$ como el *valor de continua* de la transformada.

Por la similitud entre la ecuación de análisis y síntesis, el valor de la transformada inversa $x(t)$ en $t = 0$ es igual al área bajo la transformada $X(f)$:

$$x(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df = \text{área bajo la función } X(f), \quad (2.72)$$

como se muestra en la Fig. 2.39(b).

Esta propiedad resulta muy útil para verificar que los cálculos realizados para encontrar otras transformadas no son erróneos, lo que no significa que sean correctos!

EJEMPLO 2.24. Propiedad de área de la transformada de Fourier

En la Fig. 2.39(a) se muestra el pulso rectangular $x(t)$ de amplitud A y ancho τ , y su transformada de Fourier $X(f) = A\tau \text{sinc}(\tau f)$. El área bajo $x(t)$ es $A\tau$ y coincide con el valor de $X(f)$ en $f = 0$.

El caso que se muestra en la Fig. 2.39(b) es más interesante porque calcular el área bajo el $\text{sinc}(\cdot)$ requiere resolver una integral no trivial. La propiedad de área muestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\tau \text{sinc}(\tau f) df = x(t)\Big|_{t=0} = A.$$

Esta identidad será de utilidad en los desarrollos de la Sección 2.8. □

Si la función o su transformada son discontinuas en el origen, el área de la función en frecuencia o tiempo es la mitad del valor del salto en el dominio tiempo o frecuencia, respectivamente, ya que la transformada o la antitransformada de Fourier convergen al valor medio del salto. Según Bracewell (1978), “La diferencia entre una función $x(t)$ y cualquier otra función $\hat{x}(t)$ tal que $\hat{x}(0) \neq 1/2$ es una función nula cuya integral siempre

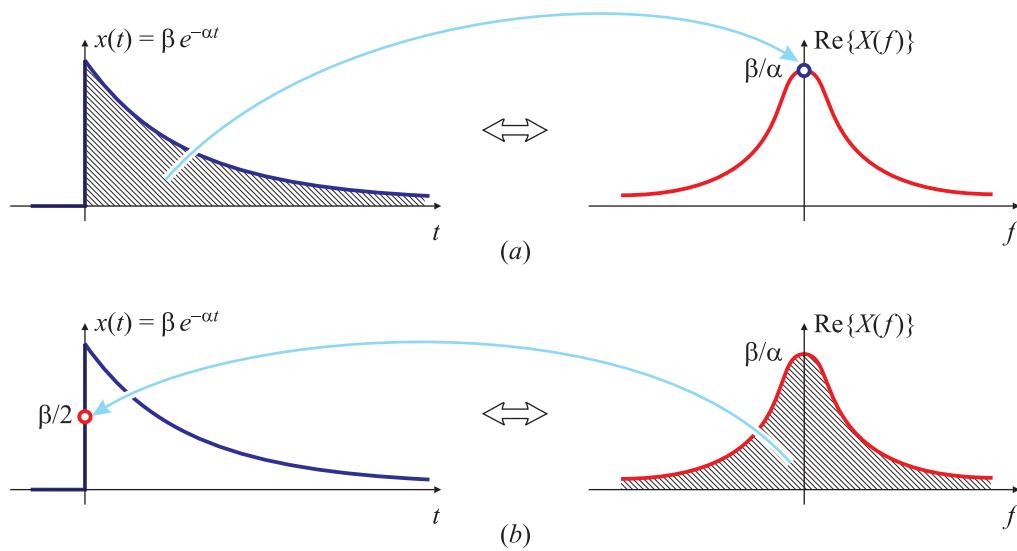


Fig. 2.40. Propiedad de área de la transformada de Fourier. El área bajo $x(t)$ es el valor de $X(f)|_{f=0}$ (a), y el área bajo $X(f)$ converge al valor medio del salto de $x(t)|_{t=0}$ (b).

es cero. Se fuese necesario realizar observaciones físicas de una cantidad que fluctúa según $x(t)$ o $\hat{x}(t)$, no sería posible distinguir entre ambas alternativas matemáticas, ya que las medias ponderadas sobre intervalos no nulos, que son las únicas cantidades mensurables, no se verían afectadas por la presencia o ausencia de funciones nulas. Para las aplicaciones físicas de $x(t)$ es posiblemente más elegante no mencionar $x(0)$.” Esta característica se estudia en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.25. Propiedad de área de un pulso exponencial

En el Ejemplo 2.5 se demostró el par transformado

$$x(t) = \beta e^{-\alpha t} u(t) \iff X(f) = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f}.$$

El área bajo $x(t)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \int_0^{\infty} \beta e^{-\alpha t} dt = -\frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = -\frac{\beta}{\alpha} (0 - 1) = \frac{\beta}{\alpha}$$

que evidentemente coincide con $X(f)|_{f=0} = \beta/\alpha$, como se representa en la Fig. 2.40(a).

Por otra parte, calcular el área bajo $X(f)$ es complicado porque $X(f)$ es complejo. Expresándola en parte real y parte imaginaria,

$$X(f) = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - j \frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} df - j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} df$$

El valor principal de Cauchy de la segunda integral es nulo porque el integrando es impar. La primera integral resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} df = \frac{\beta}{2\pi} \arctan \left(\frac{2\pi f}{\alpha} \right) \Big|_{f=-\infty}^{f=\infty} = \frac{\beta}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\beta}{2}$$

y por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) df = \frac{\beta}{2}.$$

En este caso el área bajo $X(f) = \beta/2$ es distinto del valor de $x(t)|_{t=0} = \beta$! Esto es consecuencia de la discontinuidad de $x(t)$ en $t = 0$: las transformadas y las series de Fourier convergen al valor medio del salto en el caso de funciones discontinuas. \square

2.6.2. Linealidad

Si $x(t)$ e $y(t)$ tienen transformadas de Fourier $X(f)$ e $Y(f)$, respectivamente, entonces la suma $ax(t) + by(t)$ donde a, b son números complejos, tiene transformada de Fourier $aX(f) + bY(f)$. Esta propiedad se deduce fácilmente:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{a x(t) + b y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [a x(t) + b y(t)] e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} a x(t) e^{-j2\pi f t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} b y(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= a X(f) + b Y(f),\end{aligned}$$

lo que define el par transformado

$$a x(t) + b y(t) \iff a X(f) + b Y(f).$$

Esta relación permite aplicar la transformada de Fourier en el análisis de sistemas lineales.

EJEMPLO 2.26. Propiedad de linealidad

Dada la función $z(t) = K + A \cos(2\pi f_0 t)$, su transformada se puede calcular fácilmente teniendo en cuenta los pares transformados de Fourier

$$\begin{aligned}x(t) &= K \iff X(f) = K\delta(f), \\ y(t) &= A \cos(2\pi f_0 t) \iff Y(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0),\end{aligned}$$

que se calcularon en los Ejemplos 2.15 y 2.18, y que se grafican en la Fig. 2.41(a) y (b), respectivamente. La propiedad de linealidad asegura que, como

$$z(t) = K + A \cos(2\pi f_0 t) = x(t) + y(t)$$

su transformada de Fourier es

$$Z(f) = K\delta(f) + \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0),$$

representada en la Fig. 2.41(c). \square

El siguiente ejemplo muestra la conveniencia de la transformada de Fourier.

EJEMPLO 2.27. Transformada de la suma de dos señales no relacionadas armónicamente

La señal

$$z(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{y}(t)$$

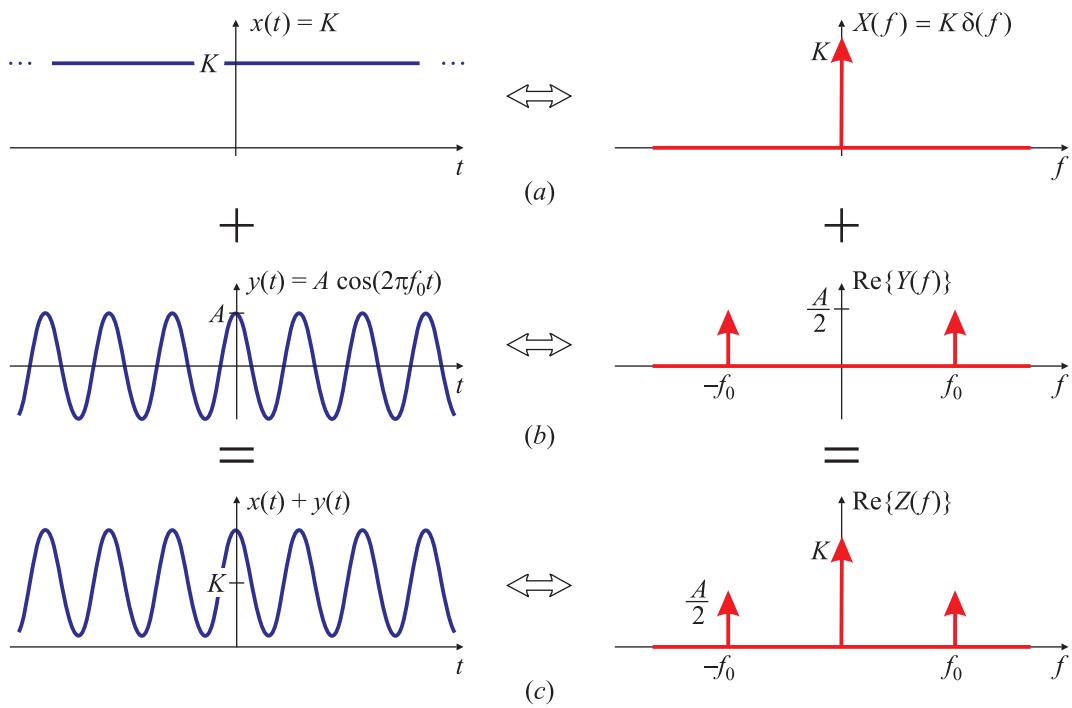


Fig. 2.41. Propiedad de linealidad.

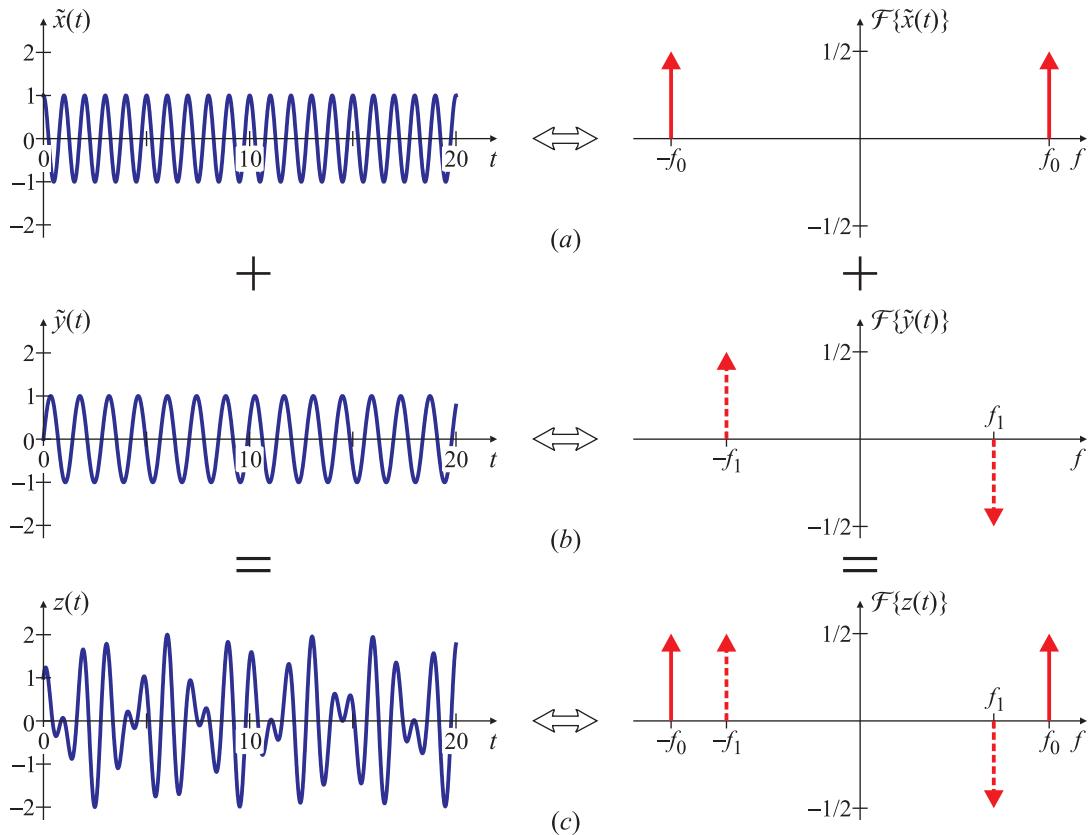


Fig. 2.42. Propiedad de linealidad: suma de dos senoidales no relacionadas armónicamente.

con

$$\tilde{x}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0), \quad \tilde{y}(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$$

no es periódica si $f_0/f_1 \notin \mathbb{Q}$, como se estudió en los ejercicios del Capítulo 1. Por lo tanto, no es posible expresarla en series de Fourier. Sin embargo, no hay inconvenientes en calcular su transformada. Aplicando el resultado del Ejemplo 2.18 se encuentra que

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{A_0 e^{j\phi_0}}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A_0 e^{-j\phi_0}}{2} \delta(f + f_0), \quad \mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\} = \frac{A_1 e^{j\phi_1}}{2} \delta(f - f_1) + \frac{A_1 e^{-j\phi_1}}{2} \delta(f + f_1),$$

y entonces

$$\mathcal{F}\{z(t)\} = \frac{A_0 e^{j\phi_0}}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A_0 e^{-j\phi_0}}{2} \delta(f + f_0) + \frac{A_1 e^{j\phi_1}}{2} \delta(f - f_1) + \frac{A_1 e^{-j\phi_1}}{2} \delta(f + f_1)$$

En la Fig. 2.42 se muestran las señales $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ y $z(t)$ para $f_0 = 1$, $f_1 = \sqrt{2}/2$, $A_0 = A_1 = 1$ y $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = -\pi/2$ y sus espectros respectivos (la parte real se representa con línea llena, y la imaginaria con línea de puntos). En el lapso de tiempo graficado no es posible detectar el período de la señal $z(t)$ (porque no es periódica). Sin embargo, su espectro $\mathcal{F}\{z(t)\}$ está perfectamente definido. No puede obtenerse un gráfico análogo que muestre la variación de los coeficientes de Fourier c_k en función de k porque $z(t)$ no es periódica. \square

2.6.3. Escalado en tiempo

Si la transformada de Fourier de $x(t)$ es $X(f)$, entonces la transformada de $x(kt)$, donde k es una constante real mayor que cero, se puede determinar reemplazando $\tau = kt$ en la ecuación de análisis, resultando que

$$\mathcal{F}\{x(kt)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(kt) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau/k} \frac{d\tau}{k} = \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right).$$

Para k negativos, el término de la derecha cambia de signo porque cambian los límites de integración, pero también cambia el signo del diferencial dt , por lo que el resultado final no cambia. Entonces el escalado en tiempo resulta en el par transformado de Fourier

$$x(kt) \iff \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right). \quad (2.73)$$

EJEMPLO 2.28. Propiedad de escalado en tiempo

La Fig. 2.43 muestra que una expansión de la escala temporal se corresponde con una compresión de escala en el eje de frecuencias. En la Fig. 2.43(a) se muestra el par transformado de Fourier correspondiente a un pulso rectangular. El pulso $x_1(t)$ tiene "altura" A y ancho τ , y su transformada es un $\text{sinc}(\cdot)$ de altura $A\tau$, y con ceros cada $1/\tau$: esto es, $X_1(f) = A\tau \text{sinc}(\tau f)$. En la Fig. 2.43(b) se representa un pulso $x_2(t)$ de la misma altura, pero del doble de ancho. El área del pulso corresponde a la amplitud máxima de su transformada de Fourier, que será un $\text{sinc}(\cdot)$ de altura $A \times 2\tau$, con ceros que se repiten cada la inversa del ancho del pulso; en este caso cada $1/(2\tau)$. Por lo tanto, la transformada de Fourier de este pulso es

$$X_2(f) = 2A\tau \text{sinc}(2\tau f). \quad (2.74)$$

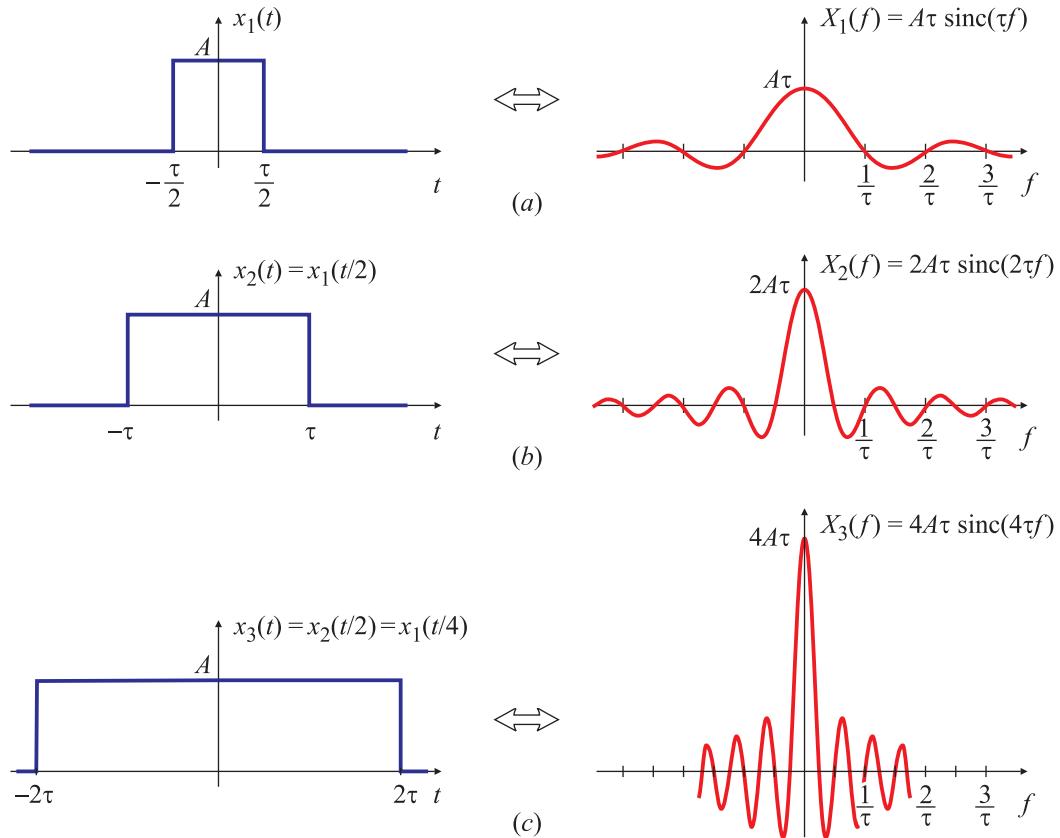


Fig. 2.43. Propiedad de escalado en tiempo.

Es evidente que $x_2(t) = x_1(t/2)$, es decir que $x_2(t)$ es una versión *escalada en el tiempo* de $x_1(t)$, con $k = 1/2$. De acuerdo a la propiedad de escalado en el tiempo de la transformada de Fourier, resulta que

$$x_2(t) = x_1(t/2) \iff X_2(f) = \frac{1}{|k|} X_1\left(\frac{f}{k}\right) = 2X_1(2f) = 2A\tau \operatorname{sinc}[2\tau f],$$

que coincide con (2.74).

En la Fig. 2.43(c) se representa la señal $x_3(t)$, que puede pensarse como un escalado por $(1/4)$ de $x_1(t)$ o un escalado por $(1/2)$ de $x_2(t)$, y su correspondiente par transformado $X_3(f)$.

La propiedad de escalado en tiempo es muy conocida en varias ramas de la ciencia. A medida que se expande la escala temporal, no sólo se contrae la escala frecuencial sino que la amplitud de la transformada se incrementa ya que el área bajo la transformada es igual al valor de la función temporal en el origen $t = 0$. Este efecto es muy conocido en la teoría de antenas y radar. \square

Si en algunos de los pares transformados aparecen impulsos, la propiedad de escalado se aplica exactamente igual, pero prestando atención a la propiedad de escalado del impulso: $\delta(at) = \delta(t)/|a|$ (Sección 2.4.2, Propiedad 2).

EJEMPLO 2.29. Propiedad de escalado cuando intervienen impulsos

En la Fig. 2.44(a) se representa la señal $x_1(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ y su transformada de Fourier

$$X_1(f) = (A/2)\delta(f + f_0) + (A/2)\delta(f - f_0).$$

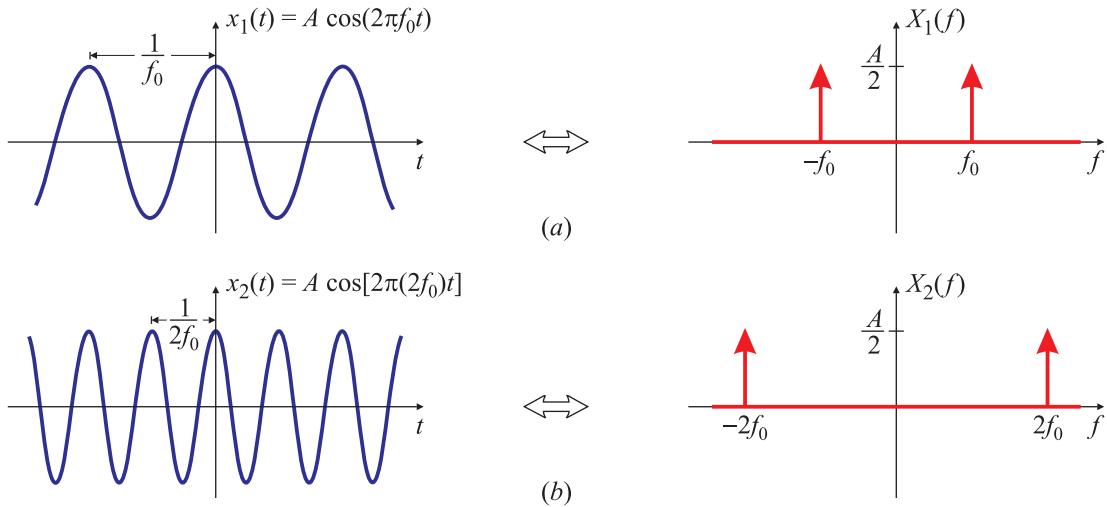


Fig. 2.44. Propiedad de escalado en tiempo: el caso de los impulsos.

Si $x_2(t)$ es una versión escalada en tiempo de x_1 , por ejemplo,

$$x_2(t) = x_1(2t) = A \cos[2\pi f_0(2t)],$$

la señal resultante es un coseno de igual amplitud que $x_1(t)$ pero de frecuencia doble. Por lo tanto, su transformada es

$$X_2(f) = (A/2)\delta(f + 2f_0) + (A/2)\delta(f - 2f_0).$$

La aplicación “ingenua” de la propiedad de escalado en tiempo podría sugerir que se afecta la amplitud de la transformada por el factor $1/|k|$; pero en realidad esto no ocurre por la propiedad de escalado del impulso. En efecto, si $x_2(t) = x_1(2t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} X_2(f) &= \frac{1}{2}X_1\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{2}\delta\left(\frac{f}{2} + f_0\right) + \frac{A}{2}\delta\left(\frac{f}{2} - f_0\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{A}{2}\delta\left[\frac{1}{2}(f + 2f_0)\right] + \frac{A}{2}\delta\left[\frac{1}{2}(f - 2f_0)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de escalado del impulso resulta

$$\begin{aligned} X_2(f) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{A}{2}2\delta(f + 2f_0) + \frac{A}{2}2\delta(f - 2f_0)\right\} \\ &= \frac{A}{2}\delta(f + 2f_0) + \frac{A}{2}\delta(f - 2f_0), \end{aligned}$$

expresión que coincide con la derivada más arriba, y que se representa en la Fig. 2.44(b). \square

2.6.4. Escalado en frecuencia

Si la transformada inversa de Fourier de $X(f)$ es $x(t)$, entonces la transformada inversa de $X(kf)$, donde k es una constante real satisface el par transformado

$$\frac{1}{|k|}x\left(\frac{t}{k}\right) \iff X(kf). \quad (2.75)$$

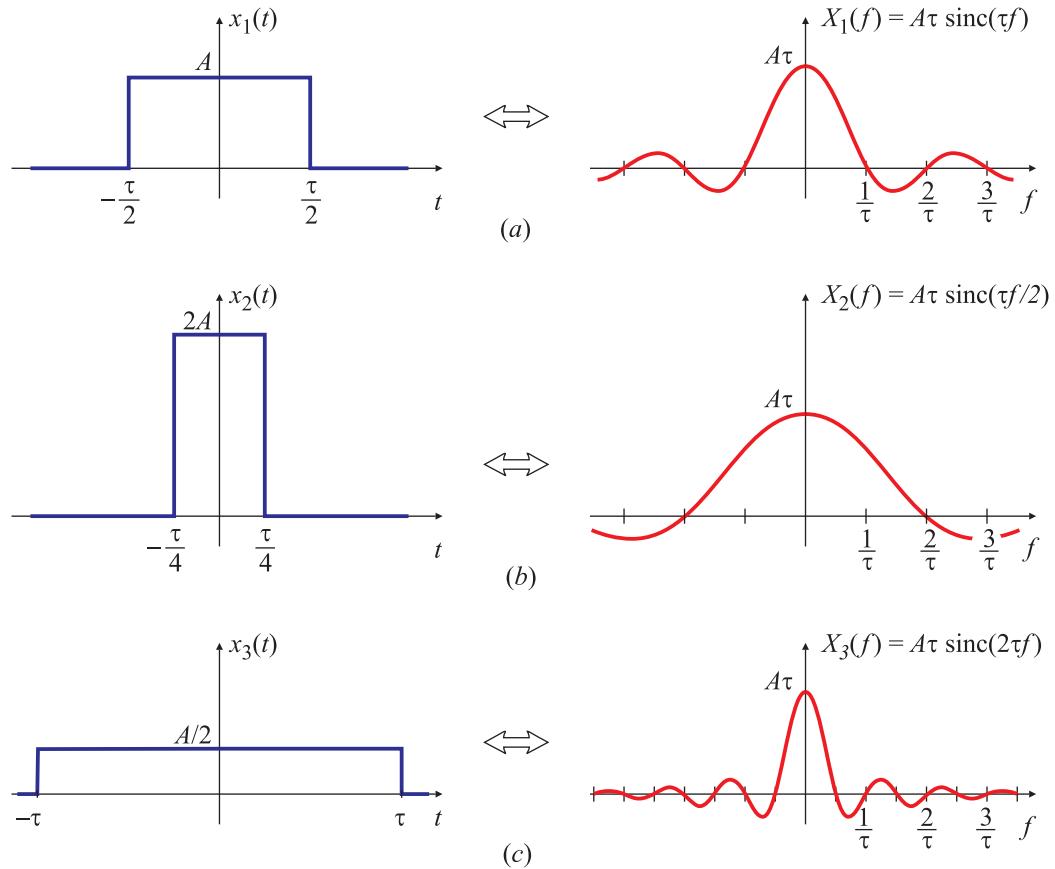


Fig. 2.45. Propiedad de escalado en frecuencia.

Esta relación se puede determinar sustituyendo $\phi = kf$ en la ecuación de síntesis

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(kf)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(kf) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) e^{j2\pi\phi t/k} \frac{d\phi}{k} = \frac{1}{|k|} x\left(\frac{t}{k}\right).$$

Si k es negativo, cambia el signo de los extremos de integración y del diferencial, por lo que el resultado final no cambia.

Si en la transformada aparecen impulsos escalados en frecuencia debe tenerse en cuenta que $\delta(af) = \delta(f)/|a|$.

EJEMPLO 2.30. Propiedad de escalado en frecuencia

De manera dual al escalado en tiempo, la expansión de la escala de frecuencias resulta en una compresión de la escala de tiempos. Este efecto se aprecia en la Fig. 2.45. La Fig. 2.45(a) muestra el pulso rectangular

$$x_1(t) = \begin{cases} A, & \text{si } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y su transformada de Fourier

$$X_1(f) = A\tau \operatorname{sinc}(\tau f).$$

En la Fig. 2.45(b) se muestra la expansión del eje frecuencial, donde la transformada $X_2(f)$ verifica $X_2(f) = X_1(f/2)$, con $k = 1/2$ en (2.75). A medida que el eje de frecuencia se expande, la

amplitud de la función temporal se incrementa de modo de verificar la propiedad de área, ya que el área del pulso rectangular es igual al valor de la transformada en el origen $f = 0$, que no cambia cuando se efectúa un escalado en frecuencia (en este caso igual a $A\tau$). Este efecto se aprecia en la Fig. 2.45(b), donde

$$x_2(t) = (1/|k|)x_1(t/k) = 2x_1(2t).$$

El efecto de comprimir el eje de frecuencia se muestra en la Fig. 2.45(c), donde $X_3(f)$ es

$$X_3(f) = X_1(2f),$$

con $k = 2$ en (2.75). Por lo tanto, la función temporal está dada por

$$x_3(t) = \frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right),$$

que se expande en tiempo, y su “altura” disminuye de manera de satisfacer la propiedad de área, ya que el área bajo $x_3(t)$ es igual al valor en $f = 0$ de $X_3(f)$ y de $X_1(f)$. Estos resultados también pueden obtenerse aplicando la propiedad de dualidad, que se verá más adelante, junto con la propiedad de escalado en tiempo. \square

2.6.5. Reflexión temporal

Una consecuencia directa de la propiedad de escalado temporal es la propiedad de *reflexión* temporal: la transformada de $x(-t)$ es $X(-f)$, como surge de hacer $k = -1$ en (2.73). En símbolos

$$x(-t) \iff X(-f). \quad (2.76)$$

Como usualmente $x(t)$ es real, $X(-f) = X^*(f)$. En este caso $x(t) = x^*(t)$ y entonces

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft}dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \right]^* = X^*(f)$$

lo que permite escribir el par transformado

$$x(-t) \iff X^*(f) \quad \text{si } x(t) \in \mathbb{R}.$$

EJEMPLO 2.31. Reflexión temporal

El pulso exponencial creciente $y(t)$ definido como

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ \beta e^{\alpha t}, & t \leq 0, \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ que se muestra en la Fig. 2.46(a), es la reflexión temporal de la señal

$$x(t) = \begin{cases} \beta e^{\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

estudiada en el Ejemplo 2.5. Se encontró entonces que

$$X(f) = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f}.$$

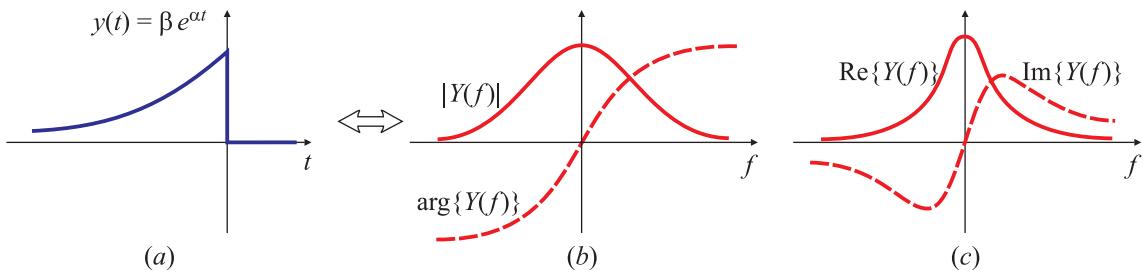


Fig. 2.46. Pulso exponencial creciente $x(t) = \beta e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $t < 0$ (a). Representación módulo-fase (b) y parte real-imaginaria (c) de su transformada de Fourier (comparar con la Fig. 2.12).

Como $y(t)$ es real, resulta que

$$Y(f) = X^*(f) = \frac{\beta}{\alpha - j2\pi f}.$$

Es trivial verificar que

$$\operatorname{Re}\{Y(f)\} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + (j2\pi f)^2}, \quad \operatorname{Im}\{Y(f)\} = \frac{2\pi\beta f}{\alpha^2 + (j2\pi f)^2}$$

y también

$$|Y(f)| = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (j2\pi f)^2}}, \quad \arg\{Y(f)\} = \tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right),$$

que se representan en la Fig. 2.46(b) y (c), respectivamente. Es ilustrativo comparar estos resultados con los del Ejemplo 2.5 (Fig. 2.12). \square

2.6.6. Reflexión frecuencial

Esta propiedad es resultado de aplicar la propiedad de escalado en frecuencia con $k = -1$. Se obtiene entonces el par transformado

$$x(-t) \iff X(-f).$$

que coincide con el par transformado de reflexión temporal para señales complejas dado por (2.76).

EJEMPLO 2.32. Reflexión frecuencial

En la Sección 2.5 [ecuación (2.61)] se encontró que la transformada de Fourier de $\tilde{x}(t) = A \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$ es

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}\}(f) = j\frac{A}{2}\delta(f + f_0) - j\frac{A}{2}\delta(f - f_0).$$

Si $\mathcal{F}\{\tilde{y}\}(f)$ es una reflexión frecuencial de $\mathcal{F}\{\tilde{x}\}(f)$, es decir $\mathcal{F}\{\tilde{y}\}(f) = \mathcal{F}\{\tilde{x}\}(-f)$, se tiene que

$$\mathcal{F}\{\tilde{y}\}(f) = \mathcal{F}\{\tilde{x}\}(-f) = j\frac{A}{2}\delta(-f + f_0) - j\frac{A}{2}\delta(-f - f_0).$$

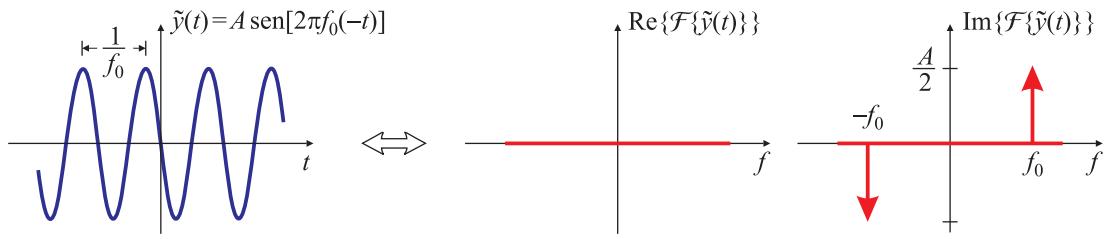


Fig. 2.47. Propiedad de reflexión frecuencial.

Aplicando la propiedad de escalado del impulso $\delta(af) = \delta(f)/|a|$,

$$\mathcal{F}\{\tilde{y}\}(f) = j\frac{A}{2}\delta[-(f-f_0)] - j\frac{A}{2}\delta[-(f+f_0)] = j\frac{A}{2}\delta(f-f_0) - j\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$

cuya antitransformada

$$\tilde{y}(t) = -A \sin(2\pi f_0 t) = A \sin[2\pi f_0(-t)]$$

se muestra en la Fig. 2.47. \square

2.6.7. Desplazamiento temporal

Si $x(t)$ se desplaza temporalmente t_0 unidades de tiempo, su transformada de puede calcular sustituyendo $s = t - t_0$ en la ecuación de análisis:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)e^{-j2\pi f(s+t_0)}ds \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)e^{-j2\pi fs}ds = e^{-j2\pi f t_0} X(f) \end{aligned}$$

resultando en el par transformado

$$x(t-t_0) \iff e^{-j2\pi f t_0} X(f). \quad (2.77)$$

EJEMPLO 2.33. Propiedad de desplazamiento temporal

En el ejemplo 2.18 se calculó que el espectro de la señal $x_1(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ es

$$X_1(f) = (A/2)\delta(f+f_0) + (A/2)\delta(f-f_0),$$

como muestra la Fig. 2.48(a). En la Fig. 2.48(b) se grafica $x_2(t)$ que es $x_1(t)$ desplazada $T_0/8$ unidades de tiempo. De acuerdo a la propiedad de desplazamiento temporal (2.77), el espectro de $x_2(t)$ es

$$X_2(f) = e^{-j2\pi f(T_0/8)} X_1(f).$$

Operando se encuentra que

$$\begin{aligned} X_2(f) &= e^{-j2\pi f(T_0/8)} [(A/2)\delta(f+f_0) + (A/2)\delta(f-f_0)] \\ &= (A/2)e^{-j2\pi(-f_0)(T_0/8)}\delta(f+f_0) + (A/2)e^{-j2\pi(f_0)(T_0/8)}\delta(f-f_0) \\ &= (A/2)e^{j\pi/4}\delta(f+f_0) + (A/2)e^{-j\pi/4}\delta(f-f_0) \end{aligned} \quad (2.78)$$

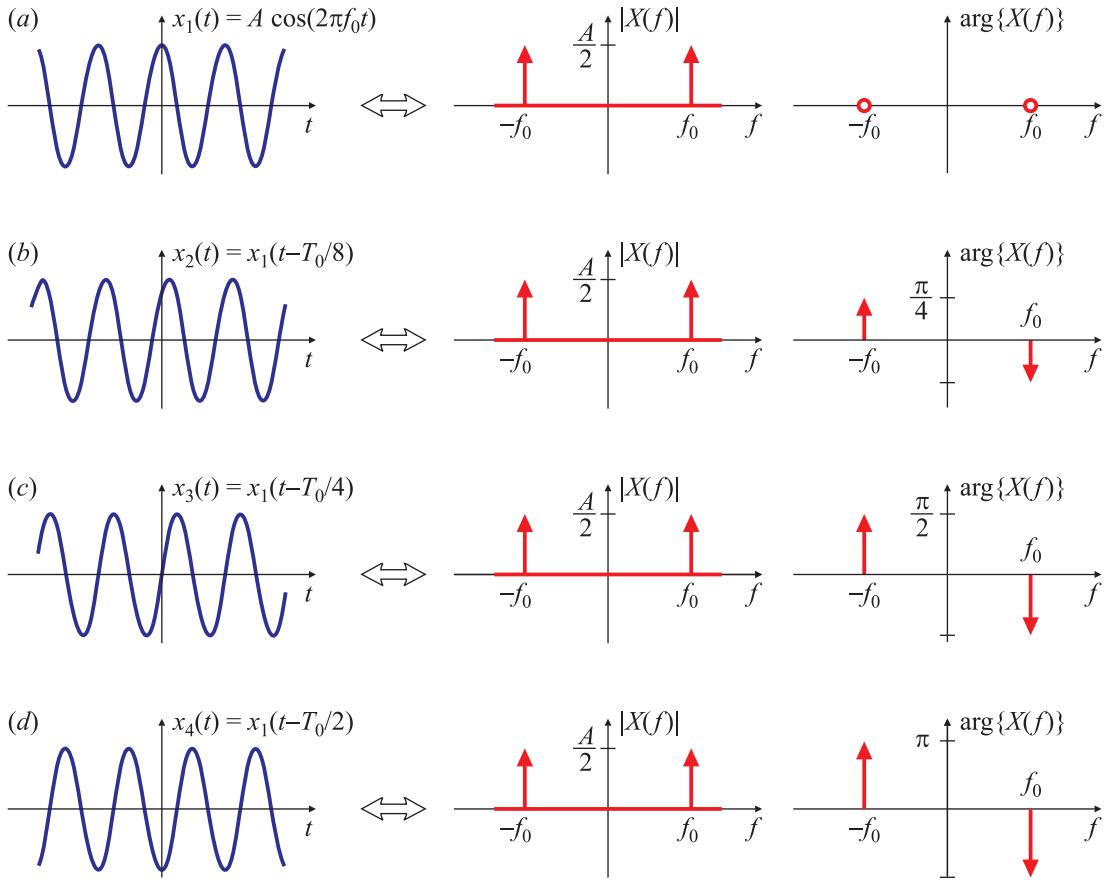


Fig. 2.48. Propiedad de desplazamiento temporal.

como se muestra en el espectro $X_2(f)$ de la Fig. 2.48(b). Unas operaciones algebraicas muestran que

$$x_2(t) = x_1(t - T_0/8) = A \cos[2\pi f_0(t - T_0/8)] = A \cos(2\pi f_0 t - \pi/4).$$

que efectivamente es la antitransformada de (2.78).

Si se desplaza $x_1(t)$ un cuarto de período se obtiene $x_3(t)$, que es un seno:

$$x_3(t) = x_1(t - T_0/4) = A \cos[2\pi f_0(t - T_0/4)] = A \cos(2\pi f_0 t - \pi/2) = A \sin(2\pi f_0 t).$$

La propiedad de desplazamiento temporal indica que $X_3(f) = e^{-j2\pi f(T_0/4)} X_1(f)$, de donde

$$X_3(f) = j \frac{A}{2} \delta(f + f_0) - j \frac{A}{2} \delta(f - f_0),$$

que efectivamente es la transformada de un seno, como se muestra en la Fig. 2.48(c).

Finalmente, si $x_1(t)$ se desplaza medio período se encuentra que

$$\begin{aligned} x_4(t) &= x_1(t - T_0/2) = A \cos[2\pi f_0(t - T_0/2)] \\ &= A \cos(2\pi f_0 t - \pi) = -A \cos(2\pi f_0 t - \pi) = -x_1(t). \end{aligned}$$

La aplicación de la propiedad de desplazamiento temporal resulta en

$$\begin{aligned} X_4(f) &= e^{-j2\pi f(T_0/2)} X_1(f) \\ &= e^{-j\pi f T_0} (A/2) \delta(f + f_0) + e^{-j\pi f T_0} (A/2) \delta(f - f_0) \\ &= -\frac{A}{2} \delta(f + f_0) - \frac{A}{2} \delta(f - f_0), \end{aligned} \tag{2.79}$$

que naturalmente es la transformada de un coseno “cambiado de signo” como ilustra la Fig. 2.48(d), donde los impulsos de área $\pm\pi$ reemplazan a los signos “(−)” de la ecuación (2.79).

En todos los casos, el corrimiento temporal produce un cambio de fase pero no del módulo de la transformada de Fourier. \square

2.6.8. Desplazamiento frecuencial (modulación)

Si $X(f)$ se desplaza en frecuencia una cantidad f_0 , su transformada inversa $x(t)$ queda multiplicada por $e^{j2\pi f_0 t}$. En símbolos:

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \iff X(f - f_0). \quad (2.80)$$

Este par transformado se obtiene sustituyendo $s = f - f_0$ en la ecuación de síntesis (2.24):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{X(f - f_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(s) e^{j2\pi t(s + f_0)} ds \\ &= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) e^{-j2\pi t s} ds = e^{j2\pi f_0 t} x(t). \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.34. Propiedad de modulación

El Ejemplo 2.16 puede pensarse como una aplicación de la propiedad de modulación. En el Ejemplo 2.15 se demostró que la transformada de una constante es un impulso; en símbolos

$$x_1(t) = 1 \iff X_1(f) = \delta(f).$$

Si se desplaza $X_1(f)$ en frecuencia una cierta cantidad f_0 se obtiene el espectro $X_2(f) = X_1(f - f_0) = \delta(f - f_0)$. La propiedad de modulación (2.80) muestra que su antitransformada es

$$x_2(t) = e^{j2\pi f_0 t} x_1(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

que se muestra en la Fig. 2.27, y coincide con el resultado del Ejemplo 2.16. \square

Las emisoras de radio en modulación de amplitud (AM) hacen uso de la propiedad de modulación, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.35. Modulación de amplitud

Sean $x_1(t)$ y $X_1(f)$ una señal real y su espectro, respectivamente, representados en la Fig. 2.49(a). Si $X_1(f)$ se desplaza en frecuencia $\pm f_0$ unidades a izquierda y derecha del origen atenuando su amplitud a la mitad, como se muestra en Fig. 2.49(b), se obtiene un nuevo espectro $X_2(f)$, que se puede expresar como

$$X_2(f) = \frac{1}{2}X_1(f + f_0) + \frac{1}{2}X_1(f - f_0).$$

La propiedad de modulación (2.80) muestra que su antitransformada es

$$x_2(t) = \frac{1}{2}x_1(t)e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}x_1(t)e^{j2\pi f_0 t} = x_1(t)\cos(2\pi f_0 t).$$

El desplazamiento frecuencial (en ambos sentidos) resulta en la multiplicación de la función temporal $x_1(t)$ por una señal denominada *portadora*, que en este caso es un coseno cuya frecuencia queda determinada por el corrimiento f_0 , como se representa en la Fig. 2.49(b). Cuanto mayor sea el desplazamiento frecuencial, mayor será la frecuencia de la portadora, pero la envolvente $x_1(t)$ permanece sin cambios, como ilustra la Fig. 2.49(c). \square

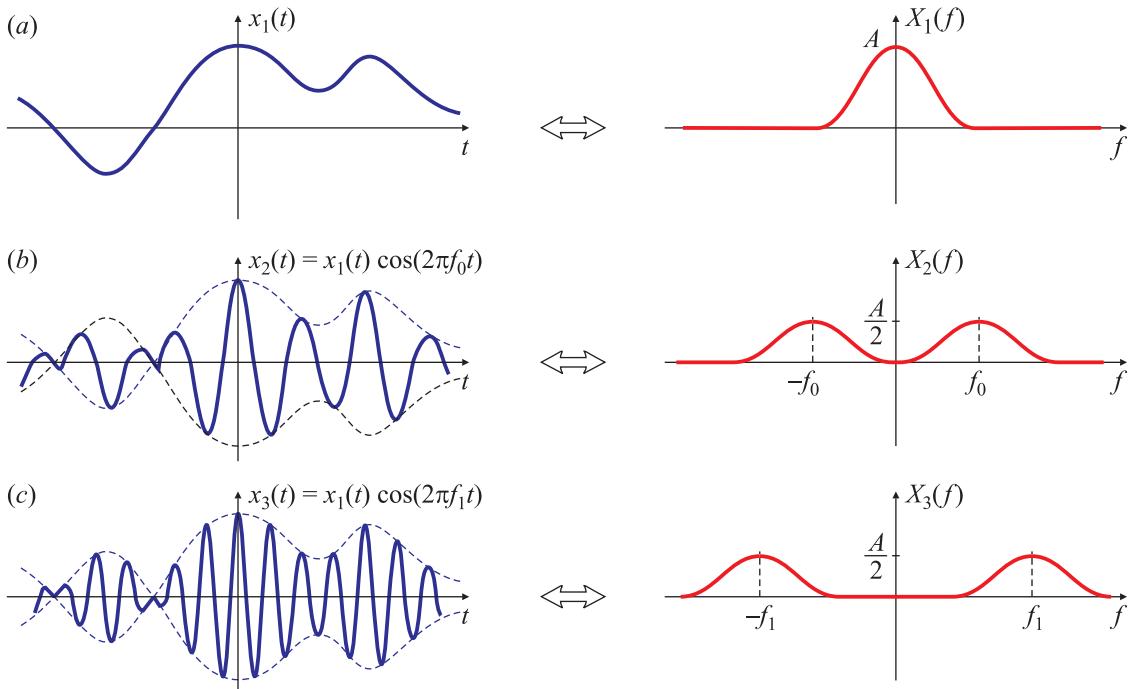


Fig. 2.49. Propiedad de desplazamiento en frecuencia (modulación).

En las emisoras de AM el procedimiento para crear la señal modulada en amplitud es ligeramente distinto, y se detalla en la Sección 2.B.4.6 mostrando resultados de experiencias de laboratorio. En este caso la señal $x_1(t)$ es el mensaje a transmitir, y la frecuencia f_0 de la portadora es característica de cada emisora. El proceso de modulación es fundamental para la transmisión de información sobre distintos medios o canales, y existen muchas técnicas de modulación que optimizan la ocupación del canal. En la Sección 2.7.6 se volverá sobre esta propiedad utilizando otras herramientas.

2.6.9. Formulación alternativa de la ecuación de síntesis

La ecuación de síntesis (2.24) también puede escribirse como

$$x(t) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-j2\pi ft} df \right]^*,$$

donde $X^*(f)$ es el complejo conjugado de $X(f)$. La verificación de la propiedad es trivial:

$$\begin{aligned} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-j2\pi ft} df \right]^* &= \int_{-\infty}^{\infty} [X^*(f) e^{-j2\pi ft}]^* df = \int_{-\infty}^{\infty} [X^*(f)]^* (e^{-j2\pi ft})^* df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = x(t). \end{aligned}$$

Esta expresión muestra que la ecuación de síntesis se puede calcular con la ecuación de análisis (2.25) usando como señal a analizar $X^*(f)$, y conjugando los resultados. La importancia de la formulación alternativa es que ahora tanto la transformada de Fourier como

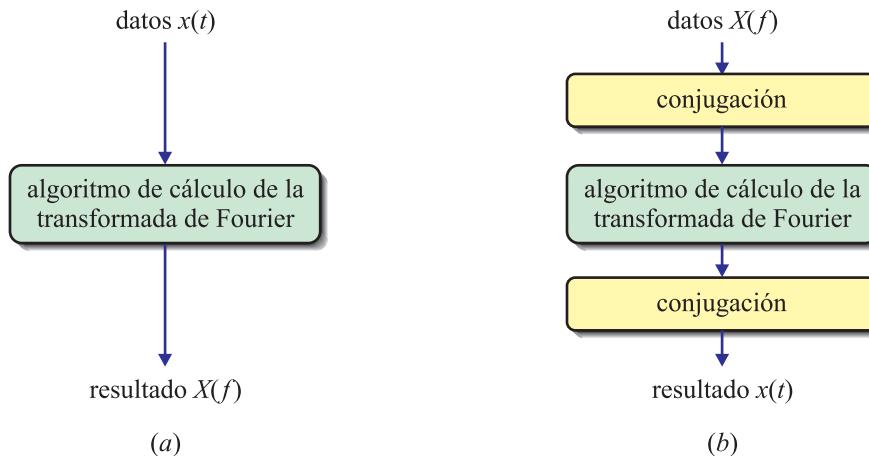


Fig. 2.50. Algoritmo para el cálculo de la transformada de Fourier (a). Cálculo de la antitransformada utilizando el mismo algoritmo que para el cálculo de la transformada (b).

la transformada inversa comparten el mismo término $e^{-j2\pi ft}$ (es decir, tienen el mismo núcleo o kernel).

Esta similaridad es muy útil para el desarrollo de programas que permitan calcular de manera rápida la transformada de Fourier: si se dispone de un algoritmo que calcula la transformada directa de Fourier, el mismo algoritmo puede utilizarse para calcular la transformada inversa, pues basta con ingresar como dato el conjugado de la transformada $X^*(f)$, y conjugar el resultado entregado por el algoritmo para obtener la antitransformada $x(t)$, como se representa en la Fig. 2.50.

2.6.10. Propiedades de simetría para funciones reales

Una función $x_e(t)$ es *par* si es simétrica respecto al eje $t = 0$, es decir que $x_e(t) = x_e(-t)$. Una función *ímpar* $x_o(t)$ es antisimétrica respecto al origen, y verifica que $x_o(t) = -x_o(-t)$. En particular, en $t = 0$ se tiene que $x_o(0) = -x_o(0)$ y por lo tanto $x_o(0) = -x_o(0) = 0$. De aquí en más se utilizará el subíndice “*e*” para las funciones pares, y “*o*” para las funciones impares (por *even* y *odd* en inglés; se reservarán los subíndices “*r*” e “*i*” para real e imaginaria, respectivamente).

Una función arbitraria se puede descomponer de manera única como la suma de una función par y otra impar. Sumando y restando $(1/2)x(-t)$ a $x(t)$ se tiene que

$$x(t) = x(t) + \frac{1}{2}x(-t) - \frac{1}{2}x(-t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] + \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)].$$

Definiendo

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)], \quad (2.81)$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]. \quad (2.82)$$

se puede escribir

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t). \quad (2.83)$$

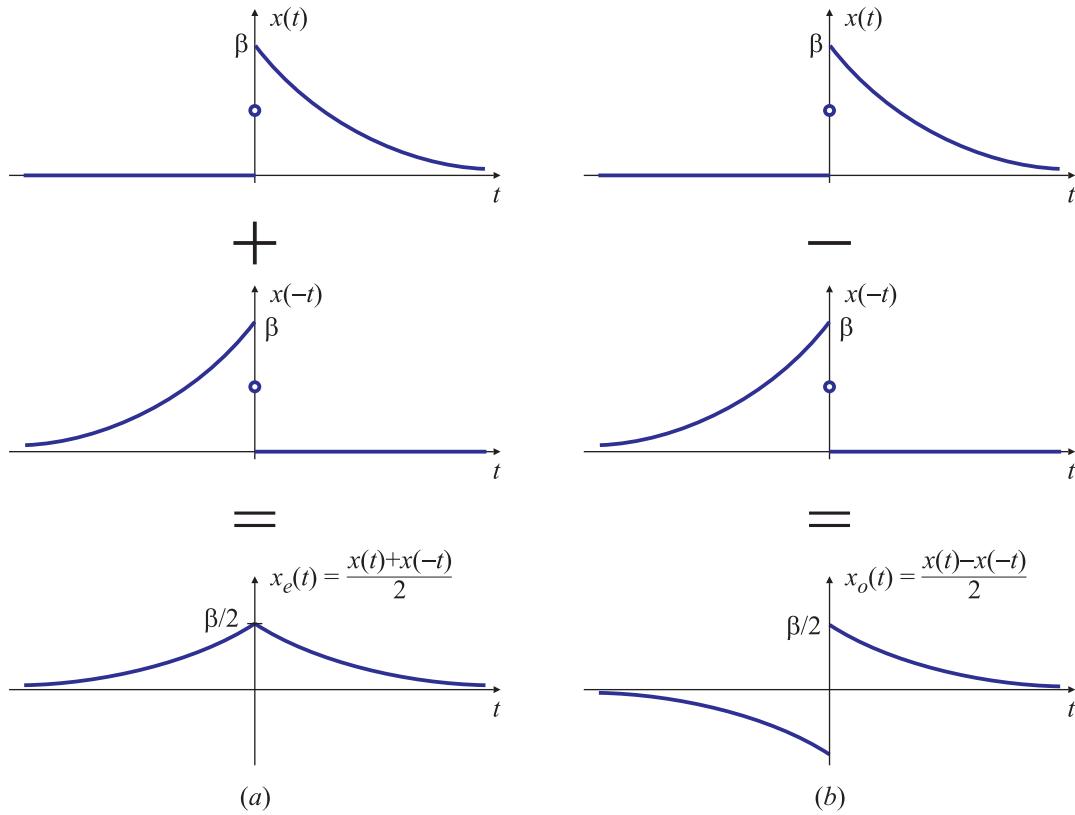


Fig. 2.51. Descomposición de $x(t)$ en una función par $x_e(t)$ (a) y una función impar $x_o(t)$ (b).

Las ecuaciones (2.81) y (2.82) son las definiciones de funciones pares e impares, respectivamente. Es trivial verificar que $x_e(t) = x_e(-t)$, y que $x_o(t) = -x_o(-t)$. El proceso de obtención de estas funciones se estudia en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.36. Descomposición de señales

La función

$$x(t) = \begin{cases} \beta e^{-\alpha t}, & \text{si } t > 0, \\ \beta/2, & \text{si } t = 0, \\ 0, & \text{si } t < 0, \end{cases} \quad (2.84)$$

con $\alpha > 0$, no es una función par ni impar, y por lo tanto se puede descomponer en la suma de dos funciones, una par $x_e(t)$ y otra impar $x_o(t)$. Para calcular $x_e(t)$ se aplica (2.81):

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] \\ &= \frac{\beta}{2} e^{-\alpha t} \Big|_{t>0} + \frac{\beta}{2} e^{-\alpha(-t)} \Big|_{(-t)>0} + \frac{\beta}{2} \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$x_e(t) = \frac{\beta}{2} e^{-\alpha|t|}.$$

Para estas funciones sencillas, usualmente el cálculo gráfico es mucho más simple, como se muestra en la Fig. 2.51(a).

La función impar $x_o(t)$ se calcula aplicando (2.82):

$$\begin{aligned} x_o(t) &= \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)] \\ &= \frac{\beta}{2} e^{-\alpha t} \Big|_{t>0} + \frac{\beta}{4} \Big|_{t=0} - \frac{\beta}{2} e^{-\alpha(-t)} \Big|_{(-t)>0} - \frac{\beta}{4} \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

que puede escribirse de manera más sencilla como

$$x_o(t) = \frac{\beta}{2} e^{-\alpha|t|} \operatorname{sgn}(t),$$

donde $\operatorname{sgn}(t)$ es la función signo definida como

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t = 0, \\ -1, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (2.85)$$

El proceso de cálculo gráfico de $x_o(t)$ se representa en la Fig. 2.51(b). Es trivial verificar que $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$. \square

A continuación se estudian las propiedades de las transformadas de Fourier de las funciones pares e impares.

2.6.10.1. Funciones pares

Si $x_e(t)$ es una función par del tiempo, es decir $x_e(t) = x_e(-t)$, entonces la transformada de Fourier de $x_e(t)$ es una función par y real:

$$x_e(t) \iff R_e(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt. \quad (2.86)$$

(El nombre $R_e(f)$ indica que la función es real y par de f). El par transformado se obtiene de manera trivial:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

La parte imaginaria se anula ya que el valor principal de Cauchy de la integral de una función impar es cero, y entonces

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt = R_e(f).$$

En esta expresión, t es la variable de integración, y desaparece al calcular la integral, por ello el resultado es una función de f . Esta variable aparece sólo como argumento del coseno, y como $\cos(2\pi ft)$ es una función par, $x_e(t) \cos(2\pi ft) = x_e(t) \cos[2\pi(-f)t]$ y entonces, $X_e(f) = X_e(-f)$: la transformada es par. De manera similar, si $X(f)$ es una función real y par de la frecuencia, la fórmula de síntesis permite obtener

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_e(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} R_e(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_e(f) \cos(2\pi ft) df + j \int_{-\infty}^{\infty} R_e(f) \sin(2\pi ft) df \end{aligned}$$

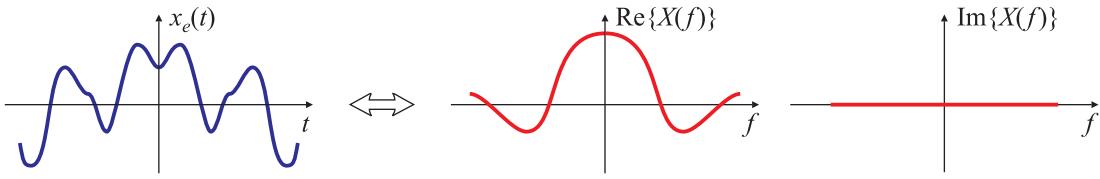


Fig. 2.52. Par transformado de Fourier de una función par.

Nuevamente, el valor principal de Cauchy de la segunda integral es nulo porque el integrando es una función impar. En consecuencia,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_e(f) \cos(2\pi ft) df = x_e(t),$$

que es una función par porque la variable t sólo interviene como argumento del coseno, que es una función par (en este caso f es solamente una variable de integración). Por lo tanto, la antitransformada de una transformada real y par también es una función real y par, como se representa esquemáticamente en la Fig. 2.52.

EJEMPLO 2.37. Transformada de Fourier de funciones pares

El pulso rectangular del Ejemplo 2.11, la función coseno del Ejemplo 2.18, la onda cuadrada del Ejemplo 2.19 y el tren periódico de impulsos del Ejemplo 2.20 son todas funciones reales y pares, y sus transformadas de Fourier también son reales y pares, como se aprecia en las Figs. 2.18, 2.29, 2.31 y 2.32, respectivamente. \square

2.6.10.2. Funciones impares

Si $x_o(t)$ es una función impar del tiempo, es decir $x_o(t) = -x_o(-t)$, entonces su transformada de Fourier es una función impar e imaginaria:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

La integral real se anula porque el integrando (la multiplicación de una función par por una impar) es una función impar, y el valor principal de Cauchy de la integral doblemente infinita de una función impar es nulo. Entonces

$$X(f) = -j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt = j I_o(f).$$

En esta expresión t es la variable de integración, y la verdadera variable es la frecuencia f . La única dependencia con f es a través de la función seno, y como $\sin(2\pi ft)$ es una función impar, $I_o(f)$ también es impar: $I_o(f) = -I_o(-f)$. Es decir, la transformada de Fourier $X(f)$ de una señal real e impar $x(t) = x_o(t)$ es imaginaria e impar.

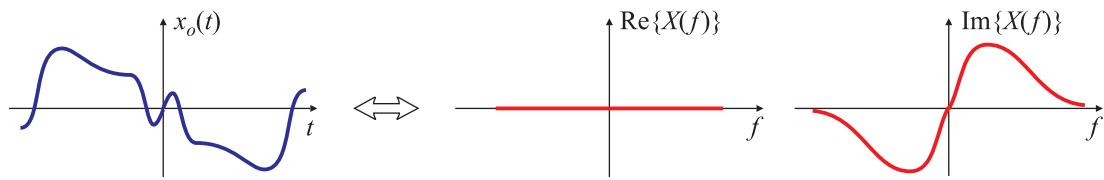


Fig. 2.53. Par transformado de una función impar.

Análogamente, si $X(f)$ es una función impar e imaginaria, $X(f) = jI_o(f)$, la fórmula de síntesis permite obtener

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = j \int_{-\infty}^{\infty} I_o(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= j \int_{-\infty}^{\infty} I_o(f) \cos(2\pi ft) df + j \int_{-\infty}^{\infty} jI_o(f) \sin(2\pi ft) df. \end{aligned}$$

Nuevamente, el valor principal de Cauchy de la primera integral es nulo porque el integrando es impar, y entonces

$$x(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} I_o(f) \sin(2\pi ft) df.$$

En esta expresión f es la variable de integración, y la verdadera variable es el tiempo t , que interviene solamente como argumento del seno, y por lo tanto $x(t) = -x(-t)$. En otras palabras, $x(t)$ es impar, $x(t) = x_o(t)$. Entonces el par transformado de Fourier

$$x_o(t) \iff jI_o(f) = -j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt, \quad (2.87)$$

representado esquemáticamente en la Fig. 2.53, muestra que la transformada de Fourier de una función impar es una función imaginaria e impar.

EJEMPLO 2.38. Transformada de Fourier de funciones impares

En la ecuación (2.61) se establece el par transformado de Fourier

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \iff X(f) = j \frac{A}{2} \delta(f + f_0) - j \frac{A}{2} \delta(f - f_0).$$

La función $x(t)$ es impar, y su transformada de Fourier es imaginaria e impar, como se muestra en la Fig. 2.56. Recíprocamente, si la transformada $X(f)$ es imaginaria e impar en f , la transformada inversa de Fourier es una función temporal $x(t)$ impar en t . \square

2.6.10.3. Descomposición de señales

En la Sección 2.6.10 se mostró que una señal $x(t)$ cualquiera, que no sea par o impar, puede descomponerse de manera única como la suma de una función par $x_e(t)$ y una función impar $x_o(t)$:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t),$$

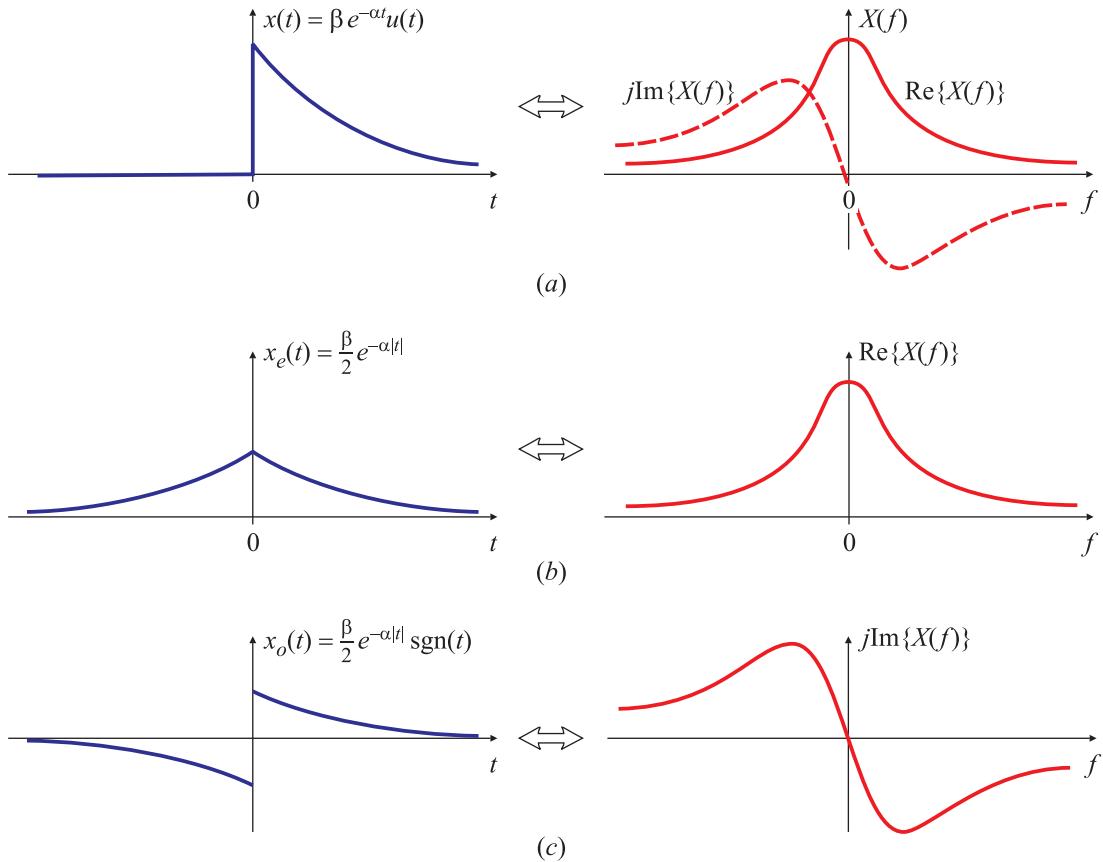


Fig. 2.54. Transformada de Fourier de la función $x(t) = \beta e^{-\alpha t}$ (a) y de sus partes par $x_e(t)$ (b) e impar $x_o(t)$ (c).

donde $x_e(t)$, $x_o(t)$ están dadas por (2.81) y (2.82), respectivamente. Escribiendo $X(f)$ como

$$X(f) = \operatorname{Re}\{X(f)\} + j \operatorname{Im}\{X(f)\},$$

de acuerdo a los resultados de la sección anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{X(f)\} &= \mathcal{F}\{x_e(t)\} = R_e(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi f t) dt, \\ j \operatorname{Im}\{X(f)\} &= \mathcal{F}\{x_o(t)\} = j I_o(f) = -j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi f t) dt. \end{aligned}$$

La idea no es calcular estas integrales, sino aprovechar las propiedades para simplificar el cálculo de otras transformadas, como se muestra en el ejemplo siguiente, y también para verificar si los resultados obtenidos al calcular otras transformadas aplicando propiedades no son erróneos, como se mostrará en el Ejemplo 2.43.

EJEMPLO 2.39. Transformada de la parte par e ímpar de señales

En el Ejemplo 2.5 se encontró que la transformada de Fourier de

$$x(t) = \beta e^{-\alpha t} u(t) \quad \text{es} \quad X(f) = \frac{\beta}{\alpha + j 2\pi f}.$$

representada en la Fig. 2.54(a). En el Ejemplo 2.36 se calculó la descomposición en parte par e impar de $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ donde

$$x_e(t) = \frac{\beta}{2}e^{-\alpha|t|}, \quad x_o(t) = \frac{\beta}{2}e^{-\alpha|t|} \operatorname{sgn}(t)$$

representadas en la Fig. 2.51. La propiedad de descomposición de ondas permite calcular sin gran esfuerzo el espectro $\mathcal{F}\{x_e(t)\}$ de $x_e(t)$ y $\mathcal{F}\{x_o(t)\}$ de $x_o(t)$. Como $x_e(t)$ es par su espectro es real y par, y como $x_o(t)$ es impar su espectro es imaginario e impar, de acuerdo a las Propiedades 2.86 y 2.87, respectivamente. Por otra parte, $X(f)$ se puede descomponer de manera única como $X(f) = \operatorname{Re}\{X(f)\} + j \operatorname{Im}\{X(f)\}$. En consecuencia, la parte real de $X(f)$ tiene que ser la transformada de $x_e(t)$, y la parte imaginaria de $X(f)$ la de $x_o(t)$:

$$\mathcal{F}\{x_e(t)\} = \operatorname{Re}\{X(f)\} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}, \quad \mathcal{F}\{x_o(t)\} = j \operatorname{Im}\{X(f)\} = \frac{-j2\pi\beta f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}.$$

representadas en la Fig. 2.54(b) y (c), respectivamente. \square

EJEMPLO 2.40. Transformada de un pulso exponencial creciente

La descomposición de ondas puede utilizarse para calcular el espectro del pulso exponencial creciente

$$y(t) = \begin{cases} \beta e^{\alpha t}, & t \leq 0, \alpha > 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

que ya se estudió en el Ejemplo 2.31 (reflexión temporal). Teniendo en cuenta las funciones $x_e(t)$ y $x_o(t)$ del Ejemplo previo, es evidente que $y(t)$ se puede escribir como $y(t) = 2x_e(t) - x(t)$, y en consecuencia, $Y(f) = 2\operatorname{Re}\{X(f)\} - X(f)$. Como

$$X(f) = \frac{\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - j \frac{2\pi\beta f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2},$$

resulta

$$\begin{aligned} Y(f) &= 2\operatorname{Re}\{X(f)\} - X(f) \\ &= \frac{\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} + j \frac{2\pi\beta f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \\ &= X^*(f) \end{aligned}$$

de modo que el espectro del pulso exponencial creciente es el conjugado del espectro del Ejemplo 2.5, como también se encontró en el Ejemplo 2.31: La transformada tiene el mismo módulo, pero cambia el signo de la fase, como se observa al comparar la Fig. 2.46 y la Fig. 2.12. \square

2.6.11. Propiedades de simetría para funciones complejas

Hasta el momento sólo se han considerado funciones temporales que toman valores reales. La transformada de Fourier, la transformada inversa y sus propiedades son aplicables también para el caso en que $x(t)$ sea una función temporal que tome valores complejos. Si

$$x(t) = x_r(t) + jx_i(t),$$

Tabla 2.3. Propiedades de la Transformada de Fourier para funciones complejas.

Dominio tiempo $x(t)$	Dominio frecuencia $X(f)$
real y par	real y par
real e impar	imaginaria e impar
imaginaria y par	imaginaria y par
imaginaria e impar	real e impar
real	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Parte real: par} \\ \text{Parte imaginaria: impar} \end{array} \right.$
imaginaria	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Parte real: impar} \\ \text{Parte imaginaria: par} \end{array} \right.$
Parte real: par Parte imaginaria: impar	$\left. \begin{array}{l} \text{real} \end{array} \right\}$
Parte real: impar Parte imaginaria: par	$\left. \begin{array}{l} \text{imaginaria} \end{array} \right\}$

donde $x_r(t)$ es la parte real de $x(t)$ y $x_i(t)$ es la parte imaginaria de $x(t)$, la transformada de Fourier resulta

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t) + jx_i(t)] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t) \cos(2\pi ft) + x_i(t) \sin(2\pi ft)] dt \\ &\quad -j \int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t) \sin(2\pi ft) - x_i(t) \cos(2\pi ft)] dt \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{X(f)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t) \cos(2\pi ft) + x_i(t) \sin(2\pi ft)] dt, \\ \operatorname{Im}\{X(f)\} &= - \int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t) \sin(2\pi ft) - x_i(t) \cos(2\pi ft)] dt. \end{aligned}$$

La fórmula de síntesis para funciones complejas permite obtener

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re}\{X(f)\} \cos(2\pi ft) - \operatorname{Im}\{X(f)\} \sin(2\pi ft)] df, \\ x_i(t) &= - \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re}\{X(f)\} \sin(2\pi ft) + \operatorname{Im}\{X(f)\} \cos(2\pi ft)] df. \end{aligned}$$

Si $x(t)$ es real, entonces $x(t) = x_r(t)$ y $x_i(t) \equiv 0$, y las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier son

$$\operatorname{Re}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_r(t) \cos(2\pi ft) dt, \quad (2.88)$$

$$\operatorname{Im}\{X(f)\} = - \int_{-\infty}^{\infty} x_r(t) \sin(2\pi ft) dt. \quad (2.89)$$

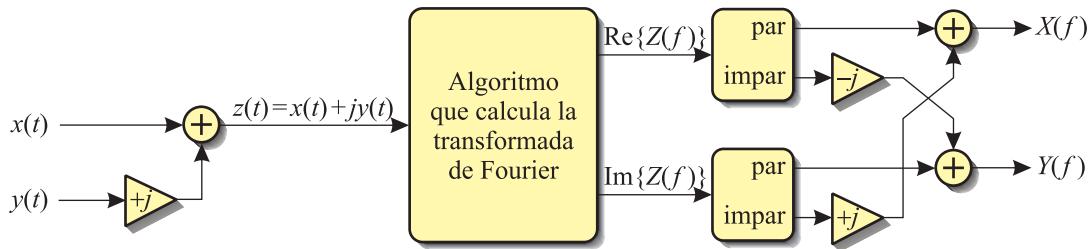


Fig. 2.55. Esquema para el cálculo simultáneo de la transformada de dos señales reales.

La parte real de $X(f)$ es una función par ($\text{Re}\{X(f)\} = \text{Re}\{X(-f)\}$), porque f aparece como argumento del coseno. La parte imaginaria de $X(f)$ es impar ($\text{Im}\{X(f)\} = -\text{Im}\{X(-f)\}$), porque la variable f aparece como argumento de un seno.

Si $x(t)$ es imaginaria pura, $x(t) = jx_i(t)$ y $x_r(t) \equiv 0$, y entonces

$$\text{Re}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \sin(2\pi ft) dt, \quad (2.90)$$

$$\text{Im}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \cos(2\pi ft) dt. \quad (2.91)$$

Ahora, $\text{Re}\{X(f)\}$ es una función impar de la frecuencia, e $\text{Im}\{X(f)\}$ es una función par, porque la variable f es el argumento de un seno o un coseno, respectivamente.

En la Tabla 2.3 se listan diferentes propiedades de simetría de funciones temporales complejas y las características de sus correspondientes transformadas de Fourier.

EJEMPLO 2.41. Determinación simultánea de la transformada de dos funciones reales

Se pueden utilizar las relaciones (2.88)-(2.91) para determinar simultáneamente la transformada de Fourier de dos señales reales. Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos funciones reales. Si $z(t) = x(t) + jy(t)$, entonces

$$\begin{aligned} Z(f) &= X(f) + jY(f) \\ &= \text{Re}\{X(f)\} + j\text{Im}\{X(f)\} + j[\text{Re}\{Y(f)\} + j\text{Im}\{Y(f)\}] \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$\text{Re}\{Z(f)\} = \text{Re}\{X(f)\} - \text{Im}\{Y(f)\}, \quad (2.92)$$

$$\text{Im}\{Z(f)\} = \text{Im}\{X(f)\} + \text{Re}\{Y(f)\}. \quad (2.93)$$

Como $x(t)$ e $y(t)$ son reales, de (2.88)-(2.89) se tiene que sus partes reales son pares y sus partes imaginarias impares. Por lo tanto, en (2.92) y en (2.93)

$$\text{Parte par de } \text{Re}\{Z(f)\} = \text{Re}\{X(f)\}, \quad \text{Parte impar de } \text{Re}\{Z(f)\} = -\text{Im}\{Y(f)\},$$

$$\text{Parte impar de } \text{Im}\{Z(f)\} = \text{Im}\{X(f)\}, \quad \text{Parte par de } \text{Im}\{Z(f)\} = \text{Re}\{Y(f)\}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2} [\text{Re}\{Z(f)\} + \text{Re}\{Z(-f)\}] + j\frac{1}{2} [\text{Im}\{Z(f)\} - \text{Im}\{Z(-f)\}], \\ Y(f) &= \frac{1}{2} [\text{Im}\{Z(f)\} + \text{Im}\{Z(-f)\}] - j\frac{1}{2} [\text{Re}\{Z(f)\} - \text{Re}\{Z(-f)\}]. \end{aligned}$$

Entonces es posible separar el espectro $Z(f)$ de la función compuesta $z(t)$ en las transformadas de Fourier de cada una de las señales reales, $x(t)$ y $y(t)$, tal como se observa en la Fig. 2.55. Esta idea sirve para incrementar la velocidad de cálculo de la transformada de Fourier. \square

2.6.12. Diferenciación en tiempo

Si $x(t)$ es una señal con transformada de Fourier $X(f)$, diferenciando ambos lados de la ecuación de síntesis respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d}{dt}x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt}X(f) e^{j2\pi ft} \right] df = \int_{-\infty}^{\infty} [j2\pi f X(f)] e^{j2\pi ft} df,$$

que establece el par transformado

$$\frac{d}{dt}x(t) \iff j2\pi f X(f). \quad (2.94)$$

Esta propiedad es útil porque reemplaza la operación de diferenciación en el dominio tiempo por una multiplicación por $j2\pi f$ en el dominio frecuencia, simplificando el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo descriptos por ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 2.42. Transformada (incorrecta!) de un escalón unitario

Entre las propiedades del impulso (Propiedad 6, Sección 2.4.2) se enunció la relación entre el escalón unitario $u(t)$ y el delta de Dirac $\delta(t)$

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t). \quad (2.95)$$

La propiedad de derivación establece que

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{d}{dt}u(t) \right\} = j2\pi f \mathcal{F}\{u(t)\}.$$

y recordando que $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$, y transformando término a término (2.95) se encuentra que

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} = -j\frac{1}{2\pi f}.$$

Pero este resultado está **mal**: La transformada de Fourier es imaginaria e impar, y según las propiedades de simetría (Tabla 2.3) la función temporal debería ser real e *impar*. ¡Pero $u(t)$ no es una función impar!

□

El ejemplo anterior muestra una de las aplicaciones de las propiedades de simetría: sirven para revisar fácilmente si no se ha cometido un error en el cálculo, aunque no permiten asegurar que el resultado obtenido sea correcto. En este caso muestran que el cálculo del Ejemplo 2.42 es incorrecto, ya que la derivación de una función no tiene en cuenta los valores constantes que puedan sumarse. Por ejemplo, si K es una constante,

$$\frac{d}{dt}[u(t) + K] = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t).$$

La propiedad de descomposición de ondas permite resolver este inconveniente.

EJEMPLO 2.43. Transformada (correcta) de un escalón unitario

En la Fig. 2.56(a) se muestra la descomposición del escalón unitario $u(t)$ en sus componentes par $u_e(t)$ e impar $u_o(t)$, de acuerdo con (2.81)-(2.82):

$$u(t) = u_e(t) + u_o(t).$$

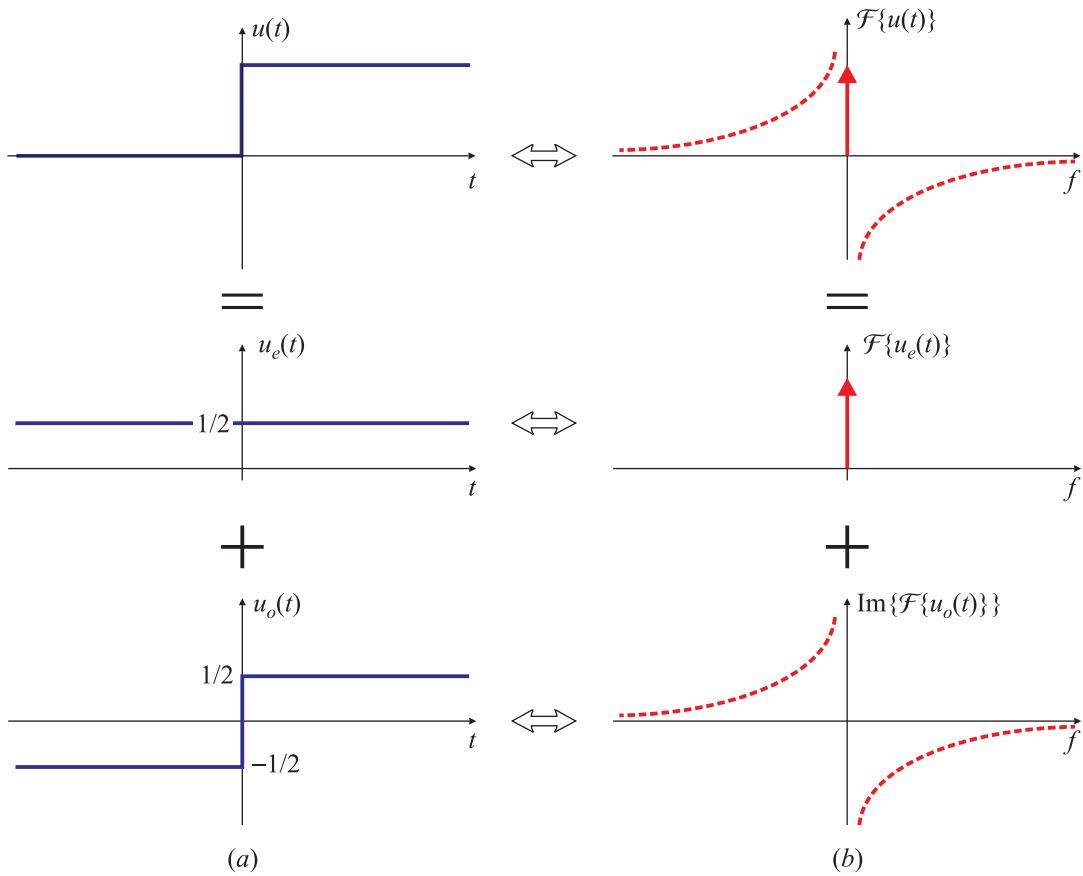


Fig. 2.56. Transformada de Fourier del escalón unitario aplicando descomposición de ondas y la propiedad de derivación temporal.

Se tiene entonces que

$$u_e(t) = \frac{1}{2} [u(t) + u(-t)] = \frac{1}{2}, \quad u_o(t) = \frac{1}{2} [u(t) - u(-t)] = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

donde $\operatorname{sgn}(t)$ es la función signo definida en (2.85). Por la propiedad de linealidad, la transformada de $u(t)$ es la suma de las transformadas de $u_e(t)$ y $u_o(t)$. La transformada de $u_e(t)$ es conocida, porque es la transformada de una constante:

$$\mathcal{F}\{u_e(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f). \quad (2.96)$$

Para calcular la transformada de la parte impar $u_o(t)$ se aplica la propiedad de derivación. Como

$$\frac{d}{dt}u_o(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t) \quad (2.97)$$

de la propiedad de diferenciación se tiene que

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}u_o(t)\right\} = j2\pi f \mathcal{F}\{u_o(t)\},$$

y transformando término a término (2.97) resulta que

$$\mathcal{F}\{u_o(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} = -j\frac{1}{2\pi f}. \quad (2.98)$$

Las propiedades de simetría se verifican con (2.96) y (2.98): la transformada de una función real y simétrica es real y par (2.96) y la transformada de una función real e impar es imaginaria e impar (2.98). Esta transformada coincide con la de la función signo calculada en el Ejemplo 2.9 utilizando la definición y el cálculo por residuos. Finalmente, combinando las transformadas de la parte par y de la parte impar (2.98) de $u(t)$ se determina el par transformado

$$u(t) \iff \frac{1}{2}\delta(f) - j\frac{1}{2\pi f}. \quad (2.99)$$

Las transformadas de $u(t)$, $u_e(t)$ y $u_o(t)$ se representan en la Fig. 2.56(b). \square

EJEMPLO 2.44. Transformada del impulso a partir de la transformada de Fourier del escalón

En el ejemplo anterior se ha encontrado el par transformado

$$u(t) \iff \frac{1}{2}\delta(f) - j\frac{1}{2\pi f}.$$

Como $\delta(t) = du(t)/dt$, la propiedad de derivación indica que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta(t)\} &= j2\pi f \mathcal{F}\{u(t)\} \\ &= j2\pi f \left[\frac{1}{2}\delta(f) - j\frac{1}{2\pi f} \right] = j\pi f \delta(f) + 1 = 1 \end{aligned}$$

ya que $\pi f \delta(f) = 0$ por la propiedad de colador. \square

2.6.12.1. Transformadas de funciones polinomiales a tramos

Una aplicación especial de la propiedad de derivación es la obtención de transformadas de funciones polinomiales a tramos. Las derivadas de estas funciones contienen impulsos en el punto donde se unen los distintos tramos. Como la transformada del impulso es conocida, puede ser más sencillo calcular la transformada de la función derivada que la de la función original, tal como muestran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2.45. Transformada de un pulso triangular

En la Fig. 2.57(a) se representa el pulso triangular definido como

$$p(t) = \begin{cases} \frac{A}{\tau}(\tau - |t|), & \text{si } |t| < \tau, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El cálculo la transformada de $p(t)$ por definición no es complicado, pero sí laborioso:

$$\begin{aligned} P(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\tau}^0 \frac{A}{\tau}(\tau + t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{\tau} \frac{A}{\tau}(\tau - t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{A}{\tau} \int_{-\tau}^0 \tau e^{-j2\pi ft} dt + \frac{A}{\tau} \int_{-\tau}^0 t e^{-j2\pi ft} dt + \frac{A}{\tau} \int_0^{\tau} \tau e^{-j2\pi ft} dt - \frac{A}{\tau} \int_0^{\tau} t e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{A}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\tau}^0 + \frac{A}{\tau(2\pi f)^2} (1 + j2\pi f t) e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\tau}^0 + \\ &\quad \frac{A}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_0^{\tau} - \frac{A}{\tau(2\pi f)^2} (1 + j2\pi f t) e^{-j2\pi ft} \Big|_0^{\tau}. \end{aligned}$$

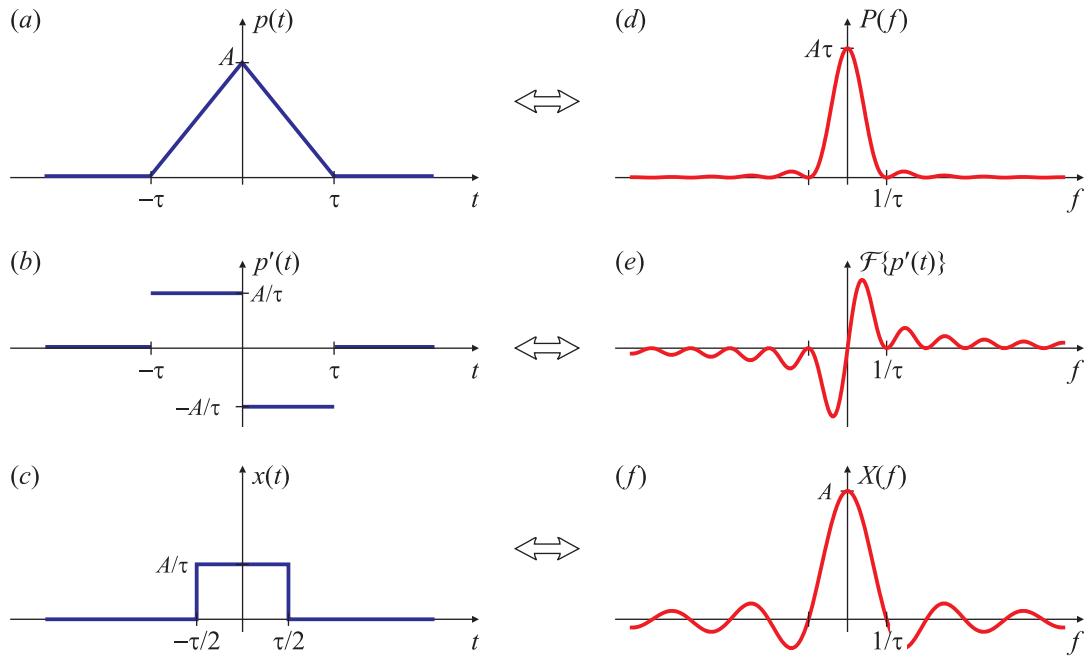


Fig. 2.57. Funciones utilizadas en el cálculo del pulso triangular (a) y sus transformadas de Fourier (b).

Esta expresión se puede simplificar como

$$\begin{aligned}
 P(f) &= \frac{A}{-j2\pi f} (1 - e^{j2\pi\tau f} + e^{-j2\pi\tau f} - 1) + \frac{A}{\tau(2\pi f)^2} [1 - (1 - j2\pi\tau f)e^{j2\pi\tau f} - (1 + j2\pi\tau f)e^{-j2\pi\tau f} + 1] \\
 &= \frac{A}{-j2\pi f} [-2j \operatorname{sen}(2\pi\tau f)] + \frac{A}{\tau(2\pi f)^2} [2 - e^{j2\pi\tau f} - e^{-j2\pi\tau f} + j2\pi\tau f e^{j2\pi\tau f} - j2\pi\tau f e^{-j2\pi\tau f}] \\
 &= \frac{A}{\pi f} \operatorname{sen}(2\pi\tau f) + \frac{A}{\tau(2\pi f)^2} [2 - 2 \cos(2\pi\tau f) + j\pi\tau f 4j \operatorname{sen}(2\pi\tau f)] \\
 &= \frac{A}{2\tau(\pi f)^2} [1 - \cos(2\pi\tau f)].
 \end{aligned}$$

Como $1 - \cos \theta = 1 - [\cos^2(\theta/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2)] = 2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$, se tiene que

$$P(f) = A \frac{\tau}{2} \frac{2[\operatorname{sen}(\pi\tau f)]^2}{(\pi\tau f)^2} = A\tau [\operatorname{sinc}(\pi\tau f)]^2,$$

representada en la Fig. 2.57(d).

El cálculo resulta mucho más sencillo si se aplica la propiedad de derivación. La derivada temporal de $p(t)$, indicada como $p'(t)$ es el par de pulsos rectangulares que se muestra en la Fig. 2.57(b), es decir

$$p'(t) = x(t + \tau/2) - x(t - \tau/2), \quad (2.100)$$

donde $x(t)$ es el pulso rectangular

$$x(t) = \begin{cases} A/\tau, & |t| < \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2, \end{cases}$$

ilustrado en la Fig. 2.57(c). Aplicando la propiedad de desplazamiento temporal a (2.100), la trans-

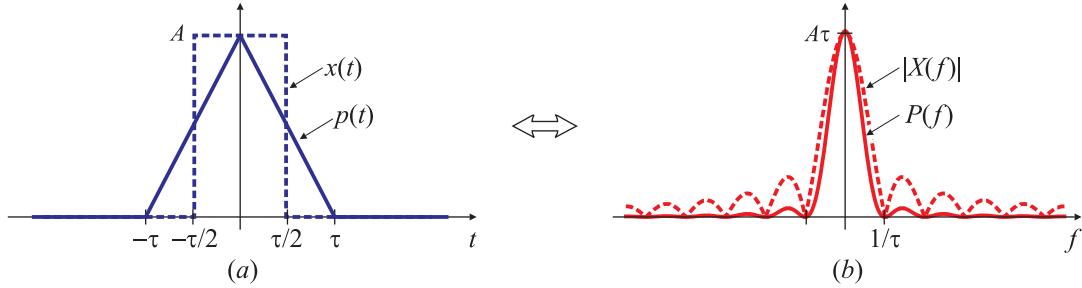


Fig. 2.58. Pulso triangular y rectangular de la misma amplitud y mismo área (a) y sus transformadas de Fourier (b).

formada $\mathcal{F}\{p'(t)\}$ de $p'(t)$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{p'(t)\} &= e^{j2\pi f\tau/2}X(f) - e^{-j2\pi f\tau/2}X(f) \\ &= X(f)(e^{j\pi f\tau} - e^{-j\pi f\tau}) \\ &= 2j \operatorname{sen}(\pi\tau f)X(f).\end{aligned}$$

Por la propiedad de derivación $\mathcal{F}\{p'(t)\} = j2\pi f P(f)$ se tiene que

$$P(f) = \frac{1}{\pi f} \operatorname{sen}(\pi\tau f)X(f) = \tau \frac{\operatorname{sen}(\pi\tau f)}{\pi\tau f} X(f) = \tau \operatorname{sinc}(\tau f) X(f).$$

La transformada $X(f)$ del pulso $x(t)$ ha sido calculada en el Ejemplo 2.11, y está dada por

$$X(f) = \left(\frac{2A}{\tau}\right) \left(\frac{\tau}{2}\right) \operatorname{sinc}(\tau f) = A \operatorname{sinc}(\tau f).$$

como se muestra en la Fig. 2.57(f) y entonces

$$P(f) = A\tau [\operatorname{sinc}(\tau f)]^2,$$

representada en la Fig. 2.57(d). Este resultado se puede revisar aplicando propiedades: el pulso triangular es real y par, y por lo tanto su transformada tiene que ser real y par, como efectivamente ocurre con $P(f)$. Además, por la propiedad de área, el área del pulso triangular que es $A \times (2\tau)/2$ debe ser igual al valor de $P(f)$ en $f = 0$, que también se verifica. Este ejemplo muestra que el cálculo de la transformada aplicando propiedades se alcanza en mucho menos pasos que aplicando la definición, lo que disminuye la posibilidad de error. \square

Es interesante comparar la forma de las transformadas de un pulso rectangular y un pulso triangular que tengan la misma amplitud y el mismo área, como se muestra en la Fig. 2.58(a). El pulso rectangular $x(t)$ y su transformada de Fourier $X(f)$ están dados por

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| < \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2, \end{cases} \iff X(f) = A\tau \operatorname{sinc}(\tau f),$$

y el pulso triangular $p(t)$ y su transformada de Fourier $P(f)$ por

$$p(t) = \begin{cases} \frac{A}{\tau}(\tau - |t|), & |t| < \tau, \\ 0, & |t| > \tau, \end{cases} \iff P(f) = A\tau[\operatorname{sinc}(\tau f)]^2.$$

Las transformadas de Fourier $X(f)$, $P(f)$ se comparan en la Fig. 2.58(b). La amplitud de los lóbulos laterales de la transformada $P(f)$ del pulso triangular decrecen mucho más rápidamente que la amplitud de los lóbulos laterales de la transformada $X(f)$ del pulso rectangular, lo que significa que el contenido frecuencial está más concentrado en el pulso triangular que en el pulso rectangular. Esta característica puede ser de interés para transmitir información por canales adyacentes utilizando, por ejemplo, la propiedad de modulación en amplitud con distintas portadoras: las portadoras de los pulsos triangulares podrán estar más cercanas entre sí para un determinado nivel de interferencia, lo que permite poner mayor número de portadoras (o canales) en un determinado ancho de banda. Sin embargo, como los pulsos triangulares tienen el doble de ancho que los pulsos rectangulares, la cantidad de pulsos por segundo que se pueden transmitir utilizando pulsos triangulares es la mitad de la cantidad que puede transmitirse si se utilizan pulsos rectangulares. Esta dualidad de los dominios temporal y frecuencial hace que no sea sencillo elegir cuál de los dos tipos de pulsos es “mejor” para transmitir información.

Aunque los pulsos triangular y cuadrado de la Fig. 2.58 tienen la misma amplitud y el mismo área, no tienen la misma energía: la energía del pulso triangular es $2/3$ de la energía del pulso rectangular. De todas maneras, aunque el pulso triangular se escalase por $3/2$ para igualar la energía del pulso rectangular, aún así los lóbulos laterales de su transformada de Fourier tienen menor amplitud que los de la transformada del pulso rectangular.

EJEMPLO 2.46. Transformadas de un pulso parabólico

Sea $y(t)$ un pulso parabólico, definido como

$$y(t) = A [1 - (t/\tau)^2] x(t),$$

donde $x(t)$ es el pulso rectangular definido por

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau, \\ 0, & |t| > \tau, \end{cases}$$

como se muestra en la Fig. 2.59(a). Si $Y(f)$ es la transformada de Fourier de $y(t)$, la propiedad de derivación asegura que

$$j2\pi f Y(f) \iff y'(t) = -\frac{2A}{\tau^2} t x(t) + A \left[1 - \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right] x'(t), \quad (2.101)$$

donde $y'(t)$ representa $dy(t)/dt$, y $x'(t) = dx(t)/dt = \delta(\tau + 1) - \delta(\tau - 1)$. Por la propiedad de colador del impulso (Propiedad 3), el segundo término de (2.101) se anula. Aplicando nuevamente la propiedad de derivación temporal se tiene

$$\begin{aligned} (j2\pi f)^2 Y(f) \iff y''(t) &= -\frac{2A}{\tau^2} x(t) - \frac{2A}{\tau^2} t x'(t), \\ &= -\frac{2A}{\tau^2} x(t) - \frac{2A}{\tau^2} t [\delta(t + \tau) - \delta(t - \tau)]. \end{aligned}$$

Nuevamente, por la propiedad de colador del impulso, $t [\delta(t + \tau) - \delta(t - \tau)] = t|_{t=-\tau} \delta(t + \tau) - t|_{t=\tau} \delta(t - \tau) = -\tau \delta(t + \tau) - \tau \delta(t - \tau)$, de modo que

$$(j2\pi f)^2 Y(f) \iff y''(t) = -\frac{2A}{\tau^2} x(t) + \frac{2A}{\tau} \delta(t + \tau) + \frac{2A}{\tau} \delta(t - \tau).$$

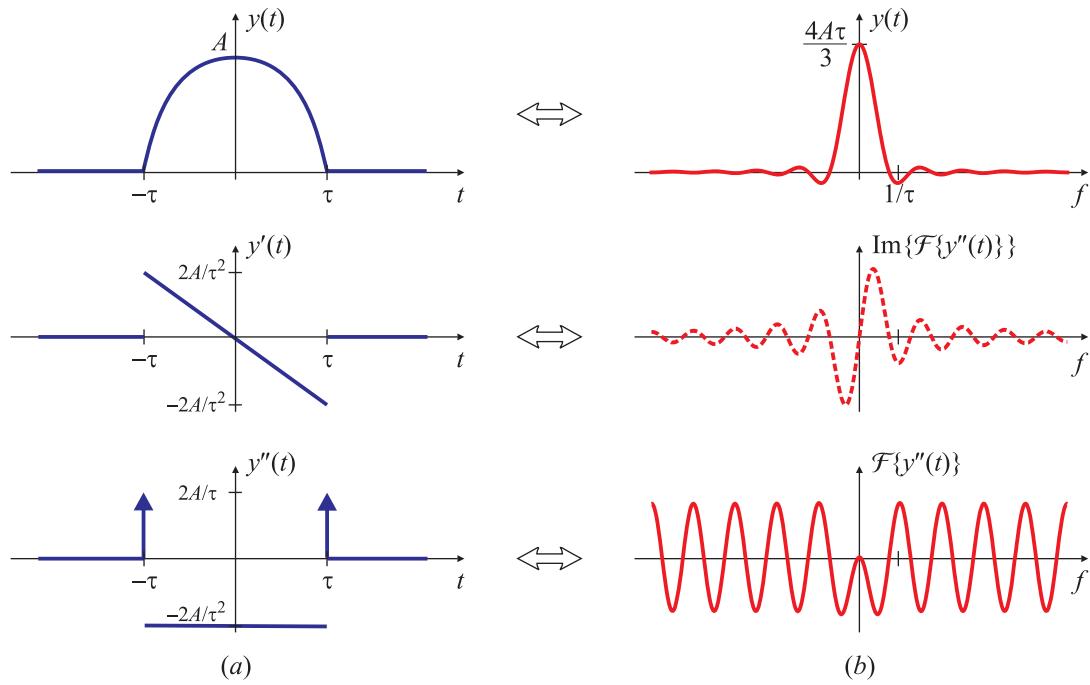


Fig. 2.59. El pulso parabólico, sus derivadas temporales (a) y sus transformadas de Fourier (b).

Como $X(f) = 2\tau \text{sinc}(2\pi f)$, y

$$\mathcal{F}\{[\delta(t + \tau) + \delta(t - \tau)]\} = 2 \cos(2\pi\tau f),$$

se tiene que

$$Y(f) = \frac{A}{\tau} \frac{\cos(2\pi\tau f) - \text{sinc}(2\pi\tau f)}{(j2\pi f)^2} + k_1 \delta(f) + k_2 \delta'(f),$$

donde k_1 y k_2 son constantes de integración que aparecen pues se puede agregar una constante k_1 al pulso parabólico sin alterar su primera derivada, y k_2 tiene en cuenta este efecto para la derivada segunda. La integración del pulso $y(t)$ revela que no hay constantes aditivas o rampas lineales, de modo que $k_1 = k_2 = 0$ en este caso y por lo tanto,

$$Y(f) = \frac{A}{\tau\pi^2 f^2} [\text{sinc}(2\pi f) - \cos(2\pi\tau f)]. \quad (2.102)$$

Para verificar que no se hayan cometido errores, se pueden aplicar propiedades. Teniendo en cuenta las propiedades de simetría, como $y(t)$ es real y par, su transformada $Y(f)$ también debe ser real y par, que verifica (2.102). Otra propiedad que puede aplicarse es la de área: es sencillo calcular que

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = \frac{4}{3} A\tau.$$

Sin embargo, evaluar $Y(f)$ en $f = 0$ es un poco más complicado, porque se anulan simultáneamente el numerador y el denominador. Aplicando la regla de L'Hopital un par de veces, se encuentra que

$$\lim_{f \rightarrow 0} Y(f) = \frac{4}{3} A\tau,$$

de manera que (2.102) también verifica la propiedad de área de la transformada de Fourier. Estas dos propiedades no garantizan que (2.102) sea correcta, sino que no parece ser incorrecta.

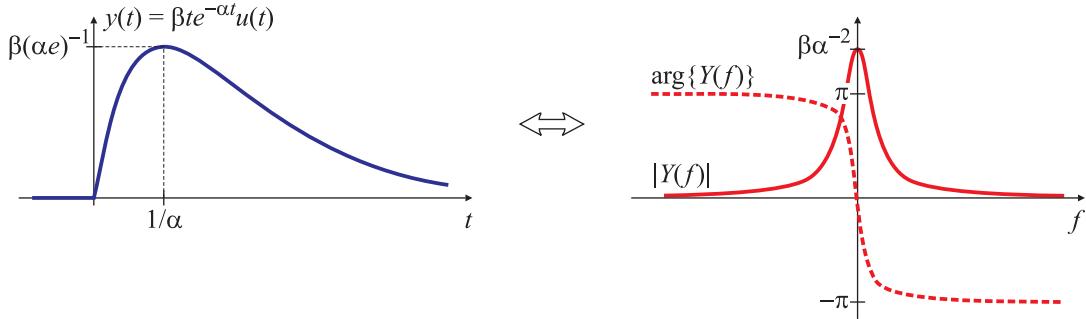


Fig. 2.60. La función $\beta te^{-\alpha t}u(t)$ y su transformada de Fourier.

Las transformadas de las funciones intermedias $y'(t)$ e $y''(t)$ se calculan con facilidad aplicando la propiedad de derivación temporal:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{y'(t)\} &= j2\pi f Y(f) = j\frac{2A}{\tau\pi f} [\text{sinc}(2\tau f) - \cos(2\pi\tau f)], \\ \mathcal{F}\{y'(t)\} &= -(2\pi f)^2 Y(f) = -\frac{4A}{\tau} [\text{sinc}(2\tau f) - \cos(2\pi\tau f)].\end{aligned}$$

Las funciones $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$ junto con sus transformadas se muestran en la Fig. 2.59. \square

2.6.13. Diferenciación en frecuencia

El desarrollo de esta propiedad es similar a la de derivación en tiempo. Si se diferencia ambos lados de la ecuación de análisis respecto a la frecuencia se encuentra que

$$\frac{d}{df} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} x(t) e^{-j2\pi ft} \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} [-j2\pi t x(t)] e^{-j2\pi ft} dt,$$

que resulta en el par transformado

$$-j2\pi t x(t) \iff \frac{d}{df} X(f).$$

Como usualmente $x(t)$ es real, es frecuente enunciar esta propiedad multiplicando ambos lados por j ,

$$2\pi t x(t) \iff j \frac{d}{df} X(f). \quad (2.103)$$

EJEMPLO 2.47. Transformada de la función $\beta te^{-\alpha t}u(t)$

En el Ejemplo 2.5 se calculó que la transformada de Fourier de

$$x(t) = \beta e^{-\alpha t} u(t) \quad \text{es} \quad X(f) = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f}.$$

La función $y(t) = \beta te^{-\alpha t}u(t)$ puede escribirse como $tx(t)$, y su transformada se puede calcular aplicando la propiedad de derivación frecuencial (2.103):

$$Y(f) = \frac{j}{2\pi f} \frac{d}{df} X(f) = \frac{j}{2\pi} \frac{(-j2\pi\beta)}{(\alpha + j2\pi f)^2} = \frac{\beta}{(\alpha + j2\pi f)^2}.$$

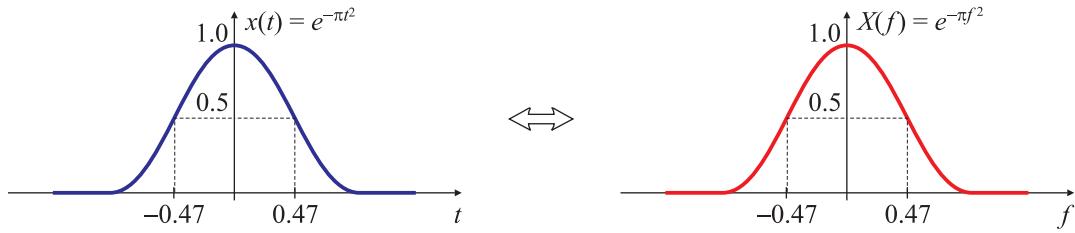


Fig. 2.61. Pulso gaussiano y su transformada de Fourier.

Es rutina verificar que el módulo y la fase están dados por

$$|Y(f)| = \frac{\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}, \quad \arg\{Y(f)\} = -\arctan\left(\frac{4\pi\alpha f}{\alpha^2 - (2\pi f)^2}\right).$$

En la Fig. 2.60 se muestra la función $y(t)$ y su transformada $Y(f)$. \square

En el siguiente ejemplo se utilizan simultáneamente las propiedades de derivación en tiempo y en frecuencia para resolver un problema interesante: encontrar una función que tenga la misma forma que su transformada de Fourier.

EJEMPLO 2.48. El pulso gaussiano

Se desea encontrar una función temporal $x(t)$ cuya transformada de Fourier $X(f)$ tenga la misma expresión matemática (con el obvio cambio de variables t por f). En otras palabras, usando una variable auxiliar σ para indicar t o f y evitar confusiones, se desea encontrar $x(\sigma)$ y $X(\sigma)$ tales que $x(\sigma) = X(\sigma)$.

Si $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$, la propiedad de derivación en frecuencia (2.103) indica que

$$2\pi t x(t) \iff j \frac{d}{df} X(f). \quad (2.104)$$

Por otra parte, por la propiedad de derivación temporal se tiene que

$$\frac{d}{dt} x(t) \iff j 2\pi f X(f). \quad (2.105)$$

Si se impone que la señal temporal $x(t)$ satisfaga la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d}{dt} x(t) + 2\pi t x(t) = 0, \quad (2.106)$$

es decir, que los miembros izquierdos de (2.104) y (2.105) sean iguales, es evidente que los miembros derechos también lo serán; en particular,

$$\frac{d}{df} X(f) + 2\pi f X(f) = 0. \quad (2.107)$$

En definitiva, si la señal temporal $x(t)$ satisface la ecuación diferencial de primer orden (2.106), su transformada de Fourier $X(f)$ satisface la ecuación diferencial de primer orden (2.107). Como las dos ecuaciones diferenciales tienen exactamente la misma expresión matemática, ambas tendrán idéntica solución. Notando

$$\frac{d}{d\sigma} g(\sigma) = -2\pi\sigma g(\sigma), \quad (2.108)$$

es evidente que

$$x(t) = g(\sigma)|_{\sigma=t}, \quad X(f) = g(\sigma)|_{\sigma=f}.$$

Resolviendo (2.108), se tiene que

$$g(\sigma) = e^{-\pi \sigma^2}, \quad (2.109)$$

El pulso definido por (2.109) se denomina *pulso gaussiano* debido a la similitud de la función con la función densidad de probabilidad de Gauss. Resumiendo, la transformada de Fourier del pulso gaussiano es el mismo pulso gaussiano, estableciendo el par transformado

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \iff X(f) = e^{-\pi f^2}.$$

que se muestra en la Fig. 2.61. Si las transformadas se expresan en función de la frecuencia angular Ω , la función temporal que tiene la misma expresión matemática que su transformada puede ser diferente, como se estudia en el Ejercicio 19. \square

El pulso gaussiano es una de las posibles funciones *continuas* que son su propia transformada de Fourier. Para construirlas basta con agregar la misma función de t o f en el miembro de la derecha de las ecuaciones (2.106) y (2.107), respectivamente. Sin embargo, es más sencillo todavía construir funciones discontinuas que sean igual a sus transformadas, como se estudia en el Ejercicio 32.

2.6.14. Integración en tiempo

Como la diferenciación en tiempo corresponde a una multiplicación por $j2\pi f$ en el dominio frecuencia, podría esperarse que la integración involucre la división por $j2\pi f$ en ese dominio. La relación precisa es

$$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \iff \frac{1}{j2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f). \quad (2.110)$$

El impulso en la expresión de la transformada refleja el comportamiento de continua o valor promedio que puede resultar por la integración. Para obtener esta relación es conveniente definir

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau.$$

Es claro que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau = X(f)|_{f=0} = X(0),$$

donde la anteúltima igualdad resulta de aplicar la propiedad de área (2.71). Definiendo la función auxiliar

$$w(t) = y(t) - X(0)u(t), \quad (2.111)$$

donde $u(t)$ es el escalón unitario, se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} w(t) = 0,$$

lo que asegura que $w(t)$ no tiene términos constantes. Su derivada temporal es

$$\frac{d}{dt}w(t) = \frac{d}{dt}y(t) - X(0)\delta(t). \quad (2.112)$$

Transformando término a término (2.111), y teniendo en cuenta la transformada de Fourier del escalón $u(t)$ calculada en el Ejemplo 2.43, se encuentra que

$$W(f) = Y(f) - X(0) \left[\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right]. \quad (2.113)$$

Aplicando la propiedad de derivación temporal (2.94), la transformada de (2.112) es

$$j2\pi f W(f) = j2\pi f Y(f) - X(0). \quad (2.114)$$

Finalmente, de (2.113) y (2.114) resulta

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0) \delta(f),$$

lo que permite establecer el par transformado (2.110). Otra forma de calcular esta relación se estudiará en el Ejemplo 2.62 de la Sección 2.7.5.

EJEMPLO 2.49. Transformada del escalón unitario

La transformada del escalón unitario puede calcularse aplicando la propiedad de integración, conociendo que la transformada del impulso es la unidad, $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$. Si $x(t) = \delta(t)$,

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.$$

La propiedad de integración (2.110) establece que

$$U(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0) \delta(f).$$

Como $X(f) = 1$ para todo f , resulta

$$U(f) = \frac{1}{2} \delta(f) - j \frac{1}{2\pi f},$$

que naturalmente coincide con (2.99). □

El siguiente ejemplo es un poco más interesante.

EJEMPLO 2.50. Transformada de Fourier de la función saturación $\text{sat}_\tau(t)$

La función saturación, definida como

$$\text{sat}_\tau(t) = \begin{cases} \tau, & \text{si } t > \tau, \\ t, & \text{si } |t| < \tau, \\ -\tau, & \text{si } t < -\tau, \end{cases}$$

se representa en la Fig. 2.62(a). Esta función sirve para modelar el comportamiento de un amplificador seguidor en el cual la salida copia la entrada siempre que ésta no supere el valor de la tensión de alimentación V_{cc} , en cuyo caso la salida del amplificador queda limitada a $\pm V_{cc}$, aproximadamente. Para calcular la transformada resulta conveniente observar que la función auxiliar

$$y(t) = \tau + \text{sat}_\tau(t) \quad (2.115)$$

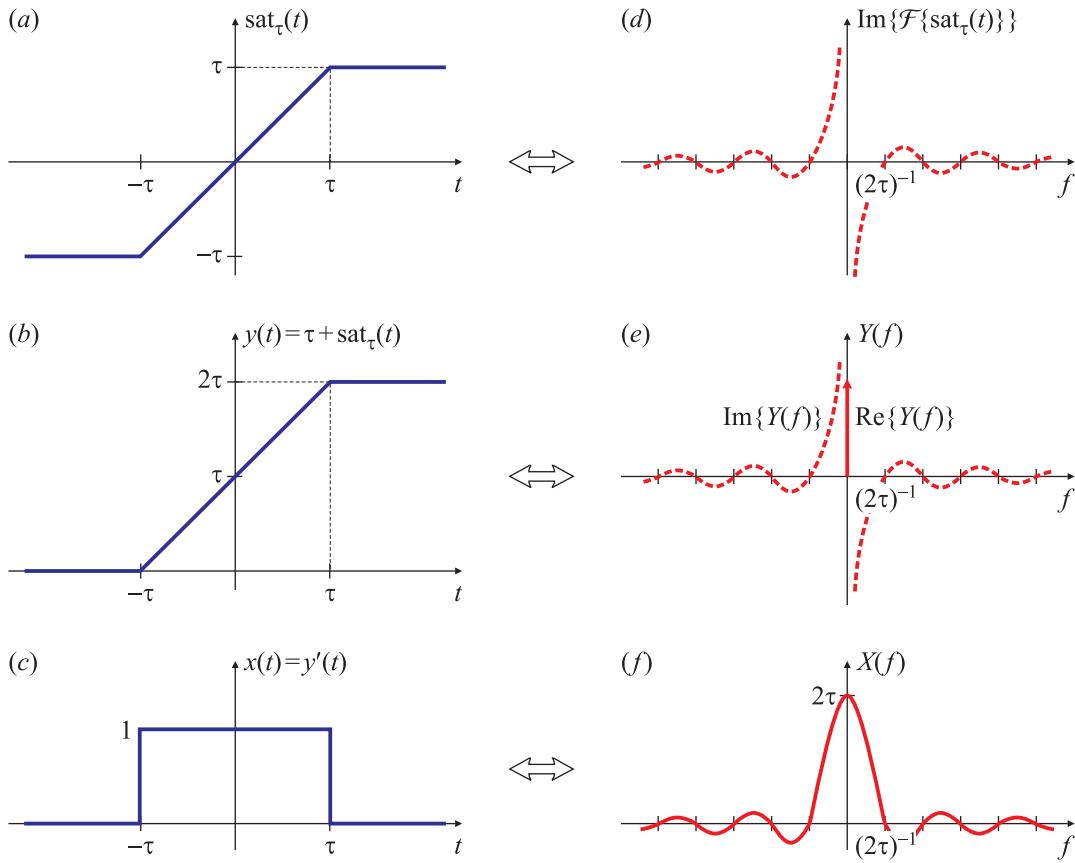


Fig. 2.62. Función $\text{sat}_\tau(t)$ y funciones auxiliares (a) y sus transformadas de Fourier.

que se muestra en la Fig. 2.62(b) se puede escribir como la integral de un pulso rectangular de ancho 2τ y altura unitaria, como se representa en la Fig. 2.62(c):

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau.$$

La transformada de Fourier $X(f)$ del pulso rectangular $x(t)$ es bien conocida,

$$X(f) = 2\tau \text{sinc}(2\tau f),$$

y se muestra en la Fig. 2.62(f). La transformada $Y(f)$ de $y(t)$ se calcula aplicando la propiedad de integración:

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f) = \frac{\tau \text{sinc}(2\tau f)}{j\pi f} + \tau\delta(f),$$

y se grafica en la Fig. 2.62(e). Finalmente, derivando (2.115) y reemplazando $Y(f)$ se cancelan los términos $\tau\delta(f)$, y se encuentra que

$$\mathcal{F}\{\text{sat}_\tau(t)\} = -j \frac{\tau \text{sinc}(2\tau f)}{\pi f}. \quad (2.116)$$

Esta transformada, que se representa en la Fig. 2.62(d), se puede revisar aplicando propiedades: como $\text{sat}_\tau(t)$ es una función real e impar, su transformada de Fourier debe ser imaginaria e impar, como efectivamente verifica (2.116). Además, el área bajo $\text{sat}_\tau(t)$ es nula, y coincide con el valor de la transformada $\mathcal{F}\{\text{sat}_\tau(t)\}$ en $f = 0$. Finalmente, el área bajo $\mathcal{F}\{\text{sat}_\tau(t)\}$ es nula, porque la transformada es impar, y coincide con el valor de $\text{sat}_\tau(t)$ en $t = 0$. \square

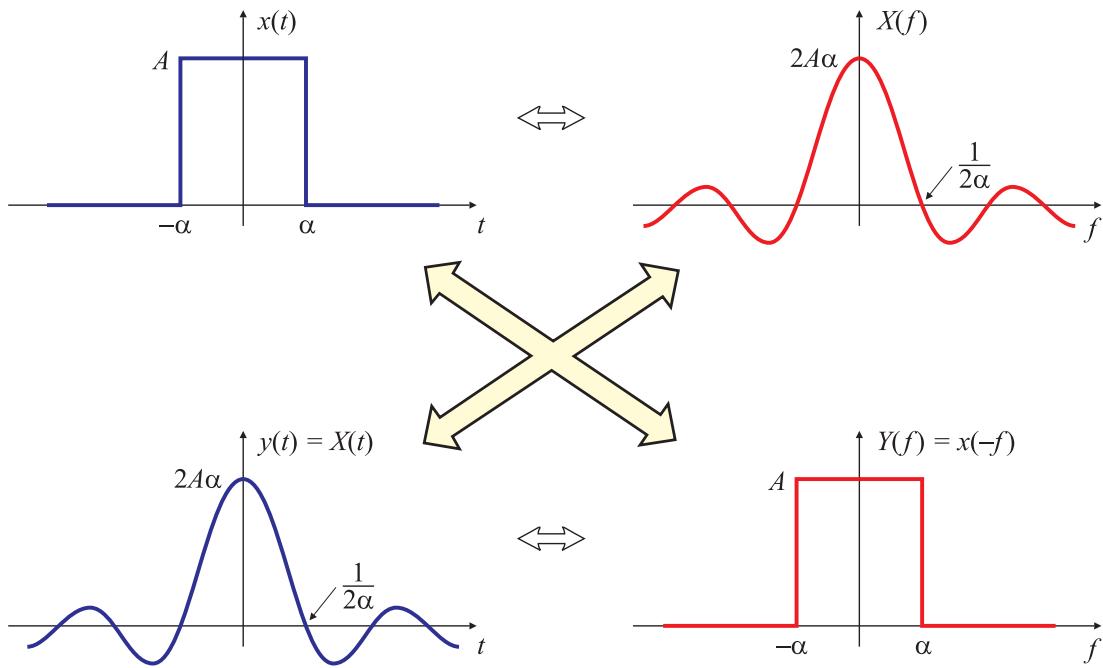


Fig. 2.63. Propiedad de dualidad.

2.6.15. Dualidad

Si la transformada de Fourier de $x(t)$ es $X(f)$, entonces

$$X(t) \iff x(-f).$$

Este par transformado puede deducirse reescribiendo la ecuación de la transformada inversa para la variable $(-t)$

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f(-t)} df,$$

e intercambiando los parámetros t y f ,

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (2.117)$$

En palabras, si una función temporal tiene la “forma” $x(t)$, y su transformada de Fourier es $X(f)$, entonces una función temporal con la “forma” de $X(\cdot)$ tendrá como transformada una función con la “forma” de $x(\cdot)$ en frecuencia, reflejada sobre el eje de ordenadas.

EJEMPLO 2.51. Transformada de un $\text{sinc}(\cdot)$ aplicando la propiedad de dualidad

Para ilustrar esta propiedad se considera el par transformado de Fourier

$$x(t) = A, |t| < \alpha \iff X(f) = 2A\alpha \text{sinc}(2\alpha f),$$

ilustrado previamente. Por la propiedad de dualidad,

$$y(t) = X(t) = 2A\alpha \text{sinc}(2\alpha t) \iff Y(f) = x(-f) = A, |f| < \alpha, \quad (2.118)$$

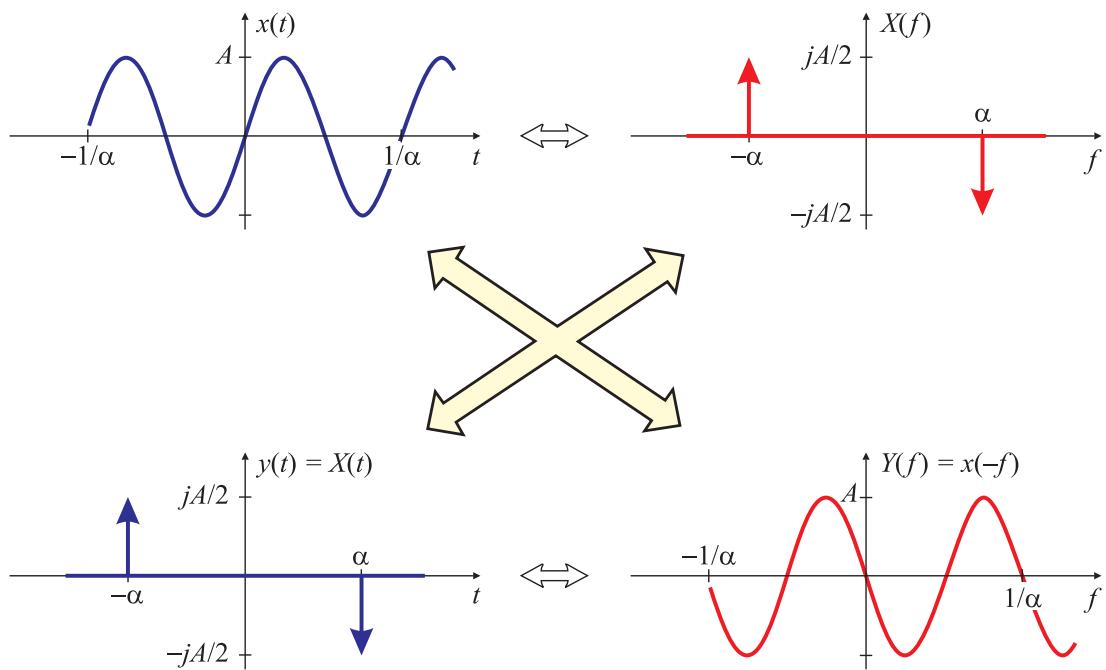


Fig. 2.64. Otro ejemplo de la propiedad de dualidad.

tal como se ilustra en la Fig. 2.63. En este caso, como las funciones involucradas son simétricas en tiempo y en frecuencia, el cambio de signo de la ecuación (2.117) pasa inadvertido. \square

EJEMPLO 2.52. Demostración de la propiedad de dualidad para una señal senoidal

En base a los resultados del Ejemplo 2.18 se encontró que la transformada de Fourier de la función

$$x(t) = A \sin(2\pi\alpha t)$$

es

$$X(f) = j \frac{A}{2} \delta(f + \alpha) - j \frac{A}{2} \delta(f - \alpha).$$

Si se define la función temporal $y(t) = X(f)|_{f=t}$, es decir, una señal temporal compleja formada por un par de impulsos en $t = \pm\alpha$,

$$y(t) = j \frac{A}{2} \delta(t + \alpha) - j \frac{A}{2} \delta(t - \alpha),$$

su transformada de Fourier $Y(f)$ es

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = j \frac{A}{2} e^{-j2\pi f(-\alpha)} - j \frac{A}{2} e^{-j2\pi f(+\alpha)} = j \frac{A}{2} (e^{j2\pi f\alpha} - e^{-j2\pi f\alpha}) \\ &= -A \sin(2\pi\alpha f) \end{aligned}$$

que también puede escribirse

$$Y(f) = A \sin[2\pi\alpha(-f)].$$

Es trivial observar que $Y(f) = x(t)|_{t=-f}$, tal como establece la propiedad de dualidad. Esta relación dual se representa en la Fig. 2.64. \square

Tabla 2.4. Propiedades duales

propiedad de:	en tiempo	en frecuencia
escalado	$x(kt) \Leftrightarrow \frac{1}{ k } X(f/k)$	$\frac{1}{ k } x(t/k) \Leftrightarrow X(kf)$
reflexión	$x(-t) \Leftrightarrow X(-f)$	$x(-t) \Leftrightarrow X(-f)$
desplazamiento	$x(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi t_0 f} X(f)$	$e^{-j2\pi f_0 t} x(t) \Leftrightarrow X(f - f_0)$
diferenciación	$\frac{d}{dt} x(t) \Leftrightarrow j2\pi f X(f)$	$-j2\pi t x(t) \Leftrightarrow \frac{d}{df} X(f)$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$	$-\frac{x(t)}{j2\pi t} + \frac{1}{2} x(0)\delta(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\sigma} X(\sigma) d\sigma$

Esta propiedad permite evitar desarrollos matemáticos complejos, como el del Ejemplo 2.13 (transformada de un sinc), pero también revela otras características de las transformadas de Fourier. Por ejemplo, se ha visto que una función temporal *periódica* tiene una transformada de Fourier *discreta*, formada por un tren de impulsos equiespaciados, y pesados por una cierta función: tal es el caso de las funciones periódicas $\sin(2\pi f_0 t)$ y $\cos(2\pi f_0 t)$ del Ejemplo 2.18, o de la onda cuadrada del Ejemplo 2.19 cuyas transformadas son impulsos equiespaciados en frecuencia. A causa de la dualidad, una función temporal formada por impulsos equiespaciados y modulados tendrá una transformada de Fourier que es *periódica* en frecuencia; un ejemplo trivial es la transformada del tren de impulsos desarrollada en el Ejemplo 2.22.

Las propiedades enunciadas hasta ahora y sus duales se resumen en la Tabla 2.4. Se observa que el cambio $t \rightarrow f$ en un dominio implica $f \rightarrow -t$ en el otro. En el caso de la propiedad de integración debe recordarse que el impulso $\delta(t)$ es función par.

Si bien muchas de las propiedades de la *transformada* de Fourier pueden extenderse sin mayores inconvenientes a la *serie* de Fourier, esto no ocurre con la propiedad de dualidad, debido a la distinta naturaleza de las variables tiempo/frecuencia en este caso. Mientras que para la transformada tanto la variable temporal (“ t ”) como la variable frecuencial (“ f ”) son *reales*, para la serie de Fourier la variable temporal es real, mientras que la variable frecuencial (“ k ”, el número de armónico) es un número entero. Por ejemplo, si bien existe una propiedad de derivación temporal para la serie de Fourier, similar a la de la transformada,

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \Leftrightarrow j \frac{2\pi}{T_0} k c_k,$$

no tiene sentido la propiedad dual de “derivación” en frecuencia, ya que “no se puede” calcular dc_k/dk porque k es una variable entera.

2.6.16. Relación de Parseval

Si $x(t)$ y $X(f)$ son un par transformado de Fourier, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.$$

Esta relación puede demostrarse a partir de la definición de la transformada de Fourier (2.24). Sabiendo que $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$, y reemplazando $x^*(t)$ por la ecuación de síntesis,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-j2\pi ft} df \right] dt.$$

Intercambiando el orden de integración,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]}_{X(f)} df.$$

El término entre corchetes es $X(f)$, la transformada de Fourier de $x(t)$, y entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df. \quad (2.119)$$

El término de la izquierda de (2.119) es la energía total de $x(t)$ [ecuación (2.41)]. La relación de Parseval muestra que la energía total puede determinarse calculando la energía por unidad de tiempo $|x(t)|^2$, e integrando en tiempo, o bien calculando la energía por unidad de frecuencia $|X(f)|^2$ e integrando en frecuencia. Por ello $|X(f)|^2$ se conoce como el *espectro de densidad de energía* de la señal $x(t)$.

Si la señal es periódica, su energía es infinita, y no puede aplicarse la ecuación (2.119). Sin embargo, para este tipo de señales se puede establecer una relación análoga. A partir de la expresión de la serie de Fourier (2.10),

$$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j \frac{2\pi}{T_0} kt}$$

la potencia promedio sobre un período es

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t)|^2 dt.$$

Recordando que $|\tilde{x}(t)|^2 = \tilde{x}(t)\tilde{x}^*(t)$ y reemplazando $\tilde{x}^*(t)$ por la ecuación de síntesis (2.10) resulta

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t)\tilde{x}^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) \sum_k c_k^* e^{-j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt = \sum_k c_k^* \left(\frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt \right).$$

El término entre paréntesis es el valor del coeficiente c_k , y como $|c_k c_k^*| = |c_k|^2$ se tiene que

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2, \quad (2.120)$$

donde los c_k son los coeficientes de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$, y T_0 es el período. En otras palabras, para el caso de señales periódicas la relación de Parseval vincula la potencia

promedio en un período de la función temporal con la energía de los coeficientes de la serie de Fourier. La cantidad $|c_k|^2$ se puede interpretar como la energía por período contribuida por el k -ésimo armónico. Tal como se mencionó en la Sección 2.4, las señales periódicas no tienen energía finita, pero si *potencia promedio* finita [ecuación (2.42)].

La relación de Parseval es especialmente conveniente cuando se desean comparar dos señales, por ejemplo una señal periódica $\tilde{x}(t)$ y su aproximación $\tilde{x}_N(t)$ formada por $2N+1$ coeficientes de la serie de Fourier, es decir

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi}{T_0} kt}, \quad \tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{j \frac{2\pi}{T_0} kt}. \quad (2.121)$$

Una manera de comparar las señales es evaluando el error medio cuadrático entre ambas, definido como

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)|^2 dt.$$

Teniendo en cuenta (2.121) se tiene que

$$\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi}{T_0} kt} - \sum_{k=-N}^N c_k e^{j \frac{2\pi}{T_0} kt} = \sum_{k=-\infty}^{-N-1} c_k e^{j \frac{2\pi}{T_0} kt} + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi}{T_0} kt}.$$

Aplicando Parseval, si $\tilde{x}(t)$ es real, resulta

$$\boxed{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)|^2 dt = 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k|^2.} \quad (2.122)$$

En el caso en que la energía de la señal original sea fácil de calcular (como es el caso de una onda cuadrada), puede ser más conveniente escribir el error medio cuadrático en función de $\int_{T_0} |\tilde{x}(t)|^2 dt$. Expandiendo $|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)|$,

$$\begin{aligned} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)|^2 &= [\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)][\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)]^* \\ &= \tilde{x}(t)\tilde{x}^*(t) - \tilde{x}(t)\tilde{x}_N^*(t) - \tilde{x}^*(t)\tilde{x}_N(t) + \tilde{x}_N(t)\tilde{x}_N^*(t). \end{aligned} \quad (2.123)$$

Se observa que

$$\tilde{x}(t)\tilde{x}_N^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi}{T_0} kt} \right) \left(\sum_{k=-N}^N c_k^* e^{j \frac{2\pi}{T_0} kt} \right) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-N}^N c_\ell c_k^* e^{j \frac{2\pi}{T_0} (\ell-k)t},$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t)\tilde{x}_N^*(t) dt &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-N}^N c_\ell c_k^* e^{j \frac{2\pi}{T_0} (\ell-k)t} dt \\ &= \sum_{k=-N}^N c_k^* \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^{j \frac{2\pi}{T_0} (\ell-k)t} dt = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2, \end{aligned}$$

ya que

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^{j \frac{2\pi}{T_0} (\ell-k)t} dt = \begin{cases} 1, & \text{si } \ell = k, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Repetiendo este argumento para los tres últimos términos de (2.123) se encuentra que

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) \tilde{x}_N^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}^*(t) \tilde{x}_N(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}_N(t) \tilde{x}_N^*(t) dt = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t)|^2 dt - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \quad (2.124)$$

La ventaja de (2.124) respecto de (2.122) es que en la primera se suma un número finito de términos.

Tanto (2.122) como (2.124) muestran que las series de Fourier convergen en media cuadrática porque cuando $N \rightarrow \infty$ en (2.122) la sumatoria $\sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k|^2 \rightarrow 0$ porque cada vez se suman menos términos. Por otra parte, en (2.124) cuando $N \rightarrow \infty$ la sumatoria $\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \rightarrow \tilde{x}(t)$. En ambos casos, estas expresiones muestran que si $\tilde{x}(t)$ tiene representación en series de Fourier,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)|^2 dt \rightarrow 0.$$

Hasta ahora se han estudiado algunas de las principales propiedades de la transformada de Fourier. La siguiente propiedad, el teorema de convolución, es clave en el estudio de los sistemas lineales, y por ello será analizada en detalle, discutiendo primero la derivación e importancia de la integral de convolución, y estudiando luego su transformada.

2.7. La integral de convolución

La convolución entre dos funciones es un concepto físico importante en muchas ramas de la ciencia. Sin embargo, como sucede con muchas relaciones matemáticas importantes, no es sencillo comprender sus alcances e implicaciones. Para el caso de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, la integral de convolución permite determinar la respuesta del sistema ante *cualquier* entrada, a partir del conocimiento de la respuesta del sistema ante una *única* entrada particular: el impulso. Si la respuesta del sistema ante un impulso (la “respuesta impulsiva” del sistema) se nota como $h(t)$, la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo (SLIT) excitado con una entrada cualquiera $x(t)$ está dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau, \quad (2.125)$$

La función $y(t)$ es la convolución de las funciones $x(t)$ y $h(t)$, notado como $y(t) = (x * h)(t)$.

2.7.1. Derivación de la integral de convolución

En esta sección se muestra que un sistema *lineal e invariante en el tiempo* queda completamente caracterizado por su respuesta impulsiva. En otras palabras, el conocimiento de

la respuesta del sistema a un impulso de amplitud unitaria permite determinar su salida para una entrada arbitraria aplicando la integral de convolución (2.125).

Una señal continua $x(t)$ cualquiera se puede aproximar con precisión arbitraria por una versión “escalonada” $\hat{x}(t)$, como la que se muestra en la Fig. 2.65(a). Aunque los escalones podrían tener distinto ancho, lo habitual es elegir el mismo valor Δ para todos. La señal escalonada $\hat{x}(t)$ se puede expresar como una combinación lineal de pulsos temporales de ancho Δ escalados y desplazados, como ilustran las Figs. 2.65(b)-(e). Si se define el pulso $\delta_\Delta(t)$ como

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que tiene área unitaria, la expresión $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ representa un pulso desplazado en el tiempo

$$\delta_\Delta(t - k\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & k\Delta < t < (k + 1)\Delta, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces, la aproximación escalonada $\hat{x}(t)$ de la señal continua $x(t)$ se puede escribir

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \Delta \delta_\Delta(t - k\Delta). \quad (2.126)$$

Observando la Fig. 2.65 se nota que sólo un término de la sumatoria (2.126) es no nulo para cada valor de t . A medida que el intervalo Δ tiende a cero, la aproximación $\hat{x}(t)$ es cada vez más fiel, y en el límite, cuando $\Delta \rightarrow 0$, es igual a $x(t)$,

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \Delta \delta_\Delta(t - k\Delta). \quad (2.127)$$

Si Δ se hace cada vez más pequeño, la sumatoria de la ecuación (2.127) tiende a una integral (la conocida aproximación de Riemann): para $\Delta \rightarrow 0$, se tiene que $\Delta \rightarrow d\tau$, $k\Delta \rightarrow \tau$, y $\delta_\Delta(t - k\Delta) \rightarrow \delta(t - \tau)$. Entonces (2.127) se puede expresar como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (2.128)$$

La expresión (2.128) no es otra cosa que la Propiedad 3 del impulso (Sección 2.4.2). El pasaje al límite de la expresión (2.127) a la ecuación (2.128) se puede interpretar con la ayuda de la Fig. 2.66, donde se han graficado las funciones $x(t)$, $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ y el producto $x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) \Delta$. El área bajo la curva $x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) \Delta$ se puede aproximar por el área sombreada del rectángulo de la Fig. 2.66(c), que es $\Delta x(k\Delta)$. En el límite, cuando $\Delta \rightarrow 0$, $x(t)$ iguala el área bajo la curva $x(\tau) \delta(t - \tau)$.

Esta representación escalonada permite estudiar la respuesta o salida $y(t)$ de un sistema *lineal* ante una entrada arbitraria $x(t)$. La acción de un sistema \mathcal{S} ante una entrada $x(t)$ se nota como

$$y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\}.$$

Si el sistema es *lineal* significa que si $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son las salidas del sistema \mathcal{S} ante entradas $x_1(t)$, $x_2(t)$, es decir

$$y_1(t) = \mathcal{S}\{x_1(t)\}, \quad y_2(t) = \mathcal{S}\{x_2(t)\},$$

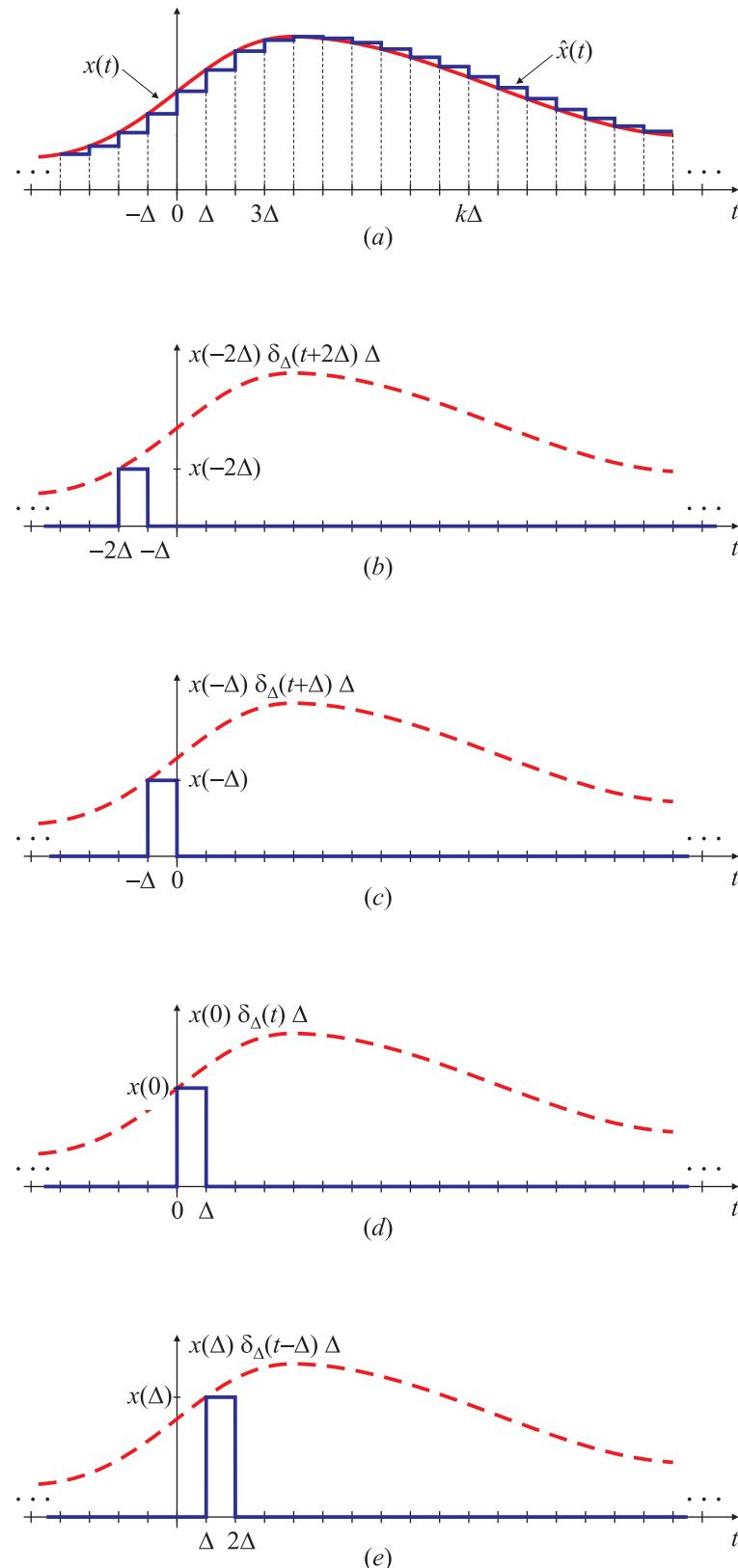


Fig. 2.65. Aproximación escalonada a una señal continua.

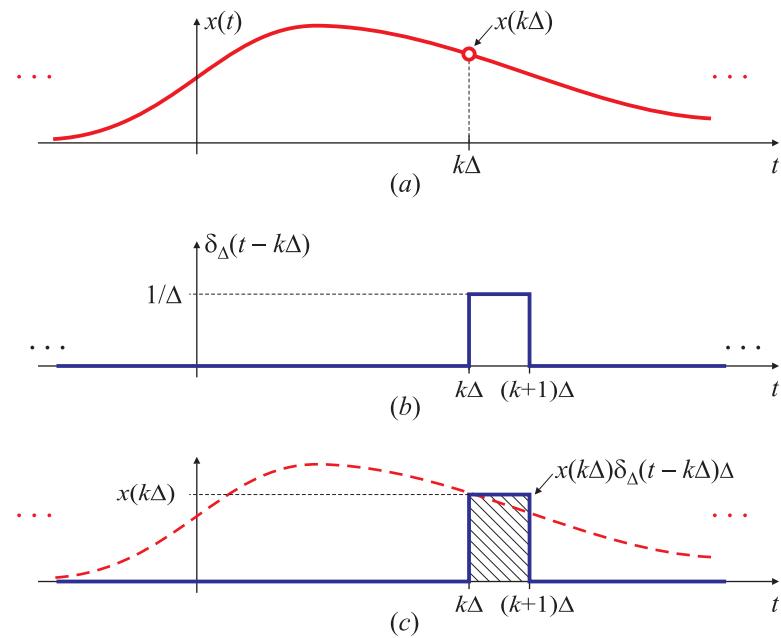


Fig. 2.66. Interpretación gráfica de la ecuación (2.127).

entonces la salida del sistema \mathcal{S} ante una entrada $x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$ es

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \mathcal{S}\{x_3(t)\} \\ &= \mathcal{S}\{a x_1(t) + b x_2(t)\} \\ &= a \mathcal{S}\{x_1(t)\} + b \mathcal{S}\{x_2(t)\} \\ &= a y_1(t) + b y_2(t). \end{aligned}$$

En otras palabras, la salida de un sistema lineal ante una combinación de entradas es la combinación de las salidas producidas por cada una de esas entradas.

La representación escalonada $\hat{x}(t)$ dada por (2.126) se puede pensar como una suma ponderada por $x(k\Delta)\Delta$ de la *misma* función $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ desplazada en el tiempo una cantidad $k\Delta$. La salida de un sistema \mathcal{S} ante la entrada $\hat{x}(t)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= \mathcal{S}\{\hat{x}(t)\} \\ &= \mathcal{S}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\Delta\delta_\Delta(t - k\Delta)\right\}. \end{aligned}$$

Si el sistema es *lineal* la salida $\hat{y}(t)$ se puede escribir como

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\Delta\mathcal{S}\{\delta_\Delta(t - k\Delta)\}.$$

La ventaja de esta representación es que la salida $\hat{y}(t)$ del sistema ante *cualquier* entrada es la suma ponderada de la salida del sistema $\mathcal{S}\{\delta_\Delta(t - k\Delta)\}$ ante la *misma* entrada $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ desplazada en el tiempo. Para simplificar la notación la salida del sistema ante un pulso $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ aplicado en $k\Delta$ se notará $h_{k\Delta}(t)$, es decir

$$\mathcal{S}\{\delta_\Delta(t - k\Delta)\} = h_{k\Delta}(t).$$

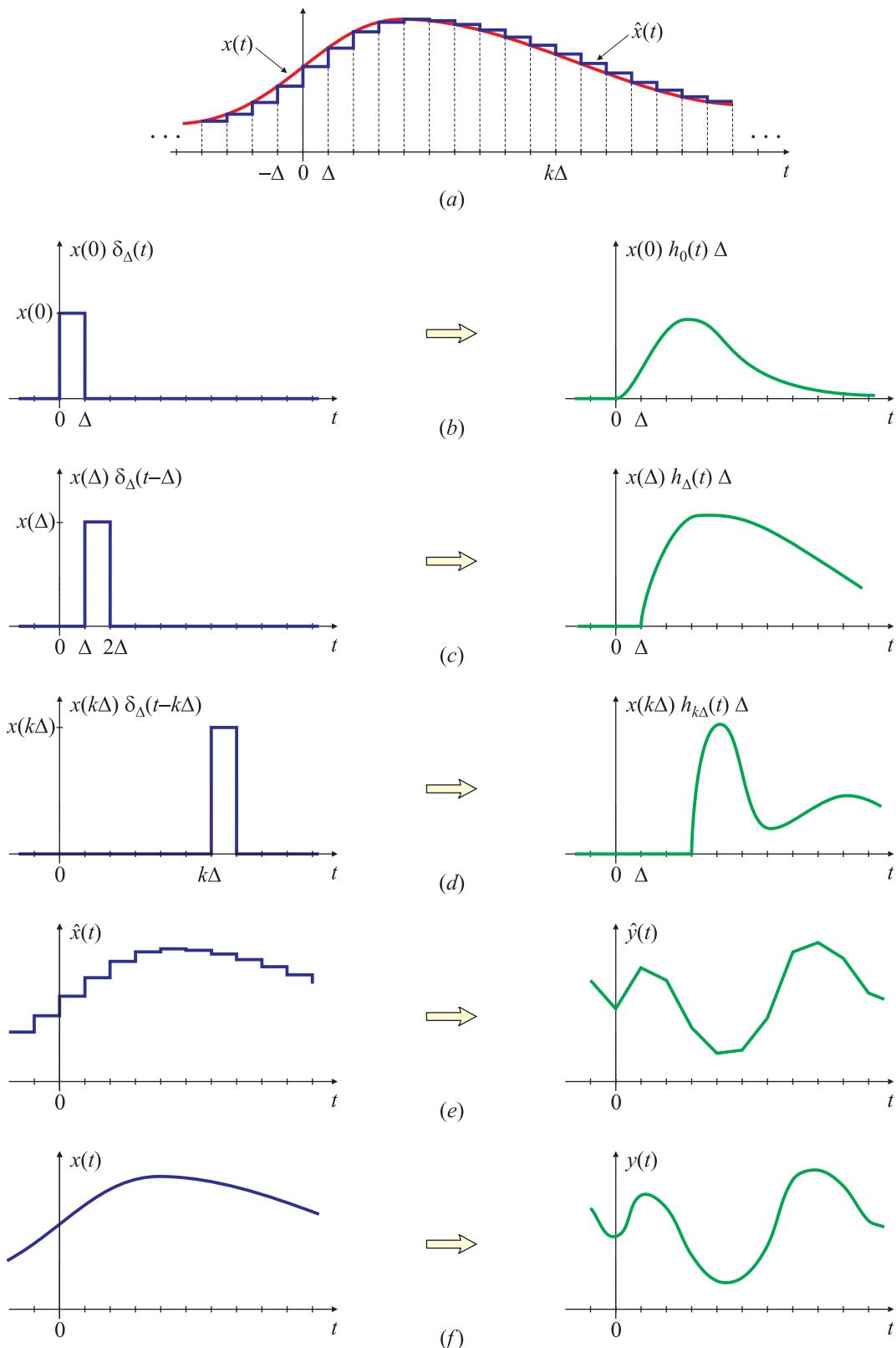


Fig. 2.67. Interpretación gráfica de la respuesta de un sistema lineal continuo variante en el tiempo [ecuación (2.127)].

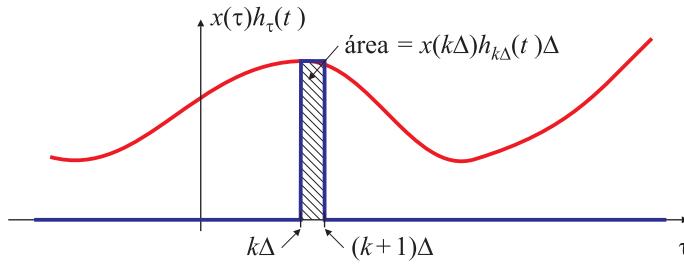


Fig. 2.68. Interpretación gráfica de las ecuaciones (2.129) y (2.130).

Utilizando esta notación, la salida del sistema ante cualquier entrada se escribe como

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \Delta h_{k\Delta}(t).$$

En la Fig. 2.67(a) se ha representado la señal $x(t)$ y su aproximación escalonada $\hat{x}(t)$, mientras que en la Fig. 2.67(b)-(d) se ilustran las respuestas del sistema ante tres de los pulsos escalados que forman $\hat{x}(t)$. Como el sistema es lineal, la salida $\hat{y}(t)$ correspondiente a la entrada $\hat{x}(t)$ es la suma de todas estas respuestas [Fig. 2.67(e)]. Para obtener la respuesta $y(t)$ ante la entrada $x(t)$ basta tomar el límite de $\hat{y}(t)$ para $\Delta \rightarrow 0$, de manera análoga a la indicada por la ecuación (2.127) para $\hat{x}(t)$, y como ilustra la Fig. 2.67(f).

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta. \quad (2.129)$$

Como el pulso $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$ es pulso de área unitaria desplazado, cuando $\Delta \rightarrow 0$ la respuesta $h_{k\Delta}(t)$ es la salida del sistema cuando se lo excita con un pulso de área unitaria aplicado en $k\Delta = \tau$, que se notará $h_{\tau}(t)$. En símbolos,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t - k\Delta) = \delta(t - \tau) \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} h_{k\Delta}(t) = h_{\tau}(t).$$

Cuando $\Delta \rightarrow 0$ la suma en el miembro derecho de (2.129) tiende a la integral, como se representa en la Fig. 2.68. Entonces, siguiendo un procedimiento similar al que permite pasar de (2.127) a (2.128), se encuentra que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau. \quad (2.130)$$

La interpretación de la ecuación (2.130) es análoga a la de la ecuación (2.127). Como muestra la ecuación (2.128), cualquier entrada $x(t)$ puede pensarse como una suma de impulsos escalados y desplazados, donde el “peso” del impulso $\delta(t - \tau)$ es precisamente $x(\tau)d\tau$. Con esta interpretación, la ecuación (2.130) representa la superposición de las respuestas a cada uno de estos impulsos, y, por linealidad, el “peso” de la respuesta $h_{\tau}(t)$ al impulso desplazado $\delta(t - \tau)$ también es $x(\tau)d\tau$.

La ecuación (2.130) representa la forma general de la respuesta de un sistema lineal de tiempo continuo. Si además de ser lineal el sistema es *invariante en el tiempo*, entonces la respuesta del sistema en un tiempo $t = t_1$ ante un impulso $\delta(t - \tau)$ aplicado en $t = \tau$

[Fig. 2.69(a)] es la misma que la respuesta del sistema en un tiempo $t = t_1 + T$ ante un impulso $\delta(t - \tau - T)$ aplicado en $t = \tau + T$ [Fig. 2.69(b)], es decir

$$h_{\tau+T}(t) = h_{\tau}(t - T).$$

Por conveniencia notacional se suele elegir $\tau = 0$, de modo que $h_T(t) = h_0(t - T)$, y se define la *respuesta impulsiva del sistema lineal e invariante en el tiempo* $h(t)$ como

$$h(t) = h_{\tau}(t)|_{\tau=0} = h_0(t),$$

es decir, la respuesta del sistema ante un impulso aplicado en $t = 0$. En este caso, la ecuación (2.130) se convierte en

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (2.131)$$

Esta integral se conoce como *integral de convolución* o *integral de superposición*, y representa la acción de un sistema de tiempo continuo *lineal e invariante en el tiempo* con respuesta impulsiva $h(t)$ ante una entrada arbitraria $x(t)$.

Es conveniente resaltar las diferencias entre las ecuaciones (2.130) y (2.131), que se ilustran en la Fig. 2.67(b)-(d) y en la Fig. 2.70(b)-(d), respectivamente. Para el sistema variante en el tiempo (Fig. 2.67) es necesario conocer la respuesta $h_{\tau}(t)$ del sistema ante un impulso aplicado en $t = \tau$, para todos los posibles valores de τ ; en otras palabras, $h_{\tau}(t)$ representa una *familia* de respuestas impulsivas. En cambio, para los sistemas invariantes en el tiempo (Fig. 2.70) basta con conocer una única respuesta impulsiva $h(t)$. Por comodidad, se suele elegir la respuesta del sistema ante un impulso aplicado en el origen.

2.7.2. Evaluación gráfica de la integral de convolución

No es sencillo visualizar la operación matemática descripta por la ecuación (2.131); sin embargo, un análisis gráfico permite comprender el significado de la convolución. Sean $x(t)$ y $h(t)$ dos funciones temporales, por ejemplo los pulsos representados en la Fig. 2.71(a)

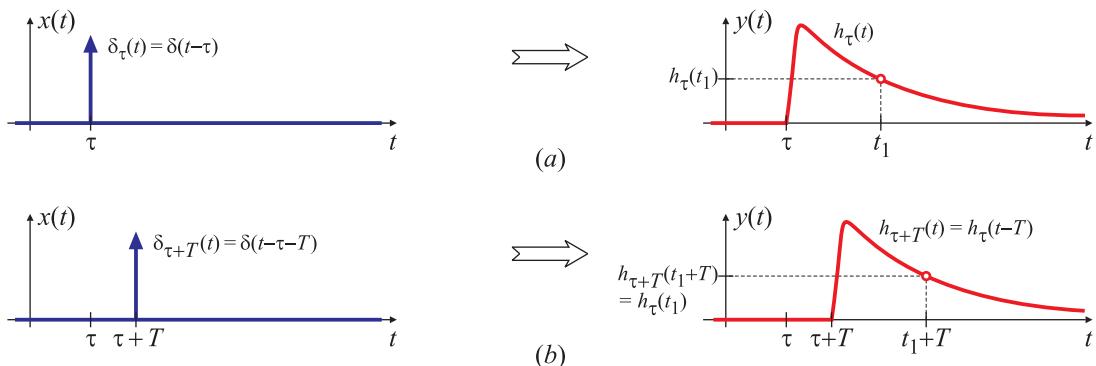


Fig. 2.69. Respuesta de un sistema continuo lineal e invariante en el tiempo.

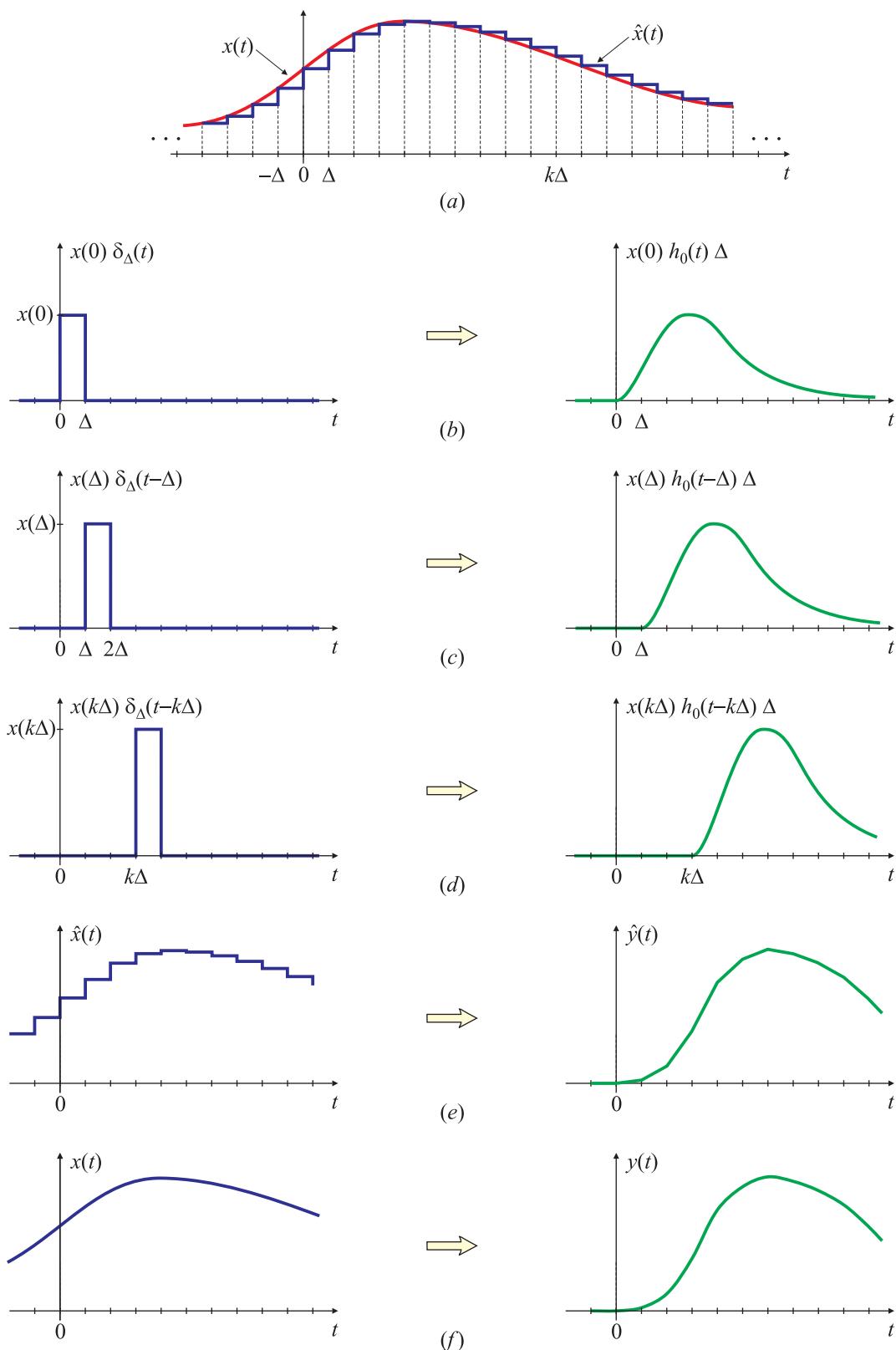


Fig. 2.70. Interpretación de la respuesta de un sistema lineal continuo *invariante en el tiempo* [ecuación (2.131)].

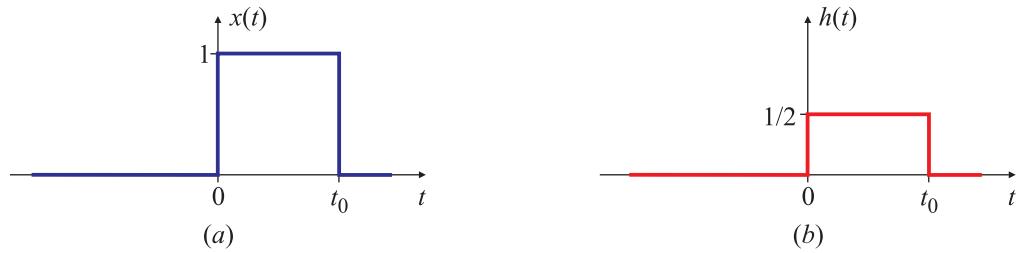


Fig. 2.71. Formas de onda a convolucionar.

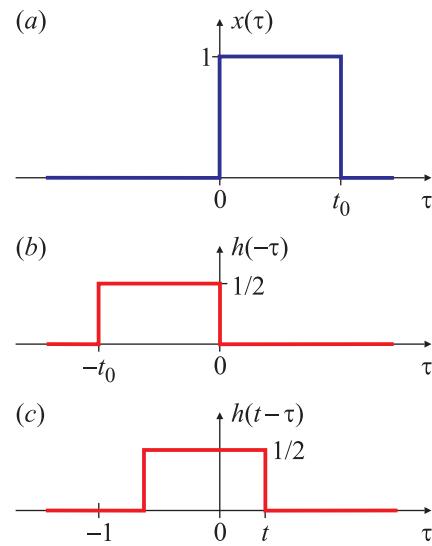


Fig. 2.72. Descripción gráfica de la operación de reflexión.

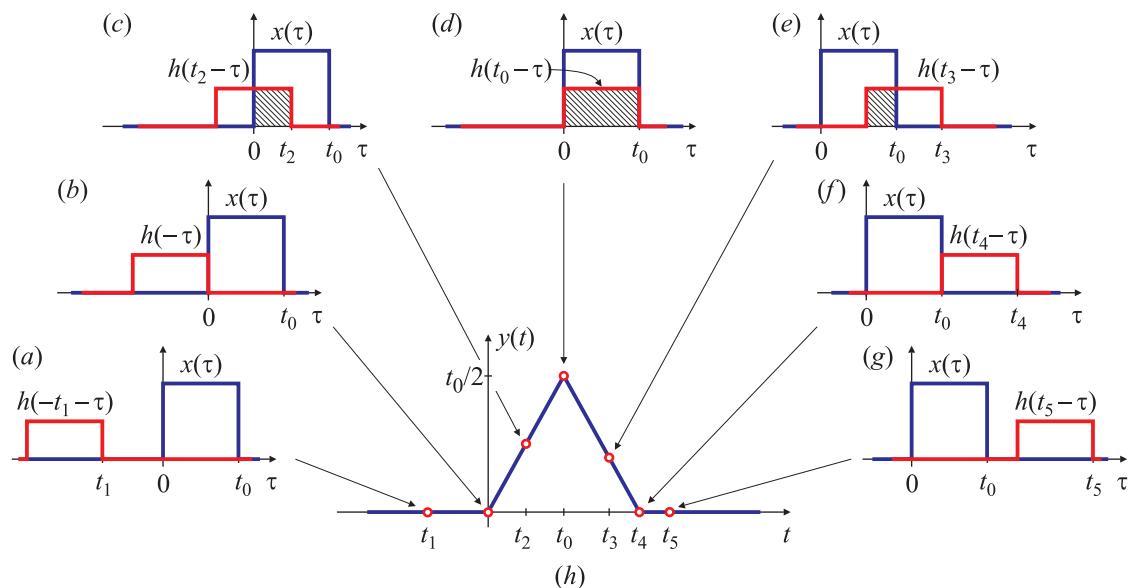


Fig. 2.73. Ejemplo gráfico de la convolución.

y (b) , respectivamente. Para evaluar (2.131) son necesarias las funciones $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$. Las funciones $x(\tau)$ y $h(\tau)$ son las funciones $x(t)$ y $h(t)$, respectivamente, donde la variable t se ha reemplazado por la variable τ . La función $h(-\tau)$ es el reflejo de $h(\tau)$ respecto al eje de las ordenadas, como se muestra en la Fig. 2.72(b) y $h(t - \tau)$ es la función $h(-\tau)$ desplazada en una cantidad t , como se representa en la Fig. 2.72(c). Para evaluar la integral (2.131) es necesario multiplicar e integrar las funciones $x(\tau)$ [Fig. 2.72(a)] y $h(t - \tau)$ [Fig. 2.72(c)] para cada valor de t desde $-\infty$ hasta ∞ . Como se muestra en la Fig. 2.73(a), este producto es cero cuando el parámetro $t = -t_1$. El producto sigue siendo nulo hasta que el parámetro t toma el valor $t = 0$. En $t = t_2$ el producto de $x(\tau)$ y $h(t_1 - \tau)$ es la zona sombreada que se muestra en la Fig. 2.73(c); el área de esta zona es el valor de la integral. A medida que t se incrementa a t_0 y posteriormente a t_3 , la Fig. 2.73(d) y (e) muestran las funciones que deben multiplicarse. Para $t = t_4$ el producto nuevamente se anula como se muestra en la Fig. 2.73(f), y sigue siendo nulo para cualquier valor de t tal que $t > t_4$ [Fig. 2.73(g)]. Resumiendo, si se deja que t varíe continuamente desde $-\infty$ hasta ∞ la convolución de $x(t)$ y $h(t)$ es la función triangular que se muestra en la Fig. 2.73(h).

El procedimiento descrito es una técnica de análisis gráfico conveniente para evaluar o interpretar integrales de convolución. Los pasos a seguir son:

1. **Reflexión.** Se refleja $h(t)$ respecto del eje de ordenadas: se cambia t por $-\tau$.
2. **Desplazamiento.** Se desplaza $h(-\tau)$ hasta el punto $\tau = t$ donde se desea evaluar la convolución.
3. **Multiplicación.** Se multiplica la función desplazada $h(t - \tau)$ por $x(\tau)$.
4. **Integración.** El área bajo el producto de $h(t - \tau)$ y $x(\tau)$ es el valor de la convolución $(x * h)(t)$ en el tiempo t .

En este cálculo, la variable es τ , y t es un *parámetro* que queda fijo: la integral se calcula “punto a punto” para cada valor de t .

EJEMPLO 2.53. Cálculo gráfico de la integral de convolución

Las reglas para la evaluación gráfica de la integral de convolución se ilustran con el cálculo de $y(t) = (x * h)(t)$ para las funciones $h(t) = e^{-t}u(t)$ y $x(t) = u(t)$, que se representan en la Fig. 2.74(a) y (b), respectivamente. Primero se refleja $h(\tau)$ para obtener $h(-\tau)$, como se ve en la Fig. 2.74(c). Luego se desplaza $h(-\tau)$ en una cantidad $t = t_1$ que es el instante donde se quiere calcular la convolución [Fig. 2.74(d)]. Despues se multiplica $h(t - \tau)$ por $x(\tau)$ [Fig. 2.74(e)], y finalmente se integra para obtener el resultado de la convolución para el tiempo t_1 [Fig. 2.74(f)]. El resultado ilustrado en la Fig. 2.74(f) se puede determinar directamente de la ecuación (2.125),

$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t_1 - \tau) d\tau.$$

Los extremos de integración se ajustan teniendo en cuenta los rangos donde alguna de las funciones es nula: como $x(\tau)$ es cero para $\tau < 0$, no tiene sentido integrar desde $-\infty$. Por otra parte como $h(t)$ es cero para $t < 0$, $h(t_1 - \tau)$ es cero para $t_1 - \tau < 0$, o bien para todo $\tau > t_1$; por lo tanto sólo es necesario integrar hasta t_1 . Entonces,

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t_1 - \tau) d\tau = \int_0^{t_1} (1) e^{-(t_1 - \tau)} d\tau \\ &= e^{-t_1} \left(e^{\tau} \Big|_0^{t_1} \right) = e^{-t_1} (e^{t_1} - 1) = 1 - e^{-t_1}. \end{aligned}$$

El valor $y(t_1)$ está indicado con un círculo en la Fig. 2.74(f). □

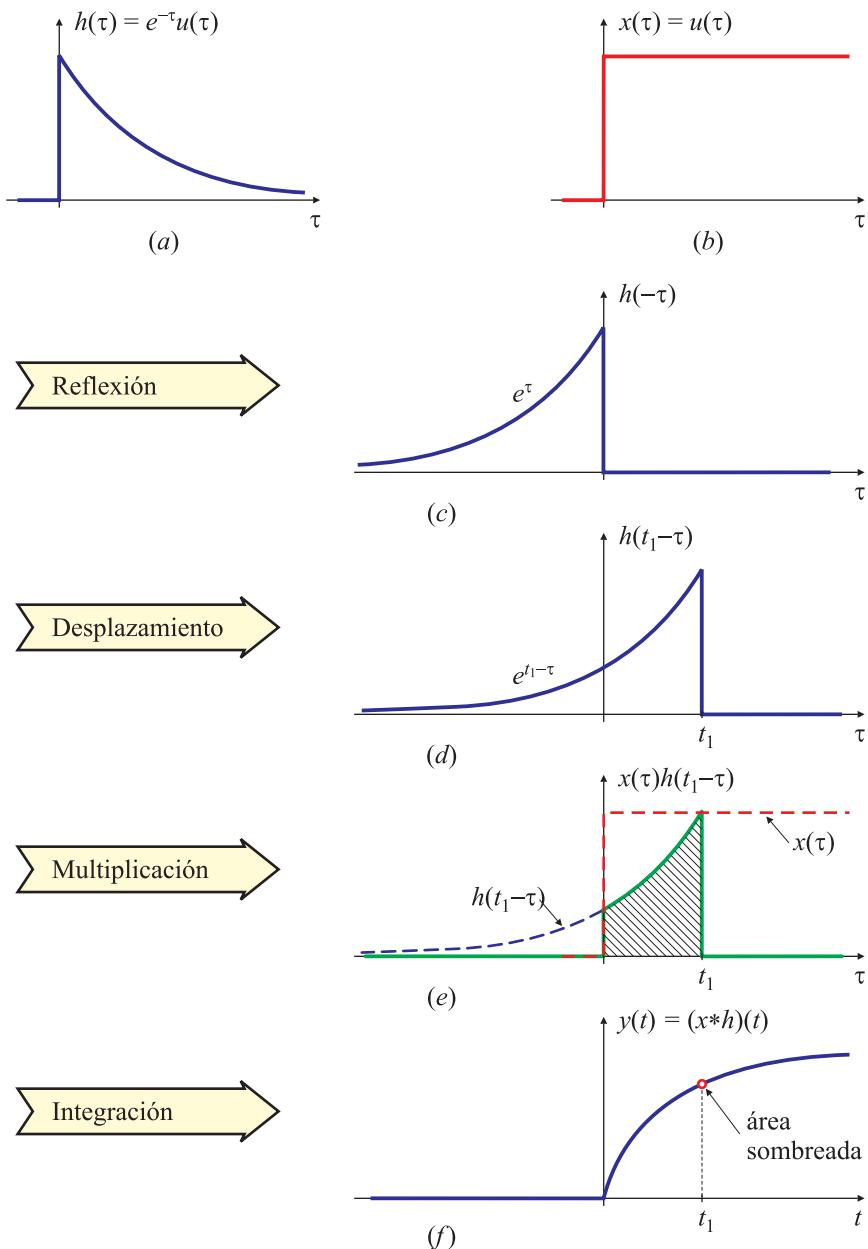


Fig. 2.74. Procedimiento de cálculo de la convolución.

En el Ejemplo 2.53 los extremos de la integral de convolución (originariamente de $-\infty$ a ∞) cambian de 0 a t_1 . En general, los valores de los extremos cambian de acuerdo a cómo sean las funciones del integrando. Para el ejemplo, el menor valor de la variable τ para el cual la función $h(t - \tau) = e^{-(t-\tau)}$ es nula es $\tau = -\infty$; para la función $x(\tau)$ es $\tau = 0$.

Al integrar se debe elegir el *mayor* de estos dos valores como el *extremo inferior* de integración. Para hallar el *extremo superior* se observa que $h(t - \tau) = e^{-(t-\tau)}$ es nula para cualquier $\tau > t$, y que $x(\tau)$ es nula para $\tau > \infty$. Por lo tanto el *extremo superior* de integración es el *menor* de estos valores.

Una regla general para determinar los extremos de integración es la siguiente:

Si $x(t)$ es nula fuera del intervalo $[L_1, U_1]$, y $h(t)$ es nula fuera del intervalo $[L_2, U_2]$, los límites de integración de la integral de convolución (2.125) son $\max(L_1, L_2)$ y $\min(U_1, U_2)$, respectivamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{\max(L_1, L_2)}^{\min(U_1, U_2)} x(\tau)h(t - \tau)d\tau.$$

Los valores de τ para los cuales se anula $x(\tau)$ son fijos; sin embargo, los valores de τ donde la “función deslizante” $h(t - \tau)$ es distinta de cero son función del parámetro t . Por ello es posible tener diferentes límites de integración para distintos rangos de t . Un gráfico como el de la Fig. 2.74 es útil para determinar correctamente los límites de integración; el cálculo de la integral se puede dividir en a lo sumo 5 etapas, según sean las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$:

- **Etapa 1: sin solapamiento por izquierda.** Las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ no se solapan, como se muestra en la Fig. 2.73(a) o (b). En este caso, el resultado de la convolución es cero: $(x * h)(t) = 0$, porque el producto de $x(\tau)h(t - \tau)$ es nulo.
- **Etapa 2: solapamiento parcial por izquierda.** Las funciones $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ se solapan parcialmente por izquierda, como se representa en la Fig. 2.73(c).
- **Etapa 3: solapamiento total.** Las funciones $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ se solapan totalmente, como se muestra en la Fig. 2.73(d);
- **Etapa 4: solapamiento parcial por derecha.** Las funciones $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ se solapan parcialmente por derecha, como se ilustra en la Fig. 2.73(e);
- **Etapa 5: sin solapamiento por derecha.** Las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ no se solapan, porque $h(t - \tau)$ queda a totalmente a la derecha de $x(\tau)$, como se muestra en la Fig. 2.73(f) o (g). En este caso, el resultado de la convolución también es cero: $(x * h)(t) = 0$.

Dependiendo de la naturaleza de las funciones a convolucionar, algunas de estas etapas pueden estar ausentes, como ocurre con las señales del Ejemplo 2.53, donde faltan las etapas 3 (solapamiento total), 4 (solapamiento parcial por derecha) y 5 (sin solapamiento). En el siguiente ejemplo, donde se convolucionan dos señales de longitud finita, se ponen de manifiesto las cinco etapas.

EJEMPLO 2.54. Convolución de dos pulsos rectangulares

Se debe calcular la convolución entre las señales

$$\begin{aligned} h(t) &= A [u(t) - u(t - t_A)], \\ x(t) &= B [u(t - t_B) - u(t - t_C)] \end{aligned}$$

donde $0 < t_B < t_A < t_C$, tal como se muestra en la Fig. 2.75(a) y (b), respectivamente. La señal

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$



Fig. 2.75. Señales a convolucionar en el Ejemplo 2.54.

se calcula siguiendo los pasos indicados más arriba: reflexión de una de las señales, desplazamiento de la misma hasta el valor de t donde debe calcularse la convolución, multiplicación de las funciones, y cálculo del área. La representación gráfica del cálculo para distintos valores del parámetro t se muestra en las Figs. 2.76(a)-(i). Como las señales tienen duración finita, el cálculo de la convolución requiere cinco etapas:

Etapa 1: (*sin solapamiento*: para $-\infty < t < t_B$). En este caso,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} AB[u(\tau-t_B)-u(\tau-t_C)][u(t-\tau)-u(t-\tau-t_A)]d\tau = 0,$$

porque para cualquier $t < t_B$, $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ no son distintas de cero simultáneamente, como se representa en las Figs. 2.76(a)-(b). La función $x(\tau)$ es nula para $\tau < t_B$ o $\tau > t_C$, mientras que $h(t-\tau) = 0$ para $t - \tau < 0$ o $t - \tau > t_A$, como se muestra en la Fig. 2.75(a). Estas últimas relaciones indican que $h(t-\tau) = 0$ para $\tau > t$ o para $\tau < t - t_A$. Por lo tanto, si $t < t_B < t_A$ tanto $x(\tau)$ como $h(t-\tau)$ son no nulas en distintos intervalos, y no se solapan. En la Fig. 2.76(a) se muestra el caso en que $t = 0$, mientras que en la Fig. 2.76(b) se representa el momento justo en que $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ se empiezan a solapar, que es cuando $t = t_1 = t_B$.

Etapa 2: (*solapamiento parcial por izquierda*: $t_B < t < t_B + t_A$). Los límites de integración cambian ya que $x(\tau) = 0$ para $\tau < t_B$, y $h(t-\tau) = 0$ para $t - \tau < 0$, como se muestra en la Fig. 2.75(a), o bien para $\tau > t$. Esto indica que no tiene sentido integrar por debajo de $\tau < t_B$ o por encima de $\tau > t$, para t en el intervalo $t_B < t < t_B + t_A$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_B}^t AB[u(\tau-t_B)-u(\tau-t_C)][u(t-\tau)-u(t-\tau-t_A)]d\tau \\ &= AB \int_{t_B}^t dt = AB(t - t_B). \end{aligned}$$

El cálculo para $t = t_2$, donde $t_2 \in (t_B, t_B + t_A)$ se muestra en la Fig. 2.76(c), donde el valor de $y(t)$ es $y(t)|_{t=t_2} = AB(t_2 - t_B)$. El cálculo del valor de $y(t)$ en el extremo de este intervalo se representa en la Fig. 2.76(d), y aquí $y(t)$ alcanza el valor $AB(t_B + t_A - t_B) = AB t_A$.

Etapa 3: (*solapamiento total*: $t_B + t_A < t < t_C$). Dentro de este intervalo, $h(t-\tau)$ se solapa completamente con $x(\tau)$. Los intervalos de integración cambian ya que $h(t-\tau) = 0$ para $\tau > t$, lo que determina el extremo superior, y también se anula para $t - \tau > t_A$, o $\tau < t - t_A$, lo que fija el límite inferior para todo el intervalo $t_B + t_A < t < t_C$, donde además la función $x(t)$ vale $x(t) = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-t_A}^t AB[u(\tau-t_B)-u(\tau-t_C)][u(t-\tau)-u(t-\tau-t_A)]d\tau \\ &= AB \int_{t-t_A}^t d\tau = AB[t - (t - t_A)] = AB t_A. \end{aligned}$$

Los resultados para $t = t_3 = t_B + t_A$, $t = t_4$, con $t_B + t_A < t_4 < t_C$ y $t = t_5 = t_C$ se representan en las Figs. 2.76(d), 2.76(e) y 2.76(f), respectivamente.

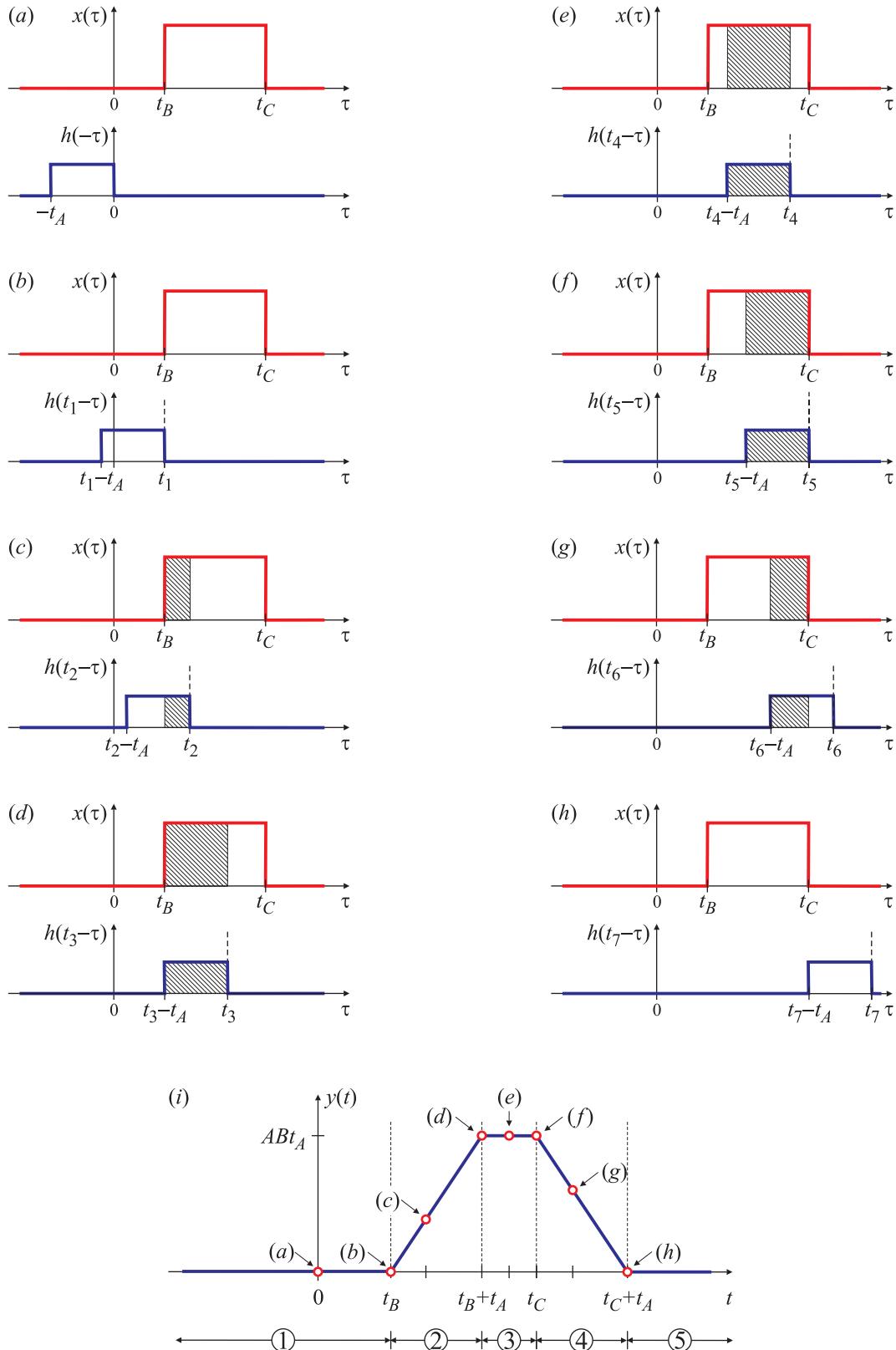


Fig. 2.76. Detalle de las 5 etapas en el cálculo de la convolución de dos pulsos rectangulares: sin solapamiento (a)-(b); solapamiento parcial por izquierda (c); solapamiento total (d)-(f); solapamiento parcial por derecha (g); sin solapamiento (h). Resultado de la convolución (i).

Etapa 4: (*solapamiento parcial por derecha: $t_C < t < t_C + t_A$*). En este intervalo el límite superior de la integral queda determinado por $x(\tau)$, ya que se anula para $\tau > t_C$. El límite inferior lo impone $h(t-\tau)$ ya que es cero para $t-\tau > t_A$ o $\tau < t-t_A$. Por lo tanto para $t_C < t < t_C + t_A$, $y(t)$ resulta de calcular

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-t_A}^{t_C} AB[u(\tau-t_B)-u(\tau-t_C)][u(t-\tau)-u(t-\tau-t_A)]d\tau \\ &= AB \int_{t-t_A}^{t_C} d\tau = AB[t_C - (t - t_A)] = AB(t_C + t_A - t). \end{aligned}$$

El cálculo para $t = t_5 = t_C$ se muestra en la Fig. 2.76(f), y para $t = t_6$, con $t_C < t_6 < t_C + t_A$ en la Fig. 2.76(g). Este cálculo es válido hasta que $t = t_7 = t_C + t_A$, como se muestra en la Fig. 2.76(h), instante en el cual dejan de solaparse $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$.

Etapa 5: (*sin solapamiento: $t_C + t_A < t < \infty$*). A partir de $t > t_C + t_A$ tanto $x(\tau)$ como $h(t-\tau)$ se solapan donde alguna de las funciones es nula, y por lo tanto el integrando es cero. En consecuencia, para $t > t_C + t_A$ la función $y(t)$ también se anula, como se muestra en las Figs. 2.76(h) para $t = t_7 = t_C + t_A$.

Sintetizando los resultados, se tiene que

$$y(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < t_B, \\ AB(t - t_B), & t_B < t < t_B + t_A, \\ AB t_A, & t_B + t_A < t < t_C, \\ AB(t_C + t_A - t), & t_C < t < t_C + t_A, \\ 0, & t_C + t_A < t < \infty. \end{cases}$$

El resultado de la convolución y los valores intermedios calculados en el desarrollo se muestran en la Figs. 2.76(i). Los números rodeados por un círculo debajo del eje de las ordenadas indican cada una de las etapas del cálculo de la convolución. \square

En el siguiente ejemplo las señales a convolucionar también son de longitud finita, pero su expresión matemática es un poco más complicada que la del ejemplo anterior. Esto sólo dificulta el cálculo de las integrales de convolución, pero no la determinación de cada una de las cinco etapas, que quedan definidas por los intervalos donde se anulan cada una de las funciones.

EJEMPLO 2.55. Las cinco etapas en el cálculo de la convolución

Se desea calcular la salida $y(t)$ de un sistema con respuesta impulsiva

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

cuando se lo excita con una entrada

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi t), & 4 \leq t \leq 5, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Las señales $x(t)$ y $h(t)$ se representan en la Fig. 2.77(a) y (b), respectivamente. La salida $y(t)$ se calcula convolucionando $h(t)$ y $x(t)$ siguiendo los pasos indicados más arriba: reflexión de una de las señales; desplazamiento de la misma hasta el instante donde desea calcularse la convolución, multiplicación de las dos señales, e integración del producto. La sucesión de estas cuatro operaciones para distintos valores del parámetro t se ilustra en la Fig. 2.78.

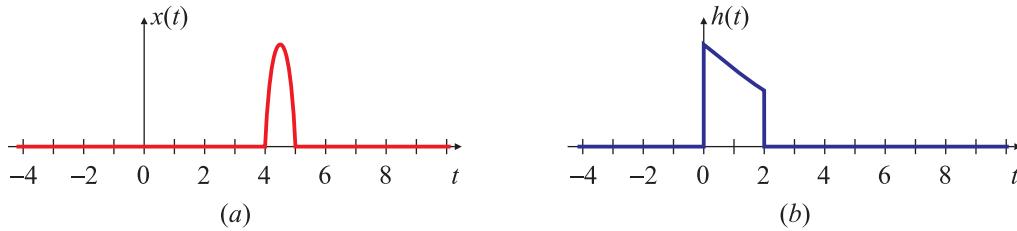


Fig. 2.77. Señales a convolucionar en el Ejemplo 2.55.

Etapa 1: (*sin solapamiento*: $-\infty < t < 4$). La reflexión y el desplazamiento de la señal hasta el instante $t_1 = 1$ se muestra en la Fig. 2.78(a). Es evidente que $h(t_1 - \tau)$ y $x(\tau)$ son distintas de cero en rangos diferentes; por lo tanto su producto es nulo, y también el área (integral). Esta situación continúa hasta que $t = t_2 = 4$, como se representa en la Fig. 2.78(b). Por lo tanto,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int 0 d\tau = 0, \quad \text{para } -\infty < t < t_2 = 4.$$

Etapa 2: (*solapamiento parcial por izquierda*: $4 \leq t < 5$). Para $t > t_2$ las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ comparten un intervalo donde son no nulas, como se muestra en la Fig. 2.78(c) para $t = t_3$. En este caso, el producto de las funciones es nulo para $t < t_2 = 4$ y para $t > t_3$, siempre que t_3 sea menor que 5, cuando ocurre un solapamiento total entre $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$. Por lo tanto, en esta etapa se tiene que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_4^t \text{sen}(\pi\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{\pi}{1 + \pi^2} e^{4-t} - \frac{1}{1 + \pi^2} [\pi \cos(\pi t) - \text{sen}(\pi t)], \quad \text{para } t_2 = 4 < t < 5. \end{aligned}$$

Etapa 3: (*solapamiento total*: $5 < t < 6$). En este caso las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ se solapan totalmente, como se representa en la Fig. 2.78(d) para $t = t_4 = 5,5$. En este caso los extremos de integración quedan fijos y determinados por una de las funciones [x(τ) en este ejemplo]. Resulta entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_4^5 \text{sen}(\pi\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{(1 + e)\pi}{1 + \pi^2} e^{4-t}, \quad \text{para } 5 < t < 6. \end{aligned}$$

Etapa 4: (*solapamiento parcial por derecha*: $6 \leq t < 7$). En este intervalo de tiempo las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ nuevamente vuelven a solaparse parcialmente, pero sólo por derecha, como se muestra en la Fig. 2.78(e). En esta etapa el producto de las funciones es siempre cero para $t > 5$, lo que fija el extremo superior de integración. El límite inferior depende de la posición de la “función deslizante” $h(t - \tau)$, y en este ejemplo es $t - 2$. Por lo tanto, en este intervalo,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_{t-2}^5 \text{sen}(\pi\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{\pi}{1 + \pi^2} e^{t-5} + \frac{e^2}{1 + \pi^2} [\pi \cos(\pi t) + \text{sen}(\pi t)], \quad \text{para } 6 < t < 7. \end{aligned}$$

Etapa 5: (*sin solapamiento*: $7 \leq t$): Finalmente, para $t > 7$, las dos señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ no comparten ningún intervalo donde ambas sean distintas de cero, por lo que el producto (y el área) son nulos, como se representa en la Fig. 2.78(f).

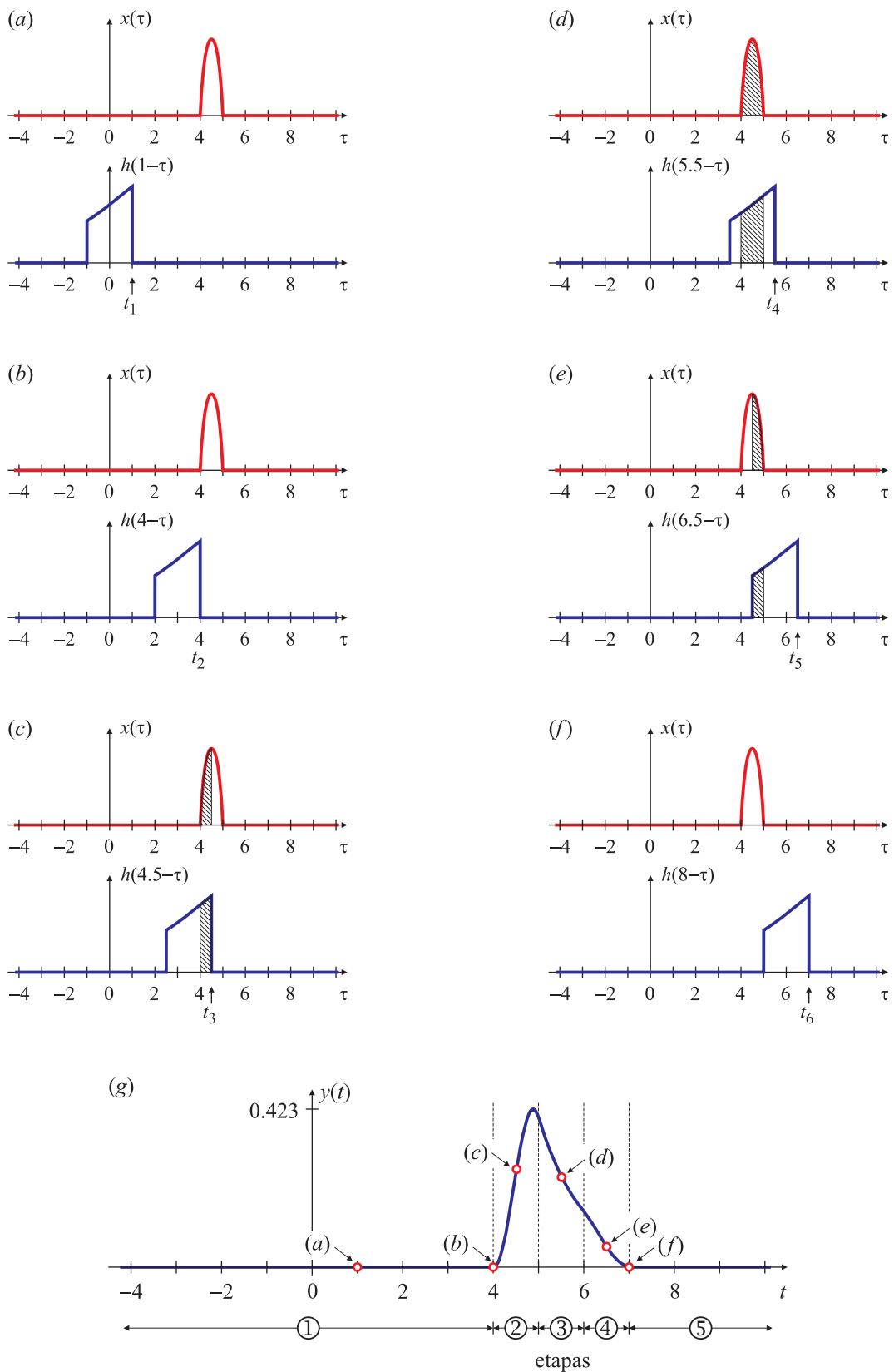


Fig. 2.78. Detalle de las 5 etapas en el cálculo de la convolución: sin solapamiento (a)-(b); solapamiento parcial por izquierda (c); solapamiento total (d); solapamiento parcial por derecha (e); sin solapamiento (f). Resultado de la convolución (g).

Resumiendo los resultados, se tiene que

$$y(t) = (x * h)(t) = \begin{cases} 0, & t < 4, \\ \frac{\pi}{1 + \pi^2} e^{4-t} - \frac{1}{1 + \pi^2} [\pi \cos(\pi t) - \sin(\pi t)], & 4 \leq t < 5, \\ \frac{(1+e)\pi}{1+\pi^2} e^{4-t}, & 5 \leq t < 6, \\ \frac{\pi}{1+\pi^2} e^{7-t} + \frac{e^{-2}}{1+\pi^2} [\pi \cos(\pi t) - \sin(\pi t)], & 6 \leq t < 7, \\ 0, & 7 \leq t, \end{cases}$$

cuya representación temporal se representa en la Fig. 2.78(g). \square

2.7.3. Forma alternativa de la integral de convolución

La interpretación gráfica descripta anteriormente no es sino una de las posibles interpretaciones de la convolución. La ecuación (2.125) también puede escribirse como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) x(t - \sigma) d\sigma, \quad (2.132)$$

que resulta de efectuar el cambio de variables $t - \tau \mapsto \sigma$. Si bien $d\sigma = -dt$, el signo de la integral no cambia porque también cambian los extremos de integración. Entonces en el cálculo de la convolución tanto $x(\tau)$ como $h(\tau)$ pueden ser reflejadas y desplazadas; la elección entre una u otra forma depende de cual de las dos sea más fácil de calcular.

En la Fig. 2.79 se muestra gráficamente que las dos formas (2.125) y (2.132) de calcular la integral de convolución son equivalentes. La serie de gráficos a la izquierda de la Fig. 2.79 muestran la evaluación de (2.125), mientras que las curvas de la derecha ilustran el cálculo de (2.132). Los pasos definidos anteriormente: reflexión, desplazamiento, multiplicación e integración se ilustran en la Fig. 2.79(b), (c), (d) y (e), respectivamente. Como se indica en la Fig. 2.79(e), la convolución de $x(\tau)$ y $h(\tau)$ es la misma, independientemente de qué función se elija para reflejar y desplazar.

EJEMPLO 2.56. Comparación de los métodos para el cálculo de la convolución

En este ejemplo se calcula la convolución $y(t) = (x * h)(t)$ entre las señales $x(t)$ y $h(t)$ definidas como

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t \leq \pi/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

utilizando las expresiones (2.125) y (2.132). Como $h(t)$ es de longitud infinita, el cálculo de la convolución entre estas señales sólo requiere 3 etapas: la etapa 1 (sin solapamiento), la etapa 2 (solapamiento parcial por izquierda), y la etapa 3 (solapamiento total); nunca ocurren las etapas 4 (solapamiento parcial por derecha) y 5 (sin solapamiento).

Aplicando (2.125), $y(t) = (x * h)(t)$ está dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \begin{cases} 0, & (\text{etapa 1}): t \leq 0, \\ \int_0^t \operatorname{sen} \tau e^{-(t-\tau)} d\tau, & (\text{etapa 2}): 0 \leq t < \pi/2, \\ \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \tau e^{-(t-\tau)} d\tau, & (\text{etapa 3}): \pi/2 \leq t. \end{cases} \quad (2.133)$$

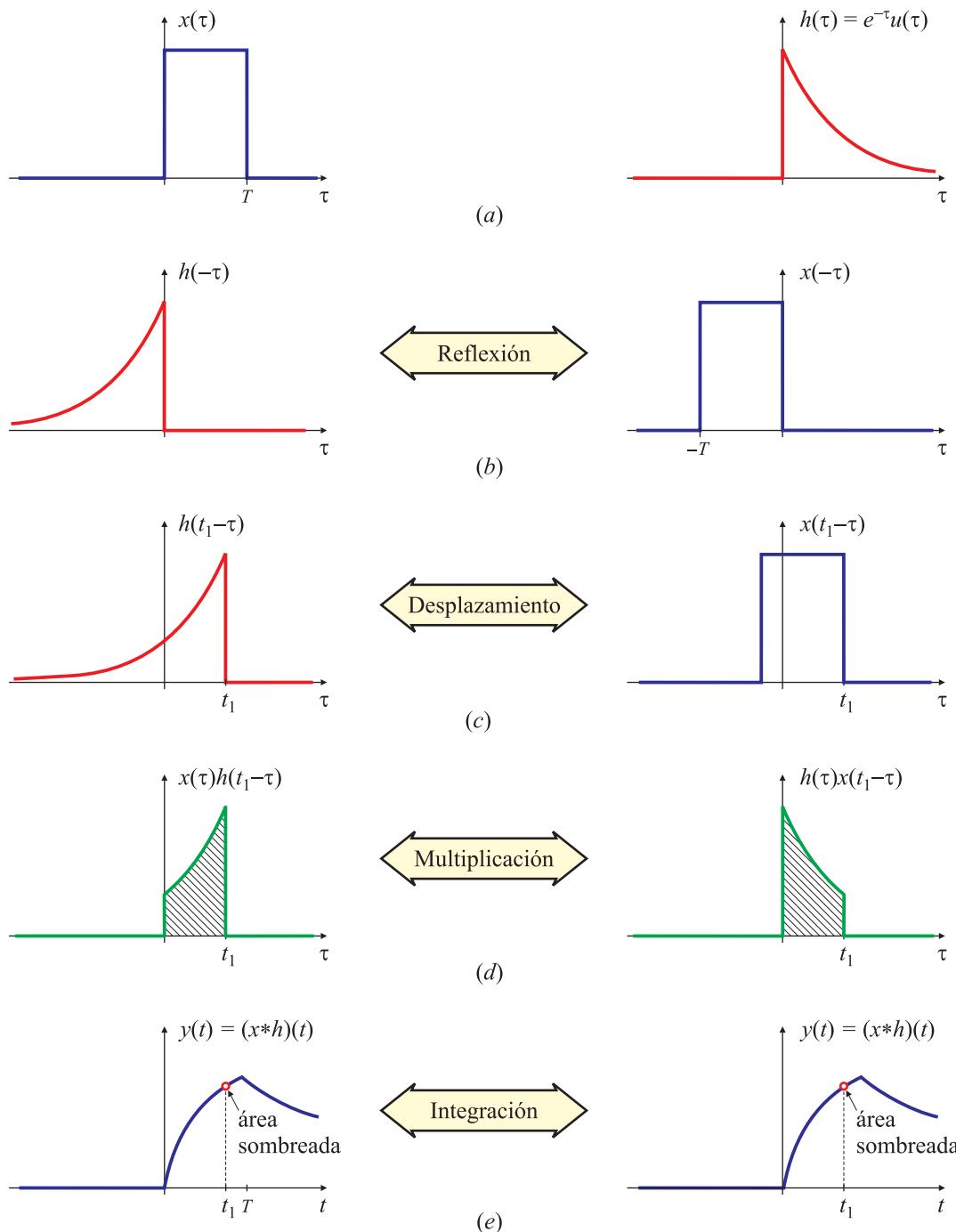


Fig. 2.79. Cálculo de la convolución utilizando las ecuaciones (2.125) o (2.132).

Los límites de la integral se determinan aplicando la regla enunciada en la Sección 2.7.2, y con la ayuda de la Fig. 2.80(a). Los valores extremos del argumento de la función $x(\tau)$ para los cuales es distinta de cero son 0 y $\pi/2$, respectivamente. Para la función $h(t - \tau) = e^{-(t-\tau)}$ el menor valor del argumento para el cual la función se anula es $\tau = -\infty$, y el mayor valor del argumento es $\tau = t$. Para definir los extremos de integración se toma el mayor valor entre los extremos inferiores; en cualquier caso, este límite es 0. El extremo superior de integración es el menor de los extremos superiores, y

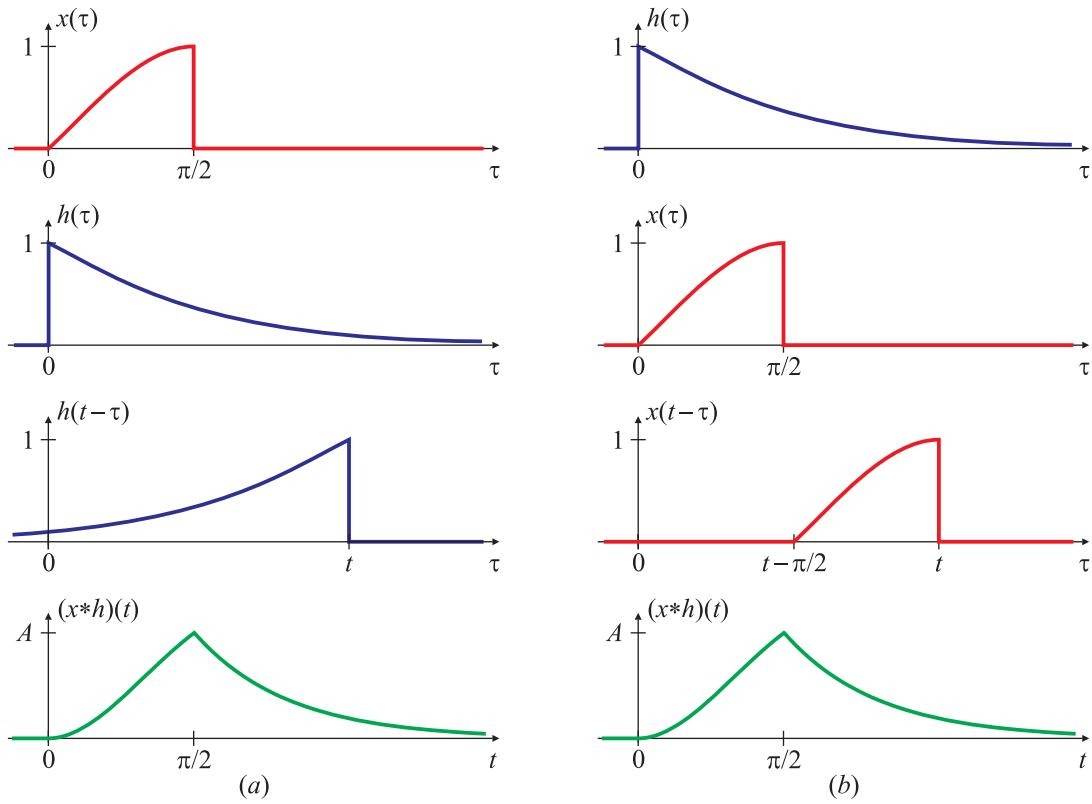


Fig. 2.80. Comparación del cálculo de la convolución del Ejemplo 2.56 utilizando la expresión (2.125) (a) o la ecuación (2.132) (b).

por lo tanto es una función de t . Para $0 \leq t \leq \pi/2$, el mínimo es t ; para $t \geq \pi/2$, el extremo de integración es $\pi/2$.

Si el cálculo de la convolución se realiza aplicando (2.132), se tiene que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & (\text{etapa 1}): t \leq 0, \\ \int_0^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau, & (\text{etapa 2}): 0 \leq t < \pi/2, \\ \int_{t-\pi/2}^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau, & (\text{etapa 3}): \pi/2 \leq t. \end{cases} \quad (2.134)$$

Los límites de integración en cada caso también pueden calcularse aplicando la regla de la Sección 2.7.2, u observando la representación gráfica de las funciones de la Fig. 2.80(b). En este caso, $h(\tau)$ es cero para $\tau < 0$, pero $x(t-\tau)$ se anula cuando $\tau < t - \pi/2$ o cuando $\tau > t$. Para el caso de solapamiento parcial por izquierda (etapa 2), el límite inferior de integración lo impone $h(\tau)$, y por lo tanto es $\tau = 0$. El límite superior lo impone $x(t-\tau)$, y entonces es $\tau = t$. En el caso de solapamiento total (etapa 3), ambos límites de integración quedan impuestos por $x(t-\tau)$, y son $\tau = t - \pi/2$ para el límite inferior, y $\tau = t$ para el límite superior.

Aunque la ecuación (2.134) que describe la salida $y(t)$ es diferente de (2.133), su evaluación da el mismo resultado:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t}), & 0 \leq t < \pi/2, \\ \frac{1}{2} e^{-t} (1 + e^{\pi/2}), & \pi/2 \leq t, \end{cases} \quad (2.135)$$

tal como se muestra en la Fig. 2.80, donde $A = (1 + e^{-\pi/2})/2$. \square

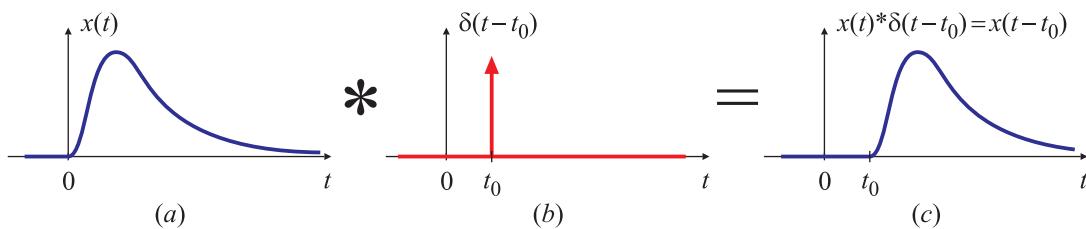


Fig. 2.81. Convolución de una función $x(t)$ con un impulso $\delta(t - t_0)$.

2.7.4. Convolución con impulsos

La integral de convolución más sencilla de evaluar es aquella en la cual alguna de las funciones intervenientes es un impulso. La convolución entre una función $x(t)$ y un impulso $\delta(t - t_0)$ representados en las Figs. 2.81(a) y (b), respectivamente, se puede calcular aplicando, por ejemplo, la ecuación (2.125),

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = x(t - t_0).$$

El paso del segundo al tercer miembro se explica por la Propiedad 3 del impulso, repetida aquí por comodidad,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \theta) x(\tau) d\tau = x(\theta).$$

Si, en cambio, se aplica la expresión (2.132), se tiene que

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta[(t - \tau) - t_0] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = x(t - t_0).$$

En definitiva, cualquiera de las dos expresiones muestra que la convolución de la función $x(t)$ con una función impulso resulta en desplazar $x(t)$, llevando el origen del eje de las abscisas al lugar donde está localizado el impulso, como se muestra en la Figs. 2.81(c). Como se estudiará más adelante, esta propiedad simplifica mucho el análisis de problemas más complicados.

Es importante notar la diferencia entre el *producto* y la *convolución* entre una función $x(t)$ y un impulso $\delta(t - t_0)$. El primer caso es la conocida propiedad de colador, que da como resultado otro impulso escalado por el valor de la función en el lugar donde está aplicado el impulso:

$$x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0),$$

El segundo caso da como resultado la misma función, pero desplazada al lugar donde está aplicado el impulso:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0).$$

EJEMPLO 2.57. Convolución con un par de impulsos

Sea $x(t)$ la función pulso que se observa en la Fig. 2.82(a) y $h(t)$ la función formada por un par de

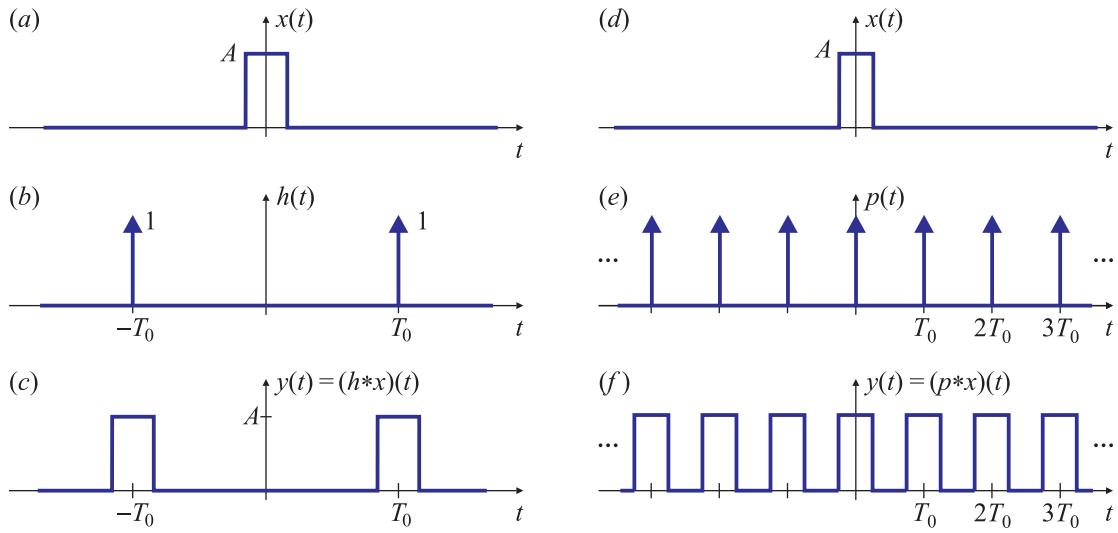


Fig. 2.82. Convolución de un pulso con dos impulsos (a)-(c) y con un tren de impulsos (d)-(f).

impulsos que se muestra en la Fig. 2.82(b). Para estas funciones, la ecuación (2.125) toma la forma particular

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)] x(t - \tau) d\tau,$$

y aplicando la Propiedad 3 del impulso se encuentra que

$$y(t) = x(t - T) + x(t + T),$$

cuya gráfica se representa en la Fig. 2.82(c). □

EJEMPLO 2.58. Convolución con un tren de impulsos

El pulso rectangular

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

de la Fig. 2.82(d) se convoluciona con el tren de impulsos

$$p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0)$$

que se grafica en la Fig. 2.82(e). El resultado de la convolución es

$$y(t) = (x * p)(t) = x(t) * \sum_n \delta(t - nT_0) = \sum_n x(t - nT_0).$$

Esta expresión, que se representa en la Fig. 2.82(f), muestra que al convolucionar el pulso rectangular con el tren de impulsos, el primero queda replicado donde se localizan cada uno de los impulsos. □

El ejemplo anterior muestra una manera posible de obtener una función periódica a partir de una señal aperiódica. Si se observa con atención, la señal $y(t)$ del Ejemplo 2.58 es en realidad una señal periódica. Utilizando la notación de la Sección 2.1, se tiene que

$$\tilde{x}(t) = (x * p)(t).$$

Esta observación es de gran utilidad para facilitar el cálculo de algunas series de Fourier.

2.7.5. Teorema de convolución temporal

Possiblemente, una de las herramientas más poderosas en el análisis científico es la relación entre la convolución de dos señales y su transformada de Fourier. Esta propiedad, conocida como *teorema de convolución*, permite calcular la transformada de la convolución temporal de dos señales como el producto en el dominio frecuencial de sus transformadas. Esto es, si $h(t)$ tiene transformada de Fourier $H(f)$ y $x(t)$ tiene transformada $X(f)$, entonces la convolución $(x * h)(t)$ tiene transformada $X(f)H(f)$. El par transformado correspondiente es

$$(x * h)(t) \iff X(f)H(f) \quad (2.136)$$

Para establecer este resultado, se transforman ambos lados de la ecuación (2.125),

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi f t} dt. \quad (2.137)$$

Si las funciones $x(\cdot)$ y $h(\cdot)$ cumplen con una serie de requisitos (continuidad uniforme, etc.) que en general son satisfechos por las señales usuales en la teoría de sistemas, se pueden intercambiar el orden de integración, y entonces

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt \right] d\tau. \quad (2.138)$$

Sustituyendo $\sigma = t - \tau$, el término entre corchetes se puede escribir como

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{-j2\pi f(\sigma+t)} d\sigma = e^{-j2\pi f \tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{-j2\pi f \sigma} d\sigma = e^{-j2\pi f \tau} H(f).$$

Entonces, la ecuación (2.138) resulta

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} H(f) d\tau = H(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau,$$

donde $H(f)$ se puede extraer afuera de la integral porque no depende de la variable de integración τ . Finalmente, la integral de este último término es la ecuación de análisis, por lo que

$$\mathcal{F}\{(x * h)(t)\} = Y(f) = H(f)X(f)$$

El par transformado (2.136) facilita enormemente el cálculo de muchas transformadas.

EJEMPLO 2.59. Transformada de un pulso trapezoidal

En el Ejemplo 2.54 se encontró que la convolución de dos pulsos rectangulares resulta en un pulso trapezoidal, como se muestra en la Fig. 2.76(i); en este ejemplo se estudia la transformada de un pulso trapezoidal similar. Es trivial demostrar, siguiendo los mismos desarrollos del Ejemplo 2.54, que la convolución de los pulsos rectangulares $x(t)$ y $h(t)$ definidos como

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| < T_0/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} B, & |t| < T_1/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que se muestran en las Figs. 2.83(a) y (b), da como resultado el pulso trapezoidal de la Fig. 2.83(c). Para fijar ideas, se considera que el pulso rectangular $x(t)$ se aplica a la entrada de un sistema lineal

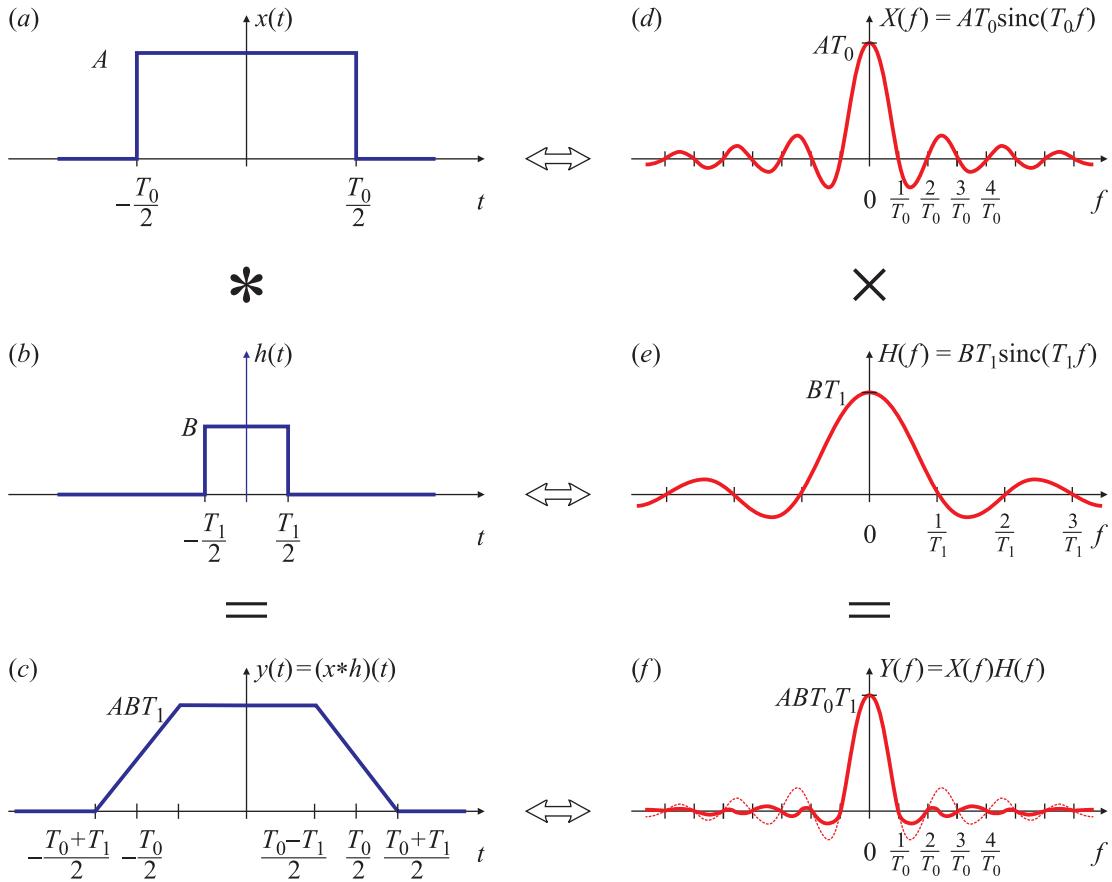


Fig. 2.83. Transformada de Fourier de un pulso trapezoidal.

e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h(t)$. Como $x(t)$ y $h(t)$ son pulsos rectangulares, sus transformadas de Fourier, representadas en las Figs. 2.83(d) y (e), son bien conocidas:

$$X(f) = AT_0 \text{sinc}(T_0 f) \quad \text{y} \quad H(f) = BT_1 \text{sinc}(T_1 f).$$

En este ejemplo, se ha supuesto que $T_0 \gg T_1$, y por lo tanto $1/T_0 \ll 1/T_1$, es decir que el espectro $X(f)$ está mucho más concentrado que el espectro $H(f)$. Como $H(f)$ “pesa” más las bajas frecuencias (las próximas a $f = 0$) que las altas actúa como un filtro pasabajos; por lo tanto, la salida $y(t)$ puede interpretarse que es un pulso rectangular filtrado con un filtro pasabajos con respuesta impulsiva $h(t)$ y respuesta en frecuencia $H(f)$. La expresión de la salida $y(t)$ se calcula como la convolución entre $x(t)$ y $h(t)$:

$$y(t) = (x * h)(t),$$

y su espectro $Y(f)$ se puede calcular por definición, o mucho más fácilmente aplicando el teorema de convolución temporal, de acuerdo con el cual

$$Y(f) = X(f)H(f).$$

En consecuencia,

$$Y(f) = ABT_0 T_1 \text{sinc}(T_0 f) \text{sinc}(T_1 f). \quad (2.139)$$

Si, como se dijo más arriba, $T_0 \gg T_1$, el espectro $Y(f)$ “se parece” a $X(f)$, pero con los lóbulos laterales más atenuados, por el efecto pasabajos de $H(f)$. En otras palabras, el espectro de $Y(f)$

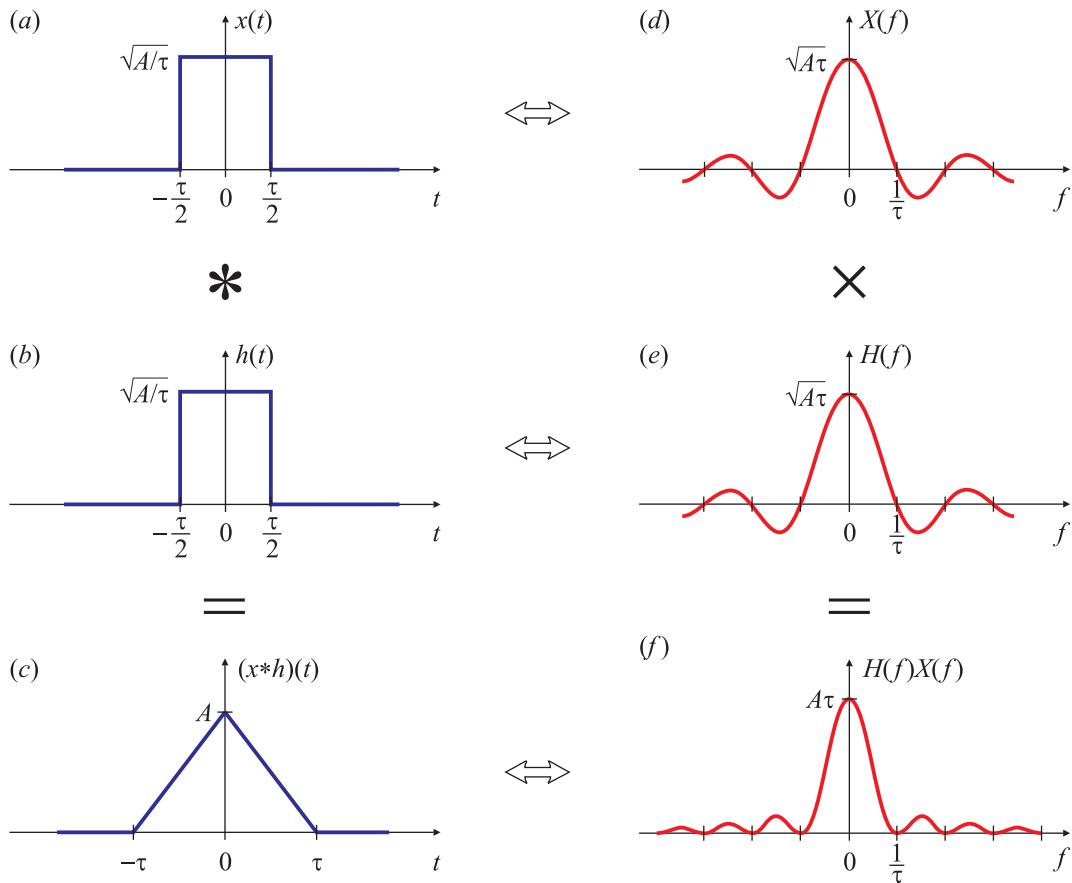


Fig. 2.84. Ejemplo gráfico del teorema de convolución.

decrece mucho más rápidamente que el de $X(f)$ para valores crecientes de f : mientras $X(f)$ decrece según $1/f$, $Y(f)$ lo hace según $1/f^2$, como indica (2.139). En la Fig. 2.83(f) se comparan ambos espectros, y se observa que el de $Y(f)$ queda más “concentrado” que el de $X(f)$. \square

Este ejemplo se puede extender para calcular la transformada de Fourier de un pulso triangular.

EJEMPLO 2.60. Transformada de un pulso triangular

Si los pulsos rectangulares del Ejemplo 2.54 tienen la misma forma, como es el caso de los pulsos $x(t)$ y $h(t)$ ilustrados en las Fig. 2.84(a) y (b), se puede demostrar que la convolución de estos dos pulsos rectangulares resulta en el pulso triangular representado en la Fig. 2.84(e); los detalles del cálculo se estudian en el Ejercicio 24. La transformada de Fourier de los pulsos rectangulares es $X(f) = H(f) = \sqrt{A\tau} \operatorname{sinc}(\tau f)$, como se muestra en las Figs. 2.84(d) y (e). El teorema de convolución temporal establece que la transformada de la convolución temporal es el producto de las transformadas. Por lo tanto, si $y(t) = (x * h)(t)$, se tiene que

$$Y(f) = X(f)H(f) = A\tau \operatorname{sinc}^2(\tau f)$$

representada en la Fig. 2.84(f). Este resultado coincide con el calculado en el Ejemplo 2.45, donde se utilizó la propiedad de derivación para calcular la transformada del pulso triangular. \square

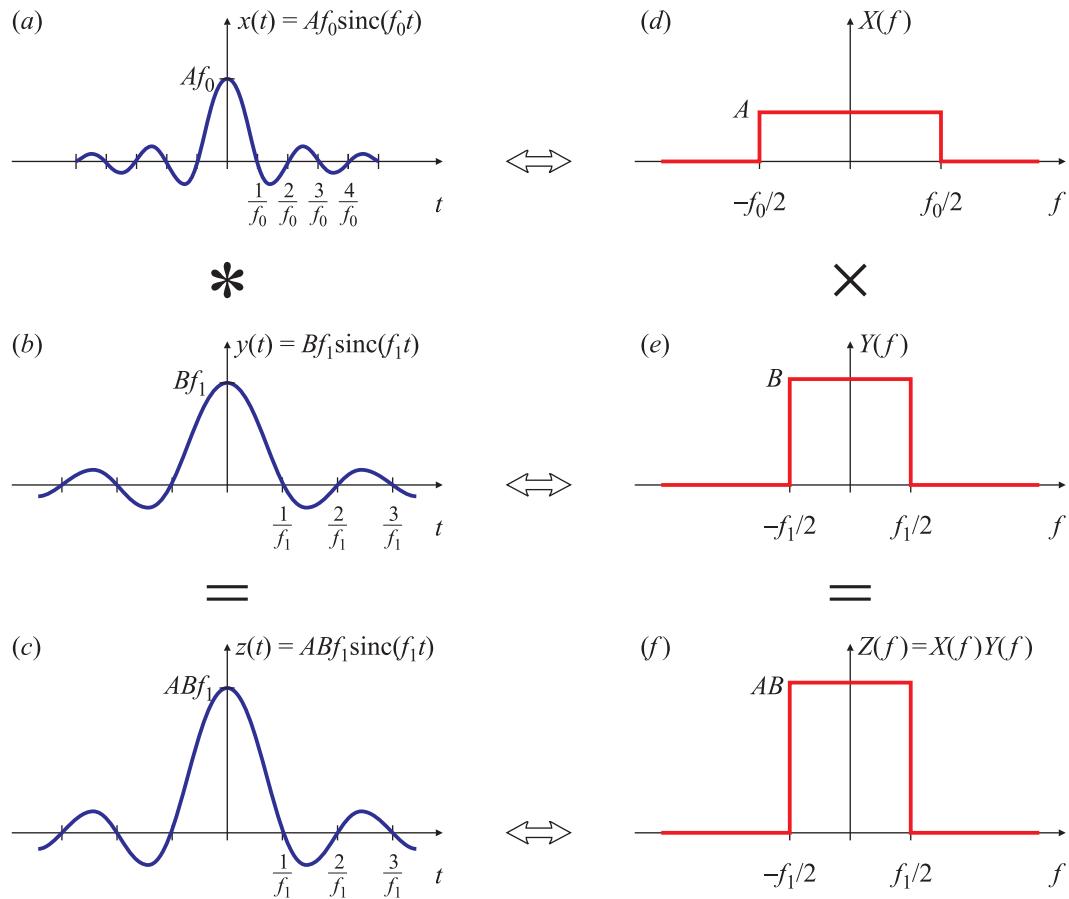


Fig. 2.85. Convolución de dos $\text{sinc}(\cdot)$ utilizando el teorema de convolución temporal.

Este teorema también puede utilizarse con ventaja para calcular algunas convoluciones que serían difíciles de resolver en el dominio tiempo, como se muestra a continuación.

EJEMPLO 2.61. Convolución de dos $\text{sinc}(\cdot)$

Se desea calcular la convolución $z(t)$ entre las señales

$$x(t) = Af_0 \text{sinc}(f_0 t) \quad \text{e} \quad y(t) = Bf_1 \text{sinc}(f_1 t).$$

que se muestran en la Fig. 2.85(a) y (b), respectivamente, donde sin pérdida de generalidad se supone que $f_0 > f_1$. Este problema puede resolverse por definición en el dominio tiempo, calculando

$$z(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} Af_0 \text{sinc}(f_0 \tau)Bf_1 \text{sinc}[f_1(t - \tau)]d\tau.$$

Sin embargo, su resolución es mucho más sencilla si se aplica el teorema de convolución temporal: la transformada de la convolución temporal es el producto de las transformadas. Sabiendo que las transformadas de $x(t)$ y de $y(t)$ son

$$\begin{aligned} X(f) &= A[u(f + f_0/2) - u(f - f_0/2)], \\ Y(f) &= B[u(f + f_1/2) - u(f - f_1/2)], \end{aligned}$$

representadas en la Fig. 2.85(d) y (e), respectivamente se tiene que el producto de las transformadas es

$$Z(f) = X(f)Y(f) = AB[u(f + f_1/2) - u(f - f_1/2)] = AY(f),$$

como se muestra en la Fig. 2.85(f). Por lo tanto, la antitransformada $z(t) = (x * y)(t)$ resulta

$$\begin{aligned} z(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{X(f)Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{AY(f)\} = Ay(t) \\ &= ABf_1 \text{sinc}(f_1 t) \end{aligned}$$

como se representa en la Fig. 2.85(c). En otras palabras, la convolución de dos sincs da como resultado una versión escalada del sinc con el lóbulo principal más ancho. \square

El teorema de convolución temporal también puede utilizarse para probar más fácilmente algunas propiedades, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.62. Propiedad de integración a partir del teorema de convolución temporal

En la Sección 2.6.14 se calculó la transformada de Fourier de

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

en función de la transformada $X(f)$ de $x(t)$. Esta propiedad se puede demostrar fácilmente aplicando el teorema de convolución temporal. La convolución de $x(t)$ con un escalón $u(t)$ es

$$(x * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau,$$

donde la segunda igualdad resulta de considerar que $u(t - \tau) = 0$ para $\tau > t$. Transformando término a término se tiene que

$$X(f)U(f) = \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} \quad (2.140)$$

donde $U(f)$ es la transformada de Fourier del escalón, que fue calculada en el Ejemplo 2.43, y está dada por (2.99):

$$U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f).$$

Reemplazando en (2.140) se encuentra que

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f),$$

que coincide con el par transformado calculado en (2.110). \square

Uno de los aportes más significativos de la teoría de distribuciones es que el producto de una función continua y un impulso está bien definido: es la propiedad de colador (Sección 2.4, Propiedad 3). Por lo tanto, si $x(t)$ es una función continua en $t = t_0$, entonces,

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0).$$

Es decir, que el resultado del producto de una función continua con un impulso es un impulso de área igual al valor de la función continua evaluada donde ocurre el impulso, como se muestra en la Fig. 2.23. Este resultado, junto con el teorema de convolución, ayuda a obtener muchos pares transformados de Fourier: el cambio de una convolución en el dominio temporal por un producto en el dominio frecuencial permite resolver problemas arduos de manera casi trivial.

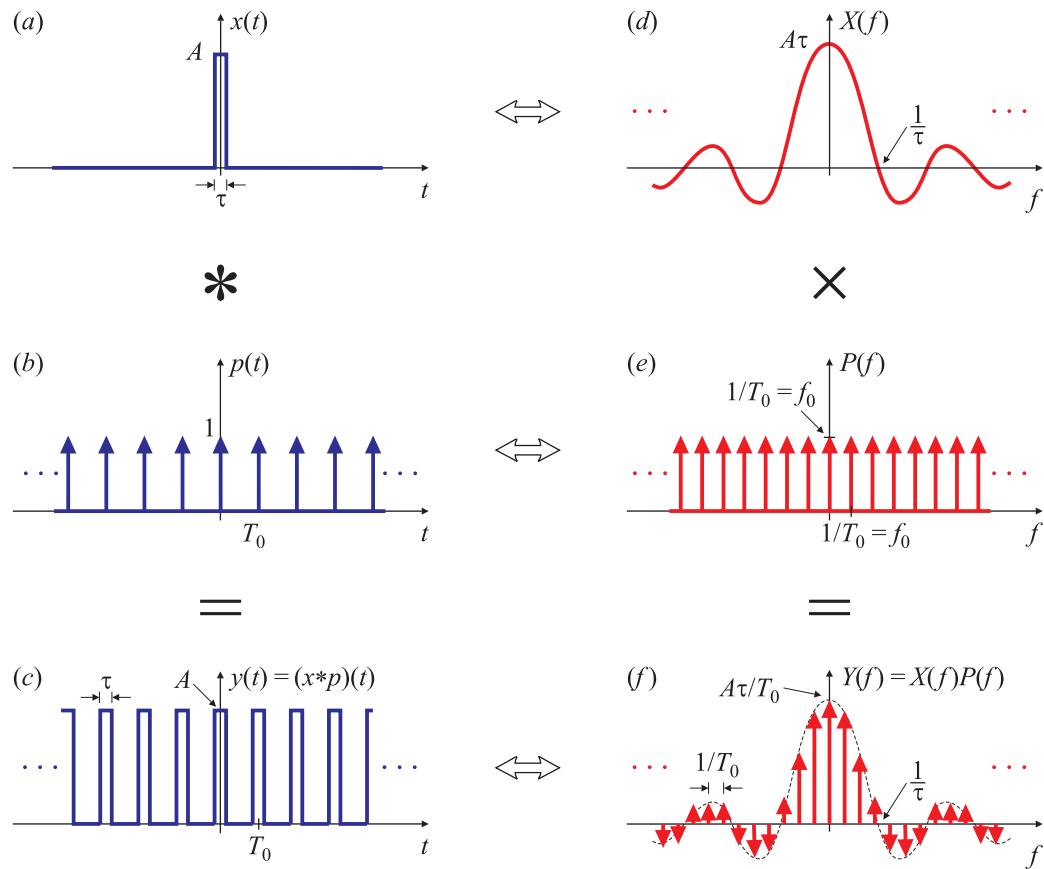


Fig. 2.86. Ejemplo de aplicación del teorema de convolución temporal.

EJEMPLO 2.63. Transformada de un tren de pulsos

En la Fig. 2.86(a) se muestra un pulso rectangular $x(t)$ de ancho τ y altura A y en la Fig. 2.86(b) un tren infinito de impulsos $p(t)$. La convolución de estas dos funciones es el tren infinito de pulsos que se muestra en la Fig. 2.86(c). Para obtener la transformada de Fourier de esta secuencia infinita de pulsos, se aplica el teorema de convolución temporal. La transformada de Fourier del pulso $x(t)$ es $X(f) = A\tau \text{sinc}(\tau f)$ que se muestra en la Fig. 2.86(d) y la transformada del tren de impulsos $p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0)$ es $P(f) = f_0 \sum_k \delta(f - kf_0)$, que se representa en la Fig. 2.86(e). La señal que resulta de convolucionar $x(t)$ con $p(t)$ es la señal (periódica)

$$\tilde{x}(t) = (x * p)(t) = x(t) * \sum_n \delta(t - nT_0) = \sum_n x(t - nT_0), \quad (2.141)$$

como se estudió en el Ejemplo 2.58. La transformada de esta función se puede obtener aplicando el teorema de convolución temporal, que establece que la transformada de $\tilde{x}(t)$ es el producto de las transformadas de $x(t)$ y de $p(t)$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} &= \mathcal{F}\{x(t) * p(t)\} = X(f)P(f) \\ &= A\tau \text{sinc}(\tau f) \frac{1}{T_0} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \\ &= A \frac{\tau}{T_0} \sum_k \text{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0}k\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right). \end{aligned} \quad (2.142)$$

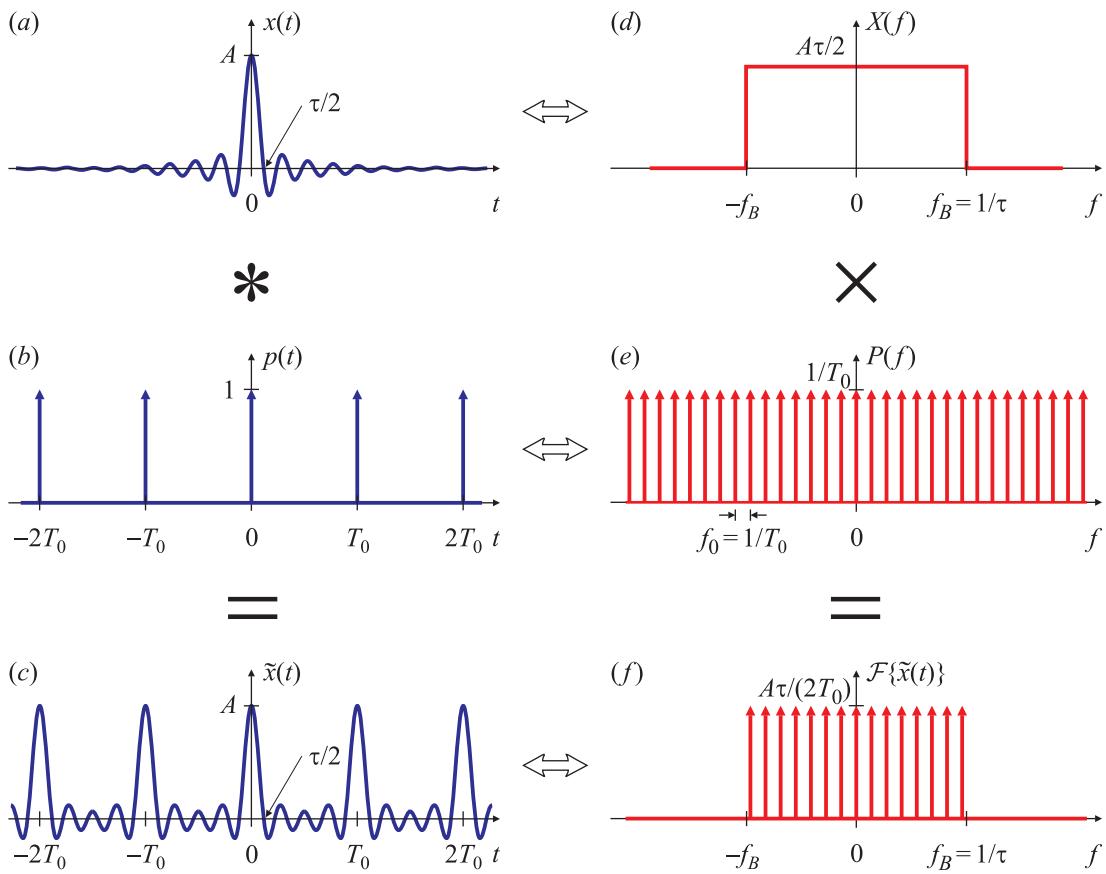


Fig. 2.87. Estudio del sinc periódico y su espectro aplicando la propiedad de convolución temporal.

Esta transformada se muestra en la Fig. 2.86(f). Resulta entonces que la transformada de Fourier de un tren de pulsos es una sucesión de impulsos, cuya amplitud está pesada o modulada por una función $A\tau \text{sinc}(\tau f)$. En la última igualdad de (2.141) se utiliza la propiedad de *convolución* de una función con un impulso, mientras que en la última igualdad de (2.142) se aplica la propiedad del *producto* de una función con un impulso (propiedad de colador). \square

En el siguiente ejemplo se estudia la transformada de una señal un poco más complicada que las estudiadas hasta ahora: la repetición periódica de un sinc.

EJEMPLO 2.64. Transformada de un “sinc” periódico

Dada la señal $x(t) = A \text{sinc}(\pi t/2)$, que se muestra en la Fig. 2.87(a), su repetición periódica cada T_0 segundos, con $T_0 > \tau$, resulta en la señal

$$\tilde{x}(t) = \sum_r x(t - rT_0) = \sum_r A \text{sinc}\left[\frac{\pi}{2}(t - rT_0)\right]$$

que se representa en la Fig. 2.87(c). El espectro de $x(t)$ se grafica en la Fig. 2.87(d), que ha sido calculado en el Ejemplo 2.13, y está dado por

$$X(f) = \frac{A\tau}{2} [u(f + 1/\tau) - u(f - 1/\tau)].$$

Para calcular el espectro del sinc periódico $\tilde{x}(t)$ se puede aplicar el teorema de convolución temporal, representado pictóricamente en la Fig. 2.87. Como se ha estudiado sobre el final de la Sección 2.7.4, la señal periódica $\tilde{x}(t)$ [Fig. 2.87(c)] puede escribirse como la convolución temporal de $x(t)$ [Fig. 2.87(a)] con el tren de impulsos $p(t) = \sum_r \delta(t - rT_0)$ [Fig. 2.87(b)], es decir

$$\tilde{x}(t) = (x * p)(t).$$

La transformada $P(f)$ del tren de impulsos $p(t)$ se ha calculado en el Ejemplo 2.20, y es $P(f) = (1/T_0) \sum_k \delta(f - k/T_0)$, como se muestra en la Fig. 2.87(e). El teorema de convolución temporal establece que

$$\tilde{x}(t) = (x * p)(t) \iff \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = X(f) \times P(f)$$

y por lo tanto

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = X(f) \times P(f) = \frac{A\tau}{2T_0} \sum_{k=-k_0}^{k_0} \delta(f - k/T_0)$$

donde $k_0 = \lfloor T_0/\tau \rfloor$, siendo $\lfloor \cdot \rfloor$ la función “piso”: $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor que x . La transformada $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$ se representa en la Fig. 2.87(f). Este espectro está formado por un número finito de impulsos, que ocupan la banda limitada por $\pm f_B = \pm 1/\tau$, y que están separados entre sí una cantidad igual a la frecuencia $f_0 = 1/T_0$ de la señal. \square

Los Ejemplos 2.58, 2.63 y 2.64 muestran una propiedad fundamental de los espectros de señales periódicas. Como la señal periódica $\tilde{x}(t)$ se puede pensar como la convolución de un tren de impulsos $p(t)$ y una señal aperiódica $x(t)$ formada por un período de $\tilde{x}(t)$, el teorema de la convolución en tiempo establece que la transformada $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$ de $\tilde{x}(t)$ es el producto de las transformadas de $x(t)$ y de $p(t)$. En particular, como el espectro de $p(t)$ también es un tren de impulsos (en frecuencia), el espectro de la señal periódica estará formado por impulsos, modulados en amplitud por la transformada de la señal aperiódica $x(t)$, como se sintetiza en el cuadro siguiente.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \underbrace{x(t)}_{x(t)=\begin{cases} \tilde{x}(t), & |t| \leq T_0/2, \\ 0, & \text{cc.} \end{cases}} * \underbrace{p(t)}_{p(t)=\sum_n \delta(t-nT_0)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t} \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} &= X(f) \times P(f) = \sum_k \frac{1}{T_0} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0) \\ & &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_0 X(kf_0) \delta(f - kf_0) \\ & &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \end{aligned}$$

Esto es otro punto de vista de los resultados presentados en la Sección 2.5.

2.7.5.1. Respuesta en frecuencia de sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Una de las propiedades más útiles de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLIT) es que cuando son excitados con entradas exponenciales complejas de la forma $e^{j2\pi f_0 t}$ su

salida también es una exponencial compleja, sólo que con amplitud y fase distintas a las de la señal de entrada. Como las formas de onda de entrada y salida son las mismas, se dice que las exponenciales complejas son *autofunciones* para los sistemas lineales.

Sea \mathcal{S} un sistema lineal e invariante en el tiempo caracterizado por su respuesta impulsiva $h(t)$. Si la señal de entrada es una exponencial compleja $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$, la salida es

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

donde $x(t - \tau) = Ae^{j2\pi f_0(t-\tau)}$. Entonces,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) Ae^{j2\pi f_0(t-\tau)} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \right) Ae^{j2\pi f_0 t}$$

donde el término entre paréntesis es la ecuación de análisis evaluada en $f = f_0$, es decir $H(f)|_{f=f_0}$. Finalmente, se tiene que

$$y(t) = H(f)|_{f=f_0} Ae^{j2\pi f_0 t} = H(f)|_{f=f_0} x(t). \quad (2.143)$$

La última expresión muestra que la salida del sistema es la entrada escalada por el número complejo $H(f)|_{f=f_0}$. En estos casos, la transformada de Fourier $H(f)$ de la respuesta impulsiva $h(t)$ se denomina *respuesta en frecuencia* del sistema \mathcal{S} .

El mismo resultado puede obtenerse aplicando el teorema de convolución temporal. Si $H(f)$ es la transformada de Fourier de la respuesta impulsiva $h(t)$, la transformada de la entrada $x(t) = Ae^{j\pi f_0 t}$ es $X(f) = A\delta(f - f_0)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Y(f) &= H(f)X(f) = H(f)A\delta(f - f_0) \\ &= H(f)|_{f=f_0} A\delta(f - f_0), \end{aligned}$$

donde la última igualdad resulta de aplicar la propiedad de colador del impulso. Como $H(f)|_{f=f_0}$ es un número complejo, la antitransformada de $Y(f)$ es inmediata:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = H(f)|_{f=f_0} \mathcal{F}^{-1}\{A\delta(f - f_0)\} \\ &= H(f)|_{f=f_0} Ae^{j2\pi f_0 t} \\ &= H(f)|_{f=f_0} x(t), \end{aligned}$$

lo que facilita enormemente el cálculo de la respuesta del sistema cuando se lo excita con este tipo de señales, pues lo único que debe calcularse es el número complejo $H(f)|_{f=f_0}$.

La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo ante una excitación de tipo senoidal es consecuencia directa de estos resultados. Si la entrada $x(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \\ &= A \frac{1}{2} \left(e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} \right) \\ &= \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} A e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t}, \end{aligned}$$

la propiedad de linealidad, junto con el resultado (2.143) indica que

$$y(t) = H(f)|_{f=f_0} \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + H(f)|_{f=(-f_0)} \frac{1}{2} A e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t}. \quad (2.144)$$

Esta expresión puede simplificarse todavía más notando que, si $h(t)$ es real,

$$H(f)|_{f=(-f_0)} = H^*(f)|_{f=f_0},$$

como resulta evidente de aplicar la definición:

$$\begin{aligned} H^*(f_0) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi f_0 t} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t)(e^{-j2\pi f_0 t})^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j2\pi f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi(-f_0)t} dt = H(-f_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión (2.144) puede escribirse como

$$\begin{aligned} y(t) &= H(f)|_{f=f_0} \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + H^*(f)|_{f=f_0} \frac{1}{2} A e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= H(f)|_{f=f_0} \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \left(H(f)|_{f=f_0} \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} \right)^* \\ &= \operatorname{Re} \left\{ H(f)|_{f=f_0} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Notando

$$H(f)|_{f=f_0} = |H(f_0)| e^{j \arg[H(f_0)]}$$

donde

$$|H(f_0)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{H(f_0)\}^2 + \operatorname{Im}\{H(f_0)\}^2}, \quad \arg[H(f_0)] = \arctan \left[\frac{\operatorname{Im}\{H(f_0)\}}{\operatorname{Re}\{H(f_0)\}} \right],$$

la ecuación (2.145) resulta

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re} \left\{ |H(f_0)| e^{j \arg[H(f_0)]} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} \right\} \\ &= |H(f_0)| A \cos(2\pi f_0 t + \phi + \arg[H(f_0)]). \end{aligned}$$

Esta expresión pone de manifiesto el efecto del sistema en la respuesta:

$$y(t) = \underbrace{|H(f_0)|}_\text{cambio en la magnitud} A \cos(2\pi f_0 t + \underbrace{\phi + \arg[H(f_0)]}_\text{cambio en la fase})$$

La salida del sistema es la misma entrada escalada en magnitud por el módulo de la respuesta en frecuencia $|H(f_0)|$, y desfasada por el argumento de la respuesta en frecuencia, ambos evaluados a la frecuencia f_0 de la excitación.

A veces resulta más conveniente expresar el desfasaje introducido por el sistema como un *retardo de tiempo*, lo que puede lograrse escribiendo

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(f_0)| A \cos(2\pi f_0 t + \phi + \arg[H(f_0)]) \\ &= |H(f_0)| A \cos[2\pi f_0 (t + \arg[H(f_0)]/(2\pi f_0)) + \phi] \\ &= H(f_0) |A \cos[2\pi f_0 (t - \Delta T) + \phi]|, \end{aligned}$$

donde

$$\Delta T = -\frac{\arg[H(f_0)]}{2\pi f_0}$$

es el retardo de tiempo que sufre la señal al atravesar el sistema. Este retardo se conoce como *retardo de fase*, y tiene sentido solamente para señales sinusoidales. Para señales más complejas, el *retardo de grupo* es mucho más útil.

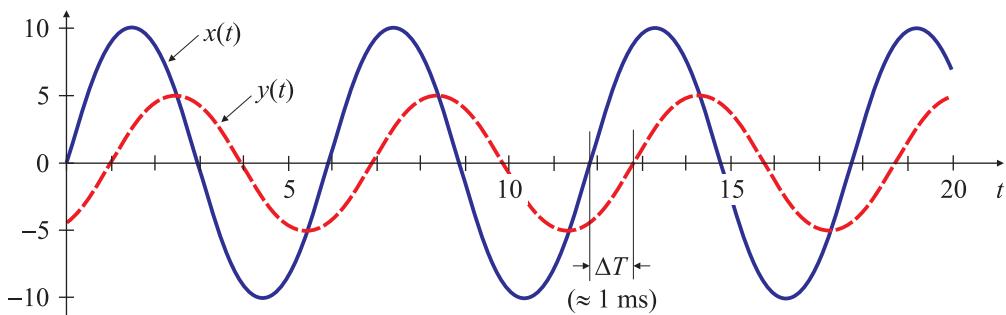


Fig. 2.88. Señales de entrada $x(t)$ y de salida $y(t)$ del sistema con respuesta impulsiva $h(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t)$.

EJEMPLO 2.65. Respuesta de un SLIT excitados por una entrada senoidal

Sea \mathcal{S} un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h(t) = \beta e^{-\alpha t} u(t)$ y $\alpha > 0$, excitado con una entrada $x(t) = A \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \gamma)$. En el Ejemplo 2.5 (página 76) se obtuvo que el módulo y la fase de $H(f) = |H(f)|e^{j\arg\{H(f)\}}$ son

$$|H(f)| = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}, \quad \arg[H(f)] = -\arctan\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right).$$

La salida $y(t)$ del sistema ante la entrada $x(t)$ es entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(f_0)| A \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \gamma + \arg[H(f_0)]) \\ &= \frac{\beta A}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f_0)^2}} \operatorname{sen}\left[2\pi f_0 t + \gamma - \arctan\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right], \end{aligned}$$

pues $\operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \gamma) = \cos(2\pi f_0 t + \gamma - \pi/2)$.

En particular, el SLIT caracterizado por $h(t)$ es un filtro pasabajos de primer orden tipo Butterworth, con frecuencia de corte en $f_c = \alpha/(2\pi)$ Hz y ganancia unitaria en la banda de paso si $\beta = \alpha$. Si la frecuencia de corte del filtro es $f_c = \alpha/(2\pi) = 100$ Hz, y la entrada $x(t)$ es

$$x(t) = 10 \operatorname{sen}(2\pi 170t),$$

es decir, tiene frecuencia $f_0 = 170$ Hz, amplitud $A = 10$ y fase $\phi = 0$, el módulo y la fase de $H(f)$ evaluados a la frecuencia de la señal de entrada son

$$\begin{aligned} |H(f_0)| &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}} = \frac{2\pi 100}{\sqrt{(2\pi 100)^2 + (2\pi 170)^2}} = \frac{10}{\sqrt{389}} \approx 0,5, \\ \arg[H(f_0)] &= -\arctan\left(\frac{2\pi f_0}{\alpha}\right) = -\arctan\left(\frac{2\pi 170}{2\pi 100}\right) = -1,04 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la salida $y(t)$ puede escribirse como

$$y(t) \approx 0,5 \times 10 \times \operatorname{sen}(2\pi 170t - 1,04).$$

El retardo de tiempo entre la entrada y la salida es

$$\Delta T = -\frac{\arg[H(f_0)]}{2\pi f_0} = \frac{1,04}{2\pi 170} \approx 0,97 \text{ ms},$$

de manera que la salida también puede expresarse como

$$y(t) \approx 5 \operatorname{sen}[2\pi 170(t - 0,97 \times 10^{-3})]. \quad (2.146)$$

En la Fig. 2.88 se muestran la entrada $x(t) = 10 \operatorname{sen}(2\pi 170t)$ y la salida del sistema $y(t)$ en función del tiempo obtenidas por simulación numérica: se comprueba que la amplitud y el desfasaje de la señal de salida coinciden con los valores indicados en (2.146). \square

2.7.6. Teorema de convolución frecuencial o de ventaneo

Teniendo en cuenta la propiedad de dualidad, es de esperar que una convolución de funciones en el dominio de la frecuencia se corresponda con una multiplicación de las anti-transformadas en el dominio temporal. La transformada de Fourier del producto $x(t)w(t)$ es igual a la convolución entre las transformadas $X(f)$ y $W(f)$. El par transformado de Fourier es

$$x(t)w(t) \iff (X * W)(f),$$

donde

$$(X * W)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma)W(f - \sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} X(f - \sigma)W(\sigma) d\sigma.$$

En caso de utilizarse las transformadas que dependen de la variable frecuencia angular Ω , la convolución en frecuencia se calcula como

$$(X * W)(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)W(\Omega - \phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega - \phi)W(\phi) d\phi.$$

La derivación del teorema de convolución frecuencial es similar a la del teorema de convolución temporal; también puede obtenerse en base al teorema de convolución temporal y la propiedad de dualidad.

Una de las aplicaciones clásicas del teorema de convolución frecuencial es en el análisis de las señales *moduladas en amplitud*, una de las técnicas de modulación más antiguas. Dada una señal *moduladora* $x_m(t)$ (el mensaje a transmitir), de amplitud acotada, $|x_m(t)| \leq A_m$ y en general con un espectro $X_m(f)$ con contenido espectral concentrado en $|f| < f_c$, como se representa en las Fig. 2.89(a) y (e), respectivamente, y una señal *portadora*, habitualmente una señal senoidal de frecuencia f_p

$$x_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t),$$

cuyo espectro es

$$X_p(f) = \frac{1}{2}A_p \delta(f - f_p) + \frac{1}{2}A_p \delta(f + f_p),$$

como se muestra en las Fig. 2.89(c) y (g), respectivamente, la señal *modulada en amplitud* se define como

$$x_{MA}(t) = [1 + k_a x_m(t)] x_p(t),$$

donde k_a es la *sensibilidad de amplitud* del modulador. En esta definición, ligeramente distinta a la del Ejemplo 2.35 de la Sección 2.6.8 pero típica en el área de comunicaciones, la señal moduladora es $[1 + k_a x_m(t)]$, representada en la Fig. 2.89(b), y no $x_m(t)$; en general se ajusta k_a de manera que $k_a A_m < 1$ para no producir cambios de fase en la portadora. El espectro de esta señal se muestra en la Fig. 2.89(g), y está dado por

$$\mathcal{F}\{[1 + k_a x_m(t)]\} = \delta(f) + k_a X_m(f).$$

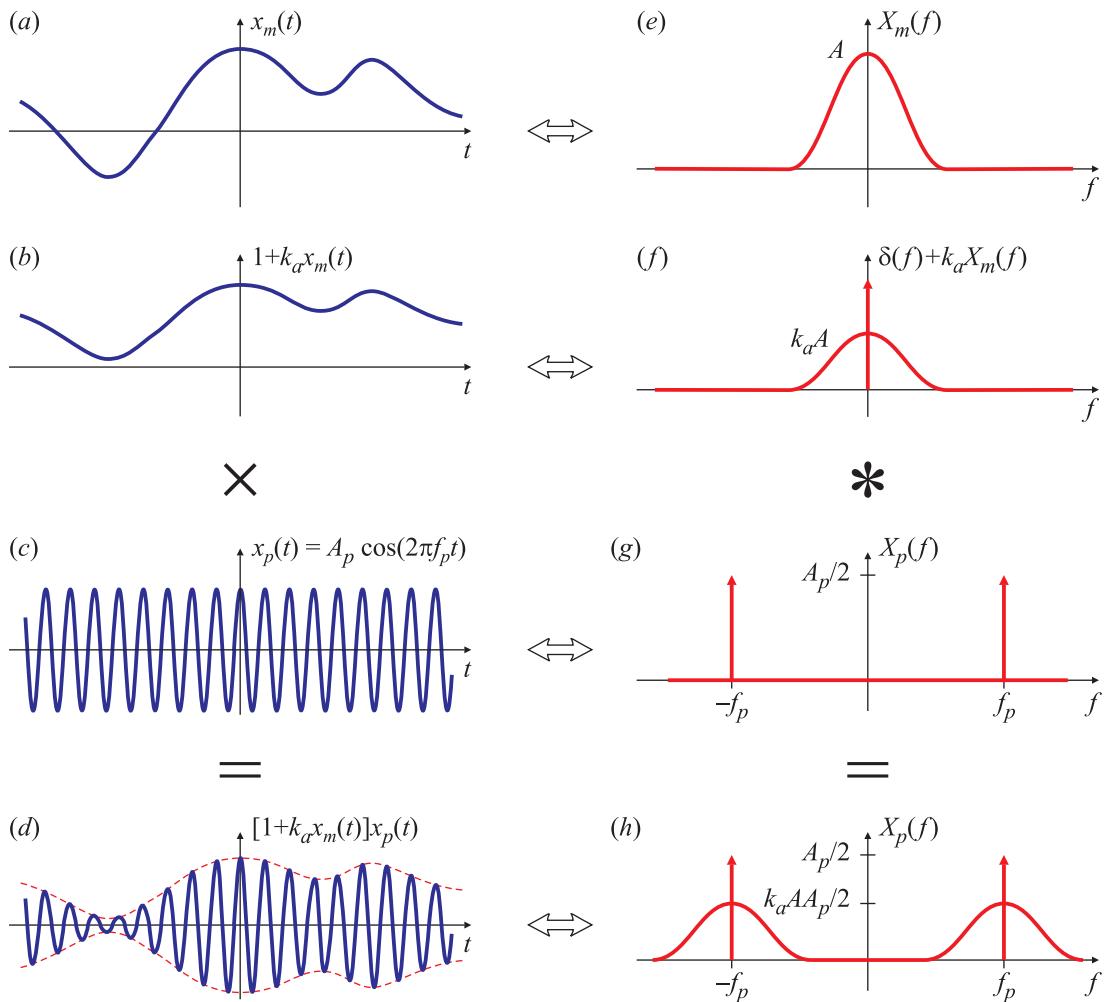


Fig. 2.89. Señales temporales y espectros de una señal sinusoidal modulada en amplitud.

El teorema de convolución frecuencial establece que la transformada de Fourier del producto de las señales en tiempo es la convolución de los espectros en frecuencia, y por lo tanto el espectro de la señal modulada $x_{MA}(t)$, cuya forma de onda temporal se grafica en la Fig. 2.89(d), será la convolución de los espectros de las señales $[1+k_a x_m(t)]$ y $x_p(t)$. Entonces el espectro $X_{MA}(f)$ de $x_{MA}(t)$, representado en la Fig. 2.89(h), es

$$\begin{aligned} X_{MA}(f) &= [(1+k_a X_m) * X_p](f) = [\delta(f) + k_a X_m(f)] * X_p(f) \\ &= X_p(f) + k_a (X_m * X_p)(f) \\ &= \frac{1}{2} A_p \delta(f - f_p) + \frac{1}{2} A_p \delta(f + f_p) + \frac{1}{2} A_p X_m(f - f_p) + \frac{1}{2} A_p X_m(f + f_p). \end{aligned}$$

En la modulación de amplitud aparecen réplicas del espectro $X_m(f)$ de la señal moduladora centradas en $\pm f_p$, la frecuencia de la señal portadora y el ancho de banda de la señal modulada es el doble que el de la señal moduladora.

EJEMPLO 2.66. Modulación de amplitud por una señal sinusoidal

Si la señal moduladora es también una señal senoidal,

$$x_m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t),$$

como se muestra en la Fig. 2.90(a), con espectro

$$X_m(f) = \frac{1}{2}A_m \delta(f - f_m) + \frac{1}{2}A_m \delta(f + f_m),$$

representado en la Fig. 2.90(e), la señal modulada en amplitud es

$$x_{MA}(t) = [1 + \mu \cos(2\pi f_m t)] A_p \cos(2\pi f_p t).$$

La señal moduladora es en realidad $[1 + \mu \cos(2\pi f_m t)]$, representada en la Fig. 2.90(b), donde el factor de modulación $\mu = k_a A_m$ satisface $\mu < 1$. Otra forma de escribir la expresión temporal de $x_{MA}(t)$ es haciendo uso de la identidad trigonométrica $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$:

$$x_{MA}(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + \frac{1}{2}\mu A_p \cos[2\pi(f_p + f_m)t] + \frac{1}{2}\mu A_p \cos[2\pi(f_p - f_m)t]. \quad (2.147)$$

Su espectro es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{[1 + \mu \cos(2\pi f_m t)]\} &= \delta(f) + \mu X_m(f) \\ &= \delta(f) + \frac{\mu}{2} \delta(f - f_m) + \frac{\mu}{2} \delta(f + f_m), \end{aligned}$$

como se muestra en la Fig. 2.90(f). La señal portadora $x_p(t)$ y su espectro se representan en las Fig. 2.90(c) y (g), respectivamente, y entonces el espectro de $x_{MA}(t)$ es

$$\begin{aligned} X_{MA}(f) = (X_m * X_p)(f) &= \frac{1}{2}A_p \delta(f - f_p) + \frac{1}{2}A_p \delta(f + f_p) + \\ &\quad \frac{\mu}{4}A_p \delta(f - f_p - f_m) + \frac{\mu}{4}A_p \delta(f - f_p + f_m) + \\ &\quad \frac{\mu}{4}A_p \delta(f + f_p - f_m) + \frac{\mu}{4}A_p \delta(f + f_p + f_m), \end{aligned} \quad (2.148)$$

representado en la Fig. 2.90(h). Los tonos que aparecen en las frecuencias $\pm f_p \pm f_m$ se denominan *bandas laterales superiores*, y los que aparecen en $\pm f_p \mp f_m$, *bandas laterales inferiores*. \square

En el siguiente ejemplo se estudia la modulación de amplitud con una señal moduladora un poco más interesante.

EJEMPLO 2.67. Espectro de una senoidal modulada en amplitud por un sinc periódico

El sinc periódico del Ejemplo 2.64 se utiliza para modular en amplitud una portadora senoidal. Si la portadora es $x_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$ y la señal moduladora es

$$x(t) = \sum_r A_m \operatorname{sinc}\left[\frac{\tau}{2}(t - rT_0)\right]$$

la señal modulada en amplitud resulta

$$\begin{aligned} x_{MA}(t) &= [1 + k_a x_m(t)] x_p(t) \\ &= A_p \cos(2\pi f_p t) + k_a A_m A_p \sum_r \operatorname{sinc}\left[\frac{\tau}{2}(t - rT_0)\right] \cos(2\pi f_p t) \end{aligned}$$

donde $\mu = k_a A_m < 1$ es el factor de modulación (adimensional). Para estudiar el espectro de esta señal resulta conveniente definir la señal auxiliar

$$x_m(t) = 1 + k_a x_m(t)$$

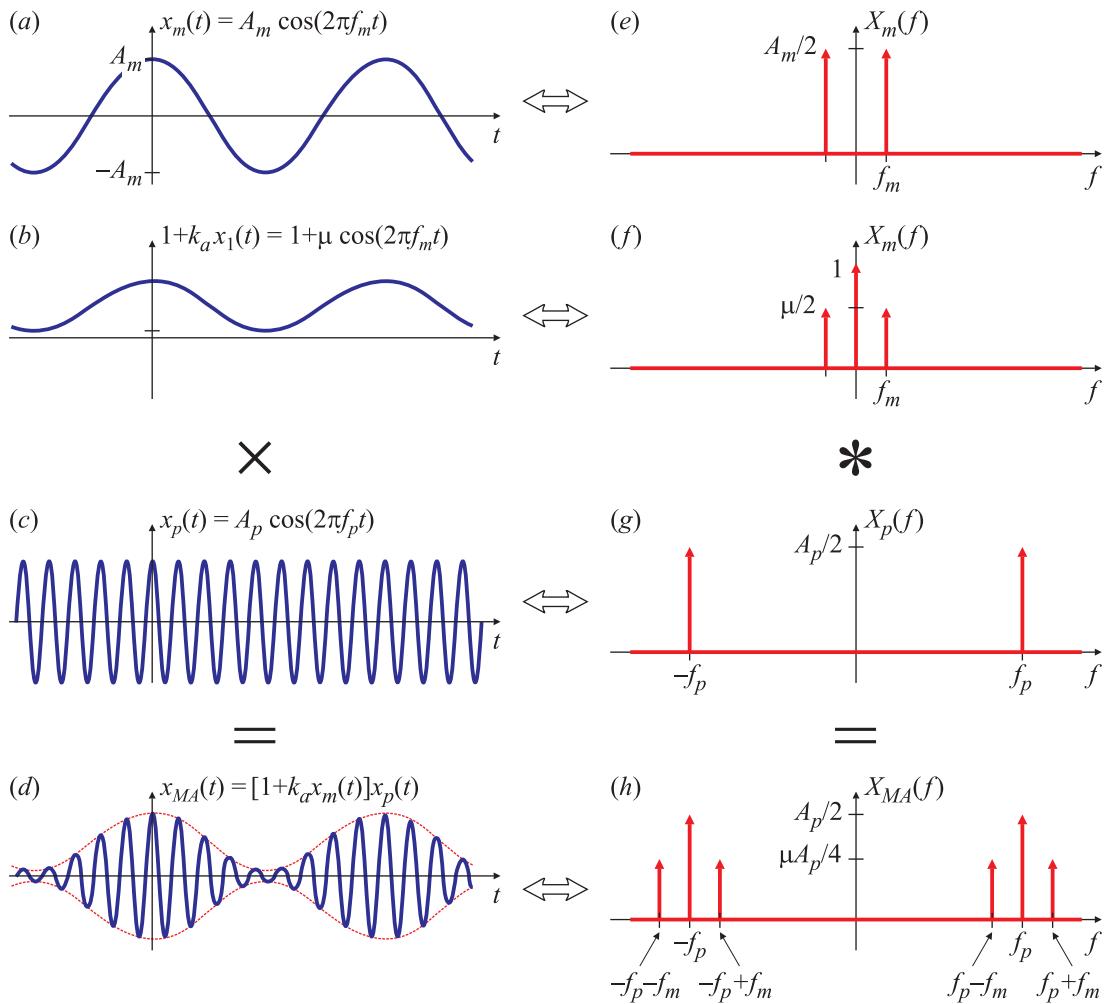


Fig. 2.90. Señales temporales y espectros de una señal sinusoidal modulada en amplitud por otra señal sinusoidal.

que se representa en la Fig. 2.91(a). Su espectro, que se muestra en la Fig. 2.91(d), se puede calcular de manera similar al del ejemplo anterior. La diferencia está en que la amplitud queda escalada por el factor k_a , y que el impulso en el origen tiene un área $1 + k_a A_m \tau / (2T_0)$:

$$X_m(f) = \delta(f) + \frac{k_a A_m \tau}{2T_0} \sum_{k=-k_0}^{k_0} \delta(f - k/T_0),$$

donde $k_0 = \lfloor T_0/\tau \rfloor$, y $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función “piso”: k_0 es el mayor entero menor que T_0/τ . Utilizando la señal auxiliar $x_m(t)$, la señal modulada en amplitud resulta

$$x_{MA}(t) = x_m(t)x_p(t).$$

Para calcular su espectro, se puede utilizar el teorema del ventaneo (convolución frecuencial) que establece el par transformado

$$x_{MA}(t) = x_m(t) \times x_p(t) \iff X_{MA}(f) = (X_m * X_p)(f).$$

Como la portadora $x_p(t)$ es un coseno de amplitud A_p [Fig. 2.91(b)] su espectro es

$$X_p(f) = \frac{A_p}{2} [\delta(f + f_p) + \delta(f - f_p)],$$

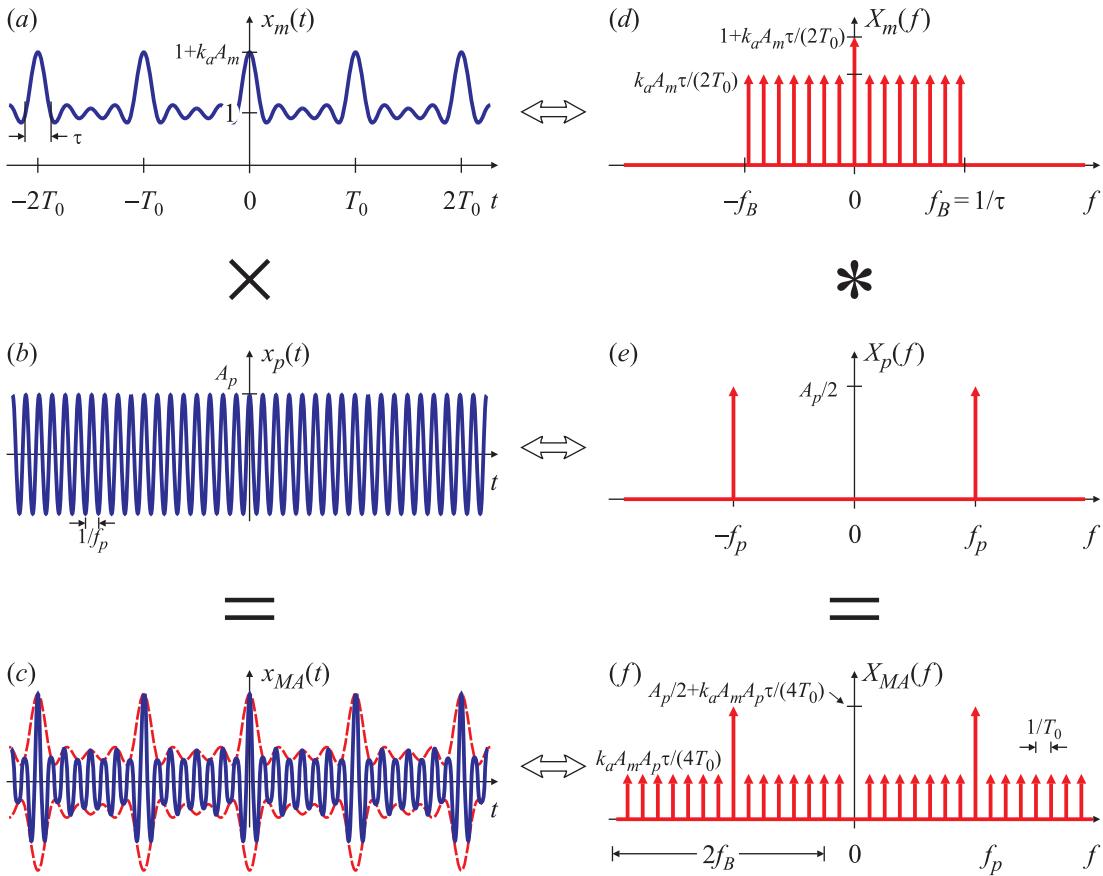


Fig. 2.91. Estudio del sinc periódico modulado y su espectro aplicando la propiedad de ventaneo (convolución frecuencial).

tal como se representa en la Fig. 2.91(e). La señal $x_{MA}(t) = x_m(t) * x_p(t)$ se muestra en la Fig. 2.91(c), mientras que su espectro, que resulta de calcular

$$\begin{aligned} X_{MA}(f) &= (X_m * X_p)(f) \\ &= \frac{A_p}{2} [\delta(f+f_p) + \delta(f-f_p)] + \frac{k_a A_p A_m \tau}{4T_0} \sum_{k=-k_0}^{k_0} [\delta(f+f_p-k/T_0) + \delta(f-f_p-k/T_0)] \end{aligned}$$

se grafica en la Fig. 2.91(f). Este espectro queda formado por dos grupos de $2k_0 + 1$ impulsos, con una separación entre impulsos de $f_0 = 1/T_0$ (la inversa del período de la señal moduladora) y cada grupo centrado en $\pm f_p$, la frecuencia de la señal portadora. \square

En el siguiente ejemplo se muestra otra aplicación del teorema de convolución frecuencial que representa una situación típica en cualquier proceso de medición. Cuando se mide una tensión en un voltímetro o una forma de onda en el osciloscopio, sólo se conoce el valor de la variable medida durante el intervalo de tiempo que dura la medición. Si en el osciloscopio se visualiza una onda senoidal, es natural asociar esa señal a una variable $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$, con $-\infty < t < \infty$, pero en realidad sólo se conoce esa señal durante el intervalo de tiempo de la medición, por ejemplo, $t_0 < t < t_1$, y se extrapolan los resultados de esa medida al intervalo infinito. El resultado es que en lugar de “ver” la

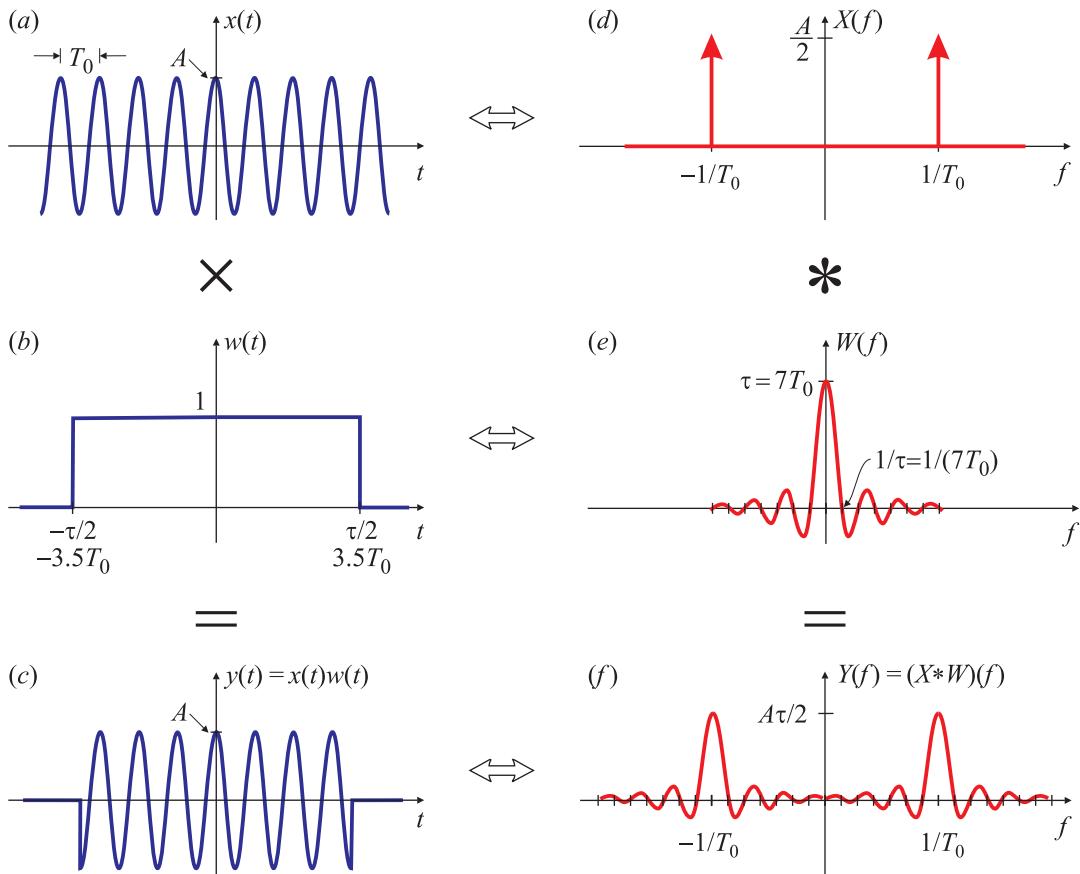


Fig. 2.92. Ejemplo gráfico del teorema de convolución en frecuencia.

señal completa (para $-\infty < t < \infty$), sólo se “observa” una pequeña parte de ella (para $t_0 < t < t_1$), como si se la viese a través de una “ventana”. De allí el otro nombre con el que se conoce al teorema.

EJEMPLO 2.68. Transformada de una ráfaga o “burst”

En la Fig. 2.92(c) se representa la señal $y(t)$ formada por 7 períodos ($\tau = 7T_0$ en la figura) de una señal cosenoidal de frecuencia $f_0 = 1/T_0$ y amplitud A :

$$y(t) = \begin{cases} A \cos 2\pi f_0 t, & |t| < 3.5T_0 = 3.5/f_0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El cálculo directo de esta transformada es

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-3.5T_0}^{3.5T_0} A \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-3.5T_0}^{3.5T_0} A \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f t) dt$$

donde en la última expresión se ha usado que la integral de la función impar $A \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f t)$ es nula. Aplicando la identidad trigonométrica $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$ e integrando se tiene que

$$Y(f) = \frac{A}{4\pi} \frac{\sin[2\pi(f-f_0)t]}{(f-f_0)} \Big|_{-3.5T_0}^{3.5T_0} + \frac{A}{4\pi} \frac{\sin[2\pi(f+f_0)t]}{(f+f_0)} \Big|_{-3.5T_0}^{3.5T_0}.$$

Operando, resulta

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \frac{A}{4\pi} \left[\frac{\sin[2\pi(f-f_0)3,5T_0]}{(f-f_0)} - \frac{\sin[2\pi(f-f_0)(-3,5T_0)]}{(f-f_0)} \right] \\
 &\quad + \frac{A}{4\pi} \left[\frac{\sin[2\pi(f+f_0)3,5T_0]}{(f+f_0)} - \frac{\sin[2\pi(f+f_0)(-3,5T_0)]}{(f+f_0)} \right] \\
 &= \frac{A}{2\pi} \frac{\sin[7\pi(f-f_0)T_0]}{(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi} \frac{\sin[7\pi(f+f_0)T_0]}{(f+f_0)}
 \end{aligned} \tag{2.149}$$

La última expresión se puede simplificar un poco más

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \frac{A}{2\pi} \left[\frac{\sin[7\pi(f-f_0)T_0]}{(f-f_0)} + \frac{\sin[7\pi(f+f_0)T_0]}{(f+f_0)} \right] \\
 &= \frac{A}{2\pi} \left[\frac{\sin(7\pi T_0 f - 7\pi T_0 f_0)}{(f-f_0)} + \frac{\sin(7\pi T_0 f + 7\pi T_0 f_0)}{(f+f_0)} \right] \\
 &= \frac{A}{2\pi} \frac{\sin(7\pi T_0 f - 7\pi)}{(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi} \frac{\sin(7\pi T_0 f + 7\pi)}{(f+f_0)} = -\frac{A}{\pi} \frac{\sin(7\pi T_0 f)}{(f-f_0)} - \frac{A}{\pi} \frac{\sin(7\pi T_0 f)}{(f+f_0)}
 \end{aligned}$$

de donde resulta

$$Y(f) = \frac{A}{\pi} \frac{\sin(7\pi T_0 f)}{f^2 - f_0^2}. \tag{2.150}$$

Por otra parte la ecuación (2.149) también puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \frac{A}{2\pi} \frac{\sin[7\pi(f-f_0)T_0]}{(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi} \frac{\sin[7\pi(f+f_0)T_0]}{(f+f_0)} \\
 &= \frac{A}{2\pi} (7\pi T_0) \frac{\sin[7\pi(f-f_0)T_0]}{7\pi T_0(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi} (7\pi T_0) \frac{\sin[7\pi(f+f_0)T_0]}{7\pi T_0(f+f_0)} \\
 &= \frac{7AT_0}{2} \text{sinc}[(f-f_0)7T_0] + \frac{7AT_0}{2} \text{sinc}[(f+f_0)7T_0].
 \end{aligned} \tag{2.151}$$

Tanto (2.150) como (2.151) representan la misma transformada. Sin embargo, no es evidente a primera vista, y tampoco es sencillo estar absolutamente convencido de la validez de cualquiera de las dos expresiones. En casos como éste el teorema de convolución frecuencial es muy útil. Como se muestra en la Fig. 2.92(c), la señal $y(t)$ puede pensarse como el producto de una señal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$, representada en la Fig. 2.92(a), con el pulso cuadrado

$$w(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 = 3,5T_0 = 3,5/f_0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que se grafica en la Fig. 2.92(b). Las transformadas del coseno y del pulso rectangular son conocidas:

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \frac{A}{2} \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} \delta(f - f_0), \\
 W(f) &= \tau \text{sinc}(\tau f) = 7T_0 \text{sinc}(7T_0 f).
 \end{aligned}$$

como muestran las Figs. 2.92(d) y (e), respectivamente. Como $y(t) = x(t) \times w(t)$, el teorema de convolución en frecuencia asegura que

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= (X * W)(f) = \left[\frac{A}{2} \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} \delta(f - f_0) \right] * [\tau \text{sinc}(\tau f)] \\
 &= \frac{1}{2} \tau A \text{sinc}[\tau(f - f_0)] + \frac{1}{2} \tau A \text{sinc}[\tau(f + f_0)] \\
 &= \frac{7}{2} AT_0 \text{sinc}[(f - f_0)7T_0] + \frac{7}{2} AT_0 \text{sinc}[(f + f_0)7T_0].
 \end{aligned}$$

Esta última expresión coincide con (2.151). La Fig. 2.92(f) muestra la forma aproximada de este espectro, pues hay que tener en cuenta las sumas de las "colas" de los $\text{sinc}(\cdot)$. De todos modos, es muy aproximado al espectro real que se reproduce en la Fig. 2.93. \square

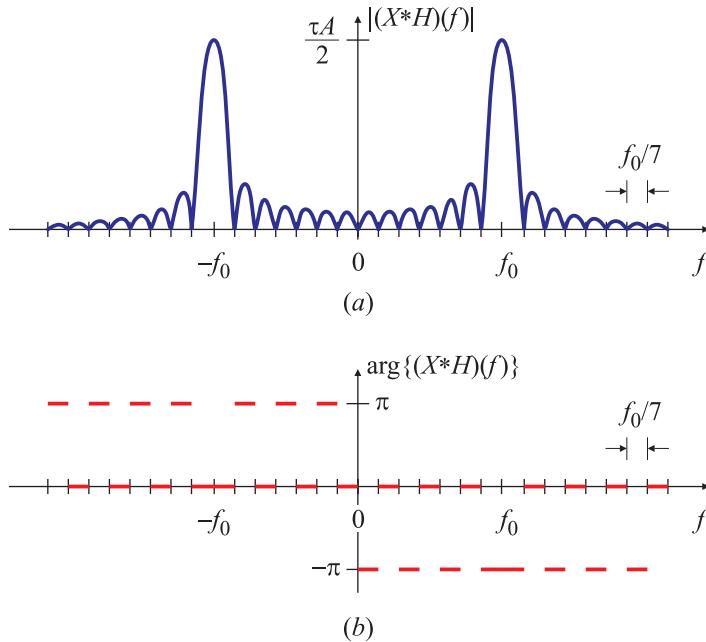


Fig. 2.93. Transformada de Fourier en módulo (a) y fase (b) de la ráfaga del Ejemplo 2.68.

El ejemplo anterior muestra que la ventaja aplicar el teorema de convolución frecuencial es que no sólo permite calcular la transformada con menor cantidad de pasos (y menor oportunidad para el error) sino que también facilita la interpretación de los resultados.

Volviendo a la analogía del proceso de medición, el ejemplo muestra la forma que tendrá el espectro de la señal cuando se la “mira” a través de una ventana de ancho τ . Si se incrementa el intervalo de medición τ , la respuesta en frecuencia $W(f)$ de la ventana $w(t)$ será un sinc con un lóbulo principal más angosto, y por lo tanto el espectro $Y(f)$ se parecerá más al de $X(f)$. En el límite, si el ancho τ de la ventana $w(t)$ tiende a infinito, su transformada tiende a un impulso $W(f) = \delta(f)$ e $Y(f)$ será igual a $X(f)$. ¡Pero que el ancho τ tienda a infinito significa que el proceso de medición demanda un tiempo infinito!

Esta característica es típica del funcionamiento de los analizadores de espectro. Si se pretende una medición rápida, el espectro medido será más o menos parecido al espectro real. Si se pretende que el espectro medido sea una rerepresentación fiel del espectro de la señal que se mide, el intervalo de medición deberá extenderse tanto como sea necesario. Nuevamente, esta es una característica de la dualidad entre los dominios tiempo y frecuencia, que será examinada con más detalle en la Sección 2.10.

EJEMPLO 2.69. Espectro de un tren de impulsos modulado

La Fig. 2.94(a) muestra una señal $x(t) = A \operatorname{sinc}(2f_B t)$, que modula un tren de impulsos $p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0)$ representado en la Fig. 2.94(b), cuyas transformadas son

$$X(f) = \begin{cases} A/(2f_B), & |f| < f_B, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad \text{y} \quad P(f) = f_0 \sum_k \delta(f - kf_0),$$

representadas en la Fig. 2.94(d) y (e), respectivamente, con $f_0 = 1/T_0$. El tren de impulsos modu-

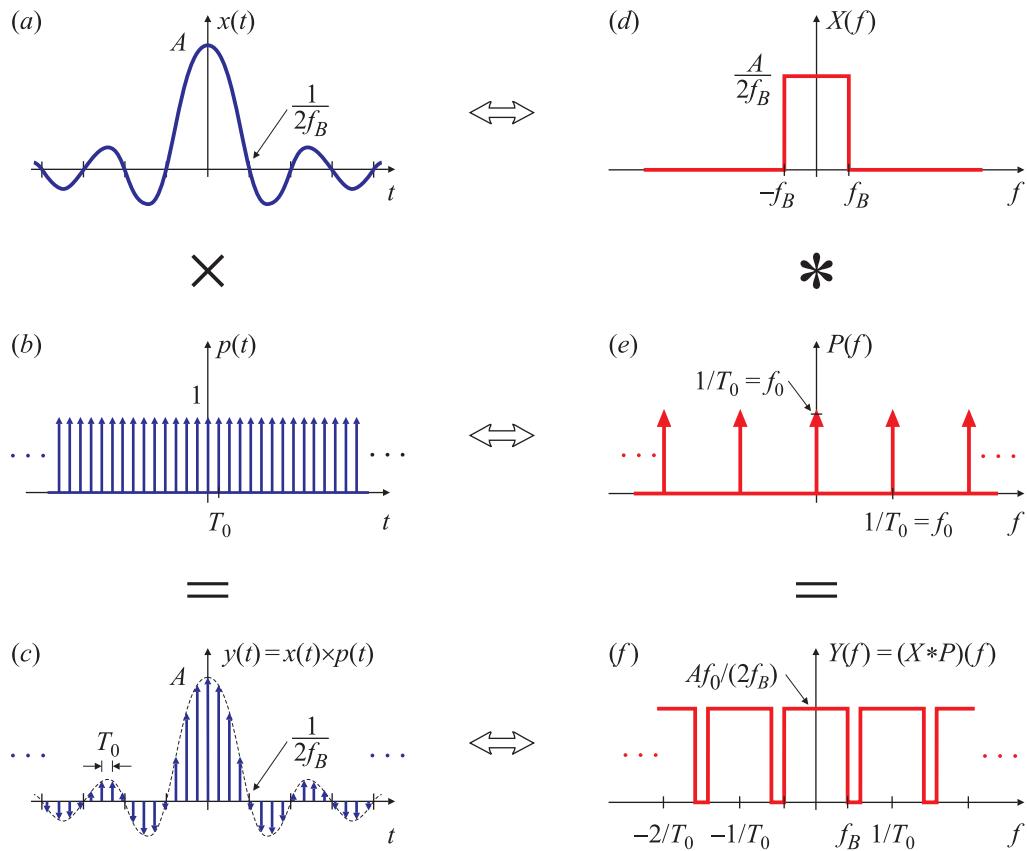


Fig. 2.94. Aplicación del teorema de convolución en frecuencia para calcular el espectro de un tren de impulsos modulado por un $\text{sinc}(\cdot)$.

lado por $x(t)$ es

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)p(t) \\ &= A \text{sinc}(2f_B t) \sum_n \delta(t - nT_0) = A \sum_n \text{sinc}(2f_B T_0 n) \delta(t - nT_0). \end{aligned} \quad (2.152)$$

En la última igualdad se aplicó la propiedad de colador del impulso. La señal $y(t)$ se representa en la Fig. 2.94(c). La transformada de Fourier de $y(t)$ puede calcularse transformando (2.152),

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n A \text{sinc}(2f_B T_0 n) \delta(t - nT_0) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Intercambiando el orden de la suma con la integración se tiene que

$$Y(f) = \sum_n A \text{sinc}(2f_B T_0 n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) e^{-j2\pi ft} dt = \sum_n A \text{sinc}(2f_B T_0 n) e^{-j2\pi f n T_0}$$

que finalmente puede escribirse como

$$Y(f) = \sum_n A \text{sinc}\left(2f_B \frac{n}{f_0}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{f_0} f}. \quad (2.153)$$

La ecuación (2.153) es la serie de Fourier de una onda cuadrada en la variable f , de período f_0 , ancho de pulso $2f_B$ y amplitud $Af_0/(2f_B)$. Aunque no resulta evidente, se puede comprobar este

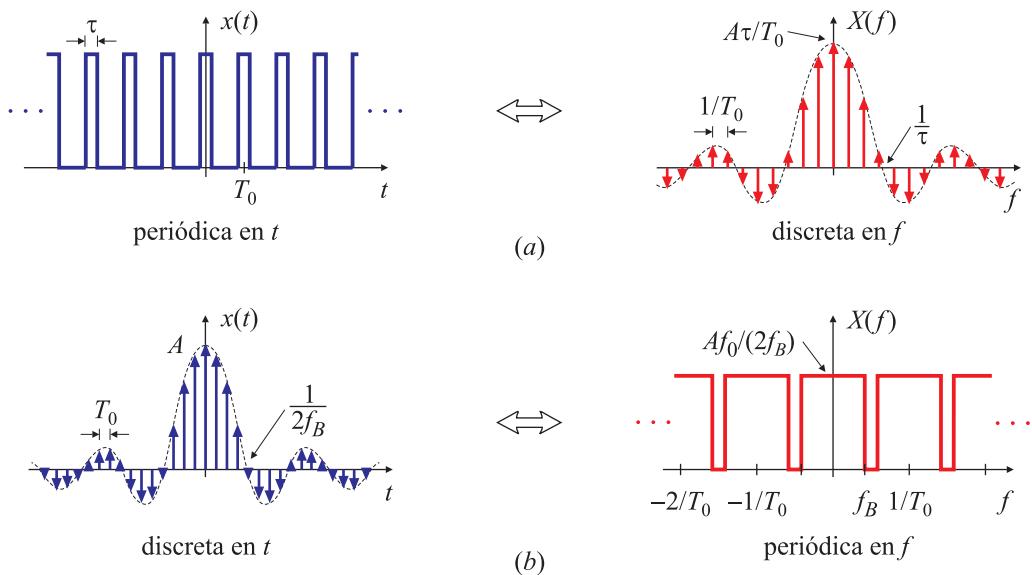


Fig. 2.95. Dualidad tiempo frecuencia: señales periódicas en tiempo tienen un espectro discreto (a); señales discretas en tiempo tienen un espectro periódico (b).

resultado comparándolo con el del Ejemplo 2.4 (página 68), donde se calculaba la serie de Fourier de una onda cuadrada de período T_0 , ancho de pulso τ y amplitud A en la variable t ; basta cambiar $t \mapsto f$, $T_0 \mapsto f_0$, $\tau \mapsto 2f_B$.

De manera similar al Ejemplo 2.68, la aplicación del teorema de convolución (en este caso en frecuencia) permite obtener el resultado de manera más sencilla y facilita su interpretación. De acuerdo al teorema,

$$y(t) = x(t) \times p(t) \iff Y(f) = (X * P)(f),$$

de manera que

$$Y(f) = X(f) * \sum_k f_0 \delta(f - kf_0) = \sum_k f_0 X(f - kf_0). \quad (2.154)$$

Esta última expresión muestra que el espectro $Y(f)$ está formado por réplicas del espectro de $X(f)$ repetidas cada kf_0 , y cuya amplitud queda afectada por un factor f_0 , tal como se muestra en la Fig. 2.94(f). Las expresiones (2.153) y (2.154) son equivalentes, pero esta última resulta mucho más fácil de comprender. \square

El teorema de convolución en frecuencia permite explicar de manera sencilla que el espectro de señales discretas en tiempo es periódico en frecuencia. Una señal discreta en tiempo $y(t)$ puede pensarse como el producto de una señal continua $x(t)$ con un tren de impulsos $p(t)$. El espectro de la señal será la convolución de los espectros, $Y(f) = (X * P)(f)$. Como el espectro del tren de impulsos $p(t)$ es otro tren de impulsos $P(f)$, la convolución $(X * P)(f)$ está formada por réplicas de $X(f)$ ubicadas en múltiplos de la frecuencia fundamental del tren de impulsos, como muestra el Ejemplo 2.69.

2.7.7. Los teoremas de convolución y la propiedad de dualidad

Los Ejemplos 2.63 y 2.69 son, en cierta manera, duales: mientras que el Ejemplo 2.63 muestra que el espectro de una señal periódica es discreto (como se estudió, por otra

parte en la Sección 2.5), el Ejemplo 2.69 revela que el espectro de una señal discreta es periódico. Estos resultados se sintetizan en la Fig. 2.95(a) y (b), respectivamente: la discretización en un domino se puede conseguir *multiplicando* por un tren de impulsos; en el dominio transformado esto equivale a *convolucionar* con otro tren de impulsos.

Las relaciones matemáticas para señales periódicas en tiempo son

$$y(t) = (x * p)(t) \iff Y(f) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) \delta(f - kf_0) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0) \delta(f - kf_0),$$

mientras que para señales discretas en tiempo se tiene que

$$y(t) = x(t) \times p(t) \iff Y(f) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - kf_0) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_0).$$

Como se estudió en el Ejemplos 2.63, una señal periódica $\tilde{x}(t)$ se puede obtener convolucionando la señal $x(t)$ compuesta por un período de $\tilde{x}(t)$ con un tren de impulsos. Este proceso también se conoce como *replicación*: $\tilde{x}(t)$ es el resultado de *replicar* $x(t)$ cada T_0 . Su espectro $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$ resulta de *muestrear* cada k/T_0 el espectro $X(f)$ de $x(t)$. De manera similar, el Ejemplo 2.69 muestra que *muestrear* una señal $x(t)$ cada kT_0 resulta en una señal discreta cuyo espectro es la *replicación* del espectro $X(f)$ cada k/T_0 . Estos resultados son consecuencia directa de los teoremas de convolución temporal o frecuencial (ventaneo) y del hecho que la transformada de un tren de impulsos es otro tren de impulsos. En síntesis, *muestrear* en un domino genera una *replicación* en el otro, y viceversa. Estos resultados se formalizarán al esudiar el cubo de Fourier-Poisson en el Capítulo 5.

2.8. Efecto Gibbs

En 1889, el físico Albert Michelson y su colega S. Stratton construyeron un aparato que reconstruía una señal periódica $\tilde{x}_N(t)$ de período T_0 usando hasta 80 armónicas, es decir que implementaba mecánicamente la ecuación

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk \frac{2\pi}{T_0} t}. \quad (2.155)$$

Cuando Michelson probó su dispositivo para sintetizar una onda cuadrada, observó que la señal “aproximada” $\tilde{x}_N(t)$ oscilaba en cercanías de la discontinuidad, y que el valor pico de esas oscilaciones se mantenía constante independientemente del valor de N , como se muestra en la Fig. 2.96. Este efecto se observa más detalladamente en la Fig. 2.97, que representa la señal periódica $\tilde{x}(t)$, su aproximación de N términos $\tilde{x}_N(t)$, y la diferencia entre ambas, $e(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)$. Esta última señal se grafica en un entorno de la discontinuidad en $T_0/4$, para t el intervalo $(T_0/4 \pm 2T_0/N)$. Estas figuras permiten apreciar que el comportamiento del error en este intervalo es el mismo (a excepción del cambio de escala) para cualquier N . Además, a medida que crece N la ubicación de sobreímpico se acerca al punto donde la función es discontinua.

Este fenómeno es común en muchas aplicaciones de procesamiento. En la Fig. 2.98 se muestra la imagen de una resonancia magnética nuclear de cabeza que está “contaminada” por el efecto Gibbs, que se observa como ondas más claras y oscuras en las zonas

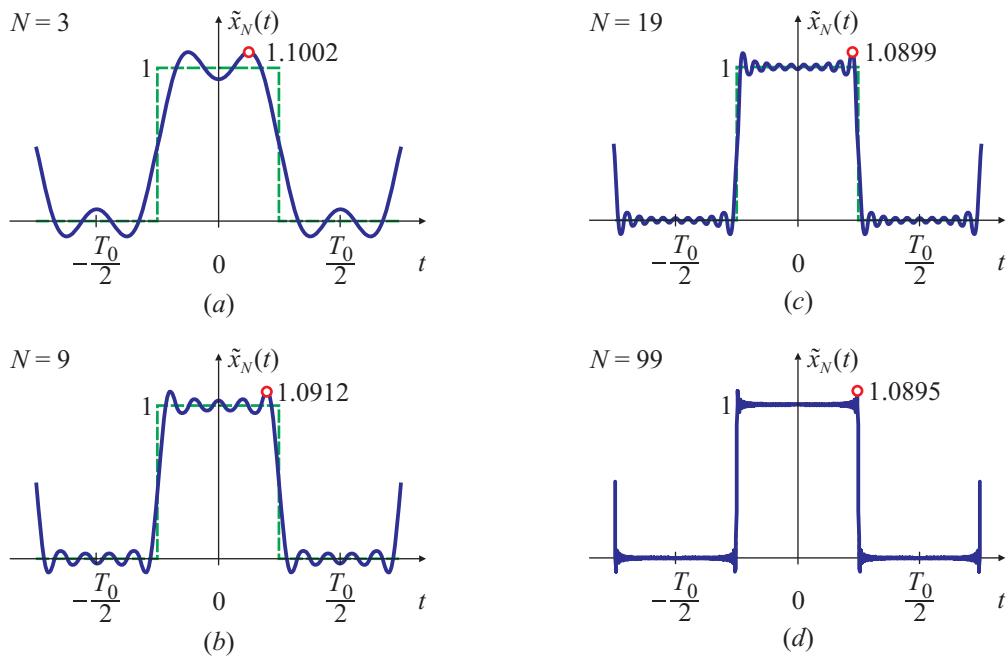


Fig. 2.96. Aproximación de una onda cuadrada por los N primeros términos de la serie de Fourier. $N = 3$ (a); $N = 9$ (b); $N = 19$ (c); $N = 99$ (d) términos.

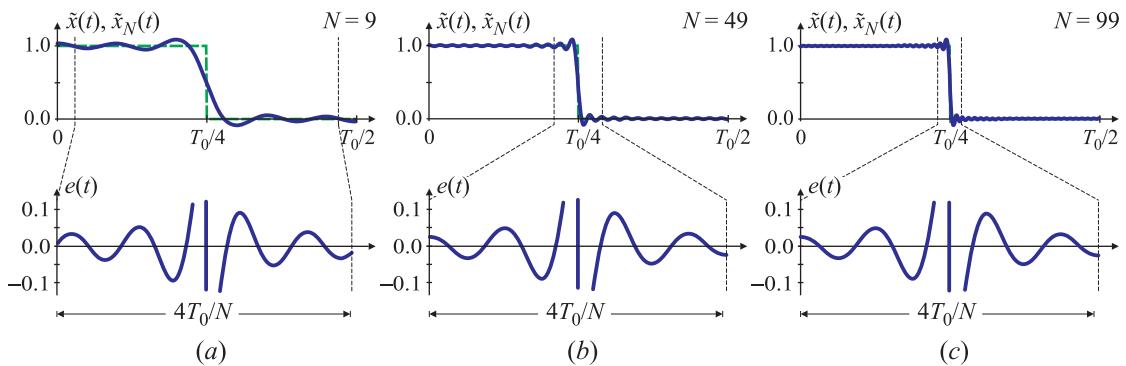


Fig. 2.97. Detalle del error de aproximación entre $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{x}_N(t)$ para distintos valores de N .

indicadas con flechas. En este caso el fenómeno es espacial y no temporal, y está relacionado con el número finito y pequeño de emisores y detectores que se utilizan para obtener la imagen. Las investigaciones actuales apuntan a eliminar las ondas sin perder la definición de los bordes ni agregar “artefactos” extraños que distorsionen la imagen.

Este comportamiento peculiar de las sumas parciales, de presentar oscilaciones cuyo valor pico es constante para cualquier valor finito de N , y que se concentran cerca de la discontinuidad cuando N crece, se conoce como *fenómeno de Gibbs*, por el nombre del matemático que en 1899 explicó por qué se producen. Desde entonces ha ocurrido una explosión de técnicas de filtrado motivada por el análisis de señales. Algunas de estas alternativas serán exploradas más adelante en este curso, al tratar el análisis frecuencial de señales y el diseño de filtros FIR.

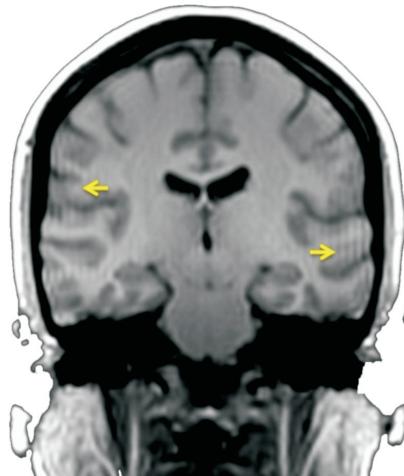


Fig. 2.98. Imagen de una resonancia magnética nuclear de la cabeza contaminada por efecto Gibbs (en las zonas indicadas por las flechas).

2.8.1. El efecto Gibbs y el teorema de convolución temporal

El efecto Gibbs puede interpretarse aplicando el teorema de convolución temporal: limitar la sumatoria de la serie a $\pm N$ términos es equivalente a anular las componentes de frecuencia que exceden un determinado valor N/T_0 , o, en otras palabras, a *filtrar* la señal con un filtro pasabajos ideal $H(f)$ con frecuencia de corte $f_N > N/T_0$. (Los detalles se analizan en el Ejercicio 54). Desde el punto de vista frecuencial, se está multiplicando el espectro $X(f)$ de la señal $\tilde{x}(t)$ por la función transferencia $H(f)$ del filtro, como se representa en la Fig. 2.99. Por comodidad, se supone que la frecuencia de corte f_N yace en medio de las líneas espectrales de $X(f)$, por ejemplo, en $f_N = (N + 1/2) / T_0$.

La transformada de la convolución en el dominio tiempo de $\tilde{x}(t)$ y $h(t)$, la transformada inversa de $H(f)$, es la multiplicación de $X(f)$ por $H(f)$. Si $\tilde{x}(t)$ es una onda cuadrada de amplitud unitaria, período T_0 y ciclo de trabajo τ/T_0 , como se muestra en la Fig. 2.99(a), su espectro, representado en la Fig. 2.99(d), es

$$X(f) = \sum_k \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0} k\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right),$$

como se estudió en el Ejemplo 2.19. Además, si $H(f)$ es la respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos ideal, con frecuencia de corte en $f = f_N$,

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_N, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

graficado en la Fig. 2.99(e), se ha calculado en el Ejemplo 2.13 que la antitransformada de $H(f)$, es decir, la respuesta impulsiva $h(t)$ del filtro es

$$h(t) = 2f_N \operatorname{sinc}(2f_N t).$$

como se muestra en la Fig. 2.99(b). La propiedad de área de la transformada de Fourier

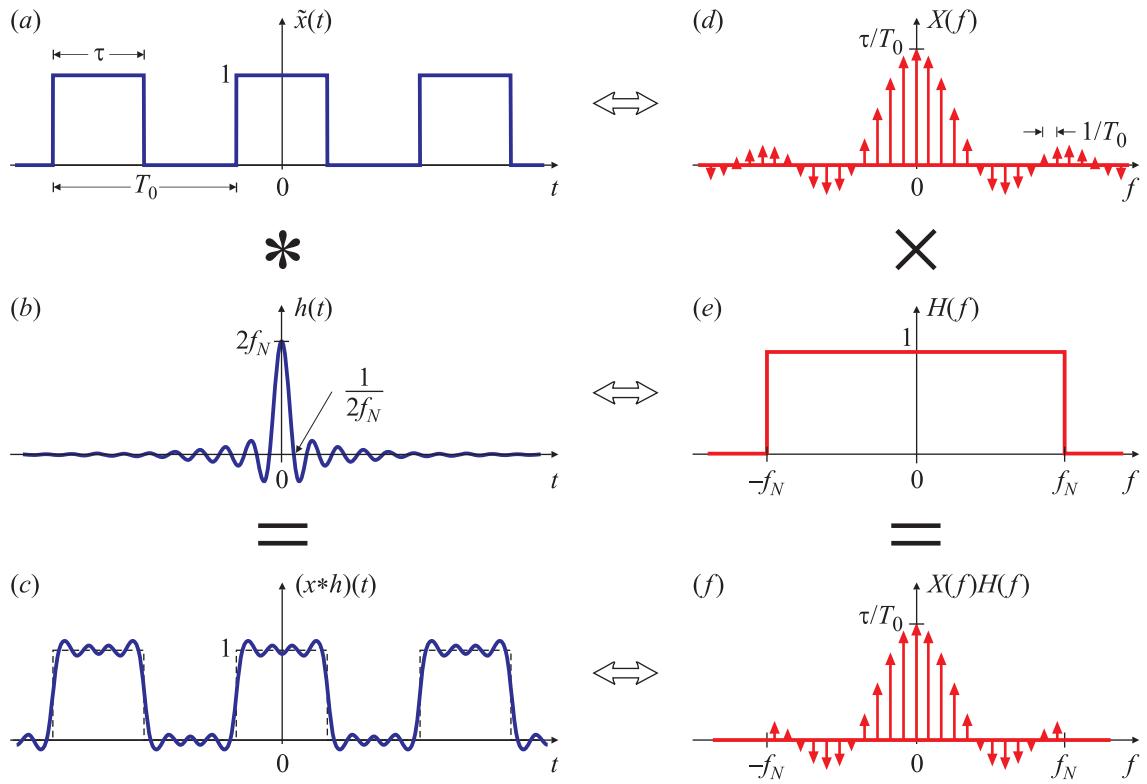


Fig. 2.99. Interpretación del efecto Gibbs según el teorema de convolución temporal.

asegura que el área bajo $h(t)$ es unitaria, ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = H(f)|_{f=0} = 1,$$

cualquiera sea el ancho de banda $f_N = (N + 1/2)/T_0$.

De acuerdo al teorema de convolución temporal, la multiplicación de $X(f)$ por $H(f)$, es decir, la suma finita de N términos de la serie, representada en la Fig. 2.99(f), es la transformada de la convolución de $\tilde{x}(t)$ y $h(t)$; esto es:

$$\mathcal{F}\{(x * h)(t)\} = \sum_{k=-N}^{N} \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0} k\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right).$$

Antitrasnformando, se encuentra que

$$(\tilde{x} * h)(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk \frac{2\pi}{T_0} t} = \tilde{x}_N(t).$$

como se muestra en la Fig. 2.99(c). Esta expresión significa que $\tilde{x}_N(t)$, la suma de $\pm N$ términos de la serie de Fourier, es igual a la convolución de $\tilde{x}(t)$ con la respuesta impulsiva del filtro. Entonces, la interpretación gráfica de la convolución desarrollada en la Sección 2.7.2 permite deducir la forma de $\tilde{x}_N(t)$, y analizar la influencia de N en la aproximación, como se muestra en la Fig. 2.100 para distintos valores de t .

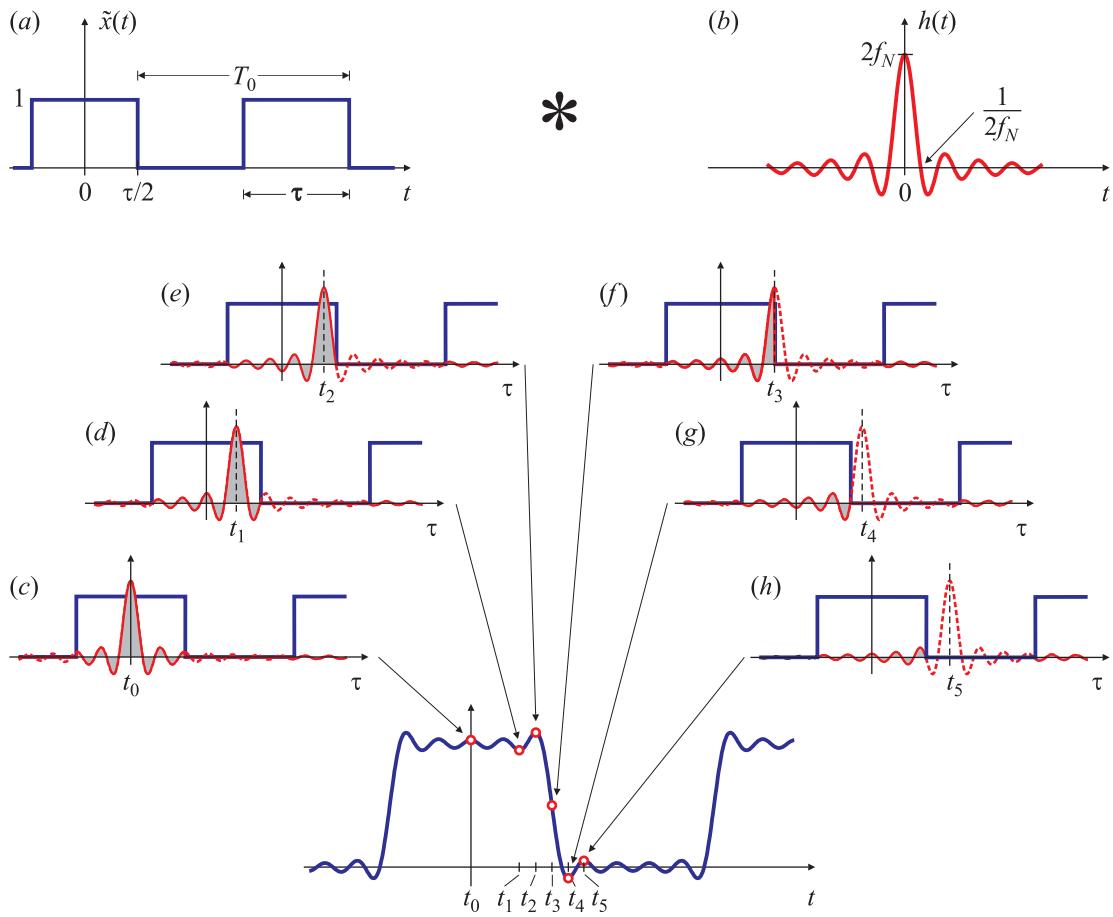


Fig. 2.100. Cálculo de la señal $\tilde{x}_N(t)$ por convolución entre $\tilde{x}(t)$ y $h(t)$.

Para calcular la convolución interesa el área del producto entre $\tilde{x}(t)$ y $h(t)$ desplazada hacia el instante donde se calcula la convolución, y es clave en este desarrollo recordar que el área bajo $h(t)$ es unitaria. Por ejemplo, en $t = t_0 = 0$, el pulso de la onda cuadrada comprendido entre $\pm\tau/2$ [Fig. 2.100(a)] coincide con el lóbulo principal y los mayores lóbulos laterales de $h(t)$. Por lo tanto, el área del producto de las dos funciones es aproximadamente el área de $h(t)$, y resulta en un valor próximo a 1, como se muestra en la Fig. 2.100(c) para $t = t_0$.

Cuando $\tilde{x}(t)$ varía abruptamente, una parte importante de la respuesta de $h(t)$ no contribuye área a la integral de convolución porque queda multiplicada por el valor 0 de la onda cuadrada. El caso extremo ocurre cuando se calcula $\tilde{x}_N(t)$ en $t = t_3 = \tau/2$, como muestra la Fig. 2.100(f), en el cual casi la mitad del área bajo $h(t)$ queda fuera del cálculo de la convolución; por este motivo el valor de la aproximación $\tilde{x}_N(t)$ en este punto es aproximadamente la mitad del área de $h(t)$, es decir $\tilde{x}_N(t)|_{t=t_3} \approx 1/2$.

Para valores de t próximos a la discontinuidad los lóbulos laterales de $h(t)$ restan o suman área, como en las Fig. 2.100(d) y (e) para $t = t_1$ y $t = t_2$, o en las Fig. 2.100(g) y (h), para $t = t_4$ y $t = t_5$, respectivamente.

El máximo sobreímpetu se alcanza en $t = t_2$ donde todo el lóbulo principal de $h(t)$ que-

da multiplicado por el valor unitario de la onda cuadrada, y uno de los lóbulos laterales negativos queda multiplicado por cero. Como el lóbulo principal tiene ancho $1/f_N$, t_2 es

$$t_2 = \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2f_N}$$

El área total de $h(t)$ es unitaria, y quitarle el aporte de un lóbulo negativo hace que el área resultante sea mayor. El valor de $\tilde{x}_N(t)$ en $t = t_2$ es el área sombreada de la Fig. 2.100(e), que es el área de la mitad de un sinc, más la mitad del área del lóbulo principal. En la Tabla 2.2 de la Sección 2.2 se indica que el área del lóbulo principal es 1,18. Entonces,

$$\tilde{x}_N(t)|_{t=t_2} = \frac{1}{2} + \frac{1,18}{2} = 1,09,$$

es decir que en $t = t_2$, la aproximación $\tilde{x}_N(t)$ tiene un sobrepico cercano al 9 %.

El mínimo sobrepico se alcanza en $t = t_4$, cuando todo el lóbulo principal queda multiplicado por cero. El instante t_4 está localizado en $\tau/2$ (cuando transiciona la onda cuadrada), más la mitad del ancho del lóbulo principal, que es $1/(2f_N)$. Por lo tanto,

$$t_4 = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2f_N}.$$

El valor de $\tilde{x}_N(t)$ en $t = t_4$ es el área sombreada en la Fig. 2.100(g), que es el área de medio sinc, que vale $1/2$, menos la mitad del área del lóbulo principal. Entonces,

$$\tilde{x}_N(t)|_{t=t_4} = \frac{1}{2} - \frac{1,18}{2} = -0,09,$$

Para otros valores de t , el valor de $\tilde{x}_N(t)$ oscila según se incluyan en el cálculo del área lóbulos con área positiva o negativa, y naturalmente las mayores oscilaciones se producirán en las cercanías de la transición de 1 a 0 o de 0 a 1 de la onda cuadrada $\tilde{x}(t)$. Aumentar el número de términos N que componen la función aproximada $\tilde{x}_N(t)$ es equivalente a multiplicar el espectro de $\tilde{x}(t)$ por un filtro pasabajos $H(f)$ de ancho de banda mayor; por lo tanto, su respuesta impulsiva $h(t)$ tendrá oscilaciones de más alta frecuencia, pero su área sigue siendo unitaria. De aquí que el análisis efectuado más arriba sigue siendo válido; la única diferencia es que las oscilaciones más rápidas de la respuesta $h(t)$ causarán ondulaciones más rápidas de $\tilde{x}_N(t)$, y que la posición de los sobrepicos, que dependen de $1/(2f_N)$ se aproximarán a la discontinuidad a medida que N crece.

2.8.2. El cálculo formal del sobrepico

Para calcular analíticamente el comportamiento en cercanías de los puntos de discontinuidad de $\tilde{x}(t)$, se observa que en proximidades de $t = \tau/2$ se puede aproximar $\tilde{x}(t)$ por la función $\text{sgn}(t)$: $\tilde{x}(t) \approx (1/2) + (1/2) \text{sgn}(\tau/2 - t)$, de modo que

$$\begin{aligned} x_N(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) h(t-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(\tau/2 - u) \right] 2f_N \text{sinc}[2f_N(t-u)] du \\ &= f_N \left[\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[2f_N(t-u)] du + \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\tau/2 - u) \text{sinc}[2f_N(t-u)] du \right]. \end{aligned} \quad (2.156)$$

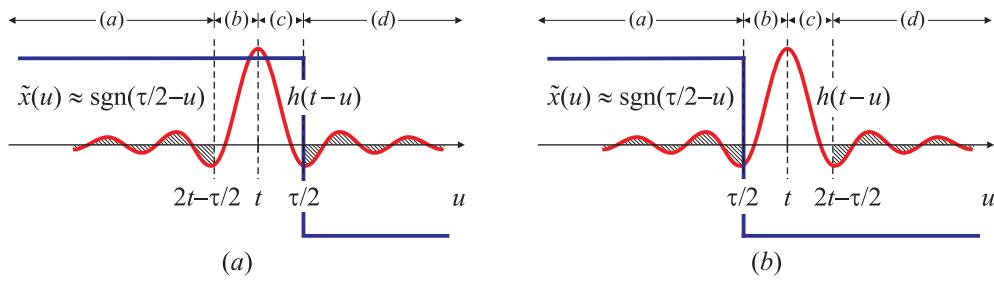


Fig. 2.101. Intervalos de integración de $\text{sgn}(\tau/2-u) \text{sinc}[2f_N(t-u)]$: $t < \tau/2$ (a) y $t > \tau/2$ (b).

La segunda integral se puede separar en cuatro intervalos, como se muestra en la Fig. 2.101,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\tau/2-u) \text{sinc}[2f_N(t-u)] du \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{2t-\tau/2} (\cdot) du + \int_{2t-\tau/2}^t (\cdot) du + \int_t^{\tau/2} (\cdot) du + \int_{\tau/2}^{\infty} (\cdot) du, & \text{si } t < \tau/2, \\ \int_{-\infty}^{\tau/2} (\cdot) du + \int_{\tau/2}^t (\cdot) du + \int_t^{2t-\tau/2} (\cdot) du + \int_{2t-\tau/2}^{\infty} (\cdot) du, & \text{si } t > \tau/2. \end{cases} \end{aligned}$$

En cada caso, las primeras y últimas integrales evaluadas sobre los intervalos (a) y (d) tienen signo contrario y se cancelan. Por simetría, la evaluación de la integral sobre el intervalo (b) es idéntica a la evaluación sobre el intervalo (c). Para $t < \tau/2$ o $t > \tau/2$ los integrandos de las integrales sobre los intervalos (b) y (c) tienen signo contrario, pero también cambian los extremos de integración, de modo que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\tau/2-u) \text{sinc}[2f_N(t-u)] du &= 2 \int_t^{\tau/2} \text{sinc}[2f_N(t-u)] du = -\frac{1}{\pi f_N} \int_0^{2\pi f_N(t-\frac{\tau}{2})} \frac{\text{sen}(v)}{v} dv \\ &= -\frac{1}{\pi f_N} \text{Si}[2\pi f_N(t-\tau/2)], \end{aligned} \quad (2.157)$$

donde $\text{Si}(x)$ es la función seno integral, definida como $\text{Si}(x) = \pi \int_0^x \text{sinc}(\sigma) d\sigma$, y que se encuentra tabulada. Teniendo en cuenta que $f_N \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2f_N u) du = 1/2$ y (2.157), la expresión (2.156) se puede escribir como

$$\tilde{x}_N(t) = (\tilde{x} * h)(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Si}\left[2\pi f_N\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right].$$

Para calcular el valor del sobrepico de $\tilde{x}_N(t)$ se deben determinar los puntos donde se anula su derivada; es decir, donde $d\tilde{x}_N(t)/dt = 0$. Teniendo en cuenta que $\frac{d}{dx} (\int_0^x f(u) du) = f(x)$, resulta

$$\frac{d\tilde{x}_N(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \text{Si}[2\pi f_N(t-\tau/2)] = \frac{\text{sen}[2\pi f_N(t-\tau/2)]}{2\pi f_N(t-\tau/2)} = 0.$$

Entonces los extremos relativos ocurren para aquellos valores de t que anulan el seno

$$2\pi f_N\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

y por lo tanto, los extremos de $\tilde{x}_N(t)$ se encuentran en $t_k = k/(2f_N) + \tau/2$, donde $\tilde{x}_N(t_k) = (1/2) + \text{Si}(k\pi)$. Es sencillo verificar que el máximo se encuentra para $k = -1$, y el mínimo en $k = 1$:

$$\tilde{x}_N(t)_{\max} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Si}(-\pi) = +1,08949, \quad \text{en } t = \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2f_N}, \quad (2.158)$$

$$\tilde{x}_N(t)_{\min} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Si}(+\pi) = -0,08949, \quad \text{en } t = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2f_N}. \quad (2.159)$$

Estas expresiones muestran que tanto el máximo como el mínimo de la señal reconstruida $\tilde{x}_N(t)$ representan una variación del 9 % del valor máximo de $\tilde{x}(t)$, y que estos valores no dependen de la frecuencia de corte f_N del filtro pasabajo $H(f)$, es decir, son independientes de la cantidad de armónicos que utilicen para la reconstrucción. Por otra parte, la ubicación de esos extremos sí dependen de f_N , y están más próximos a la discontinuidad en $t = \tau/2$ cuanto mayor sea N , como se observa en la Fig.2.96. Además, estos extremos relativos ocurren exactamente cuando el lóbulo principal de $h(t)$, de ancho $1/f_N$, queda incluido o excluido del cálculo de la convolución, como se aprecia en las Fig. 2.100(e) y (g), respectivamente, que coincide con los valores de t calculados en (2.158) y (2.159).

Este cálculo formal sólo es válido para un entorno de $t = \tau/2$, donde es razonable aproximar $\tilde{x}(t)$ por la función signo. Pero estos resultados son idénticos a los calculados mediante la interpretación gráfica de la convolución, lo que muestra la potencia del teorema de convolución temporal y su transformada de Fourier, que no sólo permiten reproducir estos resultados, sino también obtener una interpretación ingenieril de este fenómeno utilizando herramientas familiares, y casi sin hacer cuentas.

Para redondear los resultados de convergencia, las aproximaciones $\tilde{x}_N(t)$ de $\pm N$ términos de las series de Fourier convergen a $\tilde{x}(t)$ en todo punto, salvo en los puntos de discontinuidad, donde convergen al valor medio del salto, sólo cuando el número de armónicos $N \rightarrow \infty$. Thompson (1992) analiza en detalle el comportamiento de las series de Fourier truncadas a un número finito de términos N .

2.9. Modulación de frecuencia

Después de estudiar la serie y la transformada de Fourier, y muchas de sus propiedades, podría creerse que se dispone de un conjunto de herramientas que permite calcular la transformada de *cualquier* señal. En esta sección se calcula la transformada de Fourier de señales moduladas en frecuencia, una técnica de modulación muy utilizada en la transmisión de información, que se conoce también como *frecuencia modulada* o FM. El cálculo del espectro de una señal modulada en frecuencia es bastante complicado, y se estudiará sólo para el caso en que la moduladora es una señal sinusoidal. Primero se estudiarán algunas generalidades, y luego se calculará el espectro de este tipo de señales.

2.9.1. Generalidades

Esta modulación es un caso particular de la modulación por ángulo, en la cual la señal modulada $x(t)$ se expresa como

$$x(t) = A \cos[\theta(t)], \quad (2.160)$$

donde A es la amplitud de la portadora, y $\theta(t)$ es un ángulo que varía en el tiempo, y que depende además de la señal moduladora $x_m(t)$. La portadora completa un ciclo de oscilación cuando $\theta(t)$ varía 2π . Si $\theta(t)$ crece monótonamente en el tiempo, la frecuencia promedio en Hz en un intervalo Δt es

$$f_{\Delta t}(t) = \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{2\pi\Delta t},$$

lo que permite definir la *frecuencia instantánea* como

$$f_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_{\Delta t}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t). \quad (2.161)$$

Si la señal moduladora es nula, el ángulo $\theta(t)$ se define como

$$\theta(t) = 2\pi f_p t + \phi_p,$$

y la frecuencia de la señal es constante igual a $2\pi f_p$, y ϕ_p es el valor de $\theta(t)$ en $t = 0$.

Hay muchas maneras de variar el ángulo $\theta(t)$ en función de la señal moduladora. Dos de los más usuales son:

- *Modulación de fase* (PM), en la cual el ángulo $\theta(t)$ se varía linealmente con la señal moduladora $x_m(t)$:

$$\theta(t) = 2\pi f_p t + k_p x_m(t), \quad (2.162)$$

donde $2\pi f_p t$ representa el ángulo de la portadora sin modular, y la constante k_p es la *sensibilidad de fase* del modulador. Por conveniencia, se ha supuesto que $\phi_c = 0$ en (2.162). La expresión temporal de la señal modulada en fase es

$$x(t) = A \cos[2\pi f_p t + k_p x_m(t)]. \quad (2.163)$$

- *Modulación de frecuencia* (FM) en la cual la frecuencia instantánea $f(t)$ se varía linealmente con la señal moduladora $x_m(t)$:

$$f_i(t) = f_p + k_f x_m(t) \quad (2.164)$$

donde f_p es la frecuencia de la portadora sin modular, y k_f representa la *sensibilidad de frecuencia* del modulador. Integrando (2.164) respecto al tiempo, y multiplicando el resultado por 2π se encuentra que el ángulo es

$$\theta(t) = 2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t x_m(\tau) d\tau,$$

donde nuevamente se ha supuesto que el ángulo $\phi_c = 0$ en $t = 0$. La expresión temporal de la señal modulada en frecuencia es entonces

$$x(t) = A \cos \left[2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t x_m(\tau) d\tau \right]. \quad (2.165)$$

Comparando (2.163) con (2.165) se observa que la señal modulada en frecuencia puede pensarse como una señal modulada en fase en la cual la señal moduladora es $\int_0^t x_m(\tau) d\tau$ en lugar de $x_m(t)$, como se muestra en la Fig. 2.102. Por lo tanto, una forma de generar

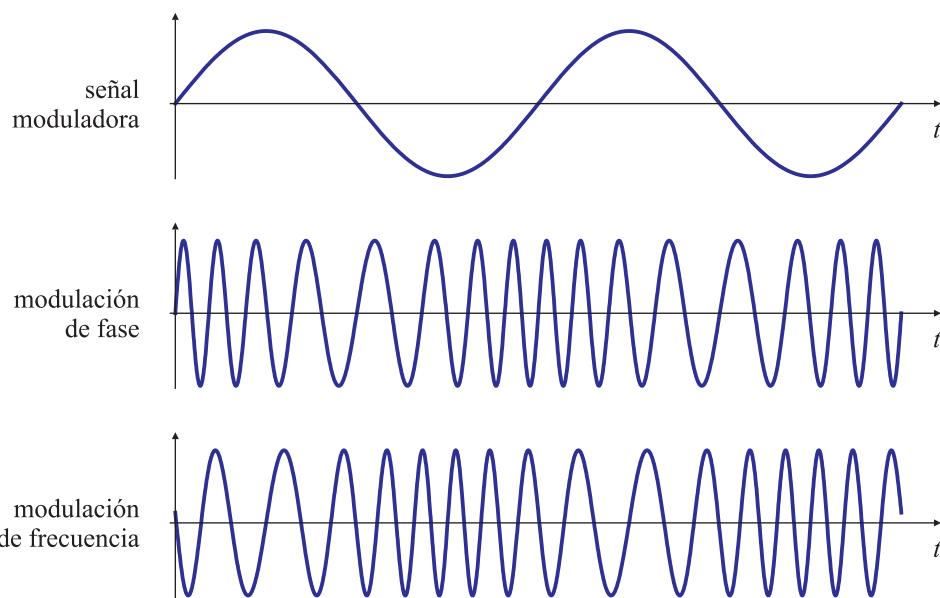


Fig. 2.102. Modulación de fase y de frecuencia de una portadora senoidal por una moduladora senoidal.

una modulación de frecuencia es integrar $x_m(t)$ y usar el resultado como una entrada a un modulador de fase, como se muestra en la Fig. 2.103(a). Recíprocamente, una modulación de fase se puede conseguir derivando la señal moduladora $x_m(t)$ y usando el resultado para atacar un modulador de frecuencia, como se representa en la Fig. 2.103(b). Por lo tanto, todas las propiedades de la modulación de fase pueden derivarse de la modulación en frecuencia y viceversa; por este motivo en las siguientes secciones se estudiará específicamente la modulación en frecuencia.

Una consecuencia de permitir que el ángulo $\theta(t)$ dependa de la señal moduladora $x(t)$ como en (2.163) o de su integral, como en (2.165) es que los cruces por cero de $x(t)$ no son equiespaciados. Esta es una característica que distingue las señales moduladas en ángulo de las señales moduladas en amplitud, estudiadas en el Ejemplo 2.66. Otra diferencia importante es que la envolvente de una señal modulada en ángulo es constante, igual a la amplitud de la portadora, mientras que la envolvente de una señal modulada en amplitud depende de la señal moduladora $x_m(t)$.

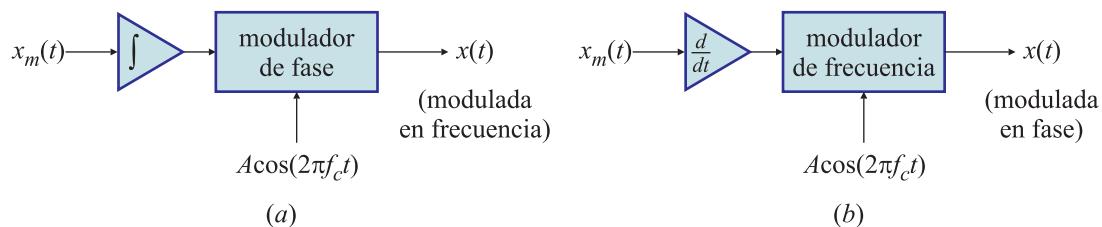


Fig. 2.103. Relación entre modulación de frecuencia y modulación de ángulo: esquemas para generar una señal modulada en frecuencia a partir de un modulador de fase (a), y una señal modulada en fase a partir de un modulador de frecuencia (b).

2.9.2. Modulación en frecuencia con moduladora senoidal

La señal $x(t)$ modulada en frecuencia de (2.165) es una función no lineal de la señal moduladora $x_m(t)$, y por lo tanto, su espectro no es tan sencillo de relacionar con el de la señal moduladora, como en el caso de la modulación de amplitud; en realidad, su análisis es bastante más complicado. En lo que sigue, se tratará el caso en que la señal moduladora $x_m(t)$ es una señal sinusoidal de frecuencia f_m ,

$$x_m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t).$$

La frecuencia instantánea de la señal modulada en frecuencia es

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_p + k_f A_m \cos(2\pi f_m t) \\ &= f_p + \Delta f \cos(2\pi f_m t) \end{aligned}$$

donde $\Delta f = k_f A_m$ se conoce como *desvío*, y representa la mayor diferencia entre la frecuencia instantánea de la señal modulada en frecuencia y la frecuencia de la portadora. Una característica distintiva de la señal modulada en frecuencia es que el desvío Δf es proporcional a la amplitud de la señal moduladora, e independiente de la frecuencia de modulación.

El ángulo de modulación resulta

$$\theta(t) = 2\pi \int_0^t f_i(\tau) d\tau = 2\pi f_p t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t).$$

El cociente $\Delta f / f_m$ entre el desvío y la frecuencia de la moduladora se conoce como *índice de modulación* de la señal modulada en frecuencia, y es usual indicarlo con la letra β . De modo que $\beta = \Delta f / f_m$ y

$$\theta(t) = 2\pi f_p t + \beta \sin(2\pi f_m t).$$

El índice de modulación β representa el desvío de fase de la señal modulada en frecuencia, y por lo tanto se mide en radianes.

Bajo estas condiciones, la señal modulada en frecuencia está dada por

$$x(t) = A \cos [2\pi f_p t + \beta \sin(2\pi f_m t)]. \quad (2.166)$$

Dependiendo del valor del índice de modulación β se distinguen dos casos:

- *Modulación en frecuencia de banda angosta*, cuando β es pequeño comparado con un radián ($\beta \ll 1$), y
- *Modulación en frecuencia de banda ancha*, cuando β es grande comparado con un radián.

Estos dos casos se estudian a continuación, en este orden.

2.9.2.1. Modulación en frecuencia de banda angosta

La señal modulada en frecuencia de (2.166) se puede expandir como

$$x(t) = A \cos(2\pi f_p t) \cos [\beta \sin(2\pi f_m t)] - A \sin(2\pi f_p t) \sin [\beta \sin(2\pi f_m t)].$$

Si α es pequeño, $\cos \alpha \cong 1$ y $\sin \alpha \cong \alpha$. Por lo tanto si $\beta \ll 1$,

$$\cos [\beta \sin(2\pi f_m t)] \cong 1, \quad \text{y} \quad \sin [\beta \sin(2\pi f_m t)] \cong \beta \sin(2\pi f_m t),$$

de modo que (2.166) puede escribirse como

$$x(t) \cong A \cos(2\pi f_p t) - \beta A \sin(2\pi f_p t) \sin(2\pi f_m t). \quad (2.167)$$

Otra manera de expresar $x(t)$ es

$$x(t) \cong A \sqrt{1 + \sin^2(2\pi f_m t)} \cos[2\pi f_p t + \phi(t)], \quad (2.168)$$

con

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \arctan [\beta \sin(2\pi f_m t)] \\ &\cong \beta \sin(2\pi f_m t) - \frac{1}{3} [\beta \sin(2\pi f_m t)]^3 + \frac{1}{5} [\beta \sin(2\pi f_m t)]^5 + \dots \\ &\cong \left(\beta - \frac{\beta^3}{4} + \frac{\beta^5}{8} + \dots\right) \sin(2\pi f_m t) + \left(\frac{\beta^3}{12} - \frac{\beta^5}{16} + \frac{3\beta^7}{64} + \dots\right) \sin[2\pi(3f_m)t] + \dots \end{aligned} \quad (2.169)$$

Idealmente, una señal modulada en frecuencia tiene amplitud constante, pero la expresión (2.168) muestra que la envolvente contiene una modulación de amplitud “residual”, que varía en el tiempo, y la ecuación (2.169) que el ángulo $\theta(t)$ no varía sinusoidalmente con t , sino que tiene distorsión armónica tercer orden (y superior) que dependen de la frecuencia f_m de la señal moduladora. Sin embargo, si el índice de modulación $\beta \leq 0,3$ radianes, la modulación residual de amplitud y de fase es despreciable.

La expresión (2.167) se puede escribir como

$$x(t) \cong A \cos(2\pi f_p t) + \frac{1}{2} \beta A \cos[2\pi(f_p + f_m)t] - \frac{1}{2} \beta A \cos[2\pi(f_p - f_m)t], \quad (2.170)$$

que es similar a la expresión (2.147) de una señal modulada en amplitud, reescrita aquí por conveniencia:

$$x_{MA}(t) \cong A_p \cos(2\pi f_p t) + \frac{1}{2} \mu A_p \cos[2\pi(f_p + f_m)t] + \frac{1}{2} \mu A_p \cos[2\pi(f_p - f_m)t], \quad (2.171)$$

donde μ es el factor de modulación de la señal modulada en amplitud. Comparando las ecuaciones (2.170) y (2.171) se observa que para el caso en que la moduladora es una señal sinusoidal, la diferencia entre la señal modulada en amplitud y la señal modulada en frecuencia de banda angosta es el signo de la componente de frecuencia $f_p - f_m$, como se muestra en la Fig. 2.104. Por lo tanto, el ancho de banda de transmisión de una señal modulada en frecuencia de banda angosta es el mismo ($2f_m$) que el de una señal modulada en amplitud.

2.9.2.2. Modulación en frecuencia de banda ancha

En el caso en que el índice de modulación β no es mucho menor que uno no se pueden aplicar las simplificaciones de la sección anterior. En general, la señal modulada en frecuencia producida por una excitación senoidal no es periódica salvo que la frecuencia f_p de la portadora sea un múltiplo entero de la frecuencia f_m de la señal moduladora.

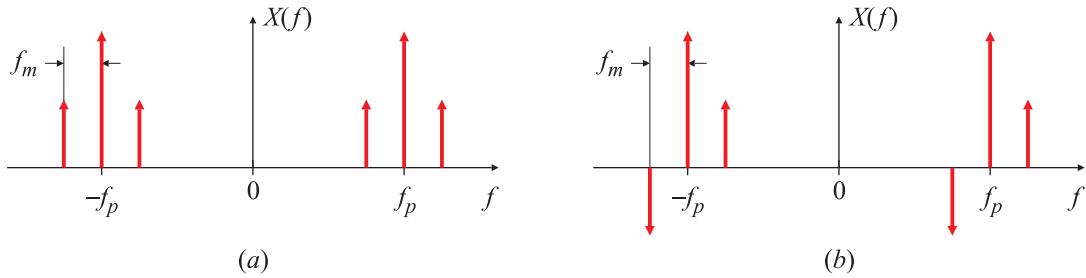


Fig. 2.104. Comparación de los espectros de una señal modulada en amplitud (a) y modulada en frecuencia de banda angosta (b).

Para simplificar el desarrollo es conveniente expresar la señal modulada en frecuencia en forma compleja. Definiendo

$$x_c(t) = A e^{j[2\pi f_p t + \beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)]}$$

es claro que la señal modulada en frecuencia $x(t)$ dada por (2.166) se puede expresar en función de $x_c(t)$ como

$$x(t) = \operatorname{Re}\{x_c(t)\}.$$

En particular, la señal $x_c(t)$ puede escribirse como

$$x_c(t) = A e^{j2\pi f_p t} e^{j\beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)} = s(t) A e^{j2\pi f_p t} \quad (2.172)$$

donde $s(t) = e^{j\beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)}$ es la envolvente compleja de la señal modulada en frecuencia. Esta señal sí es periódica, de período $1/f_m$, y por lo tanto puede escribirse en series de Fourier:

$$s(t) = \sum_k c_k e^{j2\pi k f_m t},$$

con

$$c_k = f_m \int_{-1/(2f_m)}^{1/(2f_m)} s(t) e^{-j2\pi k f_m t} dt = f_m \int_{-1/(2f_m)}^{1/(2f_m)} e^{j\beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)} e^{-j2\pi k f_m t} dt$$

que también puede escribirse como

$$c_k = f_m \int_{-1/(2f_m)}^{1/(2f_m)} e^{j[\beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t) - 2\pi k f_m t]} dt.$$

Los coeficientes de Fourier c_k pueden escribirse utilizando la *función de Bessel de primer tipo* de orden k , $J_k(\beta)$ definida como

$$J_k(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j[\beta \operatorname{sen} x - kx]} dx.$$

Haciendo el cambio de variables $2\pi f_m t = x$, resulta que

$$c_k = J_k(\beta),$$

y entonces

$$s(t) = \sum_k J_k(\beta) e^{j2\pi k f_m t}. \quad (2.173)$$

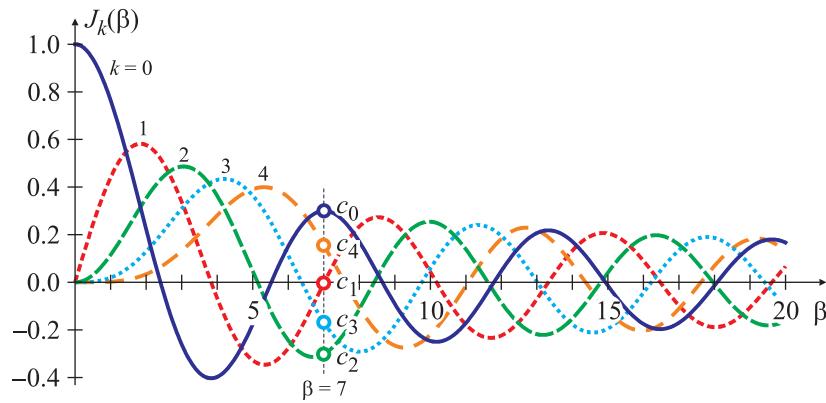


Fig. 2.105. Gráficos de la función de Bessel de primer tipo de orden 0, 1, 2, 3, y 4.

Sustituyendo en (2.172), se encuentra que la versión compleja de la señal modulada en frecuencia es

$$x_c(t) = s(t)Ae^{j2\pi f_p t} = A \sum_k J_k(\beta)e^{j2\pi kf_m t}e^{j2\pi f_p t} = A \sum_k J_k(\beta)e^{j2\pi(f_p + kf_m)t},$$

y por lo tanto la señal modulada en frecuencia se puede escribir como

$$x(t) = \operatorname{Re}\{x_c(t)\} = \operatorname{Re}\left\{A \sum_k J_k(\beta)e^{j2\pi(f_p + kf_m)t}\right\}$$

es decir

$$x(t) = A \sum_k J_k(\beta) \cos[2\pi(f_p + kf_m)t]. \quad (2.174)$$

De esta representación en series de Fourier es fácil encontrar que el espectro de la señal modulada en frecuencia con una moduladora senoidal de frecuencia f_m y una portadora de frecuencia f_p es

$$X(f) = \frac{A}{2} \sum_k J_k(\beta)\delta(f + f_p + kf_m) + J_k(\beta)\delta(f - f_p - kf_m). \quad (2.175)$$

Esta expresión muestra que el espectro de una señal modulada en frecuencia por una senoidal de frecuencia f_m está compuesta por la suma de infinitos impulsos situados a derecha e izquierda de f_p , separados entre sí cada f_m , con un área $AJ_k(\beta)/2$. En la Fig. 2.105 se han graficado las funciones de Bessel $J_k(\beta)$ en función del índice de modulación β para diferentes valores de k . Para un β dado, por ejemplo $\beta = \beta_0$ los coeficientes de Fourier de (2.173) son los representados con círculos en la figura.

Se puede comprender mejor la forma del espectro teniendo en cuenta las siguientes características de las funciones de Bessel:

1. Para k positivo o negativo, $J_k(\beta) = (-1)^k J_{-k}(\beta)$.
2. Si β es pequeño, $J_0(\beta) \cong 1$, $J_1(\beta) \cong \beta/2$, $J_k(\beta) \cong 0$ para $k > 2$.
3. $\sum_k J_k^2(\beta) = 1$.

En base a estas propiedades, y las curvas de la Fig. 2.105 se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. El espectro de una señal modulada en frecuencia está compuesta por una portadora de frecuencia fija f_p e infinitas componentes laterales ubicadas simétricamente a ambos lados de la portadora cada $f_m, 2f_m, 3f_m, \dots$. En una señal modulada en amplitud sólo aparece un par de componentes frecuenciales desplazadas $\pm f_m$ de la portadora.
2. Para el caso en que β es pequeño ($\beta \ll 1$), sólo las funciones de Bessel de orden 0 y 1 toman valores significativos ($J_0(\beta) \cong 1$, $J_1(\beta) \cong \beta/2$), de modo que la señal modulada en frecuencia está compuesta por una portadora y un par de componentes frecuenciales ubicadas en $f = f_p \pm f_m$. Este es el caso de modulación en frecuencia de banda angosta analizado en la Sección 2.9.2.1.
3. La amplitud de la portadora varía con β de acuerdo con $J_0(\beta)$: al contrario de lo que sucede con la modulación en amplitud, la amplitud de la portadora de una señal modulada en frecuencia depende del índice de modulación β . Esta propiedad se puede explicar físicamente teniendo en cuenta que, en ausencia de moduladora, la señal modulada en frecuencia tiene una potencia promedio dada por

$$P = f_p \int_{\frac{1}{f_p}}^{\infty} x(t)^2 dt = f_p \int_{\frac{1}{f_p}}^{\infty} [A \cos(2\pi f_p t)]^2 dt = \frac{1}{2} A^2.$$

La potencia promedio de una señal modulada en frecuencia, cuando la moduladora no es nula, se puede derivar a partir de (2.174) utilizando la igualdad de Parseval (2.120) de la Sección 2.6.16, y resulta

$$P = f_p \int_{\frac{1}{f_p}}^{\infty} x(t)^2 dt = \frac{1}{2} A^2 \sum_k J_k^2(\beta).$$

Como $\sum_k J_k^2(\beta) = 1$, la potencia de las componentes de frecuencias laterales aparece a costa de la potencia de la portadora, haciendo que su amplitud dependa de β .

EJEMPLO 2.70. Espectro de una señal modulada en frecuencia

En este ejemplo se estudia cómo las variaciones de amplitud y de frecuencia de la señal moduladora afectan el espectro de la señal modulada en frecuencia. En primer lugar, se fija la frecuencia de la señal moduladora, pero se cambia su amplitud, lo que produce una variación del desvío $\Delta f = k_f A_m$. Este caso se representa en la Fig. 2.106(a)-(c) para $\beta = \Delta f/f_m = 1, 2$ y 5 , respectivamente. A medida que aumenta el índice de modulación, se incrementa el rango que ocupan las armónicas de la moduladora. Como la frecuencia f_m de la moduladora es fija las armónicas quedan espaciadas por la misma cantidad f_m . En esta figura se han normalizado las amplitudes a la de la portadora sin modular.

En segundo lugar se mantiene fija la amplitud de la señal moduladora, es decir, se mantiene constante Δf , pero se varía su frecuencia f_m . En este caso los espectros para $\beta = 1, 2$ y 5 se muestran en las Figs. 2.106(d)-(e). Se observa que cuando Δf se mantiene constante y se incrementa β , mayor cantidad de líneas espectrales quedan contenidas en el intervalo de frecuencias $f_p - \Delta f < |f| < f_p + \Delta f$. En el límite, cuando $\beta \rightarrow \infty$, el ancho de banda de la señal modulada en frecuencia se aproxima a $2 \Delta f$. \square

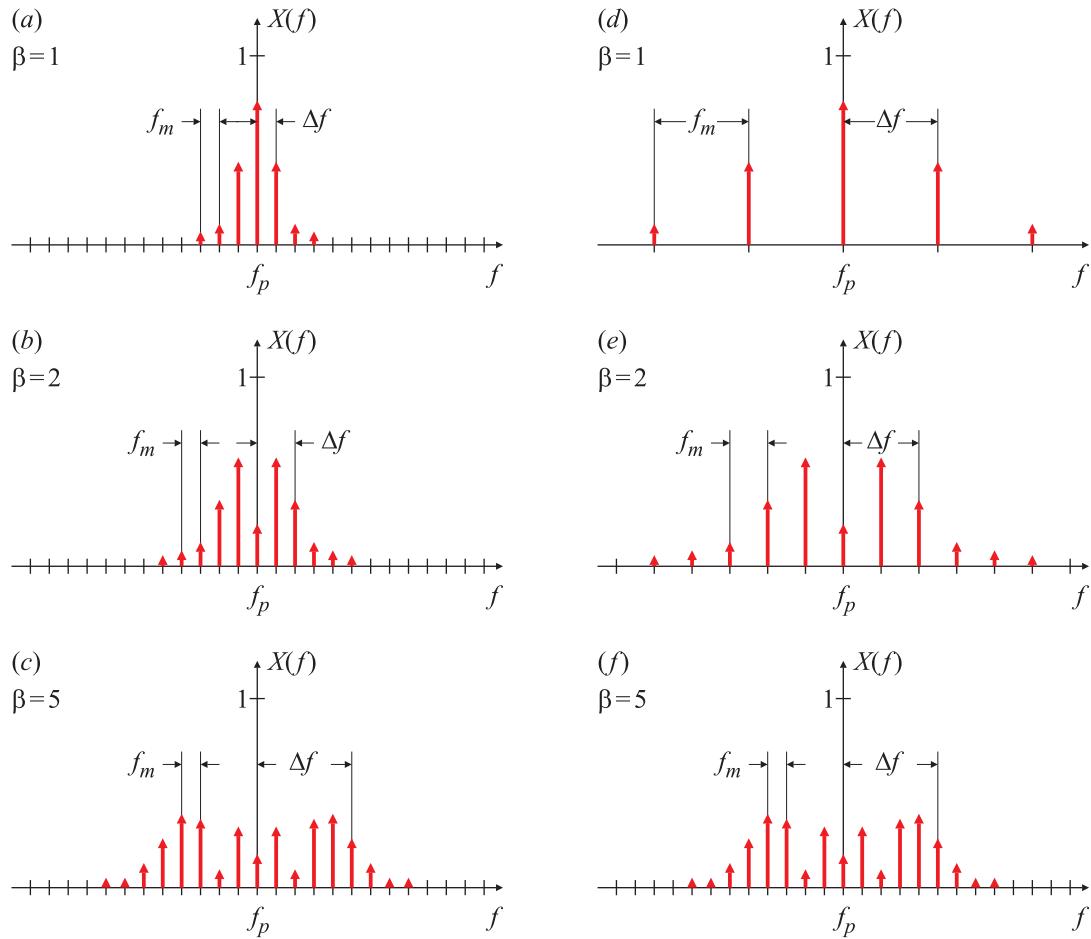


Fig. 2.106. Espectro discreto de una señal modulada en frecuencia por una moduladora senoidal de frecuencia fija f_m y distintas amplitudes (a)-(c), y de distintas frecuencias y amplitud fija (d)-(f). Sólo se muestra una parte del eje positivo de frecuencias.

2.10. Principio de incertidumbre

Si $x(t)$ representa la amplitud de una señal (una onda de sonido, un haz de luz, etc.) en el tiempo t , el principio de incertidumbre expresa una limitación sobre la duración que tal señal puede tener en tiempo, y del ancho de banda que ocupe su transformada de Fourier. Este aspecto del principio de incertidumbre fue inicialmente expuesto por Norbert Wiener en una conferencia dictada en Gotinga en 1925. Desafortunadamente no parece haber sobrevivido ninguna transcripción de esta conferencia, más allá de una reseña no técnica en la autobiografía de Wiener (1956). Cualquiera que haya sido la influencia sobre los físicos presentes, lo cierto es que el principio de incertidumbre no caló en las mentes de las personalidades vinculadas al procesamiento de señales hasta el trabajo fundamental de Gabor en 1946. Desde entonces es un tema común en esta especialidad.

Desde el punto de vista matemático sólo hubo desarrollos esporádicos en los cincuenta años que siguieron al trabajo inicial de la segunda década del siglo XX, para cobrar nuevo impulso en las décadas del 70 al 80, con ecos que llegan hasta el presente. El principio de

incertidumbre ha influido directamente en algunas áreas del análisis, notablemente en (i) el estudio de las propiedades de una función impuestas por restricciones en el soporte o las propiedades de decaimiento de su transformada de Fourier, (ii) la construcción de bases ortonormales o marcos (bases “redundantes”) en L^2 (espacio de las funciones de cuadrado integrable) cuyos elementos y sus transformadas de Fourier están bien localizadas (*onditas* o wavelets), (iii) el vasto cuerpo de resultados analíticos vinculados al análisis de señal y la teoría de comunicaciones. Para hacer justicia a las ramificaciones del principio de incertidumbre en cualquiera de estos tópicos sería necesario un libro para cada uno de ellos. Afortunadamente estos libros han sido escritos: Havin y Jörliche (1994), Daubechies (1992), lo mismo que un buen número de artículos tutoriales, como los de Benedetto (1990), Benedetto, Heil y Walnut (1992) y las colecciones de Price (1985) y de Benedetto y Frazier (1994).

Las propiedades de la transformada de Fourier y los varios ejemplos utilizados para ilustrarlas muestran que la descripción de la señal en los dominios frecuenciales y temporales están *inversamente* relacionadas. En particular, se observa que:

1. Si se cambia la descripción temporal de una señal, su representación en el dominio frecuencial cambia de manera inversa, y viceversa. Esta relación inversa impide que se pueda especificar arbitrariamente una señal en *ambos* dominios: puede definirse una función que dependa arbitrariamente del tiempo o de la frecuencia, pero no puede especificarse *simultáneamente* en ambos dominios. Esta es una limitación importante, por ejemplo, en el diseño de filtros: no puede diseñarse un filtro muy selectivo en frecuencia (con un ancho de banda muy angosto) que al mismo tiempo tenga un tiempo de establecimiento reducido (una respuesta impulsiva de corta duración).
2. Si una señal está estrictamente limitada en frecuencia, su duración temporal será ilimitada, aún cuando su amplitud pueda tomar valores cada vez más pequeños. Se dice que una función es *estrictamente limitada en frecuencia* si su transformada de Fourier es nula fuera de una banda finita de frecuencias. El pulso $\text{sinc}(t)$ (Ejemplo 2.13) es una función que está estrictamente limitada en frecuencia (Fig. 2.20). Esta figura también muestra que el pulso $\text{sinc}(t)$ está *asintóticamente* limitado en tiempo. Recíprocamente, si una señal es *estrictamente limitada en tiempo* (es decir, que la señal es exactamente cero fuera de un intervalo temporal de longitud finita), entonces su espectro se extiende sobre todo el rango de frecuencias, aún cuando su magnitud tenga valores cada vez más pequeños a medida que aumenta la frecuencia. Esto se pone de manifiesto en los casos del pulso rectangular (Ejemplo 2.11) y del pulso triangular (Ejemplo 2.60).

Estas observaciones indican que una señal no puede estar limitada simultáneamente en tiempo y frecuencia, o en otras palabras, que una función temporal y su transformada de Fourier no pueden estar ambas perfectamente localizadas. El teorema del ancho de banda, o principio de incertidumbre de Fourier, formaliza esta idea.

2.10.1. Duración efectiva y ancho de banda

Si $x(t)$ es una función cuyo valor puede ser considerado “despreciable” fuera de algún intervalo (t_1, t_2) , entonces la longitud de dicho intervalo, $\Delta t = t_2 - t_1$ es la *duración efectiva*

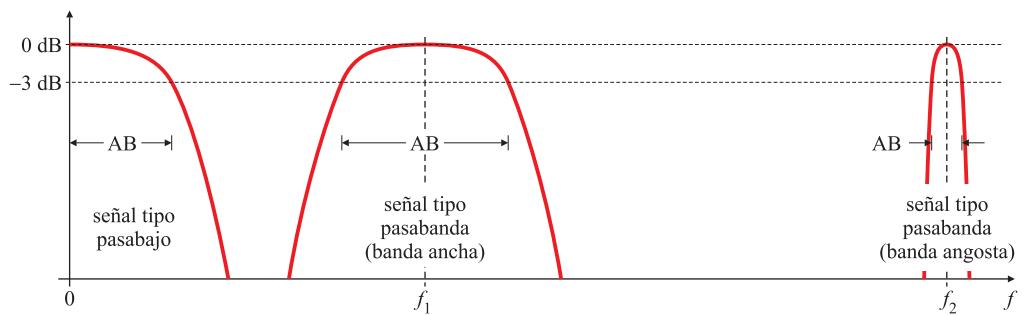


Fig. 2.107. Espectros de señales pasabajo, y pasabanda de banda ancha y de banda angosta.

de $x(t)$. Si $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$, y $X(f)$ puede ser considerada despreciable fuera de cierto intervalo (f_1, f_2) , entonces $\Delta f = f_2 - f_1$ es el *ancho de banda* de $x(t)$. Salvo para ciertos casos, como las señales temporales sinc(\cdot) o rectangulares cuya duración frecuencial o temporal, respectivamente, está bien definida, la duración efectiva o el ancho de banda son conceptos relativamente imprecisos. En consecuencia, no hay definiciones universales, aunque sí algunas comúnmente aceptadas. En el resto de esta sección se hará referencia a las definiciones del ancho de banda, pero las mismas consideraciones son aplicables a la duración efectiva de la señal, en virtud de la propiedad de dualidad de la transformada de Fourier.

Las dos definiciones usuales tienen en cuenta el contenido espectral de la señal. Si el contenido espectral está concentrado cerca del origen, como el espectro de la izquierda de la Fig. 2.107, se dice que la señal es *tipo pasabajos*. En cambio, la señal es *tipo pasabanda* si el contenido espectral está centrado alrededor de $\pm f_c$, donde f_c es una frecuencia no nula, como los espectros del centro y de la derecha de la Fig. 2.107.

Si el espectro de la señal es simétrico, con un lóbulo principal acotado por valles bien pronunciados, se suele definir el ancho de banda de acuerdo al ancho del lóbulo principal. Específicamente, si la señal es pasabajos, el ancho de banda se define como la mitad del ancho total del lóbulo principal, ya que sólo la mitad de este lóbulo yace en el rango de las frecuencias positivas; este es el caso del espectro centrado en el origen de la Fig. 2.107. Por ejemplo, un pulso rectangular de duración τ tiene un espectro cuyo lóbulo principal tiene un ancho de $2/\tau$ Hz en torno al origen (Fig. 2.18). En consecuencia, y de acuerdo a esta convención, se dice que el pulso rectangular tiene un ancho de banda de $1/\tau$ Hz (Ejemplo 2.11).

Por otra parte, si la señal es tipo pasabanda, con un espectro cuyos lóbulos principales están centrados en $\pm f_c$, donde f_c es grande, se define el ancho de banda como el ancho del lóbulo principal que yace en las frecuencias positivas. Esta definición del ancho de banda se denomina *ancho de banda entre ceros*.

Otra definición popular es el *ancho de banda de 3 dB*. Si la señal es tipo pasabajos, el ancho de banda de 3 dB se define como la separación entre la frecuencia cero, donde el espectro de amplitud alcanza su valor máximo, y la frecuencia positiva en la cual el valor del espectro cae a $1/\sqrt{2}$ de su valor pico. Por ejemplo, el pulso exponencial decreciente (Ejemplo 2.5) o creciente (Ejemplo 2.40) tienen un ancho de banda de $1/(2\pi)$ Hz. Si, en cambio, la señal es tipo pasabanda, centrada en $\pm f_c$, el ancho de banda de 3 dB es la separación, sobre el eje de frecuencias positivo, entre las dos frecuencias a las cuales la

amplitud del espectro cae a $1/\sqrt{2}$ del valor pico que alcanza en f_c . El ancho de banda de 3 dB tiene la ventaja que puede ser leído directamente a partir de un gráfico del espectro de amplitud aunque puede ser difícil de determinar si el espectro de amplitud decae muy lentamente.

Otras definiciones usuales del ancho de banda se basan en el rango de frecuencias donde se concentra la potencia o energía de la señal. Por ejemplo, si el 95 % del espectro de densidad de potencia abarca el intervalo de frecuencias $f_1 < f < f_2$, se dice que su ancho de banda de 95 % es $f_2 - f_1$. De manera similar, se definen los anchos de banda de 75 %, 90 %, o 99 % de la señal.

En el caso de una señal pasabanda, la expresión *banda angosta* indica que el ancho de banda de la señal $f_2 - f_1$ es mucho menor (por un factor de 10 o más) que la frecuencia media $(f_1 + f_2)/2$, como ocurre con el espectro de la derecha de la Fig. 2.107. En caso contrario la señal se denomina de *banda ancha* como el espectro del centro de la Fig. 2.107. Por ejemplo, las señales de radio de modulación de amplitud (MA) son señales de banda angosta, ya que el ancho de banda es de 5 kHz, y la portadora (la “frecuencia mitad”) va desde 560 kHz hasta 1200 kHz, aproximadamente. La relación entre la portadora y el ancho de banda es de 100 a 240 veces. Aún la señal de TV puede describirse como de “banda angosta”, pues aunque tiene un ancho de banda de 6 MHz, las portadoras van desde 54 MHz hasta 88 MHz para los canales 2 al 6, y desde 174 MHz hasta 216 MHz para los canales del 7 al 13.

2.10.2. Funciones de duración finita

Una función $x(t)$ tiene duración finita si $x(t) = 0$ para todo $t \notin [t_0, t_1]$. La duración de la señal es $\Delta t = t_1 - t_0$. La transformada de Fourier de esta señal es

$$X(f) = \int_{t_0}^{t_1} x(t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (2.176)$$

Cualquier señal continua a tramos de longitud finita es absolutamente integrable, y tiene energía finita, de modo que la transformada de Fourier de señales de duración finita está bien definida. Además, para cualquier entero n no negativo, $t^n x(t)$ también es continua a tramos, absolutamente integrable y de energía finita. A partir de la propiedad de diferenciación en frecuencia de la transformada de Fourier es sencillo derivar el par transformado

$$(-j2\pi t)^n x(t) \iff X^{(n)}(f) = \int_{t_0}^{t_1} (-j2\pi t)^n x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

que muestra que las derivadas en frecuencia de cualquier orden n de la transformada de Fourier de $X(f)$ existen y están bien definidas, y que no pueden ser todas idénticamente nulas. Si se expresa la transformada $X(f)$ en una serie de Taylor alrededor de una frecuencia f_0 arbitraria,

$$X(f) = X(f_0) + X'(f_0)(f - f_0) + \frac{1}{2!} X^{(2)}(f_0)(f - f_0)^2 + \frac{1}{3!} X^{(3)}(f_0)(f - f_0)^3 + \dots$$

se observa que la transformada no puede ser idénticamente nula en ningún intervalo de frecuencias⁴. En consecuencia, una señal de duración finita no puede ser simultáneamente de banda limitada.

⁴Más correctamente, la definición de $H(f)$ en (2.176) muestra que está bien definida para todo $f = \sigma + j\omega$. No es difícil demostrar que $H(\sigma + j\omega)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann del análisis complejo. Por

Otra manera de explicar este hecho es observando que si $x(t)$ y $X(f)$ fuesen *ambas* de longitud finita, $x(t)$ se puede escribir como $x(t) = x(t)[u(t+a) - u(t-a)]$ para algún $a > 0$. Por lo tanto, la transformada de Fourier $X(f)$ de $x(t)$ es la convolución entre la transformada de $x(t)$ y la transformada de $b(t) = u(t+a) - u(t-a)$, un pulso rectangular centrado en cero, y distinto de cero para $t \in [-a, a]$. Pero como la transformada de $b(t)$ es una función tipo sinc (\cdot), y $X(f)$ no es nula, la convolución de las dos no es idénticamente nula para ningún intervalo de frecuencias, lo que contradice la hipótesis de partida.

2.10.3. Funciones de ancho de banda finito

Una función $x(t)$ con transformada de Fourier $X(f)$ es de ancho de banda finito si $X(f) = 0$ para todo $f \notin [f_0, f_1]$. En general, el ancho de banda de la señal es $\Delta f = f_1 - f_0$, aunque deben tenerse en cuenta las consideraciones de la Sección 2.10.1. Por la relación dual entre la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier, es evidente que $x(t)$ satisface propiedades similares a las de las transformadas de señales de duración finita. En particular,

$$x(t) = \int_{f_0}^{f_1} X(f) e^{j2\pi ft} df,$$

y, para cualquier entero n no negativo, las derivadas temporales de orden n de $x(t)$ están dadas por

$$x^{(n)}(t) = \int_{f_0}^{f_1} (j2\pi f)^n X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

De acuerdo a consideraciones similares a las de la Sección 2.10.2, si $x(t)$ es de banda limitada, entonces $x(t)$ no puede anularse o tomar valores constantes sobre ningún intervalo no trivial de la línea real. En otras palabras, ninguna señal de ancho de banda limitado puede tener duración finita.

Vale tener presente estas consideraciones en muchas aplicaciones prácticas donde es deseable (pero, como se ha demostrado, imposible) contar con señales que simultáneamente sean de duración finita y de ancho de banda limitado.

2.10.4. Duración efectiva por ancho de banda

El teorema del ancho de banda postula que existe una constante universal positiva γ tal que la duración efectiva Δt y el ancho de banda Δf de cualquier función (con Δt y Δf finitos) satisfacen

$$\Delta t \Delta f \geq \gamma.$$

Entonces no es posible encontrar una función cuyo ancho de banda y su duración efectiva sean ambos arbitrariamente pequeños (o grandes). Debido a su similitud con el principio de incertidumbre de Heisenberg de la mecánica cuántica, el teorema del ancho de banda también se conoce como el principio de incertidumbre del análisis de Fourier.

La constancia de este producto es otra manifestación de la relación inversa que existe entre las descripciones en los dominios temporal y frecuencial de una señal. Cualquiera sea la

lo tanto, $H(f)$ es analítica tanto en la línea real como en el plano complejo, y en consecuencia, no puede anularse o tomar valores constantes sobre cualquier intervalo no trivial de la línea real.

definición que se adopte para el ancho de banda, el producto duración efectiva-ancho de banda permanece constante para cierto tipo de señales. La elección de una definición particular de ancho de banda sólo cambia el valor de la constante γ . Para las funciones tipo pulso el producto del tiempo de duración de la señal por su ancho de banda es constante, ya que si la duración de una señal se reduce escalando el eje de tiempos por un factor a , la escala de frecuencia de la señal, y por lo tanto su ancho de banda, se incrementa por el mismo factor a (en virtud de la propiedad de escalado en tiempo, Sección 2.6.3).

Hay varias versiones de este teorema, cada una de ellas aplicable a una clase particular de funciones. En cada uno de estos casos corresponde definir apropiadamente qué se entiende por “ancho de banda” y “duración efectiva”, como se mencionó más arriba. Para ejemplificar se verán los casos de las funciones $x(t)$ que son absolutamente integrables, y de las de energía finita (de cuadrado integrable).

2.10.4.1. Señales absolutamente integrables

Se supone aquí que tanto $x(t)$ como su transformada de Fourier $X(f)$ son absolutamente integrables. Sean t^* y f^* dos valores fijos de t y f tales que $x(t^*) \neq 0$ y $X(f^*) \neq 0$. La duración efectiva Δt y el ancho de banda efectivo Δf son los valores que satisfacen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = |x(t^*)| \Delta t \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)| df = |X(f^*)| \Delta f. \quad (2.177)$$

como se representa en la Fig. 2.108. El teorema del ancho de banda para funciones absolutamente integrables establece que

$$\Delta t \Delta f \geq 1,$$

y si $x(t)$ y $X(f)$ son funciones reales no negativas, y además $x(0)$ y $X(0)$ son no nulas,

$$\Delta t \Delta f = 1.$$

Las ecuaciones (2.177) sólo establecen una relación entre la duración de la señal en un dominio, y un valor particular de su transformada en el otro. La elección particular de los valores de t^* y f^* depende de la aplicación a que se destine el teorema. Una elección típica es seleccionar t^* y f^* de modo de maximizar los valores de $|x(t^*)|$ y $|X(f^*)|$, como muestra la Fig. 2.108, lo que minimiza el ancho de banda efectivo y la duración efectiva, respectivamente. Otra posibilidad, cuando tanto $x(t)$ como $X(f)$ son funciones pares real valudas con máximos en el origen es elegir $t^* = f^* = 0$.

La demostración del teorema es muy sencilla en este caso. Como $x(t)$ y $X(f)$ son absolutamente integrables,

$$|X(f^*)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f^* t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-j2\pi f^* t}| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = |x(t^*)| \Delta t,$$

y análogamente,

$$|x(t^*)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-j2\pi f t^*} df \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |X(f) e^{-j2\pi f t^*}| df \leq \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)| df = |X(f^*)| \Delta f,$$

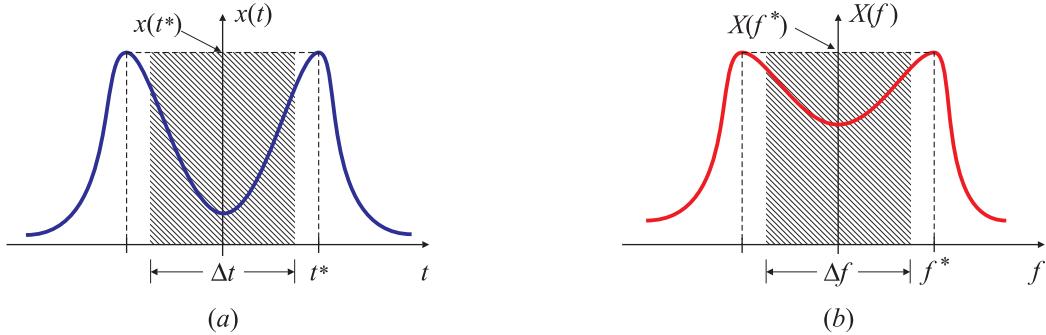


Fig. 2.108. Representación gráfica de la duración efectiva (a) y el ancho de banda efectivo (b).

de modo que

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{|X(f^*)|}{|x(t^*)|} \times \frac{|x(t^*)|}{|X(f^*)|} = 1.$$

Si \$x(t)\$ y \$X(f)\$ son funciones reales no negativas, y \$x(0)\$ y \$X(0)\$ son distintas de cero, entonces las cantidades de arriba pueden reemplazarse por

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = x(0) \Delta t, \quad x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)df = X(0) \Delta f,$$

y entonces,

$$\Delta t \Delta f = \frac{|X(0)|}{|x(0)|} \times \frac{|x(0)|}{|X(0)|} = 1.$$

En el caso en que la transformada de Fourier se exprese en función de la frecuencia angular \$\Omega\$, el teorema del ancho de banda para funciones absolutamente integrables establece que \$\Delta t \Delta \Omega \geq 2\pi\$, como se analiza en el Ejercicio 45.

EJEMPLO 2.71. Teorema del ancho de banda para señales absolutamente integrables
Sea \$x(t) = e^{-\alpha|t|}\$, \$\alpha > 0\$. Su transformada es

$$X(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}.$$

como se mostró en el Ejemplo 2.39 con \$\beta = 1\$. Tanto \$x(t)\$ y \$X(f)\$ son funciones pares con máximos en el origen, como se muestra en la Fig. 2.54(b), y por lo tanto para calcular la duración efectiva y el ancho de banda se puede adoptar \$t^* = 0\$ y \$f^* = 0\$:

$$\Delta t = \frac{1}{|x(0)|} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} dt = \frac{2}{\alpha}, \quad (2.178)$$

$$\Delta f = \frac{1}{|X(0)|} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)| df = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} df = \frac{\alpha}{2}. \quad (2.179)$$

El producto de la duración efectiva por el ancho de banda es entonces

$$\Delta t \Delta f = \left(\frac{2}{\alpha}\right) \left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1,$$

como lo predice el teorema del ancho de banda. La igualdad se alcanza pues tanto \$x(t)\$ como \$X(f)\$ son funciones reales y no negativas, con \$x(0) \neq 0\$, \$X(0) \neq 0\$. Intuitivamente, cuanto más pequeño

sea α (es decir, la constante de tiempo $1/\alpha$ es mayor) tanto mayor será la “duración efectiva” de la señal $x(t)$; la ecuación (2.178) muestra que la duración efectiva Δt es inversamente proporcional a α . En consecuencia, la transformada de Fourier tendrá un ancho de banda efectivo Δf menor, directamente proporcional a α , tal como se revela en la ecuación (2.179). \square

2.10.4.2. Señales de cuadrado integrable, o energía finita

Cuando $x(t)$ y su transformada de Fourier $X(f)$ son funciones de energía finita, conviene definir la duración efectiva y el ancho de banda efectivo como los momentos de segundo orden de la señal y la transformada,

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \quad \text{y} \quad (\Delta f)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f - f^*)^2 |X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df},$$

respectivamente, donde t^* y f^* están dados por los momentos de primer orden

$$t^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \quad \text{y} \quad f^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f |X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df}.$$

Los valores de la duración efectiva y el ancho de banda efectivo calculados de esta manera difieren de los calculados con las definiciones de la Sección anterior. Usando la definición de energía E de la señal

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df, \quad (2.180)$$

la duración efectiva y el ancho de banda efectivo pueden escribirse de manera más compacta como

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |x(t)|^2 dt}, \quad \text{y} \quad \Delta f = \sqrt{\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (f - f^*)^2 |X(f)|^2 df}. \quad (2.181)$$

El teorema del ancho de banda para señales de energía finita establece que, si Δt y Δf están bien definidas, y si además

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \sqrt{t} x(t) = 0, \quad (2.182)$$

es decir, que la señal temporal decrece más rápidamente que $1/\sqrt{t}$, entonces

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi},$$

y la igualdad se verifica sólo si $x(t)$ y $X(f)$ están linealmente relacionadas entre sí. De acuerdo al resultado del Ejemplo 2.48, esto sucede si $x(t)$ es una función gaussiana, $x(t) = Ae^{-\alpha t^2}$, con $\alpha > 0$.

Si la transformada de Fourier se expresa en función de la frecuencia angular Ω , el teorema del ancho de banda para funciones de energía finita establece que $\Delta t \Delta \Omega \geq 1/2$.

La demostración para esta clase de señales es un poco más complicada que para el caso de señales absolutamente integrables, y se basa en la desigualdad de Cauchy-Schwartz, que establece que

$$\left| \int g(t) h(t) dt \right|^2 \leq \int |g(t)|^2 dt \int |h(t)|^2 dt \quad (2.183)$$

y la igualdad se verifica sólo cuando $g(t)$ y $h(t)$ están linealmente relacionadas entre sí, $g(t) = k h(t)$.

Para simplificar la notación se asume que tanto t^* como f^* son nulos; si no lo fuesen, basta efectuar un cambio de variables en las integrales. Definiendo

$$g(t) = t x(t), \quad h(t) = \frac{d}{dt} x(t),$$

la desigualdad de Cauchy-Schwartz (2.183) toma la forma

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) \frac{d}{dt} x(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |t x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} x(t) \right|^2 dt. \quad (2.184)$$

El miembro izquierdo de la desigualdad se puede integrar por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t x(t) \frac{d}{dt} x(t) dt = \frac{1}{2} t x^2(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = -\frac{E}{2}, \quad (2.185)$$

de acuerdo con la condición (2.182) y la definición de energía (2.180). Por otra parte, aplicando la propiedad de derivación temporal de la transformada de Fourier (2.94) y la relación de Parseval (2.119) resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} x(t) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |j 2\pi f X(f)|^2 df = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f X(f)|^2 df. \quad (2.186)$$

Sustituyendo (2.185) y (2.186) en (2.184), se tiene que

$$\frac{E^2}{4} \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |t x(t)|^2 dt}_{(\Delta t)^2 E} (2\pi)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f X(f)|^2 df}_{(\Delta f)^2 E} = E^2 (2\pi)^2 (\Delta t)^2 (\Delta f)^2,$$

de acuerdo a las definiciones de duración efectiva y ancho de banda efectivo (2.181). En consecuencia,

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}.$$

La igualdad se verifica sólo para señales que verifiquen $tx(t) = k \frac{d}{dt} x(t)$, es decir, si $x(t)$ es el pulso gaussiano, $x(t) = Ce^{-\frac{k}{2}t^2}$ del Ejemplo 2.48. En otras palabras, el pulso gaussiano es la señal que tiene el mínimo producto ganancia-ancho de banda.

EJEMPLO 2.72. Teorema del ancho de banda para señales de energía finita

Sea la señal $x(t)$ del ejemplo anterior, que satisface el par transformado

$$x(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0 \iff X(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}.$$

Como $t x(t)$ y $f X(f)$ son funciones impares, resulta $t^* = 0$ y $f^* = 0$. La energía E está dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\alpha|t|}|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

La duración efectiva de la señal es

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |x(t)|^2 dt} = \sqrt{2\alpha \int_0^{\infty} t^2 e^{-2\alpha t} dt} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}},$$

y el ancho de banda se obtiene integrando por partes,

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sqrt{\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (f - f^*)^2 |X(f)|^2 df} = \sqrt{\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right)^2 df} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\pi^2}} = \frac{\alpha}{2\pi}. \end{aligned}$$

El producto de la duración efectiva por el ancho de banda es

$$\Delta t \Delta f = \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \right) \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \geq \frac{1}{4\pi}$$

como lo predice el teorema, ya que en este caso las funciones $x(t)$ y $X(f)$ no están linealmente relacionadas entre sí. \square

El principio de incertidumbre del análisis de Fourier muestra que señales extremadamente concentradas en un dominio pierden su “localidad” en el otro: la transformada de Fourier de un impulso temporal $x(t) = \delta(t)$, una señal concentrada en $t = 0$, es una constante en frecuencia $X(f) = 1$ que no está “concentrada” en ningún rango de frecuencia. Por otra parte, una señal sinusoidal $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, que no se puede “concentrar” en algún intervalo de tiempo porque está definida para $-\infty < t < \infty$, tiene una transformada de Fourier que está localizada (concentrada) en $f = \pm f_0$. Esta “falta de localidad” conjunta es causa de varios problemas cuando se trabaja con aplicaciones en el dominio frecuencial. Por este motivo se han desarrollado teorías de transformaciones muy modernas que permiten obtener simultáneamente buenas descomposiciones frecuenciales y temporales de las señales, que quedan bastante concentradas en tiempo y en frecuencia, tales como la transformada de Fourier de tiempo limitado (*short-time Fourier Transform*) o la transformación por “onditas” (*wavelets*).

2.11. Breve reseña histórica

La historia⁵ del análisis de Fourier tiene más de 200 años. Sus orígenes principian unos 60 años antes del momento en que Jean Baptiste Joseph Fourier presentó la primera versión de su trabajo sobre la teoría de la conducción del calor a la Academia de París (1807). El año 1750 es un buen punto de partida: Fernando VI era rey de España, y Jorge II de Inglaterra; las colonias de América del norte estaban en medio de las guerras con los

⁵Parte de esta reseña está extractada de Briggs y Henson, 1995. En el Apéndice E se resumen las biografías de las principales personalidades que participaron en el desarrollo del análisis de Fourier y del procesamiento de señales en general.

nativos y los franceses; unos años después Carlos III creaba el virreinato del Río de la Plata (1776). Voltaire, Rousseau y Kant estaban escribiendo sus libros en Europa; Bach acababa de morir, y Mozart estaba pronto a nacer; y el cálculo de Leibnitz y Newton, publicado 75 años antes, estaba permitiendo la creación de nuevas y poderosas teorías sobre la mecánica celeste y la mecánica del continuo.

En ese momento los esfuerzos de los físicos y matemáticos se concentraban en dos problemas principales, que sentarían las bases de lo que posteriormente se conocería como análisis de Fourier:

- El problema de la cuerda vibrante o la propagación del sonido en un medio elástico;
- La determinación de las órbitas de los planetas a partir de mediciones.

El primer problema será tratado a continuación. El segundo, que da lugar al desarrollo de la Transformada Discreta de Fourier, se tratará en el Capítulo 4.

2.11.1. El problema de la cuerda vibrante

Una cuerda elástica (un alambre metálico) sujetada en ambos extremos, vibra al ser golpeada o punteada. Para simplificar el modelo se supone que la cuerda es un objeto unidimensional, ocupando el intervalo $0 \leq x \leq 1$ en el plano x - y cuando está en reposo. En el tiempo $t = 0$ se desplaza de su posición inicial, manteniendo sus extremos fijos. La forma de la cuerda se puede expresar como el grafo de una función

$$y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{con } f(0) = f(1) = 0.$$

Apenas se libera, la cuerda comienza a vibrar: éste es el modelo de una cuerda *punteada*.

El modelo de la cuerda *golpeada* tiene en cuenta además que en $t = 0$ a cada punto x de la cuerda se le imparte una velocidad $g(x)$ (la velocidad inicial) en la dirección y . La expresión $y(t, x)$ describe el desplazamiento del punto x de la cuerda en el tiempo t .

El movimiento queda gobernado por las ecuaciones:

$$(i) \quad \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} \quad (\text{ecuación de onda})$$

$$(ii) \quad y(t, 0) = y(t, 1) = 0 \quad \text{para todo } t \quad (\text{condiciones de borde})$$

$$(iii) \quad y(0, x) = f(x), \quad \frac{\partial y(0, x)}{\partial t} = g(x) \quad (\text{condiciones iniciales})$$

La solución de este problema atrajo la atención de muchas generaciones de matemáticos. Un hecho evidente es que para cada entero k , tanto

$$y(t, x) = \sin(k\pi x) \sin(ak\pi t) \tag{2.187}$$

como

$$y(t, x) = \sin(k\pi x) \cos(ak\pi t) \tag{2.188}$$

satisfacen (i) y (ii). La primera verifica (iii) si $f(x) = 0$ y $g(x) = ak\pi \sin(k\pi x)$, y la segunda cumple con (iii) si $f(x) = \sin(k\pi x)$ y $g(x) = 0$.

Cualquier combinación lineal *finita* de funciones como (2.187) y (2.188), esto es, una función de la forma

$$y(t, x) = \sum_k [\alpha_k \cos(ak\pi t) + \beta_k \sin(ak\pi t)] \sin(k\pi x) \quad (2.189)$$

también satisface (i) y (ii), y verifica (iii) para cierta elección de $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$. Pero si $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son funciones *arbitrarias* es muy probable que la suma finita de (2.189) no satisfaga (iii). Por otra parte, una suma *infinita* de la forma (2.189) también verifica (i) y (ii) siempre que sea posible derivar la serie término a término.

Es natural preguntarse: ¿cuándo es posible tal diferenciación? Si la solución expresada en forma de serie converge, y puede diferenciarse, ¿se puede hacer que cumpla con la condición (iii) para cualquier elección de $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$? ¿Existen otras soluciones al problema? Las series de Fourier se idearon para intentar responder estas preguntas, y en el curso de su desarrollo se precisaron conceptos tales como *conjunto* y *función*.

Una de las primeras soluciones al problema de la cuerda vibrante fue propuesto por J. D'Alembert en 1747, quien derivó una solución simple y elegante de la forma

$$y(t, x) = v(at + x) - v(at - x),$$

que puede interpretarse como la suma de dos ondas viajeras, una desplazándose hacia la izquierda y otra hacia la derecha. Para el caso de la cuerda punteada, hay una única $f(\cdot)$ y la solución involucra la función $v(\cdot)$ que puede calcularse a partir de $f(\cdot)$. Por lo tanto, D'Alembert creyó que había resuelto el problema completamente.

En esta época la palabra *función* tenía un significado muy restringido: significaba *fórmula*, y representaba objetos tales como $f(x) = x^2$, o $f(x) = x \tan x^2 + 10e^x$. Podía ser tan complicada como se quisiese, pero tenía que ser una única expresión analítica. Algo como

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ (1-x^2), & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

no calificaba como “función” en el intervalo $[0, 1]$. En otras palabras, *función* y *gráfico* significaban objetos diferentes. Cada función puede ser representada por su gráfico, pero no todo gráfico puede dibujarse como el gráfico de una función.

Euler pensó que no era necesario que la posición inicial de la cuerda fuese una “función”, pero sí un gráfico, y que la solución de la onda viajera debía ser válida, interpretando las dos ondas como gráficos. Este razonamiento “físico” fue rechazado por D'Alembert; su razonamiento analítico sólo funcionaba para funciones.

Tanto Euler como Lagrange resolvieron el problema “discretizando” la cuerda vibrante: la supusieron formada por un número finito de pequeñas partículas conectadas. La solución requería encontrar los valores que toma la función que describe el desplazamiento de la cuerda sobre un conjunto de puntos.

En 1755 Daniel Bernoulli propuso otra solución en función de *ondas estacionarias*. Su argumento se comprende mejor al considerar la solución

$$y(t, x) = \sin(k\pi x) \cos(ak\pi t).$$

Cuando $k = 1$, los puntos $x = 0$ y $x = 1$ (los extremos de la cuerda) permanecen fijos para todo t , y los otros puntos se mueven según una ley que depende del coseno del tiempo.

Cuando $k = 2$, los puntos $x = 0$, $x = 1$ y también el punto $x = 1/2$ quedan fijos; el resto de los puntos se mueve. En cualquier instante de tiempo t dado, la forma de la cuerda es la de una sinusode, y el movimiento de un punto arbitrario es una función cosenoide del tiempo. El punto $x = 1/2$ se denomina *nodo*. Para cualquier $k > 1$ arbitrario, los puntos $1/k$, $2/k$, ..., $(k - 1)/k$ de la cuerda quedan fijos, mientras que el resto de los puntos se desplazan como se describió más arriba. Estas son las llamadas *ondas estacionarias*; los puntos fijos interiores se denominan *nodos* y el movimiento para $k = 1, 2, \dots$ se denomina *primer armónico*, *segundo armónico*, etc. Bernoulli afirmó que cada solución de la cuerda pulsada con condiciones iniciales $y(0, x) = f(x)$, $\partial y(0, x)/\partial t = 0$ es una suma de estas armónicas, y que esta suma podía ser infinita.

Euler no estaba de acuerdo con este planteo y sus principales objeciones fueron dos. En primer lugar, las hipótesis de Bernoulli implicarían que cualquier función $f(x)$ podría representarse como

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \operatorname{sen}(k\pi x), \quad (2.190)$$

porque en $t = 0$ la condición inicial puede ser cualquier $f(x)$. Sin embargo, el miembro derecho de (2.190) es una función periódica (e impar), mientras que el miembro de la izquierda es completamente arbitrario. La segunda objeción es que (2.190) no puede ser una solución *general* del problema, ya que el miembro de la derecha (aunque sea una serie infinita) es una función analítica y por lo tanto una “función” (en el sentido que se entendía entonces). Sin embargo, como el mismo Euler había observado anteriormente en conexión con la solución propuesta por D'Alembert, la posición inicial de la cuerda podía ser cualquier *gráfico*, y no necesariamente una *función*. En síntesis, la solución propuesta por Bernoulli sería aplicable sólo a una clase muy restringida de funciones.

Bernoulli insistió en que su solución era válida para todas las funciones. Su respuesta a la primera objeción de Euler fue que la serie (2.190) incluía una sucesión infinita de coeficientes α_k , y que eligiéndolos de manera apropiada se podía hacer que la serie tomara el valor $f(x)$ para infinitamente muchos x . Hoy se sabe que si dos funciones $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son iguales en infinitamente muchos puntos, no necesariamente son iguales en todos los puntos; sin embargo, en aquella época la naturaleza del infinito y de una función no estaba completamente comprendida, y este argumento parecía plausible. Euler no lo aceptó, pero por otros motivos.

En 1804 Joseph Fourier comenzó sus estudios sobre la conducción del calor en sólidos, y en sólo tres años descubrió las ecuaciones básicas de conducción de calor, desarrolló nuevos métodos para resolverlas, utilizó sus métodos para solucionar muchos problemas prácticos, y aportó evidencia experimental para soportar su teoría.

Una de las situaciones más simples en las que se puede aplicar la técnica de análisis ideada por Fourier es considerar un disco bidimensional para el cual la temperatura sobre el borde es conocida. A partir de estos datos, se desea determinar la temperatura en *cualquier* punto interior del disco

En estado estacionario, la temperatura $u(r, \theta)$ de un punto (r, θ) obedece a la ecuación de Laplace (en coordenadas polares)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.191)$$

Las temperaturas en el borde del disco están dadas por

$$u(1, \theta) = f(\theta), \quad (2.192)$$

donde $f(\cdot)$ es una función continua dada. El problema de encontrar $u(r, \theta)$ para todo r y θ es análogo al de la cuerda vibrante. Empleando un análisis muy similar al de Bernoulli, Fourier observó que la suma finita

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N A_n r^{|n|} e^{jn\theta}$$

también es una solución de (2.191), y que eligiendo adecuadamente los coeficientes A_n se podía hacer que cumpliese la condición de borde (2.192). En otras palabras, se puede escribir

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\theta} \quad (2.193)$$

cuando $f(\cdot)$ es una función continua.

Fourier avanzó un paso más y aseguró que su método servía no sólo cuando $f(\cdot)$ fuese una “función” sino también cuando $f(\cdot)$ estuviese dada por un grafo arbitrario, eliminando las distinciones entre un gráfico y una función. De hecho, si la afirmación de Fourier fuese correcta, cualquier grafo tendría una fórmula, dada por la serie asociada con él.

Fourier, como Euler, calculó la expresión de los coeficientes A_k de una forma muy laboriosa (y errónea). La versión corregida es

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-jn\theta} d\theta. \quad (2.194)$$

La serie (2.193) se conoce como *serie de Fourier*, y los coeficientes (2.194) como *coeficientes de Fourier* de $f(\cdot)$. Fourier observó que los coeficientes A_n tienen sentido siempre que $f(\cdot)$ sea un gráfico limitando un área definida (integrable en la terminología actual), y por lo tanto declaró que sus resultados eran válidos para cualquier $f(\cdot)$ que tuviese esa propiedad.

En 1807 Fourier presentó su trabajo *Mémoire sur la propagation de la chaleur* al Instituto de París. El trabajo recibió apenas una tenue acogida, y los jueces recomendaron a Fourier que puliera su trabajo, y lo presentara para el gran premio de 1812. El panel de jueces de la Academia para este concurso incluía a Lagrange, Laplace, y Legendre, y acordaron a Fourier el gran premio, pero no sin reservas: incomodaba el comentario de Fourier acerca de que *cualquier* función periódica arbitraria podía ser representada con la ecuación (2.193). El gran premio contenía el siguiente comentario:

La forma en la que el autor arriba a sus ecuaciones no está exenta de dificultades, y su análisis deja algo que desear; sea en generalidad o aún en rigurosidad.

En definitiva, el artículo nunca fue publicado, y el trabajo de Fourier sobre la conducción del calor, y la teoría de las series trigonométricas que lo soportaba, recién vio la luz con la publicación en 1822 de *Théorie analytique de la chaleur*. Desde ese año, el trabajo de Fourier recibió comentarios muchos más entusiastas que los de la Academia de París. James Clerk Maxwell lo llamó un “gran poema matemático”. La carrera entera de William Thompson (Lord Kelvin) estuvo marcada por la teoría del calor de Fourier:

El teorema de Fourier no es sólo uno de los más bellos resultados del análisis moderno, sino que se ha vuelto un instrumento indispensable en el tratamiento de casi cualquier recóndito problema de la física moderna.

Euler falleció en 1783, y no tuvo oportunidad de conocer el trabajo de Fourier. Sin embargo quedaban pendientes sus objeciones al trabajo de Bernoulli: ¿cómo podía una función arbitraria ser la suma de funciones periódicas? La solución propuesta por Fourier es extremadamente simple: la función dada se define sobre un intervalo cerrado (por ejemplo, $[0, 1]$ o $[0, \pi]$, etc.), donde representa una cantidad física de interés (el desplazamiento de la cuerda, la distribución de calor en la periferia del disco, etc.) La clave está en extender la función *fueras* de ese intervalo, y hacer que esa extensión sea periódica. Por supuesto, si una función se piensa como una fórmula, estas extensiones no son “funciones”. La idea de Fourier de admitir funciones que son idénticas en un intervalo y diferentes fuera de él hizo posible aplicar su teoría a una gran variedad de problemas, y condujo a un examen crítico de la noción de función.

Como observó Fourier, los coeficientes A_n de (2.158) tienen sentido para todas las funciones para las cuales la integral es finita, y creía que la serie (2.193) era *exactamente* igual a $f(\cdot)$ para todas las $f(\cdot)$ posibles y para todo θ . Esto es cierto para todas las funciones “buenas” (suaves a tramos), aunque no es cierto (de manera no trivial) para cualquier $f(\cdot)$.

Ninguna de las afirmaciones de Fourier acerca de las series sería considerada correcta bajo los parámetros matemáticos de hoy en día. Dirichlet tomó el trabajo de Fourier y lo fundamentó de manera rigurosa, sentando bases firmes para el análisis moderno. En primer lugar era necesario precisar el concepto de función, y la definición de Dirichlet es la que se estudia en los cursos de análisis actuales: una función es una regla que asigna un valor definido $f(x)$ a cualquier x en un conjunto de puntos. Bajo esta definición una función ya no tiene que ser una fórmula o un gráfico, y en 1828 Dirichlet dio un ejemplo que Fourier ni siquiera habría imaginado: la función característica del conjunto de números racionales, definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Esta función no puede representarse con ningún gráfico; tampoco encierra ningún área, de modo que sus coeficientes de Fourier no pueden ser calculados con (2.194).

Sin embargo, para todas las funciones que pueden “dibujarse”, Dirichlet probó que la serie de Fourier converge a $f(x)$ en cualquier punto x donde $f(\cdot)$ sea continua, y al valor medio $[f(x_+) + f(x_-)]/2$ si $f(\cdot)$ tiene una discontinuidad en x . Además demostró que si $f(\cdot)$ es suave en un intervalo $[a, b]$, entonces la serie de Fourier converge uniformemente a $f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Este fue el primer resultado importante sobre la convergencia de las series de Fourier. Posteriormente, C. Jordan demostró que las funciones continuas de variación acotada tienen series de Fourier convergentes. A lo largo de los años aparecieron otros muchos teoremas estableciendo condiciones suficientes para que una función tenga una serie de Fourier convergente.

Para trabajar con funciones que no pueden dibujarse es necesario generalizar la idea de la integral más allá de la idea intuitiva del “área bajo una curva”. Sólo entonces es posible calcular los coeficientes de Fourier de una función con un número infinito de discontinuidades. Riemann desarrolló una teoría de integración que soportaba tales funciones,

y dio un ejemplo de una función que no satisface las condiciones de Dirichlet pero que tiene una serie de Fourier que converge punto a punto. También inició el estudio de series trigonométricas que no tienen por qué ser series de Fourier de alguna función.

Dirichlet creía (y pensaba que iba a poder probar) que la serie de Fourier de toda función continua, y posiblemente de cualquier función integrable según el criterio de Riemann converge en todo punto. Este punto de vista era compartido por muchos matemáticos prominentes, como Riemann, Weierstrass y Dedekind. Sin embargo, en 1876 Du Bois-Reymond ideó una función continua cuya serie de Fourier es divergente en un punto.

Cantor también estuvo interesado en el estudio de las series de Fourier. Observó que el cambio de una función $f(\cdot)$ en unos pocos puntos no varía sus coeficientes de Fourier, y se preguntó cuántos puntos podían ignorarse, y qué tipos de conjuntos formaban, lo que lo condujo al estudio de conjuntos infinitos y números cardinales.

En 1904 Féjer probó que la serie de Fourier de una función continua es sumable en un sentido particular (el promedio de las primeras sumas parciales converge), y bajo este punto de vista converge uniformemente a la función. Este teorema es extremadamente útil e impulsó el estudio de la sumabilidad de las series.

El hecho notado por Cantor que el cambio de una función en unos pocos puntos no altera los coeficientes de Fourier porque la integral (2.194) no se ve afectada por ellos, llevó a formular de manera diferente la identidad de las funciones con las series: en lugar de preguntarse cuándo la serie de Fourier y la función son iguales en todo punto, se debe examinar cuándo las dos son iguales en todo intervalo excepto en aquellos que son irrelevantes para la integración. Este problema condujo a una revisión crítica de la integral de Riemann, y motivó a Lebesgue a definir una nueva integral que fuese más flexible. Conceptos tales como *conjuntos de medida nula* y igualdad de funciones *casi en todo punto* cambiaron el significado de “función” todavía más: dos funciones son “iguales” si difieren sólo sobre un conjunto de medida nula. Por lo tanto, la función de Dirichlet (la función característica de los racionales) es igual a 0 “casi en todo punto”. Así, a lo largo de la historia, el concepto de función evolucionó desde una fórmula, pasando por un grafo, luego una regla, hasta llegar en la actualidad a convertirse en una clase de equivalencia. El concepto de integral de Lebesgue se ha vuelto imprescindible en el análisis moderno.

Antes del ejemplo de 1876 de Du Bois-Reymond los matemáticos creían que la serie de Fourier de una función continua converge en todo punto. Como no pudieron probar esta hipótesis, el ejemplo les hizo pensar que exactamente lo opuesto podría ser cierto: esto es, que existiese una función continua cuya serie de Fourier diverge en todo punto. En 1926 Kolmogorov probó algo menos, pero igualmente sorprendente: existen una función Lebesgue-integrable definida sobre $[-\pi, \pi]$ (espacio L_1) cuya serie de Fourier diverge en todo punto. La función ideada por Kolmogorov no es continua, ni Riemann integrable. Luego de que este ejemplo fuese publicado se esperaba que tarde o temprano alguien descubriese una función continua con una serie de Fourier divergente en casi todo punto. Sin embargo, hubo una nueva sorpresa. En 1966 Carleson probó que si $f(\cdot)$ es de cuadrado integrable (espacio L_2), entonces la serie de Fourier converge a $f(\cdot)$ en casi todo punto. En particular, esto es cierto para funciones continuas, de modo que Fourier casi tenía razón! El teorema de Carleson es mucho más difícil de probar que la mayoría de los resultados que se han citado. En 1967 R. A. Hunt demostró que la serie de Fourier de cualquier función definida sobre un intervalo $[a, b]$ tal que $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$, con $1 < p < \infty$ (espacios L_p) converge en casi todo punto, y en la dirección inversa, Y. Katznelson y J. P.

Kahane mostraron en 1966 que dado un conjunto E de medida nula en $[-\pi, \pi]$ existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en E .

2.11.2. Influencia en otras ramas de la ciencia

Las series de Fourier han permitido el desarrollo de nuevos campos en la matemática. Uno de los teoremas fundamentales del análisis funcional, el teorema de Riesz-Fischer, se demuestra usando series de Fourier. Se considera que este teorema es la base de la teoría de transformación de von Newman, que muestra la equivalencia entre la descripción ondulatoria y matricial de la mecánica cuántica. Otra teoría de transformación que perseguía los mismos objetivos fue desarrollada por P. A. M. Dirac, en la que juega un papel fundamental la “función” δ , cuyas propiedades inusuales (algunas de las cuales se estudian en la Sección 2.4) no son consistentes con el análisis clásico (von Newman la describe como una “ficción” en lugar de una función). El estudio de tales objetos, denominados hoy en día *funciones generalizadas o distribuciones*, es una rama importante del análisis desarrollada por S. L. Sobolev y L. Schwartz. En algunos aspectos, los espacios de tales funciones son el dominio natural de las series de Fourier.

Un objeto matemático relacionado con las series es la *transformada*, introducida por Fourier al estudiar la conducción del calor en una barra de longitud infinita. Se ha aplicado en área tales como conducción de calor, óptica, procesamiento de señales y probabilidad, y recibió importantes contribuciones de N. Wiener, quien desarrolló lo que hoy en día se conoce como *análisis armónico generalizado*. También se ha vuelto más abstracta en una rama de la matemática conocida como *análisis armónico*, algunas de las principales figuras fueron E. Cartan, H. Weyl, y Harish-Chandra.

Las series de Fourier fueron ideadas para resolver un problema físico; no sorprende entonces que hayan encontrado tantas aplicaciones. Los intentos para comprender el comportamiento de estas series sentaron las bases del análisis riguroso. Una de las ramas más teóricas de la matemática es la teoría de números, y aunque a primera vista parecería que no tiene puntos de contacto con las series de Fourier, H. Weyl utilizó los resultados de convergencia de Féjer para probar uno de sus teoremas más relevantes.

Otra de las áreas de aplicación de las series de Fourier es la cristalográfica. En 1985 H. A. Hauptman y J. Karle ganaron el premio Nobel de Química por desarrollar un nuevo método de cálculo de las constantes cristalográficas a partir de sus coeficientes de Fourier, que pueden inferirse por mediciones. Su desarrollo se basa en el teorema de Weyl comentado más arriba, y en los teoremas de Toeplitz sobre las series de Fourier de funciones no negativas.

Un desarrollo reciente que ha recibido gran atención es la teoría de ondas (wavelets). En este caso las funciones no se expanden en series de exponenciales, sino usando otras bases ortogonales que permiten cálculos más eficientes, lo que dio lugar a nuevos algoritmos utilizados en procesamiento de señales y para la solución numérica de ecuaciones.

2.11.3. Sobre el efecto Gibbs

En 1889, el físico Albert Michelson y su colega S. Stratton construyeron un sintetizador armónico: un dispositivo que reconstruía una señal periódica $\tilde{x}_N(t)$ de período T_0 en base

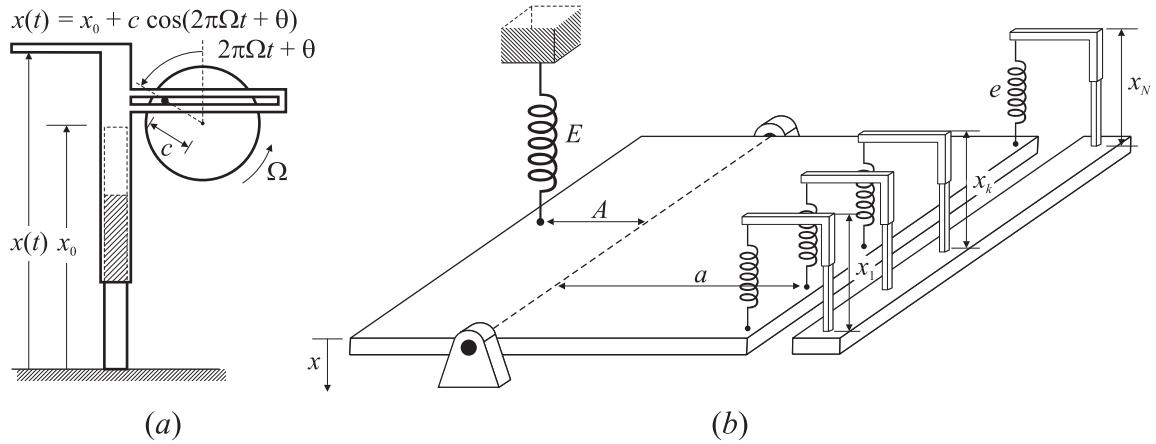


Fig. 2.109. El dispositivo para generar un término de la serie de Fourier (a) y el mecanismo para sumar todos los términos (b).

a la especificación de hasta 80 de sus componentes armónicas. El sintetizador implementa mecánicamente la ecuación

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}. \quad (2.195)$$

El término $c_k e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$ de la sumatoria se reproducía con el sistema mecánico que se muestra en la Fig. 2.109(a). Un disco que gira a una velocidad $\Omega = 2\pi/T_0$ con un perno móvil a una distancia c del centro causa que el pistón se desplace verticalmente una distancia $x(t)$ dada por $x(t) = x_0 + c \cos(2\pi\Omega t + \theta)$.

Por lo tanto, un conjunto de estos dispositivos, representados como una "L" invertida en la Fig. 2.109(b), permite generar todos los términos de la serie: basta con que cada disco gire a una velocidad $\Omega, 2\Omega, 3\Omega$, etc., con $\Omega = 2\pi/T_0$, con los pernos ubicados en posiciones c_1, c_2, c_3, \dots . La posición relativa de cada disco permite variar la "fase" de los c_k . La Fig. 2.109(b) ilustra cómo sumar mecánicamente los pequeños desplazamientos generados por el mecanismo anterior. La constante elástica del resorte grande es E , y la de los N resortes más pequeños es e . El extremo inferior del resorte grande se desplaza una cantidad x cuando los resortes pequeños se someten a desplazamientos x_1, \dots, x_N . La elongación del resorte grande es $L + x$ y las de los resortes pequeños es $\ell + x_k - (a/A)x$, $k = 1, \dots, N$, donde L y ℓ son los estiramientos de los resortes grande y pequeños, respectivamente, cuando $x = x_1 = x_2 = \dots = x_N = 0$. La ecuación de balance de momentos es $\sum_{k=1}^N [\ell + x_k - (\frac{a}{A})x] ea = (L + x) EA$, y a partir de ella se puede encontrar que el extremo inferior del resorte grande se desplaza

$$x = N^{-1} \left(\frac{a}{A} + \frac{\ell}{L} \right)^{-1} \sum_{k=1}^N x_k.$$

es decir, que suma la contribución de todos los términos. El dispositivo de Michelson y Stratton sumaba 80 desplazamientos sinusoidales $x_k(t) = c_k \cos(2\pi\Omega_k t + \theta_k)$, $k = 1, \dots, 80$, producidos por un sistema mecánico ligeramente más elaborado que el de la Fig. (a). El desplazamiento $x(t)$ del resorte grande se utilizaba para mover un lápiz que dibujaba

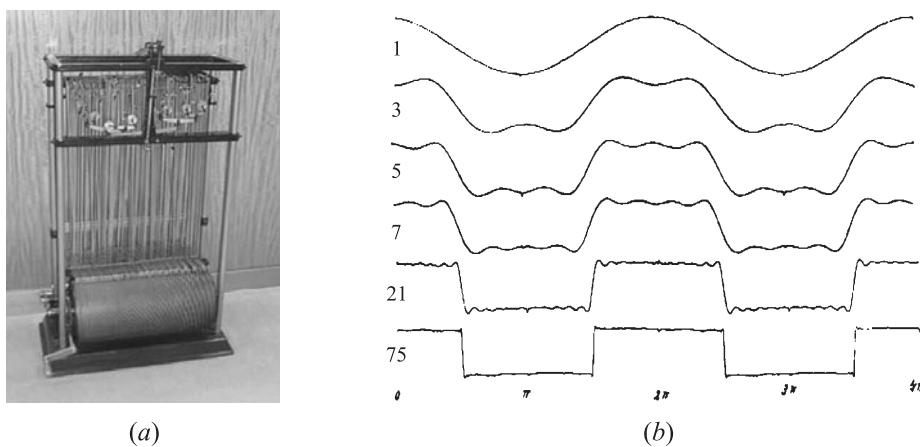


Fig. 2.110. Sintetizador armónico de Michelson y Stratton. Dispositivo mecánico (a) y formas de ondas generadas por el aparato (b).

la señal “reconstruida” sobre un papel. En la Fig. 2.110(a) se observa una réplica del sintetizador armónico y una muestra de las señales generadas con distintos coeficientes en la Fig. 2.110(b).

Michelson probó su dispositivo calculando los coeficientes de Fourier de distintas señales periódicas $\tilde{x}(t)$ y comparando la señal reconstruida $\tilde{x}_N(t)$ con la original: en líneas generales $\tilde{x}_N(t)$ resultaba muy similar a $\tilde{x}(t)$. Sin embargo, cuando utilizó como señal de prueba una onda cuadrada la aproximación no fue tan buena. Michelson observó que la señal $\tilde{x}_N(t)$ formada por N armónicas de la serie de Fourier oscila en cercanías de la discontinuidad, y que el valor pico de esas oscilaciones se mantiene constante independientemente del valor de N . Además, a medida que crece N la ubicación de sobrepico se acerca al punto donde la función es discontinua. Según Lanczos (1966), Michelson no podía comprender las causas del problema, y pensaba que su aparato podría estar funcionando incorrectamente. Confío sus dudas al matemático Josiah Gibbs, quien investigó el fenómeno y publicó sus resultados en 1899. Este comportamiento ya había sido observado y explicado por el matemático inglés Henry Wilbraham 50 años antes, en la corrección de un trabajo de Fourier que trataba sobre la convergencia de las series. Este resultado pasó desapercibido, posiblemente porque fue publicado en una pequeña revista no muy difundida, y recién fue redescubierto por Carslaw en 1925.

En cambio, según Gottlieb y Shu (1997), Michelson y Stratton (1898) publicaron un trabajo en *Nature* donde describían la construcción y el funcionamiento del analizador armónico, junto con algunos gráficos cuyo propósito era demostrar que la máquina calculaba correctamente los coeficientes de la serie de Fourier. Una de las curvas era una onda cuadrada que exhibía las oscilaciones de Gibbs, pero los autores no comentaban nada al respecto en ese trabajo. Sin embargo, parece que Michelson había notado algo particular, pues al poco tiempo (6 de octubre de 1898) envía una carta a la revista donde comenta la dificultad de construir la función $f(x) = x$ a partir de sus coeficientes de Fourier. En particular, argüía que la expresión (2.195) evaluada en $t = T_0(1/2 + k/N)$, donde k es pequeño, converge a distintos límites para diferentes valores de k . También observó que el mismo fenómeno ocurría para la derivada de la función (una onda cuadrada).

FOURIER'S SERIES

[Nature, vol. LIX, p. 200, Dec 29, 1898]

I SHOULD like to add a few words concerning the subject of Prof Michelson's letter in *Nature* of October 6. In the only reply which I have seen (*Nature*, October 13), the point of view of Prof. Michelson is hardly considered.

Let us write $f_n(x)$ for the sum of the first n terms of the series

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \text{etc}$$

I suppose that there is no question concerning the form of the curve defined by any equation of the form

$$y = 2f_n(x).$$

Let us call such a curve C_n . As n increases without limit, the curve approaches a limiting form, which may be thus described. Let a point move from the origin in a straight line at an angle of 45° with the axis of X to the point (π, π) , thence vertically in a straight line to the point $(\pi, -\pi)$, thence obliquely in a straight line to the point $(3\pi, \pi)$, etc. The broken line thus described (continued indefinitely forwards and backwards) is the limiting form of the curve as the number of terms increases indefinitely. That is, if any small distance d be first specified, a number n' may be then specified, such that for every value of n greater than n' , the distance of any point in C_n from the broken line, and of any point in the broken line from C_n , will be less than the specified distance d .

But this limiting line is not the same as that expressed by the equation

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} 2f_n(x).$$

The vertical portions of the broken line described above are wanting in the locus expressed by this equation, except the points in which they intersect the axis of X . The process indicated in the last equation is virtually to consider the intersections of C_n with fixed vertical transversals, and seek the limiting positions when n is increased without limit. It is not surprising that this process does not give the vertical portions of the limiting curve. If we should consider the intersections of C_n with horizontal transversals, and seek the limits which they approach when n is increased indefinitely we should obtain the vertical portions of the limiting curve as well as the oblique portions.

It should be observed that if we take the equation

$$y = 2f_n(x),$$

and proceed to the limit for $n = \infty$, we do not necessarily get $y = 0$ for $x = \pi$. We may get that ratio by first setting $x = \pi$, and then passing to the limit. We may also get $y = 1$, $x = \pi$, by first setting $y = 1$, and then passing to the limit. Now the limit represented by the equation of the broken line described above is not a special or partial limit relating solely to some special method of passing to the limit, but it is the complete limit embracing all sets of values of x and y which can be obtained by any process of passing to the limit.

J. WILLARD GIBBS.

New Haven, Conn., November 29 [1898].

(a)

(b)

Fig. 2.111. Cartas de Gibbs en *Nature*: 29 de Noviembre de 1898 (a) y 27 de Abril de 1899 (b).

El matemático A. E. H. Love atacó a Michelson en la siguiente edición de *Nature* (13 de octubre de 1898). Comenzó sugiriendo que Michelson (y todos los físicos preocupados por la convergencia no uniforme⁶) debía leer el texto de Hobson *Trigonometría*. Explicaba que “el proceso utilizado por Michelson es inválido.” Love remarcaba las falencias en el argumento matemático de Michelson, pero no se preocupó por entender la dificultad que éste había observado. Parece que Love no conocía el analizador armónico, ni que el problema era el de sintetizar una función a partir de sus coeficientes de Fourier.

El próximo capítulo ocurre el 29 de diciembre de 1898, cuando en *Nature* se publican tres

⁶Una sucesión de funciones $\tilde{x}_N(t)$ converge a la función $\tilde{x}(t)$ si dado un $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)| < \varepsilon$ para todo $N > M$. La convergencia es uniforme si M es independiente del valor t donde se evalúan las funciones.

cartas. La primera fue remitida por Michelson, con fecha 1 de diciembre, remarcando que desde su punto de vista la convergencia debía ser uniforme en *cualquier* entorno de la discontinuidad.

Gibbs era el autor de la carta que se muestra en la Fig. 2.111(a), fechada el 29 de noviembre, en donde explicaba las dudas de Michelson, destacando que Love las había ignorado, y describía las oscilaciones. Sin embargo, su nota parece implicar que la amplitud de estas oscilaciones *decrecían* con N . Esta nota estaba seguida por una carta de Love, exponiendo la noción de convergencia no uniforme y admitiendo que no había comprendido los problemas indicados por Michelson en su primera carta.

Recién el 27 de abril de 1899 Gibbs publica el resultado correcto, que se muestra en la Fig. 2.111(b), pidiendo disculpas, “I should like to correct a careless error”, y mostrando que las oscilaciones no decaen, sino que el sobrepico tiende a un número constante. Gibbs demostró formalmente que las sumas parciales tienen un sobrepico del 9 % de la altura del salto, no importa cuán grande sea N . Se debe interpretar este resultado con cuidado: para cada valor fijo $t = t_1$, cuando $N \rightarrow \infty$ las sumas parciales convergen al valor correcto, y a la mitad de la suma de los valores de la señal a cada lado de la discontinuidad. No obstante, cuanto más cercano a la discontinuidad se elija t_1 , tanto mayor deberá ser N para mantener el error $|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)|$ por debajo de una cota determinada: en otras palabras, la convergencia de la serie no es uniforme. Este comportamiento peculiar de las sumas parciales, de presentar oscilaciones cuyo valor pico es constante para cualquier valor finito de N , y que se concentran cerca de la discontinuidad cuando N crece, se conoce como *fenómeno de Gibbs*.

Las últimas comunicaciones aparecieron nuevamente en *Nature*. En mayo de 1899 Michelson comunicaba una carta de Poincaré y en junio de 1899 Love básicamente repetía sus puntos de vista. Nuevamente, no parecía notar que el comportamiento de las sumas finitas era crucial para reconstruir una función a partir de su serie de Fourier.

El nombre “fenómeno de Gibbs” fue utilizado por vez primera por Bôcher en 1906, en un artículo donde extendía el resultado de Gibbs. El matemático húngaro Fejér hizo el primer intento para explicar el fenómeno de Gibbs, y en 1900 descubrió que las medias de Cesàro de las sumas parciales (equivalente a filtrar la señal con un filtro pasabajos de primer orden) convergen uniformemente.

2.12. Sumario

Se han presentado en este Capítulo los fundamentos físicos y matemáticos de la teoría de Fourier. Se revisaron conceptos de series de Fourier, y se establecieron las bases para la representación espectral. El estudio de la transformada se presenta con cierto detalle, tratando de resaltar los aspectos más relevantes para las aplicaciones. Se definieron las funciones $\text{sinc}(\cdot)$ y los impulsos, que serán útiles para los desarrollos posteriores. Se establecieron los vínculos entre las series de Fourier de funciones periódicas y las transformadas de Fourier de un período de dichas señales, lo que conduce a establecer la transformada de Fourier para señales periódicas empleando impulsos. Se estudiaron una serie de propiedades que facilitarán el análisis de sistemas de los Capítulos siguientes, poniendo especial énfasis en el teorema de convolución en tiempo y frecuencia, de vital importancia en el estudio de sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Se estudian además algunos temas de inte-

rés práctico, como el efecto Gibbs y el teorema del ancho de banda. El capítulo concluye con una breve reseña histórica del desarrollo de la serie y transformada de Fourier. En los apéndices que siguen, se presentan algunos teoremas que justifican rigurosamente las condiciones de convergencia y existencia de las series de Fourier. Los conceptos estudiados se aplican al análisis espectral de señales analógicas, presentando las ideas básicas de funcionamiento de los analizadores espectrales. También se estudian un conjunto de señales típicas y se comparan los espectros calculados analíticamente con los obtenidos por instrumentos de medida. Se adjuntas una serie de tablas de series y transformadas de funciones usuales, la forma de calcular series y transformadas usando software para matemática simbólica, y un conjunto de biografías de personalidades destacadas en el desarrollo de estas herramientas.

2.13. Bibliografía

1. Benedetto, J. J., "Uncertainty principle inequalities and spectrum estimation", *Recent Advances in Fourier Analysis and Its Applications*, (J. S. Byrnes y J. L. Byrnes, eds.) Kluwer Academic Publishing, Dordrecht, 1990.
2. Benedetto, J. J., Frazier, M. W. (eds.) *Wavelets: Mathematics and Applications*, CRC Press, Boca Ratón, Florida, 1994.
3. Benedetto, J. J., Heil, C., Walnut, D. "Uncertainty principle in for time-frequency operators", *Continuous and Discrete Fourier Transforms, Extension Problems, and Wiener-Hopf Equations*, (I. Gohberg, ed.) Birkhäuser, Basel, pp. 1-25, 1992
4. Bôcher, M. "Introduction to the theory of Fourier's series", *Ann. Math.*, 7, pp. 81-152, 1906.
5. Bracewel, R. *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill Book Co., Electrical and Electronic Engineering Series, New York, 1978.
6. Briggs, W. L., Henson, V. E. *The DFT. An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1995.
7. Brigham, E. *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall, 1974.
8. Carslaw, H. S. "A historical note on Gibbs' phenomenon in Fourier series and integrals", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 31, pp. 420-424, 1925.
9. Carslaw, H. S. *An introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, 3^{ra} edición revisada, Dover Publications, Inc., New York, 1950.
10. Churchill, R. V. *Fourier Series and boundary value problems*, 2^{da} edición, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
11. Cooley, J., Tukey, J. "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", *Math. Comp.*, vol. 19, 1965, pp. 297-301.
12. Courant, R., John, F. *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, 10^{ma} reimpresión de la 1^{ra} edición castellana. Limusa-Noriega Editores, México, 1993.

13. Daubechies, I. *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992
14. Folland, G. B., Sitaram, A. "The Uncertainty Principle: a Mathematical Survey", *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 3, no. 3, 1997, pp. 207-238.
15. Gabor, D. "Theory of Communication", *J. Inst. Elec. Engr.*, vol. 93, pp. 429-457, 1946.
16. Goldstine, H. H., *A History of Numerical Analysis from the 16th to the 19th Century*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
17. Gottlieb, D., Shu, C.-W. "On the Gibbs Phenomenon and its resolution", *SIAM Review*, **39**, 4, pp. 644-668, 1997.
18. Havin, V., Jörnicke, *The uncertainty principle in Harmonic Analysis*, Springer, Berlin, 1994.
19. Haykin, S. *An Introduction to Analog and Digital Communications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
20. Heideman, M., Johnson, D., Burrus, C. "Gauss and the history of the fast Fourier transform", *Arch. Hist. Exact Sciences*, vol. 34, 1985, pp. 265-277.
21. Heisenberg, W. "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematic und Mechanik", *Zeit Physik*, vol. 43, 1927, pp. 172-198.
22. Howell, K. B. "Fourier Transforms" en Pularikas, A. (ed.) *The Transforms and Applications Handbook*, CRC Press/IEEE Press, Boca Ratón, Florida, 1996, pp. 95-226.
23. Howell, K. B. *Principles of Fourier Analysis*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Ratón, Florida, 2001.
24. James, J. F. *A Student's Guide to Fourier Transforms with Applications in Physics and Engineering*, Cambridge University Press, New York, 2002.
25. Kaplan, W. *Operational Methods for Linear Systems*, Adisson-Wesley, Reading, 1962.
26. Lanczos. C. *Discourse on Fourier Series*, Hafner Publishing, New York, 1966.
27. Oppenheim, A. V., Wilsky, A., Young, I. *Signals and Systems*, Prentice-Hall International Editions, 1983.
28. Papoulis, A. *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw Hill, 1962.
29. Porat, B. *A course in Digital Signal Processing*, John Wiley and Sons, New York, 1997.
30. Price, J. F. *Fourier Techniques and Applications*, Plenum, New York, 1985.
31. Thompson, W. J. "Fourier series and the Gibbs phenomenon", *American Journal of Physics*, vol. 60, No. 5, 1992, pp. 425-429.
32. Wiener, N., *I am a Mathematician*, MIT Press, Cambridge, 1956.
33. Wilbraham, H. "On a certain periodic function", *Cambridge and Dublin Math. J.*, **3**, pp. 198-201, 1848.

2.14. Tablas útiles

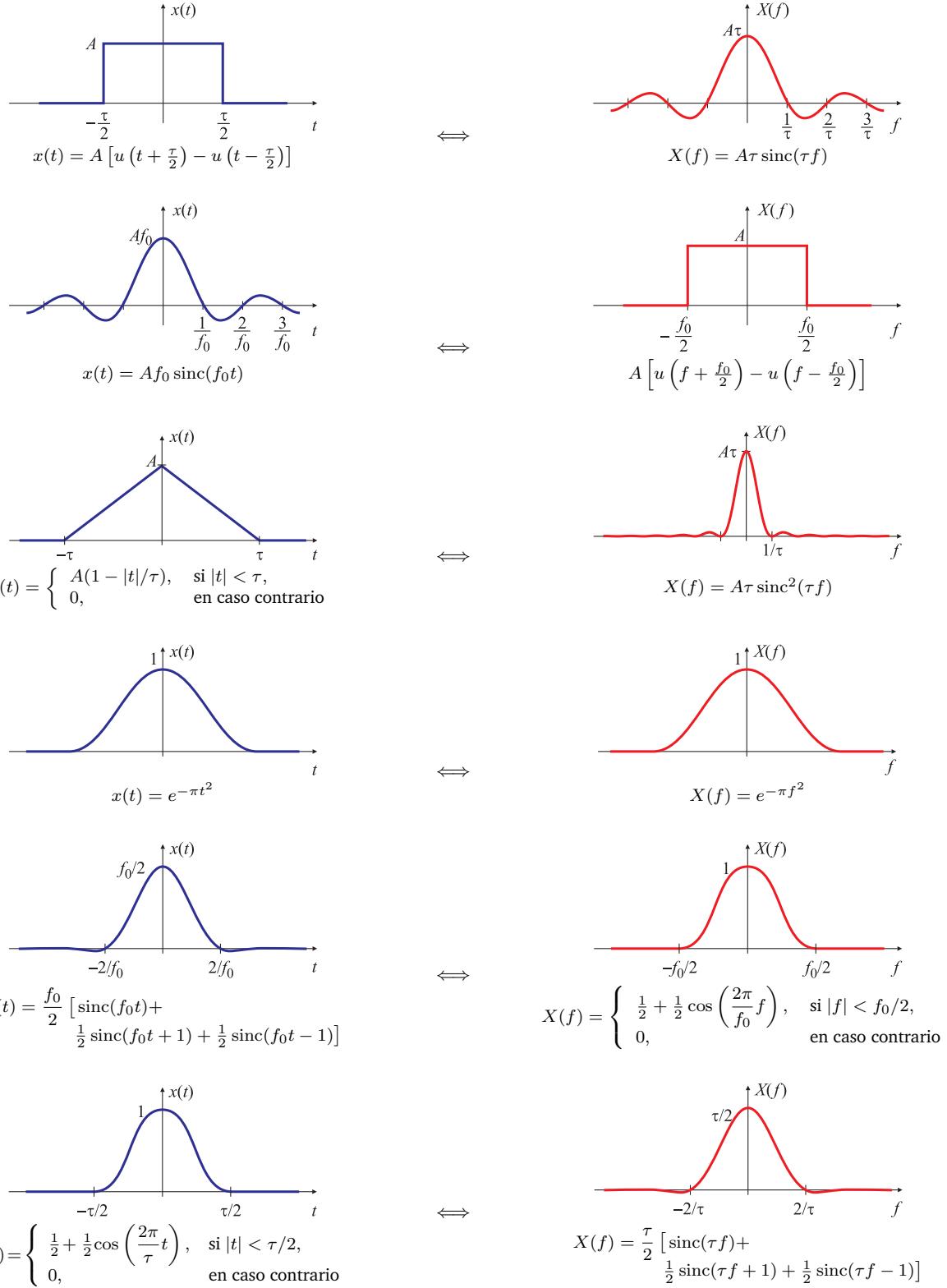
2.14.1. Algunos pares transformados de uso frecuente

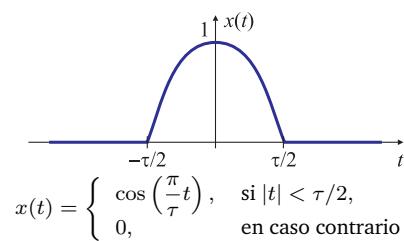
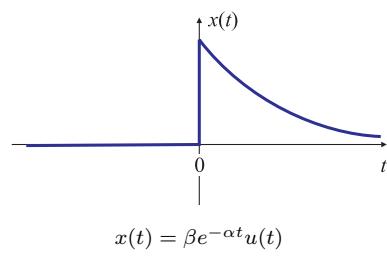
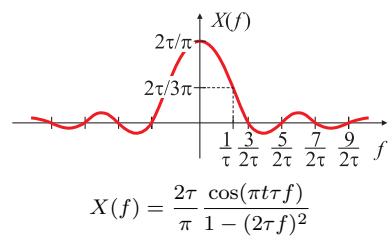
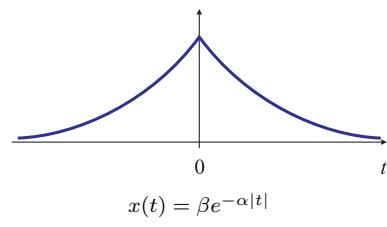
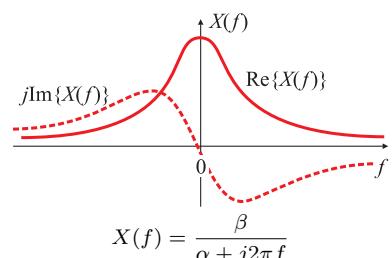
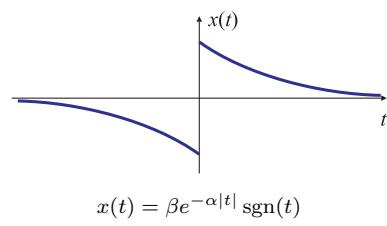
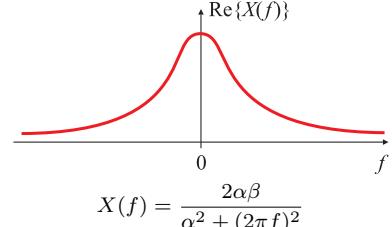
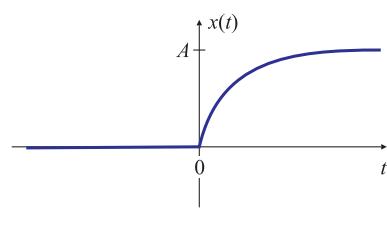
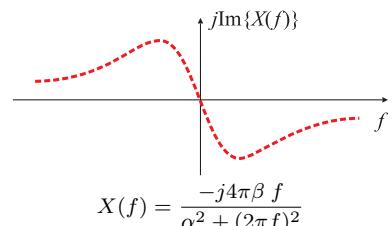
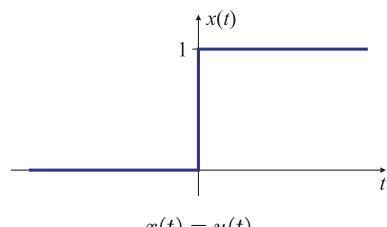
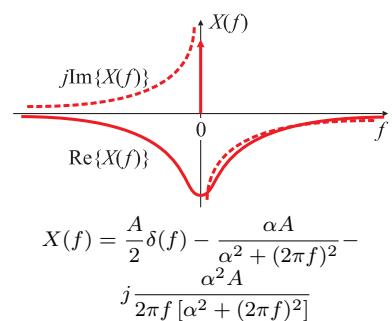
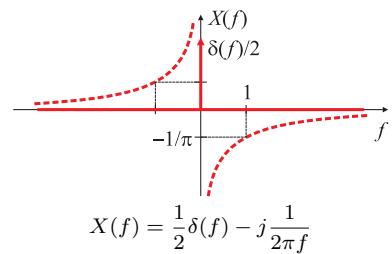
función	transformada de Fourier	
temporal $f(t)$	$X(f), -\infty < f < \infty$	$X(\Omega), -\infty < \Omega < \infty$
$\delta(t)$	1	1
$1, -\infty < t < \infty$	$\delta(f)$	$2\pi\delta(\Omega)$
$\beta e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{\beta}{\alpha + j2\pi f}$	$\frac{\beta}{\alpha + j\Omega}$
$\beta e^{-\alpha t }$	$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$	$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \Omega^2}$
$\beta e^{-\alpha t } \operatorname{sgn}(t)$	$-j \frac{4\pi\beta f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$	$-j \frac{4 + 2\beta\Omega}{\alpha^2 + \Omega^2}$
$\beta t e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{\beta}{(\alpha + j2\pi f)^2}$	$\frac{\beta}{(\alpha + j\Omega)^2}$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) - j \frac{1}{2\pi f}$	$\pi\delta(\Omega) - j \frac{1}{\Omega}$
$A \operatorname{sinc}(t/\tau)$	$X(f) = \begin{cases} A\tau, & f < 1/(2\tau) \\ 0, & \text{cc.} \end{cases}$	$X(\Omega) = \begin{cases} A\tau, & \Omega < \pi/\tau \\ 0, & \text{cc.} \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} A, & t < \tau/2 \\ 0, & \text{cc.} \end{cases}$	$A\tau \operatorname{sinc}(\tau f)$	$A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau\Omega}{2\pi}\right)$
$x(t) = \begin{cases} (A/\tau)(\tau - t), & t < \tau \\ 0, & \text{cc.} \end{cases}$	$A\tau \operatorname{sinc}^2(\tau f)$	$A\tau \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau\Omega}{2\pi}\right)$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$	$e^{-\frac{\Omega^2}{4\pi}}$
$\operatorname{sat}_t(t) = \begin{cases} \tau, & \text{si } t > \tau, \\ t, & \text{si } t < \tau, \\ -\tau, & \text{si } t < -\tau, \end{cases}$	$-j \frac{\tau \operatorname{sinc}(2\tau f)}{\pi f}$	$-j \frac{2\tau \operatorname{sinc}(\tau\Omega/\pi)}{\Omega}$
$e^{j2\pi f_0 t} = e^{j\Omega_0 t}$	$\delta(f - f_0)$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = A \cos(\Omega_0 t + \phi)$	$\frac{Ae^{-j\phi}}{2} \delta(f + f_0) + \frac{Ae^{j\phi}}{2} \delta(f - f_0)$	$\pi Ae^{-j\phi} \delta(\Omega + \Omega_0) + \pi Ae^{j\phi} \delta(\Omega - \Omega_0)$
$A \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \phi) = A \operatorname{sen}(\Omega_0 t + \phi)$	$\frac{jAe^{-j\phi}}{2} \delta(f + f_0) - \frac{jAe^{j\phi}}{2} \delta(f - f_0)$	$j\pi Ae^{-j\phi} \delta(\Omega + \Omega_0) - j\pi Ae^{j\phi} \delta(\Omega - \Omega_0)$
$\sum_r \delta(t - rT_0) = \sum_r \delta\left(t - \frac{r}{f_0}\right)$	$\frac{1}{T_0} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0} \sum_k \delta(f - kf_0)$	$\frac{2\pi}{T_0} \sum_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T_0} k\right) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$

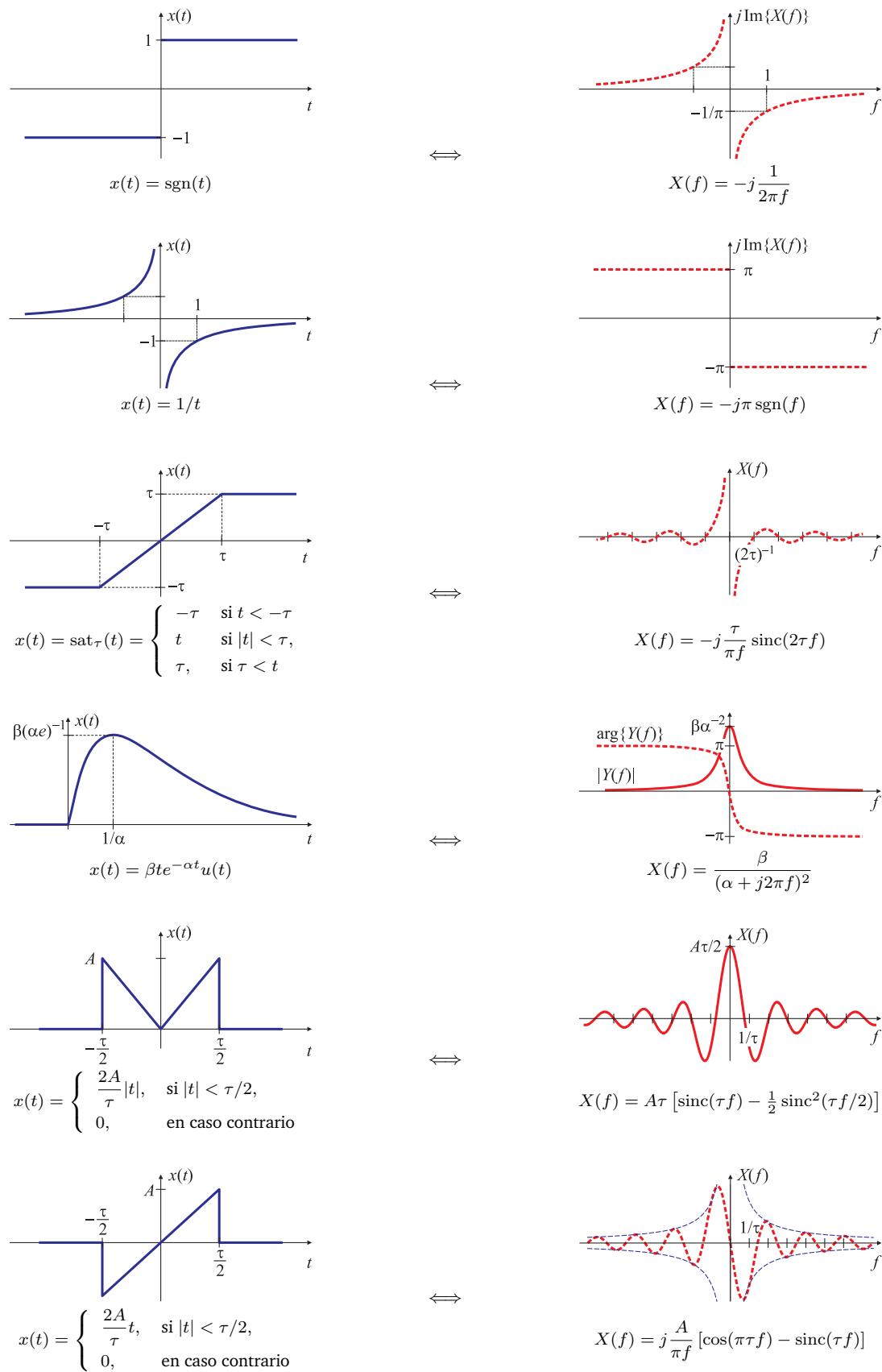
2.14.2. Propiedades y teoremas de transformadas y series de Fourier

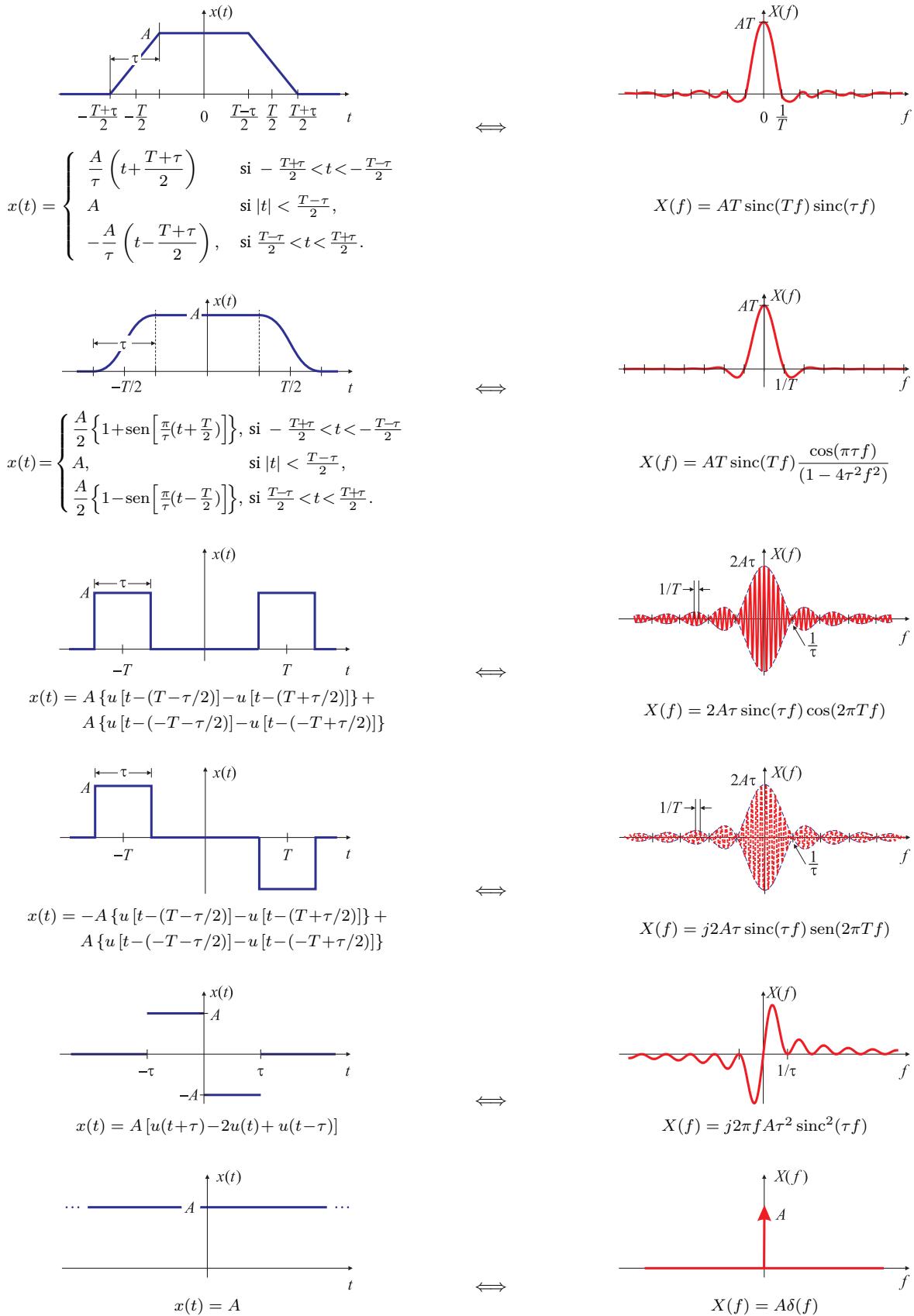
		Transformada de Fourier		Serie de Fourier	
ecuación de análisis	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$	$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$	$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T_0} kt}$	$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} \tilde{x}(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0} kt} dt$
Propiedades	funció n $x(t)$ continua, aperiódica	transformada $X(f)$ continua, aperiódica	transformada $X(\Omega)$ continua, aperiódica	funció n $\tilde{x}(t)$ continua, periódica	coeficiente c_k discreto, aperiódico
propiedad de área	$x(t) _{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) d\Omega$	$X(f) _{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$	$X(\Omega) _{\Omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$	$\tilde{x}(t) _{t=0} = \sum_k c_k$	$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} \tilde{x}(t) dt$
desplazamiento temporal	$x(t-t_0)$	$e^{-j2\pi t_0 f} X(f)$	$e^{-j t_0 \Omega} X(\Omega)$	$\tilde{x}(t-t_0)$	$e^{-j\frac{2\pi}{T_0} t_0 k} c_k$
desplazamiento frecuencial	$e^{j2\pi f_0 t} x(t) = e^{j\Omega_0 t} x(t)$	$X(f-f_0)$	$X(\Omega-\Omega_0)$	$e^{j\frac{2\pi}{T_0} M t} \tilde{x}(t)$	c_{k-M}
escalado temporal	$x(k t)$	$\frac{1}{ k } X\left(\frac{f}{k}\right)$	$\frac{1}{ k } X\left(\frac{\Omega}{k}\right)$	$X(k\Omega)$	
escalado frecuencial	$\frac{1}{ k } x\left(\frac{t}{k}\right)$	$X(k)$	$X(-\Omega)$	$\tilde{x}(-t)$	c_{-k}
inversión temp. freq.	$x(-t)$	$X(-f)$	$X(-\Omega)$	$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t)$	$j\frac{2\pi}{T_0} k c_k$
derivación temporal	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j 2\pi f X(f)$	$j \Omega X(\Omega)$		
derivación frecuencial	$t x(t)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$	$j \frac{d}{d\Omega} X(\Omega)$		
dualidad	$X(t)$	$x(-f)$	$2\pi x(-\Omega)$	$\tilde{x}(t)$	
integración temporal	$\int_{-\infty}^t x(\sigma) d\sigma$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$	$\frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \frac{1}{\pi} X(0) \delta(\Omega)$		
integración frecuencial	$-\frac{1}{j2\pi t} x(t) + \frac{1}{2} x(0) \delta(t)$	$\int_{-\infty}^f X(\nu) d\nu$	$2\pi \int_{-\infty}^\Omega X(\nu) d\nu$		
simetría	$x^*(t)$	$X^*(-f)$	$X^*(-\Omega)$	$\tilde{x}^*(t)$	$c^*(-k)$
Re{ $x(t)$ }	$\text{Re}\{x(t)\}$	$\frac{1}{2}[X(f) + X^*(-f)]$	$\frac{1}{2}[X(\Omega) + X^*(-\Omega)]$		
$j \text{Im}\{x(t)\}$	$j \text{Im}\{x(t)\}$	$\frac{1}{2}[X(f) - X^*(-f)]$	$\frac{1}{2}[X(\Omega) - X^*(-\Omega)]$		
$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(-t)]$	$\text{Re}\{X(f)\}$	$\text{Re}\{X(\Omega)\}$	$\tilde{x}_e(t) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(t) + \tilde{x}^*(-t)]$	$\text{Re}\{c_k\}$	
$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x^*(-t)]$	$\text{Im}\{X(f)\}$	$\text{Im}\{X(\Omega)\}$	$\tilde{x}_o(t) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(t) - \tilde{x}^*(-t)]$	$\text{Im}\{c_k\}$	
$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$X(f)Y(f)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} \tilde{x}(\tau) \tilde{y}(t-\tau) d\tau$	$c_k^{(x)} c_k^{(y)}$	
convolución	$(X * Y)(f)$	$(X * Y)(f)$	$\frac{1}{2\pi} (X * Y)(\Omega)$	$\tilde{x}(t)\tilde{y}(t)$	$\sum_{\ell} c_{\ell}^{(x)} c_{k-\ell}^{(y)}$
modulación	$x(t)y(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) ^2 d\Omega$	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} \tilde{x}(t) ^2 dt = \sum_k c_k ^2$		
identidad Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)Y^*(\Omega) d\Omega$	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} \tilde{x}(t)\tilde{y}^*(t) dt = \sum_k c_k^{(x)} (c_k^{(y)})^*$			
relación de potencia					

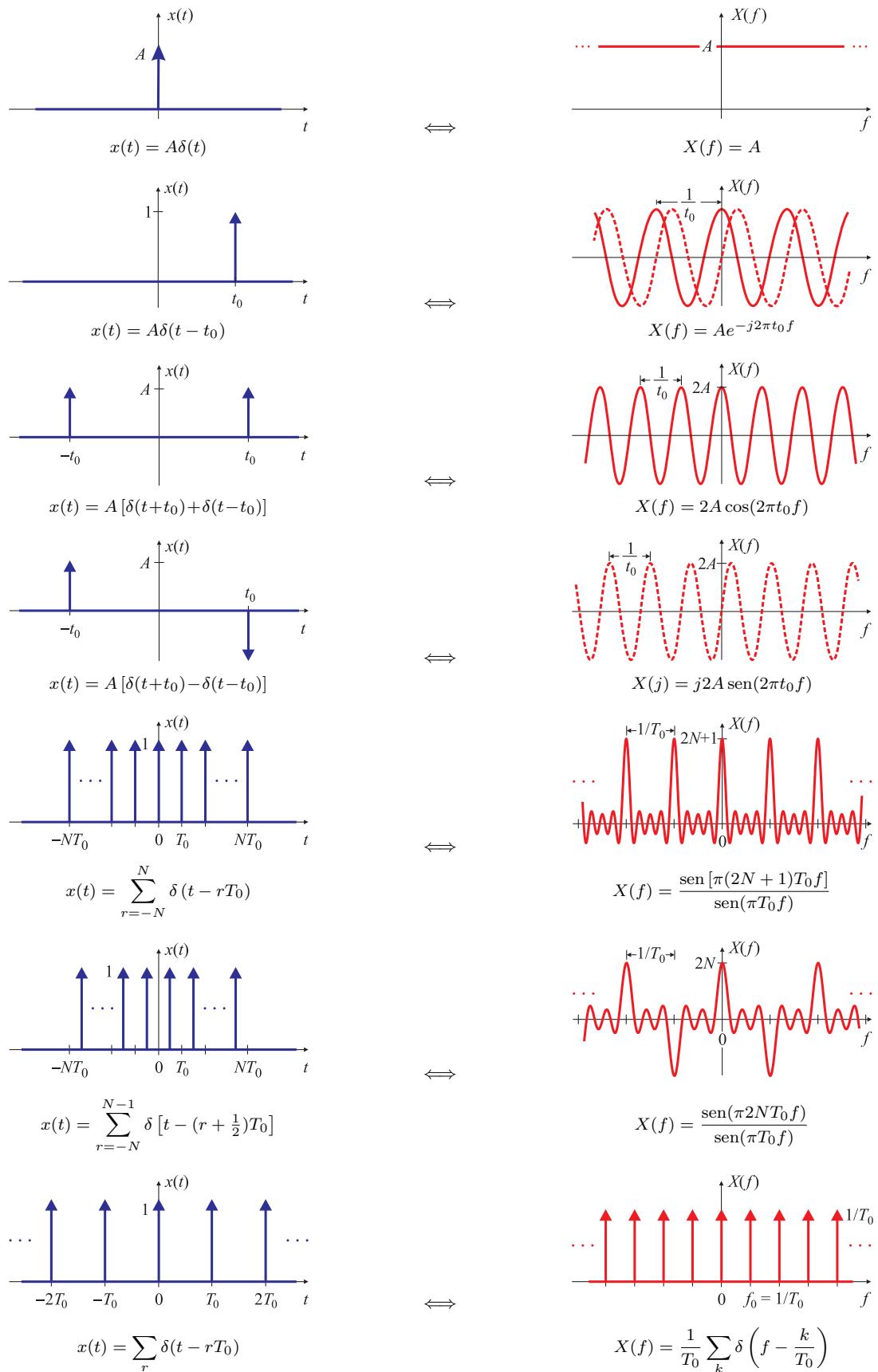
2.14.3. Tabla pictórica de transformadas

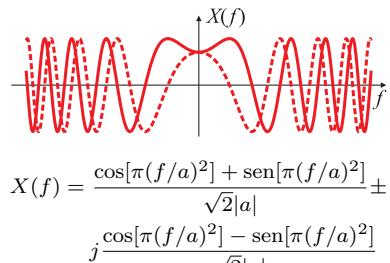
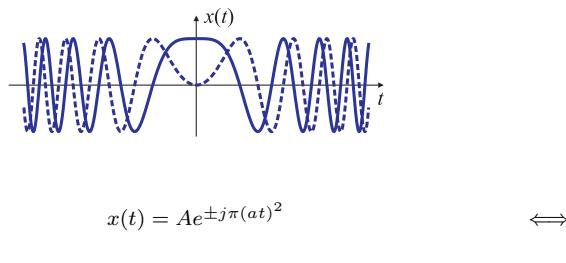
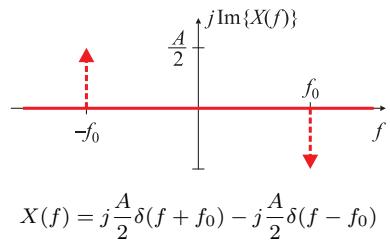
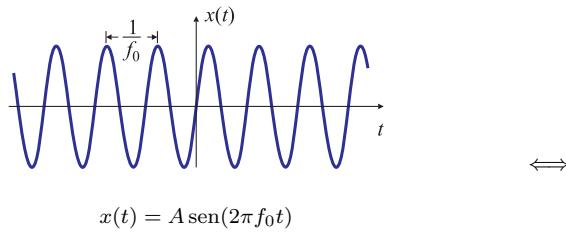
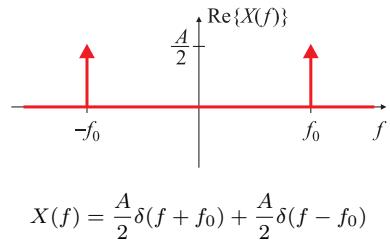
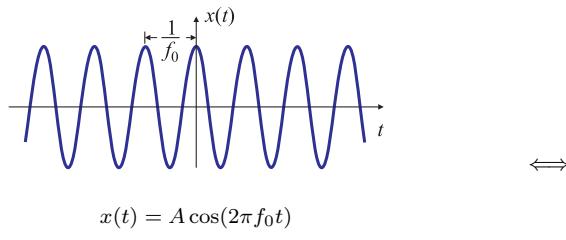
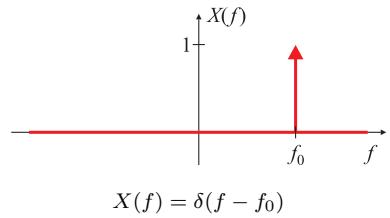
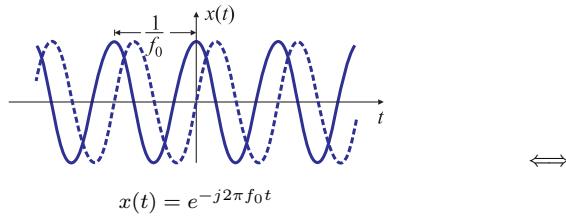
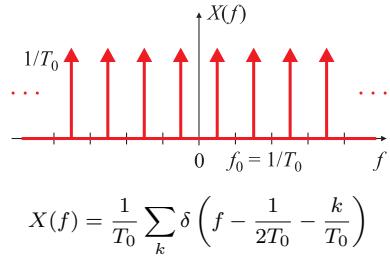
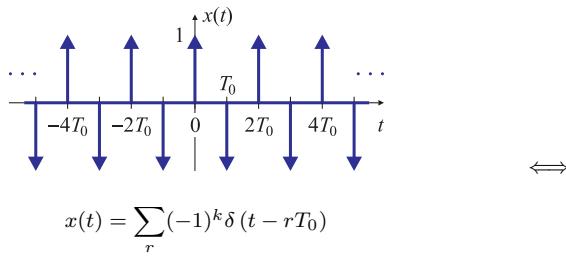
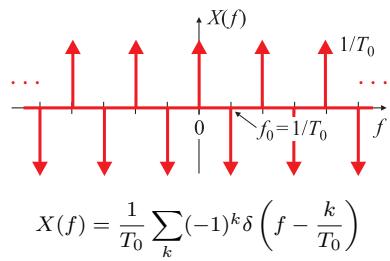
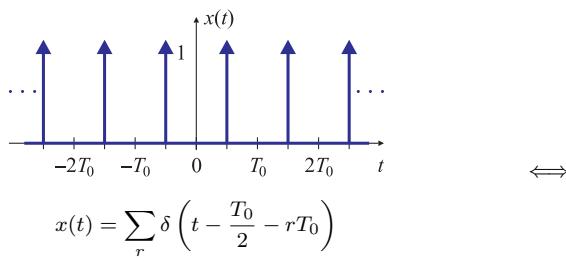


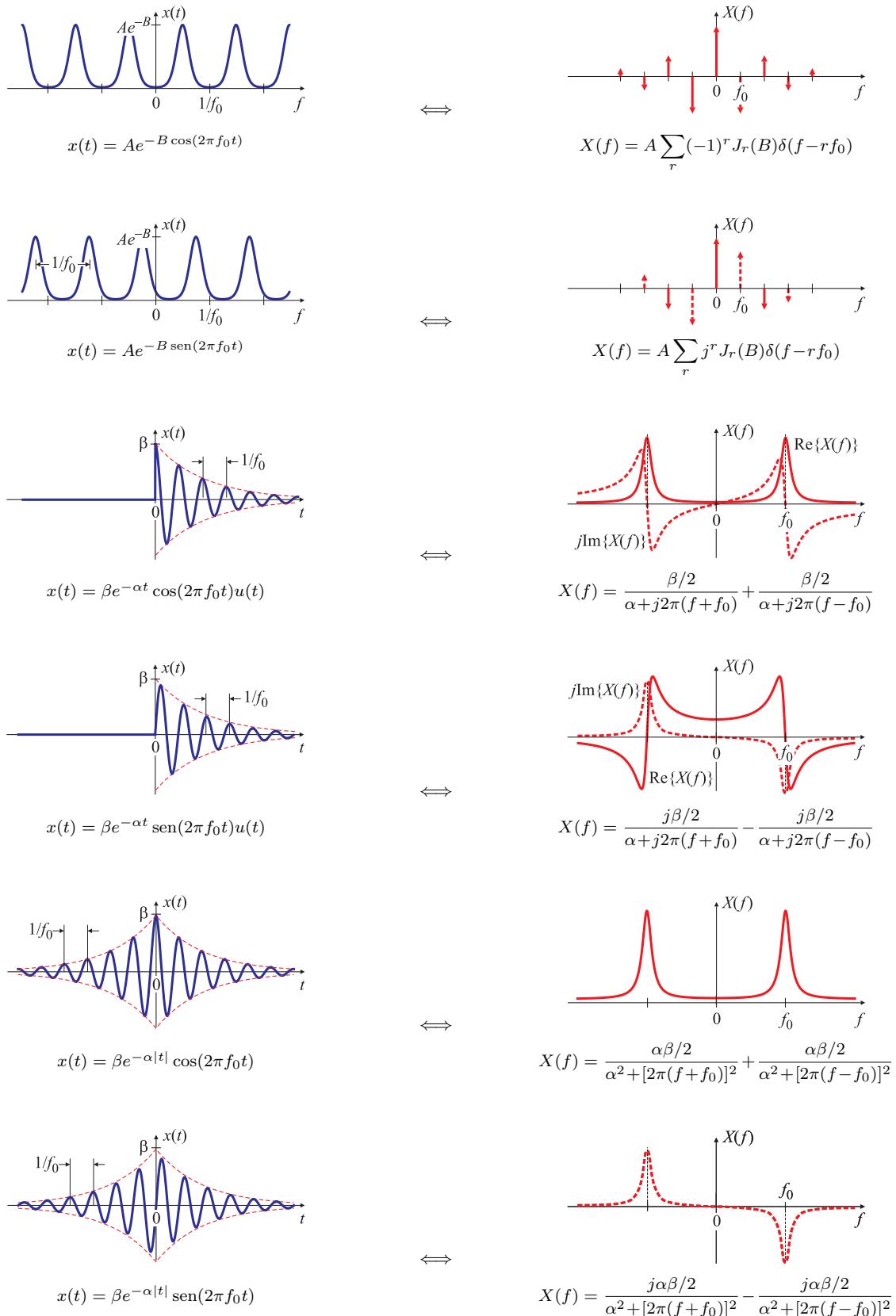
 \iff  \iff  \iff  \iff  \iff  \iff 

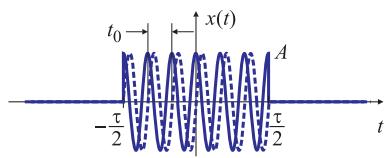






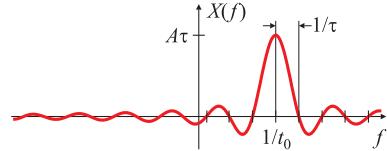




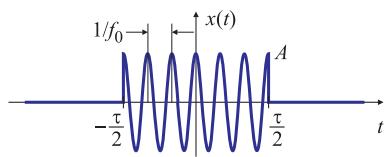


$$x(t) = A e^{j \frac{2\pi}{t_0} t} [u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})]$$

\Leftrightarrow

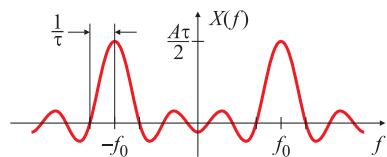


$$X(f) = A \tau \operatorname{sinc} \left[\tau \left(f - \frac{1}{t_0} \right) \right]$$

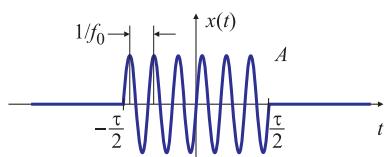


$$x(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_0 t), & \text{si } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

\Leftrightarrow

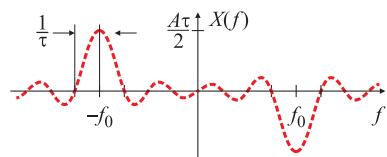


$$X(f) = \frac{A\tau}{2} \{ \operatorname{sinc}[\tau(f+f_0)] + \operatorname{sinc}[\tau(f-f_0)] \}$$

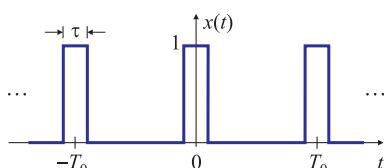


$$x(t) = \begin{cases} A \sin(2\pi f_0 t), & \text{si } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

\Leftrightarrow

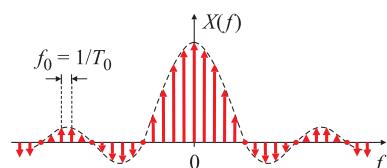


$$X(f) = j \frac{A\tau}{2} \{ \operatorname{sinc}[\tau(f+f_0)] - \operatorname{sinc}[\tau(f-f_0)] \}$$

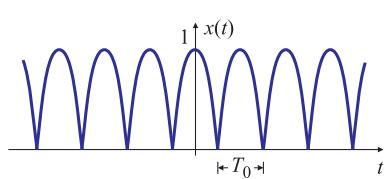


$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t + kT_0| < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

\Leftrightarrow

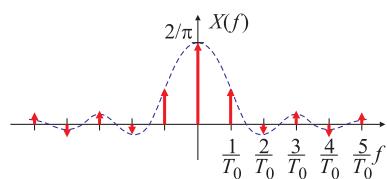


$$X(f) = \sum_r \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc} \left(\frac{\tau}{T_0} k \right) \delta \left(f - \frac{k}{T_0} \right)$$

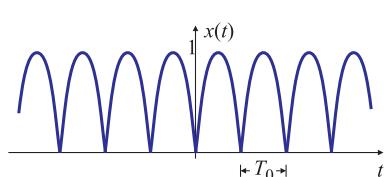


$$x(t) = A |\cos[2\pi t/(2T_0)]|$$

\Leftrightarrow

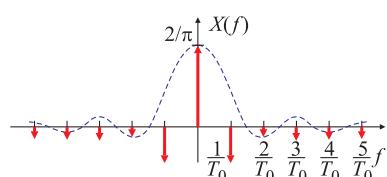


$$X(f) = \sum_r \frac{2 \cos(\pi k)}{\pi} \frac{1}{1 - 4k^2} \delta \left(f - \frac{k}{T_0} \right)$$

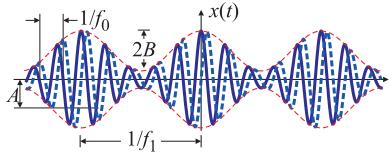


$$x(t) = A |\sin[2\pi t/(2T_0)]|$$

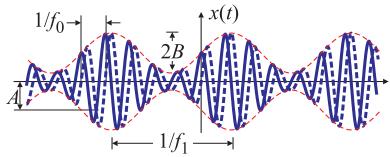
\Leftrightarrow



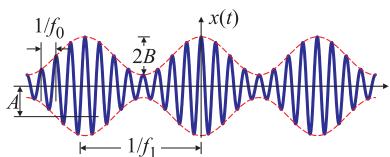
$$X(f) = \sum_r \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 - 4k^2} \delta \left(f - \frac{k}{T_0} \right)$$



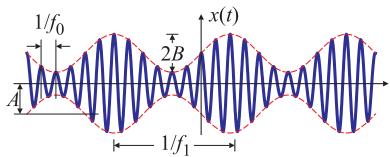
$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} [A + B \cos(2\pi f_1 t)]$$

 \iff 

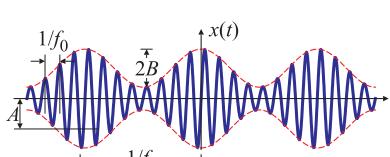
$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} [A + B \sin(2\pi f_1 t)]$$

 \iff 

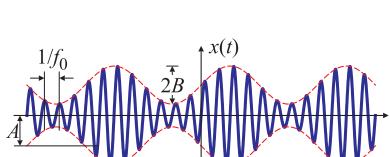
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) [A + B \cos(2\pi f_1 t)]$$

 \iff 

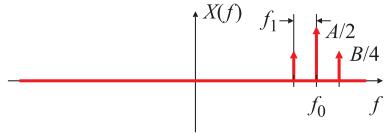
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) [A + B \sin(2\pi f_1 t)]$$

 \iff 

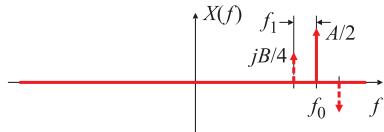
$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) [A + B \cos(2\pi f_1 t)]$$

 \iff 

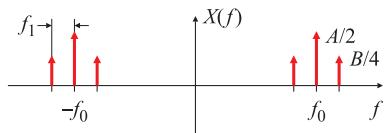
$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) [A + B \sin(2\pi f_1 t)]$$

 \iff 

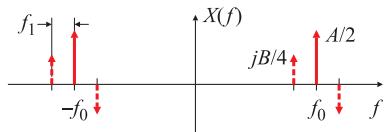
$$X(f) = \frac{A}{2} \delta(f-f_0) + \frac{B}{4} [\delta(f-f_0+f_1) + \delta(f-f_0-f_1)]$$



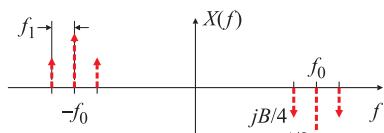
$$X(f) = \frac{A}{2} \delta(f-f_0) + j \frac{B}{4} [\delta(f-f_0+f_1) - \delta(f-f_0-f_1)]$$



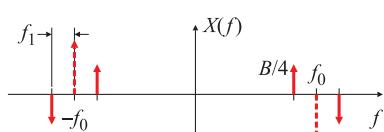
$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] + \frac{B}{4} [\delta(f+f_0+f_1) + \delta(f+f_0-f_1)] + \frac{B}{4} [\delta(f-f_0+f_1) + \delta(f-f_0-f_1)]$$



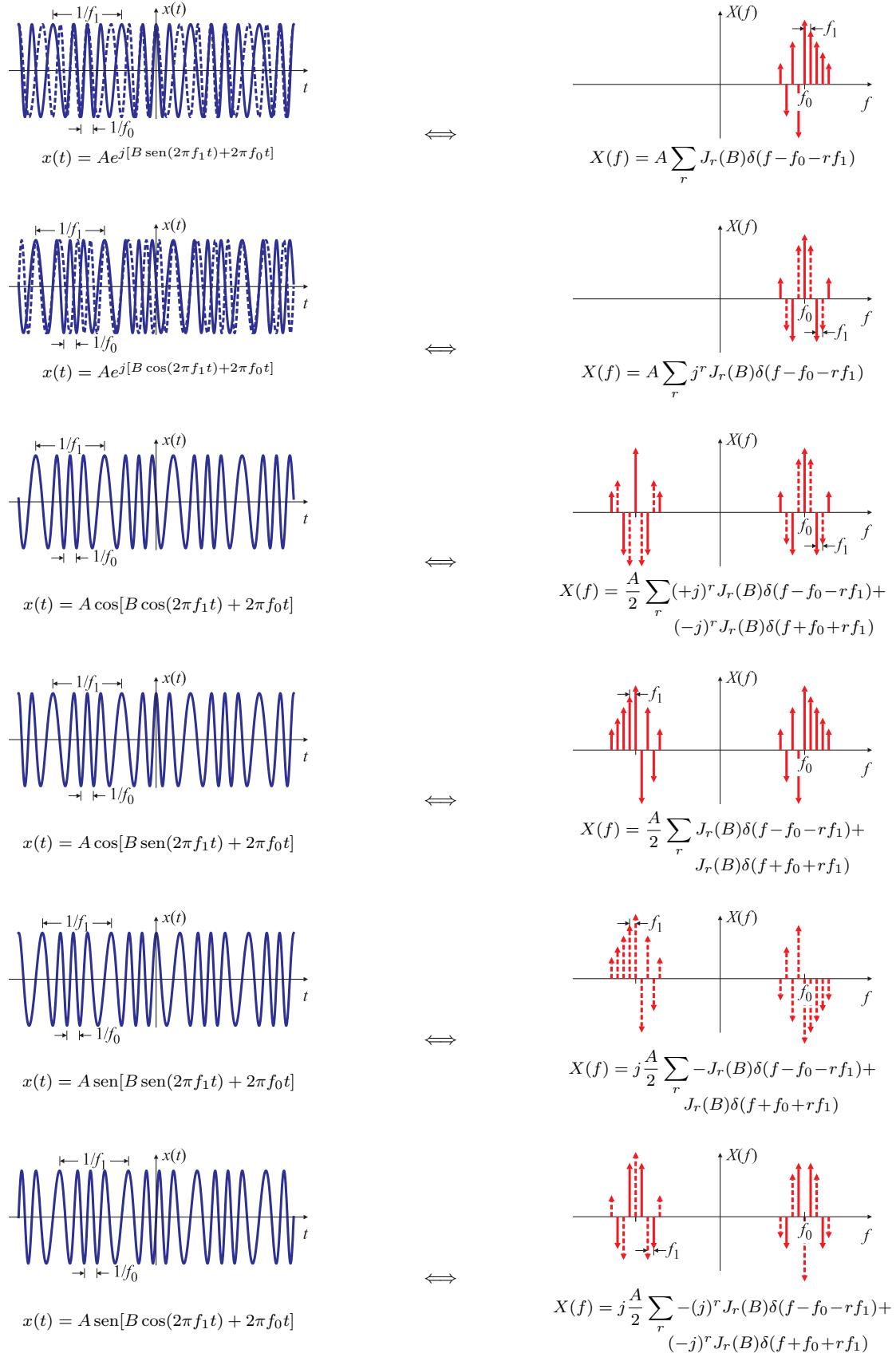
$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] + j \frac{B}{4} [\delta(f+f_0+f_1) - \delta(f+f_0-f_1)] + j \frac{B}{4} [\delta(f-f_0+f_1) - \delta(f-f_0-f_1)]$$

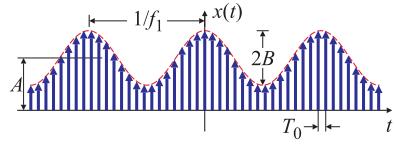


$$X(f) = j \frac{A}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] + j \frac{B}{4} [\delta(f+f_0+f_1) + \delta(f+f_0-f_1)] - \frac{B}{4} [\delta(f-f_0+f_1) + \delta(f-f_0-f_1)]$$



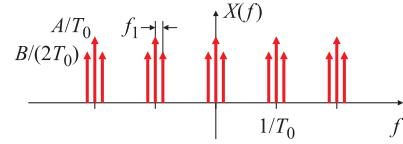
$$X(f) = j \frac{A}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] + \frac{B}{4} [-\delta(f+f_0+f_1) + \delta(f+f_0-f_1)] + \frac{B}{4} [\delta(f-f_0+f_1) - \delta(f-f_0-f_1)]$$



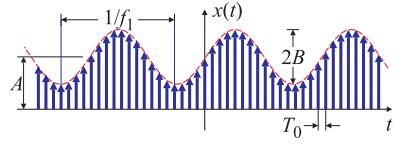


$$x(t) = \sum_r [A + B \cos(2\pi f_1 T_0 r)] \delta(t - rT_0)$$

↔

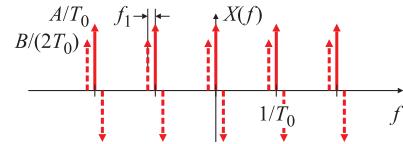


$$X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_k A \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) + \frac{B}{2} \delta\left(f - \frac{k}{T_0} + f_1\right) + \frac{B}{2} \delta\left(f - \frac{k}{T_0} - f_1\right)$$

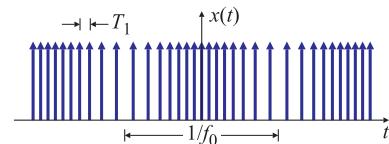


$$x(t) = \sum_r [A + B \sin(2\pi f_1 T_0 r)] \delta(t - rT_0)$$

↔

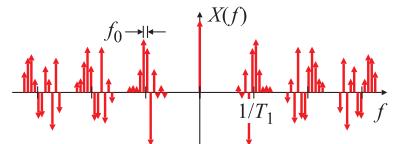


$$X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_k A \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) + j \frac{B}{2} \delta\left(f - \frac{k}{T_0} + f_1\right) - j \frac{B}{2} \delta\left(f - \frac{k}{T_0} - f_1\right)$$

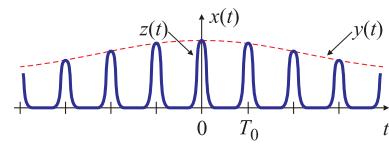


$$x(t) = A \sum_r \delta[t - rT_1 + a \sin(2\pi f_0 t)]$$

↔



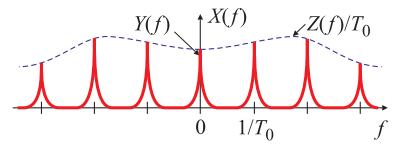
$$X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k,\ell} J_\ell \left(k \frac{2\pi a}{T_1} \right) \delta\left(f - \frac{k}{T_1} - \ell f_0\right)$$



$$x(t) = y(t) \sum_r z(r - rT_0)$$

$$x(t) = \sum_r y(rT_0) z(r - rT_0)$$

↔



$$X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_k Z\left(\frac{k}{T_0}\right) Y\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

$$X(f) = \frac{1}{T_0} Z(f) \sum_k Y\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

2.15. Ejercicios

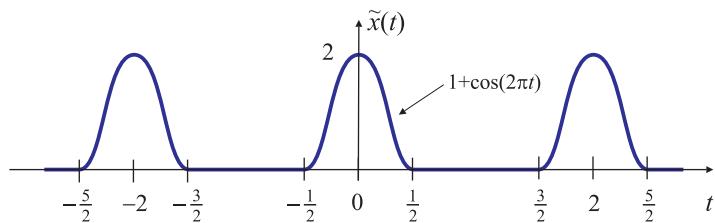
Ejercicio 1. Encuentre la relación entre los coeficientes a_k , b_k de la serie de Fourier de senos y cosenos con los coeficientes c_k de la serie de Fourier exponencial.

Ejercicio 2. Una señal de uso frecuente en comunicaciones es el pulso *coseno elevado*

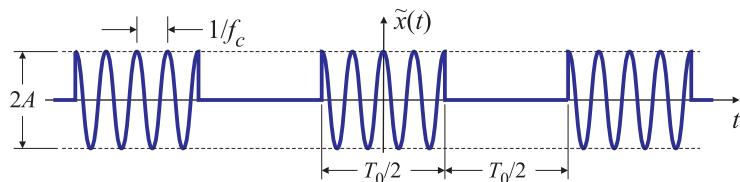
$$c(t) = \begin{cases} 1 + \cos(2\pi t), & -1/2 \leq t \leq 1/2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

La figura muestra una señal $\tilde{x}(t)$ periódica, de período $T = 2$, compuesta por pulsos coseno elevado equiespaciados. Muestre que los primeros tres términos de la expansión en series de Fourier de $\tilde{x}(t)$ son

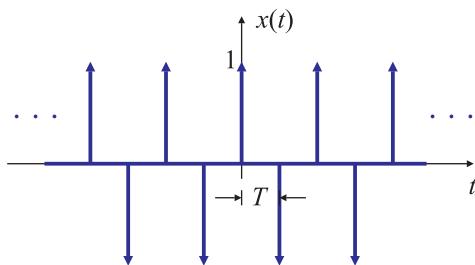
$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi} \cos \pi t + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \dots$$



Ejercicio 3. Evalúe la amplitud del espectro de la señal de RF pulsada que se muestra en la figura, suponiendo que $f_c = 10/T_0$.



Ejercicio 4. La transformada de Fourier del tren (infinito) de impulsos $x(t) = \sum_n \delta(t-nT)$ es $X(f) = (1/T) \sum_k \delta(f - k/T)$. En base a este par transformado, calcule la transformada de Fourier del tren (infinito) de impulsos *alternantes* $x(t) = \sum_n (-1)^n \delta(t-nT)$. Aplicando propiedades, justifique “intuitivamente” el resultado obtenido.



Ejercicio 5. Pruebe las siguientes propiedades de la serie de Fourier:

1. Los coeficientes de Fourier c_k de una función $\tilde{x}(t)$ periódica y par [$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(-t)$] son reales y pares: $c_k = c_{-k}$.
2. Los coeficientes de Fourier c_k de una función $\tilde{x}(t)$ periódica e impar [$\tilde{x}(t) = -\tilde{x}(-t)$] son imaginarios puros e impares: $c_k = -c_{-k}$.
3. Si $\tilde{x}(t)$ tiene “simetría de media onda”, esto es $\tilde{x}(t \pm \frac{1}{2}T_0) = -\tilde{x}(t)$ donde T_0 es el período de $\tilde{x}(t)$, las armónicas pares de la serie de Fourier son nulas ($c_{2r} = 0$, $c_{2r+1} \neq 0$): las armónicas de la señal son los múltiplos impares de la frecuencia fundamental).

Ejercicio 6. La serie de Fourier de la señal periódica $\tilde{x}(t)$ tiene coeficientes $c_k^{(x)}$. Calcule los coeficientes $c_k^{(y)}$ de la serie de Fourier de $\tilde{y}(t) = \tilde{x}(at)$, donde a es una constante real, en función de los coeficientes $c_k^{(x)}$.

Ejercicio 7. Al calcular los coeficientes de una serie de Fourier de período T_0 , el profesor P. Lado se confunde y calcula los coeficientes suponiendo un período $T_1 = 2T_0$:

$$c_k^{(P)} = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} \tilde{x}(t) e^{j \frac{2\pi}{T_1} kt} dt = \frac{1}{2T_0} \int_{2T_0} \tilde{x}(t) e^{j \frac{2\pi}{2T_0} kt} dt.$$

El alumno A. Tento le hace notar que el cálculo correcto de los coeficientes es

$$c_k^{(A)} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt.$$

El profesor P. Lado le contesta que son iguales, es decir que $c_k^{(P)} = c_k^{(A)}$, pero A. Tento no está convencido. ¿Cuál es la relación correcta entre $c_k^{(P)}$ y $c_k^{(A)}$?

Ejercicio 8. Aplicando propiedades, determine la transformada de Fourier de la señal $x(t) = u(t) \cos(2\pi f_0 t)$, donde $u(t)$ es la función escalón unitario.



Ejercicio 9. La función $c(t)$ del Ejercicio 2 se conoce como *función generadora* de $\tilde{x}(t)$.

1. Determine la transformada de Fourier de la función generadora $c(t)$.
2. Calcule la transformada de Fourier de $\tilde{x}(t)$ aplicando propiedades. Compare sus resultados con los del Ejercicio 2.

Ejercicio 10. Dibuje la señal $x(t) = A \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$, y calcule y grafique su espectro $X(f)$. A partir de este par transformado, dibuje las señales y calcule (tanto por definición como aplicando propiedades) y grafique los espectros de:

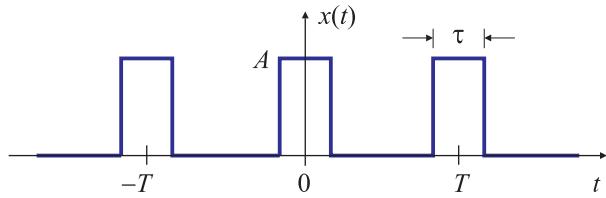
$$1. x_1(t) = A \operatorname{sen}[2\pi(2f_0 t)]. \quad 2. x_2(t) = A \operatorname{sen}[2\pi(3f_0 t)].$$

Ejercicio 11. Para el pulso rectangular

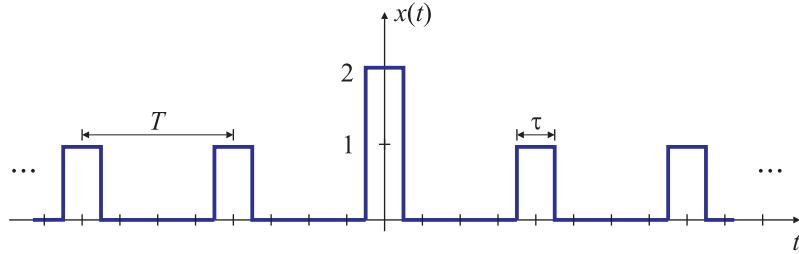
$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

1. Calcule la parte par $x_e(t)$ y la parte impar $x_o(t)$
2. Calcule las transformadas de Fourier de cada una de las componentes.

Ejercicio 12. Determine la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ formada por tres pulsos rectangulares que se muestra en la figura. Grafique la amplitud del espectro para $\tau \ll T$. (Ayuda: Considere un único pulso de amplitud A y duración τ , y utilice las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal de la Transformada de Fourier.)

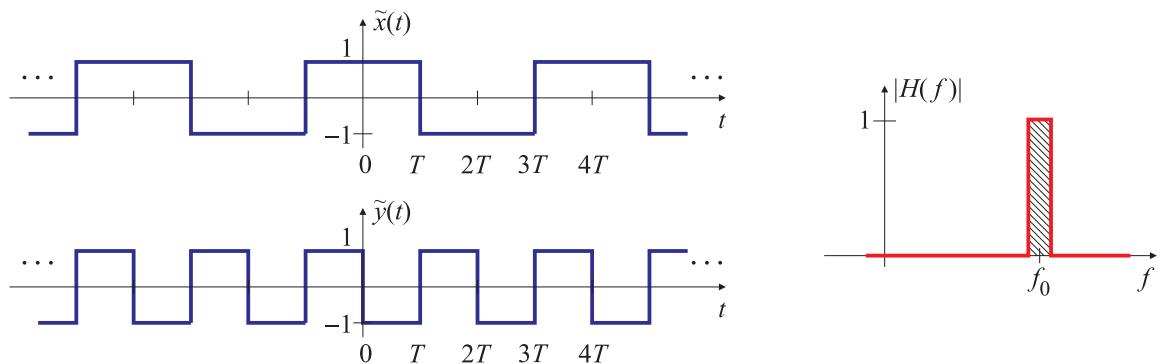


Ejercicio 13. Para la señal $x(t)$ de la figura,



1. Calcule la serie o la transformada de Fourier, según corresponda, aplicando propiedades, y escríbala de la manera más sencilla posible. Elija $\tau = T/4$.
2. Grafique aproximadamente el módulo y la fase del espectro de $x(t)$, indicando todos los puntos relevantes.

Ejercicio 14. Las señales $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$ son la salida y la entrada, respectivamente, de un flip-flop “T”.



1. Calcule los coeficientes de Fourier $c_k^{(x)}$ y $c_k^{(y)}$ de las señales $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$, y grafíquelos en función del número de armónico k .
2. Dibuje el espectro en frecuencia $X(f)$ e $Y(f)$ de $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$, respectivamente.
3. Un detector de tono es un filtro pasabanda muy angosto $H(f)$, como el que se muestra en la figura. ¿Puede elegir f_0 de manera de detectar $\tilde{x}(t)$ o $\tilde{y}(t)$?

Nota: para simplificar los cálculos, aplique las propiedades de la transformada de Fourier.

Ejercicio 15. Calcule la transformada de Fourier (en módulo y fase y parte real-parte imaginaria) de las siguientes funciones. En todos los casos, suponga $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned} 1. \quad x(t) &= \begin{cases} \beta e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} & 2. \quad x(t) &= \begin{cases} k, & -T_0 < t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ -k, & 0 < t < T_0. \end{cases} & 3. \quad x(t) &= A e^{-\alpha|t|}. \end{aligned}$$

Ejercicio 16. Calcule la transformada inversa de Fourier de las siguientes funciones. Antes de resolver este ejercicio, es conveniente resolver el Ejercicio 15.

1. $X(f) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$.
2. $X(f) = \frac{1}{(\alpha + j2\pi f)^2}$. [recuerde que $\mathcal{F}(x_1 * x_2) = \mathcal{F}(x_1) \times \mathcal{F}(x_2)$]
3. $X(f) = 2AT_0 \operatorname{sinc}(2T_0 f)$, aplicando propiedades.

Ejercicio 17. Demuestre que el espectro del pulso exponencial creciente definido por

$$x(t) = \begin{cases} \beta e^{\alpha t}, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

con $\alpha > 0$ tiene el mismo módulo y fase opuesta a la del pulso del Ejercicio 15.1. Explique este comportamiento en base a la propiedad de escalado en tiempo de la Transformada de Fourier.

Ejercicio 18. Sabiendo que el pulso gaussiano es su propio par transformado, $x(t) = e^{-\pi t^2} \Leftrightarrow X(f) = e^{-\pi f^2}$, utilice la propiedad de escalado en tiempo para demostrar que

$$y(t) = \left(\sqrt{2\pi}\tau\right)^{-1} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} \Leftrightarrow Y(f) = e^{-2\pi^2\tau^2f^2}.$$

- (C) **Ejercicio 19.** Usando las propiedades de derivación temporal y frecuencial y las definiciones de la transformada de Fourier en función de la frecuencia angular Ω , demuestre que la función temporal $h(t)$ cuya expresión matemática coincide con su transformada $H(\Omega)$ es $h(t) = ke^{-\frac{1}{2}t^2}$.

Ejercicio 20. Si $X(f)$ es la transformada de Fourier de una señal $x(t)$, pruebe que:

1. El área total bajo la curva de $x(t)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0),$$

donde $X(0)$ es el valor de $X(f)$ en $f = 0$ (el valor de “continua” de la señal).

2. El área total bajo la curva de $X(f)$ está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) df = x(0),$$

donde $x(0)$ es el valor de $x(t)$ en $t = 0$.

3. La transformada de Fourier $X(f)$ de una señal real y par $x(t)$ es real.
4. La transformada de Fourier $X(f)$ de una señal real e impar $x(t)$ es imaginaria.

Ejercicio 21. En base a los resultados del Ejercicio 20, demuestre que:

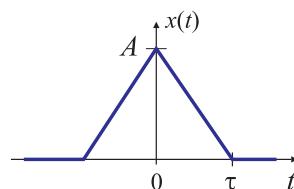
1. El área encerrada por la función $\text{sinc}(ax)$ es $1/|a|$: $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(ax) dx = 1/|a|$.
2. El área comprendida bajo el pulso gaussiano $x(t) = e^{-\pi t^2}$ vale 1: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dx = 1$.
3. El área bajo el pulso exponencial del Ejemplo 2.5 es β/α .
4. El área bajo la transformada de Fourier $X(f)$ del pulso exponencial del Ejemplo 2.5 es $\beta/2$ que es distinto que el valor de $x(0) = \beta$. Explique la diferencia, o repase el Ejemplo 2.25

Ejercicio 22. Si $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, muestre que $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\}\} = x(t)$ de dos maneras:

1. por definición, y
2. aplicando propiedades.

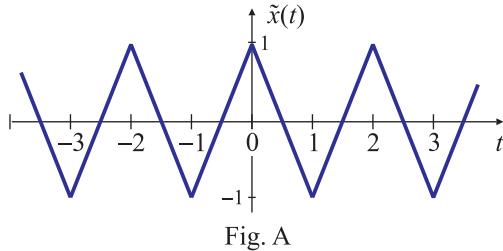
Ejercicio 23. Si $y(x)$ es una señal real, y $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{y\}\}(x) + y(x) = 0$, ¿qué características tiene $y(x)$? **Nota:** $\mathcal{F}\{y\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\sigma) e^{-j2\pi x\sigma} d\sigma$.

- (I) **Ejercicio 24.** Calcule la transformada de Fourier del pulso triangular $x(t)$ de la figura a partir de la convolución de dos pulsos rectangulares $r(t)$, cuya transformada de Fourier es conocida (Ejemplo 2.11).



1. Especifique claramente los pulsos (amplitud y duración) $r(t)$ tal que $x(t) = r(t)*r(t)$.
2. Escriba la transformada de Fourier $R(f)$ de los pulsos $r(t)$.
3. Con estos resultados calcule $X(f)$, la transformada de Fourier de $x(t)$.
4. A partir de los resultados del inciso anterior, calcule la transformada de Fourier $X(\Omega)$ del pulso triangular $x(t)$ en función de la frecuencia angular Ω .

Ejercicio 25. Para la señal $\tilde{x}(t)$ que se muestra en la Fig. A,

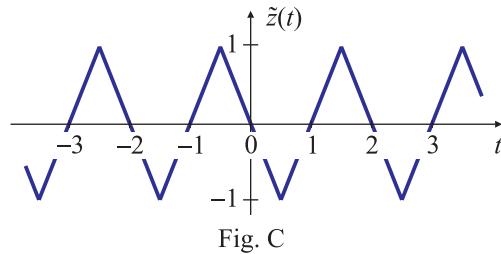
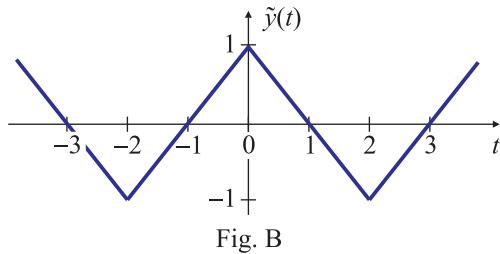


1. Demuestre que los coeficientes $c_k^{(x)}$ de su serie de Fourier son

$$c_k = \begin{cases} 4/(\pi k)^2, & \text{si } k \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

y dibuje el espectro $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$.

2. Aplicando propiedades y los resultados del inciso previo, encuentre la expresión matemática del espectro $\mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\}$ de la señal $\tilde{y}(t)$ de la Fig. B
3. Calcule los coeficientes $c_k^{(z)}$ de la serie de Fourier de la señal $\tilde{z}(t)$ de la Fig. C en función de los coeficientes $c_k^{(x)}$ de la señal de la Fig. A.



Ejercicio 26. Si $x(t)$ es el pulso triangular del Ejercicio 24, con $\tau = T/2$,

1. Calcule y grafique la señal $y(t) = x(t) * [\delta(t) + \delta(t - T)]$ y su espectro $Y(f)$.
2. Calcule y grafique la señal $z(t) = x(t) * [\delta(t) - \delta(t - T)]$ y su espectro $Z(f)$.
3. Comente las similitudes y diferencias entre los espectros de $Y(f)$ y de $Z(f)$.
4. Calcule y grafique la señal periódica $\tilde{y}(t) = x(t) * \sum_k \delta(t - kT_0)$, y determine los coeficientes c_k de la serie de Fourier. Grafique el módulo de c_k en función de k .

5. Calcule y grafique la señal periódica $\tilde{z}(t) = x(t) * \sum_k [\delta(t - 2kT_0) - \delta(t - (2k+1)T_0)]$. Determine los coeficientes c_k de la serie de Fourier, y grafique su módulo en función de k .
6. Compare los resultados de los incisos (4) y (5). En base a propiedades, explique si son “razonables” o no. ¿Algunos coeficientes son nulos? ¿Cuáles? ¿Por qué?

Ejercicio 27. Aplicando propiedades,

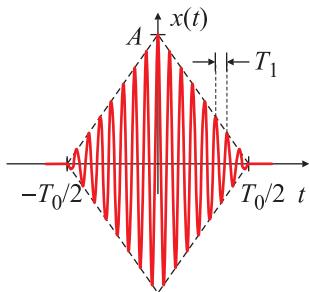


Fig. A

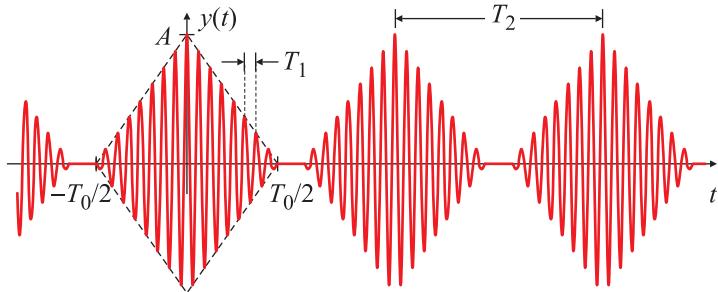


Fig. B

- Calcule la transformada de Fourier $X(f)$ de la señal $x(t)$ formada por el producto de una función coseno $\tilde{z}(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ de frecuencia $f_1 = 1/T_1$ con el pulso triangular del Ejercicio 24, con $\tau = T_0/2$, que se muestra en la Fig. A. Suponga que $T_0 \gg T_1$.
- Calcule el espectro de la señal periódica $\tilde{y}(t)$ que resulta de repetir $x(t)$ cada T_2 , $\tilde{y}(t) = \sum_r x(t - rT_2)$ donde $T_2 \gg T_0 \gg T_1$ como se muestra en la Fig. B.

Ejercicio 28. Aplicando propiedades,

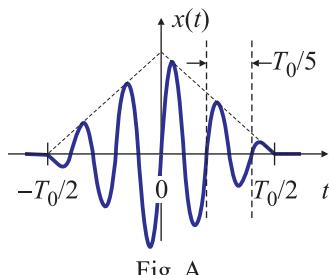


Fig. A

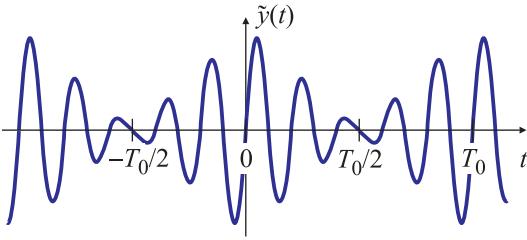


Fig. B

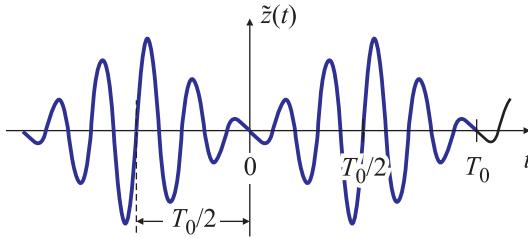
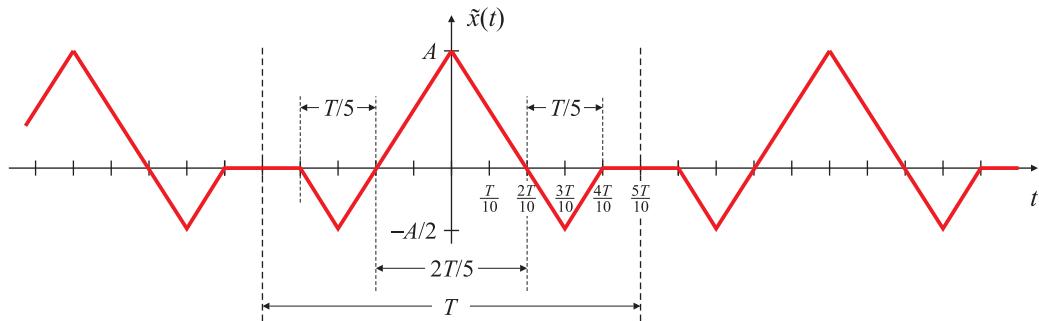


Fig. C

- Calcule y grafique la transformada de Fourier $X(f)$ de la señal $x(t)$ formada por el producto de una función seno $z(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ de frecuencia $f_1 = 1/T_1$ con el pulso triangular del Ejercicio 24, con $\tau = T_0/2$, que se muestra en la Fig. A. Suponga que $f_1 = 5/T_0$ (es decir, entran 5 ciclos del seno dentro del pulso triangular, como se ve en la Fig. A).

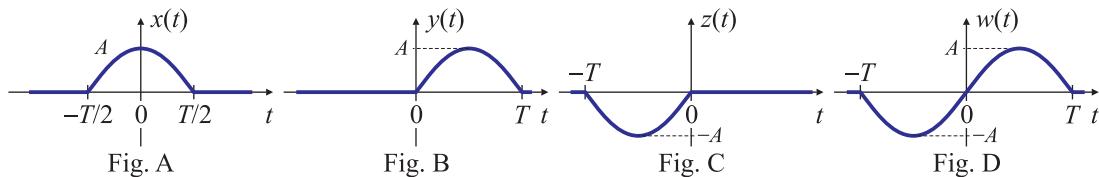
2. Usando los resultados anteriores, calcule y grafique la transformada de Fourier de la señal periódica $\tilde{y}(t) = x(t) * \sum_n \delta(t - nT_0)$ que se muestra en la Fig B.
3. Aplicando propiedades, calcule y grafique $\mathcal{F}\{\tilde{z}(t)\}$, la transformada de Fourier de la señal periódica $\tilde{z}(t) = \tilde{y}(t - T_0/2)$ que se representa en la Fig. C.
4. Determine los coeficientes de la serie de Fourier de $\tilde{y}(t)$ y $\tilde{z}(t)$. ¿Cuál es la relación entre ellos?

Ejercicio 29. Aplicando los resultados del Ejercicio 24,



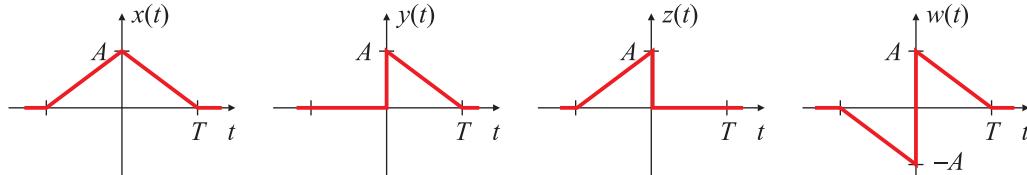
1. Calcule los coeficientes c_k de la serie de Fourier de la señal $\tilde{x}(t)$ que se muestra en la figura.
2. Revise el resultado aplicando propiedades (valor medio, simetría, etc).
3. Si la señal $\tilde{x}(t)$ se aplica a la entrada de un filtro pasabajos que deja pasar las primeras 2 armónicas (de frecuencia $1/T$ y $2/T$), grafique aproximadamente la forma de onda de la señal de salida del filtro.

Ejercicio 30. Para la señal $x(t)$ de la Fig. A,



1. calcule la transformada de Fourier $X(f)$;
2. aplique la propiedad de desplazamiento temporal al resultado del inciso anterior para calcular la transformada de Fourier del medio pulso seno $y(t)$ de la Fig. B;
3. determine el espectro de un pulso medio seno cuya duración sea aT , $a > 0$;
4. determine el espectro del pulso $z(t)$ que se muestra en la Fig. C;
5. calcule el espectro del pulso seno $w(t)$ que se observa en la Fig.D. Revise su resultado utilizando la propiedad de ventaneo con $f(t) = A \operatorname{sen}(2\pi t/T)$ y $p(t) = u(t + T) - u(t - T)$.

Ejercicio 31. Para las señales temporales de la figura, determine si es posible calcular el espectro de...



1. $Y(f)$ a partir del espectro de $X(f)$,
2. $X(f)$ a partir del espectro de $Y(f)$,
3. $Z(f)$ a partir del espectro de $Y(f)$,
4. $W(f)$ a partir del espectro de $X(f)$,
5. $X(f)$ a partir del espectro de $W(f)$,
6. $W(f)$ a partir del espectro de $Y(f)$,

únicamente aplicando propiedades. En caso afirmativo, explique cómo obtenerlo, y en caso negativo, porqué no es posible.



Ejercicio 32. En el Ejemplo 2.48 se mostró que la transformada del pulso gaussiano $x(t) = e^{-\pi t^2}$ coincide con $x(t)$. Esto es, si $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, entonces $x(t) = X(f)|_{f=t}$. Para simplificar la notación y evitar confusiones, es conveniente definir la transformada como un operador $\mathcal{F} : C \rightarrow C$, donde C es un espacio de funciones apropiado, tal que $\mathcal{F} : x(\cdot) \mapsto \mathcal{F}\{x(\cdot)\}$, donde $\mathcal{F}\{x(\cdot)\}$ se define como

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) e^{-j2\pi t\sigma} d\sigma.$$

Si $x(t)$ es el pulso gaussiano, $x(t) = e^{-\pi t^2}$, se verifica que $x(\cdot) = \mathcal{F}\{x(\cdot)\}$. Esta idea se puede generalizar, y si la función $x(\cdot)$ satisface

$$x(\cdot) = \lambda \mathcal{F}\{x(\cdot)\}$$

para un único $\lambda \in \mathbb{C}$, se dice que $x(\cdot)$ es una *autofunción* de la transformada de Fourier, por analogía con la definición de autovector: \mathbf{v} es un autovector de la matriz \mathbf{A} si $\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$. Entonces el pulso gaussiano es una autofunción de la transformada de Fourier, con $\lambda = 1$. En este problema se investiga la existencia de otras autofunciones.

1. Pruebe que la función constante $x(t) = 0$ para todo t es una autofunción. ¿Cuál es el autovalor λ ?

Nota: como el autovalor no es único, en este caso no se reconoce $x(t) = 0$ como una autofunción, de la misma manera que el vector nulo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ no se reconoce como un autovector aunque $\mathbf{A}\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ para cualquier λ .

2. Demuestre que el tren de impulsos

$$p(t) = \sum_r \delta(t - rT)$$

es una autofunción. ¿Cuál es el autovalor λ ?

3. Encuentre para qué valores no nulos de α , β , γ y ε la función $x(t) = \alpha \operatorname{sinc}(\gamma t) + \beta r(\varepsilon t)$ es una autofunción, donde $r(t)$ es el pulso rectangular definido por

$$r(t) = \begin{cases} A, & -T/2 < t < T/2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

4. Generalice el resultado anterior para una función $y(t) = \alpha x(t) + \beta \mathcal{F}\{x(t)\}$: encuentre para qué valores de α y β la función $y(\cdot)$ es una autofunción de la transformada de Fourier, $y(\cdot) = \mathcal{F}\{y(\cdot)\}$.

Ejercicio 33. Para el sistema lineal S con respuesta impulsiva $h_\tau(t) = \alpha e^{-\beta t} e^{\gamma \tau} u(t - \tau)$, con $t \geq \tau \geq 0$, y $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

1. Determine si es invariante en el tiempo para (i) $\gamma = \beta$, y (ii) $\gamma \neq \beta$.
2. Calcule y grafique la respuesta $y_1(t)$ del sistema ante una entrada escalón $x_1(t) = u(t)$ cuando (i) $\gamma = \beta = 1$, (ii) $\gamma = 2\beta = 2$ y (iii) $\gamma = -2\beta = -2$.
3. Repita el inciso anterior para una entrada $x_2(t) = u(t - 1)$ cuando (i) $\gamma = \beta = 1$, (ii) $\gamma = 2\beta = 2$ y (iii) $\gamma = -2\beta = -2$.

Ejercicio 34. Para el sistema lineal e invariante en el tiempo cuya entrada y salida están relacionadas por

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2) d\tau.$$

1. Calcule la respuesta impulsiva del sistema.
2. Determine la respuesta del sistema ante una entrada $x(t) = u(t + 1) - u(t - 2)$, representada en la Fig. A.
3. Calcule la respuesta impulsiva del sistema total para la interconexión que se muestra en la Fig. B.

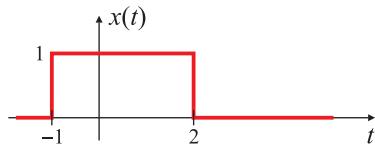


Fig. A

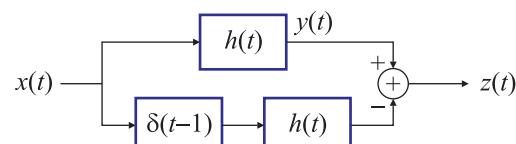


Fig. B

Ejercicio 35. Dada la señal $x(t)$ que se muestra en la Fig. A.

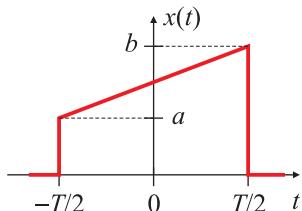


Fig. A

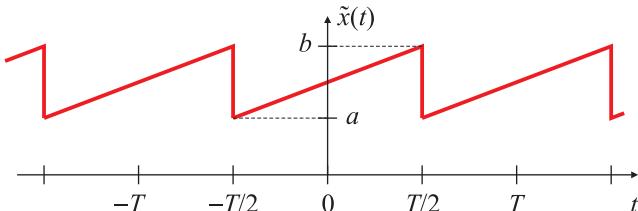
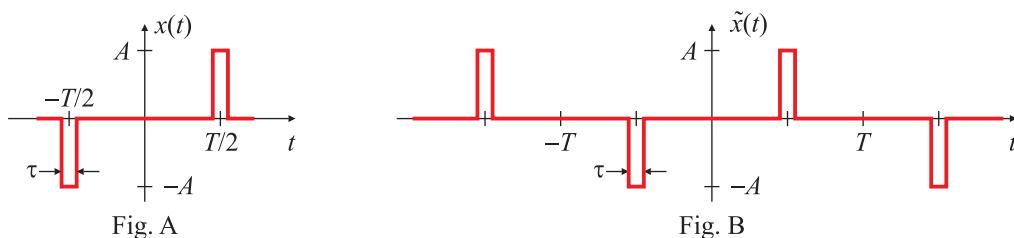


Fig. B

1. Calcule y grafique la parte par $x_e(t)$ y la parte impar $x_o(t)$ de $x(t)$.
2. Calcule analíticamente la transformada de Fourier $X_1(f)$ de $x_e(t)$, $X_1(f) = \mathcal{F}\{x_e(t)\}$, y grafique aproximadamente su módulo y fase, indicando todos los puntos relevantes.

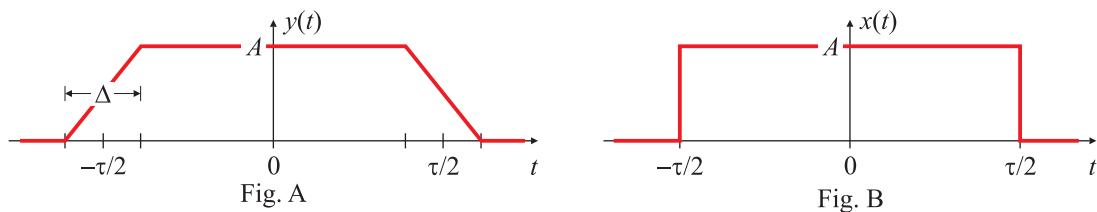
3. Aplicando propiedades, calcule la transformada de Fourier $X_2(f)$ de $x_o(t)$, $X_2(f) = F\{x_o(t)\}$, y grafique aproximadamente su módulo y fase, indicando todos los puntos relevantes.
4. A partir de los resultados de los incisos (2) y (3), escriba la expresión del espectro $X(f)$ de la señal $x(t)$.
5. Calcule los coeficientes c_k de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$ que resulta de repetir $x(t)$ cada T , es decir $\tilde{x}(t) = \sum_r x(t - rT)$, que se muestra en la Fig. B. ¿Cuáles se anulan?

Ejercicio 36. Para la señal $x(t)$ de la Fig. A:



1. Calcule la transformada de Fourier $X(f)$ de $x(t)$ aplicando propiedades, y escríbala de la manera más sencilla posible. Elija $\tau = T/10$.
2. Grafique aproximadamente el módulo y la fase del espectro de $x(t)$, indicando todos los puntos relevantes.
3. Escriba la expresión del espectro de la señal periódica $\tilde{x}(t)$ que resulta de replicar $x(t)$ cada $2T$ como se muestra en la Fig. B.
4. Calcule los coeficientes c_k de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$. ¿Cuáles se anulan?

Ejercicio 37. Para la señal temporal $y(t)$ que se muestra en la Fig.A, donde $\Delta < \tau/2$:



1. Calcule la transformada de Fourier $Y(f)$ de $y(t)$ aplicando la propiedad de derivación, recordando que la transformada de Fourier de un pulso rectangular $x(t)$ de ancho τ y amplitud A que se muestra en la Fig. B es $X(f) = A\tau \operatorname{sinc}(\tau f)$.
2. La señal $y(t)$ también se puede escribir como la convolución entre $x(t)$ y un pulso rectangular $w(t)$. Especifique la amplitud y el ancho del pulso rectangular $w(t)$ de manera que $y(t) = (x * w)(t)$.
3. Aplicando los resultados del inciso anterior, y aplicando la propiedad de convolución, vuelva a calcular $Y(f)$, la transformada de Fourier de la señal temporal $y(t)$.

4. A partir de las características de $y(t)$, y aplicando por lo menos dos propiedades distintas, determine si el resultado encontrado en los incisos (1) y (3) no son incorrectos.
5. Calcule los coeficientes c_k de la serie de Fourier de la señal periódica $\tilde{y}(t)$ que se obtiene al replicar $y(t)$ cada T segundos ($T \gg \tau + 2\Delta$)

Ejercicio 38. Sabiendo que la transformada de Fourier de $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ que se muestra en la Fig. A es $X(f) = 1/(\alpha + j2\pi f)$, calcule y grafique (aproximadamente) las transformadas de las siguientes señales aplicando propiedades:

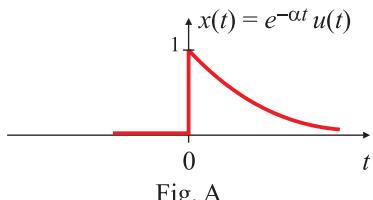


Fig. A

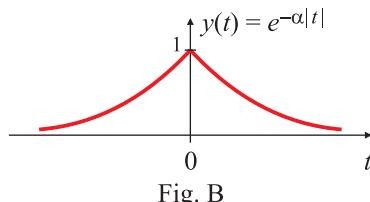


Fig. B

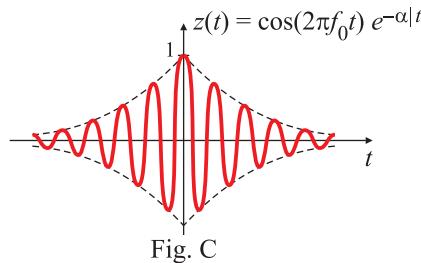


Fig. C

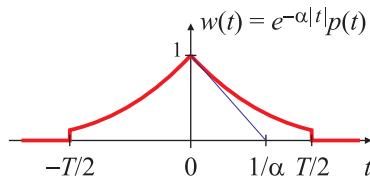


Fig. D

1. $y(t) = e^{-\alpha|t|}$ (Fig. B)
2. $z(t) = \cos(2\pi f_0 t) e^{-\alpha|t|}$ (Fig. C)
3. $w(t) = y(t)p(t)$, donde $p(t) = [u(t + T/2) - u(t - T/2)]$, si $T \gg 1/\alpha$. (Fig. D)

Ejercicio 39. Para la señal $x(t)$ de la Fig. A,

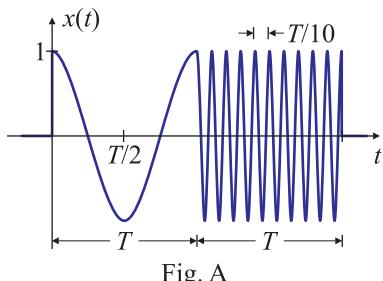


Fig. A

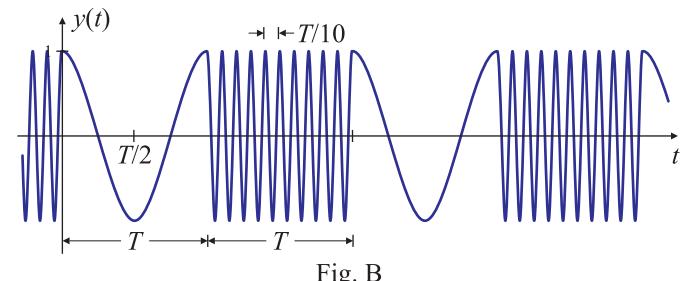
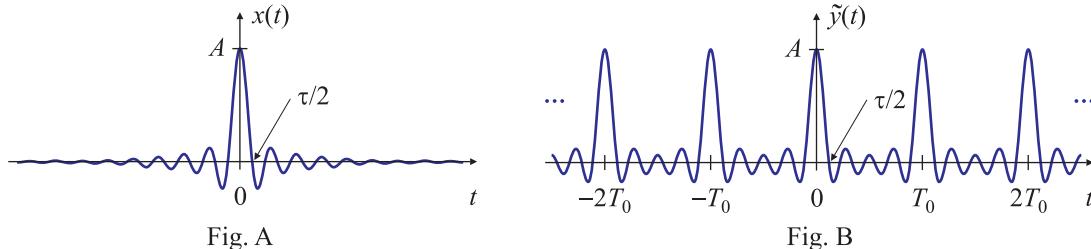


Fig. B

1. Calcule su transformada de Fourier $X(f)$ y grafique aproximadamente el módulo y la fase indicando todos los puntos relevantes.
2. Usando el resultado del inciso anterior calcule los coeficientes c_k de la serie de Fourier de la señal periódica $\tilde{y}(t)$ que se obtiene al replicar $x(t)$ cada $2T$ (Fig. B) y grafique su módulo.

3. Calcule la transformada de Fourier de $\mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\}$.

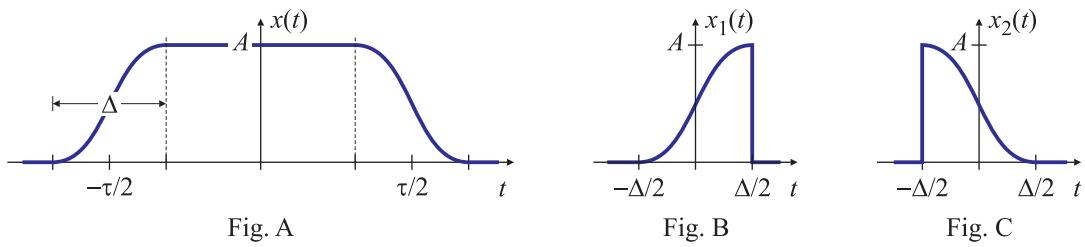
Ejercicio 40. Para la señal $x(t) = A \operatorname{sinc}[t/(\tau/2)]$ de la Fig. A



1. Calcule la transformada de Fourier $X(f)$ utilizando la propiedad de simetría y las tablas de transformadas. Grafique aproximadamente el módulo y la fase de $X(f)$.
2. Usando el resultado del inciso anterior, calcule y grafique la transformada $\mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\}$ de la señal periódica $\tilde{y}(t)$ que resulta de replicar $x(t)$ cada T_0 , con $T_0 \gg \tau$, como se muestra en la Fig. B.
3. Calcule los coeficientes c_k de la serie de Fourier de $\tilde{y}(t)$.

Ejercicio 41. La señal $x_1(t) = A_m \operatorname{sinc}^2(f_m t)$ modula una portadora $x_2(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$, y se obtiene una señal $x_3(t) = [1 + k_a x_1(t)]x_2(t)$, donde $k_a A_m < 1$. Grafique la señal $x_3(t)$, y calcule y grafique los espectros $X_1(f)$ de $x_1(t)$ y $X_3(f)$ de $x_3(t)$.

Ejercicio 42. Calcule la transformada de Fourier del pulso con flanco tipo “coseno elevado” que se muestra en la Fig. A aplicando propiedades.



1. Verifique que la transformada de Fourier de la señal $x_1(t)$ que se muestra en la Fig. B, definida por

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{1+\sin(\pi t/\Delta)}{2}, & \text{si } |t| < \Delta/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad \text{es } X_1(f) = \frac{\Delta}{2} \operatorname{sinc}(\Delta f) - j \frac{2\Delta^2 f \cos(\pi \Delta f)}{\pi(1 - 4\Delta^2 f^2)}.$$

2. Usando las transformadas de Fourier de $x_1(t)$, de $x_2(t)$ y la del pulso rectangular, compruebe que la transformada $X_3(f)$ de $x_3(t) = x_1[t + (\tau + \Delta)/2] + x_2[t - (\tau + \Delta)/2]$ es

$$X_3(f) = \Delta \operatorname{sinc}(\Delta f) \cos(\pi \tau f) - \frac{4\Delta^2 f \cos(\pi \Delta f)}{\pi(4\Delta^2 f^2 - 1)} \operatorname{sen}[\pi \tau f].$$

3. Utilizando los resultados anteriores, muestre que

$$X(f) = \tau \operatorname{sinc}(\tau f) \frac{\cos(\pi \Delta f)}{(1 - 4\Delta^2 f^2)}.$$

4. Compare la respuesta en frecuencia de un pulso rectangular $x_r(t)$ (Ejemplo 2.11, pág. 86), un pulso trapezoidal $x_t(t)$ (Ejemplo 2.59, pág. 172) y un pulso con flanco tipo “coseno elevado” $x_c(t)$ de la misma duración efectiva τ , como se muestra en la Fig. D. Compruebe que el pulso con flanco tipo coseno elevado tiene un espectro que decae más rápidamente a medida que aumenta la frecuencia que los espectros de las otras dos señales, como se muestra en la Fig. E para $\Delta = \tau/2$.

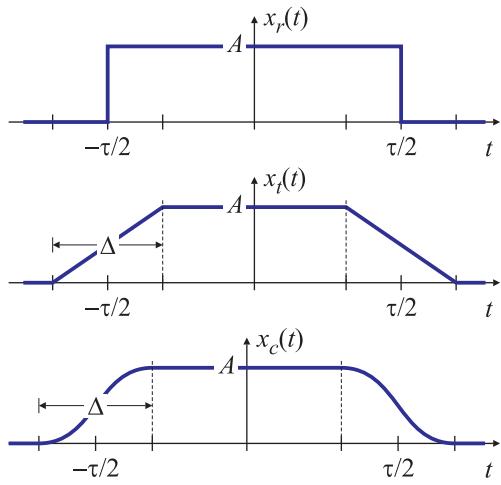


Fig. D

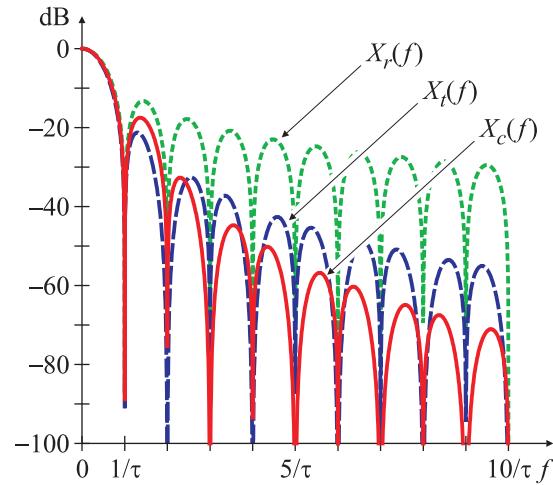


Fig. E

Ejercicio 43. Un *Transformador de Hilbert* es un sistema cuya respuesta en frecuencia es

$$H(f) = \begin{cases} j, & -\infty < f < 0, \\ -j, & 0 \leq f < \infty. \end{cases}$$

como se muestra en la Fig. A.

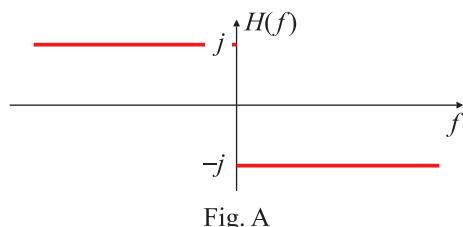


Fig. A

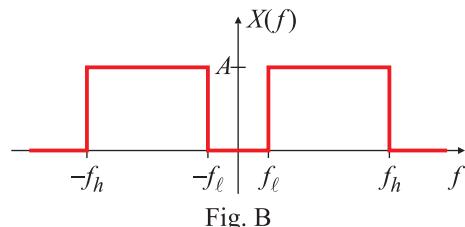


Fig. B

- Determine la respuesta impulsiva $h(t)$ de este sistema. **Ayuda:** Aplique propiedades y los resultados del Ejemplo 2.7.
- Calcule, tanto en el dominio tiempo como en el dominio frecuencia, la salida $\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ del Transformador de Hilbert cuando se lo excita con la señal $x(t) = A/(2\pi t)[\sin(2\pi f_h t) - \sin(2\pi f_\ell t)]$. **Ayuda:** muestre que el espectro de la señal $x(t)$ está dado por

$$X(f) = \begin{cases} A, & -f_h < f < -f_\ell, \\ A, & +f_\ell < f < +f_h, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde $0 < f_l < f_h$, como se muestra en la Fig. B. Las señales con espectros de esta forma se denominan tipo *pasabanda*.

3. Grafique el espectro de la entrada $x(t)$ y la salida $\hat{x}(t)$ del Transformador de Hilbert.
4. Una señal analítica $x_a(t)$ se define como

$$x_a(t) = x(t) + j\hat{x}(t).$$

donde $x(t)$ y $\hat{x}(t)$ son la entrada y la salida del Transformador de Hilbert, respectivamente. Grafique el espectro de la señal $x_a(t)$. ¿Cuál es su característica distintiva?

5. Si $x(t)$ es una señal arbitraria, calcule $y(t) = \mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\}$.

Ejercicio 44. Observadas desde una distancia normal de lectura las 101 barras negras separadas por 100 barras blancas de la rejilla que se muestra en la figura se distinguen perfectamente. A una distancia suficiente, la rejilla se observa como un rectángulo uniforme de color gris.



1. Determine experimentalmente la distancia D a la cual su ojo puede resolver las barras, tanto en posición horizontal como vertical.
2. El ojo tiene un ancho de banda de $2B$. Utilice el resultado del inciso anterior para determinar B (en ciclos por radianes).
3. A la distancia normal de lectura, el ojo es capaz de percibir los píxeles del retrato de Fourier. Sin embargo, a una distancia apropiada aparece como una imagen bien detallada. Utilice los resultados del inciso 1 para predecir la distancia donde ocurre esta transición... y luego confirme (o no) su predicción de manera experimental.



Ejercicio 45. Demuestre el Teorema del ancho de banda para funciones absolutamente integrables cuando la transformada de Fourier se expresa en función de la frecuencia angular Ω . Esto es, si $h(t)$ tiene transformada de Fourier $H(\Omega)$, con duración efectiva Δt y ancho de banda $\Delta\Omega$,

$$\Delta t \Delta \Omega \geq 2\pi.$$

- (C) **Ejercicio 46.** Demuestre que para el pulso gaussiano $x(t) = Ce^{-\alpha t^2}$, con $\alpha > 0$, se verifica la igualdad del teorema del ancho de banda para funciones de energía finita:

$$\Delta t \Delta f = 1/(4\pi).$$

- Ejercicio 47.** En este problema se estudia la *demodulación* de la señal modulada en amplitud

$$x(t) = g(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t). \quad (*)$$

Demodular es recuperar $g(t)$ a partir de $x(t)$. La señal $g(t) \geq 0$ es la señal *moduladora*, y $p(t) = \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$ es la señal *portadora*. En lo que sigue, se supone que $g(t)$ es de banda limitada, es decir que $G(f) = 0$ para $|f| > f_m$, y que $f_0 \gg f_m$, (Fig. A). Un demodulador sencillo se obtiene conectando en cascada un rectificador y un filtro pasabajas (Fig. B), como se estudia a continuación.

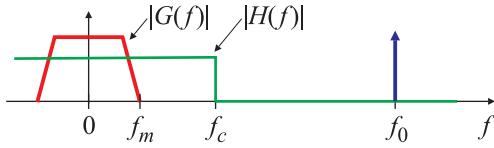


Fig. A

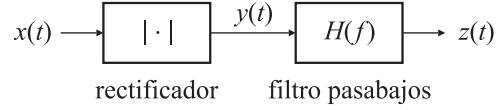


Fig. B

1. Esboce $|X(f)|$, el módulo del espectro de $x(t)$, si el espectro $G(f)$ de $g(t)$ es el mostrado en la Fig. A.
2. Demuestre, aplicando propiedades que la serie de Fourier de la portadora rectificada $|p(t)| = |\operatorname{sen} 2\pi f_0 t|$ es

$$|\operatorname{sen} 2\pi f_0 t| = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2\pi k(2f_0)t}}{1 - 4k^2}.$$

(note que $p(t)$ tiene período $T_0 = 1/f_0$, pero $|p(t)|$ tiene período $T_0/2 = 1/(2f_0)$. Grafique el espectro $\mathcal{F}\{|p(t)|\}$.

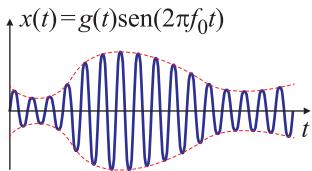


Fig. C

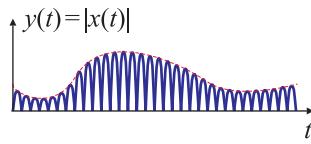


Fig. D

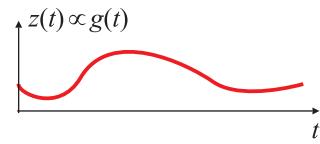


Fig. E

3. La respuesta de un rectificador de onda completa ante una entrada $x(t)$ es $y(t) = |x(t)|$. Aplicando los resultados del inciso 2, muestre que si $x(t)$ es la señal modulada en amplitud en (*) (Fig. C), el espectro de la salida del rectificador de onda completa (Fig. D) es

$$Y(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{G(f - k2f_0)}{1 - 4k^2},$$

donde $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$. Grafique el módulo de $Y(f)$ en función de f .

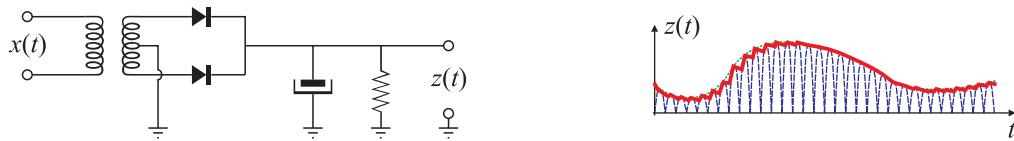
4. Finalmente, un demodulador sencillo se obtiene conectando en cascada un rectificador de onda completa como el del Ejercicio 2 con un filtro pasabajas ideal $H(f)$ con frecuencia de corte f_c ,

$$H(f) = \begin{cases} A_0 e^{-j2\pi t_0 f}, & \text{si } |f| < f_c, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

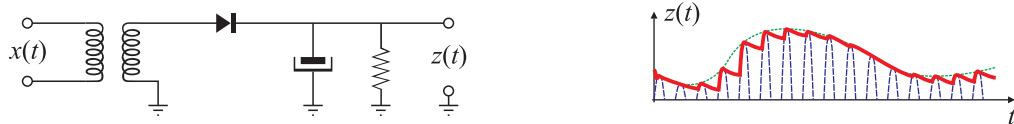
como se muestra en la Fig. B, donde la frecuencia de corte puede elegirse arbitrariamente dentro del intervalo $f_m \leq f_c \leq f_0 - f_m$. Demuestre que la salida $z(t)$ del filtro pasabajas coincide, salvo un factor de escala, con la señal $g(t)$ (Fig. E):

$$z(t) = \frac{2}{\pi} A_0 g(t - t_0).$$

Observación: Los demoduladores de las radios de AM siguen este principio, aunque en lugar de utilizar un rectificador de onda completa en cascada con un filtro pasabajas implementan un detector de pico con pérdida, como se muestra en la figura.



Como usualmente la frecuencia f_0 de la señal portadora (entre 500 kHz y 1600 kHz) es mucho más elevada que el ancho de banda de la señal $g(t)$ (aproximadamente 5 kHz) se suele utilizar un rectificador de media onda, a costa de un pequeño aumento de la distorsión.



Ejercicio 48. El sistema de suspensión de un automóvil se puede modelar con la función transferencia

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{10^4}{s^2 + 10s + 10^4}$$

considerando como entrada el desplazamiento vertical de la rueda, y como salida la posición de la carrocería. La Fig. A muestra el gráfico de la respuesta en frecuencia; el amortiguamiento $\zeta = 0,05$ indica que el estado de la suspensión no es muy bueno. Este automóvil circula por una ruta de tierra con ondulaciones, como las que se muestran en la Fig. B, compuestas por una serie de crestas elevadas sobre la superficie de la ruta en sentido ortogonal a la misma, Fig. C. Se producen por la interacción inestable entre los vehículos y la deformación del material del camino. Una vez que alcanzan cierta relación base/altura se stabilizan porque los picos se aplastan al mismo tiempo que se elevan los bordes.

- Si el auto se desplaza a una velocidad de v m/s, y la distancia entre las ondulaciones es de d metros, muestre que la frecuencia en Hz del desplazamiento de las ruedas es v/d Hz.

2. Si las ondulaciones están separadas $d = 5$ m entre sí, y el vehículo se desplaza a una velocidad $v_1 = 5$ m/s (18 Km/h), determine la frecuencia de la excitación causada por las ondulaciones, y el desplazamiento vertical de la carrocería como múltiplo de la altura de la ondulación. (Como no interesa el valor exacto del multiplicador, este inciso puede resolverse usando la gráfica de la respuesta en frecuencia.)
3. Repita los cálculos para velocidades $v_2 = 10$ m/s, $v_3 = 30$ m/s, $v_4 = 50$ m/s. Comente sus resultados.
4. Utilice la ecuación de la función transferencia para encontrar el desplazamiento del vehículo debido a las ondulaciones cuando la velocidad es $v_5 = 100/(2\pi)$ m/s (aproximadamente 57 Km/h).

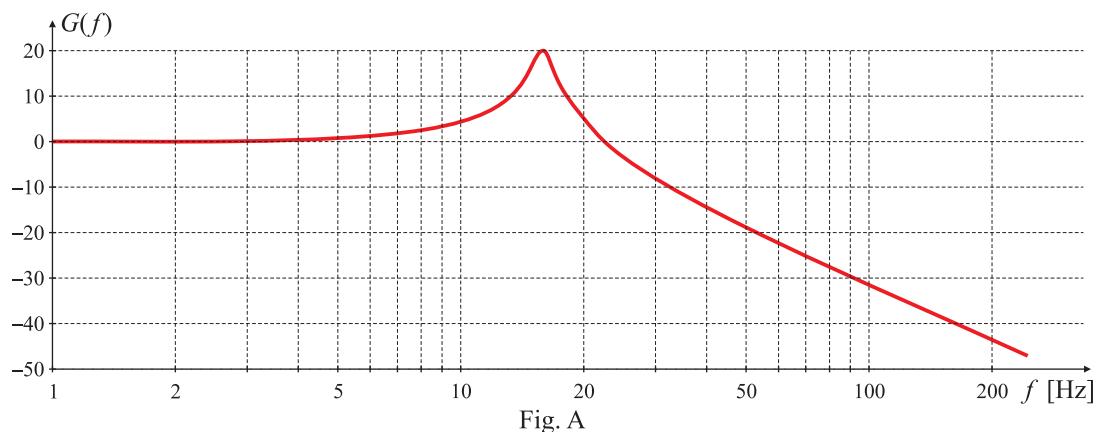
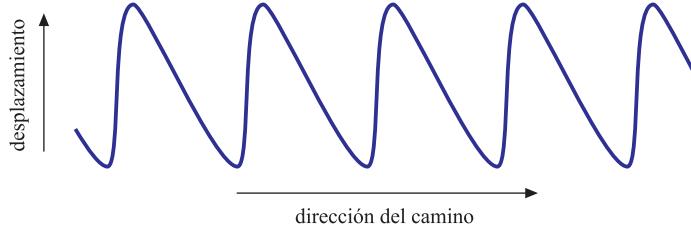


Fig. B



1. Comente sobre la mejor estrategia para de transitar sobre una carretera con ondulaciones de modo de minimizar los impactos sobre los ocupantes del vehículo. ¿Cuál es el inconveniente?
2. De la figura se observa que las ondulaciones no son puramente sinusoidales, sino que se asemejan a una onda triangular, y por lo tanto el espectro de los desplazamientos tendrá componentes armónicas. Explique cómo se manifiestan estas armónicas cuando el auto se desplaza a distintas velocidades sobre la ruta.
3. El cuerpo humano es mucho más sensible a la aceleración que a los desplazamientos. Describa cómo modificar la función transferencia para estudiar estos efectos, y discuta cómo cambian los resultados de los incisos anteriores.

Ejercicio 49. La Fig. A muestra la sección de un motor de cuatro tiempos. El ciclo de trabajo distingue cuatro etapas, denominadas:

- **admisión:** durante la cual se inyectan aire y combustible en el cilindro, mientras el pistón está en la posición inferior;
- **compresión:** en la que se comprime la mezcla de aire y combustible elevando el pistón, con las válvulas cerradas;
- **combustión:** cuando se produce la ignición de la mezcla por la chispa de la bujía, y la expansión de los gases de escape fuerza el cilindro hacia la posición inferior;
- **escape:** en la que se abren las válvulas y el movimiento ascendente del pistón provoca la salida de los productos de combustión.

La Fig. B muestra la variación de la presión en el cilindro en función del tiempo cuando el motor funciona correctamente. La Fig. C muestra la variación en el tiempo de un motor que *ratea*, provocado por el encendido prematuro de la mezcla de aire y combustible y rápidas oscilaciones de la presión en la transición entre la compresión y la ignición. El *rateo* reduce la eficiencia del motor, y disminuye la vida útil del motor. Se desea diseñar un método para detectar el *rateo* examinando la señal de presión en el cilindro. Como el ciclo de trabajo del motor se repite en el tiempo, puede pensarse que la señal de presión es periódica, y por lo tanto se puede descomponer en series de Fourier.

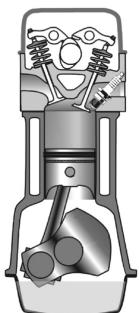


Fig. A

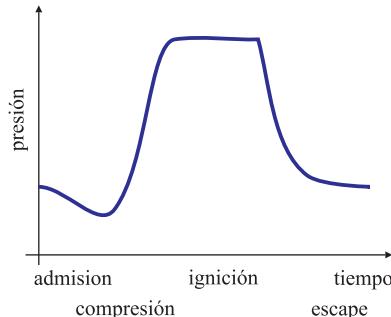


Fig. B

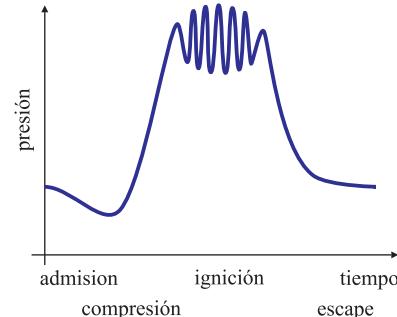


Fig. C

1. Si el período del ciclo es T , se aproxima la señal de presión por la onda cuadrada definida en un período por

$$p(t) = \begin{cases} p_0, & t \in [0, T/2), \\ 21p_0, & t \in [T/2, 3T/4), \\ p_0, & t \in [3T/4, T]. \end{cases}$$

Muestre que los coeficientes de la serie de Fourier compleja están dados por $c_0 = 6p_0$ si $k = 0$, y

$$c_k = j \frac{10p_0}{\pi k} e^{-j\pi k} (e^{-j\frac{\pi k}{2}} - 1) = j \frac{10p_0}{\pi k} (-1)^k [(-j)^k - 1] = \frac{20p_0}{\pi k} e^{j\frac{3\pi}{4}k} \operatorname{sen}(\pi k/4),$$

si $k \neq 0$.

2. La señal de presión del motor con *rateo* se aproxima por

$$p_r(t) = \begin{cases} p_0, & t \in [0, T/2), \\ 21p_0 + 4p_0 \cos(2\pi 24t/T), & t \in [T/2, 3T/4), \\ p_0, & t \in [3T/4, T]. \end{cases}$$

en un período. Esta señal es esencialmente la misma que $p(t)$, con el agregado de un término aditivo $4p_0 \cos(2\pi 24t/T)$ durante el intervalo $t \in [T/2, 3T/4]$. Muestre que los coeficientes de la serie de Fourier de este término aditivo están dados por

$$d_k = \frac{2p_0}{T} \int_{T/2}^{3T/4} \left[e^{j\frac{2\pi}{T}(24-k)t} + e^{j\frac{2\pi}{T}(24+k)t} \right] dt.$$

3. Calcule d_{24} , y demuestre que el resto de los términos se comporta como $[1/(24 - k) + 1/(24 + k)]$.
4. Explique cómo usaría los coeficientes de las series de Fourier calculadas en los incisos anteriores para distinguir entre un motor que ratea y otro que no.

Ejercicio 50. Uno de los problemas más difíciles que enfrentaron los antiguos astrónomos griegos fue el de predecir la posición de los planetas en el firmamento. Un modelo exitoso fue descrito por Ptolomeo en su *Almagesto*. En notación moderna, el movimiento uniforme circular de un planeta P alrededor de la Tierra T (teoría geocéntrica) está dado por

$$x_1(t) = a_1 e^{j2\pi \frac{t}{T_1}}, \quad -\infty < t < \infty,$$

donde $a_1 = |a_1| e^{j\phi_1}$, $0 \leq \phi_1 \leq 2\pi$, es el radio de la órbita, T_1 su período, y el parámetro ϕ_1 especifica la ubicación del planeta en $t = 0$ [Fig.A].

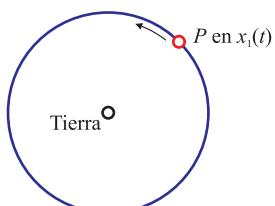


Fig. A

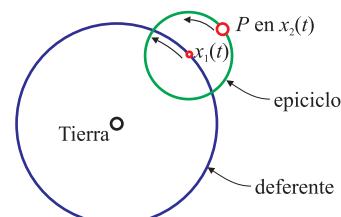


Fig. B

Como este modelo no puede explicar el ocasional movimiento retrógrado de los planetas exteriores (Marte, Júpiter y Saturno), se propuso el modelo más elaborado

$$x_2(t) = x_1(t) + a_2 e^{j2\pi \frac{t}{T_2}},$$

con $a_2 = |a_2| e^{j\phi_2}$, $0 \leq \phi_2 \leq 2\pi$. El planeta P tiene un movimiento circular uniforme alrededor de un punto que, a su vez, tiene movimiento circular uniforme alrededor de la tierra T , como se muestra en la Fig. B. Con este modelo se puede reproducir el movimiento retrógrado, pero no es suficiente para ajustar el movimiento de los planetas con los datos experimentales.

Extendiendo esta idea se propone representar el movimiento por la suma exponencial

$$x_N(t) = a_1 e^{j2\pi \frac{t}{T_1}} + a_2 e^{j2\pi \frac{t}{T_2}} + \cdots + a_N e^{j2\pi \frac{t}{T_N}}$$

utilizando un círculo fijo denominado *deferente* y $N - 1$ círculos móviles denominados *epiciclos*. Tal movimiento es periódico cuando T_1, T_2, \dots, T_N son múltiplos enteros de algún $T > 0$, en cuyo caso la suma es una serie de Fourier con un número finito de

términos. Hiparco y Ptolomeo utilizaron una construcción usando 4 círculos para ajustar el movimiento de cada planeta, con la Tierra cerca pero no en el origen. Este modelo fue utilizado para predecir las posiciones de los cinco planetas de la antigüedad hasta que Kepler y Newton descubrieron las leyes de movimiento planetario unos 1300 años después. Lagrange fue el primero en reconocer la conexión entre el análisis de Fourier y el antiguo modelo de movimiento planetario de Hiparco y Ptolomeo.

La Tierra y Marte orbitan el sol con períodos $T_T = 1$ año, $T_M = 1,88$ año, a una distancia media de $1 \text{ au} \doteq 150 \cdot 10^6 \text{ km}$, $1,53 \text{ au} = 228 \cdot 10^6 \text{ km}$, respectivamente. En este ejercicio se utilizarán las aproximaciones

$$x_T(t) = e^{j2\pi \frac{t}{1}}, \quad x_M(t) = 1,5e^{j2\pi \frac{t}{2}}, \quad (t \text{ en años})$$

para estudiar el movimiento de Marte visto desde la Tierra.

1. Dibuje círculos concéntricos con radio 1, 1.5, e indique 9 puntos marcados A, B, \dots, I ubicando la Tierra y Marte en $t = 0, 1/4, 2/4, \dots, 8/4$ años.
2. Dibuje la órbita $x(t) = x_M(t) - x_T(t)$, $0 \leq t \leq 2$ años que muestra la posición de Marte como se ve desde la Tierra.
3. Normalmente, Marte se mueve sobre el cielo nocturno en la misma dirección que la luna. Sin embargo, hay un período de tres meses cada dos años en el cual el planeta se mueve en sentido contrario. De acuerdo a los resultados del inciso 2 explique la causa de este “movimiento retrógrado”.

(M) Ejercicio 51. Problema para resolver con Matlab Fecha de entrega:

Una señal T -periódica $\tilde{x}(t)$ se aplica a un filtro pasabajos ideal de ancho de banda $f_N = (N + \frac{1}{2})/T$. El efecto del filtro es anular todas las componentes armónicas de frecuencia superior a f_N . La Fig. 2.112 muestra el espectro de la señal de entrada $\tilde{x}(t)$, la respuesta en frecuencia del filtro, y el espectro de la señal de salida $\tilde{x}_f(t)$.

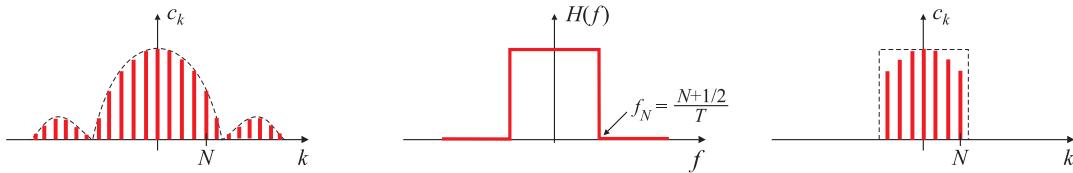


Fig. 2.112. Espectro de la entrada, respuesta en frecuencia, y espectro de la salida del filtro.

Si la señal $\tilde{x}(t)$ se representa por su serie de Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi}{T} kt}$$

a la salida del filtro sólo se observan las N primeras armónicas, de manera que la señal de salida $\tilde{x}_f(t)$ se puede escribir como

$$\tilde{x}_f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{j \frac{2\pi}{T} kt}.$$

Si el filtro es muy angosto, por ejemplo si tiene una frecuencia de corte $f_1 = 3/(2T)$, sólo permite el paso de la componente continua y de la primera armónica de la señal. A medida que se aumenta el ancho de banda del filtro, crece el número de componentes armónicas presentes en la señal de salida, y ésta se parece cada vez más a la señal de entrada. En el límite, si $f_N \rightarrow \infty$, el filtro se comporta como un cable (no filtra nada) y la señales de entrada y salida son idénticas.

El propósito de este ejercicio es determinar el ancho de banda del filtro que asegure que la diferencia entre la señal de entrada y salida no supere una determinada cota. Hay varias maneras de medir la diferencia entre dos señales, y para este ejercicio se consideran dos:

- el *error medio cuadrático*, definido por

$$e_2 = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_2 = \left(\frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

- el *error máximo*, que se calcula como

$$e_\infty = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_\infty = \max_{t \in [-\tau/2, \tau/2]} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_f(t)|.$$

Para el caso de señales periódicas, es habitual elegir τ igual al período T de la señal. Además, aplicando propiedades (¿cuáles?) la integral de la expresión del error medio cuadrático puede reemplazarse por una sumatoria.

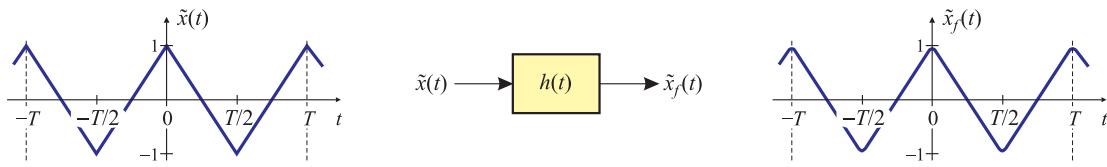


Fig. 2.113. Procesamiento de una forma de onda triangular por un filtro ideal.

- Para la señal triangular de la Fig. 2.113, definida en un período por $\tilde{x}(t) = 1 - 4 \left| \frac{t}{T} \right|$, $|t| < T/2$,
 - Calcular analíticamente los coeficientes de Fourier c_k , donde

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} k t} dt.$$

- Graficar el módulo y fase de los coeficientes c_k en función del número de armónico k .
- Usando MATLAB, computar 2 períodos de la salida $\tilde{x}_f(t)$ del filtro usando los coeficientes calculados en el inciso (a). Adopte $T = 1$, $N = 4, 8, 16, 20, 50, 100$. **Nota:** Para poder graficar adecuadamente la respuesta temporal, en MATLAB se debe definir un “vector de tiempos” de resolución suficiente para que los resultados sean significativos. Por ejemplo, $t = [0 : dt : 2T]$, con $dt = 2T/K$, donde K es un entero apropiado. ¿Por qué?
- Determinar el ancho de banda f_{N_2} del filtro (i.e. el mínimo valor de N_2) que asegura que el error medio cuadrático entre las señales de entrada y la salida es inferior al 5 %:

$$e_2 = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_2 = \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < 0,05.$$

Aplicar las propiedades sugeridas más arriba para reemplazar el cálculo de la integral por una sumatoria.

- Encontrar el ancho de banda f_{N_∞} del filtro (i.e. el mínimo valor de N_∞ , que seguramente será distinto a N_2) que asegura que el error máximo entre las señales de entrada y la salida es inferior al 5 %:

$$e_\infty = |\tilde{x} - \tilde{x}_f|_\infty = \max_{t \in [-T/2, T/2]} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}_f(t)| < 0,05.$$

- Repetir el inciso anterior para la señal $\tilde{x}(t)$ de la Fig. 2.114 definida en un período por

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T/4, \\ 0, & T/4 < |t| < T/2. \end{cases}$$

- Comparar la forma de onda calculada con MATLAB en los incisos previos con la salida de un filtro lineal, causal, e invariante en el tiempo, que se puede simular con el ambiente que se muestra en la Fig. 2.115(a). Elaborar sobre las similitudes y diferencias entre estos resultados. (Esta aplicación puede descargarse desde la página web de la materia.)

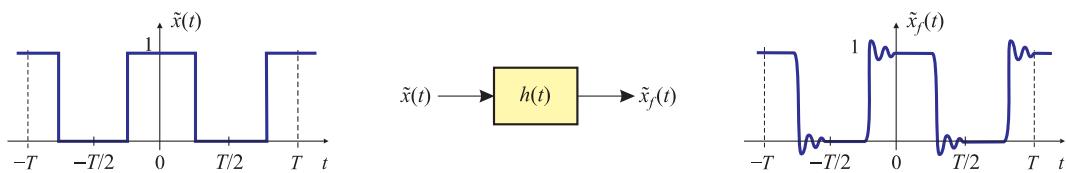


Fig. 2.114. Procesamiento de una forma de onda cuadrada por un filtro ideal.

Este filtro es de tipo elíptico de orden 8, con una atenuación máxima en la banda de paso de 0.1 dB, y una atenuación mínima en la banda de rechazo de 60 dB. La frecuencia de corte del filtro se elige con la caja de diálogo de la Fig. 2.115(b), que aparece al “cliklear” dos veces sobre el bloque del filtro analógico. El módulo de la respuesta en frecuencia, que se representa en la Fig. 2.116 para distintas frecuencias de corte, es bastante parecido al de un filtro ideal.

Observaciones

- Adjuntar el código escrito para obtener las respuestas.
- Como parte del propósito del ejercicio es reforzar los conocimientos de MATLAB, tratar de resolver el problema evitando el empleo de ciclos `for ... next`, que son de ejecución muy lenta, empleando en cambio producto de matrices.

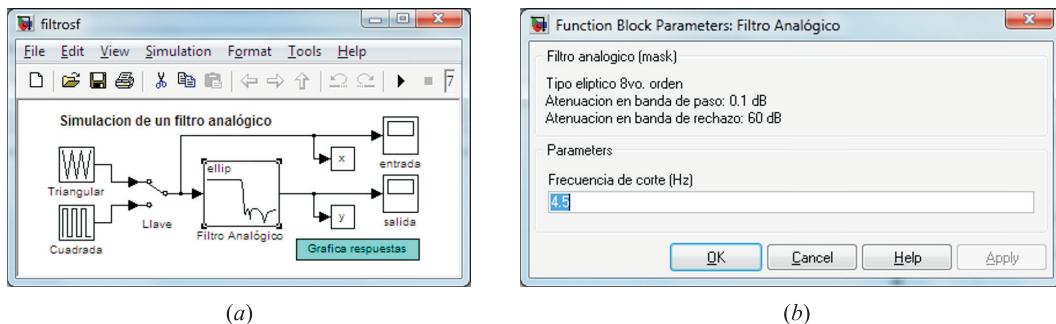


Fig. 2.115. Ambiente de simulación de un filtro analógico (a). Especificación de la frecuencia de corte del filtro (b).

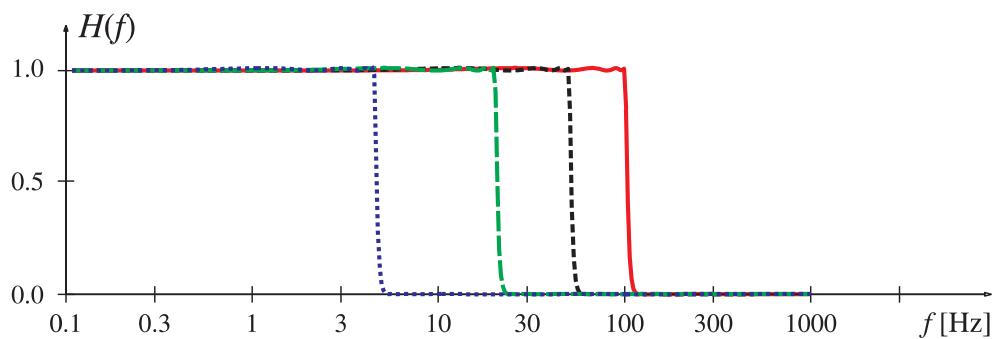


Fig. 2.116. Respuesta en frecuencia del filtro elíptico con $f_N = 4.5$ Hz (—), 20 Hz (- -), 50 Hz (—) y 100 Hz (---).

**Ejercicio 52. Problema para resolver con Matlab**

Fecha de entrega: 5/04/13

En la Fig. 2.117(a) se muestra una señal periódica triangular $\tilde{x}(t)$, de período T . En la Fig. 2.117(b) se muestra una señal $\tilde{y}(t)$ similar, de período MT . En esta nueva señal, la distribución de los pulsos no es uniforme. Se ha construido desplazando ligeramente $M-1$ pulsos respecto de su posición en la señal original: en lugar de estar ubicados en $t = nT$ para $0 \leq n \leq (M-1)T$ (dentro del período $0 \leq t \leq MT$) están ubicados en $t = t_n$, donde

n	0	1	2	3	4	5
t_n	0	$1,14T$	$2,45T$	$3T$	$3,56T$	$5,37T$

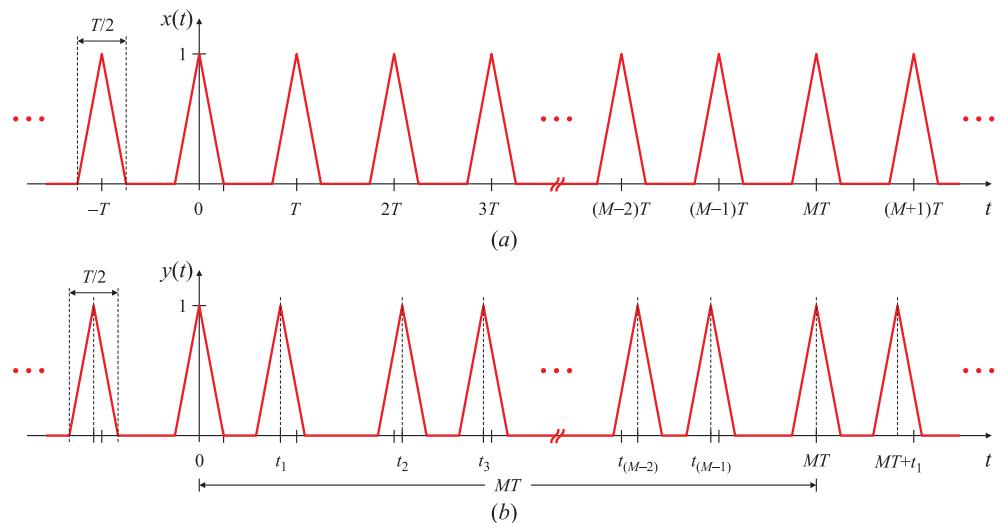


Fig. 2.117. Señal original con distribución uniforme de los pulsos (a) y modificada, con distribución no uniforme (b). (La figura no corresponde con los datos de la tabla.)

1. Calcule y compare la energía promedio (potencia) de ambas señales: $E_p^x = \frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt$.
2. Calcule los coeficientes c_k^x , c_k^y de las series de Fourier de las señales $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$ para $M = 6$.
3. Utilizando MATLAB, y a partir de los resultados del inciso anterior, grafique los espectros $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$, $\mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\}$ en una misma figura, para $-6/T < f < 6/T$, como se muestra en la Fig. 2.118. Puede utilizar, por ejemplo, el comando `stem`.
4. Reconstruya las señales $\hat{x}(t)$ e $\hat{y}(t)$ para el rango de frecuencias especificado más arriba. Utilice $T = 1/50$, y elija un vector de tiempos $t = (0 : 8191) / 8192$.
5. Grafique un segmento de las señales temporales, para $0 \leq t \leq 10T$, como se representa en la Fig. 2.118, y verifique que el corrimiento de los pulsos de $\hat{y}(t)$ coinciden con los especificados en la tabla.
6. Utilizando el comando `sound`, escuche cómo se oyen $\hat{x}(t)$ e $\hat{y}(t)$. Relacione con los resultados del inciso 3.

Verifique que las señales reconstruidas en los incisos 4 a 6 sean reales (no complejas). Si no lo fuesen, revise que la magnitud de la parte imaginaria es mucho menor que la de la parte real (comandos `imag`, `real`), y aproxime la señal por su parte real o su módulo (comando `abs`).

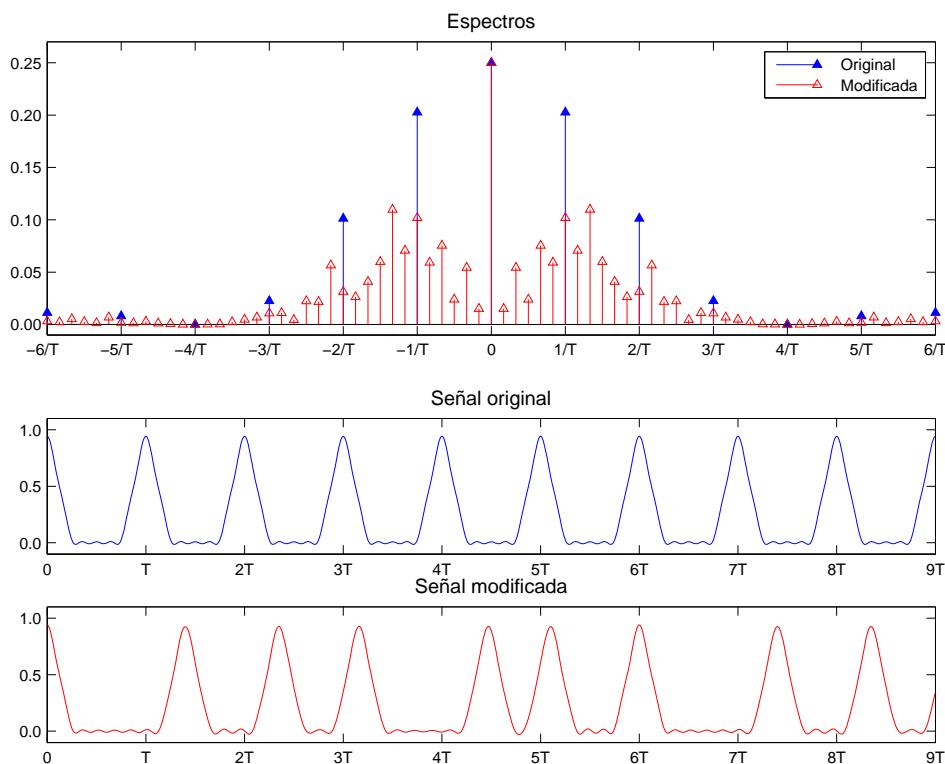


Fig. 2.118. Figura de Matlab donde se muestra el espectro de las señales (panel superior) y las formas de ondas temporales de la señal original y la señal modificada (paneles inferiores). Esta figura no corresponde a los datos consignados en la tabla.

Este problema modela la solución adoptada en el diseño de los electroventiladores del radiador de los autos para reducir el nivel de ruido en el habitáculo. En lugar de utilizar un ventilador con aspas equiespaciadas, se utilizan diseños como el que se muestra en la Fig. 2.119(b). En este problema la posición de las aspas está representada por la ubicación de cada pulso. La señal $\tilde{x}(t)$ representa un ventilador con aspas equiespaciadas, mientras que la señal $\tilde{y}(t)$ uno con distribución no uniforme. El Fiat 128 fue uno de los primeros vehículos en adoptar esta solución en Argentina, alrededor de 1971. Las sirenas mecánicas de advertencia ante emergencias también se basan en este principio [Fig. 2.119(a)].

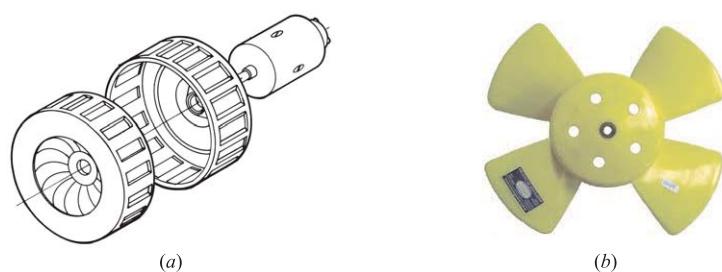


Fig. 2.119. Despiece de una sirena (aspas con distribución uniforme) (a), y electroventilador de un Fiat 128 (aspas con distribución no uniforme) (b).

(M) Ejercicio 53. Problema para entregar (versión bidimensional del Problema 51)

Una señal real bidimensional periódica $\tilde{g}(x, y)$ donde x e y son variables reales, verifica

$$\tilde{g}(x, y) = \tilde{g}(x + qT_x, y + rT_y) \quad \text{para todo } x, y \text{ reales, } q, r \text{ enteros}$$

y donde T_x y T_y son los períodos en cada una de las variables. Esta señal periódica se puede escribir en serie de Fourier como

$$\tilde{g}(x, y) = \sum_k \sum_{\ell} c_{k\ell} e^{\frac{2\pi}{T_x} kx} e^{\frac{2\pi}{T_y} \ell y}$$

donde $c_{k\ell}$ son los coeficientes de Fourier

$$c_{k\ell} = \frac{1}{T_x T_y} \int_{T_x} \int_{T_y} \tilde{g}(x, y) e^{-\frac{2\pi}{T_x} kx} e^{-\frac{2\pi}{T_y} \ell y} dx dy.$$

La versión bidimensional de una señal cuadrada periódica en un período es

$$\tilde{g}(x, y) = \begin{cases} A, & \text{si } |x| < \tau_x/2 \text{ e } |y| < \tau_y/2 \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde se asume que $\tau_x \leq T_x$, $\tau_y \leq T_y$. Esta señal se muestra en la figura para $\tau_x = 1/2$, $T_x = 2$, $\tau_y = 1/8$, $T_y = 3/2$ y $A = 1$ representada como una imagen (a) y como superficie tridimensional (b).

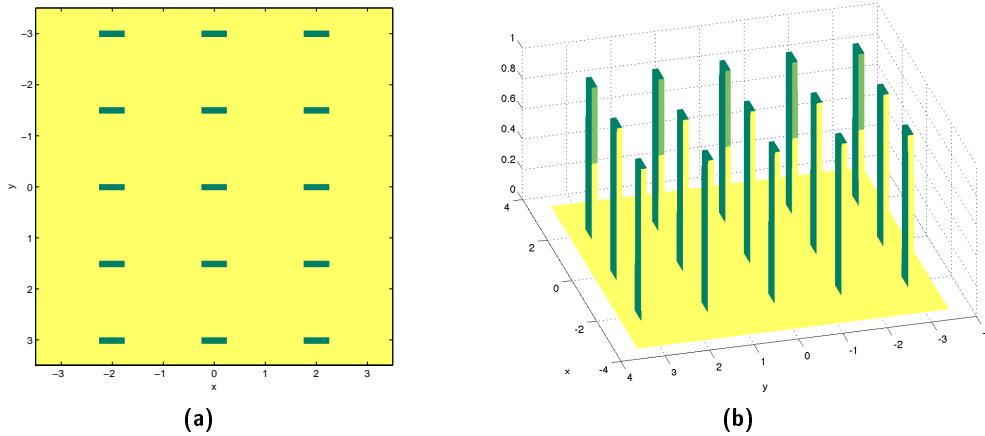


Fig. 2.120. Señal cuadrada bidimensional, graficada como imagen (a) y como superficie (b).

1. Calcule los coeficientes $c_{k\ell}$ de la onda cuadrada bidimensional genérica de amplitud A , períodos T_x y T_y , y anchos de pulsos τ_x y τ_y , respectivamente
2. Grafique los coeficientes $c_{k\ell}$ en función de k y ℓ como imagen y como un gráfico tridimensional para $-30 \leq k, \ell \leq 30$, suponiendo que $\tau_x = 1/2$, $T_x = 2$, $\tau_y = 1/8$, $T_y = 3/2$ y $A = 1$.
3. A partir de estos coeficientes, reconstruya la señal utilizando N armónicos tanto para k como para ℓ ,

$$\tilde{g}_N(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{\ell=-N}^N c_{k\ell} e^{\frac{2\pi}{T_x} kx} e^{\frac{2\pi}{T_y} \ell y}$$

para $-7/2 \leq x, y \leq 7/2$, y grafique esta señal como imagen y como superficie, para $N = 10, 20, 30$. Aprecie los detalles de la reconstrucción en las zonas vecinas a la discontinuidad.

Observaciones:

- Un análisis cuidadoso de las expresiones anteriores muestra que este problema no es *muy* diferente del problema unidimensional, y los cálculos del inciso 2 deberían ser muy fáciles.
- Son muy convenientes las *funciones anónimas* de Matlab. Por ejemplo, una función para representar una onda cuadrada de período T y ancho de pulso τ_a se puede calcular usando

```
cuad =@(t,tau,T) (sign(mod(t-T/2,T)-T/2+tau/2))-sign(mod(t-T/2,T)-T/2-tau/2))/2;
```

que se puede aplicar de esta forma:

```
N = 1000; Xmax = 3.5; Xmin = -3.5;
Tx = 2; taux = 1/2;
x = (0:N-1)/N*(Xmax-Xmin)+Xmin;

% funcion anonima
cuad =@(t,tau,T) (sign(mod(t-T/2,T)-T/2+tau/2))-sign(mod(t-T/2,T)-T/2-tau/2))/2;

% uso
f = cuad(x,taux,Tx);
plot(x,f); axis([Xmin Xmax -0.1 1.1])
```

- La onda cuadrada bidimensional puede construirse muy fácilmente a partir de la onda cuadrada unidimensional.
- Para graficar la onda cuadrada son útiles los comandos `imagesc()` y `mesh()`. Prestar atención al número de puntos utilizados para discretizar x e y .
- Los coeficientes de Fourier $c_{k\ell}$ son función de las variables *discretas* k y ℓ , por lo que la forma correcta de graficarlos sería usando la función `stem3()`. Sin embargo, esta representación hace difícil observar la forma en que varían los coeficientes como función de k y ℓ . Por lo tanto, aunque no es técnicamente correcto, es más conveniente graficar los coeficientes usando `mesh()`.
- La obtención de $\tilde{g}_N(x, y)$ a partir de los coeficientes $c_{k\ell}$ puede hacerse multiplicando matrices, sin necesidad de usar ciclos `for ... next`, que son particularmente inefficientes en Matlab. Se consigue así un código más compacto, aunque posiblemente un poco más criptico.
- La variación de los colores en los gráficos tridimensionales se controla usando el comando `colormap()`. Hay varias opciones predefinidas en Matlab, pero pueden generarse otras. Los gráficos de este problema fueron coloreados usando

```
cmap = flipud(colormap('summer'));
figure;
mesh(x,y,f);
colormap(cmap);
```

(M) Ejercicio 54. Problema para resolver con Matlab

Introducción: En este ejercicio se investiga la aproximación de una señal medida en el laboratorio utilizando series de Fourier. En este caso se busca aproximar una señal de voz utilizando una cantidad finita (pero grande) de coeficientes de Fourier. En lugar de tener como “dato” una señal $x(t)$ definida matemáticamente, se dispone de un conjunto de L mediciones de la señal $x(t)$ en los instantes t_0, t_1, \dots, t_{L-1} . El propósito del ejercicio es encontrar los $2N + 1$ coeficientes de Fourier c_k tal que la serie de Fourier aproxime “lo mejor posible” el conjunto de L mediciones de $x(t)$. Si bien la señal $x(t)$ no es periódica, se puede suponer que es un período de una señal periódica ficticia, es decir que el intervalo de medición coincide con el período de la señal: $T = t_{L-1} - t_0$.

Si $x_N(t)$ es la aproximación de $2N + 1$ términos de $x(t)$, es decir

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, \quad (2.196)$$

lo que se busca encontrar son los coeficientes c_k de (2.196) que aseguren que

$$e_{MC}^2 = \sum_{\ell=0}^{L-1} |x(t_\ell) - x_N(t_\ell)|^2 \text{ sea mínimo.}$$

Para resolver este problema es conveniente escribir (2.196) como un producto de vectores. Para un valor particular de $t = t_\ell$, el desarrollo de la sumatoria muestra que

$$\begin{aligned} x_N(t_\ell) = & c_{(-N)} e^{j\frac{2\pi}{T}(-N)t_\ell} + c_{(-N+1)} e^{j\frac{2\pi}{T}(-N+1)t_\ell} + \dots + c_{(-1)} e^{j\frac{2\pi}{T}(-1)t_\ell} + \\ & + c_0 + c_1 e^{j\frac{2\pi}{T}(1)t_\ell} + \dots + c_{(N-1)} e^{j\frac{2\pi}{T}(N-1)t_\ell} + c_N e^{j\frac{2\pi}{T}(N)t_\ell} \end{aligned}$$

y esta expresión puede escribirse como un producto de vectores:

$$x_N(t_\ell) = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{T}(-N)t_\ell} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(-1)t_\ell} & 1 & e^{j\frac{2\pi}{T}(1)t_\ell} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(N)t_\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{(-N)} \\ \vdots \\ c_{(-1)} \\ c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}.$$

El vector fila cambia según el instante de tiempo t_ℓ donde se evalúa la función, pero el vector columna es el mismo para todos los instantes de tiempo. En consecuencia, para todos los t_ℓ , $0 \leq \ell \leq L - 1$, se puede generalizar la ecuación anterior como

$$\begin{bmatrix} x_N(t_0) \\ x_N(t_1) \\ \vdots \\ x_N(t_\ell) \\ \vdots \\ x_N(t_{L-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{T}(-N)t_0} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(-1)t_0} & 1 & e^{j\frac{2\pi}{T}(1)t_0} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(N)t_0} \\ e^{j\frac{2\pi}{T}(-N)t_1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(-1)t_1} & 1 & e^{j\frac{2\pi}{T}(1)t_1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(N)t_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{T}(-N)t_\ell} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(-1)t_\ell} & 1 & e^{j\frac{2\pi}{T}(1)t_\ell} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(N)t_\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{T}(-N)t_{L-1}} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(-1)t_{L-1}} & 1 & e^{j\frac{2\pi}{T}(1)t_{L-1}} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(N)t_{L-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{(-N)} \\ \vdots \\ c_{(-1)} \\ c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}. \quad (2.197)$$

Notando

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_N(t_0) \\ x_N(t_1) \\ \vdots \\ x_N(t_\ell) \\ \vdots \\ x_N(t_{L-1}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{(-N)} \\ \vdots \\ c_{(-1)} \\ c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix},$$

donde x es un vector de L filas (tantas como medidas de la señal), \mathbf{c} es un vector de $2N+1$ filas (tantas como coeficientes de Fourier), y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{T}(-N)t_0} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(-1)t_0} & 1 & e^{j\frac{2\pi}{T}(1)t_0} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(N)t_0} \\ e^{j\frac{2\pi}{T}(-N)t_1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(-1)t_1} & 1 & e^{j\frac{2\pi}{T}(1)t_1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(N)t_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{T}(-N)t_\ell} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(-1)t_\ell} & 1 & e^{j\frac{2\pi}{T}(1)t_\ell} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(N)t_\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{T}(-N)t_{L-1}} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(-1)t_{L-1}} & 1 & e^{j\frac{2\pi}{T}(1)t_{L-1}} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{T}(N)t_{L-1}} \end{bmatrix} \quad (2.198)$$

es una matriz de L filas y $2N+1$ columnas, la expresión (2.197) se puede escribir de manera más compacta como

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}\mathbf{c}.$$

En general, \mathbf{W} es una matriz rectangular, más larga (L) que ancha ($2N+1$), ya que el número de mediciones suele ser mayor que el orden de la aproximación.

El objetivo es calcular el vector \mathbf{c} de modo de minimizar la cantidad

$$\left(\sum_{\ell=0}^{L-1} |x(t_\ell) - x_N(t_\ell)|^2 \right)^{1/2} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{W}\mathbf{c}\| \quad (2.199)$$

(el error medio cuadrático entre los vectores) donde

$$\mathbf{x} = [x(t_0) \ x(t_1) \ \dots \ x(t_\ell) \ \dots \ x(t_{L-1})]^t$$

es el vector de las mediciones. Este problema, típico de muchísimas aplicaciones, se puede resolver en Matlab como

$$\mathbf{c} = \mathbf{W} \setminus \mathbf{x}.$$

En este ejercicio, el vector de datos es equiespaciado:

$$t_\ell = \ell T_s, \quad (2.200)$$

donde T_s es el *período de muestreo*. Su inversa $F_s = 1/T_s$ se conoce como la *frecuencia de muestreo*. Para calcular la aproximación, se considera que el largo de la señal es un período de una señal periódica (ficticia), y entonces

$$T = LT_s. \quad (2.201)$$

Teniendo en cuenta (2.200) y (2.201) la expresión de la matriz \mathbf{W} en (2.198) se puede escribir de forma más compacta (tarea a cargo del alumno).

Actividades:

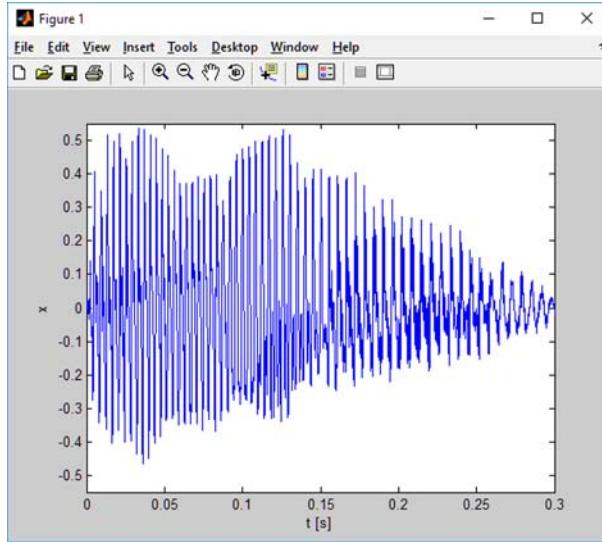


Fig. 2.121. Señal x a aproximar usando series de Fourier.

1. Se debe realizar en Matlab una función o archivo `*.m` que cargue la señal x , que son las muestras de una señal de voz (Fig. 2.121), y que calcule una aproximación x_N utilizando $2N + 1$ coeficientes de Fourier, para $N = 200, 500, 1000$ y 2000 .
2. El archivo `senal.mat` contiene un vector columna x , de casi 3000 elementos, y una variable F_s que es la frecuencia de muestreo. Se puede cargar al ambiente de Matlab utilizando el comando `load senal`. (Este archivo está disponible en la página web de la materia.)
3. Para cada una de los casos, registrar el tiempo que demanda el cálculo de los coeficientes de Fourier c_k ,

$$c_k = W \setminus x$$

usando, por ejemplo, los comandos de Matlab `tic` y `toc`. Para generar la matriz W no es necesario utilizar ciclos `for... next` (que son muy lentos en Matlab): se puede construir utilizando el producto de dos vectores.

4. En base a los cálculos del inciso anterior, graficar (Fig. 2.122):
 - la señal x ,
 - la señal aproximada x_N con $2N+1$ términos,
 - la diferencia $x - x_N$,
 - el valor absoluto de los $2N + 1$ coeficientes de Fourier $|c_k|$.
5. Calcular el error medio cuadrático relativo porcentual

$$e_{MC}[\%] = 100 \frac{\left(\sum_{\ell=0}^{L-1} |x(t_\ell) - x_N(t_\ell)|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{\ell=0}^{L-1} |x(t_\ell)|^2 \right)^{1/2}} = 100 * \text{norm}(x - x_N) / \text{norm}(x) \quad (2.202)$$

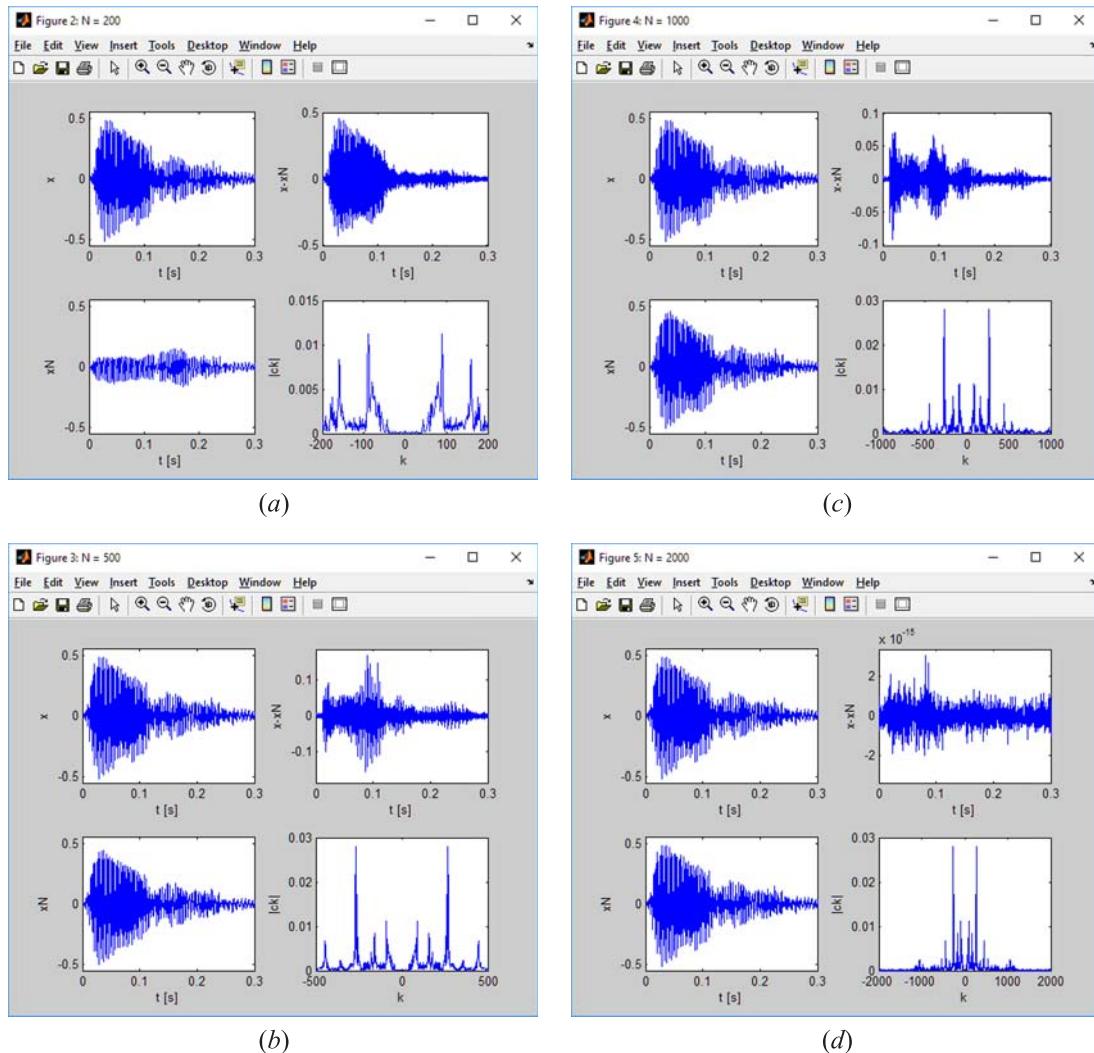


Fig. 2.122. Señal temporal original x (arriba, izquierda), señal aproximada x_N (abajo, izquierda), señal error $x - x_N$ (arriba, derecha) y módulo de los coeficientes de Fourier $|c_k|$ (abajo, derecha) para $N = 200$ (a), $N = 500$ (b), $N = 1000$ (c), $N = 2000$ (d).

6. Graficar el tiempo de ejecución y el error medio cuadrático relativo porcentual en función de N , como se muestra en la Fig. 2.123. Aquí se representan los resultados para un mayor número de valores de N que los que se piden para el ejercicio.
 7. **Opcional:** Calcular el tiempo de ejecución y el error medio cuadrático relativo porcentual para $N = 1400$, $N = 1463$ y $N = 1500$, y justifique el resultado.
 8. Realizar un informe breve en formato electrónico que incluya las figuras indicadas, y el código utilizado para resolver el ejercicio.

Observaciones:

1. Es interesante “escuchar” el resultado de las distintas aproximaciones. En Matlab se dispone del comando `soundsc(x, Fs)` que permite comparar cómo suena la señal original y las diferentes versiones.

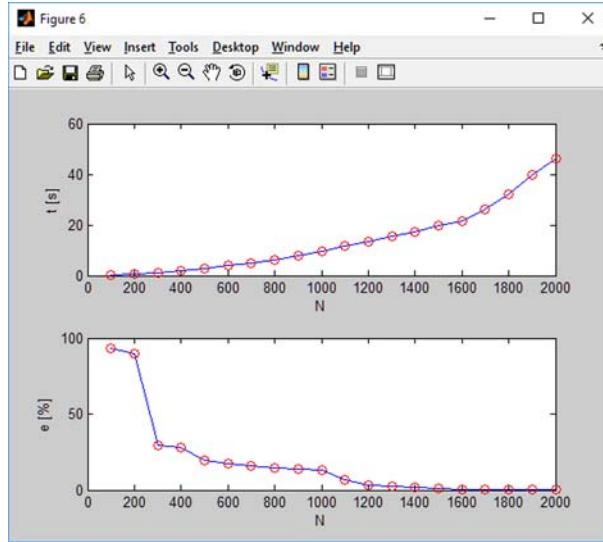


Fig. 2.123. Tiempo de cálculo de los coeficientes de Fourier c_k en función del número de términos N (arriba), y error medio cuadrático porcentual de la ecuación (2.202) (abajo).

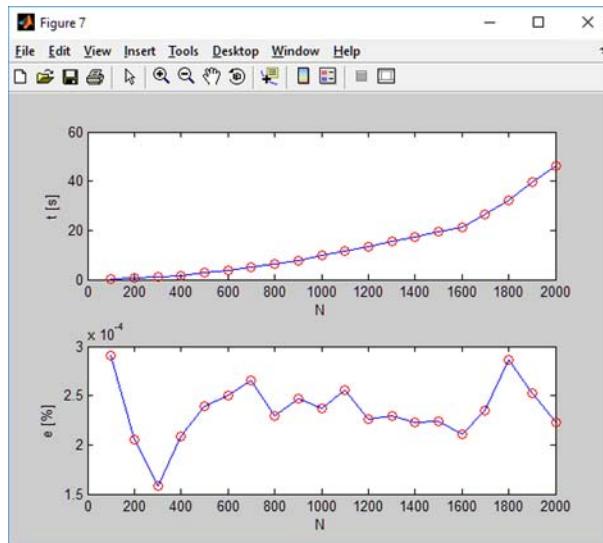


Fig. 2.124. Tiempo de cálculo de los coeficientes de Fourier c_k en función del número de términos N : cálculo directo (arriba), cálculo usando los métodos del Capítulo 4 (abajo).

2. En el Capítulo 4 se verá una manera más sencilla de calcular esta aproximación, y utilizando las herramientas del Capítulo 11 los tiempos de ejecución se reducen notablemente, como se muestra en la gráfica inferior de la Fig. 2.124, que muestra que este tiempo puede reducirse entre 4 y 6 órdenes de magnitud, dependiendo del número de coeficientes calculados.
3. Los datos y las curvas y gráficos utilizados para este enunciado son distintos de los provistos para resolver el ejercicio, de modo que los resultados mostrados pueden diferir de los obtenidos.

Apéndice 2.A

Convergencia y existencia de la serie de Fourier

2.A.1. Convergencia de la serie de Fourier

Possiblemente una de las mayores controversias respecto al desarrollo de Fourier fue su afirmación que *cualquier* función periódica “razonable” podía aproximarse por la serie (2.10). No fue trivial demostrar que esta afirmación es falsa, en parte debido a que muchos conceptos matemáticos (como el de *función*) no habían sido definidos correctamente en ese entonces. Pero sí es cierto que una clase muy grande de funciones periódicas –incluyendo entre ellas funciones continuas a tramos– puede aproximarse de esta forma.

La notación utilizada hasta el momento, por ejemplo en la ecuación (2.10), supone que la serie de Fourier converge a la función. En esta sección es conveniente distinguir la función periódica $\tilde{x}(t)$ de su serie $\sum_k c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}$, que notaremos $\tilde{x}_\infty(t)$; esto es

$$\tilde{x}_\infty(t) = \sum_k c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}. \quad (2.A.1)$$

La expresión (2.A.1) debe entenderse como el límite doble de las sumas parciales $\tilde{x}_{M,N}(t)$ definidas por

$$\tilde{x}_{M,N}(t) = \sum_{k=M}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}. \quad (2.A.2)$$

Por lo tanto la ecuación (2.A.1) puede escribirse como

$$\tilde{x}_\infty(t) = \lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \tilde{x}_{M,N}(t) = \lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k=M}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}. \quad (2.A.3)$$

Esta sumatoria doblemente infinita plantea dos interrogantes:

1. La existencia de (2.A.3) para cualquier valor de t : si t_0 es un valor particular de t , se desea saber si la serie converge a un número finito para cualquier valor de t_0 . Si esto ocurre, $\tilde{x}_\infty(t)$ es realmente una función, y permite formular la segunda (y más interesante) cuestión:

2. La identidad de la función periódica $\tilde{x}(t)$ y su serie de Fourier $\tilde{x}_\infty(t)$. Si la serie converge a $\tilde{x}(t)$ significa que

$$\tilde{x}_\infty(t) = \lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \tilde{x}_{M,N}(t) = \tilde{x}(t) \quad \text{para todo } t.$$

Si la serie no converge, significa que existen puntos t_i tal que

$$\tilde{x}_\infty(t) = \lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \tilde{x}_{M,N}(t) \neq \tilde{x}(t_i).$$

El siguiente teorema, clásico del análisis de Fourier, resuelve estas inquietudes.

Teorema 1. (Básico de convergencia puntual). Si $\tilde{x}(t)$ es una señal periódica, continua a tramos y suave a tramos sobre un intervalo (a, b) , entonces:

- si $\tilde{x}(\cdot)$ es continua en $t_0 \in (a, b)$, $s_x(t_0)$ converge a $\tilde{x}(t_0)$; esto es

$$\sum_k c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t_0} = \tilde{x}(t_0).$$

- si $\tilde{x}(\cdot)$ tiene una discontinuidad tipo salto en $t_0 \in (a, b)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t_0} = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_0^-} \tilde{x}(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} \tilde{x}(t) \right]. \quad \blacklozenge$$

El teorema establece que la serie de Fourier compleja de una función periódica se comporta “adecuadamente”, al menos sobre intervalos donde la función es continua y suave a tramos. En cada punto de ese intervalo la serie converge exactamente al valor de la función en ese punto (por eso se dice que la convergencia es *puntual*). En aquellos puntos donde la función presenta saltos (finitos, porque se exige que sea *suave a tramos*) se tiene una convergencia *simétrica* de la serie al valor medio de los límites a izquierda y a derecha de la función en el punto de discontinuidad. Gráficamente, este valor es el punto medio del salto. La convergencia simétrica se entiende en el sentido que la variable k tiende a $(+\infty)$ y a $(-\infty)$ a la misma velocidad.

El Teorema 1 muestra que siempre que $\tilde{x}(\cdot)$ sea suave a tramos y periódica, la función $\tilde{x}(\cdot)$ y la serie de Fourier $\tilde{x}_\infty(t)$ representan la misma función continua a tramos sobre toda la línea real, confirmando la conjetura de Fourier para el caso en que la función es continua a tramos y periódica. Este es un resultado importante (y famoso), y también se enuncia como un teorema.

Teorema 2. (Identidad de las funciones y su serie de Fourier: versión 1). Si $\tilde{x}(\cdot)$ es una función periódica, suave a tramos sobre \mathbb{R} , y $\tilde{x}_\infty(\cdot)$ su serie de Fourier, entonces

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_\infty(t)$$

en cada punto t donde $\tilde{x}(\cdot)$ es continua. \blacklozenge

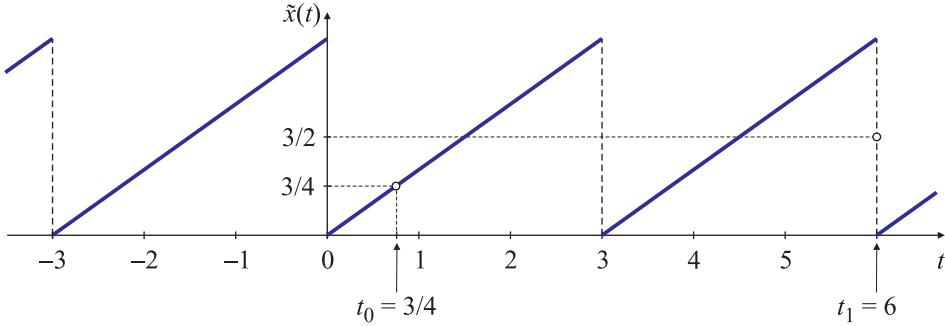


Fig. 2.A.1. Señal diente de sierra del Ejemplo 2.A.1.

EJEMPLO 2.A.1. Diente de sierra

La serie de Fourier de la función diente de sierra $\tilde{x}(t)$ de período $T = 3$, definida en un período como $\tilde{x}(t) = t$ con $0 < t < 3$, como se muestra en la Fig. 2.A.1, está dada por

$$\tilde{x}_\infty(t) = \frac{3}{2} - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{3}{2\pi k} j e^{j \frac{2\pi k}{3} t}.$$

Este función es suave a tramos en toda la línea real, y es continua en todo t salvo cuando t es múltiplo de $T = 3$. El Teorema 2 asegura que la serie $\tilde{x}_\infty(t)$ converge para todo t que no sea múltiplo de 3. Por ejemplo, para $t = t_0 = 3/4$, $\tilde{x}(t_0) = 3/4$, y

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\infty(t)|_{t=\frac{3}{4}} &= \frac{3}{2} - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{3}{2\pi k} j e^{j \frac{2\pi k}{3} \frac{3}{4}} = \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2\pi k} j (e^{j\pi k/2} - e^{-j\pi k/2}) \\ &= \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2\pi k} j (2j) \operatorname{sen}(\pi k/2) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\pi k} \operatorname{sen}(\pi k/2) \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}(\pi k/2) = 0$ para k par, se reemplaza $k = 2r + 1$, y entonces

$$\begin{aligned} s_x(t)|_{t=\frac{3}{4}} &= \frac{3}{2} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{3}{\pi(2r+1)} \operatorname{sen}[\pi(2r+1)/2] = \frac{3}{2} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{3}{\pi(2r+1)} \operatorname{sen}[\pi r + \pi/2] \\ &= \frac{3}{2} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{3}{\pi(2r+1)} (-1)^{r+1} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

porque $\sum_{r=0}^{\infty} 3(-1)^{r+1}/[\pi(2r+1)] = -3/4$. Por lo tanto, se verifica que $\tilde{x}_\infty(t_0) = \tilde{x}(t_0)$, al menos para un $t = t_0$ que no es múltiplo de $T = 3$.

Por otra parte, $\tilde{x}(t)$ es discontinua en $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$, y por ejemplo en $t = t_1 = 6$, la serie converge simétricamente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t_0} = \frac{3}{2} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \frac{3}{2\pi k} j e^{j \frac{2\pi k}{3} 6} = \frac{3}{2} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{3}{2\pi k} j (e^{j4\pi k} - e^{-j4\pi k}) = \frac{3}{2}.$$

Sin embargo, no converge en sentido general, ya que,

$$\lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k=M}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t} = \frac{3}{2} - \lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k=M}^N \frac{3}{2\pi k} j e^{j \frac{2\pi k}{3} 6} = \frac{3}{2} - \lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{3j}{2\pi} \sum_{k=M}^N \frac{1}{k}.$$

La última expresión es la serie armónica bilateral que no converge en sentido amplio. \square

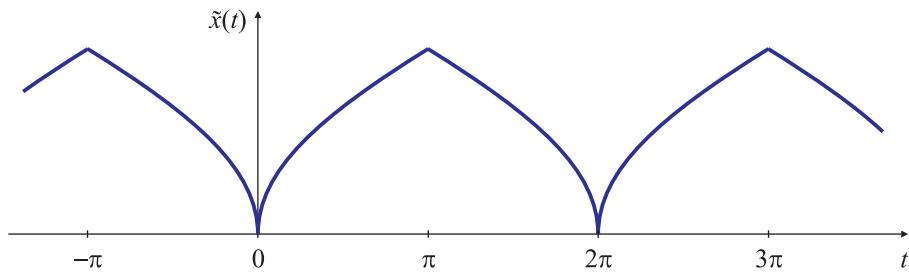


Fig. 2.A.2. Gráfico de la raíz cuadrada periódica del Ejemplo 2.A.2.

Las funciones periódicas que son suaves a tramos son funciones “razonables” para el análisis de Fourier. Como muestra el ejemplo siguiente, muchas funciones que son “casi” suaves a tramos también pueden representarse por sus series de Fourier.

EJEMPLO 2.A.2. Serie de Fourier de una función que no es suave a tramos

Sea $\tilde{x}(t)$ la función periódica definida en un período por $\tilde{x}(t) = \sqrt{|t|}$, para $-\pi < t < \pi$. Esta función, cuyo gráfico se representa en la Fig. 2.A.2, es par, continua, y periódica de período $T_0 = 2\pi$. Su serie de Fourier compleja es de la forma

$$\tilde{x}_\infty(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}, \quad (2.A.4)$$

y sus coeficientes c_k , cuya expresión analítica no se calculará explícitamente, están dados por

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{t} e^{-j \frac{2\pi k}{T_0} t} dt.$$

En $t = 0$, y por periodicidad en cada $t = n2\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, no existe la derivada de $\tilde{x}(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{t}} \rightarrow \infty,$$

de manera que la función $\tilde{x}(t)$ no es suave a tramos en cualquier intervalo que contenga un múltiplo entero de 2π , y por lo tanto el Teorema 2 no se puede aplicar.

Sin embargo, cuando t no es un múltiplo entero de 2π (por ejemplo en $t = 2$) existe un intervalo, por ejemplo $(1, 3)$, en el cual la función $\tilde{x}(t)$ no sólo es suave, sino uniformemente suave. Los Teoremas 1 y 2 aseguran que la serie (2.A.4) converge para $t = 2$, y que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2} = \tilde{x}(2) = \sqrt{2}.$$

En general, si t_0 es cualquier punto distinto de un múltiplo de 2π , y τ es la distancia entre ese punto y el múltiplo entero de 2π más cercano, resulta que $\tilde{x}(t)$ es uniformemente suave en el intervalo $(t_0 - \tau/2, t_0 + \tau/2)$. Los Teoremas 1 y 2 aseguran que la serie (2.A.4) converge para $t = t_0$, y que es igual a $\tilde{x}(t_0)$. Como existe sólo un número finito de múltiplos de 2π en un intervalo finito cualquiera, en este intervalo arbitrario la función $\tilde{x}(t)$ y su serie de Fourier (2.A.4) coinciden, y se puede escribir

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t},$$

donde esta igualdad es válida para todo t distinto de un múltiplo entero de 2π . \square

Bajo las ideas ilustradas en el ejemplo anterior se puede probar una versión más general de Teorema 2.

Teorema 3. (Identidad de las funciones y su serie de Fourier: versión 2). Sea $\tilde{x}(t)$ una función periódica sobre \mathbb{R} , continua y suave a tramos salvo en un número finito de puntos en cada intervalo finito. Entonces la serie de Fourier $\tilde{x}_\infty(t)$ converge a $\tilde{x}(t)$ en todo el intervalo salvo en un número finito de puntos, y por lo tanto $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_\infty(t)$. ♦

De aquí en más se supondrá que las funciones periódicas satisfacen los postulados de los Teoremas 2 o 3, de manera que la función y su serie de Fourier son representaciones alternativas de un mismo objeto matemático.

2.A.2. Aproximaciones uniformes y no uniformes

Efectuar la suma infinita indicada en (2.10) o en (2.A.4) no es conveniente aún con las mejores computadoras, y en la práctica se aproxima $\tilde{x}(t)$ usando una suma parcial $\tilde{x}_{M,N}(t)$, definida en (2.A.2) utilizando un número finito de términos de su serie de Fourier $\tilde{x}_\infty(t)$. Para que esta aproximación sea útil, los límites M y N deben elegirse de manera que el error de aproximación sea tan pequeño como se deseé.

Se define el error en magnitud $\tilde{e}_{M,N}(t)$ a la diferencia entre $\tilde{x}(t)$ y su aproximación $\tilde{x}_{M,N}(t)$:

$$\tilde{e}_{M,N}(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}_{M,N}(t) = \tilde{x}(t) - \sum_{k=M}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}. \quad (2.A.5)$$

Evidentemente, $\tilde{e}_{M,N}(t)$ es una función de t . Si $\tilde{x}(t)$ es continua a tramos, el Teorema 1 asegura que para cada t donde $\tilde{x}(t)$ es continua,

$$\lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} |\tilde{e}_{M,N}(t)| = 0.$$

Por lo tanto, si $\varepsilon > 0$ es el mayor error deseado, y t_0 es un punto donde $\tilde{x}(\cdot)$ es continua, existen números enteros M_ε , N_ε tales que $|\tilde{e}_{M,N}(t_0)| < \varepsilon$ cuando $M \geq M_\varepsilon$ y $N \geq N_\varepsilon$. Esto no significa que el error será menor que ε en otros puntos $t_i \neq t_0$. La situación ideal sería:

- Que para cada $\varepsilon > 0$ existiese un par de enteros M_ε , N_ε tales que $|\tilde{e}_{M,N}(t)| < \varepsilon$ para todo t cuando $M \geq M_\varepsilon$ y $N \geq N_\varepsilon$.
- Poder determinar M_ε , N_ε para cualquier $\varepsilon > 0$ dado.

Si la primera condición se verifica para todo $\varepsilon > 0$, se dice que $\tilde{x}_{M,N}(t)$ approxima *uniformemente* a $\tilde{x}(t)$, o que $\tilde{x}_{M,N}(t)$ converge *uniformemente* a $\tilde{x}(t)$ cuando $M \rightarrow -\infty$, $N \rightarrow +\infty$. En otras palabras, si $\tilde{x}_{M,N}(t)$ es una aproximación uniforme de $\tilde{x}(t)$, siempre es posible encontrar enteros M_ε , N_ε la que la suma parcial $\tilde{x}_{M,N}(t)$ difiere de $\tilde{x}(t)$ en menos de ε para todo $t \in \mathbb{R}$.

Si una serie de Fourier converge uniformemente a una función, entonces también converge puntualmente a esa función en toda la línea real; esto es

$$\tilde{x}(t) = \lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k=M}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

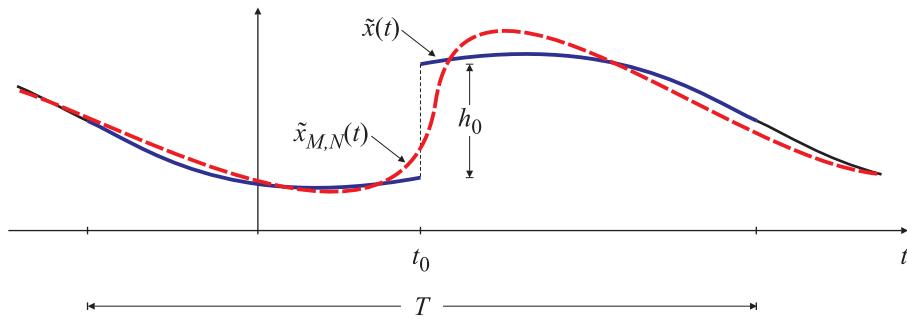


Fig. 2.A.3. Aproximación continua $x_{M,N}(t)$ a una función $x(t)$ con una discontinuidad tipo salto en t_0 .

Además, si la convergencia es uniforme, el máximo error en usar $\sum_{k=M}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}$ para calcular $\tilde{x}(t)$ debe tender a cero cuando M, N tienden a $-\infty, +\infty$ respectivamente. Aunque sin duda esta es la situación ideal, no siempre ocurre, como se verá a continuación.

2.A.3. Continuidad y aproximación uniforme

Cada una de las sumas parciales $\tilde{x}_{M,N}(t) = \sum_{k=M}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}$ debe ser una función continua porque es una suma finita de funciones continuas. Por ello es sencillo demostrar que estas sumas parciales no pueden aproximarse a $\tilde{x}(t)$ de manera uniforme si $\tilde{x}(t)$ no es una función continua. De hecho, si $\tilde{x}(t)$ tiene una discontinuidad tipo salto, para cada suma parcial $\tilde{x}_{M,N}(t)$ debe existir un intervalo (a_N, b_N) donde el error $|\tilde{e}_{M,N}(t)|$ es del orden de la mitad del salto. Esta es la situación que se presenta en la Fig. 2.A.3. Si t_0 es el punto donde la función $\tilde{x}(t)$ es discontinua, y si $\tilde{x}_{M,N}(t)$ aproxima a $\tilde{x}(t)$ por el lado izquierdo de la discontinuidad, entonces al ser continua necesita un cierto intervalo para volver a aproximarse a $\tilde{x}(t)$ a la derecha de la discontinuidad. Estos resultados se pueden formalizar en el siguiente Teorema.

Teorema 4. Convergencia uniforme. Sea $\tilde{x}(\cdot)$ una función periódica continua a tramos. Si la serie de Fourier truncada $\tilde{x}_{M,N}(\cdot)$ aproxima uniformemente a $\tilde{x}(\cdot)$, entonces $\tilde{x}(\cdot)$ debe ser una función continua sobre la línea real. Recíprocamente, si $\tilde{x}(\cdot)$ no es una función continua, entonces $\tilde{x}_{M,N}(\cdot)$ no aproxima uniformemente a $\tilde{x}(\cdot)$. Más aún, si $\tilde{x}(\cdot)$ tiene una discontinuidad tipo salto de amplitud h_0 en $t = t_0$, entonces para cada par de enteros M, N , con $M < N$ existe un intervalo (a, b) conteniendo t_0 (o con t_0 siendo uno de sus extremos) sobre el cual

$$|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_{M,N}(t)| > \rho h_0,$$

para todo $t \in (a, b)$, y $\rho < 1/2$. ♦

El siguiente Teorema confirma que la serie de Fourier de señales periódicas continuas converge uniformemente.

Teorema 5. Convergencia uniforme. Sea $\tilde{x}(\cdot)$ una función periódica suave a tramos con período T . Si $\tilde{x}(\cdot)$ además es continua, entonces su serie de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}$ converge uniformemente a $\tilde{x}(\cdot)$. Además, para cualquier valor t y cualquier par de enteros M, N , con $M < 0 < N$,

$$|\tilde{e}_{M,N}(t)| = \left| \tilde{x}(t) - \sum_{k=M}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t} \right| \leq \left[(-M)^{-1/2} + (N)^{-1/2} \right] B$$

donde

$$B = \frac{1}{2\pi} \left[T \int_0^T \left(\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \right)^2 dt \right]^{1/2}. \quad \blacklozenge$$

Estos teoremas no aseguran que la serie de Fourier de $\tilde{x}(\cdot)$ converge a $\tilde{x}(\cdot)$ cuando $\tilde{x}(\cdot)$ sólo es una función periódica continua (pero *no* suave a tramos). De hecho, existen funciones periódicas continuas que no se pueden aproximar uniformemente por su serie de Fourier. Estas señales son difíciles de construir y no suelen aparecer en las aplicaciones.

2.A.4. Convergencia en norma

Se dice que una aproximación con un número finito de términos $\tilde{x}_{M,N}(t)$ converge en norma a la función $\tilde{x}(t)$ si y sólo si

$$\lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \left\| \tilde{x}(t) - \sum_{k=M}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t} \right\| = \lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \|\tilde{e}_{M,N}(t)\| = 0, \quad (2.A.6)$$

donde $\tilde{e}_{M,N}(t)$ es el error definido en (2.A.5), y la función *norma* $\|f(\cdot)\|$ se define como

$$\|f(\cdot)\|^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |f(t)|^2 dt. \quad (2.A.7)$$

Las funciones para las cuales existe esta integral se denominan de *cuadrado integrable*. Las expresiones (2.A.6) son equivalentes a

$$\lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left| \tilde{x}(t) - \sum_{k=M}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t} \right|^2 = \lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |\tilde{e}_{M,N}(t)|^2 dt = 0.$$

De acuerdo a la clasificación del Capítulo 1, la expresión

$$E_{M,N} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |\tilde{e}_{M,N}(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{e}_{M,N}(t) \tilde{e}_{M,N}^*(t) dt, \quad (2.A.8)$$

representa la energía promedio de la señal durante un período, o bien el promedio de la señal error elevada al cuadrado: el error cuadrático medio.

Si $\tilde{x}(t)$ es periódica, continua y suave a tramos, el Teorema 5 establece que existe un valor finito de B tal que $|\tilde{e}_{M,N}(t)| \leq [(-M)^{-1/2} + (N)^{-1/2}]B$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y todos los enteros M, N tales que $M < 0 < N$. Entonces, el error medio cuadrático verifica

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |\tilde{e}_{M,N}(t)|^2 dt &< \lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [(-M)^{-1/2} + (N)^{-1/2}]^2 B^2 dt \\ &< \lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow \infty}} [(-M)^{-1/2} + (N)^{-1/2}]^2 B^2 = 0,\end{aligned}$$

lo que prueba el siguiente Teorema:

Teorema 6. Convergencia en norma de funciones continuas y suaves a tramos. La serie de Fourier de una función periódica continua y suave a tramos converge en norma a dicha función. ♦

En realidad existe un resultado más fuerte, que establece que la serie de Fourier de una función continua a tramos converge en norma a la función, aún cuando ésta no sea suave a tramos.

Teorema 7. Convergencia en norma de funciones continuas a tramos. La serie de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}$ de una función periódica $\tilde{x}(t)$ de período $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ continua a tramos converge en norma a dicha función; además se verifica que

$$\|\tilde{x}(\cdot)\|^2 = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Esta expresión se conoce como *igualdad de Bessel*. ♦

2.A.5. Aproximación óptima con un número finito de términos

La mejor manera de aproximar la función periódica $\tilde{x}(t)$ por una suma *finita* de exponentiales complejas armónicamente relacionadas es encontrar un conjunto de coeficientes c_k , $k = -N, \dots, N$ tal que la energía promedio por período del error (2.A.8) sea mínima. Para simplificar la notación respecto a la sección anterior, se considera que en la sumatoria se toman la misma cantidad de términos para $k > 0$ y para $k < 0$, esto es, se hace $M = -N$:

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}. \quad (2.A.9)$$

Desarrollando (2.A.8) se tiene que

$$\begin{aligned}E_N &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{e}_N(t) \tilde{e}_N^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)][\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)]^* dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\tilde{x}(t)\tilde{x}^*(t) - \tilde{x}(t)\tilde{x}_N^*(t) - \tilde{x}^*(t)\tilde{x}_N(t) + \tilde{x}(t)\tilde{x}_N^*(t)] dt.\end{aligned}$$

La condición para que el error sea mínimo es que

$$\frac{\partial E_N}{\partial c_k} = 0, \quad k = -N, \dots, N$$

esto es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [-\tilde{x}(t) \frac{\partial \tilde{x}_N^*(t)}{\partial c_k} - \tilde{x}^*(t) \frac{\partial \tilde{x}_N(t)}{\partial c_k} + \frac{\partial \tilde{x}_N(t)}{\partial c_k} \tilde{x}_N^*(t) + \tilde{x}_N(t) \frac{\partial \tilde{x}_N^*(t)}{\partial c_k}] dt \\ &= -\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left\{ [\tilde{x}(t) - \tilde{x}_N(t)] \frac{\partial \tilde{x}_N^*(t)}{\partial c_k} + [\tilde{x}^*(t) - \tilde{x}_N^*(t)] \frac{\partial \tilde{x}_N(t)}{\partial c_k} \right\} dt \end{aligned} \quad (2.A.10)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial \tilde{x}_N(t)}{\partial c_k} = e^{jk\Omega_0 t}, \quad \text{y que} \quad \frac{\partial \tilde{x}_N^*(t)}{\partial c_k} = 0,$$

pues $\tilde{x}_N^*(t)$ depende de c_k^* , pero no de c_k , la expresión (2.A.10) se puede escribir como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\tilde{x}^*(t) - \tilde{x}_N^*(t)] \frac{\partial \tilde{x}_N(t)}{\partial c_k} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\tilde{x}^*(t) - \tilde{x}_N^*(t)] e^{j\frac{2\pi k}{T_0} t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\tilde{x}^*(t) - \sum_{\ell=-N}^N c_\ell^* e^{-j\frac{2\pi \ell}{T_0} t} \right) e^{j\frac{2\pi k}{T_0} t} dt \end{aligned} \quad (2.A.11)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}^*(t) e^{j\frac{2\pi k}{T_0} t} dt - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{\ell=-N}^N c_\ell^* e^{j(k-\ell)\frac{2\pi}{T_0} t} dt. \quad (2.A.12)$$

(note el cambio de variable k por ℓ en la sumatoria para evitar confusiones son el índice k del c_k respecto al cual se está derivando.) Por la propiedad de ortogonalidad de las exponenciales complejas (2.12)

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{\ell=-N}^N c_\ell^* e^{j(k-\ell)\frac{2\pi}{T_0} t} dt = \frac{1}{T_0} \sum_{\ell=-N}^N \int_0^{T_0} c_\ell^* e^{j(k-\ell)\frac{2\pi}{T_0} t} dt = c_k^*. \quad (2.A.13)$$

Finalmente, de (2.A.12) y (2.A.13), y conjugando y renombrando los índices, se encuentra que

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T_0} t} dt, \quad k = -N, \dots, N. \quad (2.A.14)$$

En otras palabras, los coeficientes (2.A.14) que minimizan la integral del error entre $\tilde{x}(t)$ y su aproximación $\tilde{x}_N(t)$ de orden N son los *mismos* coeficientes de la serie de Fourier (2.11): si la señal $\tilde{x}(t)$ admite una representación en series de Fourier, la mejor aproximación usando una suma *finita* de exponenciales complejas armónicamente relacionadas es la que se obtiene truncando la serie de Fourier al número de términos deseados. A medida que se incrementa N , se agregan nuevos términos, pero los anteriores permanecen sin cambios, y E_N decrece. De hecho, si $\tilde{x}(t)$ tiene una representación en series de Fourier,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0,$$

es decir, el error medio cuadrático entre la función $\tilde{x}(t)$ y su representación $\tilde{x}_N(t)$ formada por un número finito de términos de la serie de Fourier es nulo. Esto no significa que las

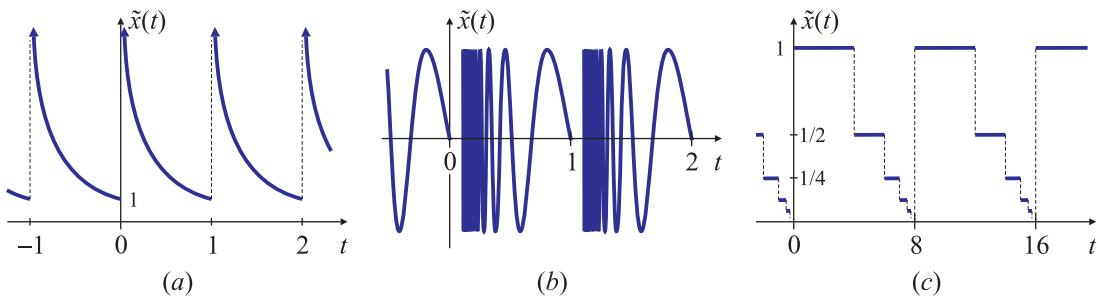


Fig. 2.A.4. Funciones que no satisfacen las condiciones de Dirichlet.

funciones sean iguales, sino que *no hay energía en la diferencia entre las dos*. Las funciones como las indicadas al pie de la página 68, repetidas aquí por comodidad, son diferentes, pero tienen la misma representación en series de Fourier: el valor de la función en $t = \pm\tau/2$ es irrelevante, y las funciones

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &= \begin{cases} A, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \\ \tilde{x}_2(t) &= \begin{cases} A, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ A/2, & t = \pm\tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \\ \tilde{x}_3(t) &= \begin{cases} A, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}\end{aligned}$$

aunque matemáticamente diferentes, suelen ser representaciones equivalentes de un mismo fenómeno físico. El error entre la función y la serie sólo es nulo para $\tilde{x}_2(t)$. Para $\tilde{x}_1(t)$ y $\tilde{x}_3(t)$ el error $e(t)$ es nulo para todo t cuando $N \rightarrow \infty$, excepto para $t = \pm\tau/2 + kT_0$, $k \in \mathbb{Z}$, donde $|e_N(t)| = 1/2$ para cualquier N . Sin embargo, para cada valor de N el error medio cuadrático E_N definido por (2.A.8) es el mismo para las tres funciones.

El tipo de convergencia garantizado cuando $x(t)$ es de cuadrado integrable, es decir, cuando satisfacen (2.A.7) es muy útil en el tratamiento de señales y sistemas. La mayoría de las señales con que se trabaja en este campo tiene energía finita sobre un período, y por lo tanto admiten representación en series de Fourier. Si bien $\tilde{x}_N(t)$ y $\tilde{x}(t)$ no son idénticas en todos los puntos, el hecho que la diferencia entre ambas tenga energía nula cuando $N \rightarrow \infty$ es muy conveniente en muchas aplicaciones. Se suele decir que $\tilde{x}_N(t)$ aproxima en *mínimos cuadrados* (en norma) a $\tilde{x}(t)$.

P. L. Dirichlet enunció un conjunto de condiciones –que también son satisfechas por casi todas las señales de interés– que garantiza que $\tilde{x}(t)$ y su serie serán *idénticas*, excepto en el conjunto de puntos en donde $\tilde{x}(t)$ es discontinua donde la serie infinita (2.A.1) converge al valor medio de la discontinuidad. Estas condiciones son *suficientes* pero no *necesarias*, lo que significa que existen funciones que pueden no satisfacer alguna de ellas, pero aún así tener representación en series de Fourier. Las condiciones son:

1. $\tilde{x}(t)$ es absolutamente integrable sobre un período, es decir

$$\int_T |\tilde{x}(t)| dt < \infty. \quad (2.A.15)$$

Como sucede con las funciones de cuadrado integrable sobre un período, esto garantiza que todos los coeficientes c_k son finitos, ya que, de acuerdo con (2.A.15),

$$|a_k| \leq \frac{1}{T} \int_T |\tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T} \int_T |\tilde{x}(t)| dt < \infty.$$

Una señal periódica que viola la primera condición de Dirichlet es la que se presenta en Fig. 2.A.4(a), definida como

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1,$$

donde $\tilde{x}(t)$ es periódica con período 1.

2. $\tilde{x}(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos (se dice que es de *variación acotada*). Un ejemplo de una función que verifica la condición 1, pero no la 2, es

$$\tilde{x}(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1,$$

que se grafica en la Fig. 2.A.4(b). Esta función, periódica con período $T = 1$, es absolutamente integrable

$$\int_0^1 |\tilde{x}(t)| dt < 1,$$

pero tiene un número no finito de máximos y mínimos en el intervalo.

3. $\tilde{x}(t)$ tiene un número finito de discontinuidades (finitas) en un intervalo finito de tiempo. Una función que viola esta condición es la que muestra la Fig. 2.A.4(c), de período $T = 8$, compuesta de un número infinito de secciones cada una de las cuales tiene la mitad de la altura y el ancho de las secciones previas. Aunque es absolutamente integrable, pues el área debajo de un período es menor que 8, el número de discontinuidades en el período es infinito.

Los ejemplos muestran que las señales que no satisfacen los criterios de Dirichlet son generalmente de naturaleza patológica, y en consecuencia no muy importantes en el estudio de señales y sistemas.

Resumiendo, la representación en series de Fourier de señales

- *continuas* converge e iguala a la señal original en para cada valor de t .
- *discontinuas* converge en todo punto *salvo* en los puntos de discontinuidad, donde converge al valor medio del salto. En este caso la diferencia entre la señal original y la representada por la serie infinita no contiene energía, de modo que para todos los fines prácticos ambas señales son idénticas. Como ambas señales difieren sólo en puntos aislados, sus integrales coinciden sobre cualquier intervalo; por ello se comportan igual bajo la convolución y *son* idénticas desde el punto de vista del análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Apéndice 2.B

Análisis espectral de señales analógicas

El análisis de señales en el campo transformado permite descubrir aspectos de la señal que serían muy difíciles o imposibles de observar a partir de su representación temporal. Por ejemplo en la Fig. 2.B.1(a) se muestra un tono que parece ser sinusoidal puro. Sin embargo, el espectro de esta señal, que se observa en la Fig. 2.B.1(b), revela la presencia de otras componentes frecuenciales. Cuando estas componentes se grafican en el dominio frecuencial son fáciles de detectar porque no quedan enmascaradas por las señales de gran amplitud. La Fig. 2.B.2 muestra una señal simultáneamente en los dominios temporal y frecuencial, revelando que el espectro está compuesto por dos sinusoides. Esto no significa que las mediciones en el dominio transformado son “mejores” que las mediciones en el dominio tiempo. Cierta clase de medidas, como el tiempo de crecida y de caída de un pulso, el sobrepico, y las oscilaciones amortiguadas (“ringing”) de una señal sólo pueden medirse en el dominio temporal (por ejemplo, con un osciloscopio).

En otras aplicaciones, en cambio, las mediciones en el dominio frecuencial son más ventajosas. Como muestran las Figs. 2.B.1 y 2.B.2, la determinación del contenido armónico de una señal es más sencillo en el dominio frecuencia: mientras que la señal de la Fig. 2.B.1(a) parece una sinusoidal “perfecta” en el dominio tiempo, en el dominio frecuencia se puede apreciar que en realidad está compuesta por señales de tres frecuencias distintas. En el

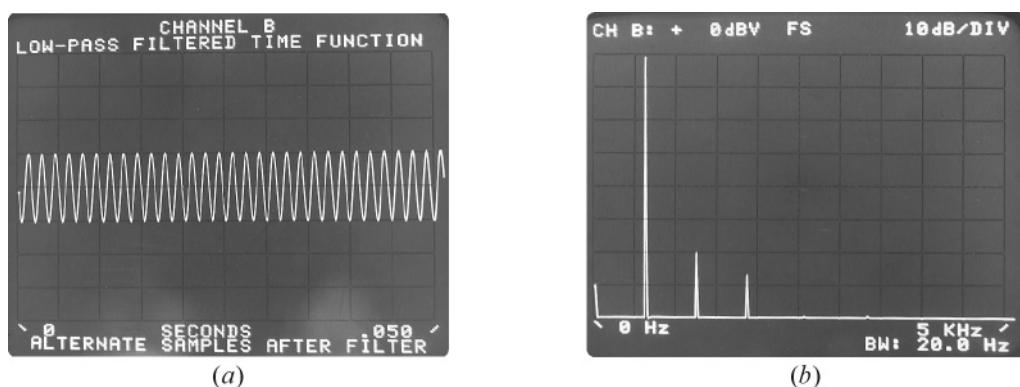


Fig. 2.B.1. Representación temporal (a) y frecuencial (b) de un tono “casi” sinusoidal.

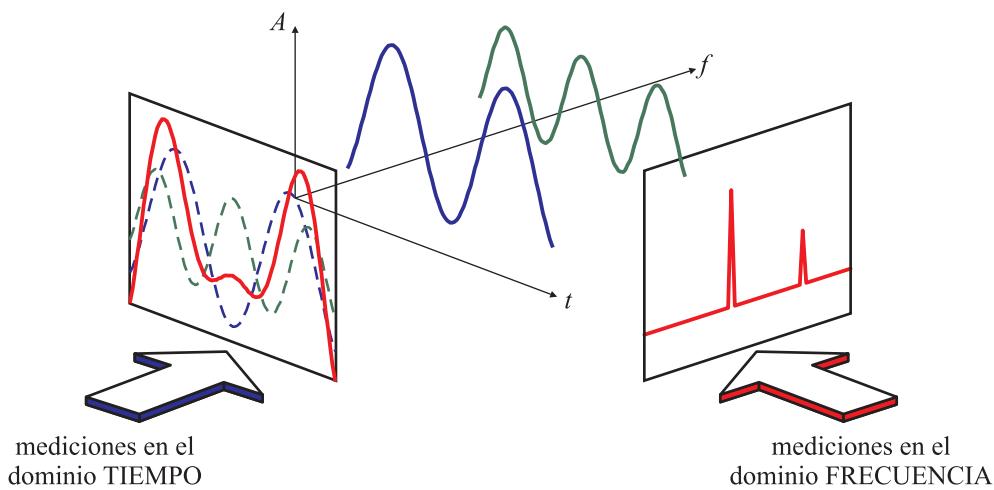


Fig. 2.B.2. Relación entre el dominio temporal y frecuencial.

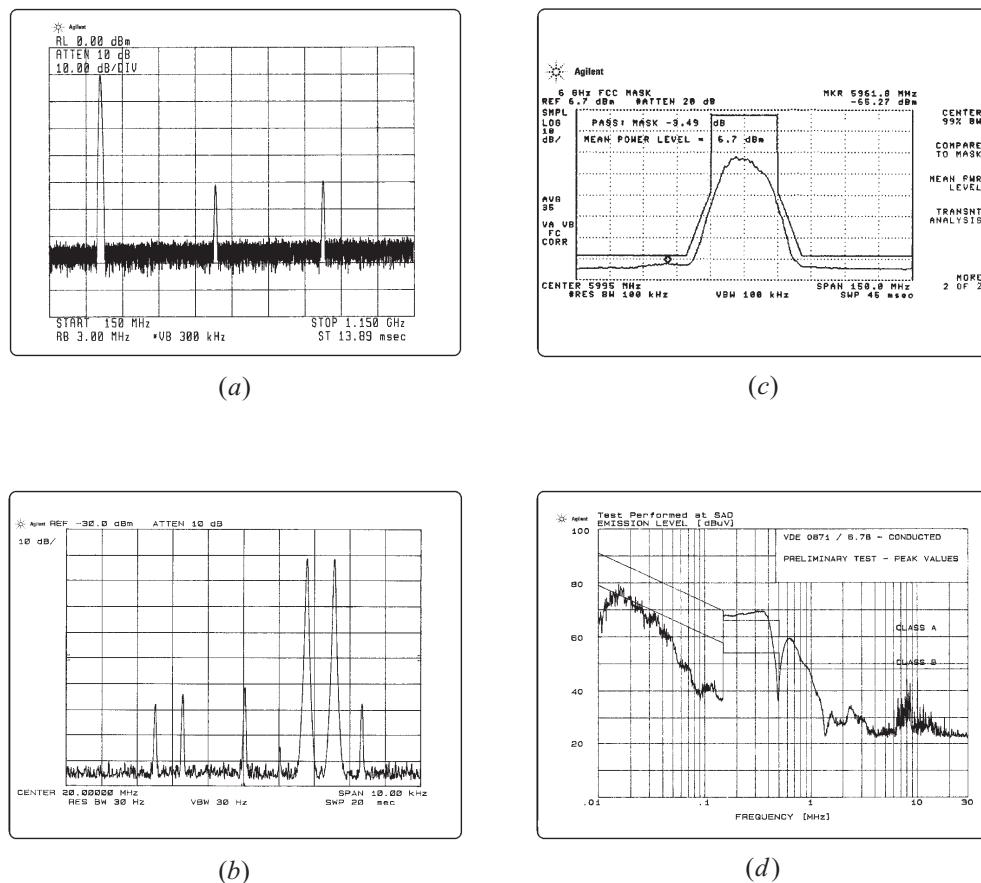


Fig. 2.B.3. Aplicaciones del análisis espectral: prueba de distorsión armónica (a) y de intermodulación de tercer orden en un transmisor de banda lateral única (BLU) (b); espectro de una señal de radio digital, y máscara que muestra los límites de ocupación espectral permitidos (c); emisiones conducidas en función de los límites impuestos por la VDE como parte de una prueba de interferencia electromagnética (d).

campo de las comunicaciones es muy importante la medición de la distorsión armónica, donde debe verificarse el contenido armónico de la señal portadora para evitar interferencias con otros sistemas que operan en frecuencias vecinas.

En la Fig. 2.B.3(a) se observa que aparte de la señal portadora (el pico de mayor amplitud, a la izquierda de la figura) aparecen dos armónicas de menor amplitud, que no deberían yacer sobre el rango de frecuencias asignado al canal vecino. También es crucial la distorsión eventual del mensaje modulado sobre una portadora. La intermodulación de tercer orden causada por las armónicas que se producen cuando se excita un sistema no lineal con una señal compuesta por dos o más tonos, es particularmente problemática pues las componentes de distorsión pueden caer dentro de la banda de interés, y en consecuencia no pueden ser filtradas.

En la Fig. 2.B.3(b) se muestran dos componentes frecuenciales (los picos de mayor amplitud que aparecen sobre la derecha de la figura) que por efectos no lineales del circuito de procesamiento o del canal de comunicación dan lugar a la aparición de las otras componentes espectrales que se aprecian en la figura: el pequeño pico que aparece más a la derecha cae dentro de la banda de trabajo, y es una “distorsión” no deseada que no puede eliminarse por filtrado.

Otra medición importante es la *ocupación espectral*. La modulación de una señal expande su espectro, y para evitar interferencia entre canales próximos las agencias regulatorias limitan el rango de frecuencias que ocupan los distintos servicios de telecomunicaciones. En la Fig. 2.B.3(c) se muestran los límites impuestos por los organismos reguladores (segmentos de líneas rectas) junto con el espectro de la señal, que en este caso satisface las normas.

La interferencia electromagnética (EMI) también puede ser considerada como una forma de ocupación espectral; se debe evitar que emisiones no deseadas, ya sean radiadas o transmitidas por la alimentación u otro tipo de cableado interfieran con el funcionamiento de otros sistemas. Los fabricantes de productos eléctricos o electrónicos deben verificar los niveles de emisión en función de la frecuencia de acuerdo a las normativas de los organismos reguladores. En la Fig. 2.B.3(d) se observan los requisitos impuestos por las normas, formados por segmentos de línea recta, sobre los que se superponen los resultados de la medición del EMI.

Todas estas verificaciones son muy sencillas de realizar en el dominio frecuencia, pero no en el dominio tiempo. Mientras que el comportamiento de una señal en el dominio tiempo puede analizarse con un osciloscopio, el análisis en el dominio transformado requiere de un instrumento que habitualmente es bastante más costoso y más complicado de utilizar: el analizador espectral. Hoy en día es frecuente que los osciloscopios digitales sean capaces de calcular el espectro de una señal, utilizando herramientas que se estudiarán más adelante en este curso, aunque en general su desempeño es inferior al de los instrumentos diseñados específicamente para este fin. Tales instrumentos reciben el nombre de analizadores digitales de espectro, y sus propiedades y características se analizarán oportunamente. Sin embargo, es interesante describir el funcionamiento de los analizadores espectrales analógicos, ya que se basan en un conjunto de propiedades de la transformada de Fourier descriptas en las secciones anteriores, y además porque comparten muchas características con los instrumentos más modernos.

Otro instrumento pensado para efectuar mediciones en el dominio frecuencia es el *analizador de redes*. Los analizadores espectrales están optimizados para caracterizar señales,

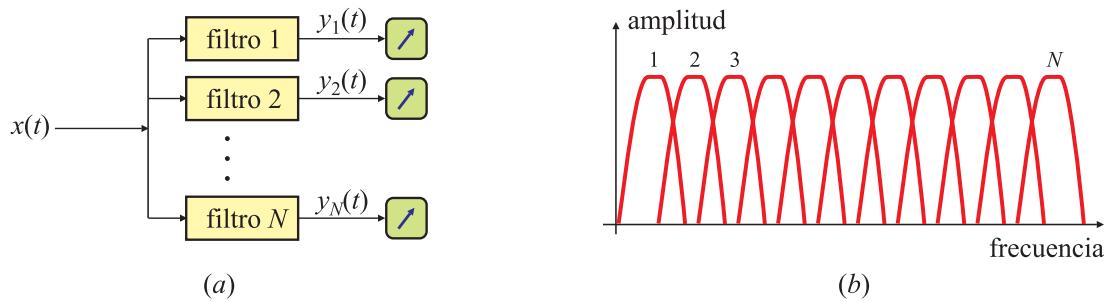


Fig. 2.B.4. Analizador espectral analógico simultáneo: (a) diagrama simplificado; (b) respuesta en frecuencia del analizador.

introduciendo muy baja distorsión y pocas señales espurias, de modo que el análisis que realiza muestra realmente el espectro de la señal de entrada, y no señales generadas por el mismo analizador. Los analizadores de redes, por otra parte, están optimizados para medir precisamente amplitud y desfasaje sobre un amplio rango de ganancias y atenuaciones de red. Este diseño significa que estas dos familias de instrumentos no son en general intercambiables: un analizador espectral no puede funcionar como un analizador de redes pues no mide la amplitud con gran exactitud, y tampoco mide desfasaje. Un analizador de redes no puede suprir a un analizador espectral pues las respuestas espurias limitan su rango dinámico.

2.B.1. Analizador espectral analógico

Un analizador espectral es un sistema físico capaz de medir la transformada de Fourier $X(f)$ de una señal arbitraria $x(t)$. El término “analizador” se reserva para sistemas como el de la Fig. 2.B.4 donde su entrada es $x(t)$ y su salida $y(t) = [y_1(t), \dots, y_N(t)]$ es función del período en que se observa la señal, y se supone que mide, de cierta manera, la transformada $X(f)$ deseada. Como es un sistema físico, necesariamente es causal, es decir que sus salidas $y_k(t)$ en un dado tiempo $t = t_0$ dependen, necesariamente, sólo de los valores de $x(t)$ previos a $t = t_0$, mientras que la transformada $X(f)$ depende de la historia completa de $x(t)$, para t desde $-\infty$ hasta $+\infty$. En consecuencia, $y(t_0)$ no puede representar $X(f)$, excepto que $x(t)$ se anule para algún $t > t_0$, o bien cuando el futuro de la señal pueda deducirse de su historia pasada, tal como sucede con las señales periódicas. El lector interesado puede consultar Randall (1977) para mayor información sobre estos aspectos.

Los analizadores espectrales analógicos se dividen en dos clases. La primera (Fig. 2.B.4) tiene varias salidas –por “salida” se entiende la unidad de medición del instrumento, y no la forma de presentación del espectro o unidad de visualización– y en un tiempo $t = t_0$ cada una de ellas mide una componente frecuencial distinta de la señal de entrada; de modo que el espectro deseado se lee *simultáneamente*. La segunda clase (Fig. 2.B.7) consta de una única salida que mide las distintas componentes frecuenciales en instantes de tiempos consecutivos. Se dice que el espectro se determina *secuencialmente*.

La elección del analizador y la interpretación de los resultados depende de la naturaleza de la señal de entrada $x(t)$. En esta sección se considerará sólo el caso de señales pe-

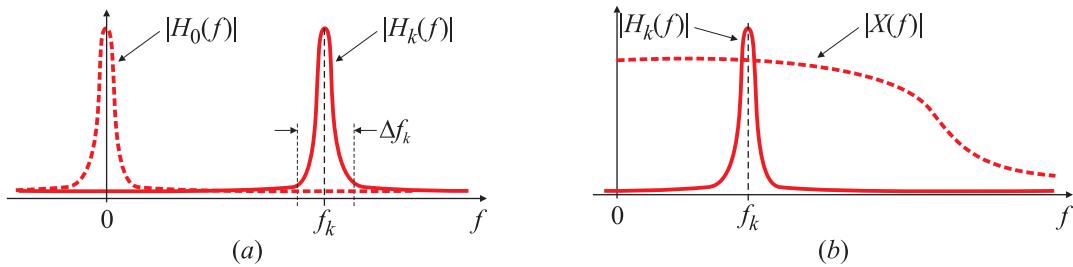


Fig. 2.B.5. Respuesta en frecuencia de los filtros pasabanda 0 y k (a). Si $H_k(f)$ es angosto, $X(f)H_k(f) \approx X(f_k)H_k(f)$ (b).

riódicas o señales aperiódicas con energía finita. Las señales aperiódicas que no tienen energía finita (como el ruido) no poseen transformada de Fourier, y se caracterizan por su *spectro de potencia*. La discusión de estas secciones puede ser útil para la medición del espectro de potencia; sin embargo, su interpretación adecuada requiere de consideraciones estadísticas, que están fuera de los objetivos de este curso.

2.B.1.1. Analizador espectral simultáneo o de bancos de filtros

La Fig. 2.B.4(a) ilustra el diseño básico de un analizador espectral analógico simultáneo. El sistema está compuesto por un conjunto o banco de filtros pasabanda, relativamente selectivos, cada uno de ellos sintonizado a una frecuencia distinta. Si se mide la salida de cada uno de estos filtros se puede determinar la potencia en la porción del espectro comprendida por su ancho de banda. eligiendo las frecuencias centrales y el ancho de banda de modo que las respuestas en frecuencia se solapen adecuadamente, se puede caracterizar completamente el rango del espectro cubierto por el conjunto de filtros, como muestra la Fig. 2.B.4(b). El número de filtros necesarios para cubrir el espectro depende de consideraciones económicas: para detectar líneas espectrales arbitrariamente próximas, debería utilizarse un elevado número de filtros pasabanda muy angostos. El costo de cada filtro crece a medida que disminuye su ancho de banda, de modo que un analizador de alta resolución resulta muy costoso. Los analizadores espectrales analógicos simultáneos o de bancos de filtros suelen utilizarse en aplicaciones de audio, donde es habitual utilizar 32 filtros, cada uno cubriendo un ancho de banda de un tercio de octava.

2.B.1.1.1. Análisis del analizador simultáneo

La señal $x(t)$ a analizar se inyecta a un banco de filtros pasabanda como el de la Fig. 2.B.4(a). La respuesta en frecuencia del filtro k -ésimo se indica con $H_k(f)$, como se muestra en las Fig. 2.B.5(a), y su respuesta impulsiva es $h_k(t)$. La salida $y_k(t)$ del k -ésimo filtro es

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_k(t - \tau)d\tau.$$

Reemplazando $h_k(t - \tau)$ por la ecuación de síntesis, se tiene que

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} H_k(f) e^{j2\pi f(t-\tau)} df d\tau$$

e intercambiando el orden de integración

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(f) e^{j2\pi ft} df d\tau$$

que finalmente puede escribirse como

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H_k(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Como $H_k(f)$ está concentrada en cercanías de $f = f_k$, $X(f)H_k(f) \cong X(f_k)H_k(f)$, como se muestra en la Fig. 2.B.5(b), se tiene que

$$y_k(t) \cong X(f_k)h_k(t),$$

y entonces la energía a la salida del filtro es

$$E_k = \int_{-\infty}^{\infty} |y_k(t)|^2 dt \cong |X(f_k)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |h_k(t)|^2 dt. \quad (2.B.1)$$

Esta expresión muestra que la energía de la salida del filtro k -ésimo es proporcional al espectro $X(f)$ de la señal $x(t)$ evaluado en $f = f_k$. La ecuación (2.B.1) muestra que no es demasiado importante ni la forma de la respuesta en frecuencia del filtro, ni su respuesta impulsiva: lo único necesario es que sea lo suficientemente angosto como para que se verifique la aproximación $X(f)H_k(f) \cong X(f_k)H_k(f)$. Entonces el valor de $|X(f_k)|$ puede determinarse midiendo la energía de la salida del k -ésimo filtro.

El valor preciso de E_k es el promedio ponderado de $X(f)$ en la banda del k -ésimo filtro. Si el filtro pasabanda fuese ideal,

$$H_k(f) = \begin{cases} A, & \text{si } f_k - \Delta f_k/2 < f < f_k + \Delta f_k/2 \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

resulta que

$$E_k = \int_{-\infty}^{\infty} |y_k(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)H(f)|^2 df = A^2 \int_{f_k - \Delta f_k/2}^{f_k + \Delta f_k/2} |X(f)|^2 df \simeq A \Delta f_k |X(f_k)|^2$$

Cuando más angosto sea el filtro, más ajustada es la última aproximación. La ganancia A del filtro se puede elegir para compensar las ganancias o atenuaciones del sistema de visualización, etc.

Para que el transitorio dure el mismo tiempo en todos los canales, es conveniente que la respuesta impulsiva de los filtros tenga la misma envolvente. Esto se puede conseguir haciendo que todos los filtros tengan la misma “forma” de la respuesta en frecuencia, pero desplazadas a las distintas frecuencias centrales f_k . Esto se consigue partiendo un filtro pasabajos prototípico, como el filtro $H_0(f)$ en la Fig. 2.B.4(a); el resto de los filtros se diseñan desplazando en frecuencia el filtro prototípico. Por ejemplo, el filtro centrado en $f = f_k$ se obtiene como

$$H_k(f) = H_0(f + f_k) + H_0(f - f_k)$$

de donde resulta que la respuesta impulsiva de $H_k(f)$ y de $H_0(f)$ están relacionadas por

$$h_k(t) = 2h_0(t) \cos(2\pi f_k t),$$

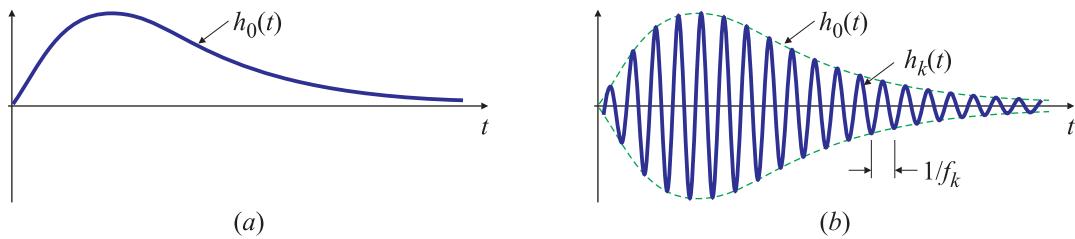


Fig. 2.B.6. Respuesta impulsiva del filtro pasabajos $h_0(t)$ (a) y del filtro pasabanda $h_k(t)$ (b).

como se muestra en la Fig.2.B.6(a) y (b), respectivamente.

En este caso, se puede formalizar un poco más el análisis. La salida del filtro k -ésimo es

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_k(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_0(t-\tau)2\cos[2\pi f_k(t-\tau)]d\tau,$$

que puede escribirse como

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_0(t-\tau)e^{j2\pi f_k(t-\tau)}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_0(t-\tau)e^{-j2\pi f_k(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_0(t-\tau)e^{-j2\pi f_k\tau}d\tau e^{j2\pi f_k t} + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_0(t-\tau)e^{j2\pi f_k\tau}d\tau e^{-j2\pi f_k t} \end{aligned} \quad (2.B.2)$$

Las integrales son las transformadas de Fourier de $x(\tau)h_0(t-\tau)$. En este caso, τ es la variable de integración, y t es un parámetro. Notando

$$XH_t(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_0(t-\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (2.B.3)$$

y teniendo en cuenta que tanto $x(\tau)$ como $h_0(t-\tau)$ son reales, (2.B.2) se puede escribir como

$$\begin{aligned} y_k(t) &= XH_t(f_k)e^{j2\pi f_k t} + XH_t(-f_k)e^{-j2\pi f_k t} \\ &= |XH_t(f_k)|2\cos[2\pi f_k t + \phi_t(f_k)] \end{aligned} \quad (2.B.4)$$

donde $|XH_t(f_k)|$ y $\phi_t(f_k)$ son el módulo y la fase de la transformada $XH_t(f)$ dada por (2.B.3) evaluada en $f = f_k$.

Si $X(f)$ y $H_0(f)$ son las transformadas de $x(\tau)$ y $h_0(\tau)$, la transformada de $h_0(t-\tau) = h_0[-(\tau-t)]$ es $[H_0(f)e^{-j2\pi ft}]^* = H_0^*(f)e^{j2\pi ft}$ (recordar que τ es la variable temporal, y t un parámetro). Entonces la transformada $XH_t(f)$ de $x(\tau)h_0(t-\tau)$ se puede escribir como

$$XH_t(f) = X(f) * [H_0^*(f)e^{j2\pi ft}] = [(X * H_0)(f)]e^{j2\pi ft},$$

y entonces (2.B.4) resulta

$$y_k(t) = [(X * H_0)(f_k)]2\cos[2\pi f_k t + \phi_t(f_k)].$$

Esta expresión muestra que la envolvente salida del k -ésimo filtro es proporcional al módulo de $(X * H_0)(f_k)$. Si $H_0(f)$ es lo suficientemente angosto $(X * H_0)(f_k) \simeq X(f_k)H_k(f)$. En el caso límite en el que $H_0(f) = \delta(f)$, $(X * H_0)(f_k) = X(f_k)$. Si todos los filtros $H_k(f)$ tienen el mismo área, la envolvente de la salida de cada uno de ellos es el promedio ponderado de $X(f)$ en la banda de paso del filtro $H_k(f)$. Para medir esta envolvente se pueden utilizar detectores de pico con pérdida, como los que se muestran en el Ejercicio 47.

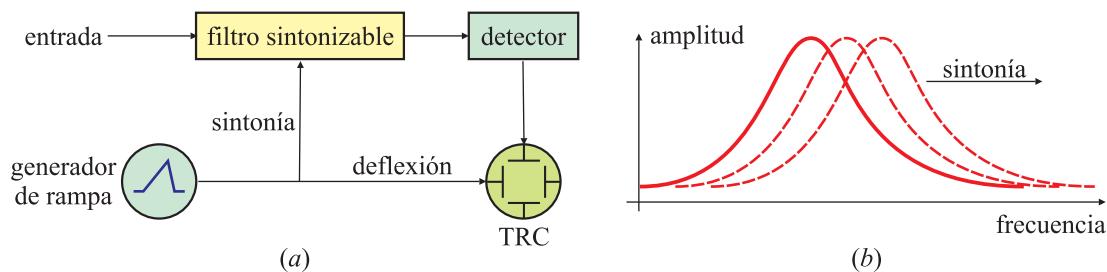


Fig. 2.B.7. Analizador espectral analógico de barrido: (a) esquema simplificado; (b) respuesta del filtro sintonizable.

2.B.1.2. Analizador espectral de barrido

El inconveniente del analizador paralelo es que no se adapta bien para el análisis de señales de radiofrecuencia. Por ejemplo, una señal portadora de alta frecuencia modulada en amplitud por otra de baja frecuencia requeriría utilizar filtros pasabandas con frecuencia central próxima a la frecuencia de la portadora, y anchos de banda menores que la moduladora, lo que resultaría en filtros muy selectivos (de “Q” muy alto) que son muy caros, muy difíciles de construir, y además tienen un tiempo de establecimiento muy alto. Una manera de evitar el empleo de un banco de filtros costosos es utilizando un único filtro pasabanda cuya frecuencia central pueda desplazarse dentro del rango de frecuencias de interés. Si, tal como se muestra en la Fig. 2.B.7, se grafica la amplitud de la salida de estado estacionario del filtro en función de la frecuencia a la que está sintonizado, se obtiene el espectro de la señal de entrada. Este tipo de analizador se utiliza preferentemente para el análisis de espectros de RF y microondas.

Aún cuando para un determinado ancho de banda de análisis el analizador espectral de barrido es más económico que el analizador de banco de filtros, también es extremadamente costoso debido a que es difícil diseñar un filtro pasabanda selectivo, de alta calidad cuya frecuencia central pueda ajustarse a voluntad sobre un amplio rango de frecuencias manteniendo un “Q” constante. Sin embargo, este inconveniente puede solucionarse en base a la propiedad de modulación de la transformada de Fourier, como se discute a continuación.

2.B.1.2.1. El analizador superheterodino

La Fig. 2.B.8 muestra el diagrama bloques simplificado de un analizador espectral superheterodino. “Heterodinario” significa mezclar, y “super” se refiere a frecuencias superiores a las de la señal a analizar. El diagrama bloques indica que la señal de entrada después de atravesar un filtro pasabajos entra a un mezclador, donde se multiplica con la señal proveniente de un oscilador local.

De acuerdo a la propiedad de modulación de la transformada de Fourier, al multiplicar la señal de entrada $x(t)$ por una señal cosinusoidal $s(t)$, cuya frecuencia f_{OL} es mucho mayor que el ancho de banda Δf de $X(f)$, su espectro se desplaza y queda centrado en $\pm f_{OL}$. Si la frecuencia del oscilador local se varía continua y lentamente $f_{OL} = f_0 + \rho t$, la envolvente de la salida del filtro de análisis (pasabanda angosto) centrado en f_0 da una

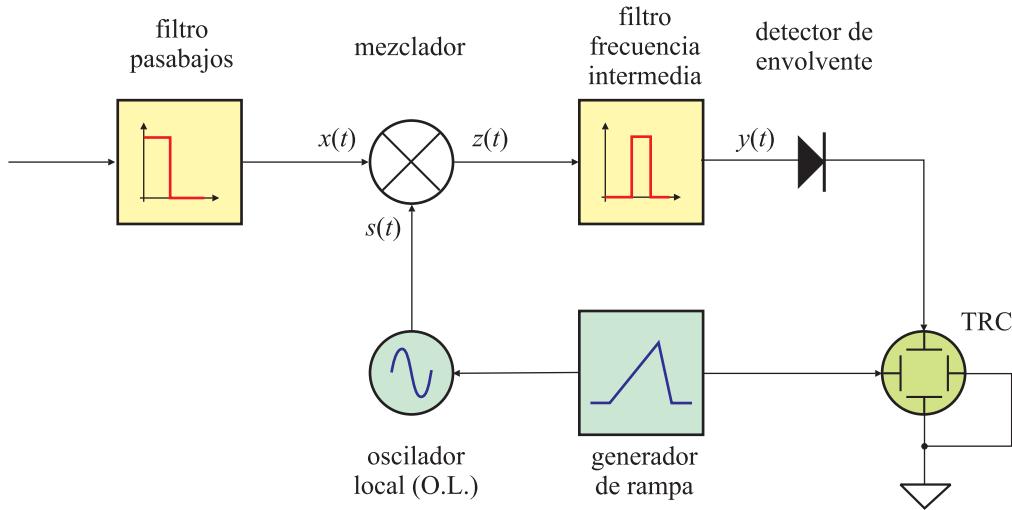


Fig. 2.B.8. Analizador de espectros de barrido tipo superheterodino.

idea de la magnitud del espectro de $X(f)$ a la frecuencia ρt .

El mezclador es esencialmente un multiplicador, de modo que a la salida no sólo hay componentes correspondientes a la suma y la diferencia de las frecuencias de la señal de entrada y del oscilador local, sino también sus armónicas, que son removidas por el filtro de frecuencia intermedia. Las señales útiles atacan un detector de envolvente, encargado de medir la magnitud de la salida. En los analizadores modernos, esta señal es digitalizada y procesada para luego aplicarla a las placas verticales de un tubo de rayos catódicos (TRC) y producir una deflexión vertical proporcional a la amplitud. Un generador de rampa sintoniza la frecuencia del oscilador local, de modo que su frecuencia cambie proporcionalmente con la tensión de la rampa, y también es el encargado de deflexionar horizontalmente el haz del TRC de izquierda a derecha.

El diagrama bloque de la Fig. 2.B.8 es muy similar al de una radio de AM convencional. Las diferencias radican en que la salida del analizador espectral es una pantalla en lugar de un parlante, y que el oscilador local se sintoniza electrónicamente –y varía periódicamente en el tiempo– en lugar de sintonizarse manualmente a la frecuencia de la emisora de interés.

EJEMPLO 2.B.1. Analizador espectral de barrido

La Fig. 2.B.9 repite el esquema básico de la Fig. 2.B.8; las flechas horizontales en los espectros indican el desplazamiento de algunas componentes frecuenciales debido al barrido del analizador. La salida del mezclador tiene tres componentes de frecuencia de interés: la suma y la diferencia de las frecuencias de la señal f_x y del oscilador local f_{OL} , que son $-f_x + f_{OL}$, $f_x + f_{OL}$ y la frecuencia del oscilador local f_{OL} . Esta última componente no debería aparecer si el multiplicador es ideal; sin embargo, se permite una pequeña fuga desde el puerto del oscilador local hacia la salida del mezclador para tener una referencia o “marca” conocida en la representación gráfica del espectro. También estarán presentes las correspondientes frecuencias negativas y el resto de las armónicas espurias generadas por el mezclador, que no se grafican para no complicar el esquema.

En este ejemplo, se supone que el rango de frecuencias de entrada está comprendido entre 0 Hz y 3 GHz; la señal de entrada tiene una única componente de frecuencia f_x ubicada dentro de este rango. El oscilador local (O.L.) se puede barrer desde 3.5 GHz hasta 6.5 GHz, y el filtro pasabanda de frecuencia intermedia está centrado en 3.5 GHz.

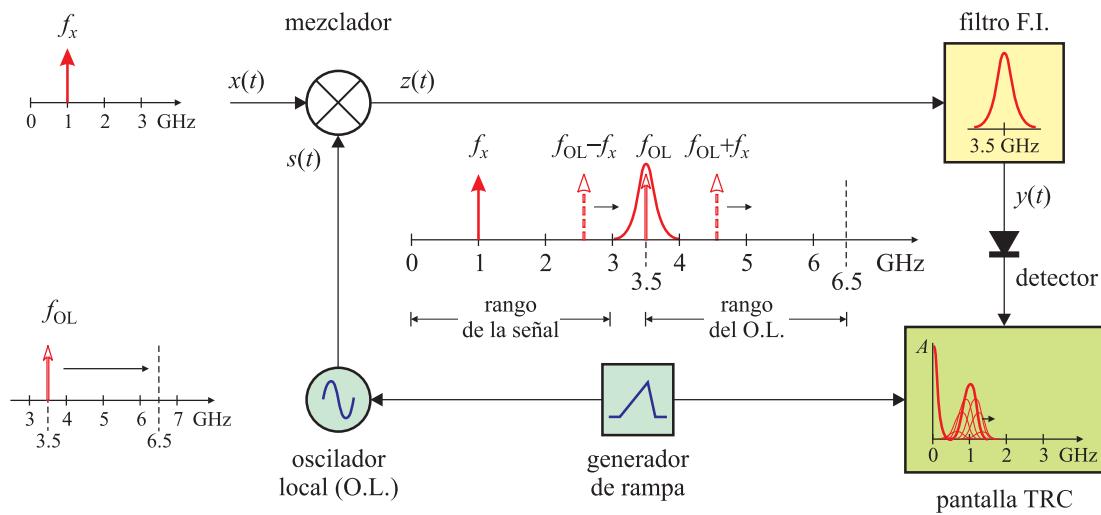


Fig. 2.B.9. Esquema de operación de un analizador espectral de barrido.

El funcionamiento del analizador puede comprenderse con la ayuda de la Fig. 2.B.10. Al comienzo del barrido [Fig. 2.B.10(a)] la frecuencia del oscilador local es de 3.5 GHz. La única componente frecuencial que queda comprendida dentro del ancho de banda del filtro pasabanda es la de frecuencia f_{OL} . El detector de envolvente detecta la amplitud de esta señal, y en la pantalla gráfica se observa un punto de altura proporcional a esta amplitud.

Cuando aumenta la frecuencia del oscilador local, por ejemplo a 3.75 GHz [Fig. 2.B.10(b)], las componentes de frecuencia f_{OL} y $-f_x + f_{OL}$, $f_x + f_{OL}$ se desplazan hacia la derecha en el espectro. Nuevamente, sólo la señal de frecuencia f_{OL} (el oscilador local) queda dentro del ancho de banda del filtro de análisis. Sin embargo, a esta frecuencia el filtro presenta cierto nivel de atenuación, y por lo tanto en la pantalla gráfica el trazo tiene menor magnitud.

Cuando la frecuencia del oscilador local es $f_{OL} = 4$ GHz la respuesta del filtro de análisis es prácticamente nula, como se muestra en la Fig. 2.B.10(c). En la pantalla se observa una “marca” o referencia que indica la posición de la frecuencia cero para la representación gráfica; el “ancho” de la marca es directamente proporcional al ancho de banda del filtro de análisis.

A esta frecuencia del O.L. la componente $-f_x + f_{OL}$ comienza a quedar comprendida dentro del ancho de banda del filtro. A la frecuencia $-f_x + f_{OL}$ la respuesta del filtro es casi nula, pero cuando la frecuencia del oscilador local aumenta a $f_{OL} = 4,25$ GHz la componente de frecuencia $-f_x + f_{OL}$ produce una salida significativa, como se observa en la Fig. 2.B.10(d). La máxima salida del filtro ocurre cuando la frecuencia del oscilador local es $f_{OL} = 4,5$ GHz, para la cual la frecuencia diferencia $-f_x + f_{OL} = 3,5$ GHz coincide con el pico de resonancia del filtro de frecuencia intermedia [Fig. 2.B.10(e)]. Mientras se incrementa la frecuencia del oscilador local la componente de frecuencia $-f_x + f_{OL}$ recorre todo el ancho de banda del filtro de análisis, y en la pantalla se observa un segundo pico, como ilustran las Fig. 2.B.10(f) – (i).

En síntesis, a medida que la frecuencia del oscilador local varía linealmente, se aplica una señal de frecuencia $-f_x + f_{OL}$ a la entrada al filtro pasabanda; la amplitud de su salida depende de la ganancia del filtro a esa frecuencia particular. Como la misma señal que se usa para variar la frecuencia del oscilador local controla la deflexión horizontal de un tubo de rayos catódicos (TRC) va quedando registrada en la pantalla del analizador la gráfica de la variación del contenido frecuencial de la señal de entrada para diferentes frecuencias.

Aún en el caso en que la señal de entrada fuese una senoidal perfecta, cuyo espectro es un par de impulsos, la pantalla del analizador espectral mostrará una gráfica que corresponde a la respuesta en frecuencia del filtro pasabanda, centrada en la frecuencia correspondiente a la de la señal senoidal

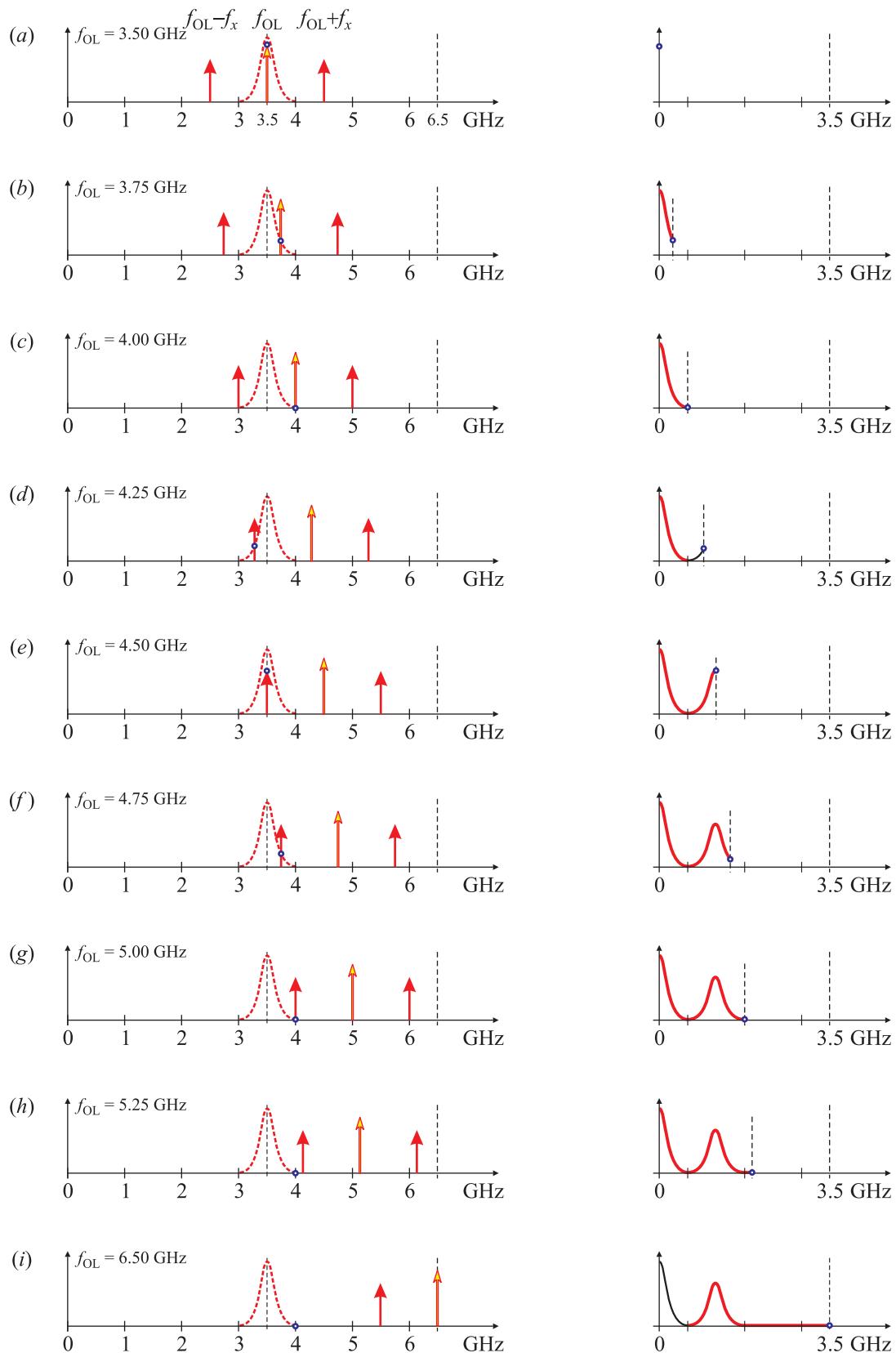


Fig. 2.B.10. Distintas etapas en el barrido del oscilador local.

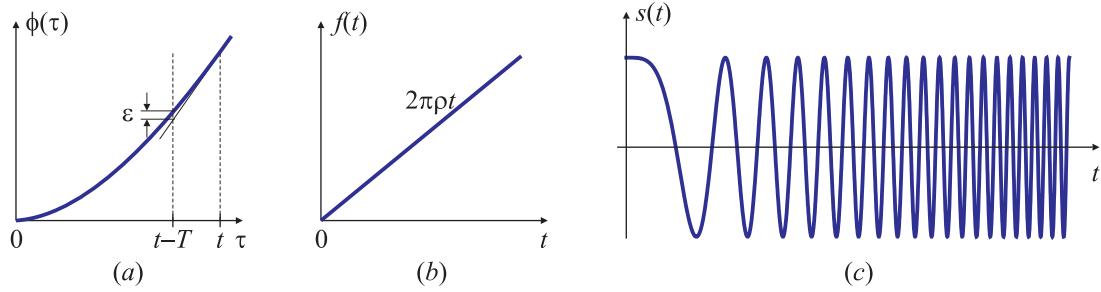


Fig. 2.B.11. Gráfico de $\phi(t) = \pi\rho t^2$ (a), de $f(t) = 2\pi\rho t$ (b) y de $s(t) = \cos \phi(t)$ (c).

de entrada. Por lo tanto el ancho de banda del filtro de frecuencia intermedia o filtro de análisis determina la resolución del instrumento. \square

2.B.1.2.2. Análisis del analizador espectral de barrido

Como se muestra en la Fig. 2.B.8, la señal $x(t)$ a analizar y la señal del oscilador local $s(t)$ modulada en frecuencia se multiplican entre sí, y el resultado $z(t) = x(t)s(t)$ se aplica a un filtro de análisis o de frecuencia intermedia $H(f)$. La señal $s(t)$ del oscilador local es

$$s(t) = \cos \phi(t) = \cos(\pi\rho t^2),$$

donde $\phi(t) = \pi\rho t^2, \infty \rho > 0$ se muestra en la Fig. 2.B.11(a). Su *frecuencia instantánea* $f(t)$ es

$$f(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi\rho t, \quad (2.B.5)$$

y entonces la señal $s(t)$ puede pensarse como un coseno cuya frecuencia varía linealmente en el tiempo, como se representa en la Fig. 2.B.11(b). Este tipo de señales se conoce como *chirp* [Fig. 2.B.11(c)]. Bajo estas condiciones, la determinación exacta de la señal de salida $y(t)$ del filtro es complicada, sin embargo, si la pendiente $2\pi\rho$ de la frecuencia instantánea $f(t)$ es pequeña, se puede efectuar un análisis aproximado.

Si la respuesta impulsiva del filtro de análisis es $h(t)$, y se supone concentrada para $0 \leq t \leq T$, la salida $y(t)$ se puede calcular como

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) \cos \phi(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (2.B.6)$$

La variable de integración τ toma valores dentro del intervalo $(t-T, t)$. Si se supone que ρ es muy pequeño, se puede aproximar la curva $\phi(\tau)$ por su tangente en $\tau = t$, como se muestra en la Fig. 2.B.11(a):

$$\phi(\tau) \simeq 2\pi\rho t\tau - \pi\rho t^2 = \phi_a(\tau)$$

que vale en el intervalo $t-T < \tau < t$. El máximo error ocurre en $\tau = t-T$, y es

$$\varepsilon = |\phi(\tau) - \phi_a(\tau)|_{\tau=t-T} = \pi\rho(t-T)^2 - [2\pi\rho t(t-T) - \pi\rho t^2] = 2\pi\rho T^2.$$

Entonces, si

$$2\pi\rho T^2 \ll 1 \quad (2.B.7)$$

el efecto del error en el valor del $\cos \phi(\tau)$ en la integral se puede despreciar, y se puede reemplazar $\phi(\tau)$ por su aproximación lineal $\phi_a(\tau)$. Se tiene entonces que

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) \cos \phi(\tau) h(t-\tau) d\tau \cong \int_{t-T}^t x(\tau) \cos(2\pi\rho t\tau - \pi\rho t^2) h(t-\tau) d\tau$$

que puede escribirse como

$$\begin{aligned} y(t) &\cong \frac{1}{2} \int_{t-T}^t x(\tau) h(t-\tau) e^{j(2\pi\rho t\tau - \pi\rho t^2)} d\tau + \frac{1}{2} \int_{t-T}^t x(\tau) h(t-\tau) e^{-j(2\pi\rho t\tau - \pi\rho t^2)} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{t-T}^t x(\tau) h(t-\tau) e^{j2\pi\rho t\tau} d\tau e^{-j\pi\rho t^2} + \frac{1}{2} \int_{t-T}^t x(\tau) h(t-\tau) e^{-j2\pi\rho t\tau} d\tau e^{j\pi\rho t^2}. \end{aligned}$$

Definiendo

$$XH_t(f) = \int_{t-T}^t x(\tau) h(t-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

y suponiendo que tanto $x(t)$ como $h(t)$ son reales, se tiene que

$$y(t) = \frac{1}{2} XH_t(f)|_{f=\rho t} e^{j\pi\rho t^2} + \frac{1}{2} XH_t(f)|_{f=-\rho t} e^{-j\pi\rho t^2} = |XH_t(\rho t)| \cos[\pi\rho t^2 + \phi_t(\rho t)] \quad (2.B.8)$$

donde $|XH_t(\rho t)|$ y $\phi_t(\rho t)$ son el módulo y la fase de $XH_t(f)$ en $f = \rho t$. Razonando de la misma manera que en (2.B.2)-(2.B.4), se concluye que la salida $y(t)$ está dada por

$$y(t) \cong [(X * H)(\rho t)] \cos[\pi\rho t^2 + \phi_t(\rho t)],$$

es decir, es una señal modulada cuya envolvente es igual al módulo de la transformada de Fourier de $x(\tau)h(t-\tau)$ evaluada a la frecuencia instantánea $f = \rho t$ del oscilador local.

En un intervalo de tiempo T de igual duración que la respuesta impulsiva del filtro $h(t)$ la frecuencia instantánea de $s(t)$ se incrementa en $\Delta f = 2\pi\rho T$ según (2.B.5). Entonces la condición (2.B.7) puede escribirse como

$$\Delta f T \ll 1. \quad (2.B.9)$$

Por el teorema del ancho de banda, $1/T$ es aproximadamente el ancho de banda del filtro de análisis; la expresión (2.B.9) muestra que para que el desarrollo sea válido, el incremento Δf de la frecuencia del modulador en el tiempo T tiene que ser mucho menor que el ancho de banda del filtro. O dicho de otra manera, la velocidad de barrido tiene que ser mucho más lenta que la duración de la respuesta impulsiva del filtro pasabanda de análisis. Por lo tanto, cuanto más resolución se deseé en el análisis frecuencial (lo que implica utilizar un filtro con una respuesta en frecuencia más angosta) mayor deberá ser el tiempo de barrido para satisfacer (2.B.7) o (2.B.9).

Corrección del error Al derivar (2.B.8) de (2.B.6) se reemplazó $\phi(\tau)$ por la ecuación lineal $\phi_a(\tau)$, introduciendo un error

$$e(\tau) = \phi(\tau) - \phi_a(\tau) = \pi\rho(t-\tau)^2.$$

Una corrección de primer orden para el error $\Delta y(t)$ en la expresión de $y(t)$ se puede calcular usando las aproximaciones

$$\cos e(\tau) \cong 1, \quad \sin e(\tau) \cong e(\tau)$$

que resultan en

$$\cos \phi(\tau) \cong \cos \phi_a(\tau) - e(\tau) \sin \phi_a(\tau) = \cos \phi_a(\tau) - \pi \rho(t - \tau)^2 \sin \phi_a(\tau).$$

Teniendo en cuenta esta expresión en (2.B.6) la corrección de primer orden es

$$\begin{aligned} \Delta y(t) &= - \int_{t-T}^t \pi \rho(t - \tau)^2 \sin \phi_a(\tau) x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{2j} \int_{t-T}^t \pi \rho(t - \tau)^2 x(\tau) h(t - \tau) [e^{j\phi_a(\tau)} - e^{-j\phi_a(\tau)}] d\tau \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$\begin{aligned} \Delta y(t) &= -\frac{\pi \rho}{2j} \int_{t-T}^t x(\tau) (t - \tau)^2 h(t - \tau) e^{j2\pi\rho t\tau} d\tau e^{-j\pi\rho t^2} \\ &\quad + \frac{\pi \rho}{2j} \int_{t-T}^t x(\tau) (t - \tau)^2 h(t - \tau) e^{-j2\pi\rho t\tau} d\tau e^{j\pi\rho t^2}, \end{aligned}$$

que luego de algunos pasos algebraicos resulta

$$\Delta y(t) = \left| XH_t^{(2)}(f) \right|_{f=\rho t} \sin \left[\pi \rho t^2 + \phi_t^{(2)}(f) \right]_{f=\rho t} \quad (2.B.10)$$

donde

$$\left| XH_t^{(2)}(f) \right| = \int_{t-T}^t \pi \rho x(\tau) (t - \tau)^2 h(t - \tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau$$

es la transformada de Fourier de $\pi \rho x(\tau) (t - \tau)^2 h(t - \tau)$. En otras palabras, el término de corrección (2.B.10) es una señal modulada cuya envolvente es la transformada de Fourier de $\pi \rho x(\tau) (t - \tau)^2 h(t - \tau)$ evaluada en la frecuencia instantánea $f = \rho t$, similar a (2.B.8).

2.B.1.3. Comparación de los analizadores simultáneos y de barrido

Para asegurar el funcionamiento correcto, la señal bajo análisis no debe cambiar durante el tiempo que demanda el barrido del analizador. Si aparece una señal con componentes de frecuencia que no coinciden con la frecuencia a la que el filtro está sintonizado en ese momento, el analizador será incapaz de medirla. Una forma de solucionar este inconveniente es aumentando la velocidad de barrido. Aunque todavía podrían perderse algunos eventos, las posibilidades serían menores; sin embargo, no se puede hacer el barrido arbitrariamente rápido debido al tiempo de respuesta del filtro, que depende fundamentalmente de la longitud de su respuesta impulsiva. De acuerdo a lo postulado por el teorema del ancho de banda, un filtro estrecho tendrá una respuesta impulsiva de mayor duración, y en consecuencia, un mayor tiempo de establecimiento. Si el filtro se desplaza por el rango de frecuencias de interés muy rápidamente su salida puede no alcanzar el estado estacionario: la medición de la amplitud del espectro será errónea (en general, menor que la real) como sugiere la Fig. 2.B.12.

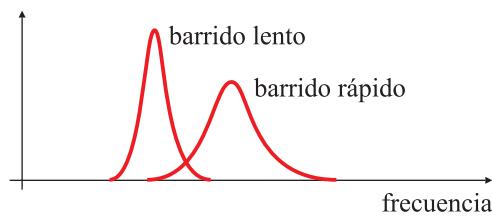


Fig. 2.B.12. Error de amplitud causado por un barrido rápido.

El problema de la velocidad de barrido no está presente en el analizador espectral paralelo, ya que los filtros están *siempre* conectados a la señal de entrada. Por lo tanto con este tipo de analizador se pueden analizar eventos transitorios cuya duración sea mayor que el tiempo de establecimiento del filtro más selectivo: si cada uno de los filtros tienen un ancho de banda de, por ejemplo, 1/3 de octava, el ancho de banda en Hz es distinto para cada uno de ellos; sin embargo, el “Q” (cociente entre la frecuencia central y el ancho de banda) es constante, y por lo tanto, todos los filtros tienen el mismo tiempo de establecimiento.

Ambos tipos de analizadores son soluciones de compromiso: si bien los analizadores paralelos o simultáneos son rápidos, tienen resolución limitada y son costosos. Por otra parte, los analizadores de barrido son más económicos pero la medición demanda más tiempo, sobre todo si se requiere alta resolución, y no pueden analizar eventos transitorios.

Otro analizador importante es aquel que digitaliza la señal, y calcula su espectro aplicando la transformada rápida de Fourier (FFT), como se estudiará más adelante. El analizador por FFT permite estudiar fenómenos transitorios, y además puede medir amplitud y fase. Aunque muy desarrollados, los analizadores de FFT aún no alcanzan a superar el rango de frecuencia de trabajo, sensitividad y rango dinámico de los analizadores de barrido superheterodinos, pero sin duda han desplazado a los analizadores simultáneos o por banco de filtros. Los analizadores comerciales suelen combinar alguno de estos tres tipos de funcionamiento según sea el rango de frecuencia de operación elegido.

A continuación se describe el comportamiento del analizador simultáneo o paralelo, y posteriormente se estudiará el funcionamiento del analizador de barrido, y en particular del analizador de barrido tipo superheterodino, de uso habitual en análisis de sistemas de comunicaciones.

2.B.2. Detalles constructivos de un analizador de barrido superheterodino

2.B.2.1. El mezclador

El mezclador es un dispositivo no lineal, y a su salida se encuentran presentes componentes de frecuencia que no existen en las señales de entrada. El mezclador ideal es un multiplicador, pero frecuentemente se construyen aprovechando las características no lineales de distintos componentes electrónicos, como la relación exponencial entre la corriente de colector y la tensión base emisor de los transistores de juntura, o la característica cuadrá-

tica entre la corriente de drenaje y la tensión de compuerta de los transistores de efecto de campo. Para este análisis basta suponer que la salida del mezclador es una cierta función polinomial de la suma de las señales de entrada

$$z(t) = a_1 [x(t) + y(t)] + a_2 [x(t) + y(t)]^2 + a_3 [x(t) + y(t)]^3 + \dots$$

donde $x(t)$ representa la señal a analizar, e $y(t)$ es la salida sintonizable del oscilador local. En general, el término de potencia k da lugar a la aparición de componentes de frecuencia $f_s = m f_x + n f_y$, donde $|m| + |n| = k$, $m, n \in \mathbb{Z}$ y f_x, f_y son las frecuencias de las señales $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. En consecuencia, las componentes de frecuencia a la salida del mezclador serán

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{c} f_x \\ f_y \end{array} \right\} \rightarrow \text{debido al término lineal,} \\ & \left. \begin{array}{c} 2f_x \\ 2f_y \\ f_x + f_y \\ \boxed{+f_x - f_y} \\ \boxed{-f_x + f_y} \\ -f_x - f_y \end{array} \right\} \rightarrow \text{debido al término cuadrático,} \\ & \left. \begin{array}{c} 3f_x \\ 3f_y \\ f_x + 2f_y \\ f_x - 2f_y \\ 2f_x + f_y \\ 2f_x - f_y \\ -f_x + 2f_y \\ -f_x - 2f_y \\ -2f_x + f_y \\ -2f_x - f_y \end{array} \right\} \rightarrow \text{debido al término cúbico.} \end{aligned}$$

De todas estas combinaciones, las únicas que interesan para el funcionamiento del analizador son las diferencias de frecuencia debido al término cuadrático, resaltadas en la lista. Las demás son fuente de distorsión, y deben tenerse en cuenta en el diseño del equipo: la elección del rango admisible de frecuencias de entrada, las frecuencias entre las que se “barre” el oscilador local, y la frecuencia central y el ancho de banda del filtro pasabanda de frecuencia intermedia deben garantizar que las frecuencias espurias no alcancen al detector de envolvente.

2.B.2.2. El filtro de frecuencia intermedia

Este filtro es un pasabanda que se comporta como una “ventana” a través de la cual se observa parte del espectro de la señal que se desea analizar. El ancho de banda de este filtro se denomina “ancho de banda de resolución”, y en general puede alterarse desde el panel frontal del equipo. Los filtros de ancho de banda estrechos tienen una respuesta impulsiva de mayor duración, lo que requiere que la velocidad de barrido sea suficientemente lenta como para dar tiempo a que se atenúe el transitorio antes de efectuar la medición. La disponibilidad de filtros con diferentes anchos de banda permiten optimizar

el comportamiento del instrumento, seleccionando mejor resolución a costa de un mayor tiempo de medición o viceversa.

2.B.2.3. El detector de envolvente

Este bloque se encarga de convertir la señal de salida del filtro de frecuencia intermedia a una tensión continua proporcional a la energía de la señal, que se utilizará para deflexionar el haz de electrones de la pantalla en el sentido del eje *y*. Tradicionalmente el detector de envolvente era un circuito relativamente sencillo, como el que se estudia en el Ejercicio 47. En la actualidad, se prefiere digitalizar la señal a la salida del filtro de F.I., y de esta forma el detector de envolvente puede implementarse por software, lo que permite una mayor flexibilidad en el procesado y representación gráfica.

2.B.3. Descripción de un analizador de barrido comercial

En la Fig. 2.B.13 se muestra el diagrama bloque de un analizador espectral comercial con finalidades didácticas, el LabVolt 9405. Salvo algunos agregados, el esquema es básicamente el mismo que el de la Fig. 2.B.9. Esta analizador ha sido diseñado para el estudio de señales de audio y de radiofrecuencia. Utiliza como elemento visualizador un osciloscopio convencional, o un registrador de papel. El analizador tiene dos rangos de frecuencias de entrada: desde 0 MHz a 30 MHz, y desde 85 MHz a 115 MHz. El eje de frecuencias puede ajustarse en cinco rangos, desde 2 kHz a 10 MHz por volt. De acuerdo al rango elegido, el ancho de banda de resolución se ajusta automáticamente entre 100 Hz y 50 kHz. La amplitud de la señal puede llegar hasta 10 dB por volt, con un máximo rango dinámico en pantalla de 60 dB. Para permitir una imagen estable, el analizador cuenta con una memoria digital donde almacena el gráfico a mostrar en el osciloscopio.

Una llave a la entrada del analizador permite seleccionar la impedancia de entrada entre $50\ \Omega$ y $1\ M\Omega$. En la posición de alta impedancia, la entrada del analizador es similar a la de un osciloscopio, de modo que se pueden medir señales en circuitos electrónicos sensibles sin afectar su operación. Cualquiera sea el valor de la impedancia de entrada seleccionado, la señal es dirigida a un atenuador de RF de 0 a 40 dB, ajustable en pasos de 10 dB.

Si se elige el rango de frecuencias entre 0 MHz y 30 MHz, la salida del atenuador se envía a un filtro pasabajos con frecuencia de corte de 30 MHz. Si en cambio se elige el rango entre 85 MHz y 115 MHz, la señal se envía previamente a un conversor de frecuencia (“prescaler” en la Fig. 2.B.13) que la convierte a la banda de 0 a 30 MHz, antes de pasarla por el filtro pasabajos de 30 MHz.

La salida del filtro pasabajos y la salida de un oscilador controlado por tensión (“sweep vco” en la Fig. 2.B.13 o el oscilador local O.L. de la Fig. 2.B.9), barrido por una rampa, se combinan en el mezclador/amplificador de 43,4 MHz, de modo que se traslada el espectro de la señal de entrada a la región de 43,4 MHz. En este punto, pueden injectarse señales (“markers”), que aparecen como líneas en el espectro y sirven de referencia para efectuar mediciones precisas.

La salida del mezclador/amplificador se pasa por un filtro pasabanda de cuarto orden, centrado en 43,4 MHz. Este filtro elimina las frecuencias espurias (también conocidas como

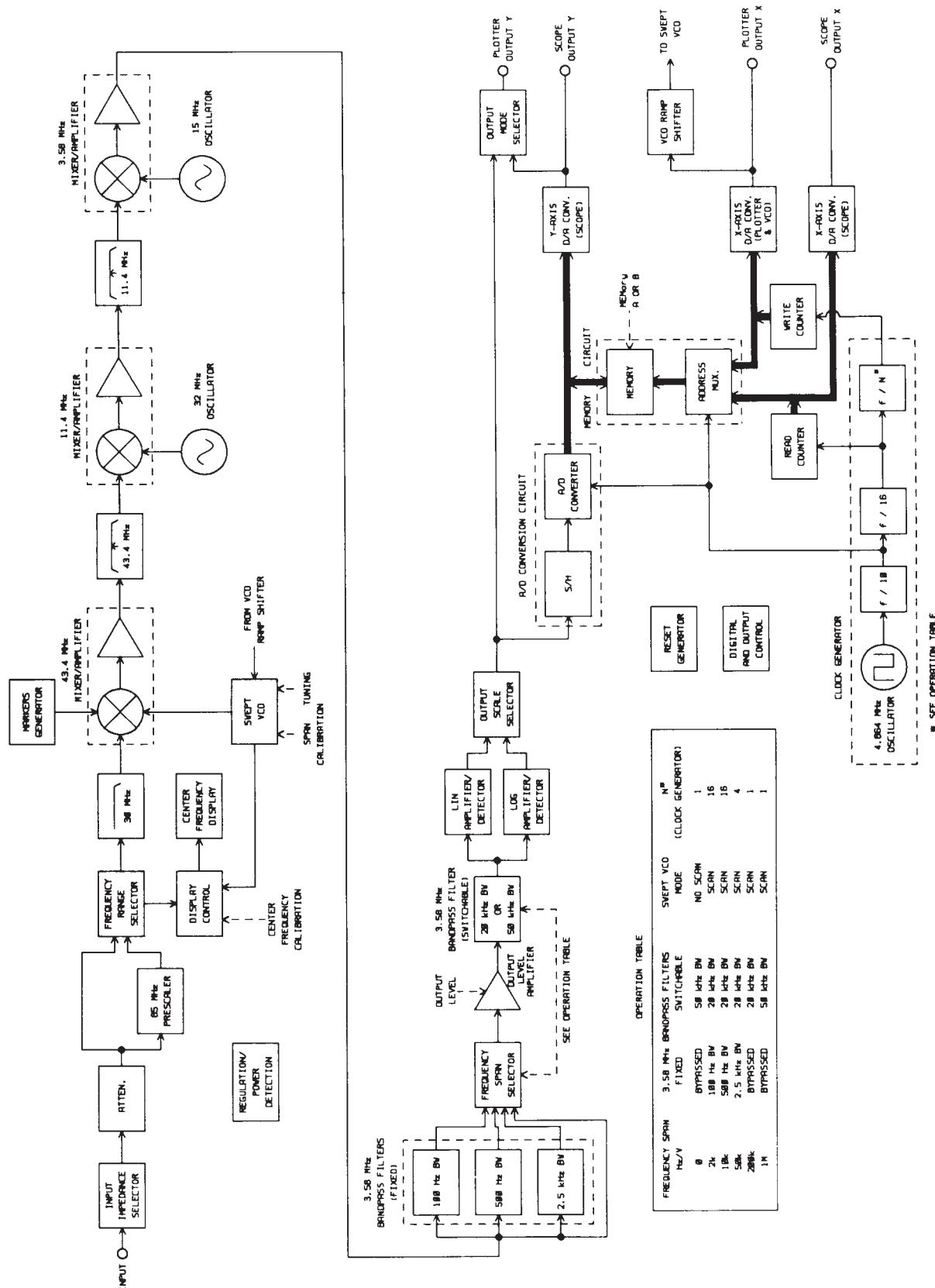


Fig. 2.B.13. Diagrama bloque del analizador espectral de barrido LabVolt 9405.

“frecuencias imágenes”) antes de atacar la segunda etapa de mezcla. Este segundo mezclador opera a una frecuencia de 32 MHz, trasladando el espectro al rango de 11,4 MHz ($= 43,4 \text{ MHz} - 32 \text{ MHz}$). A la salida de este mezclador, otro filtro pasabanda se encarga de eliminar las frecuencias imágenes antes de atacar la tercera etapa de mezcla, la que, al usar un oscilador de 15 MHz, traslada la frecuencia de modo que caiga en el rango de una red de filtros pasabanda angostos centrados en 3,58 MHz ($\approx 15 \text{ MHz} - 11,4 \text{ MHz}$). Esta sección del analizador contiene varios filtros conectados en serie y en paralelo, que se seleccionan de acuerdo a la tabla de operación que se muestra en la misma Fig. 2.B.13. La primera etapa está formada por tres filtros diferentes, con anchos de banda de 100 Hz, 500 Hz, y 2,5 kHz, respectivamente, y la segunda etapa por un único filtro cuyo ancho de banda puede ajustarse a 20 kHz o 50 kHz. Este conjunto de filtros forman el filtro de frecuencia intermedia o filtro de análisis de la Fig. 2.B.8. Entre ambas etapas de filtrado se ubica el amplificador de nivel de salida, cuya ganancia puede controlarse con un control en el panel frontal, lo que permite ajustar la magnitud del espectro que se muestra en la pantalla del osciloscopio tanto en el modo lineal como logarítmico.

Para que la imagen en la pantalla del osciloscopio sea estable, la señal demodulada se muestrea y convierte a un formato digital apto para ser almacenado en una memoria. La escritura de los datos en memoria puede ser muy lenta, dependiendo de la velocidad de barrido que a su vez es función del rango elegido para el eje de frecuencias. Además, los datos son leídos a una velocidad mayor para poder presentar una imagen estable en la pantalla del osciloscopio. Osciladores auxiliares y una serie de divisores de frecuencia generan las señales necesarias para las operaciones de escritura y lectura de la memoria, y el manejo de la pantalla.

La unidad de salida del analizador produce tres señales. La primera señal contiene la información vertical necesaria para graficar el espectro, y puede ser enviada tanto al osciloscopio como a un registrador gráfico. Esta señal se produce leyendo los contenidos de la memoria, y convirtiendo cada valor con un conversor digital/analógico. La segunda señal de salida es una rampa cuya frecuencia es diferente según sea la escala de frecuencias seleccionada para el eje horizontal. Esta señal es la encargada de “barrer” el oscilador local y controlar el proceso de escritura en memoria, y se genera conectado un conversor digital/analógico a la salida del contador de 10 bits que se usa como generador de direcciones para la *escritura* en la memoria. Esta rampa es también la señal de salida para el eje horizontal del registrador. Finalmente, la tercera señal generada es una rampa rápida (30 Hz) que provee la señal para el eje horizontal del osciloscopio; esta señal proviene de la salida de un conversor digital analógico conectado al contador de 10 bits encargado de generar las direcciones para la *lectura* de la memoria.

2.B.4. Mediciones de espectro en el laboratorio

En las siguientes secciones se muestran los espectros de distintas señales tal como se observan en un analizador espectral analógico. En las gráficas obtenidas con el analizador espectral la componente correspondiente a la frecuencia de 0 Hz no representa el valor de continua de la señal, y es solamente una marca o referencia para ubicar fácilmente la frecuencia origen, como se explicó en el Ejemplo 2.B.1. En algunos casos, se comparan con los espectros derivados matemáticamente.

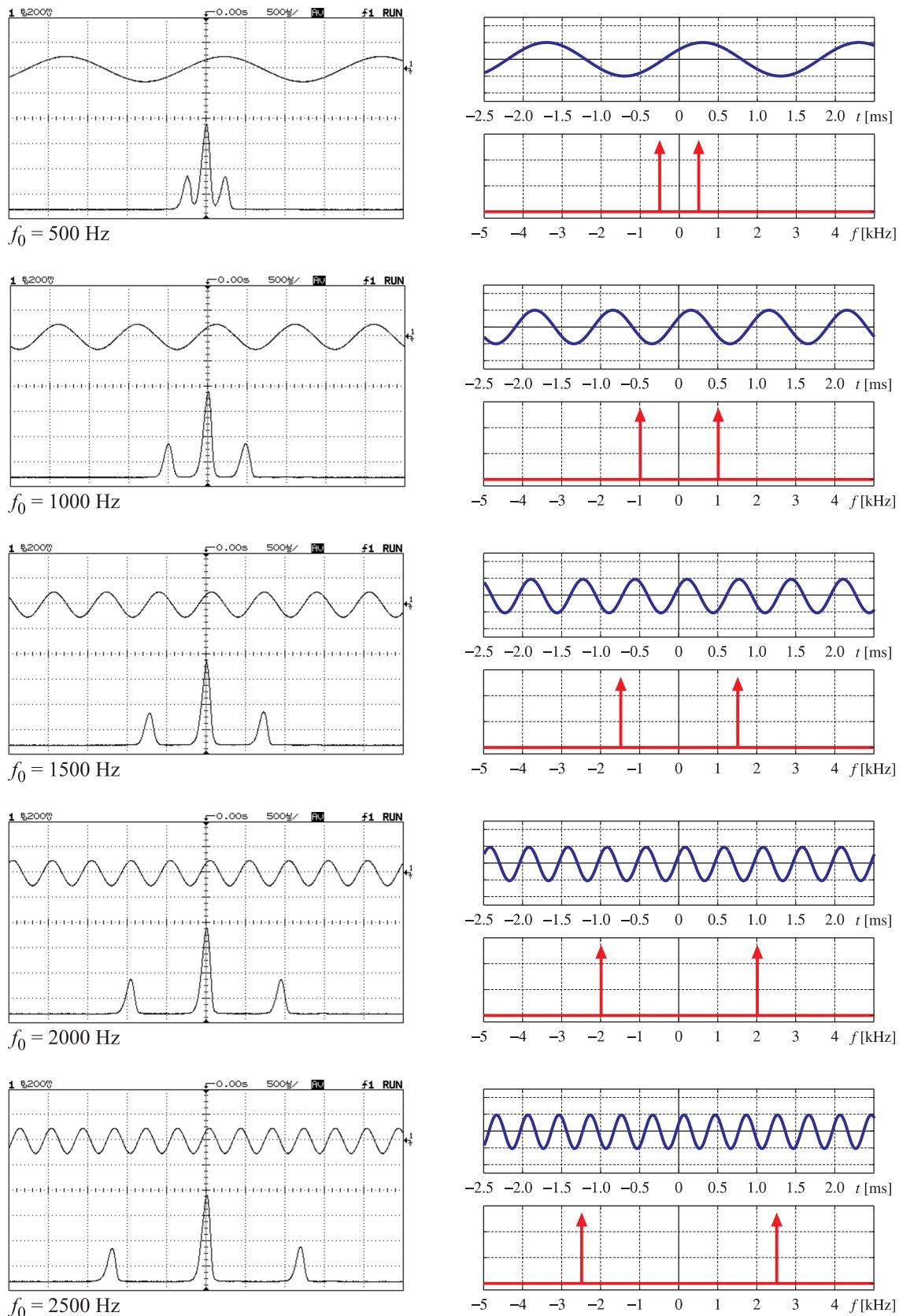


Fig. 2.B.14. Señales sinusoidales de distintas frecuencias y sus espectros.

2.B.4.1. Espectro de señales senoidales de distinta frecuencia

En el Ejemplo 2.18 se derivó el espectro de una señal senoidal $x(t) = A \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \phi)$:

$$X(f) = -j\frac{1}{2}Ae^{j\phi}\delta(f - f_0) + j\frac{1}{2}Ae^{-j\phi}\delta(f + f_0),$$

cuyo módulo, dado por

$$|X(f)| = \frac{1}{2}A\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}A\delta(f + f_0),$$

está formado por un par de impulsos ubicados en la frecuencia $f = f_0$ y en $f = -f_0$. En la columna izquierda de la Fig. 2.B.14 se muestran la forma de onda temporal y el módulo de espectro de señales sinusoidales reales medidas con un osciloscopio y el analizador espectral estudiado en la Sección 2.B.3. En la columna de la derecha de la misma figura se representan estas señales y sus espectros calculados analíticamente para facilitar su comparación. La similitud entre los resultados experimentales y las cálculos teóricos es evidente. La diferencia más notable es que el espectro medido exhibe un pulso de ancho finito centrado en las frecuencias $f = \pm f_0$ en lugar del impulso teórico. Este pulso frecuencial es la respuesta del filtro pasabanda, de frecuencia intermedia o de análisis del analizador espectral, cuyo ancho de banda limita el ancho de banda de resolución del analizador. El pulso de mayor amplitud localizado en el origen del eje de frecuencias no necesariamente indica la presencia de una componente de continua, y su finalidad principal es indicar el punto $f = 0$, como se mencionó al inicio de la sección.

En las imágenes temporales la escala del eje de tiempos es de 0,5 ms/div, y en los espectros la escala del eje de frecuencias es de 1 kHz/div. La escala de amplitud de los espectros no se especifica porque en general no interesa el valor absoluto de la amplitud, sino el valor relativo entre diferentes componentes espectrales.

2.B.4.2. Espectro de ondas cuadradas de distinta frecuencia

El espectro de una onda cuadrada de período $T_0 = 1/f_0$ y ciclo de trabajo $d = \tau/T_0$, definida como

$$x_c(t) = \begin{cases} 1, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ 0, & \text{para el resto del período,} \end{cases}$$

está dado por (Ejemplo 2.19)

$$X_c(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d \operatorname{sinc}(dk) \delta(f - kf_0). \quad (2.B.11)$$

Para un ciclo de trabajo $d = 1/2$ el módulo del espectro resulta

$$|X_c(f)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} |\operatorname{sinc}(k/2)| \delta(f - kf_0),$$

que está formado por impulsos ubicados en frecuencias múltiplos de $\pm f_0$, cuya amplitud está modulada por una función $\operatorname{sinc}(\cdot)$. Debido a la simetría de media onda, se anulan todas las armónicas pares del espectro.

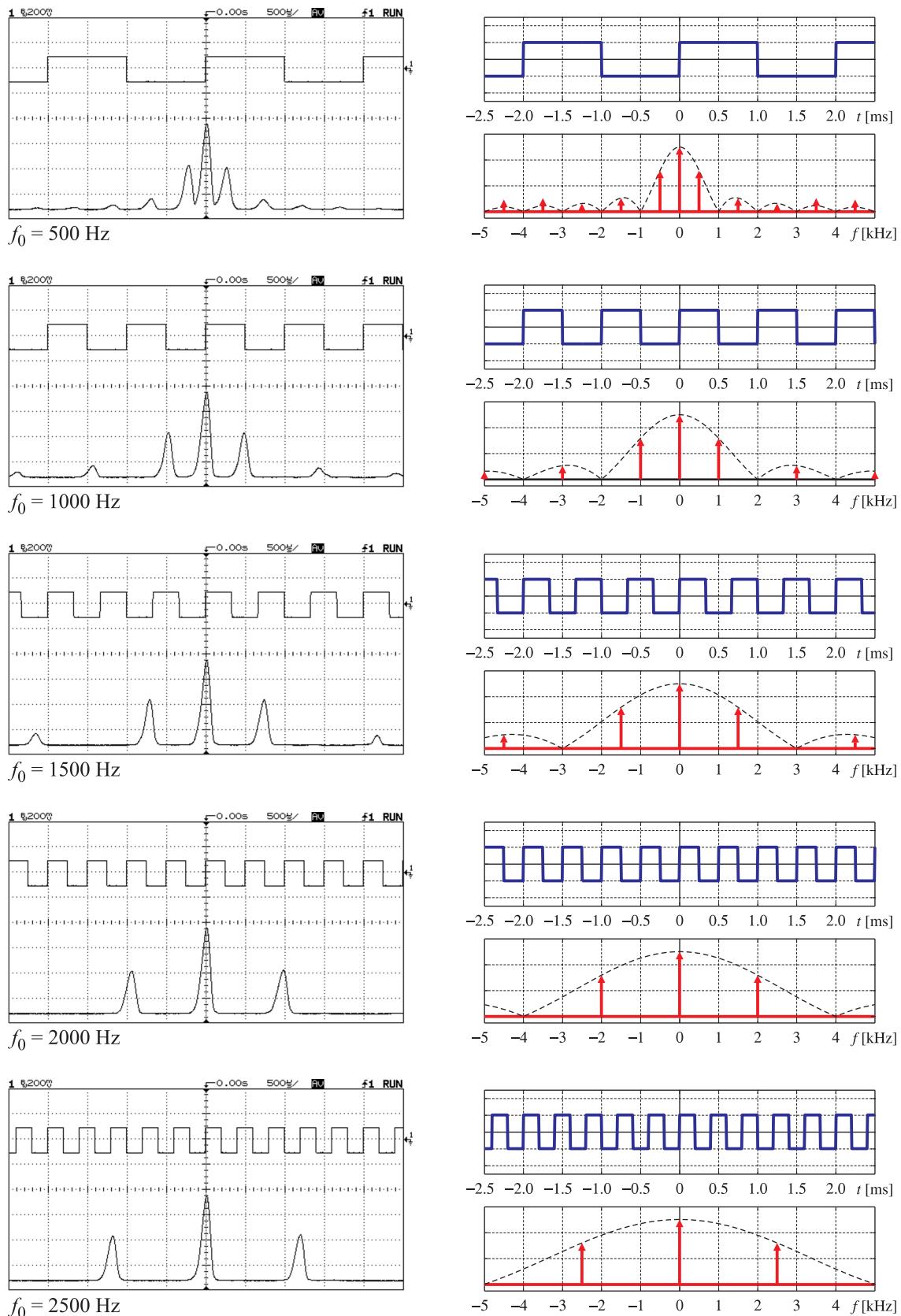


Fig. 2.B.15. Ondas cuadradas de distintas frecuencias y sus espectros.

En la Fig. 2.B.15 se comparan las formas de onda temporales y los espectros medidos y calculados de ondas cuadradas de diferentes frecuencias. Nuevamente, la similitud entre los resultados experimentales y los cálculos teóricos es notable, siempre teniendo en cuenta que los pulsos de ancho finito que aparecen en los espectros medidos en lugar de los impulsos teóricos se deben al ancho de banda del filtro de análisis del analizador.

En los espectros es evidente la presencia de componentes armónicas, y la separación relativa entre ellas indica la ausencia de las armónicas pares. Además, a medida que cambia la frecuencia fundamental de la señal, varía la ubicación de los picos pero la amplitud relativa se mantiene constante.

En las imágenes temporales la escala del eje de tiempos es de 0,5 ms/div, y en los espectros la escala del eje de frecuencias es de 1 kHz/div.

2.B.4.3. Espectro de una onda cuadrada con diferentes ciclos de trabajo

El espectro de una onda cuadrada $x_c(t)$ de período $T_0 = 1/f_0$ y ciclo de trabajo $d = \tau/T_0$ tiene la expresión indicada en la ecuación (2.B.11). Está formado por impulsos separados f_0 unidades de frecuencia, y su amplitud está modulada por una función tipo sinc(\cdot) que depende del ciclo de trabajo d .

En la Fig. 2.B.16 se muestran ondas cuadradas de período $T_0 = 0,1$ ms (frecuencia fundamental de $f_0 = 1/T_0 = 10$ kHz) con ciclos de trabajo comprendidos entre el 10 % y el 50 %, y sus espectros. En la columna de la izquierda se reportan las mediciones realizadas con un osciloscopio y el analizadorpectral de la Sección 2.B.3, y en la columna de la derecha se muestran las señales y sus espectros derivados analíticamente.

Los espectros medidos y teóricos tienen gran similitud, aunque en las gráficas del analizadorpectral los “impulsos” correspondientes a las distintas armónicas tienen un ancho finito, debido al ancho de banda del filtro de análisis del instrumento. Los equipos de mayor calidad tienen filtros de ancho de banda ajustable para mejorar la resolución frecuencial.

Las gráficas espectrales muestran la influencia del ciclo de trabajo d en la amplitud de los impulsos. Para valores de d pequeños la envolvente tipo sinc(\cdot) decae lentamente, y la amplitud de todos los “impulsos” es pequeña. A medida que aumenta el ciclo de trabajo, disminuye la relación de amplitud entre las armónicas adyacentes porque la envolvente decae más rápidamente, y cobran más importancia los armónicos de baja frecuencia. El ciclo de trabajo condiciona la aparición o no de algunas armónicas: para la señal con ciclo de trabajo de 50 % están ausentes las armónicas pares, y para las señales con ciclo de trabajo de 20 % y 40 % no se observan las armónicas de orden quinto, y sus múltiplos. A pesar que el analizadorpectral utilizado no es de muy buena calidad, se pueden detectar fácilmente armónicas de hasta de orden 12.

La escala del eje de tiempos es de 50 μ s/div, y la del eje de frecuencias de 24 kHz/div.

2.B.4.4. Espectro de un tren de tonos (ráfaga o “burst”)

Un tren de tonos o ráfaga $x_b(t)$ está formada por una onda senoidal o portadora $x_p(t)$ modulada por una onda cuadrada $x_c(t)$. Esta modulación puede pensarse como el producto de una onda senoidal de la frecuencia del tono por una onda cuadrada que fija la duración

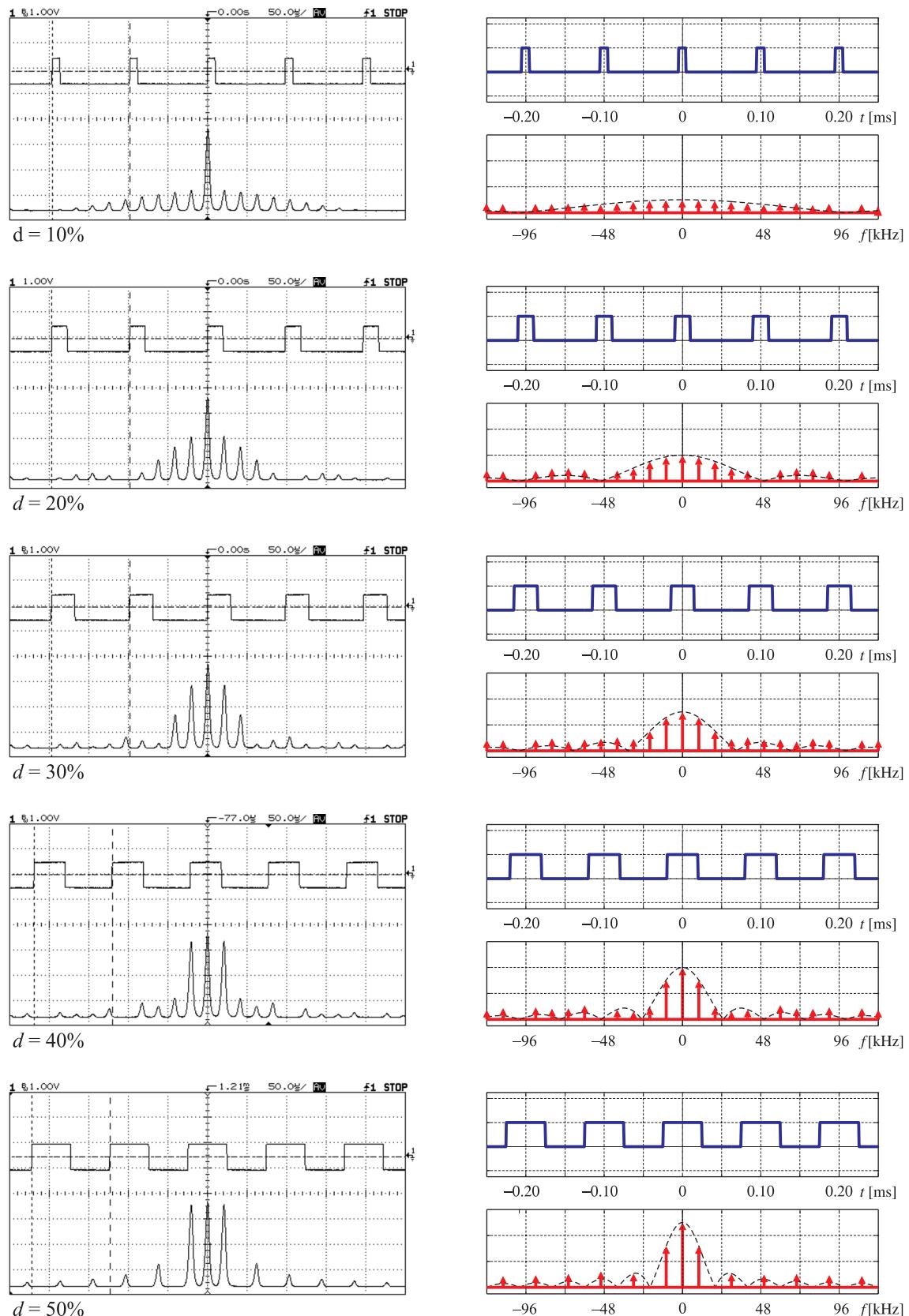


Fig. 2.B.16. Onda cuadrada de 10 kHz y su espectro, para distintos ciclos de trabajo.

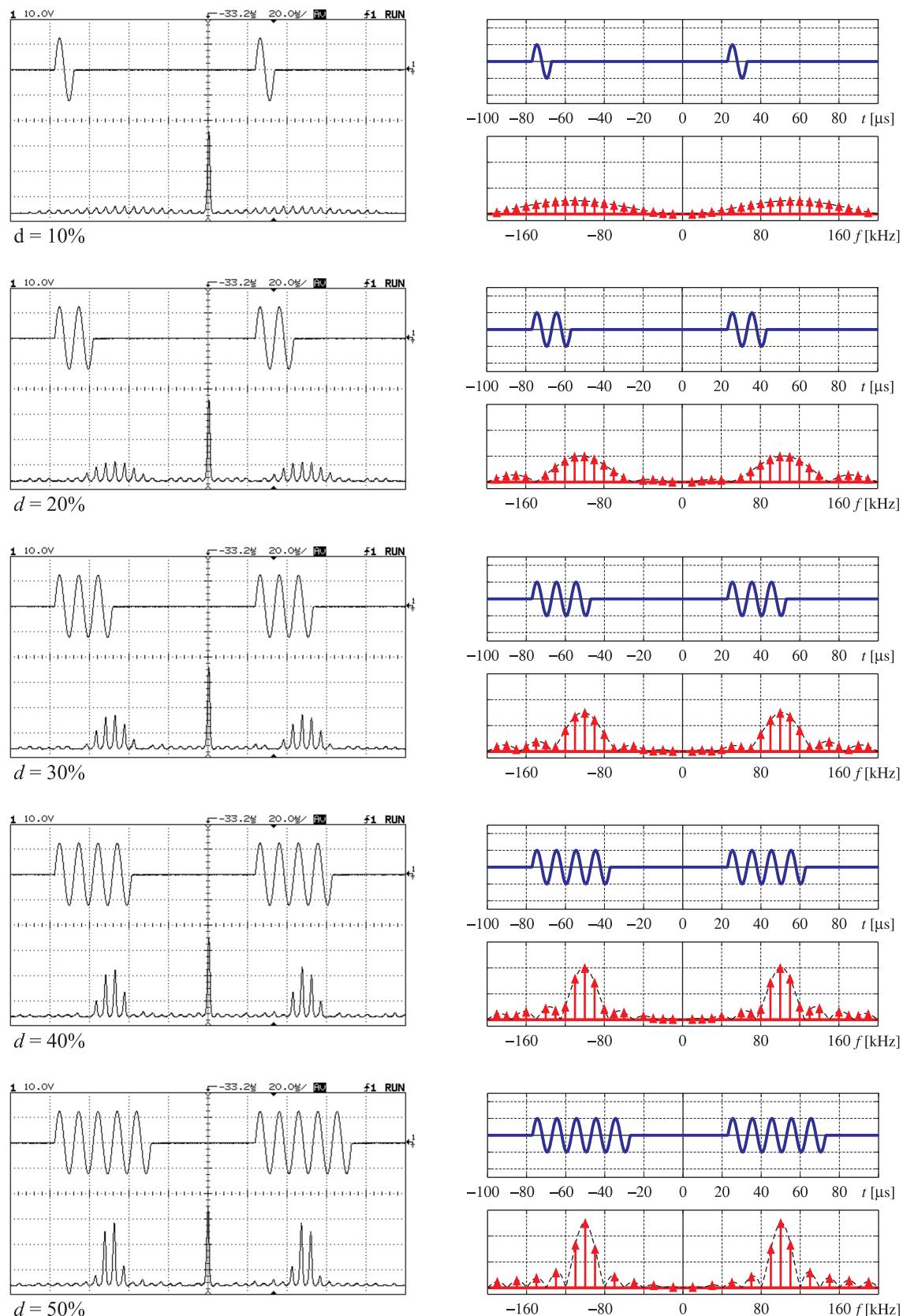


Fig. 2.B.17. Trenes de pulsos senoidales con distintos ciclos de trabajo y sus espectros.

y la tasa de repetición y por lo tanto, su espectro es la *convolución* de los espectros de la señal senoidal $x_p(t)$ y de la onda cuadrada $x_c(t)$. El espectro de la portadora $x_p(t) = A \cos(2\pi f_p t)$ es

$$X_p(f) = \frac{A}{2} \delta(f + f_p) + \frac{A}{2} \delta(f - f_p), \quad (2.B.12)$$

y el espectro de una señal cuadrada de período $T_0 = 1/f_0$ y ciclo de trabajo $d = \tau/T_0$ está dado por (2.B.11). Por lo tanto, si el tren de tonos $x_b(t)$ es $x_b(t) = x_c(t) \times x_p(t)$, su espectro será $X_b(f) = (X_c * X_p)(f)$, y según (2.B.11) y (2.B.12),

$$X_b(f) = \frac{A}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d \operatorname{sinc}(dk) [\delta(f - f_p - kf_0) + \delta(f + f_p - kf_0)].$$

El espectro es discreto, y su envolvente es la de dos $\operatorname{sinc}(\cdot)$, centradas en las frecuencias $\pm f_p$, respectivamente.

En la Fig. 2.B.17 se muestran diferentes trenes de tonos de $f_p = 100$ kHz, con duraciones desde $\tau = 10 \mu s$ hasta $\tau = 50 \mu s$. En este caso, la señal portadora tiene una frecuencia de $f_p = 100$ kHz y la onda cuadrada moduladora es de frecuencia de $f_0 = 1/T_0 = 10$ kHz, con ciclos de trabajo τ/T_0 que van del 10 % al 50 %.

En las figuras de la izquierda se observan dos trazos, que corresponden a la señal temporal (trazo superior), y el espectro del tren de tonos (trazo inferior). La escala del eje de tiempos es de $20 \mu s/\text{div}$, y la del eje de frecuencias de 40 kHz/div. El espectro de esta señal corresponde efectivamente a la convolución del espectro de una señal sinusoidal (un par de impulsos en ± 100 kHz) con el espectro de una señal cuadrada de 10 kHz (impulsos en las frecuencias múltiplos de 10 kHz, modulados por un $\operatorname{sinc}(\cdot)$ cuya amplitud y extensión depende del ciclo de trabajo de la onda cuadrada). De esta forma se pueden comprender algunos fenómenos que serían difíciles de interpretar a partir de una derivación puramente matemática. Por ejemplo, la ausencia de las armónicas pares de la onda cuadrada de 10 kHz para la señal con ciclo de trabajo de 50% (fila inferior). En la columna de la derecha de la Fig. 2.B.17 se muestra el módulo de los espectros calculados matemáticamente; la similitud entre ambos resultados es notoria.

La relación entre la frecuencia portadora y la moduladora puede obtenerse en base a la distancia entre las distintas armónicas y el pico correspondiente a 100 kHz. La frecuencia f_p de la moduladora es la mitad de la separación entre los picos del espectro. A medida que disminuye la duración de la ráfaga o el ciclo de trabajo de la señal moduladora $x_c(t)$, la envolvente de los pulsos disminuye en amplitud, pero se crecen las componentes de frecuencias superiores. La forma de la envolvente tipo $\operatorname{sinc}(\cdot)$ es evidente.

En los espectros, la falta de simetría de los impulsos vecinos a la frecuencia de la portadora de 100 kHz se explica por la influencia que las “colas” de uno de los $\operatorname{sinc}(\cdot)$ ejerce sobre el otro. En los espectros medidos la influencia es mayor porque los $\operatorname{sinc}(\cdot)$ se convolucionan con la respuesta impulsiva del filtro del analizador que tiene un ancho de banda finito.

2.B.4.5. Espectro de una suma de sinusoides

En este caso se muestra el espectro de una suma de sinusoides de diferente amplitud y frecuencia, tal como se aprecia en la Fig. 2.B.18. La traza superior muestra una señal de 5 kHz, con una amplitud de 1.562 Vpp (traza 1), a la que se suma una señal de 20 kHz, con

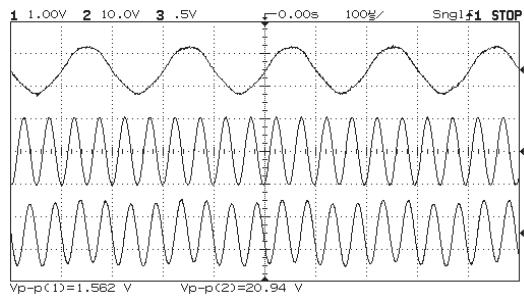


Fig. 2.B.18. Gráfica temporal de señales sinusoidales. Trazo 1: 1.562 Vpp, 5 kHz. Trazo 2: 20.94 Vpp, 20 kHz. Trazo 3: suma de las dos señales anteriores.

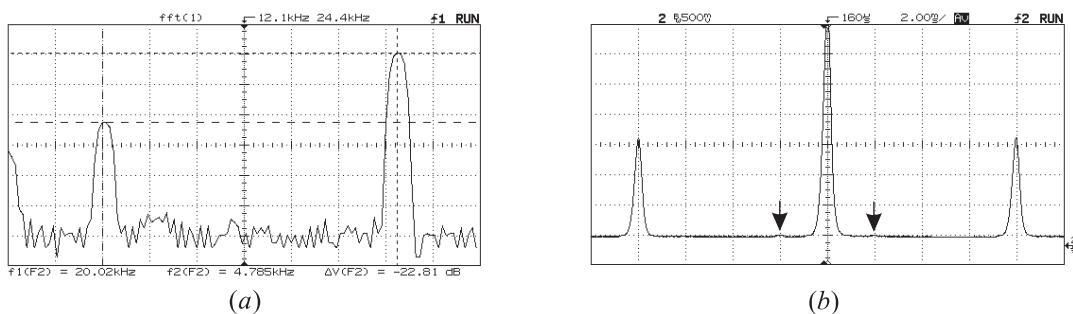


Fig. 2.B.19. Espectro de la suma de sinusoides de la Fig. 2.B.18: imagen de un espectrógrafo digital (a); imagen de un espectrógrafo analógico (b).

una amplitud de 20.94 Vpp (traza 2). El canal 3 muestra la suma de las dos señales; salvo por una ligera ondulación, en esta representación temporal es prácticamente imposible distinguir la componente de baja frecuencia.

En la Fig. 2.B.19(a) se aprecia el espectro de esta señal obtenido con un espectrógrafo digital. La amplitud de cada pico está relacionada con la potencia en dB de cada señal. La relación entre la amplitud de los picos es un poco más de 2 divisiones (22.81 dB, según el marcador), que equivale a una relación de amplitud de $20.98/1.562 = 13.42 (= 22.56 \text{ dB})$. En la parte inferior de la figura se observa la posición de los marcadores, que indican que los picos del espectro corresponden a frecuencias de 20.02 kHz y de 4.785 kHz.

En la Fig. 2.B.19(b) se muestra el mismo espectro, pero esta vez medido con un analizador analógico. El eje de frecuencias está calibrado a 5 kHz por división. Resalta el pico correspondiente a la señal de 20 kHz; sin embargo, es difícil detectar el tono de 5 kHz, que está ubicado en las posiciones indicadas con las flechas porque la relación entre las amplitudes se representa en forma lineal, aunque una observación atenta permite distinguir una ondulación de pequeña amplitud. De todos modos, este tono es indistinguible en la representación temporal de la figura de la Fig. 2.B.18.

2.B.4.6. Espectro de una señal modulada en amplitud por un tono

En el trazo superior de la Fig. 2.B.20(a) se muestra una señal de 10 kHz, que modula a una portadora de 100 kHz [trazo inferior de la Fig. 2.B.20(a)].

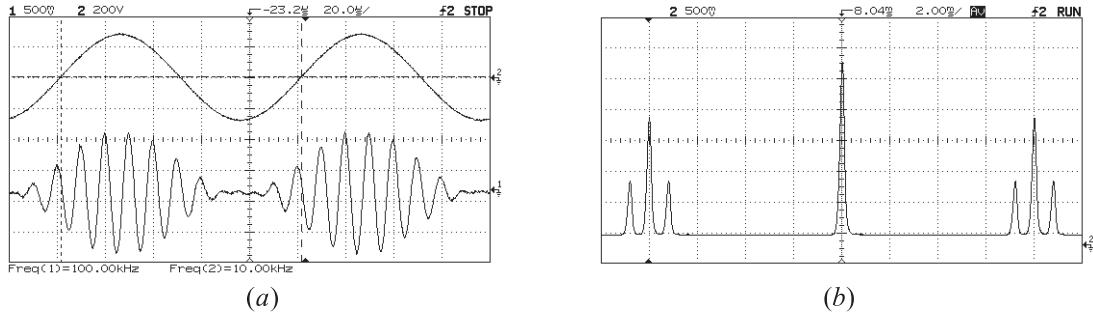


Fig. 2.B.20. Modulación con un tono. Señal moduladora (trazo superior) y señal modulada (trazo inferior) (a); espectro de la señal modulada (b).

Como se estudió en el Ejemplo 2.66, la señal modulada en amplitud $x_{MA}(t)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} x_{MA}(t) &= [1 + \mu \cos(2\pi f_m t)] A_p \cos(2\pi f_p t) \\ &= A_p \cos(2\pi f_p t) + \frac{1}{2}\mu A_p \cos[2\pi(f_p + f_m)t] + \frac{1}{2}\mu A_p \cos[2\pi(f_p - f_m)t]. \end{aligned}$$

y su espectro es

$$\begin{aligned} X_{MA}(f) = (X_m * X_p)(f) &= \frac{1}{2}A_p \delta(f - f_p) + \frac{1}{2}A_p \delta(f + f_p) + \\ &\quad \frac{\mu}{4}A_p \delta(f - f_p - f_m) + \frac{\mu}{4}A_p \delta(f - f_p + f_m) + \\ &\quad \frac{\mu}{4}A_p \delta(f + f_p - f_m) + \frac{\mu}{4}A_p \delta(f + f_p + f_m). \quad (2.B.13) \end{aligned}$$

La señal modulada se observa en la traza inferior de la Fig. 2.B.20(a). El espectro de esta señal se observa en la Fig. 2.B.20(b). Es claramente visible la componente de ±100 kHz, y las “bandas laterales” ubicadas en -110 kHz, -90 kHz, 90 kHz y 110 kHz. Nuevamente, el espectro medido en el analizador es muy similar al que resulta de la convolución de los espectros de dos señales sinusoidales, representado en la Fig. 2.90(f) (pág. 186). Es sencillo determinar el índice de modulación μ a partir del espectro, ya que de la ecuación (2.B.13) μ es el doble de la relación entre las amplitudes de las bandas laterales y de la portadora. En efecto, si la amplitud de la banda lateral es A_{BL} , y la de la portadora es A_p , resulta

$$\frac{A_{BL}}{A_p} = \frac{\frac{\mu}{4}A_p}{\frac{1}{2}A_p} = \frac{\mu}{2} \Rightarrow \mu = 2 \frac{A_{BL}}{A_p}.$$

Para el caso de la figura, $\mu \approx 0,88$.

2.B.4.7. Espectro de una señal modulada en amplitud por dos tonos

En la traza superior de la Fig. 2.B.21(a) se muestra una señal $x_3(t)$ que es la modulación de una sinusoides $x_2(t)$ de 10 kHz modulada por otra $x_1(t)$ de 1 kHz, respectivamente, la que a su vez se utiliza para modular una portadora $x_p(t)$ de frecuencia $f_p = 100$ kHz. Esta señal se aprecia en la traza inferior de la Fig. 2.B.21(a). Si $x_1(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t)$ y $x_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t)$, los espectros respectivos son

$$X_1(f) = \frac{A_1}{2} \delta(f + f_1) + \frac{A_1}{2} \delta(f - f_1), \quad X_2(f) = \frac{A_2}{2} \delta(f + f_2) + \frac{A_2}{2} \delta(f - f_2).$$

La señal $x_3(t)$ es la modulación de $x_2(t)$ por $x_1(t)$, es decir $x_3(t)$ es $x_3(t) = [1+k_1x_1(t)]x_2(t)$. Su espectro es $X_3(f) = (X_1*X_2)(f)$, donde

$$X_3(f) = \frac{A_2}{2} [\delta(f+f_2)+\delta(f-f_2)] + \frac{k_1 A_1 A_2}{4} [\delta(f+f_1+f_2)+\delta(f-f_1+f_2)+\delta(f+f_1-f_2)+\delta(f-f_1-f_2)]$$

La señal portadora $x_p(t) = A_3 \cos(2\pi f_3 t)$ tiene un espectro

$$X_p(f) = \frac{A_p}{2} \delta(f + f_p) + \frac{A_p}{2} \delta(f - f_p).$$

Si $x_4(t)$ es la señal que resulta de modular la portadora $x_p(t)$ con la señal $x_3(t)$, es decir

$$\begin{aligned} x_4(t) &= [1 + k_2 x_3(t)] x_p(t) = \{1 + k_2 [1 + k_1 x_1(t)] x_2(t)\} x_p(t) \\ &= [1 + k_2 x_2(t) + k_1 k_2 x_1(t) x_2(t)] x_p(t) \end{aligned}$$

su espectro $X_4(f)$ es

$$\begin{aligned} X_4(f) &= (X_p * X_3)(f) = (X_p * X_1 * X_2)(f) \\ &= \frac{A_p}{2} [\delta(f+f_2)+\delta(f-f_2)] + \frac{k_2 A_2 A_p}{4} [\delta(f+f_2+f_p)+\delta(f-f_2+f_p)+\delta(f+f_2-f_p)+\delta(f-f_2-f_p)] + \\ &\quad \frac{k_1 A_1 A_2 A_p}{8} [\delta(f+f_1+f_2+f_p)+\delta(f-f_1+f_2+f_p)] + \\ &\quad \frac{k_1 A_1 A_2 A_p}{8} [\delta(f+f_1-f_2+f_p)+\delta(f-f_1-f_2+f_p)] + \\ &\quad \frac{k_1 A_1 A_2 A_p}{8} [\delta(f+f_1+f_2-f_p)+\delta(f-f_1+f_2-f_p)] \\ &\quad \frac{k_1 A_1 A_2 A_p}{8} [\delta(f+f_1-f_2-f_p)+\delta(f-f_1-f_2-f_p)]. \end{aligned}$$

El gráfico de este espectro en un entorno de $f = f_p$ se muestra en la Fig. 2.B.21(b). La medición de laboratorio se muestra en la Fig. 2.B.21(c). Se observa la portadora de $f_p = 100$ kHz y las dos bandas laterales en $f_p \pm f_2 = 100 \pm 10$ kHz de la portadora, cada una de las cuales presenta tres picos, correspondientes a las componentes de la modulación de 1 kHz. El detalle alrededor de $f = f_p$ se muestra en la Fig. 2.B.21(d), donde se aprecia con más claridad el efecto de la modulación de la señal de 1 kHz.

Aunque la semejanza con los resultados teóricos de la Fig. 2.B.21(b) son notables, las mediciones de laboratorio muestran que el ancho de banda del filtro de frecuencia intermedia o de análisis dificulta la medición de espectros complejos como éste. En este caso sería deseable tener un filtro de análisis con un ancho de banda bastante menor a 1 kHz, que no está disponible en este analizador.

2.B.4.8. Espectro de una señal ASK

Una de las maneras más sencillas de transmitir información digital es utilizando una modulación de amplitud, representando el “1” lógico con un tono de una frecuencia determinada, y el “0” lógico con ausencia de señal. Este protocolo se conoce como ASK (*Amplitude Shift Keying* en inglés), y tiene buenas características para bajos volúmenes de tráfico.

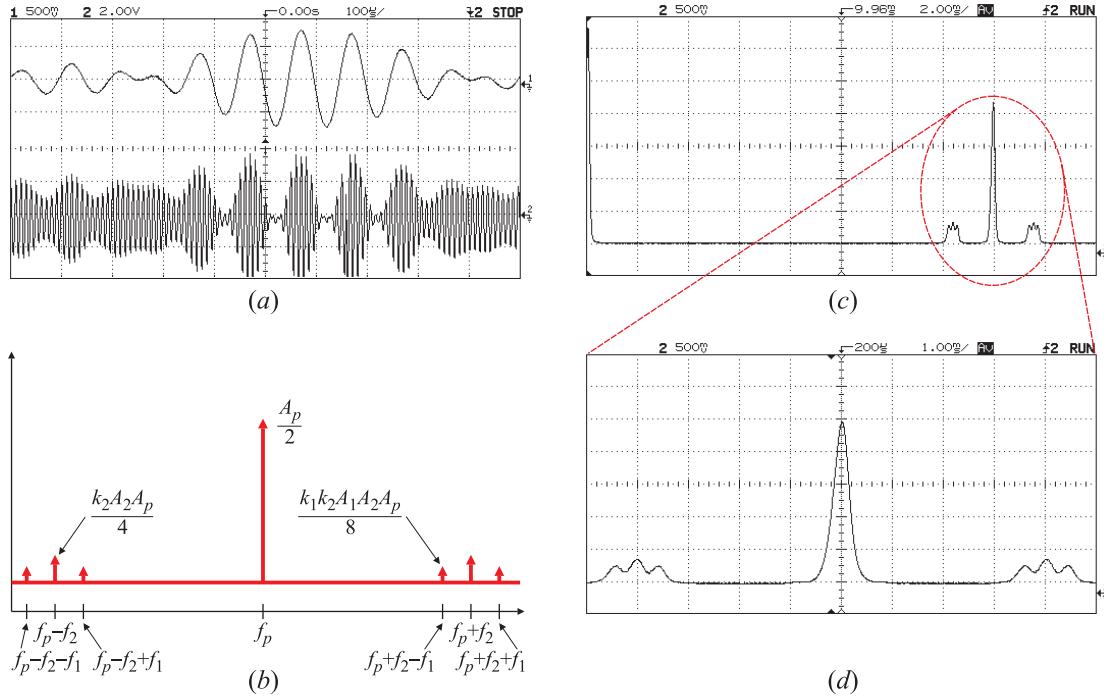


Fig. 2.B.21. Señal compuesta por 3 tonos: moduladora (traza superior) y modulada (traza inferior), (a); espectro teórico para un entorno de $f = f_p$ (b); espectro medido (c) y detalle para un entorno de $f = f_p$ (d).

Una aplicación típica son los modems por onda portadora utilizados, por ejemplo, para automatización hogareña, donde distintos dispositivos intercambian información a baja velocidad por el cableado de la línea eléctrica con el propósito de controlar de manera remota sistemas de iluminación, accionamientos, sensores, etc.

La señal ASK es muy similar al tren de tonos comentado en la Sección 2.B.4.4, y por lo tanto el espectro tiene las mismas características. En la Fig. 2.B.22(a) se muestra una portadora de 115.2 kHz modulada por una onda cuadrada de 300 Hz, y en la Fig. 2.B.22(d) una parte de su espectro en el rango de frecuencias comprendido entre 105 kHz y 125 kHz. Se distingue claramente la portadora, y las bandas laterales formadas por las armónicas de la señal de 300 Hz. Como el ciclo de trabajo de la moduladora es del 50 %, no se observan las armónicas pares; en la figura se aprecia la distinta separación entre la portadora y las primeras frecuencias laterales de 300 Hz, y entre los armónicos de la moduladora. La escala vertical es de 5 dB por división, y debido a la modulación con onda cuadrada los armónicos decaen muy lentamente, a razón de 2 dB/kHz, ocupando una porción significativa del espectro. En aplicaciones como la descripta más arriba, esto puede dar lugar a interferencias indeseadas con otros equipos, y para evitar inconvenientes las normas internacionales reglamentan el contenido espectral admisible para este tipo de señales.

Para disminuir la ocupación espectral se modifica ligeramente el flanco del pulso siguiendo un perfil tipo “coseno elevado”, como se observa en la Fig. 2.B.22(b). Esta figura es una captura de la pantalla del osciloscopio de la señal generada por un circuito integrado diseñado para implementar modems por onda portadora, el TDA5051A de Philips. El espectro medido se muestra en la Fig. 2.B.22(e), y se observa que la suavidad de los flan-

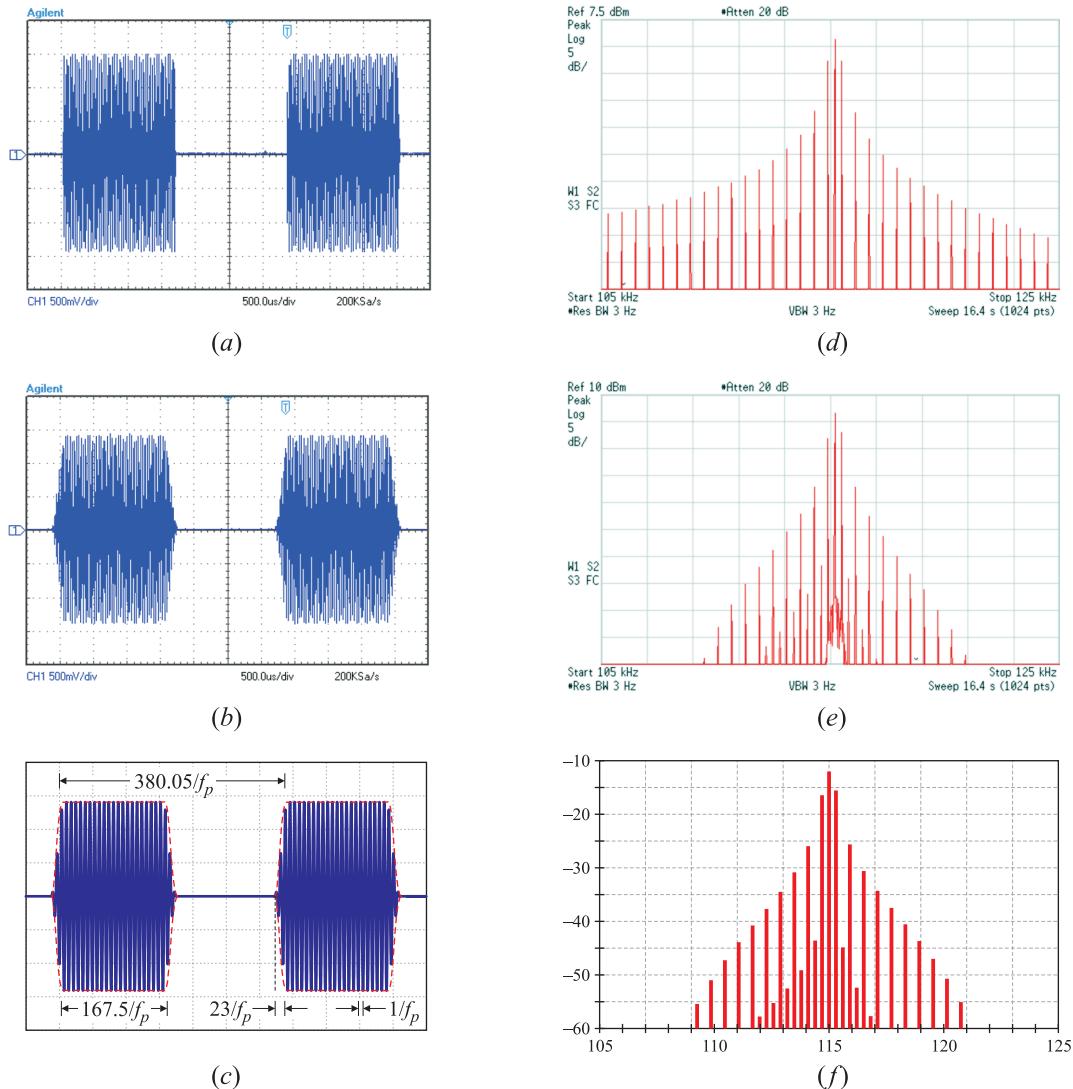


Fig. 2.B.22. Señales y espectros de un modem ASK. Forma de onda de una portadora sinusoidal modulada por una onda cuadrada (a) y su espectro (d). Mediciones de la señal ASK con flancos suavizados (b) y de su espectro (e), Detalles de la señal ASK generada por el TDA5051A (c) y el espectro calculado teóricamente (f).

cos del pulso hacen que las componentes frecuenciales a cada lado de la frecuencia de la portadora decaigan a razón de 10 dB/kHz, aproximadamente.

El espectro de esta señal también se puede calcular teóricamente. La envolvente del pulso puede escribirse como

$$x_m(t) = \begin{cases} \frac{A_m}{2} \left\{ 1 + \sin \left[\frac{\pi}{\Delta} \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\}, & \text{si } -\frac{\tau+\Delta}{2} < t < -\frac{\tau-\Delta}{2} \\ A_m, & \text{si } |t| < \frac{\tau-\Delta}{2}, \\ \frac{A_m}{2} \left\{ 1 - \sin \left[\frac{\pi}{\Delta} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\}, & \text{si } \frac{\tau-\Delta}{2} < t < \frac{\tau+\Delta}{2}, \end{cases}$$

donde Δ es el ancho del flanco, y τ la duración efectiva del pulso. El espectro de esta señal

se calculó en el Ejercicio 42, y está dado por

$$X_m(f) = \tau A_m \operatorname{sinc}(\tau f) \frac{\cos(\pi\Delta f)}{1 - 4\Delta^2 f^2}.$$

Si $x_m(t)$ modula una portadora del tipo $x_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$ cuyo espectro es $X_p(f) = A_p/2 \delta(f + f_p) + A_p/2 \delta(f - f_p)$, el espectro de $x(t) = x_m(t) \times x_p(t)$ resulta $X(f) = (X_m * X_p)(f)$, es decir

$$X(f) = \frac{\tau A_m A_p}{2} \operatorname{sinc}[\tau(f + f_p)] \frac{\cos[\pi\Delta(f + f_p)]}{1 - 4\Delta^2(f + f_p)^2} + \frac{\tau A_m A_p}{2} \operatorname{sinc}[\tau(f - f_p)] \frac{\cos[\pi\Delta(f - f_p)]}{1 - 4\Delta^2(f - f_p)^2}.$$

Finalmente, la señal $x_{\text{ASK}}(t)$ está formada por la repetición periódica de $x(t)$ cada $T_0 = 1/f_0$ segundos, es decir

$$x_{\text{ASK}}(t) = \sum_r x(t - rT_0)$$

y su espectro es

$$X_{\text{ASK}}(f) = \sum_k c_k \delta(f - kf_0),$$

donde

$$c_k = f_0 X(f)|_{f=kf_0}.$$

En el TDA5051A los valores de τ , Δ , y T están todos relacionados con la frecuencia f_p de la portadora:

$$\Delta = 23/f_p, \quad \tau = (167,5 + 23)/f_p, \quad T = 380,05/f_p$$

como se describe en la Fig. 2.B.22(c). La señal portadora deriva su frecuencia de un reloj a cristal, y es $f_p = 115,2$ kHz. Por lo tanto, los coeficientes c_k resultan

$$c_k = \frac{381 A_m A_p}{15202000} \cos\left(\frac{23\pi}{3800500} k\right) \left[\frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{381}{2} - \frac{381}{7601000} k\right)}{2116 \left(1 - \frac{k}{3800500}\right)^2 - 1} + \frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{381}{2} + \frac{381}{7601000} k\right)}{2116 \left(1 + \frac{k}{3800500}\right)^2 - 1} \right]$$

Estos coeficientes (expresados en dB) se representan en la Fig. 2.B.22(f), y es notoria la coincidencia con el espectro medido de la Fig. 2.B.22(e), aún para una señal tan compleja como ésta.

2.B.4.9. Espectro de un sinc periódico

El sinc periódico estudiado en el Ejemplo 2.64 se puede reproducir de manera experimental, ya que en el laboratorio se dispone de generadores de ondas arbitrarias que pueden generar este tipo de señales. En particular, el generador Rigol DG4062 genera un sinc periódico como se muestra en la Fig. 2.B.23(a) cuyo lóbulo principal tiene una duración de $1/32$ del período. Si la frecuencia de la señal es $f_0 = 1/T_0 = 1$ kHz, el ancho del lóbulo principal es de $1/(32 \text{ kHz}) = 31,2 \mu\text{s}$, como se observa en la Fig. 2.B.23(b). El espectro, que se muestra en la Fig. 2.B.23(c), se extiende entre ± 32 kHz (en la pantalla del analizador se observa sólo el eje de frecuencias positivas), y se pueden contar 32 “palitos” (a la derecha del eje $f = 0$) que están separados 1 kHz entre sí.

Como en los ejemplos anteriores, es notable la similitud entre los resultados teóricos que se muestran en la Fig. 2.87(f) de la pág. 178 con los resultados experimentales de la Fig. 2.B.23(c).

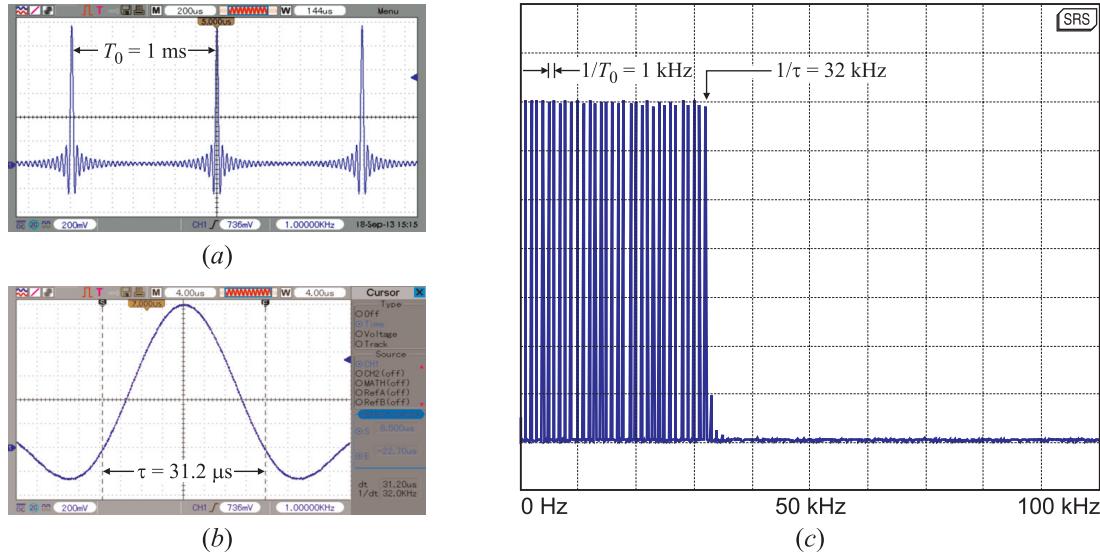


Fig. 2.B.23. Mediciones del sinc periódico (a), detalle del lóbulo principal (b) y su espectro (c).

2.B.4.10. Espectro de una senoidal modulada por un sinc periódico

El espectro de esta señal, bastante compleja, se estudió en el Ejemplo 2.67. La señal también se puede sintetizar con los generadores de ondas arbitrarias disponibles en el laboratorio. En este caso, se utilizó un generador Rigol DG4062 utilizando como señal moduladora el mismo sinc periódico de la sección anterior, con un ancho de banda de $\pm 32 \text{ kHz}$, y una frecuencia de repetición de 1 kHz . Esta señal se observa en el trazo superior de las imágenes de la pantalla del osciloscopio capturadas en las Figs. 2.B.24(a) y (b). La

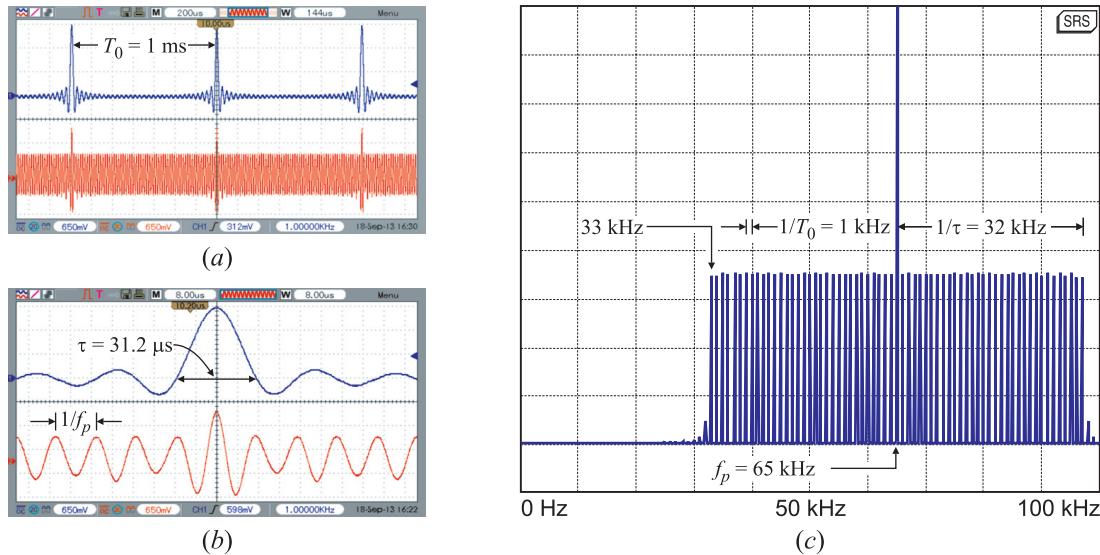


Fig. 2.B.24. Mediciones del sinc periódico modulado (a), detalle (b) y su espectro (c).

portadora es una señal de frecuencia $f_p = 65$ kHz. La señal modulada $x_{MA}(t)$ se muestra en el trazo inferior de las mismas figuras.

El espectro de esta señal para el eje de frecuencias positivo se representa en la Figs. 2.B.24(c). Se aprecia que la señal tiene un ancho de banda de ± 32 kHz, centrado en la frecuencia de la portadora $f_p = 65$ kHz, y que está formada por impulsos separados entre sí 1 kHz, tal como se desprende del análisis teórico. Nuevamente, la concordancia de los resultados teóricos, representados en la Fig. 2.91 de la pág. 187 con los experimentales, representados en la Fig. 2.B.24 pone de relieve la importancia de las técnicas del análisis frecuencial para el estudio de señales y sistemas.

2.B.4.11. Espectro de una señal modulada en frecuencia

Los generadores del laboratorio son capaces de generar señales moduladas en frecuencia por distintas formas de onda. En estos experimentos la frecuencia de la portadora es $f_p = 50$ kHz, y la moduladora es una señal senoidal de frecuencia $f_m = 5$ kHz. También es posible ajustar el desvío Δf , lo que permite generar modulaciones de banda angosta y de banda ancha, como se explicó en la Sección 2.9.2. En la Fig. 2.B.25(a) se muestra la evolución temporal de una señal modulada en frecuencia con un desvío $\Delta f = 500$ Hz; para que se noten las pequeñas variaciones en frecuencia se incrementó la persistencia de la pantalla del osciloscopio. El desvío corresponde a un índice de modulación $\beta = \Delta f/f_m = 0,1$, de modo que la modulación es de banda angosta. El espectro de esta señal medido con un analizador espectral se muestra en la Fig. 2.B.25(b), y el espectro “teórico” calculado con la expresión (2.170) se grafica en la Fig. 2.B.25(c). Estas dos figuras confirman que la modulación de frecuencia de banda angosta tiene prácticamente el mismo espectro que una señal modulada en ampliud.

La forma de onda temporal de la Fig. 2.B.25(d) corresponde una modulación de frecuencia de banda ancha con un desvío $\Delta f = 10$ kHz, es decir, un índice de modulación $\beta = \Delta f/f_m = 2$. Aunque las variaciones de frecuencia instantánea son mayores que para el caso de banda angosta representado en la Fig. 2.B.25(a), es muy difícil percibir estas diferencias en base a las formas de onda temporales. El espectro de esta señal medido con un analizador espectral se muestra en la Fig. 2.B.25(e), y el calculado con la ecuación (2.175) en la Fig. 2.B.25(f). Estas dos figuras muestran que el ancho de banda ocupado por la señal modulada es indudablemente mayor que para modulaciones con desvíos (o índices de modulación) pequeños. También se aprecia cómo varía la amplitud de la portadora cuando el índice de modulación β pasa de $\beta = 0,1$, en la Fig. 2.B.25(b), a $\beta = 2$ en la Fig. 2.B.25(e). El mismo comportamiento se observa en los espectros calculados en base a las ecuaciones derivadas en las Secciones 2.9.2.1 y 2.9.2.2, respectivamente.

Al igual que en todos los casos anteriores es notoria la coincidencia de los espectros medidos con los obtenidos en base a los desarrollos teóricos.

2.B.4.12. Estudio de generadores de señales senoidales

El análisis espectral es útil para analizar la calidad de generadores de señales sinusoidales, como los que se utilizan en los laboratorios de electrónica. Estos generadores se construyen de distintas maneras; los más antiguos se basan en osciladores tipo puente de Wien, Colpitts, etc. Algunos más modernos y de bajo costo generan la señal senoidal a partir

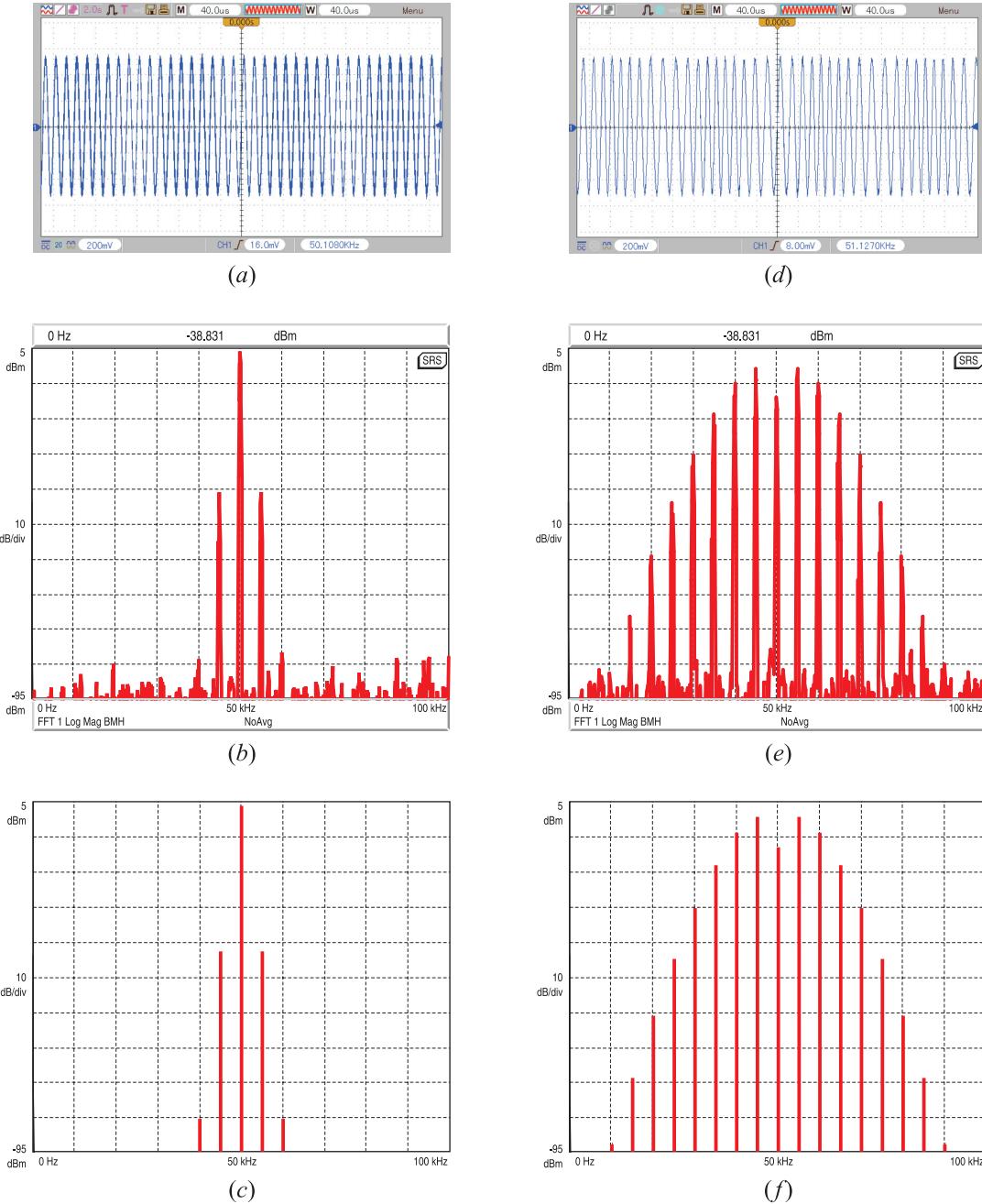


Fig. 2.B.25. Señal temporales y espectros medidos y calculados teóricamente, de una señal modulada en frecuencia por una moduladora senoidal de frecuencia $f_m = 5 \text{ kHz}$ y una portadora de frecuencia $f_p = 50 \text{ kHz}$, con un desvío $\Delta f = 0,5 \text{ kHz}$ ($\beta = 0,1$) (a)-(c) y $\Delta f = 10 \text{ kHz}$ ($\beta = 2$) (d)-(f).

de la deformación de una onda triangular con circuitos de diodos o transistores; la onda triangular se obtiene por integración de la onda cuadrada generada por un oscilador de relajación, basado en la comparación de la carga y descarga de un circuito RC. Cuando se necesita mayor precisión de frecuencia se usan lazos de enganche de fase. Otros generadores sintetizan la señal sinusoidal a partir de muestras almacenadas en una memoria que

se recorre a una velocidad proporcional a la frecuencia de operación.

Cada uno de los métodos de generación tienen sus ventajas e inconvenientes. Por ejemplo, los generadores basados en osciladores tipo puente de Wien o Colpitts exhiben componentes armónicas debido al mecanismo de control de amplitud; lo mismo ocurre con los generadores en que la señal de salida se obtiene a partir del recorte de una onda triangular. En los generadores de lazo de enganche de fase pueden aparecer componentes no armónicas debido a la intermodulación de los distintos osciladores, etc.

En la Fig. 2.B.26 se muestran algunos de los generadores de señales disponibles en los distintos laboratorios. Para cada modelo se grafica la forma de onda temporal y el espectro de dicha señal. En todos los casos se ha seleccionado una señal de salida sinusoidal con una amplitud aproximada de 10 V pico a pico. Si bien hay algunas pequeñas diferencias entre las distintas formas de onda, es muy difícil deducir la distorsión presente en cada una de ellas a partir de la representación temporal, y menos aún medirla. En cambio, el espectro revela no sólo el nivel de distorsión, sino que también brinda indicios del principio de funcionamiento o compromisos de diseño del generador.

Todos los generadores presentados en la primera parte de la Fig. 2.B.26 (en la página 327) generan la onda senoidal a partir del recorte de una onda triangular. Esto se pone de evidencia en los gráficos de los espectros, que exhiben armónicas importantes (los “picos” ubicados en los múltiplos de 10 kHz), ya que es difícil generar una sinusoidal perfecta utilizando esta técnica. En particular, en la forma de onda temporal del generador Goldstar GF2002C de la Fig. 2.B.26(e) se puede apreciar un pequeño quiebre en el segundo pico de la señal. En el espectro aparecen además tanto las armónicas pares como impares, lo que indica una falta de simetría de la forma de onda.

El resto del espectro es indicativo del nivel de ruido presente a la salida. El generador GW GFG8015 de la Fig. 2.B.26(b) es uno de los que tiene menor piso de ruido, mientras que en el Krohn-Hite 1200A de la Fig. 2.B.26(a) el nivel de ruido es superior. Una comparación detallada de estos dos espectros revela otra característica interesante: mientras el ruido del generador GW GFG8015C es prácticamente plano, en función de la frecuencia, en el generador Krohn-Hite 1200A este piso de ruido se incrementa en cercanías de la frecuencia fundamental. Este efecto se debe a pequeñas variaciones en la frecuencia del oscilador, como también se pone de manifiesto en el mayor ancho de las armónicas de 10 kHz.

También es interesante el espectro del generador BK Precision 2030 [Fig. 2.B.26(c)], y el del Goldstar GF2002C [Fig. 2.B.26(e)] ya que presentan gran cantidad de componentes de menor amplitud y frecuencia entre las armónicas de 10 kHz. Para el generador BK Precision 2030 de la Fig. 2.B.26(c) estas componentes espaciadas aproximadamente 1 kHz pueden deberse a fugas del oscilador utilizado para generar modulación de amplitud. En el caso de generador Goldstar, que cuenta con una pantalla digital para indicar la frecuencia de la señal, podría deberse a los relojes de la lógica digital del frecuencímetro.

El generador Topward GF8140 la Fig. 2.B.26(d) tiene picos por sobre el piso de ruido, ubicados en los 40 kHz, 50 kHz y 90 kHz, como así también algunas componentes de frecuencias espurias entre las armónicas de 10 kHz.

En conclusión, de este lote de generadores el que tiene mejor desempeño respecto al nivel de ruido es el GW GFG 8015C de la Fig. 2.B.26(b), aunque tiene algunas componentes armónicas de amplitud importante.

En la continuación de la Fig. 2.B.26 (en la página 328) se muestra el desempeño de otro

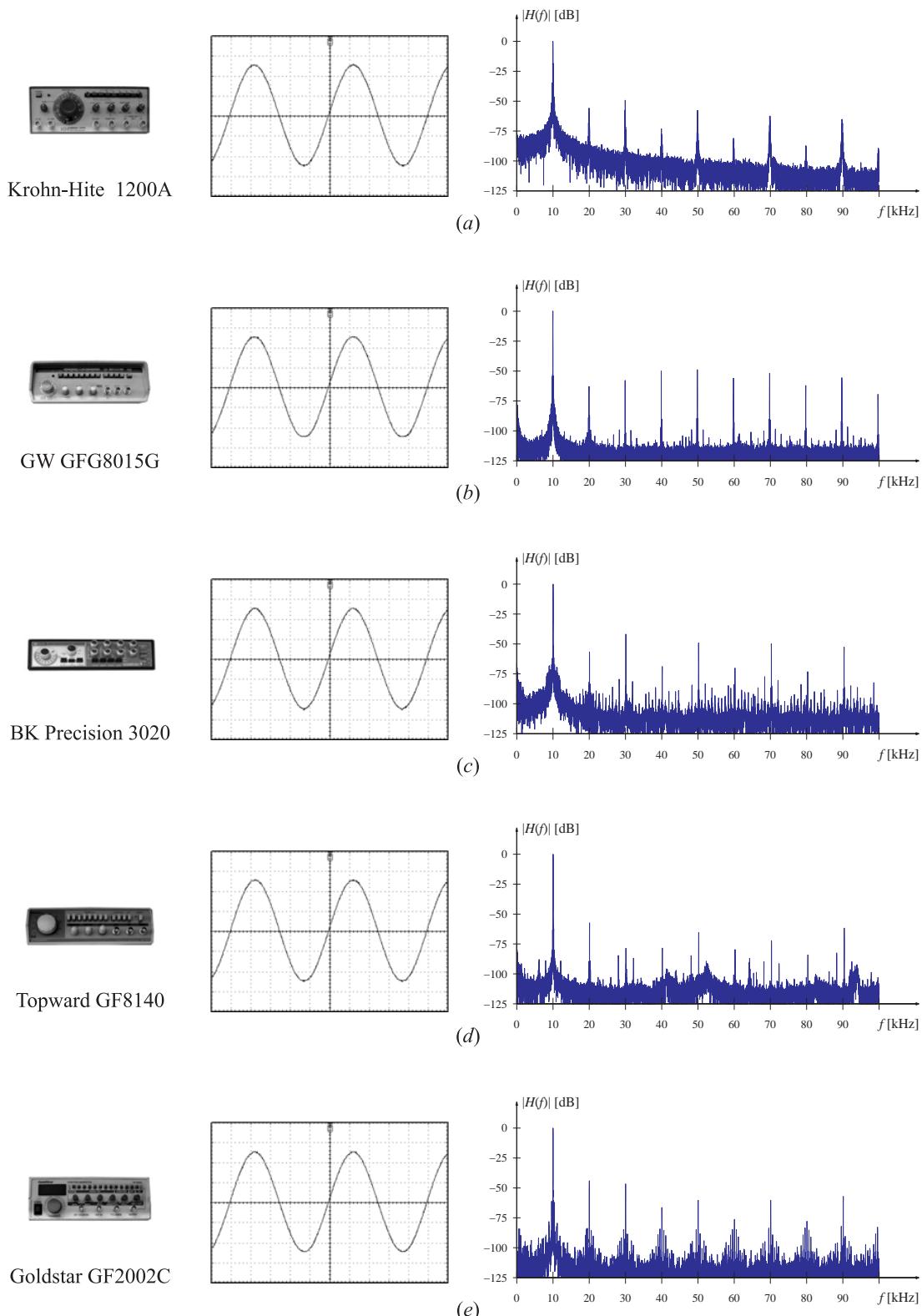


Fig. 2.B.26. Algunos generadores comerciales, ajustados para una señal de salida senoidal de 10 kHz, mostrando la forma de onda temporal y su espectro.

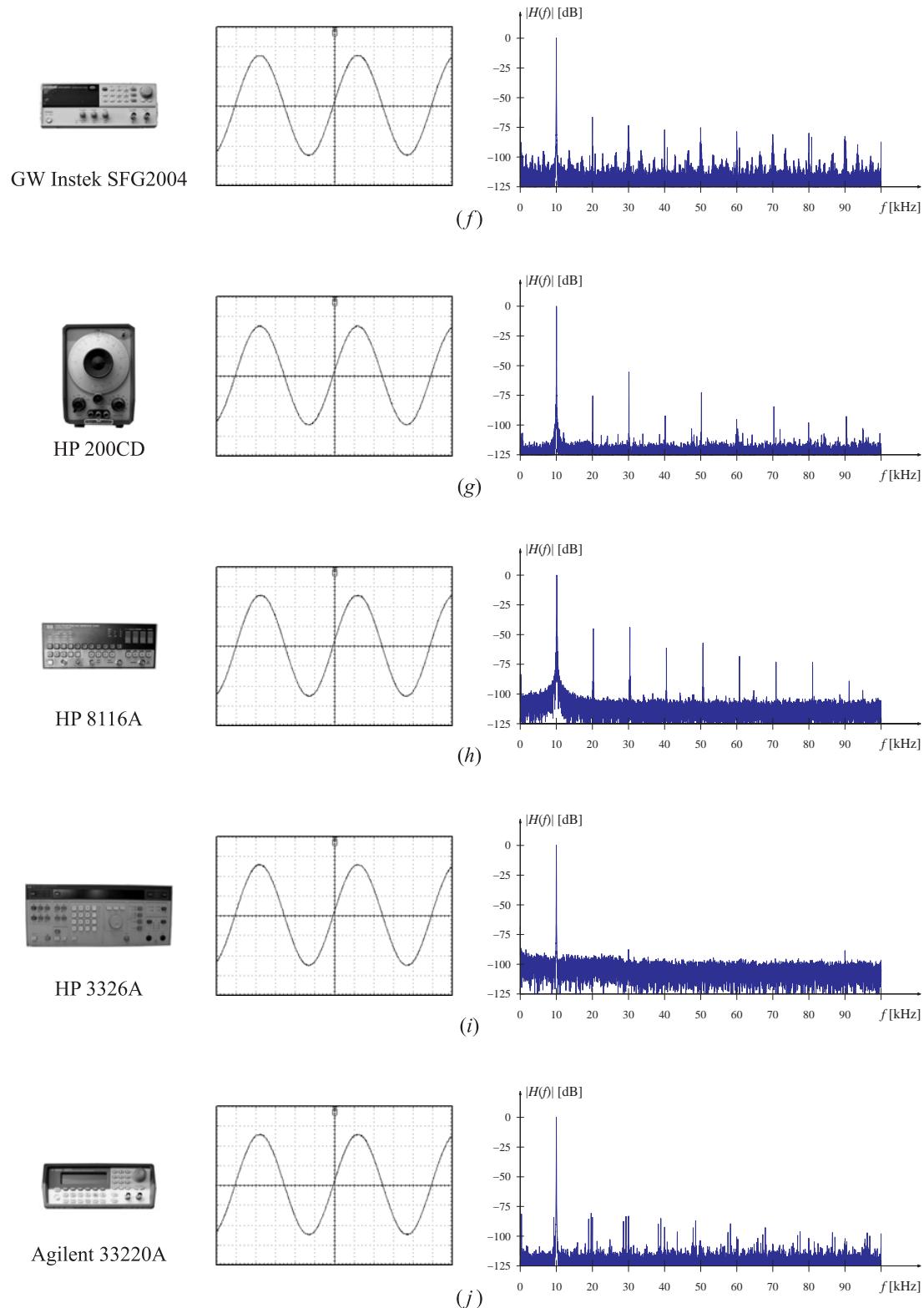


Fig. 2.B.26 (continuación).

conjunto de generadores de señales. Con la excepción del generador Hewlett-Packard 200 CD la Fig. 2.B.26(g), los demás son equipos mucho más avanzados y elaborados que los listados en la página 327: su funcionamiento está basado en la síntesis digital de frecuencia, y por lo tanto son muy estables en el tiempo. Además tienen mayor pureza espectral (menor cantidad de componentes frecuenciales fuera de las armónicas) o armónicas de menor amplitud. En particular, éste es el caso del generador GW Instek SFG 2004, que si bien tiene un nivel de ruido importante, las armónicas de la fundamental tienen amplitudes relativas cercanas a -75 dB. Sin embargo, hay algunas componentes de frecuencias extrañas, por ejemplo cerca de los 45 kHz y cerca de los 65 kHz.

Un generador interesante es el Hewlett Packard 200CD en la Fig. 2.B.26(g). Este es un equipo valvular, de alrededor de 1952, basado en un oscilador tipo puente de Wien. Se destaca por su bajo nivel de ruido, y armónicas de pequeña amplitud, que se ocasionan en el sistema de control de amplitud. Por otra parte, las líneas espectrales muy angostas revelan una buena estabilidad en frecuencia, comparado, por ejemplo, con el generador Krohn-Hite la Fig. 2.B.26(a). Es notable que un instrumento de esta antigüedad conserve un nivel de desempeño tan destacado, lo que es indicativo de la calidad de su construcción.

El generador Hewlett Packard 8116A la Fig. 2.B.26(h) es de mediados de la década del 70. Es uno de los primeros generadores sintetizados programable. Si bien el espectro muestra unas componentes armónicas de amplitud importante, el piso de ruido es más uniforme, aunque no necesariamente menor, que los generadores listados en la página 327.

En la Fig. 2.B.26(i) se muestra el desempeño del generador Hewlett Packard 3326A. También es un equipo de la década del 70, y en realidad consta de un par de generadores acoplados que se pueden barrer simultáneamente manteniendo constante una diferencia de frecuencia, o variar con extremada precisión la fase de una de las salidas respecto de la otra. Si bien tiene un piso de ruido no menor, de alrededor de los -100 dB, es el generador de mayor pureza espectral, y casi no se observan armónicas de la señal.

El generador Agilent 33220A, que se muestra en la Fig. 2.B.26(j) es el más moderno de todos los presentados, de mediados de la década del 80. Es un generador sintetizado con muy bajo nivel de ruido, aunque tiene algunas componentes frecuenciales espurias, además de las armónicas de la señal, pero de muy pequeño nivel.

Para facilitar la comparación de los distintos generadores se calculó la distorsión y el nivel de ruido de la salida. Aunque en los gráficos de los espectros es sencillo distinguir qué es ruido y qué es distorsión, algorítmicamente esto es un poco más complejo. Por simplicidad se calculó la distorsión en base a la contribución de los armónicos de la frecuencia fundamental. El índice d de distorsión armónica, también conocido como distorsión armónica total (DAT), se define como

$$d = \frac{x_{ef} - y_{ef}}{x_{ef}},$$

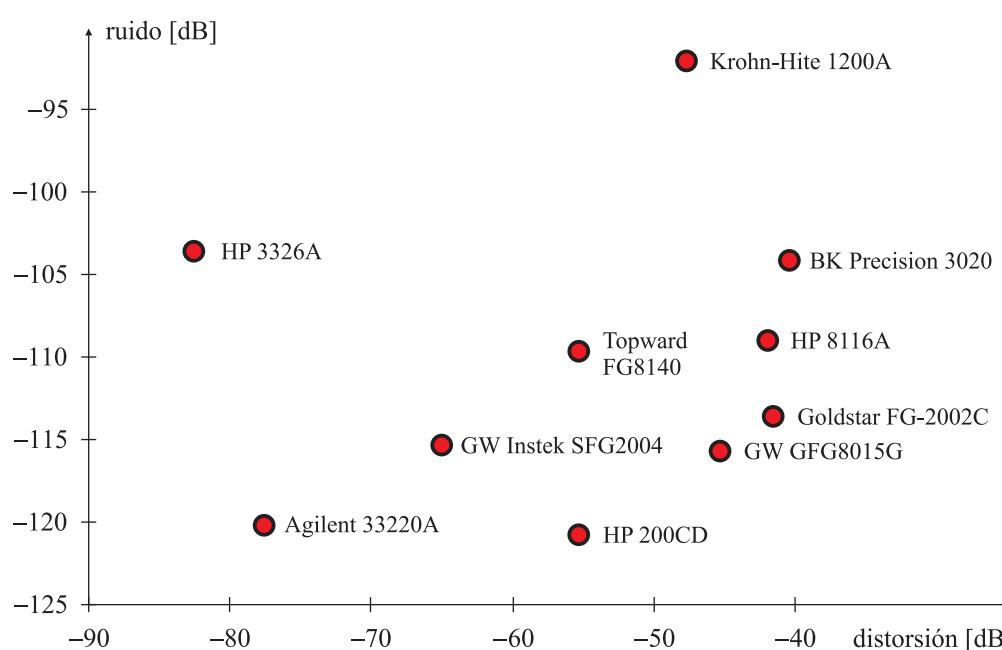
donde x_{ef} es el valor eficaz de la señal pura e y_{ef} el valor eficaz de la señal con distorsión. Para el caso de señales sinusoidales donde la distorsión está generada únicamente por los armónicos de la señal. Usando la identidad de Parseval se puede escribir este índice como

$$d = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{c_k}{c_1} \right|^2}$$

donde los c_k son los coeficientes de Fourier de la señal, y se ha despreciado la contribu-

Tabla 2.B.1. Características distintivas de algunos generadores de señales.

Generador	Tipo	Rango	Distorsión %	dB	Ruido dB
Krohn-Hite 1200A	recorte	0.200 Hz a 3.0 MHz	0,412	-47,70	-91,87
GW GFG8015G	recorte	0.200 Hz a 2.0 MHz	0,536	-45,41	-115,64
BK Precision 3020	recorte	0.020 Hz a 2.0 MHz	0,955	-40,40	-104,09
Topward G8149	recorte	0.100 Hz a 10.0 MHz	0,170	-55,39	-109,58
Goldstar FG2002C	recorte	0.020 Hz a 2.0 MHz	0,823	-41,70	-113,58
GW Instek SFG2004	sintetizado	0.100 Hz a 4.0 MHz	0,055	-65,14	-115,24
Hewlett Packard 200CD	puente	5.000 Hz a 0.6 MHz	0,169	-55,42	-120,72
Hewlett Packard 8116A	sintetizado	0.001 Hz a 50.0 MHz	0,785	-42,10	-108,96
Hewlett Packard 3326A	sintetizado	0.001 Hz a 13.0 MHz	0,007	-82,67	-103,44
Agilent 33220A	sintetizado	1.000 μ Hz a 20.0 MHz	0,013	-77,69	-120,14

**Fig. 2.B.27.** Caracterización de los generadores en función del nivel de ruido y del índice de distorsión. Los "mejores generadores" son los ubicados en el extremo inferior izquierdo del gráfico.

ción del armónico c_0 que es el nivel de continua o valor medio de la señal. Esta última expresión permite calcular el índice de distorsión directamente a partir de los gráficos de la Fig. 2.B.26, ya que cada uno de los armónicos observados es la expresión en dB del cociente $|c_k/c_1|$.

El piso de ruido se calculó en base al promedio del resto de las componentes del espectro.

La Tabla 2.B.1 resume los cálculos del valor de distorsión d (en porcentaje y en dB) y el piso de ruido de cada generador. Estos mismos resultados se sintetizan en la Fig. 2.B.27. En esta figura, los generadores con menor nivel de ruido y menor distorsión se ubican en el extremo inferior izquierdo del gráfico. Se evidencian los generadores Hewlett Packard 200CD [Fig. 2.B.26(g)] y Agilent 33220A [Fig. 2.B.26(j)] como aquellos con menor nivel de ruido, y el Hewlett Packard 3326A [Fig. 2.B.26(i)] como el generador con menor nivel de distorsión. Por otra parte, los generadores Krohn-Hite 1200A [Fig. 2.B.26(a)] y BK Precision 3020 [Fig. 2.B.26(c)] son los que tienen desempeño más pobre.

Las mediciones: Los espectros de la Fig. 2.B.26 se calcularon muestreando la señal temporal con una tarjeta adquisidora Agilent U2353 de 16 bits de resolución, con una frecuencia de muestreo de 500 kHz. Los datos fueron ponderados con una ventana de von Hann, y el espectro calculado con una transformada rápida de Fourier de 65536 puntos. Los detalles de esta técnica de medición se estudiarán más adelante.

2.B.5. Bibliografía

1. Agilent Technologies, *Spectrum Analysis Basics*, Application Note AN150 (HP publication number 5952-0292), Nov. 1, 1989.
2. Agilent Technologies, *The Fundamentals of Signal Analysis*, Application Note AN243 (HP publication number 5952-8898E), 2000.
3. Brown, C. *Spectrum Analysis Basics*, 1998 Back to Basics Seminar, Hewlett-Packard Co., 1998.
4. Papoulis, A. *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw Hill, 1962.
5. Randall, R. B. *Application of B&K Equipment to Frequency Analysis*, Brüel & Käer, Naerum, Dinamarca, 1977.

Apéndice 2.C

Demostración experimental del efecto Gibbs

El enfoque de la Sección 2.8, que considera la expresión de las sumas parciales como resultado de filtrar una onda cuadrada $x(t)$ con un filtro pasabajos (Fig. 2.99) puede reproducirse experimentalmente utilizando un filtro real. La Fig. 2.C.1 muestra el esquema de la experiencia de laboratorio. El filtro es un pasabajos elíptico de orden 8, con ganancia unitaria y una ondulación de 0,1 dB en la banda de paso, y una atenuación mayor a 50 dB en la banda de rechazo, cuya frecuencia de corte puede ajustarse entre 44 Hz y 22 kHz. La experiencia consiste en excitar el sistema con una onda cuadrada de período $T_0 = 10$ ms (frecuencia fundamental $f_0 = 1/T_0 = 100$ Hz), y observar la salida del filtro para distintas frecuencias de corte f_c del filtro pasabajos.

Los resultados del experimento se resumen en la Fig. 2.C.2. En la Fig. 2.C.2(a) se representa la onda cuadrada $x(t)$ que es la entrada al sistema; la escala de tensión es de 400 mV/div, y la escala temporal es de 1 ms/div. En la Fig. 2.C.2(f) se grafica el espectro de esta señal, obtenido con un analizador espectral. La escala de amplitud es de 5 dB/div, y el eje de frecuencias se extiende desde 0 Hz hasta 4.88 kHz. Como la escala vertical es logarítmica no se distingue la envolvente tipo sinc (\cdot) típica de las componentes frecuenciales de la onda cuadrada. Además, como la señal $x(t)$ tiene simetría de media onda, no aparecen las armónicas pares. En el espectro se observan componentes armónicas de hasta 4.7 kHz, es decir se puede detectar hasta la 47ma armónica de la frecuencia fundamental $f_0 = 100$ Hz.

Las Figs. 2.C.2(b), (g) y (k) muestran la forma de onda de salida, el espectro y la respuesta impulsiva del filtro cuando la frecuencia de corte se ajusta en $f_c = 600$ Hz. La Fig. 2.C.2(b) revela que la forma de onda de salida presenta un sobrepico del 17 % de la amplitud de la señal de entrada. El filtro anula las componentes frecuenciales superiores a la 5ta armó-

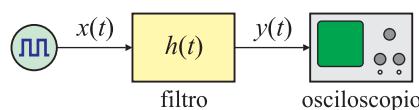


Fig. 2.C.1. Demostración experimental del efecto Gibbs.

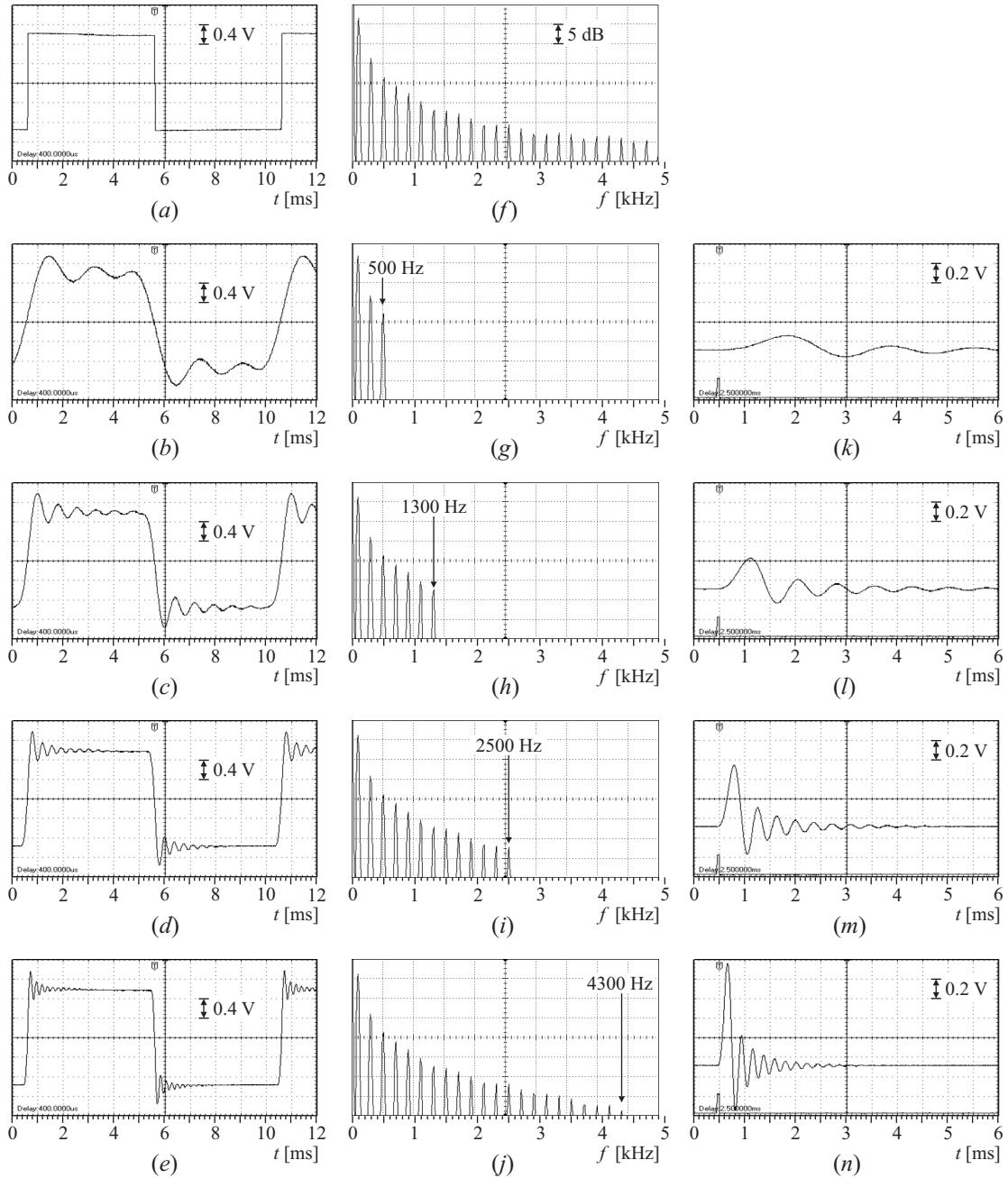


Fig. 2.C.2. Efecto Gibbs en un filtro pasabajas. Señal de excitación $x(t)$ (a) y su espectro $X(f)$ (f). Señal de salida $y(t)$, espectro $Y(f)$ y respuesta impulsiva $h(t)$ para el filtro con frecuencia de corte $f_c = 600$ Hz (b), (g), (k), para $f_c = 1400$ Hz (c), (h), (l), para $f_c = 2600$ Hz (d), (i), (m) y para $f_c = 4400$ Hz (e), (j), (n), respectivamente.

nica, como se aprecia en el espectro de la Fig. 2.C.2(g). El período de las ondulaciones de la señal de salida es similar al de las ondulaciones de la respuesta impulsiva del filtro, que se representa en la Fig. 2.C.2(k), con una diferente escala temporal (5 ms/div).

El efecto del incremento de la frecuencia de corte del filtro a $f_c = 1400$ Hz se ilustra en

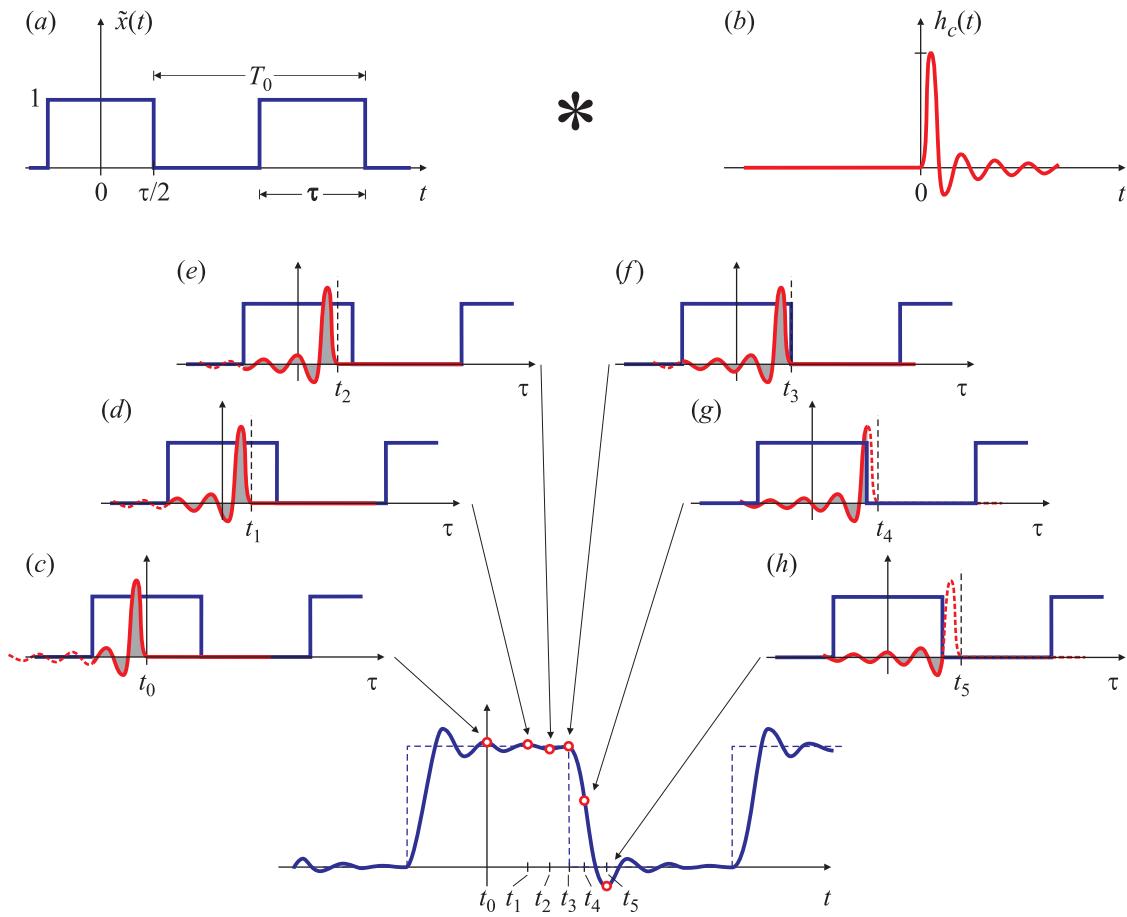


Fig. 2.C.3. Cálculo de la salida $y(t)$ del filtro causal por convolución entre $\tilde{x}(t)$ y $h_c(t)$.

las Figs. 2.C.2(e), (h) y (l). La señal de salida está compuesta por las primeras 13 componentes armónicas de la onda cuadrada $x(t)$ de entrada, como revela la Fig. 2.C.2(h). El sobreímpetu de la salida se mantiene prácticamente de la misma amplitud, como se observa en la Fig. 2.C.2(e), pero las ondulaciones son de menor período, que coincide con el de la respuesta impulsiva del filtro, representada en la Fig. 2.C.2(l).

A medida que se aumenta el ancho de banda del pasabajos a $f_c = 2600$ Hz [Figs. 2.C.2(d), (i) y (m)] y a $f_c = 4400$ Hz [Figs. 2.C.2(e), (j) y (n)], la señal de salida incluye la contribución de mayor número de armónicos de la señal de entrada (25 y 43 armónicos, respectivamente). Si bien aumenta la frecuencia de las ondulaciones de la señal de salida, en correspondencia con la forma de onda de la respuesta impulsiva [Figs. 2.C.2(m), 2.C.2(n)], la amplitud del sobreímpetu queda constante [Figs. 2.C.2(d), 2.C.2(e)].

La sucesión de las formas de onda de la señal de salida $y(t)$ graficadas en las Figs. 2.C.2(c)-(e) es muy similar a la sucesión de respuestas temporales de la Fig. 2.96. La diferencia más significativa es la ocurrencia del sobreímpetu *antes* del cambio de amplitud en la señal de entrada en las respuestas de la Fig. 2.96, efecto que está ausente en las formas de onda temporales de la Fig. 2.C.2. Otra diferencia es la amplitud del sobreímpetu, que para las respuestas de la Fig. 2.96 es de alrededor del 9%, mientras que para las de la Fig. 2.C.2 es casi el doble (17%). El motivo de estas discrepancias es que la truncación de la serie de

Fourier a una suma finita de $\pm N$ términos es equivalente a un filtrado ideal *no causal*, mientras que la experiencia descripta en esta sección es el resultado de un filtrado *causal*. Este hecho puede comprobarse comparando las respuestas impulsivas de uno y otro filtro: mientras que la respuesta impulsiva del filtro ideal es una función tipo $\text{sinc}(\cdot)$, como se representa en la Fig. 2.99, y por lo tanto no nula para $t < 0$ (esto es, no causal), la respuesta del filtro elíptico de la experiencia es causal, como se observa en las Figs. 2.C.2(k)-(n), que se anulan para $t < 0$. La referencia temporal en estas figuras está dada por el origen del pulso que se observa en la parte inferior de los oscilogramas.

El efecto de “filtrar” la onda cuadrada con un filtro ideal se representa en la Fig. 2.100, donde se muestra la convolución entre $x(t)$ y la respuesta impulsiva del filtro ideal $h(t)$. El sobrepico que ocurre antes del cambio de amplitud de la señal de entrada se debe al efecto anticipatorio causado por la parte no causal de la respuesta impulsiva $h(t)$ del filtro ideal; un ejemplo claro es el cálculo para $t = t_2$ o $t = t_3$ que se muestra en la Fig. 2.100(e), (f). El cálculo de la salida cuando se filtra la señal con un filtro causal se representa esquemáticamente en la Fig. 2.C.3. En este caso, como $h_c(t) = 0$ para $t < 0$, el filtro no puede prever el cambio de amplitud de la señal de entrada.

Reproducir estos resultados de manera analítica es difícil porque la respuesta impulsiva $h_c(t)$ del filtro elíptico de orden 8 es matemáticamente complicada. Por este motivo, para analizar el efecto de la causalidad del filtro sobre el fenómeno de Gibbs, se obtendrán las respuestas que resultan de filtrar una onda cuadrada con dos filtros de bajo orden cuya respuesta en frecuencia tenga el mismo módulo pero distinta fase, de modo que sus respuestas impulsivas resulten causales y no causales, respectivamente. Pero primero se investigará qué sucede al truncar la respuesta impulsiva del filtro ideal.

2.C.1. Truncación del filtro ideal

En la sección 2.8.1 se ha estudiado el efecto Gibbs como el efecto de filtrar una onda cuadrada $\tilde{x}(t)$ con un filtro pasabajos ideal con frecuencia de corte $f_c = f_N = (N+1/2)/T_0$, donde T_0 es el período de la señal. El principal inconveniente del filtro ideal es que no es implementable. Uno de los motivos es porque no es causal, y además, como la respuesta impulsiva se extiende para $t \rightarrow -\infty$ tampoco se puede “causalizar” retardando la respuesta. Por este motivo, en primer lugar es necesario *truncar* la respuesta impulsiva, como se muestra en la Fig. 2.C.4. Luego se la puede “causalizar” desplazándola en tiempo; la propiedad de desplazamiento temporal indica que esto no cambia el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro, sino que suma una componente lineal a su fase.

La idea es truncar la respuesta impulsiva $h(t)$ “infinitamente larga” que se muestra en la Fig. 2.C.4(a) para hacerla nula fuera del intervalo $[-T, T]$, donde T fija la duración temporal de la respuesta impulsiva, y se considera que $T < T_0$. Esta idea se formaliza definiendo una *ventana* temporal

$$w(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

representada en la Fig. 2.C.4(b). La respuesta impulsiva del filtro ideal truncado es

$$h_T(t) = h(t)w(t) = \begin{cases} 2f_N \text{sinc}(2f_N t), & |t| \leq T, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

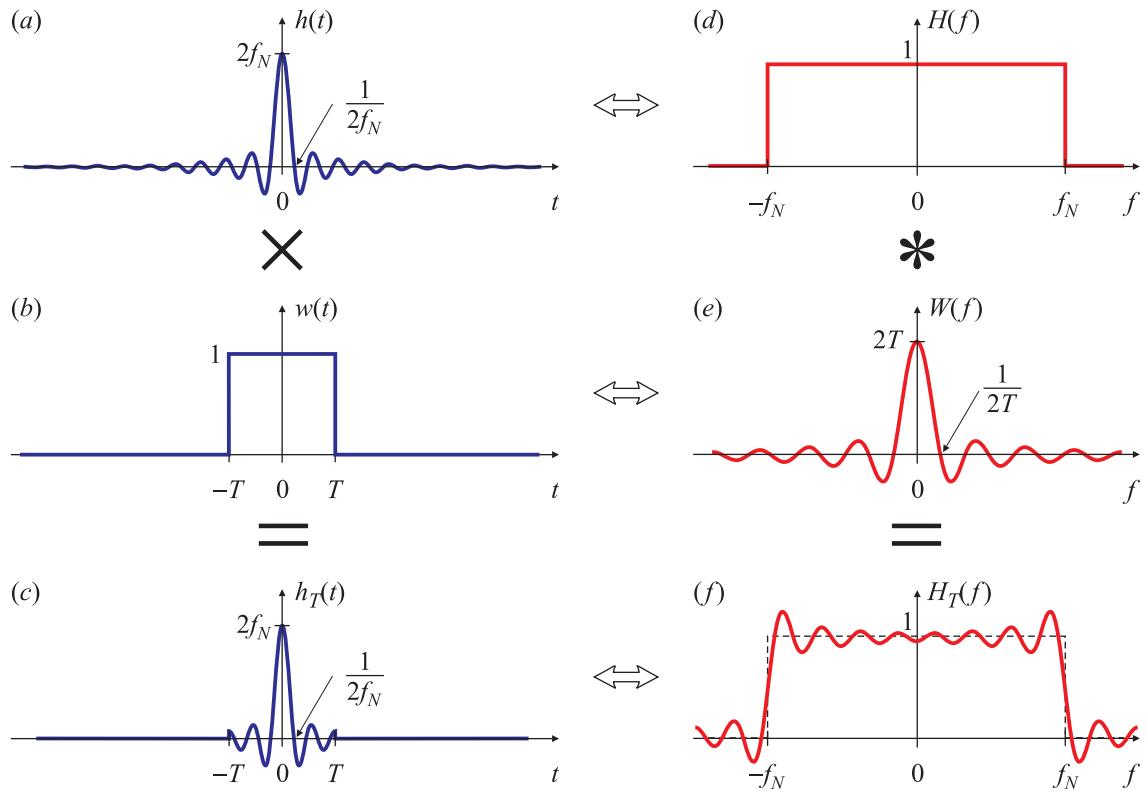


Fig. 2.C.4. Cálculo de la respuesta del filtro ideal con respuesta impulsiva truncada usando el teorema de convolución frecuencial.

como se muestra en la Fig. 2.C.4(c).

La truncación de la respuesta impulsiva modifica la respuesta en frecuencia del filtro, que se puede calcular aplicando el teorema de convolución *frecuencial*. Ya que $h_T(t) = h(t)w(t)$, el teorema asegura que la respuesta en frecuencia del filtro ideal truncado $H_T(f)$ se puede calcular como $H_T(f) = (H * W)(f)$, donde $W(f)$ es la respuesta en frecuencia de la ventana temporal $w(t)$. La respuesta en frecuencia $W(f)$ fue calculada en el Ejemplo 2.11, y está dada por $W(f) = 2T \text{sinc}(2Tf)$, como se muestra en la Fig. 2.C.4(e). Se tiene entonces que

$$H_T(f) = (H * W)(f) = \int_{-f_N}^{f_N} H(\sigma)W(f - \sigma)d\sigma = \int_{f-f_N}^{f+f_N} H(f - \sigma)W(\sigma)d\sigma,$$

donde $H(f)$ es la respuesta en frecuencia del filtro ideal representada en la Fig. 2.C.4(d). Luego de algunos cálculos se encuentra que

$$H_T(f) = \frac{1}{\pi} \text{Si}[2\pi T(f + f_N)] - \frac{1}{\pi} [2\pi T(f - f_N)],$$

que se muestra en la Fig. 2.C.4(f), donde $\text{Si}(\cdot)$ es la función seno integral definida en la Sección 2.8.2.

Como se muestra en la Fig. 2.C.5, cuando mayor sea la longitud T de la respuesta impulsiva tanto más rápidas serán las oscilaciones de la respuesta en frecuencia del filtro. Sin

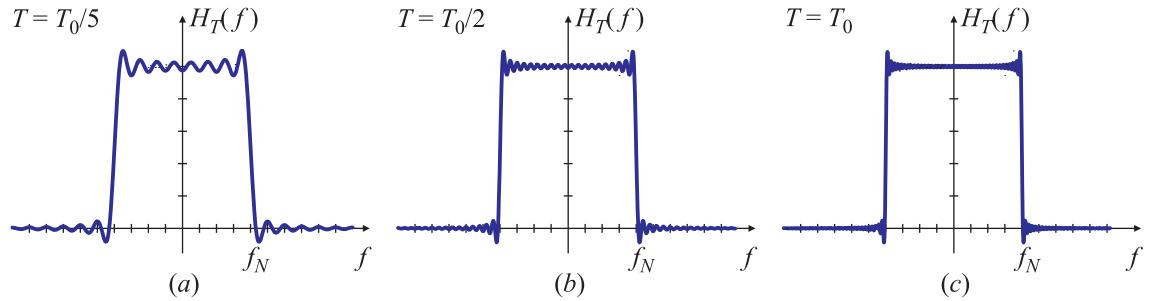


Fig. 2.C.5. Respuesta en frecuencia del filtro ideal con respuesta impulsiva truncada a $\pm T_0/5$ (a), $\pm T_0/2$ (b) y $\pm T_0$ (c).

embargo, esto no altera la amplitud de los sobrepicos de la respuesta en frecuencia $H_T(f)$, que dependen del área de $W(f)$, que es unitaria (es el valor de $w(t)$ en $t = 0$), y no varía con T . En realidad, este efecto es una versión dual del efecto Gibbs: una limitación en tiempo de la respuesta impulsiva provoca oscilaciones en la respuesta en frecuencia cuya amplitud es independiente del intervalo de truncación.

La expresión de la salida se puede calcular como en el caso del filtro ideal. Aproximando nuevamente la señal de entrada como $\tilde{x}(t) = (1/2) + (1/2)\operatorname{sgn}(\tau/2 - t)$, la salida es

$$x_T(t) = (x * h_T)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du.$$

En este caso, el cálculo de la convolución puede hacerse en tres pasos:

- Si $t < \tau/2 - T$, la respuesta impulsiva queda superpuesta totalmente con $\tilde{x}(t) = 1$, de modo que

$$x_T(t) = (x * h_T)(t) = \int_{t-T}^{t+T} h(t-u)du = \int_{t-T}^{t+T} 2f_N \operatorname{sinc}[2f_N(t-u)]du = \frac{2}{\pi} \operatorname{Si}(2\pi f_N T).$$

- Si $t > \tau/2 + T$, $\tilde{x}(t) = 0$, de modo que $x_T(t) = 0$.
- Finalmente, si $\tau/2 - T < t < \tau/2 + T$,

$$x_T(t) = \int_{t-T}^{t+T} h(t-u)du = \int_{t-T}^{\tau/2} 2f_N \operatorname{sinc}[2f_N(t-u)]du = \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}(2\pi f_N T) - \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}[2\pi f_N(t-\tau/2)].$$

Por lo tanto,

$$x_T(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \operatorname{Si}(2\pi f_N T), & \text{si } t < \tau/2, \\ \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}(2\pi f_N T) - \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}[2\pi f_N(t-\tau/2)], & \text{si } \tau/2 - T < t < \tau/2 + T, \\ 0, & \text{si } t > \tau/2 + T. \end{cases}$$

El cálculo de la respuesta aplicando el teorema de la convolución temporal se representa en la Fig. 2.C.6: el efecto de filtrar la onda cuadrada $\tilde{x}(t)$ de la Fig. 2.C.6(a) con el filtro con respuesta impulsiva truncada $h_T(t)$ que se muestra en la Fig. 2.C.6(b) es equivalente a antitransformar el producto de $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$ con $H_T(f)$, representados en la Fig. 2.C.6(d) y

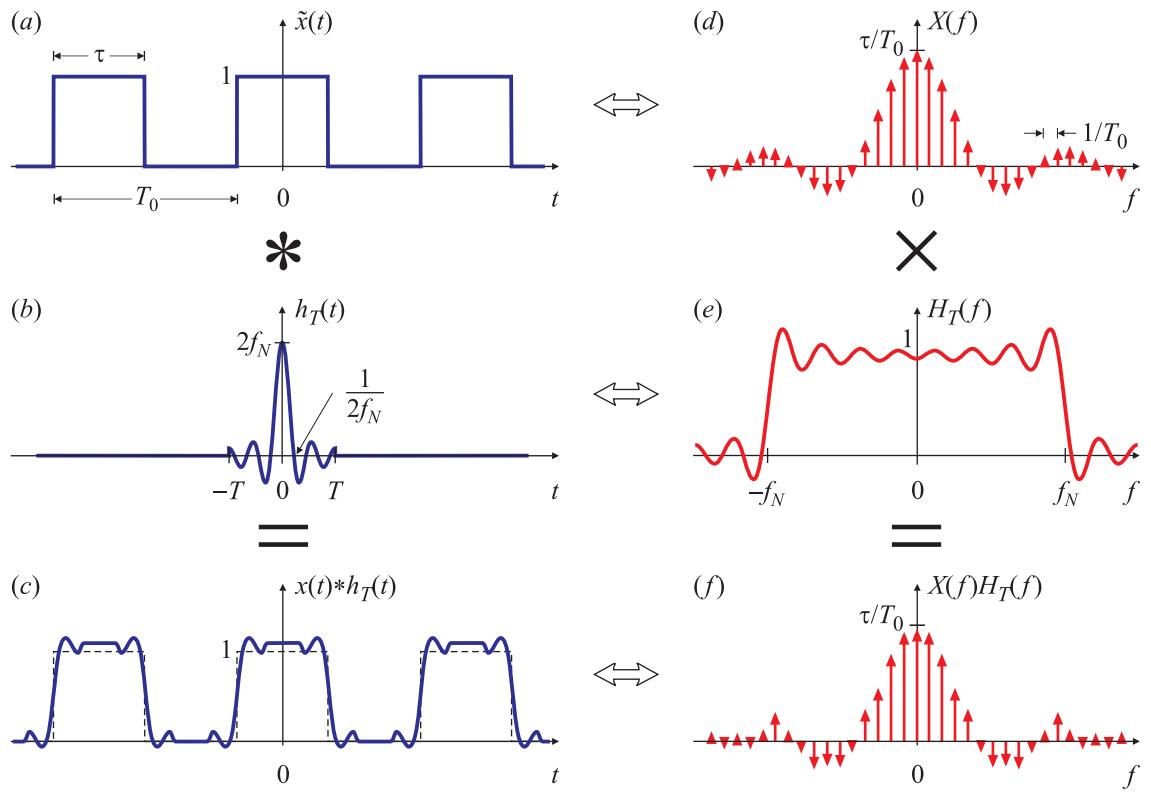


Fig. 2.C.6. Cálculo de la salida del filtro ideal con respuesta impulsiva truncada aplicando el teorema de convolución temporal.

(e), respectivamente. Ahora, el producto de las transformadas no se anula para $f > |f_N|$ como se muestra en la Fig. 2.C.6(f) porque el filtro no es ideal. Sin embargo, como sólo se anulan los lóbulos laterales relativamente pequeños de $h_T(t)$, la forma de onda de la señal de salida del filtro, representada en la Fig. 2.C.6(c) no es demasiado diferente de la

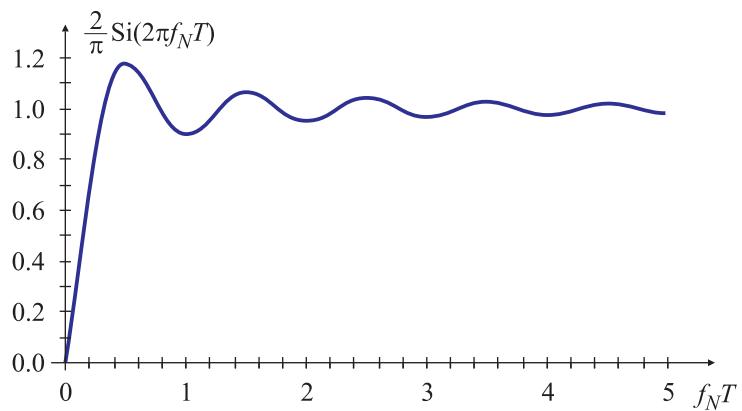


Fig. 2.C.7. Amplitud de la señal de salida del filtro ideal con frecuencia de corte f_N y respuesta impulsiva truncada a $\pm T$ en función del producto f_NT .

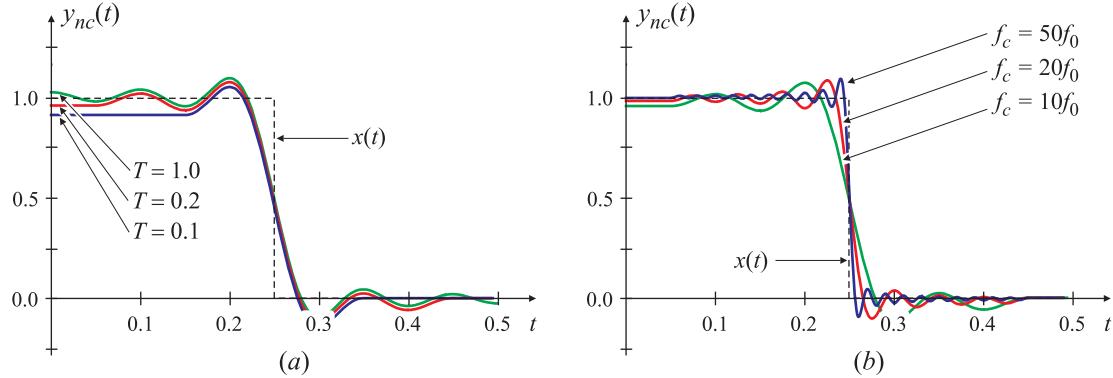


Fig. 2.C.8. Respuestas temporales de la salida del filtro ideal con respuesta truncada. $T = T_0, f_N = 10f_0, 20f_0$ y $50f_0$ (a) y $f_N = 10f_0, T = T_0, T = T_0/5, T = T_0/10$ (b).

que se obtiene utilizando un filtro ideal.

El efecto de truncar la respuesta impulsiva del filtro ideal altera la amplitud de la onda de salida, y este valor depende del producto f_NT , es decir, el ancho de banda del filtro ideal y la duración de la respuesta impulsiva truncada. En la Fig. 2.C.7 se grafica el valor de $(2/\pi) \text{Si}(2\pi f_NT)$ en función del producto f_NT . Evidentemente, cuanto mayor sea f_NT , la amplitud de la señal de salida tiende a la unidad, pues:

- incrementando f_N crece el ancho de banda del filtro ideal, y por lo tanto se reduce la duración de la respuesta impulsiva,
- aumentando T se aumenta la duración de la respuesta impulsiva

de manera que al efectuar la truncación sólo se pierden las “colas” de menor amplitud del $\text{sinc}(\cdot)$, y por lo tanto la variación en la amplitud es pequeña.

Una determinada amplitud de salida (por ejemplo, unitaria) puede obtenerse con infinitos valores del producto f_NT . La forma de onda de la respuesta temporal, para distintos anchos de banda y distintas longitudes de la respuesta impulsiva se representa en las Figs. 2.C.8(a) y (b), respectivamente.

2.C.2. Filtros causales y no causales con idéntica respuesta de amplitud

El propósito de esta sección es construir sistemas continuos, causales y no causales, cuyas respuestas en frecuencia tengan igual módulo. Una forma posible es a partir de un sistema prototípico causal con respuesta impulsiva real $h_p(t)$ y respuesta en frecuencia $H_p(f)$, es decir que $h_p(t)$ y $H_p(f)$ forman un par transformado

$$h_p(t) \iff H_p(f). \quad (2.C.1)$$

Como $h_p(t)$ es causal, $h_p(t) = 0$ para $t < 0$, como se muestra en la Fig. 2.C.9(a). Por lo tanto, $h_p(-t)$ es la respuesta impulsiva de un sistema anticausal, es decir $h_p(-t) = 0$ para

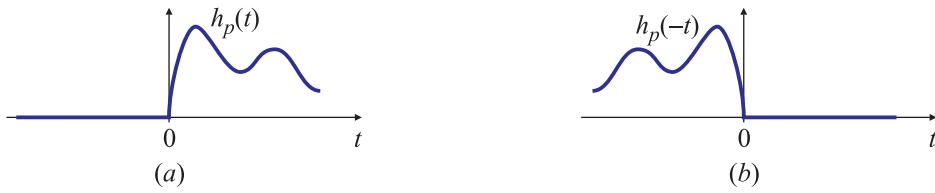


Fig. 2.C.9. Respuesta impulsiva de un sistema causal (a) y anticausal (b).

$t > 0$ [Fig. 2.C.9(a)] y su respuesta en frecuencia está dada por

$$\mathcal{F}\{h_p(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h_p(-t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h_p(s)e^{-j2\pi f(-s)} ds = H_p(-f) = H_p^*(f),$$

donde la última igualdad es válida sólo si $h(\cdot)$ es real. Se tiene entonces el par transformado de Fourier

$$h_p(-t) \iff H_p^*(f). \quad (2.C.2)$$

A partir de las relaciones (2.C.1) y (2.C.2) se pueden definir tres tipos de sistemas cuya respuesta en frecuencia tiene el mismo módulo:

- un sistema *causal* con respuesta impulsiva $h_c(t) = h_p(t) * h_p(t)$;
- un sistema *anticausal* con respuesta impulsiva $h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t)$;
- un sistema *no causal* (bilátero) con respuesta impulsiva $h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t)$.

A continuación se estudian las principales características de estos sistemas derivados del sistema prototipo con respuesta impulsiva $h_p(t)$ y respuesta en frecuencia $H_p(f)$.

2.C.2.1. El sistema causal

El sistema $h_c(t)$ definido por la convolución de la respuesta impulsiva $h_p(t)$ del sistema prototipo con sí misma es causal, porque $h_c(t) = 0$ para $t < 0$. En la Fig. 2.C.10(a) se representa una etapa del cálculo de la convolución, indicando las respuestas $h(\tau)$ y $h(t - \tau)$ para $t < 0$. Como no hay solapamiento, la convolución es nula para todo $t < 0$. Por otra parte, la Fig. 2.C.10(b) muestra la misma etapa para $t > 0$. En este caso sí hay solapamiento, lo que indica que la convolución no es necesariamente nula para $t \geq 0$. De manera que $h_c(t) = h_p(t) * h_p(t)$ es nula para $t < 0$, como se indica en la Fig. 2.C.10(c), y por lo tanto es causal. En particular, la respuesta impulsiva del sistema $h_c(t)$ se puede calcular como

$$h_c(t) = h_p(t) * h_p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \int_0^t h_p(\tau)h_p(t - \tau) d\tau, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.C.3)$$

En base al par transformado (2.C.1) y la propiedad de convolución temporal, se observa que este sistema satisface el par transformado de Fourier

$$h_c(t) = h_p(t) * h_p(t) \iff H_c(f) = H_p(f)H_p(f) = |H_p(f)|^2 e^{j2\arg\{H_p(f)\}}. \quad (2.C.4)$$

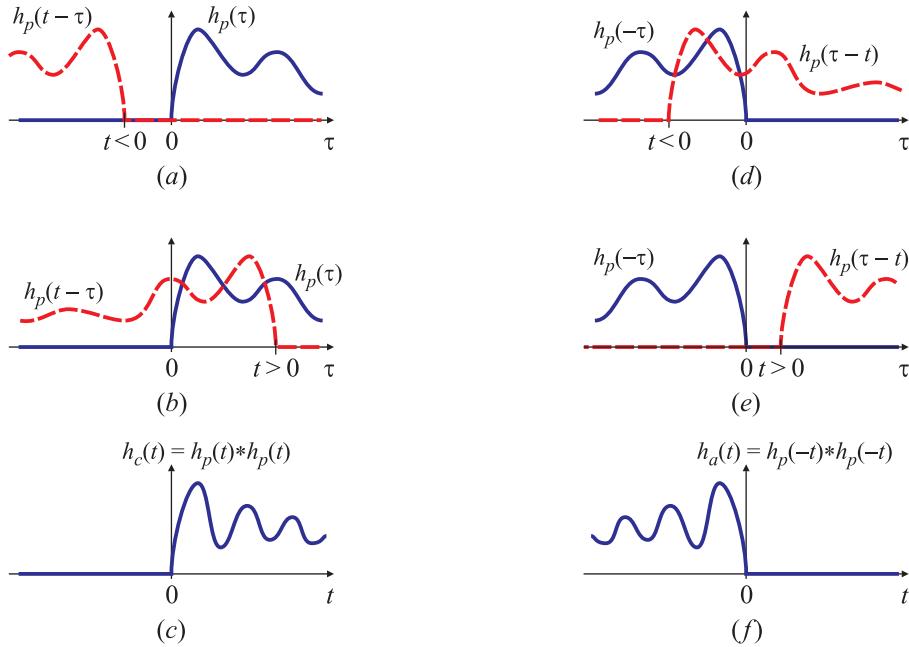


Fig. 2.C.10. Etapas del cálculo de la convolución $h_p(t) * h_p(t)$ para derivar el filtro causal $h_c(t)$ [(a)-(c)] y de $h_p(-t) * h_p(-t)$ para obtener el filtro anticausal [(d)-(f)].

2.C.2.2. El sistema anticausal

Se puede obtener un sistema anticausal definiendo sus respuesta impulsiva como $h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t)$. Para evitar confusiones se notará $\hat{h}_p(t) = h_p(-t)$. Como $h_p(t) = 0$ para $t < 0$, entonces $h_p(-t) = \hat{h}_p(t) = 0$ para $t > 0$, y por lo tanto también $h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t) = \hat{h}_p(t) * \hat{h}_p(t) = 0$ para $t > 0$. En la Fig. 2.C.10(c) se muestra una etapa del cálculo de la convolución para $t < 0$. En este caso, $\hat{h}_c(\tau)$ y $\hat{h}_c(t - \tau) = h_c(-t + \tau)$ se solapan siempre para cualquier $t < 0$. Para el caso en que $t > 0$, como se muestra en la Fig. 2.C.10(d), nunca se produce solapamiento entre $\hat{h}_c(\tau)$ y $\hat{h}_c(t - \tau)$ para $t > 0$. En síntesis, la respuesta impulsiva $h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t) = \hat{h}_p(t) * \hat{h}_p(t) = 0$ para $t > 0$, y el sistema es anticausal, como se muestra en la Fig. 2.C.10(e). En particular, la respuesta impulsiva del sistema $h_a(t)$ se puede calcular como

$$h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t) = \begin{cases} \int_t^0 h_p(-\tau)h_p(\tau-t) d\tau, & t < 0, \\ 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.C.5)$$

y comparando las ecuaciones (2.C.3) y (2.C.5) se observa que

$$h_a(t) = h_c(-t). \quad (2.C.6)$$

En base al par transformado (2.C.1) y la propiedad de convolución temporal, se observa que este sistema satisface el par transformado de Fourier

$$h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t) \iff H_a(f) = H_p^*(f)^* H_p(f) = H_c^*(f) = |H_p(f)|^2 e^{-j2\arg\{H_p(f)\}}. \quad (2.C.7)$$

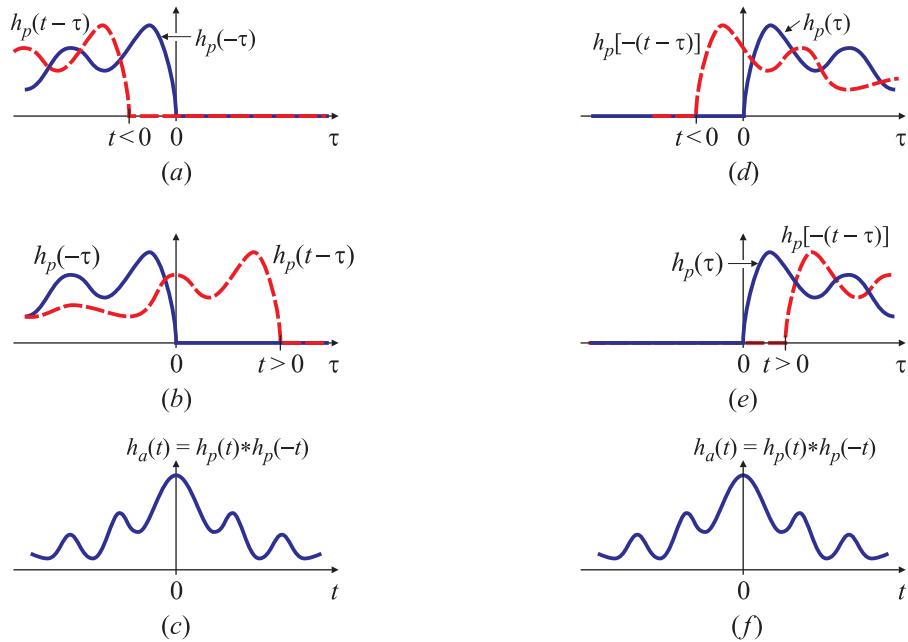


Fig. 2.C.11. Etapas del cálculo de la convolución entre $h_p(t)$ y $h_p(-t)$ para calcular $h_{nc}(t)$, reflejando $h_p(t)$ [(a)-(c)] o $h_p(-t)$ [(e)-(f)].

2.C.2.3. El sistema no causal (bilátero)

La convolución entre $h_p(t)$ y $h_p(-t)$ no es causal, pero tampoco anticausal, tal como se ilustra en la Fig. 2.C.11(a)-(c). La Fig. 2.C.11(a) muestra una etapa de la convolución entre $h_p(-\tau)$ y $h_p(\sigma)|_{\sigma=t-\tau} = h_p(t - \tau)$, para $t < 0$. Ambas señales se solapan, y por lo tanto el resultado de la convolución para $t < 0$ no es idénticamente nula. Para el caso $t \geq 0$, ilustrado en la Fig. 2.C.11(b), las señales también se solapan de modo que tampoco la convolución es necesariamente nula para $t > 0$. Otro punto de vista se representa en la Fig. 2.C.11(d), donde se muestra una etapa de la convolución entre $h_p(\tau)$ y $h_p(-\sigma)|_{\sigma=t-\tau} = h_p[-(t-\tau)]$, para $t < 0$, y en la Fig. 2.C.11(e) para $t \geq 0$. En cualquiera de los dos casos hay solapamiento, y en consecuencia, la respuesta $h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t)$ no es idénticamente nula para $t < 0$ o para $t \geq 0$, como se grafica en la Fig. 2.C.11(c) y (f): el sistema no es causal ni anticausal, lo que justifica la denominación *bilátero*. Teniendo en cuenta que

$$h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_p(t - \tau) h_p(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h_p[-(t - \tau)] h_p(\tau) d\tau = h_{nc}(-t),$$

resulta que $h_{nc}(t) = h_{nc}(-t)$, es decir que la respuesta impulsiva es simétrica. Para conocer $h_{nc}(t)$ basta calcular la convolución para $t > 0$:

$$h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t) = \int_s^{\infty} h_p[-(s - \tau)] h_p(\tau) d\tau \Big|_{s=|t|}.$$

Aplicando el teorema de la convolución temporal y teniendo en cuenta el par transformado (2.C.2) se puede establecer que el sistema no causal $h_{nc}(t)$ satisface la relación

$$h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t) \iff H_{nc}(f) = H_p(f)H_p^*(f) = |H_p(f)|^2. \quad (2.C.8)$$

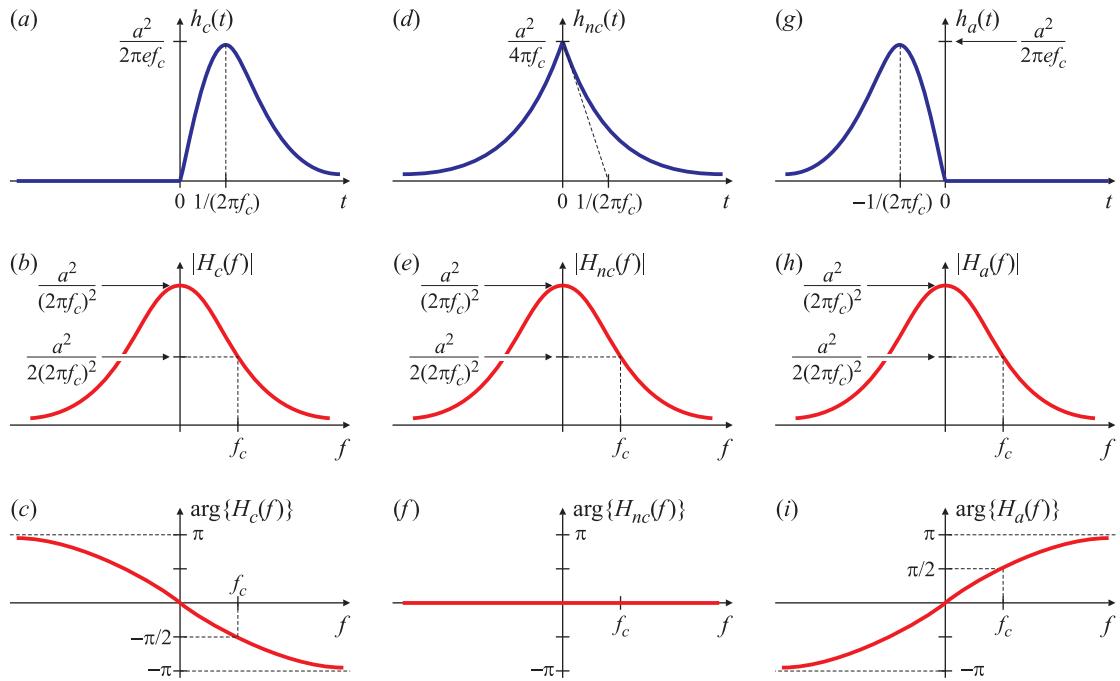


Fig. 2.C.12. Respuesta impulsiva y respuesta en frecuencia de los filtros de segundo orden causales (a)-(c), no causales (d)-(f), y anticausales (g)-(i).

Los sistemas $H_c(f)$, $H_a(f)$ y $H_{nc}(f)$ con respuestas impulsivas $h_c(t) = h_p(t) * h_p(t)$ (causal), $h_a(t) = h_p(-t) * h_p(-t)$ y $h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t)$ (no causal) definidos en (2.C.4), (2.C.7) y (2.C.8), respectivamente, tienen el mismo módulo de la respuesta en frecuencia. Como el sistema no causal $H_{nc}(f)$ tiene fase nula, esta relación y la propiedad de las funciones pares de la Sección 2.6.10.1 también muestran que $h_{nc}(t)$ debe ser real y simétrica.

Los sistemas $H_c(f)$, $H_a(f)$ y $H_{nc}(f)$ generados de esta forma tienen un orden igual al doble del orden de $H_p(f)$, de modo que siempre resultan de orden par.

En el siguiente ejemplo se calculan las respuestas impulsivas y las respuestas en frecuencia de sistemas causales, anticausales y no causales (biláteros) de filtros pasabajos de segundo orden generado a partir de un filtro pasabajo prototípico de primer orden.

EJEMPLO 2.C.1. Sistema de segundo orden

Si se parte del par transformado (filtro prototípico de primer orden)

$$h_p(t) = ae^{-2\pi f_c t} u(t) \iff H_p(f) = \frac{a}{2\pi f_c + j2\pi f},$$

donde $a > 0$ y $f_c > 0$, se encuentra que:

- El sistema *causal* está caracterizado por la respuesta impulsiva

$$h_c(t) = h_p(t) * h_p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \int_0^t ae^{-\alpha\tau} ae^{-2\pi f_c(t-\tau)} d\tau = a^2 te^{-2\pi f_c t}, & 0 \leq t, \end{cases}$$

que puede escribirse de manera más compacta como

$$h_c(t) = a^2 t e^{-2\pi f_c t} u(t).$$

La forma de onda de esta respuesta se representa en la Fig. 2.C.12(a). Tiene un valor máximo de $a^2/(2\pi f_c)$, que se alcanza en $t = 1/(2\pi f_c)$. Su transformada de Fourier está dada por

$$H_c(f) = \left(\frac{a}{2\pi f_c + j2\pi f} \right)^2 = \frac{a^2}{(2\pi f_c)^2 - (2\pi f)^2 + j4\pi^2 f_c f} = \frac{a^2}{(2\pi f_c)^2 + (2\pi f)^2} e^{-j2\arctan(\frac{f}{f_c})}. \quad (2.C.9)$$

Esta respuesta en frecuencia tiene un máximo en $f = 0$, donde vale $a^2/(2\pi f_c)^2$; en $f = f_c$ la amplitud cae a la mitad. El módulo y fase de esta respuesta se muestran en las Figs. 2.C.12(b) y (c), respectivamente.

- Por otra parte, el sistema *no causal* (bilátero) está definido por

$$h_{nc}(t) = h_p(t) * h_p(-t) = \int_s^\infty a e^{-2\pi f_c \tau} a e^{2\pi f_c (s-\tau)} d\tau \Big|_{s=|t|} = \frac{a^2}{4\pi f_c} e^{-2\pi f_c |t|}$$

cuya respuesta temporal, que tiene un máximo en $t = 0$ donde alcanza $a^2/(4\pi f_c)$, se grafica en la Fig. 2.C.12(d). Su transformada de Fourier es

$$H_{nc}(f) = \left| \frac{a}{2\pi f_c + j2\pi f} \right|^2 = \frac{a^2}{(2\pi f_c)^2 + (2\pi f)^2}, \quad (2.C.10)$$

que se representa en módulo y fase en las Figs. 2.C.12(e) y (f), respectivamente.

- Finalmente, de acuerdo con (2.C.6) y (2.C.7), la respuesta impulsiva del sistema *anticausal* es

$$h_a(t) = h_c(-t) = -a^2 t e^{2\pi f_c t} u(-t)$$

cuya respuesta en frecuencia está dada por

$$H_a(f) = \frac{a^2}{(2\pi f_c)^2 + (2\pi f)^2} e^{j2\arctan(f/f_c)}.$$

Los tres sistemas tienen el mismo módulo de la respuesta en frecuencia, $|H_c(f)| = |H_{nc}(f)| = |H_a(f)|$, como se observa en las Figs. 2.C.12(b), (e) y (h), y sólo difieren en la respuesta de fase. \square

En el ejemplo siguiente, se calculan las respuestas impulsivas y en frecuencias de filtros pasabajos de cuarto orden causales, anticausales y no causales generados a partir de un filtro pasabajos prototípico de segundo orden.

EJEMPLO 2.C.2. Sistema de cuarto orden

El sistema con respuesta impulsiva (filtro prototípico de segundo orden)

$$h_p(t) = \frac{a}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-2\pi f_c \xi t} \operatorname{sen}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} t\right) u(t)$$

tiene transformada de Fourier

$$H_p(f) = \frac{a^2}{(j2\pi f)^2 + j2\xi(2\pi f_c)2\pi f + (2\pi f_c)^2},$$

cuyo módulo y fase están dados por

$$|H_p(f)| = \frac{a^2}{2\pi \sqrt{(f_c^2 - f^2)^2 + (2\xi f_c f)^2}}, \quad \arg\{H_p(f)\} = -\arctan\left(\frac{2\xi f_c f}{f_c^2 - f^2}\right).$$

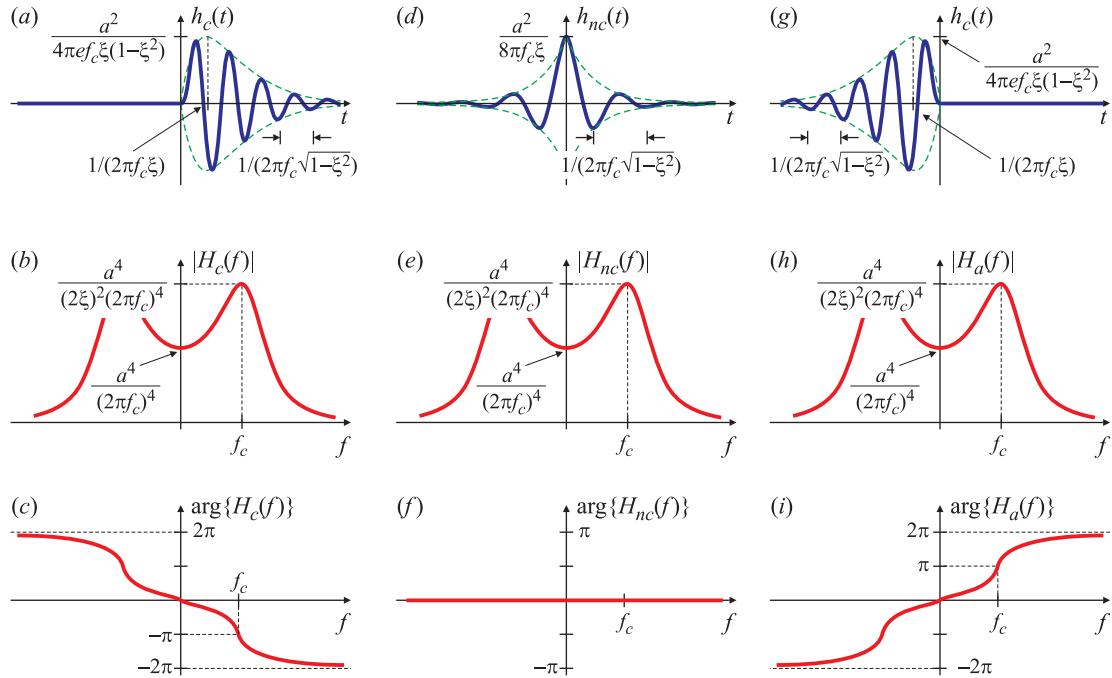


Fig. 2.C.13. Respuesta impulsiva y respuesta en frecuencia de los filtros de cuarto orden causales (a)-(c), no causales (d)-(f), y anticausales (g)-(i).

- El sistema *causal* de cuarto orden derivado de este sistema prototípico tiene respuesta impulsiva

$$h_c(t) = (h_p * h_p)(t) = \frac{a^2}{2} \frac{t e^{-2\pi f_c \xi t}}{(1-\xi^2)^2} \left[\text{sinc}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} t\right) - \cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} t\right) \right] u(t),$$

para $t > 0$ como se muestra en la Fig. 2.C.13(a). La envolvente de la respuesta impulsiva es

$$e_c(t) = \frac{a^2}{4\pi f_c} \frac{e^{-2\pi f_c \xi t}}{(1-\xi^2)^{3/2}} \sqrt{4\pi^2 f_c^2 (1-\xi^2) t^2 - 1},$$

y alcanza su máximo

$$e_{\max} = \frac{a^2}{2\pi f_c \sqrt{2(1-\xi^2)}} \frac{e^{2\xi^2/(1-\xi^2) + \sqrt{1-6\xi^2+5\xi^4}}}{\sqrt{-\xi^2 + \sqrt{1-6\xi^2+5\xi^4}}}$$

en

$$t_{\max} = \frac{\xi}{\pi f_c} \left(1 - \xi^2 + \sqrt{1 - 6\xi^2 + 5\xi^4} \right)^{-1}.$$

Sin embargo, si se acepta que el módulo de $|\text{sinc}(\cdot) - \cos(\cdot)| \cong 1$, se puede considerar, por simplicidad, que la envolvente es $a^2 t e^{-2\pi f_c \xi t} / [2(1-\xi^2)^2]$, que tiene un máximo en $t = 1/(2\pi f_c \xi)$, donde alcanza el valor $a^2 / [4\pi f_c e \xi (1-\xi^2)]$. Esta simplificación no afecta el argumento principal del desarrollo. La respuesta en frecuencia está dada por

$$|H_c(f)| = \frac{a^4 / (2\pi)^4}{(f_c^2 - f^2)^2 + (2\xi f_c f)^2}, \quad \arg\{H_c(f)\} = -2 \arctan\left(\frac{2\xi f_c f}{f_c^2 - f^2}\right). \quad (2.C.11)$$

Esta respuesta en módulo y fase se representa en las Figs. 2.C.13(b) y (c), respectivamente. Tiene un sobrepico en $f = f_c$, donde alcanza $a^4 / [(2\xi)^2 (2\pi f_c)^4]$; en $f = 0$ el módulo de la respuesta en frecuencia es $a^4 / (2\pi f_c)^4$.

- La respuesta impulsiva del sistema *no causal* (bilátero) de cuarto orden generado a partir del sistema prototípico es

$$\begin{aligned} h_{nc}(t) &= h_p(t) * h_p(-t) \\ &= \frac{1}{4} \frac{a^2}{2\pi f_c} e^{-2\pi f_c \xi |t|} \left[\frac{1}{\xi} \cos(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} t) - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} |t|) \right]. \end{aligned}$$

La evolución de esta respuesta en función del tiempo se ilustra en la Fig. 2.C.13(d); la envolvente aproximada $a^2 e^{-2\pi f_c \xi |t|} / (8\pi f_c \xi)$ alcanza el máximo en el origen. La respuesta en frecuencia asociada está dada por

$$H_{nc}(f) = \frac{a^4 / (2\pi)^4}{(f_c^2 - f^2)^2 + (2\xi f_c f)^2}, \quad \arg\{H_{nc}(f)\} = 0, \quad (2.C.12)$$

y su módulo y fase se muestran en las Figs. 2.C.13(e) y (f), respectivamente.

- Finalmente, la respuesta impulsiva del sistema *anticausal* es, de acuerdo con (2.C.6)

$$h_a(t) = \frac{a^2}{2} \frac{-t e^{2\pi f_c \xi t}}{(1-\xi^2)^2} \left[\text{sinc}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} t\right) - \cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} t\right) \right] u(-t),$$

para $t < 0$, como se representa en la Fig. 2.C.13(g). Además, según (2.C.7),

$$|H_a(f)| = |H_c^*(f)| = \frac{a^4 / (2\pi)^4}{(f_c^2 - f^2)^2 + (2\xi f_c f)^2}, \quad \arg\{H_a(f)\} = 2 \arctan\left(\frac{2\xi f_c f}{f_c^2 - f^2}\right),$$

tal como se grafica en la Fig. 2.C.13(h) e (i).

Nuevamente, los módulos de las respuestas en frecuencia $H_c(f)$, $H_a(f)$ y $H_{nc}(f)$ son iguales, y las respuestas sólo difieren en la fase. \square

Los resultados de los Ejemplos 2.C.1 y 2.C.2 se utilizarán en la siguiente sección para calcular la forma de onda de la señal de salida cuando se los excita con una onda cuadrada, para verificar la ocurrencia o no del efecto Gibbs, y la diferencia con las respuestas que se obtienen a la salida de un filtro ideal, como se estudió en la Sección 2.8.1.

2.C.3. Determinación de las respuestas temporales

La salida de los filtros causales o no causales cuando son excitados una onda cuadrada de amplitud unitaria y período $T_0 = 1/f_0$ se puede calcular en tiempo aplicando la convolución entre la señal $\tilde{x}(t)$ y la respuesta $h(t)$ del filtro, o en frecuencia, afectando los coeficientes de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$ por la respuesta de los filtros a cada frecuencia armónica. Ambos puntos de vista se exploran en esta sección. En primer lugar se estudia el filtro de segundo orden con respuesta sobreamortiguada analizado en el Ejemplo 2.C.1, y posteriormente el filtro de cuarto orden con respuesta subamortiguada del Ejemplo 2.C.2.

2.C.3.1. Cálculo en el dominio tiempo

En primer lugar se calculan los resultados usando la convolución. De manera similar al desarrollo de la Sección 2.8.2, para calcular analíticamente el comportamiento en cercanías de los puntos de discontinuidad de $\tilde{x}(t)$, se aproxima $\tilde{x}(t)$ por la función $\text{sgn}(t)$:

$$\tilde{x}(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(\tau/2 - t).$$

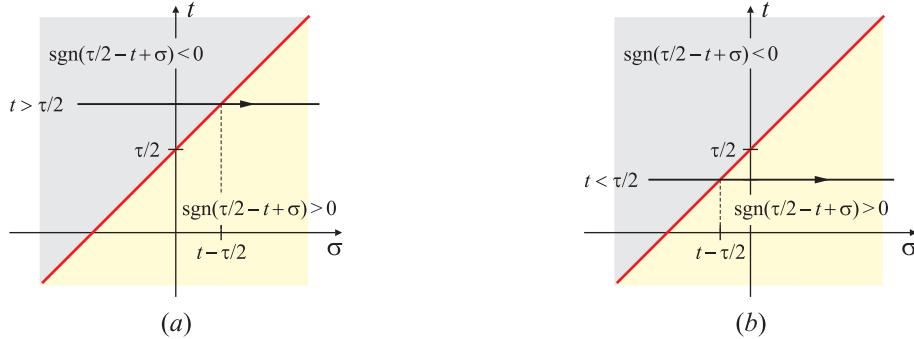


Fig. 2.C.14. Construcción para determinar el valor de $\text{sgn}(\tau/2 - t + \sigma)$.

En los siguientes ejemplos se calcula la salida del filtro de segundo orden con respuesta impulsiva causal, no causal (bilátera) y anticausal.

EJEMPLO 2.C.3. Filtro causal de segundo orden con respuesta sobreamortiguada

Como se desea que el filtro tenga ganancia unitaria, se adopta $a = 2\pi f_c$, de modo que la respuesta impulsiva es

$$h_c(t) = (2\pi f_c)^2 t e^{-2\pi f_c t} u(t).$$

Por lo tanto,

$$y_c(t) = \tilde{x}(t) * h_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t - \sigma) * h_c(\sigma) d\sigma \approx \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(\tau/2 - t + \sigma) \right] h_c(\sigma) d\sigma.$$

El límite inferior de la última integral es 0 porque $h_c(\sigma) = 0$ para $\sigma < 0$. Desarrollando, se encuentra que

$$y_c(t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} h_c(\sigma) d\sigma + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \text{sgn}(\tau/2 - t + \sigma) h_c(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \text{sgn}(\tau/2 - t + \sigma) h_c(\sigma) d\sigma.$$

En el cálculo de la primera integral se tiene en cuenta que el área bajo la respuesta impulsiva $h_c(t)$ es unitaria, pues $H_c(f)|_{f=0} = 1$. Para el cálculo de la segunda integral es conveniente tener en cuenta el valor de $\text{sgn}(\tau/2 - t + \sigma)$. Como se observa en la construcción de la Fig. 2.C.14(a), si $t > \tau/2$ es conveniente partir el intervalo de integración en dos subintervalos: $(0, t - \tau/2)$, donde $\text{sgn}(\tau/2 - t + \sigma) = -1$, y $(t - \tau/2, \infty)$, donde $\text{sgn}(\tau/2 - t + \sigma) = 1$. Por otra parte, si $t < \tau/2$, como se ilustra en la Fig. 2.C.14(b), $\text{sgn}(\tau/2 - t + \sigma) = 1$ para $\sigma > 0$. En consecuencia,

$$\text{sgn}(\tau/2 - t + \sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \tau/2 - t + \sigma > 0, \text{ i.e. } \sigma > t - \tau/2, \\ -1, & \text{si } \tau/2 - t + \sigma < 0, \text{ i.e. } \sigma < t - \tau/2, \\ 1, & \text{si } \tau/2 - t + \sigma > 0, \text{ i.e. } \sigma > t - \tau/2, \end{cases} \quad \begin{matrix} \} & \text{si } t > \tau/2 \\ & \end{matrix}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} \text{sgn}(\tau/2 - t + \sigma) h_c(\sigma) d\sigma = \begin{cases} \int_0^{\infty} h_c(\sigma) d\sigma = 1, & \text{si } t < \tau/2, \\ - \int_0^{(t-\tau/2)} h_c(\sigma) d\sigma + \int_{(t-\tau/2)}^{\infty} h_c(\sigma) d\sigma, & \text{si } t > \tau/2. \end{cases}$$

Como

$$- \int_0^{(t-\tau/2)} h_c(\sigma) d\sigma + \int_{(t-\tau/2)}^{\infty} h_c(\sigma) d\sigma = -1 + 2[1 + 2\pi f_c(t - \tau/2)]e^{-2\pi f_c(t - \tau/2)},$$

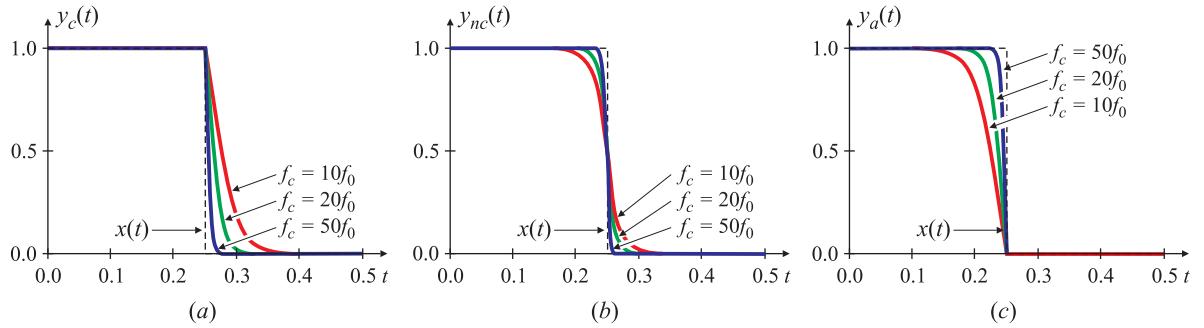


Fig. 2.C.15. Respuestas temporales de la salida $y(t)$ del filtro de segundo orden causal (a), no causal bilátero (b), y anticausal (c) para distintos valores de f_c .

recolectando resultados se encuentra que

$$y_c(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < \tau/2, \\ [1 + 2\pi f_c(t - \tau/2)] e^{-2\pi f_c(t - \tau/2)}, & \text{si } t > \tau/2. \end{cases} \quad (2.C.13)$$

Esta expresión muestra que la respuesta no tiene sobrepicos, y que a medida que aumenta el ancho de banda del filtro crece la magnitud de la pendiente durante el transitorio. La variación temporal de la salida $y_c(t)$ en cercanías de la discontinuidad se representa en la Fig. 2.C.15(a) para distintos valores de la frecuencia de corte f_c . \square

EJEMPLO 2.C.4. Filtro no causal de segundo orden con respuesta sobreamortiguada

En este caso, para que la respuesta en frecuencia del filtro tenga ganancia unitaria para frecuencia cero (corriente continua), la respuesta impulsiva está dada por

$$h_{nc}(t) = \pi f_c e^{-2\pi f_c |t|},$$

y entonces,

$$\begin{aligned} y_{nc}(t) &= \tilde{x}(t) * h_{nc}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t - \sigma) * h_{nc}(\sigma) d\sigma \approx \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\tau/2 - t + \sigma)] h_{nc}(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_{nc}(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\tau/2 - t + \sigma) h_{nc}(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Como $\int_{-\infty}^{\infty} h_{nc}(\sigma) d\sigma = 1$, partiendo la segunda integral en dos intervalos se tiene que

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{(t-\frac{\tau}{2})} \operatorname{sgn}(\tau/2 - t + \sigma) h_{nc}(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{(t-\frac{\tau}{2})}^{\infty} \operatorname{sgn}(\tau/2 - t + \sigma) h_{nc}(\sigma) d\sigma.$$

Tomando en cuenta el valor de $\operatorname{sgn}(\tau/2 - t + \sigma)$ en cada intervalo, para $t > \tau/2$, como se muestra en la Fig. 2.C.14(a), resulta

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{(t-\frac{\tau}{2})} h_{nc}(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{(t-\frac{\tau}{2})}^{\infty} h_{nc}(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} e^{-2\pi f_c(t-\frac{\tau}{2})}.$$

Por otra parte, si $t < \tau/2$, según la Fig. 2.C.14(b), se tiene que

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{(t-\frac{\tau}{2})} h_{nc}(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{(t-\frac{\tau}{2})}^{\infty} h_{nc}(\sigma) d\sigma = 1 - \frac{1}{2} e^{2\pi f_c(t-\frac{\tau}{2})}.$$

y por lo tanto

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \left(1 - e^{-2\pi f_c |t - \frac{\tau}{2}|}\right). \quad (2.C.14)$$

La respuesta temporal para distintos valores de f_c se muestra en la Fig. 2.C.15(b). Nuevamente, no se observan sobrepicos, pero sí la respuesta “anticipativa” de la salida, que empieza a decrecer *antes* que cambie la entrada, y la respuesta causal, que tiende suavemente a cero *después* que cambió el valor de la señal de entrada. \square

EJEMPLO 2.C.5. Filtro anticausal de segundo orden con respuesta sobreamortiguada

Como la respuesta impulsiva $h_a(t)$ del filtro anticausal satisface $h_a(t) = h_c(-t)$, se puede calcular que

$$y_a(t) = \begin{cases} 1 - [1 - 2\pi f_c(t - \tau/2)] e^{2\pi f_c(t - \tau/2)}, & \text{si } t < \tau/2, \\ 0, & \text{si } t > \tau/2. \end{cases} \quad (2.C.15)$$

que se representa en la Fig. 2.C.15(c) para distintos valores de f_c . En este caso, la respuesta transitoria es completamente anticipativa, porque el cambio en la señal de salida se produce *antes* que cambie la señal de entrada. \square

En estos ejemplos la señal a la salida del filtro no exhibe sobrepicos, debido a que las respuestas impulsivas del sistema causal, no causal (bilátero) y anticausal, que se representan en las Figs. 2.C.15(a), 2.C.15(d) y 2.C.15(g), respectivamente, no oscilan en función del tiempo, como sí ocurre con la respuesta impulsiva del filtro ideal, que se muestra en la Fig. 2.100(b). Este no es el caso con los filtros de cuarto orden, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2.C.6. Filtro causal de cuarto orden con respuesta subamortiguada

Para que el filtro tenga ganancia unitaria en la banda de paso, se elige $a = 2\pi f_c$, por lo que la respuesta impulsiva del filtro prototípico es

$$h_c(t) = \frac{(2\pi f_c)^2}{2} \frac{t e^{-2\pi f_c \xi t}}{(1-\xi^2)^2} \left[\operatorname{sinc}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} t\right) - \cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} t\right) \right] u(t)$$

El método de cálculo de la salida $y_c(t)$ para esta respuesta es similar al del Ejemplo 2.C.3. En este caso,

$$\begin{aligned} & - \int_0^{(\tau/2-t)} h_c(\sigma) d\sigma + \int_{(\tau/2-t)}^\infty h_c(\sigma) d\sigma = \\ &= -1 + e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \theta} \left\{ \left[2(1-\xi^2) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \theta \right] \cos \theta + \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + 2\xi \sqrt{1-\xi^2} + \theta \right) \sin \theta \right\}, \end{aligned}$$

donde $\theta = 2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} (t - \tau/2)$. Por lo tanto,

$$y_c(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta < 0, \\ e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \theta} \left\{ \left[2(1-\xi^2) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \theta \right] \cos \theta + \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + 2\xi \sqrt{1-\xi^2} + \theta \right) \sin \theta \right\}, & \text{si } \theta > 0. \end{cases} \quad (2.C.16)$$

La Fig. 2.C.16 muestra la respuesta temporal de la salida $y_c(t)$ en un entorno de la discontinuidad para distintos valores de ξ y f_c . En este caso, la respuesta $y_c(t)$ presenta sobrepicos que ocurren *después* que se haya producido el cambio en la señal de entrada, resultado que es compatible con la naturaleza causal del filtro. \square

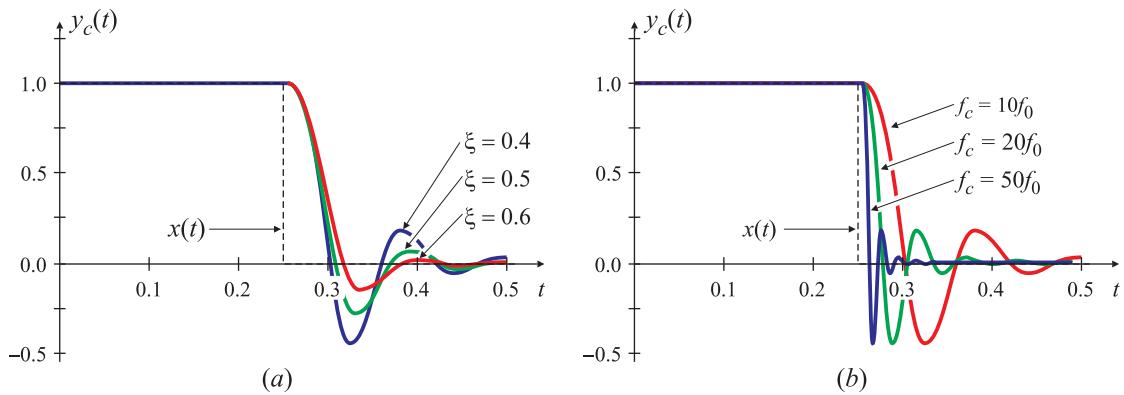


Fig. 2.C.16. Respuestas temporales de la salida $y_c(t)$ del filtro causal de cuatro orden, para distintos valores de ξ (a) y de f_c (b).

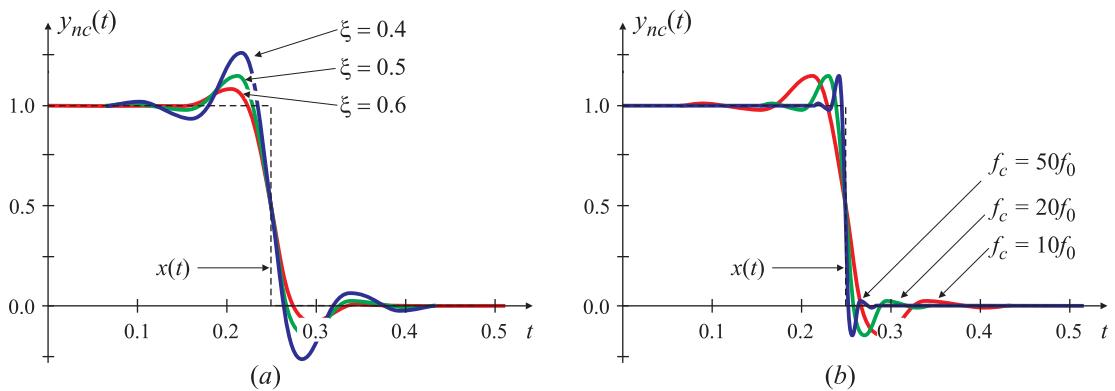


Fig. 2.C.17. Respuestas temporales de la salida $y_{nc}(t)$ del filtro no causal (bilátero) de cuatro orden, para distintos valores de ξ (a) y de f_c (b).

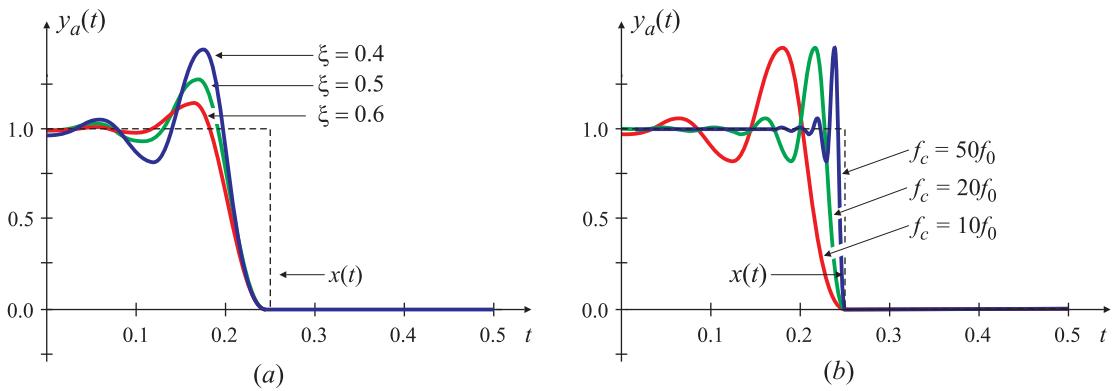


Fig. 2.C.18. Respuestas temporales de la salida $y_a(t)$ del filtro anticausal de cuarto orden, para distintos valores de ξ (a) y de f_c (b).

EJEMPLO 2.C.7. Filtro no causal de cuarto orden con respuesta subamortiguada

La salida del sistema puede calcularse siguiendo la línea del Ejemplo 2.C.4. En este caso, $a = 2\pi f_c$ para que el filtro tenga ganancia unitaria, y entonces,

$$h_{nc}(t) = \frac{\pi f_c}{2} e^{-2\pi f_c \xi |t|} \left[\frac{1}{\xi} \cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} t\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} |t|\right) \right].$$

Tomando en cuenta el valor de $\text{sgn}(\tau/2 - t + \sigma)$ en cada intervalo, para $t < \tau/2$ resulta [Fig. 2.C.14(a)]

$$\begin{aligned} y_{nc}(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{(t-\frac{\tau}{2})} h_a(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{(t-\frac{\tau}{2})}^{\infty} h_a(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\pi f_c \xi |t-\frac{\tau}{2}|} \left[\cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} \left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right) - \frac{1-2\xi^2}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} \left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right) \right] \end{aligned}$$

y para $t < \tau/2$,

$$y_{nc}(t) = 1 - \frac{1}{2} e^{-2\pi f_c \xi |t-\frac{\tau}{2}|} \left[\cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} \left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right) - \frac{1-2\xi^2}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} \left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right) \right]$$

de modo que

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{sgn}\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \left\{ 1 - e^{-2\pi f_c \xi |t-\frac{\tau}{2}|} \times \left[\cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} \left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right) - \frac{1-2\xi^2}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} \left|t-\frac{\tau}{2}\right|\right) \right] \right\} \quad (2.C.17)$$

La Fig. 2.C.17 muestra la evolución temporal de la salida del filtro no causal $y_{nc}(t)$ para distintos valores de ξ y f_c . En este caso, los sobrepicos se producen antes y después del cambio de la señal de entrada, que es compatible con la respuesta impulsiva bilátera de este filtro. \square

EJEMPLO 2.C.8. Filtro anticausal de cuarto orden con respuesta subamortiguada

La respuesta impulsiva de este filtro puede escribirse en función de la respuesta impulsiva del filtro causal, y resulta

$$h_a(t) = h_c(-t) = -\frac{(2\pi f_c)^2}{2} \frac{t e^{2\pi f_c \xi t}}{(1-\xi^2)^2} \left[\text{sinc}\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} t\right) - \cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} t\right) \right] u(-t),$$

y por lo tanto la expresión de la salida del filtro puede escribirse como

$$y_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{\frac{\xi}{2(1-\xi^2)} \theta}}{2(1-\xi^2)} \left\{ \left[2(1-\xi^2) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \theta \right] \cos \theta - \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + 2\xi\sqrt{1-\xi^2} - \theta \right) \sin \theta \right\}, & \text{si } \theta < 0, \\ 0, & \text{si } \theta > 0. \end{cases} \quad (2.C.18)$$

donde $\theta = 2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} (t - \tau/2)$. La Fig. 2.C.18 muestra la evolución temporal de la salida del filtro anticausal $y_a(t)$ para distintos valores de ξ y f_c . En este caso los sobrepicos se producen *antes* que cambie la señal de entrada, que coincide con la naturaleza anticipativa del filtro anticausal. \square

Las respuestas temporales de las Fig. 2.C.16, Fig. 2.C.17 y Fig. 2.C.18 muestra que la magnitud de los sobrepicos es mayor para los filtros causales y anticausales que para el filtro bilátero. A continuación se calcula la magnitud y localización de estos sobrepicos.

EJEMPLO 2.C.9. Cálculo de los sobrepicos

La salidas del filtro causal $y_c(t)$ [ecuación (2.C.16)], del filtro no causal $y_{nc}(t)$ [ecuación (2.C.17)] y la del filtro anticausal [ecuación (2.C.18)] presentan sobrepicos, como se observa en las Figs. 2.C.16, 2.C.17 y 2.C.18, debido a la naturaleza oscilatoria de su respuesta impulsiva, que se muesta en las Fig. 2.C.13(a), 2.C.13(d) y 2.C.13(g), respectivamente. A continuación se calcula el valor de estos sobrepicos en función de los parámetros ξ y f_c de los filtros.

- **Filtros causal y anticausal:** Debido a la similitud entre los filtros causal $H_c(f)$ y anticausal $H_a(f)$, los sobrepicos tienen la misma magnitud, pero cambia la ubicación de los mismos: mientras que en el filtro causal ocurren para $t > \tau/2$, en la salida del filtro anticausal se ubicanen $t < \tau/2$. Por ello de aquí en más se detallan sólo los cálculos para la salida del filtro causal. La envolvente de la salida $y_c(t)$ es

$$e_c(t) = \frac{e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta}}{2(1-\xi^2)^{3/2}} \sqrt{4 + \theta^2 - 3\xi^2 + 2\xi\theta\sqrt{1-\xi^2}},$$

que alcanza su máximo cuando

$$\theta^* = \frac{1}{2\xi} \left[(1 - 2\xi^2)\sqrt{1 - \xi^2} + \sqrt{1 - 17\xi^2 + 16\xi^4 - 4\xi^6} \right], \quad (2.C.19)$$

siempre que

$$0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{6}} \left(8 - \frac{13}{(73 - 6\sqrt{87})^{1/3}} - (73 - 6\sqrt{87})^{1/3} \right)^{1/2} \approx 0,24987.$$

Los extremos relativos ocurren donde $dy_c(\theta)/d\theta = y'_c(\theta) = 0$; para $\theta > 0$, la derivada es

$$y'_c(\theta) = -\frac{e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta}}{2(1-\xi^2)^2} (\theta \cos \theta - \sin \theta),$$

que se anula cuando $\theta = \tan \theta$. Esta ecuación trascendente tiene múltiples soluciones; las primeras cinco ocurren en

$$\theta_1 = 4,49341, \theta_2 = 7,2525, \theta_3 = 10,9041, \theta_4 = 14,0662, \theta_5 = 17,2208.$$

El máximo de y_c ocurre en la solución más próxima a θ^* dada por (2.C.19). El valor del sobrepico en estos instantes está dado por

$$\Delta y_{c,k} = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta_k} \left[1 + \theta_k \left(\frac{\theta_k + 2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{2(1-\xi^2)} \right) \right] \cos \theta_k.$$

A medida que $\xi \rightarrow 0$ el máximo sobrepico se alcanza en valores crecientes de θ_k . En las variables originales, los sobrepicos ocurren en

$$t_k = \frac{\theta_k}{2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\tau}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En cualquier caso, el sobrepico es independiente del ancho de banda del filtro f_c , y sólo depende del factor de amortiguamiento ξ .

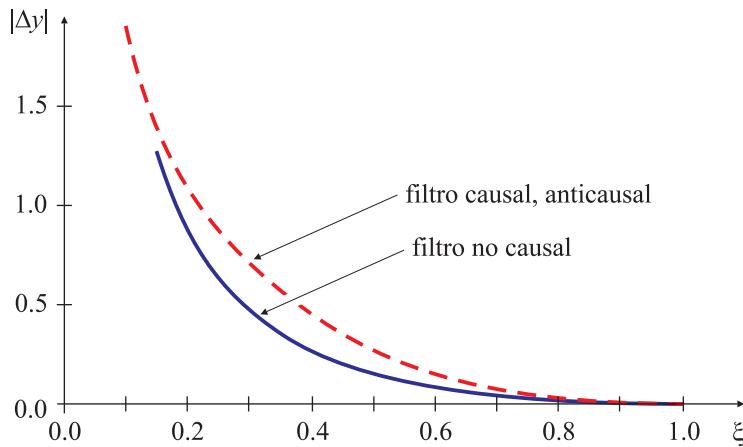


Fig. 2.C.19. Sobrepicos de las respuestas de los filtros causales/anticausales y no causales de cuarto orden cuando se los excita con una onda cuadrada.

- **Filtro no causal:** Para $t > \tau/2$, la derivada de la salida $y_{nc}(t)$ se anula cuando

$$\sqrt{1-\xi^2} \cos\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} \left|t - \frac{\tau}{2}\right|\right) + \xi \sin\left(2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2} \left|t - \frac{\tau}{2}\right|\right) = 0,$$

de donde resulta que los extremos relativos ocurren cuando

$$t = \frac{\tau}{2} + \frac{2\pi k - \arccos \xi}{2\pi f_c \sqrt{1-\xi^2}}$$

para $k \geq 1$. El sobreceso en estos puntos está dado por

$$|\Delta y_{nc}| = \frac{1}{4\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}(\arccos \xi - k\pi)}.$$

La comparación de los sobrepicos en función de ξ se representa en la Fig. 2.C.19. Los filtros causal o anticausal tienen sobrepicos de mayor magnitud que el filtro no causal ya que, si bien las áreas bajo las respuestas impulsivas $h_c(t)$, $h_a(t)$, $h_{nc}(t)$ son unitarias, las variaciones son mayores para $h_c(t)$ o $h_a(t)$ que para $h_{nc}(t)$ porque las primeras ocurren sólo en el rango $t > 0$ o $t < 0$, mientras que la respuesta no causal $h_{nc}(t)$ está definida para $-\infty < t < \infty$. \square

2.C.3.2. Cálculo en el dominio frecuencia

La salida de los filtros también puede calcularse en el dominio frecuencial, antitransformando el producto en frecuencia las transformadas $X(f)$ de la entrada $x(t)$ con las respuestas en frecuencia de cada filtro, $H_c(f)$ o $H_{nc}(f)$, o $H_a(f)$ según corresponda. Como la entrada $x(t)$ es una onda cuadrada con un ciclo de trabajo del 50 % y amplitud unitaria, definida por

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & kT < t < kT + T/2, \\ 0, & kT + T/2 < t < (k+1)T, \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$, la transformada de Fourier de un período es

$$X(f) = \frac{T}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}f\right),$$

por lo que sus coeficientes de Fourier son

$$c_k = \frac{1}{T} X(f)|_{f=k/T} = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}k\right).$$

Como la señal de entrada tiene simetría de media onda, los coeficientes correspondientes a k pares se anulan. Por lo tanto, la transformada de Fourier de la onda cuadrada es

$$X(f) = \sum_k c_k \delta(f - kf_0) = \sum_k \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}k\right) \delta(f - kf_0).$$

Si esta entrada excita un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta en frecuencia $H(f) = |H(f)| e^{j\phi(f)}$, la transformada de Fourier $Y(f)$ de la salida $y(t)$ es

$$Y(f) = X(f)H(f) = H(f) \sum_k c_k \delta(f - kf_0) = \sum_k c_k H(kf_0) \delta(f - kf_0)$$

y por lo tanto,

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \sum_k c_k H(kf_0) e^{j2\pi kf_0 t} = \sum_k c_k |H(kf_0)| e^{j[2\pi kf_0 t + \phi(kf_0)]}.$$

En particular, como los c_k son simétricos ($c_k = c_{(-k)}$), y los filtros tienen respuesta impulsiva real, $\phi(kf_0) = -\phi(-kf_0)$, de modo que $y(t)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} y(t) &= c_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k |H(kf_0)| \left[e^{j[2\pi kf_0 t + \phi(kf_0)]} + e^{-j[2\pi kf_0 t + \phi(kf_0)]} \right] \\ &= c_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} 2c_k |H(kf_0)| \cos[2\pi kf_0 t + \phi(kf_0)]. \end{aligned}$$

Los filtros pasabajos analizados en esta sección tienen ganancia unitaria en la banda de paso, de modo que $H(0) = 1$, y $c_0 = 1/2$. Además, los filtros causales, anticausales y no causales difieren sólo en la fase, y los filtros no causales tienen fase nula, de modo que las salidas $y_c(t)$, $y_{nc}(t)$ e $y_a(t)$ de los filtros causales, no causales y anticausales pueden escribirse como

$$y_c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)}{k} |H_c(kf_0)| \cos[2\pi kf_0 t + \phi(kf_0)], \quad (2.C.20)$$

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)}{k} |H_{nc}(kf_0)| \cos[2\pi kf_0 t], \quad (2.C.21)$$

$$y_a(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)}{k} |H_a(kf_0)| \cos[2\pi kf_0 t - \phi(kf_0)], \quad (2.C.22)$$

donde se ha supuesto, como anteriormente que $H_a(f) = H_c^*(f)$. En general, por efecto de los filtros estas series son absolutamente convergentes, pero es complicado encontrar una expresión matemática cerrada para $y(t)$. A continuación se calcula la salida para los filtros causales y no causales de segundo y cuarto orden analizados previamente.

EJEMPLO 2.C.10. Filtro de segundo orden

- **Filtro causal:** La respuesta en frecuencia del filtro causal de segundo orden está dada por la ecuación (2.C.9). Si la relación entre la frecuencia de corte del filtro y la frecuencia fundamental de la onda cuadrada se designa con ρ , $\rho = f_c/f_0$, se encuentra que

$$H_c(kf_0) = \frac{1}{1 + (k/\rho)^2} e^{-j2\arctan(k/\rho)}.$$

Por lo tanto,

$$y_c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/2)}{k[1 + (k/\rho)^2]} \cos[2\pi kf_0 t - 2\arctan(k/\rho)]. \quad (2.C.23)$$

Es sencillo demostrar que la serie es absolutamente convergente para cualquier valor de t . En efecto,

$$|y_c(t)| < \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{k[1 + (k/\rho)^2]} < \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{1 + (k/\rho)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\rho}{2} \tanh\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) < \infty.$$

La expresión matemática en forma cerrada resulta en una expresión muy complicada. Sin embargo es posible encontrar el resultado numérico en función de ρ y f_0 . Utilizando MATHEMATICA se puede calcular el valor numérico de la salida para cualquier valor de t . Los comandos necesarios son:

```
yct[t_,f0_,r_] := (1/2) +
  (2/Pi)NSum[Sin[Pi k/2]/(k(1+(k/r)^2)) Cos[2 Pi f0 t - 2 ArcTan[k/r]]];
Yc = Table[{t, yct[t, 1, 5]}, {t, 0, 3, 0.005}];
ListPlot[Yc, PlotJoined -> True];
```

Una gráfica de la suma de la serie se muestra en la Fig. 2.C.20(a).

- **Filtro no causal:** La respuesta en frecuencia del filtro no causal de segundo orden se calculó en (2.C.10). Utilizando la notación anterior, resulta

$$H_{nc}(kf_0) = \frac{1}{1 + (k/\rho)^2}.$$

La salida del filtro es

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/2)}{k[1 + (k/\rho)^2]} \cos(2\pi kf_0 t). \quad (2.C.24)$$

La serie comparte la cota de la serie del filtro causal. Nuevamente, la expresión en forma cerrada es muy complicada. La comparación de las expresiones (2.C.23) y (2.C.24) revela que la única diferencia está en el *atraso* de fase que agrega el filtro causal. Una gráfica de la forma de onda temporal se representa en la Fig. 2.C.20(b).

- **Filtro anticausal:** La respuesta en frecuencia del filtro anticausal es

$$H_a(kf_0) = \frac{1}{1 + (k/\rho)^2} e^{+j2\arctan(k/\rho)},$$

que es la expresión conjugada de $H_c(kf_0)$ y por lo tanto la salida del filtro es

$$y_a(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/2)}{k[1 + (k/\rho)^2]} \cos[2\pi kf_0 t + 2\arctan(k/\rho)], \quad (2.C.25)$$

que coincide con (2.C.23) salvo por el signo de la suma en el argumento del coseno: en este caso la salida del filtro *adelanta* en fase a la entrada. La forma de onda temporal de (2.C.25) se representa en la Fig. 2.C.20(c). \square

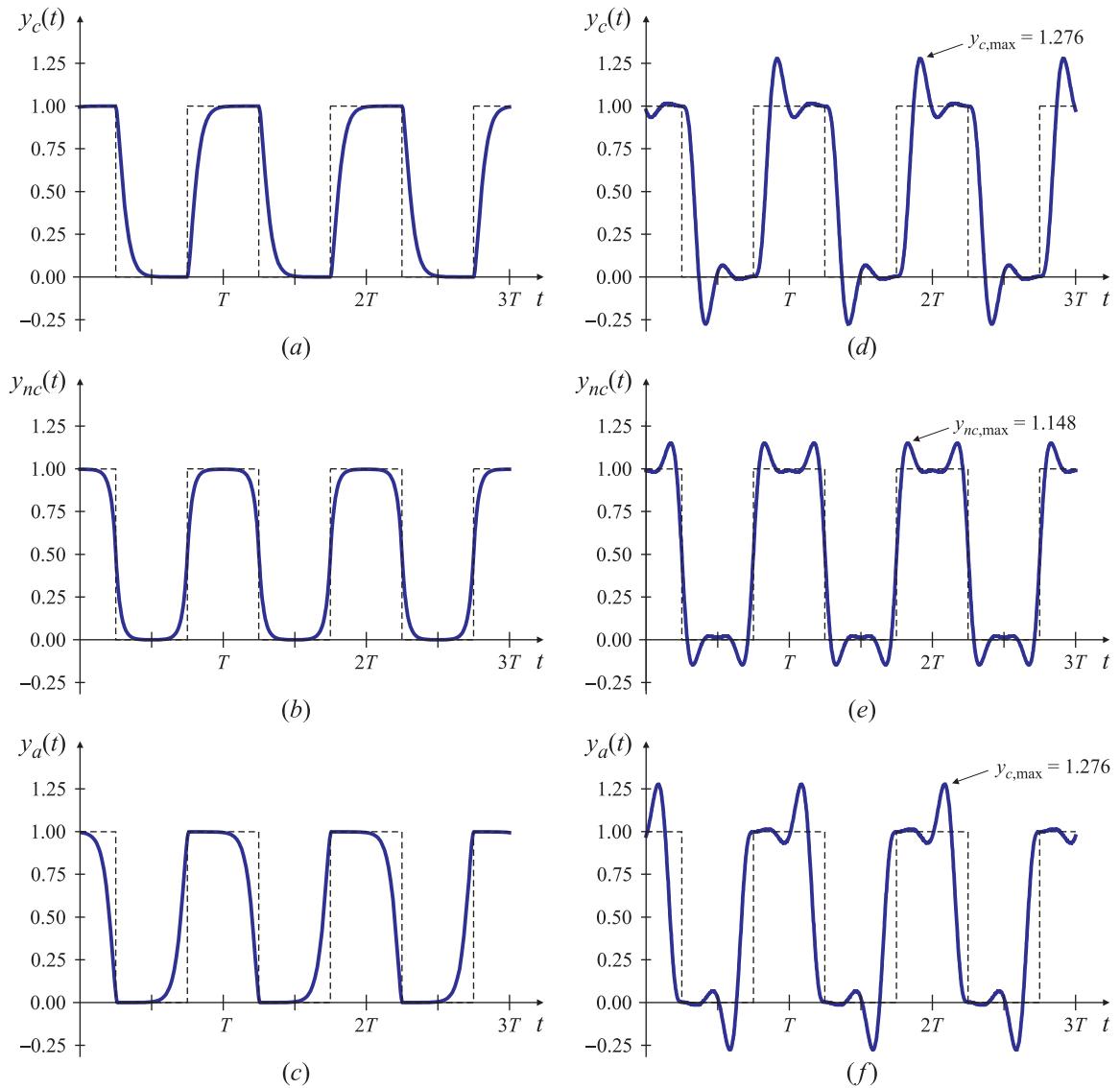


Fig. 2.C.20. Respuesta de los filtros causales, no causales (biláteros) y anticausales de segundo orden (a)-(c), y de cuarto orden (d)-(f), respectivamente. En todos los casos, $\rho = f_c/f_0 = 5$, y para el filtro de cuarto orden, $\xi = 0,5$.

Comparación de las respuestas: La diferencia entre las respuestas (2.C.13)-(2.C.14)-(2.C.15), calculadas en el dominio tiempo, y las respuestas (2.C.23)-(2.C.24)-(2.C.25) calculadas en el dominio frecuencia, es que las primeras son aproximaciones válidas sólo en cercanías de la discontinuidad $t = \tau/2$ [porque la entrada $x(t)$ se approximó por $\text{sgn}(t - \tau/2)$] mientras que las segundas son válidas para todo t . Una inspección cuidadosa de ambas respuestas en un entorno de $\tau/2$ no revela diferencias.

EJEMPLO 2.C.11. Filtro de cuarto orden con respuesta subamortiguada

- **Filtro causal:** La respuesta del filtro causal de cuarto orden, calculada en (2.C.11), puede

escribirse como

$$H_c(kf_0) = \frac{1}{(1-k^2/\rho^2)^2 + (2\xi k/\rho)^2}, \quad \phi(kf_0) = \arg\{H_c(kf_0)\} = -2 \arctan \left[\frac{2\xi k/\rho}{1-(k/\rho)^2} \right].$$

La salida del filtro, calculada en base a la expansión en series de Fourier de $x(t)$, resulta

$$y_c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/2)}{k[(1-k^2/\rho^2)^2 + (2\xi k/\rho)^2]} \cos \left[2\pi kf_0 t - 2 \arctan \left(\frac{2\xi k/\rho}{1-k^2/\rho^2} \right) \right] \quad (2.C.26)$$

Esta serie también es absolutamente convergente, es decir que

$$|y_c(t)| < \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-k^2/\rho^2)^2 + (2\xi k/\rho)^2} < \infty,$$

pero en este caso aún la cota es extremadamente complicada. La forma de onda de la salida $y_c(t)$ del filtro causal se muestra en la Fig. 2.C.20(d) para $\tau/T = \tau f_0 = 0,5$, $\rho = 5$ y $\xi = 0,5$.

- **Filtro no causal:** La expresión de la salida del filtro no causal comparte la misma cota, y puede escribirse como

$$y_{nc}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/2)}{k[(1-k^2/\rho^2)^2 + (2\xi k/\rho)^2]} \cos(2\pi kf_0 t). \quad (2.C.27)$$

Esta salida se grafica en la Fig. 2.C.20(e) para $\tau/T = 0,5$, $\rho = 5$ y $\xi = 0,5$.

- **Filtro anticausal:** La respuesta en frecuencia $H_a(f)$ del filtro anticausal es la conjugada de $H_c(f)$, y por lo tanto la expresión de la salida $y_a(t)$ toma la forma

$$y_a(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/2)}{k[(1-k^2/\rho^2)^2 + (2\xi k/\rho)^2]} \cos \left[2\pi kf_0 t - 2 \arctan \left(\frac{2\xi k/\rho}{1-k^2/\rho^2} \right) \right] \quad (2.C.28)$$

La evolución temporal de esta salida, para $\tau/T = 0,5$, $\rho = 5$ y $\xi = 0,5$, se grafica en la Fig. 2.C.20(f). \square

Comparación de las respuestas: De manera análoga al ejemplo anterior, la diferencia entre las respuestas (2.C.16)-(2.C.17)-(2.C.18) calculadas en el dominio tiempo, y las respuestas (2.C.26)-(2.C.27)-(2.C.28) calculadas en el dominio frecuencia, es que las primeras son solo aproximadas, válidas en un entorno de la discontinuidad en $t = \tau/2$, mientras que las segundas son expresiones exactas que valen para cualquier valor de t . Nuevamente, las respuestas aproximadas y las exactas en cercanías de la discontinuidad son iguales.

Apéndice 2. D

Cálculo de series y transformadas de Fourier usando Mathematica

En este apéndice se presenta una forma sencilla de calcular los coeficientes de Fourier y las transformadas usando MATHEMATICA. No pretende ser una introducción a un programa tan avanzado, sino proveer algunas herramientas para evitar laboriosos cálculos manuales.

La principal función a utilizar es `Integrate[]`. El comando

```
Integrate[f, {x, xmin, xmax}]
```

devuelve la integral definida $\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) dx$. El uso de otros comandos se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.D.1. Cálculo de la serie de Fourier de un tren de pulsos triangulares

Se desea calcular los coeficientes de Fourier del tren de pulsos triangulares que se muestra en la Fig. 2.D.1. La expresión de los coeficientes está dada por la ecuación (2.22), (página 75)

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{-T_0/6} x(t) e^{-j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt,$$

y en este caso es necesario separar la integral en seis partes, una para cada una de las rectas de pendientes $\pm 12A/T_0$ como se representa en la Fig. 2.D.2. Entonces,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{-T_0/6} \left(\frac{12A}{T_0} t + 3A \right) e^{-j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt + \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/6}^{-T_0/12} \left(-\frac{12A}{T_0} t - A \right) e^{-j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt + \\ &\quad \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/12}^0 \left(\frac{12A}{T_0} t + A \right) e^{-j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{-T_0/12} \left(-\frac{12A}{T_0} t + A \right) e^{-j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt + \\ &\quad \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/12}^{-T_0/6} \left(\frac{12A}{T_0} t - A \right) e^{-j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt + \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/6}^{-T_0/4} \left(-\frac{12A}{T_0} t + 3A \right) e^{-j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt. \end{aligned}$$

El código en MATHEMATICA para calcular esta integral es casi una copia de la expresión anterior:

```
In[1]:= ck = (Integrate[(12 A/T0)t + 3A) Exp[-(I 2 Pi k/T0)t], {t, -T0/4, -T0/6} ] +
          Integrate[(-(12 A/T0)t - A) Exp[-(I 2 Pi k/T0)t], {t, -T0/6, -T0/12} ] +
          Integrate[(12 A/T0)t + A) Exp[-(I 2 Pi k/T0)t], {t, -T0/12, 0} ] +
          Integrate[(-(12 A/T0)t + A) Exp[-(I 2 Pi k/T0)t], {t, 0, T0/12} ] +
          Integrate[(12 A/T0)t - A) Exp[-(I 2 Pi k/T0)t], {t, T0/12, T0/6} ] +
          Integrate[(-(12 A/T0)t + 3A) Exp[-(I 2 Pi k/T0)t], {t, T0/6, T0/4} ])/T0
```

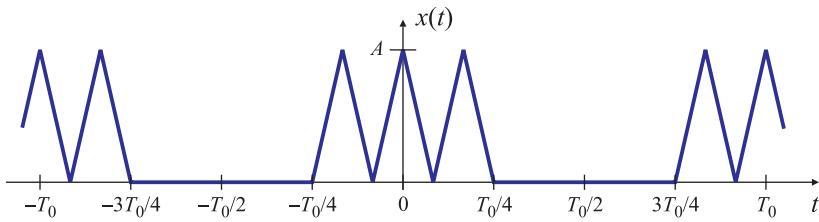
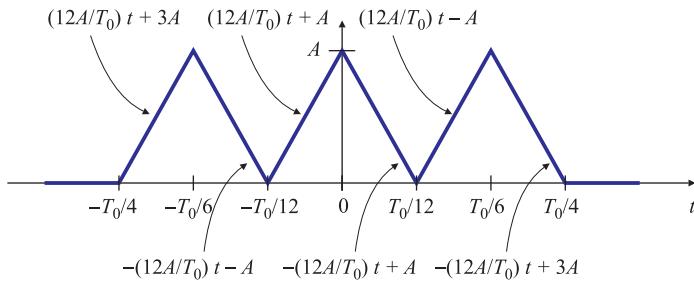
Fig. 2.D.1. Señal periódica $\tilde{x}(t)$.

Fig. 2.D.2. Detalle de un período del tren de pulsos triangular.

Las letras griegas se pueden ingresar utilizando la tecla **«Esc»** y la letra latina equivalente: por ejemplo, π se ingresa como **«Esc»p«Esc»**, α como **«Esc»a«Esc»**, etc. La etiqueta “**In[1]:=**” es agregada por el programa cuando comienza a evaluar el comando, lo que ocurre apenas se presiona la tecla **«Intro»** del teclado numérico, o la combinación **«Mayus»+«Intro»** del teclado común. Luego de algunos segundos, el programa responde con:

$$\text{Out [1]} := \text{Ck} = \frac{1}{T_0} \left(\frac{\frac{A \left(6 - \frac{6}{e^{\frac{1}{6} k \pi}} - I k \pi \right) T_0}{2 k^2 \pi^2} - \frac{A \left(-6 + 6 e^{\frac{1}{6} k \pi} - I k \pi \right) T_0}{2 e^{\frac{1}{3} k \pi} k^2 \pi^2} + \frac{A \left(6 - 6 e^{\frac{1}{6} k \pi} + I k \pi \right) T_0}{2 k^2 \pi^2} + \frac{A e^{\frac{1}{3} k \pi} \left(6 - 6 e^{\frac{1}{6} k \pi} + I k \pi \right) T_0}{2 k^2 \pi^2} + \frac{A e^{\frac{1}{6} k \pi} \left(-6 + e^{\frac{1}{6} k \pi} (6 - I k \pi) \right) T_0}{2 k^2 \pi^2} + \frac{A \left(-6 + e^{\frac{1}{6} k \pi} (6 - I k \pi) \right) T_0}{2 e^{\frac{1}{2} k \pi} k^2 \pi^2} } \right)$$

Esta expresión se puede reducir utilizando el comando **Simplify[]** o **FullSimplify[]**:

In [2]:= Ck = Simplify[Ck]

y, nuevamente, luego de algunos segundos, se obtiene

$$\text{Out [2]} := \text{Ck} = \frac{12 A \left(1 + 2 \cos\left[\frac{\pi k}{3}\right] \right) \sin\left[\frac{\pi k}{12}\right]^2}{k^2 \pi^2}$$

En MATHEMATICA, los nombres de las funciones se escriben con mayúscula, y el argumento queda encerrado entre corchetes. Por ejemplo, la expresión **Cos** [$\pi/2$] devuelve 0, pero **cos** ($\pi/2$) devuelve $(\cos \pi)/2$, que evidentemente es matemáticamente incorrecta, pero no para el programa, ya que **cos** (con minúscula) es una variable más.

La expresión de los coeficientes c_k se puede simplificar aún más (esta vez “a mano”), y finalmente se obtiene que

$$c_k = \frac{A}{12} \left[1 + 2 \cos\left(\frac{\pi k}{3}\right) \right] \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{12}\right) \right]^2$$

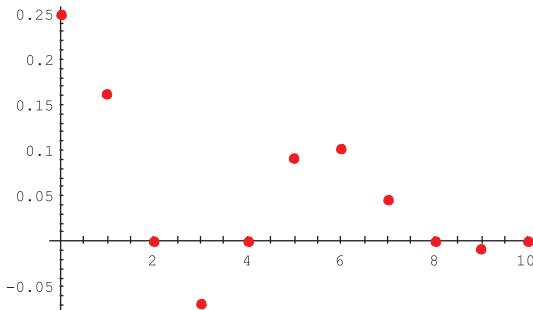


Fig. 2.D.3. Gráfico de los 10 primeros coeficientes de Fourier, para $A = 1$.

En MATHEMATICA la función `Sinc[]` está definida como $(\sin x)/x$, y no como $\sin(\pi x)/(\pi x)$ como en MATLAB. De esta forma, se puede definir los coeficientes de Fourier como:

$$\text{In [4]} := \quad C_k = \frac{A}{12} \left(1 + 2\cos\left[\frac{\pi k}{3}\right]\right) (\text{Sinc}\left[\frac{\pi k}{12}\right])^2;$$

Algunos valores de los coeficientes se pueden generar utilizando el comando `Table[]`. En el siguiente fragmento de código, este comando está incluido dentro de la instrucción `FullSimplify[]` para obtener expresiones numéricas más sencillas:

$$\text{In [5]} := \quad TCK = \text{FullSimplify}[\text{Table}[C_k, \{k, 0, 10\}]]$$

$$\text{Out [5]} := \left\{ \frac{A}{12}, -\frac{6(-2 + \sqrt{3})A}{\pi^2}, 0, -\frac{2A}{3\pi^2}, 0, \frac{6(2 + \sqrt{3})A}{25\pi^2}, \frac{A}{\pi^2}, -\frac{6(2 + \sqrt{3})A}{49\pi^2}, 0, -\frac{2A}{27\pi^2}, 0 \right\}$$

Los coeficientes se pueden graficar en función de k utilizando el comando `ListPlot[]`:

$$\text{ListPlot}[\text{Table}[\{k, C_k/.A \rightarrow 1\}, \{k, 0, 10\}], \text{PlotStyle} \rightarrow \text{PointSize}[0.02]]$$

obteniéndose el gráfico que se muestra en la Fig. 2.D.3.

Finalmente, se puede graficar la aproximación utilizando el comando `Plot[]`. En este caso, dentro del comando `Plot[]` se efectúa la suma de un número finito de términos de la serie. Si se supone $A = 1$ y $T_0 = 1$, las instrucciones necesarias para graficar la aproximación son:

$$\text{Plot}[\sum[\frac{1}{12}(1+2\cos[\frac{k\pi}{3}]) (\text{Sinc}[\frac{k}{12}])^2 \text{Exp}[I 2 \pi k t], \{k, -10, 10\}], \{t, -1, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 50, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$$

El gráfico de la aproximación para la suma de 21 términos de la serie se muestra en la Fig. 2.D.4(a), y para 101 términos en la Fig. 2.D.4(b). \square

Este ejemplo también muestra que el uso de las propiedades de la serie y la transformada facilita el cálculo de los coeficientes, como se detalla a continuación.

EJEMPLO 2.D.2. Coeficientes del tren de pulsos triangulares aplicando propiedades

La idea en este caso es calcular la transformada $X(f)$ de un período de la señal periódica (por ejemplo, la que se muestra en la Fig. 2.D.2), y a partir de ella calcular los coeficientes de la serie,

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(f)|_{f=k/T_0}.$$

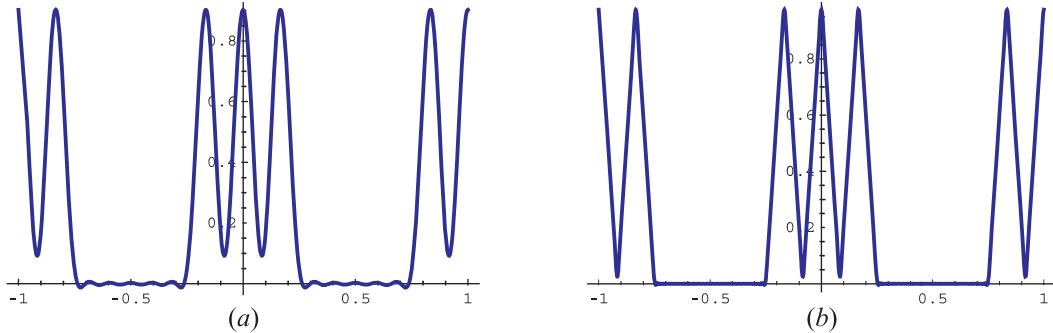


Fig. 2.D.4. Reconstrucción del tren de pulsos triangulares a partir de la suma de $2 \times 10 + 1$ (a) y $2 \times 50 + 1$ (b) términos de la serie de Fourier.

La manera más sencilla parece ser comenzando con la transformada de Fourier del pulso triangular que se extiende desde $-T_0/12$ hasta $T_0/12$. Esta transformada se puede calcular a partir de la convolución de dos pulsos rectangulares de ancho $T_0/12$, y alto \sqrt{A} , como se propone en el Ejercicio 24. Aplicando la propiedad de convolución, se encuentra que la transformada de este único pulso triangular es

$$X_1(f) = \frac{AT_0}{12} \left[\text{sinc}\left(\frac{T_0}{12}f\right) \right]^2.$$

Los transformadas de los dos pulsos triangulares a la izquierda y a la derecha del pulso central se calculan aplicando la propiedad de desplazamiento. El pulso de la izquierda está adelantado $\tau = -T_0/6$ unidades de tiempo y el pulso de la derecha está atrasado en la misma cantidad. Por lo tanto, la transformada del pulso de la izquierda es

$$X_2(f) = e^{j2\pi\frac{T_0}{6}f} X_1(f)$$

y la del pulso de la derecha

$$X_3(f) = e^{-j2\pi\frac{T_0}{6}f} X_1(f).$$

Combinando estos tres resultados,

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{AT_0}{12} \left(1 + e^{j2\pi\frac{T_0}{6}f} + e^{-j2\pi\frac{T_0}{6}f} \right) \left[\text{sinc}\left(\frac{T_0}{12}f\right) \right]^2 \\ &= \frac{AT_0}{12} \left[1 + 2 \cos\left(2\pi\frac{T_0}{6}f\right) \right] \left[\text{sinc}\left(\frac{T_0}{12}f\right) \right]^2. \end{aligned}$$

Finalmente, evaluando la transformada en $f = k/T_0$, y escalando por $1/T_0$ se encuentra que

$$c_k = \frac{A}{12} \left[1 + 2 \cos\left(\pi\frac{k}{3}\right) \right] \left[\text{sinc}\left(\frac{k}{12}\right) \right]^2,$$

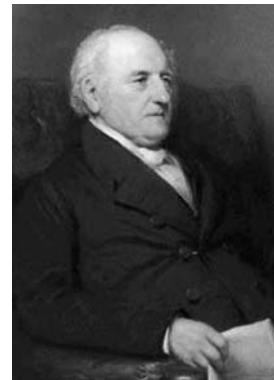
que evidentemente coincide con el resultado del ejemplo anterior. \square

Apéndice 2.E

Breves reseñas biográficas

Peter Barlow

Nació el 15 de octubre de 1776 en Norwich, Inglaterra. Aunque autodidacta, su educación fue tan buena que pudo competir exitosamente para un puesto de asistente matemático en la Real Academia Militar de Woolwich. Luego de un tiempo comenzó a contribuir varios artículos sobre matemáticas para distintas encyclopedias. Además de estos artículos publicó una serie de importantes libros, como *An elementary investigation of the theory of numbers* (1811) y *A new mathematical and philosophical dictionary* (1814). Es recordado por dos contribuciones importantes: en 1814 produjo un segundo libro, *New mathematical tables*, que rápidamente fue conocido como *Las tablas de Barlow*, donde se listaban los factores, cuadrados, cubos, raíces cuadradas, inversos y logaritmos hiperbólicos de todos los números de 1 a 10000. Se consideraba tan exacto que fue reimpresso regularmente desde entonces.



Su segunda contribución fue en el campo de la astronomía, donde diseñó un lente formado por un líquido incoloro entre dos piezas de vidrio. Sin embargo, en vida fue reconocido por su trabajo en electromagnetismo.

También se dedicó al estudio de la artillería, y al diseño de puentes estudiando el efecto sobre las olas que provocaría la remoción del viejo puente de Londres. Fue designado Real Comisionado de Trenes, y entre 1839 y 1849 llevó a cabo varios experimentos para demostrar que las limitaciones en la pendiente de las vías y los radios de curvatura en los giros propuestas por Stephenson eran correctas. También intentó determinar la sección más eficiente para los rieles. Falleció en Kent el 1 de marzo de 1862.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Daniel Bernoulli

Nació el 8 de febrero de 1700 en Groningen, Holanda. Debido a la férrea oposición de

padre para que estudiara matemáticas, estudió medicina en Heidelberg en 1781, y en Estrasburgo en 1719.

Su tesis doctoral versó sobre la mecánica de la respiración, en base a los conceptos sobre conservación de la energía que le enseñase su padre. Su trabajo médico acerca del flujo sanguíneo y la presión arterial lo interesaron en el flujo de los fluidos.

En 1725 viaja a San Petersburgo, donde estudia los sistemas oscilatorios. Uno de sus mayores descubrimientos es que los movimientos de las cuerdas de los instrumentos musicales se componen de un número infinito de vibraciones armónicas superpuestas en la cuerda.

También produjo trabajos sobre probabilidad y economía política, pero sin duda su trabajo más importante fue el estudio de la hidrodinámica, que contiene el primer análisis correcto del agua que fluye por un orificio. En el capítulo 10 de *Hydrodynamica* discute la base de la teoría cinética de los gases.

En 1759 vuelve a Basel, donde enseña física durante 26 años. Durante las clases realizaba distintas experiencias, que lo indujeron a conjeturar muchas leyes que no fueron verificadas hasta muchos años después, como la ley de Coulomb de la electroestática.

Ganó el Gran Premio de la Academia de París diez veces, por temas en astronomía y náutica: sobre la teoría de las mareas de Newton (1740), ensayos en magnetismo (1743 y 1746), un método para determinar el tiempo en el mar (1747), un ensayo sobre las corrientes marinas (1751), el efecto de las fuerzas en los barcos (1753), y propuestas para reducir el cabeceo durante las marejadas (1757). También elaboró un excelente resumen sobre la oscilación de la columna de aire en los tubos de los órganos de viento.

Recibió gran cantidad de menciones honoríficas durante su vida, y fue electo miembro de las principales sociedades científicas de su época, incluyendo las de Bolonia, San Petersburgo, Berlín, París, Londres, Berna, Turín, Zurich y Manheim. Falleció el 17 de Marzo de 1782 en Basel, Suiza.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)



Georg Cantor

Nacido en San Petersburgo, el 3 de marzo de 1845, fue un matemático alemán, inventor con Dedekind de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales).

Cantor descubrió que los conjuntos infinitos no tienen siempre el mismo tamaño, o sea el mismo cardinal: por ejemplo, el conjunto de los racionales es enumerable (“del mismo tamaño” que el conjunto de los naturales), mientras que el de los reales no lo es: existen, por lo tanto, varios infinitos, más grandes los unos que los otros.

Entre estos infinitos, los hay tan grandes que no tienen correspondencia en el mundo real, asimilado al espacio vectorial \mathbb{R}^3 . Este hecho supuso un desafío para un espíritu tan religioso como el de Georg Cantor, y fue víctima de acusaciones de blasfemia por parte de ciertos colegas envidiosos o que no entendían sus descubrimientos. Sufrió de depresión, y

fue internado repetidas veces en hospitales psiquiátricos. Su mente luchaba contra varias paradojas de la teoría de los conjuntos, que parecían invalidar toda su teoría (hacerla inconsistente o contradictoria, en el sentido de que una cierta propiedad podría ser a la vez cierta y falsa).

Además, trató durante muchos años de probar la hipótesis del continuo, lo que se sabe hoy que es imposible, y que tiene que ser aceptada (o rehusada) como axioma adicional de la teoría.

Empezó a interpretar el infinito absoluto (que no es concebible por la mente humana) como Dios, y escribió artículos religiosos sobre el tema. Hoy en día, la comunidad matemática reconoce plenamente su trabajo, y admite que significa un salto cualitativo importante en el raciocinio lógico.

Murió en una clínica psiquiátrica de monjas en Halle el 6 de enero de 1918, aquejado de una enfermedad maníaco-depresiva (la cual se le atribuye a su edad).

(Wikipedia)



Lennart Axel Edvard Carleson

Matemático sueco nacido el 18 de marzo de 1928, es uno de los referentes en el área del análisis armónico.

Fue alumno de Arne Beurling, y recibió su doctorado de la Universidad de Uppsala en 1950. Es profesor emérito de la Universidad de Uppsala, del Instituto Tecnológico Real de Estocolmo, y de la Universidad de California en Los Ángeles, y fue director del Instituto Mittag-Leffler en Djursholm durante 1968-1984. Entre 1978 y 1982 se desempeñó como presidente de la Unión Matemática Internacional.

Se casó con Butte Jonsson en 1953, y es padre de dos hijos Caspar (nacido en 1955) y Beatrice (nacida en 1958).



Su trabajo incluye la solución de muchos problemas destacados por medio de técnicas combinacionales, entre los que merecen citarse el teorema corona (1962) en la teoría de los espacios de Hardy, la convergencia casi en todo punto de las series de Fourier de funciones de cuadrado integrable, y trabajos en dinámica compleja. También es conocido por la teoría de medidas que lleva su nombre.

Además de varios artículos relevantes, ha publicado un libro muy influyente sobre teoría potencial, *Selected Problems on Exceptional Sets* (1967), y en colaboración con T. W. Gamelin un texto sobre la iteración de funciones analíticas, *Complex Dynamics* (1993).

Recibió muchas distinciones a lo largo de su carrera, incluyendo el Wolf Prize en Matemáticas en 1992, la medalla de oro Lomonosov en 2002, la medalla Sylvester en 2003, y el premio Abel en 2006 por sus profundas contribuciones al análisis armónico y a la teoría de sistemas dinámicos.

(Wikipedia)

James Cooley

Nació en EE.UU. en 1926. Se graduó en 1949, y recibió su doctorado en 1961 en la Universidad de Columbia, Nueva York, en matemática aplicada. Fue uno de los programadores de la computadora de von Newmann en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, desde 1953 hasta 1956. Trabajó en cálculos de mecánica cuántica desde 1956 hasta 1962 en el Instituto Courant, de Nueva York, cuando se unió al grupo de investigación del IBM Watson Research Center, Yorktown Heights, NY.

Su contribución más importante al mundo de las matemáticas y el procesamiento digital de señales fue el desarrollo de la FFT, realizado en conjunto con John Tukey mientras trabajaba para la división de investigaciones de IBM en 1965. Este trabajo fue impulsado por el Dr. Richard L. Garwin de IBM Watson Research quien trataba de averiguar el cumplimiento del tratado de armas nucleares con los soviéticos (acuerdos SALT). La idea era instalar sensores sísmicos en los países vecinos a la Unión Soviética y detectar las vibraciones producidas por los ensayos nucleares, supuestamente abolidos. Estas vibraciones se analizaban con técnicas de Fourier, siendo necesario transformar lo más rápidamente posible un gran volumen de datos. Sugirió la idea de cómo se podían programar un algoritmo semejante a Cooley y Tukey, los que hicieron el trabajo. Se colocaron los sensores, se procesaron las señales, y se pudo detectar una explosión nuclear con una precisión de 15 kilómetros del lugar exacto.

El trabajo que publicaron Cooley y Tukey en 1965 describiendo el algoritmo de la FFT disparó las aplicaciones del procesamiento digital de señales. Después de la publicación Cooley se preocupó de ayudar a otros a entender el algoritmo y su uso.

Luego de retirarse de IBM en 1991 se vinculó con el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Rhode Island, Kingston, donde sigue participando de proyectos de investigación en detección de señales.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive; IEEE*)



August Leopold Crelle

Nació el 11 de marzo de 1780 en Eichwerder, Alemania. Principalmente autodidacta, sintió pasión por las matemáticas, a las que dedicó su tiempo libre mientras aseguraba su subsistencia como ingeniero civil, destacándose en la construcción y planeamiento de carreteras y de una de las primeras líneas férreas de Alemania para el Ministerio Prusiano del Interior.

A pesar de no haber recibido educación formal, a los 36 años su tesis *De calculi variabilium in geometria et arte mechanica usu* fue aprobada por la Universidad de Heidelberg, otorgándole un doctorado. Aunque no fue un matemático original, su pasión por el tema, su capacidad organizativa, y su habilidad para detectar jóvenes talentos matemáticos lo hizo destacarse sobre sus pares.

Fundó en 1826 una revista dedicada exclusivamente a las matemáticas, la *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, de la que fue editor en jefe durante 52 volúmenes. En

esta revista publicaron sus primeros trabajos Abel, Eisenstein, Dirichlet, Grassman, Jacobi, Möbius, Weierstrass, entre otros.

En 1828 se vincula al Ministerio Prusiano de Educación y Cultura, donde diseñó una política de enseñanza de la matemática en las escuelas y colegios técnicos. Después de un viaje de estudios a Francia en 1830, resaltó en su informe la organización de la enseñanza matemática francesa, aunque criticaba el énfasis en las aplicaciones. Publicó gran cantidad de libros de textos y tablas de multiplicación, que conocieron varias ediciones.

Aunque el propósito de su revista eran tanto las matemáticas puras como las aplicadas, cambió su punto de vista al no encontrar artículos de matemáticas aplicadas que tuviesen una profundidad similar. De modo que creó una revista destinada exclusivamente a las aplicaciones, la *Journal für die Bankunst*, que conoció 30 volúmenes, finalizando su publicación en 1851.

Crelle fue elegido miembro de la Academia de ciencias de Berlín en 1827, con el respaldo de Alexander von Humboldt. Falleció en Berlín el 6 de octubre de 1855.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)



Jean D'Alembert

Nació el 17 de noviembre de 1717 en París. Hijo no reconocido del general Destouches y de Madame de Tencin, fue dejado en la puerta de la iglesia de Saint-Jean le Rond, donde un comisario de policía lo recogió y dio en adopción a la mujer de un vidriero llamado Alembert.

De todos los temas que estudió durante su juventud, su verdadera pasión eran las matemáticas, en las que prácticamente fue autodidacta. Presentó su primer trabajo a la Academia de Ciencias de París en julio de 1739, y en 1749 envió un segundo trabajo sobre mecánica de fluidos. Su fama de erudito le llevó a recibir invitaciones de Federico II de Prusia y de Catalina la Grande, que rechazó. Ayudó a resolver la controversia sobre la conservación de la energía cinética mejorando la definición de fuerza de Newton en su *Traité de dynamique* (1743).



En 1746, junto con Diderot, comenzó a editar la *Encyclopédie*, para la cual escribió la mayoría de los artículos sobre matemáticas. Fue un pionero en el estudio de las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales y su aplicación a problemas físicos. En algunos países el teorema fundamental del álgebra se conoce como teorema de d'Alembert-Gauss porque fue el primero en dar una prueba casi completa. En 1747, en un artículo sobre el problema de las cuerdas vibrantes, aparece por primera vez la ecuación de ondas. Fue uno de los primeros en advertir la importancia de establecer firmemente la teoría de límite.

Falleció el 29 de octubre de 1783 en París, donde fue enterrado en una tumba sin marca, como era habitual con los no creyentes.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Paul A. M. Dirac

Nació en Bristol, Inglaterra, el 8 de agosto de 1902. Se graduó como ingeniero electricista en 1921, pero su interés principal eran las matemáticas, donde descolló. Su interés en la física cuántica despertó al leer un trabajo de Heisenberg, en donde encontró similitudes entre algunas propiedades de la mecánica cuántica y la mecánica Hamiltoniana.

En 1928, trabajando en los spines no relativistas de Pauli, halló la ecuación de Dirac, una ecuación relativista que describe al electrón. Este trabajo permitió a Dirac predecir la existencia del positrón, la antipartícula del electrón, que fue observado por primera vez por Carl Anderson en 1932. Dirac contribuyó también a explicar el spin como un fenómeno relativista.

El libro *Principles of Quantum Mechanics*, publicada en 1930, se convirtió en uno de los libros de texto más comunes en la materia y aun hoy es utilizado. Introdujo la notación de Bra-ket y la función delta de Dirac.

En 1931 Dirac mostró que la existencia de un único monopolo magnético en el Universo sería suficiente para explicar la cuantificación de la carga eléctrica. Esta propuesta recibió mucha atención pero hasta la fecha no hay ninguna prueba convincente de la existencia de monopolos.

Paul Dirac compartió en 1933 el Premio Nobel de Física con Erwin Schrödinger “por el descubrimiento de nuevas teorías atómicas productivas.” Dirac obtuvo la cátedra Lucasiana de matemáticas de la Universidad de Cambridge donde ejerció como profesor de 1932 a 1969.

Aunque Dirac realizó importantes aportes a la física, su motivación fue siempre perseguir la belleza matemática. Falleció el 20 de octubre de 1984 en Florida, EE.UU.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*; Wikipedia)



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Nació en Düren, actual Alemania, el 13 de febrero de 1805. Su familia era natural del pueblo de Richelet en Bélgica, donde vivió su abuelo, y de donde derivó su apellido “Lejeune Dirichlet” (“le jeune de Richelet” = “el joven de Richelet”).

Su padre era el jefe de la oficina de correos de Duren. El joven Johann fue educado en Alemania, y después en Francia, donde aprendió de muchos de los más renombrados matemáticos del tiempo, relacionándose con algunos como Fourier.

Tras graduarse, fue profesor en las universidades de Breslau (1826-1828), Berlín (1828-1855) y Göttingen, en donde ocupó la cátedra dejada por Gauss tras su muerte. Sus aportaciones más relevantes se centraron en el campo de la teoría de números, prestando especial atención al estudio de las series, y desarrolló la teoría de las series de Fourier.



Su primera publicación comprendió una demostración particular del teorema de Fermat, para el caso $n = 5$, que también fue completada por Adrien-Marie Legendre, uno de sus revisores. Dirichlet completó su propia prueba casi al mismo tiempo; más adelante completó también la prueba para $n = 14$.

Aplicó las funciones analíticas al cálculo de problemas aritméticos y estableció criterios de convergencia para las series. En el campo del análisis matemático perfeccionó la definición y concepto de función, y en mecánica teórica se centró en el estudio del equilibrio de sistemas y en el concepto de potencial newtoniano.

Se casó con Rebecka Mendelssohn, que provenía de una distinguida familia de judíos conversos. Era la nieta del filósofo Moses Mendelssohn, hija de Abraham Mendelssohn Bartholdy y hermana del compositor Felix Mendelssohn Bartholdy. Dirichlet falleció en Göttingen, actual Alemania, el 5 de mayo de 1859.

(Wikipedia)

Leonhard Euler

Nació en Suiza el 15 de abril de 1707. Su interés en la matemática despertó con las enseñanzas de su padre; posteriormente tomó clases con Johann Bernoulli. Su tesis de 1723 compara y contrasta las ideas filosóficas de Descartes y Newton. En 1727 se une a la Academia de Ciencias de San Petersburgo, creada por Catalina I dos años antes.

En 1744 comienza sus actividades como director de matemáticas de la Academia de Ciencias de Berlín, donde sus tareas incluían la supervisión del observatorio y los jardines botánicos, selección de personal, atender los asuntos financieros, arreglar la publicación de calendarios y mapas geográficos, etc. También debía resolver problemas prácticos para el Rey, como la corrección del nivel del canal de Finow, y supervisión del trabajo en bombas y cañerías del sistema hidráulico del palacio Sans Souci, residencia veraniega del rey, y aconsejaba al gobierno sobre las loterías del estado, seguros, pensiones, anualidades y artillería.



A pesar de esta carga de trabajo, su producción científica durante este período fue fenomenal: durante los veinticinco años que estuvo en Berlín produjo alrededor de 380 artículos. Escribió libros sobre el cálculo de variaciones, el cálculo de las órbitas planetarias, artillería y balística, análisis matemático, navegación y construcción de barcos, el movimiento de la luna, lecciones sobre cálculo diferencial, etc. En 1766, a los 59 años vuelve a San Petersburgo.

En 1771 pierde totalmente la vista, pero gracias a su formidable memoria puede continuar sus trabajos en óptica, álgebra y el movimiento de la luna. Después de su muerte en 1783, la Académica de Ciencias de San Petersburgo continuó publicando sus obras inéditas durante casi 50 años.

Su producción matemática es tan vasta que se lo considera el autor matemático más prolífico de todos los tiempos. Impulsó el desarrollo de la geometría analítica, donde fue el primero en considerar el seno, coseno, etc. como funciones y no como cuerdas, idea que databa desde la época de Ptolomeo. Hizo considerables aportes a la geometría, el cálculo y

la teoría de números. Hizo converger el cálculo diferencial de Leibniz y Newton en el análisis matemático. Introdujo las funciones beta y gamma, y los factores integrales para la resolución de ecuaciones diferenciales. Estudió la mecánica del continuo, el problema de los tres cuerpos, teoría de elasticidad, acústica, la teoría ondulatoria de la luz, hidráulica, música. Fijó las bases de la mecánica analítica.

A él se debe la notación $f(x)$ para una función (1734), e como base de los logaritmos naturales (1727), i como la unidad imaginaria (1777), π para pi, y Σ para la sumatoria (1755), la notación para diferencias finitas Δy y $\Delta^2 y$, etc.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Jean Baptiste Fourier

Nacido en Auxerre, Francia, el 21 de marzo de 1768 y huérfano a la edad de ocho años, Jean Baptiste Joseph Fourier ingresó en 1789 en la *Ecole Royale Militaire* de Auxerre, donde mostró talento para la literatura, pero muy pronto las matemáticas se volvieron su interés principal. A los 14 años había completado el estudio de los seis volúmenes del *Cours de mathematique* de Bézout.

En 1787 solicitó su ingreso en la abadía Benedictina para consagrarse a la religión, aunque su interés por las matemáticas permanecía intacto. Su correspondencia sugiere que su propósito era destacarse en esta ciencia: es famosa una carta suya a Bonard donde anota: “Ayer fue mi vigésimo primer cumpleaños. A esta edad Newton y Pascal habían hecho méritos suficientes para alcanzar la inmortalidad”.

Dejó el monasterio benedictino en 1789 y se dirigió a París, donde presentó un trabajo sobre ecuaciones algebraicas en la Academia Real de Ciencias. En 1790 tomó un puesto de profesor en el colegio Benedictino en la Escuela Real Militar de Auxerre, donde había estudiado.

Hasta ese entonces, siempre dudó entre dedicarse a la religión o a las matemáticas. Sin embargo, este conflicto se resuelve en 1793, cuando se involucra en política, donde se unió al Comité Revolucionario local. Fourier abrazó los ideales de la Revolución, aunque no apoyó el Terror.

La revolución era un proceso complejo, con muchas facciones que tenían objetivos comunes pero que estaban violentamente enfrentadas entre sí. Fourier defendió a una facción de Orleáns, y a consecuencia de ello estuvo en prisión un tiempo, con riesgo de terminar en la guillotina. Finalmente, los cambios políticos acaecidos después de la muerte de Robespierre resultaron en su liberación.

En 1795 fue admitido en la Ecole Normale de París, creada para instruir a maestros, y modelo de otras escuelas normales. Allí fue alumno de Lagrange, quien, según Fourier, era “el primero entre los hombres de ciencia de Europa” y de Laplace, a quien no admiraba tanto. Luego de egresar, fue maestro en la Ecole Polytechnique, recién creada. A consecuencia de su arresto previo nuevamente fue a prisión, de donde pudo ser liberado gracias a las súplicas de Lagrange, Laplace, Monge, sus alumnos, y un cambio de clima político.



En 1798 se une a la Armada de Napoleón en la invasión de Egipto, como un consejero científico. Luego de una serie de rápidas victorias fue tomado el delta del Nilo, pero la destrucción completa de la flota napoleónica por la armada de Nelson en la batalla del Nilo confinó a la expedición francesa a las tierras que estaba ocupando. Fourier actuó como un administrador de instituciones políticas similares a las que existían en Francia, y ayudó a establecer establecimientos educacionales en Egipto, además de efectuar diferentes exploraciones arqueológicas. Creó el Instituto de El Cairo, donde fue uno de los doce miembros de la división matemática. Fue elegido secretario del Instituto, cargo que ejerció durante todo el período de la ocupación francesa.

Napoleón volvió a Francia en 1799, y Fourier volvió a París en 1801 con el resto de la fuerza expedicionaria, retomando su puesto de profesor de análisis en la Ecole Polytechnique.. Sin embargo, Napoleón tenía otros planes para él, y lo nombró Prefecto del Departamento de Isère, cargo que Fourier no deseaba, pero que no podía rechazar. Se mudó a Grenoble, y sus principales trabajos en esa posición administrativa fueron el drenado de los esteros de Bourgoin, y la supervisión de la construcción de una carretera entre Grenoble y Turín. También invirtió gran parte de su tiempo en la escritura de su *Descripción de Egipto*, que no estuvo concluida hasta 1810 debido a que Napoleón introdujo muchos cambios, reescribiendo algunas partes. Para la época de una segunda edición, toda referencia a Napoleón había sido eliminada.

Durante su estancia en Grenoble Fourier realizó un importante trabajo matemático sobre la teoría del calor. Comenzó a trabajar en este tema alrededor de 1804, y para 1807 había completado su importante memoria *Sobre la propagación del calor en los sólidos*. Esta memoria fue leída en el instituto de París el 21 de diciembre de 1807, y aunque ahora es muy estimada, en su momento causó controversia, siendo comentada por Lagrange, Laplace, Monge y Lacroix. Este comité no estaba de acuerdo con las expansiones de funciones en base a series trigonométricas (lo que hoy conocemos como *series de Fourier*). Las aclaraciones de Fourier aún no lograron convencer al comité. Según autores modernos, la claridad lógica de las explicaciones de Fourier y la inhabilidad de Laplace y Lagrange para comprenderlas da una buena idea de la originalidad de su trabajo. Otro tipo de objeciones fue elevada por Boit, ya que Fourier no hacía mención al trabajo del primero, publicado en 1804. Laplace y posteriormente Poisson tenían objeciones similares. Para el Premio Matemático de 1811, el Instituto propuso el tema de la propagación del calor en los sólidos, y Fourier envió su memoria de 1807, junto con material adicional sobre el enfriamiento de los sólidos infinitos. Sólo se presentó un manuscrito adicional, y el comité de evaluación se decidió finalmente por el trabajo de Fourier, aunque su juicio no fue enteramente favorable: "la manera en que el autor arriba a estas ecuaciones no está a salvo de dificultades, y su análisis para integrarlas deja aún algo de desear, sea en su generalidad o en su rigor". Ante este juicio dudoso no hubo interés en publicar el trabajo de Fourier.

Durante la época de prefecto en Grenoble tuvo una serie de encuentros y desencuentros con Napoleón; finalmente, cuando Napoleón cayó, Fourier volvió a París, donde fue electo miembro de la Academia de Ciencias en 1817, y Secretario de la sección matemática en 1822. En ese año se publicó finalmente su ensayo *Théory analytique de la chaleur*, cuya impresión había sido aprobada por el Secretario anterior.

Durante sus últimos años en París Fourier retomó sus investigaciones matemáticas, y publicó una serie de trabajos tanto en matemáticas puras como aplicada. Su vida no transcurrió sin problemas ya que su teoría del calor todavía provocaba controversias. Biot reclamaba

prioridad sobre Fourier, una queja que Fourier pudo mostrar fácilmente que era falsa. Sin embargo, Poisson atacó las técnicas matemáticas y propuso una teoría alternativa. Fourier escribió *Historical Précis* como respuesta a estas críticas, pero aunque el trabajo fue mostrado a varios matemáticos, nunca fue publicado. Sin embargo, la obra de Fourier proveyó el ímpetu necesario para los trabajos posteriores en series trigonométricas y la teoría de funciones de una variable real.

Fourier vivió obsesionado por el calor, hasta el punto de mantener sus habitaciones insoportablemente calurosas para sus visitantes, mientras que él vestía un pesado sobretodo. Algunos autores rastrean esta excentricidad hasta sus tres años en Egipto. Falleció por un aneurisma el 16 de mayo de 1830.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Johann Carl Friedrich Gauss

Nació el 30 de abril en Brunswick, Alemania. Comenzó la escuela elemental a la edad de 7 años, donde demostró su potencial casi de manera inmediata. Su maestro Büttner y su asistente Bartels quedaron sorprendidos cuando Gauss sumó los enteros de 1 al 100 casi instantáneamente ordenando la suma en 50 pares de números que sumaban 101.

En 1788 comenzó su educación en el Gymnasium, donde aprendió Latin. En 1792 ingresó al Colegio Carolingio en 1792, donde descubrió el teorema del binomio, las medias geométricas y aritméticas, la ley de reciprocidad cuadrática, y el teorema de los números primos. En 1795 ingresó a la Universidad de Göttingen, la que abandonó sin haber conseguido un título, pero habiendo hecho uno de sus descubrimientos más importantes: la construcción de un polígono regular de 17 lados utilizando regla y compás. Este fue el avance más importante en este campo desde la época de los matemáticos griegos.



Retornó a Brunswick donde recibió un grado en 1799. Su tesis doctoral fue una discusión sobre el teorema fundamental del álgebra. Publicó su primer libro, *Disquisitiones Arithmeticae* en el verano de 1801.

En 1807 se hizo cargo de la dirección del observatorio de Göttingen. En 1809 publicó su segundo libro, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, un tratado en dos volúmenes sobre el movimiento de los cuerpos celestes. Sus contribuciones a la astronomía teórica concluyeron después de 1817, aunque siguió efectuando observaciones hasta sus 70 años de edad.

Gauss dedicó mucho tiempo a la construcción del nuevo observatorio, finalizado en 1916, pero fue capaz de trabajar en otros temas. Sus publicaciones durante este período incluyen *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, un tratamiento riguroso de las series y una introducción a las funciones hipergeométricas, *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, un ensayo práctico sobre integración aproximada, *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen*, una discusión de estimadores estadísticos, y *Theoria attractionis corporum sphaeroïdiorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata*. Este último trabajo estuvo inspirado por su trabajo en problemas geodésicos y trataba

sobre teoría potencial.

En 1818 Gauss fue designado para efectuar un reconocimiento geodésico del estado de Hannover, tarea que desarrolló personalmente, haciendo mediciones durante el día y reduciéndolas a la noche, haciendo uso de su extraordinaria capacidad mental para los cálculos. Para facilitar las mediciones inventó el heliotropo, que refleja los rayos del sol utilizando un diseño de espejos y un telescopio pequeño. A pesar de este demandante trabajo publicó 70 trabajos sobre éstos y otros temas entre 1820 y 1830.

En 1822 ganó el premio de la Universidad de Copenhagen por *Theoria attractionis...* junto con la idea de mapear una superficie en otra de manera que fuesen similares en sus mínimos detalles. El artículo fue publicado en 1825, y condujo a la publicación muchos años después de *Untersuchungen über Gegenstände der Höheren Geodäsie* (1843 y 1846). El artículo *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (1823), junto con su suplemento (1828) estuvo dedicado a la estadística matemática, en particular al método de cuadrados mínimos.

Desde 1800 Gauss investigó la posible existencia de geometrías no euclídeas, discutiendo ampliamente este tema con Farkas Bolyai. En 1816 presentó pruebas que deducían el axioma de las paralelas a partir de otros axiomas de Euler, sugiriendo que creía en la existencia de geometrías no euclídeas, aunque no fue claro al respecto; posteriormente se sinceró con Schumacher diciéndole que creía que su reputación sufriría si admitía en público la existencia de tal geometría. Tuvo gran interés en geometría diferencial y publicó muchos trabajos sobre el tema. *Disquisitiones generales circa superficies curva* (1828) fue su trabajo más reconocido en este campo.

En 1831 Wilhelm Weber llegó a Göttingen donde ejerció como profesor de física. Gauss, quien lo conocía desde 1828 y apoyó su contratación, había trabajado en física antes de 1831 publicando *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*, y *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii* donde discutía las fuerzas de atracción. Estos artículos estaban basados en la teoría de potencial, que probó ser de gran importancia para su trabajo en física.. Posteriormente creyó que su teoría y el método de cuadrados mínimos proporcionaban vínculos vitales entre la ciencia y la naturaleza. En 1832 Gauss y Weber comenzaron a investigar la teoría del magnetismo terrestre después que Alexander von Humboldt intentó obtener la ayuda de Gauss para realizar una grilla de puntos de observación magnética sobre todo el mundo. Gauss se entusiasmó con este proyecto, y para 1840 había escrito tres trabajos importantes sobre el tema, demostrando, entre otras cosas, que sólo podía haber un par de polos magnéticos, y brindando una estimación de la ubicación del polo sur magnético. Humboldt había diseñado un procedimiento para la observación de la declinación magnética, pero luego que su nuevo observatorio magnético fuese construido en 1833, libre de cualquier tipo de material magnético, Gauss modificó muchos de los procedimientos de Humboldt, lo que permitió obtener resultados más precisos con menos esfuerzo.

Entre los logros de Gauss y Weber durante los seis años que trabajaron juntos, merecen citarse el descubrimiento de las leyes de Kirchoff, y un telégrafo primitivo que podía enviar mensajes a distancias de 1,5 km. Sin embargo esto era apenas un pasatiempo para Gauss, y su interés mayor era establecer una red mundial de puntos de observación magnética. Esta ocupación produjo muchos resultados concretos, incluyendo la publicación de un atlas de geomagnetismo, y una revista donde publicaron sus trabajos desde 1836 a 1841.

Luego de la partida de Weber en 1837 la actividad de Gauss fue disminuyendo. Aún pro-

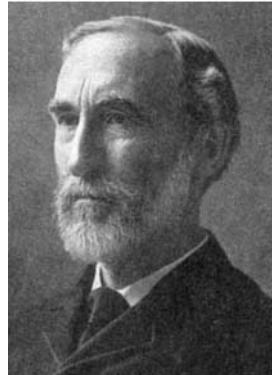
ducía pequeñas notas en respuesta a los descubrimientos de otros científicos, usualmente resaltando que conocía esos métodos por años pero no que no había sentido la necesidad de publicar.

De 1845 a 1851 se dedicó a consolidar los fondos de la Fundación de las viudas de Göttingen, lo que le dio experiencia práctica en aspectos financieros, y le permitió consolidar una importante fortuna personal invirtiendo en acciones emitidas por compañías privadas. Desde 1850 en adelante casi todo su trabajo fue de naturaleza práctica, aunque aprobó la tesis doctoral de Riemann; en 1854 discutió una modificación al péndulo de Foucault. Su salud fue decayendo paulatinamente, y murió mientras dormía en la mañana del 23 de febrero de 1855.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Josiah W Gibbs

Nacido el 11 de Febrero de 1839, en New Haven, Connecticut, EE. UU, se graduó en la Universidad de Yale, donde su padre fue profesor de literatura sacra. Su tesis aplicaba métodos geométricos en el diseño de engranajes. Se doctoró en la misma universidad en 1863, siendo el primer doctorado en ingeniería de los EE. UU. Permaneció tres años como tutor en Yale, enseñando latín los dos primeros años y filosofía natural en el tercero. Sus necesidades financieras quedaron cubiertas por la herencia recibida de sus padres. Entre 1866 y 1869 estudió en Europa, pasando el invierno de 1866-67 en París, el año siguiente en Berlín, y 1868-69 en Heidelberg, donde recibió el influjo de Kirchhoff y Helmholtz.



Volvió a Yale en junio de 1869, y en 1871 fue designado profesor de física matemática, aún antes de haber publicado ningún trabajo. De hecho, su primer trabajo, *Graphical Methods in the Thermodynamics of Fluids and A Method of Geometrical Representation of the Thermodynamic Properties of Substances by Means of Surfaces*, fue publicado a la edad de 34 años. Sin embargo, su cultura europea contrastaba con las necesidades prácticas de la ciencia norteamericana de entonces, y por ello el reconocimiento general no fue inmediato. Yale no apreció sus capacidades, ni lo remuneró por sus servicios. En 1876 publica la primera parte del trabajo por el cual es más famoso, *On the Equilibrium of Heterogeneous Substances*, publicando la segunda parte en 1878. Estos trabajos impresionaron a Maxwell. La segunda parte es más notable, ya que según los especialistas fue un evento de primer importancia en la historia de la química, aunque debido a su formalidad y rigor matemáticos tardó años en ser reconocido.

Su trabajo en el análisis vectorial fue de mayor importancia en la matemática pura. Aplicando ideas de Grossmann, Gibbs produjo un sistema de aplicación mucho más sencilla a la física que el de Hamilton. Aplicó sus métodos vectoriales para calcular la órbita de un cometa a partir de tres observaciones. Este método se utilizó para calcular la órbita del cometa Swift de 1889, y requería mucho menos cálculos que el método de Gauss. Introdujo el producto interno o escalar $\langle u, v \rangle$, el producto vectorial o exterior $u \times v$. También explicó los fenómenos de convergencia en las series de Fourier.

Un serie de trabajos sobre la teoría electromagnética fueron publicados entre 1882 y 1889. También publicó sobre mecánica estadística, brindando un soporte teórico para las teorías

de Maxwell y la teoría cuántica. Su última publicación, *Elementary Principles in Statistical Mechanics* es una excelente recopilación que sienta sobre firmes bases los fundamentos de la mecánica estadística.

Salvo el período de tres año en Europa, Gibbs vivió toda su vida en la misma casa de sus padres, a corta distancia de la escuela, el colegio y la universidad donde trabajó. Falleció en New Haven, Connecticut el 28 de abril de 1903.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*, con extractos de Ronald L. Allen, Duncan Mills)

Heinrich Hertz

Nació el 22 de febrero de 1857 en Hamburgo. Recibió una esmerada educación en humanidades y ciencias naturales; mientras estudiaba en la Universidad de Berlín, demostró aptitudes tanto para las ciencias como para las lenguas, aprendiendo árabe y sánscrito.

Recibió su doctorado en la Universidad de Bonn en 1880, donde estudió con Hermann von Helmholtz, y continuó como su pupilo hasta 1883, año en el que es nombrado profesor de física teórica en la universidad de Kiel. En ese mismo año comenzó sus estudios sobre la teoría electromagnética de Maxwell. Entre 1885 y 1889, mientras era profesor de física experimental en el Politécnico de Karlsruhe, generó ondas magnéticas en el laboratorio y midió su longitud y velocidad. A partir del experimento de Michelson en 1881 (precursor del experimento de Michelson-Morley en 1887), que refutó la existencia del éter luminífero, Hertz reformuló las ecuaciones de Maxwell para tomar en cuenta el nuevo descubrimiento. Probó experimentalmente que las señales eléctricas pueden viajar a través del aire libre, como había sido predicho por James Clerk Maxwell y Michael Faraday; sin embargo, dudaba que sus experiencias pudiesen tener alguna utilidad que no fuese la verificación experimental de las leyes de Maxwell. Cuando lo consultaron acerca de las implicaciones de sus estudios, comentó: “*Ninguna que yo sepa*”.



Demostró que la naturaleza de su vibración y su susceptibilidad a la reflexión y refracción eran similares a las de la luz y las ondas de calor, determinando la naturaleza electromagnética de estas últimas.

Descubrió el efecto fotoeléctrico (que fue explicado más adelante por Albert Einstein) cuando notó que un objeto cargado pierde su carga más fácilmente al ser iluminado por la luz ultravioleta.

En 1889 fue designado profesor de física en la Universidad de Bonn, donde continuó sus estudios sobre las descargas eléctricas en gases. En 1892, luego de una serie de severas migrañas, fue sometido a una serie de operaciones. Falleció en Bonn a la edad de 36 años, de ganulomatosis de Wegener, el 11 de enero de 1894.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Andrey Nikolaevich Kolmogorov

Nació en Tambov el 25 de abril de 1903, hijo de madre soltera y de un noble rico. Quedó huérfano muy joven y fue criado por sus tíos en Tunoshna cerca de Yaroslavl, de donde era su padre, comerciante de granos que fue deportado de San Petersburgo por su participación en el movimiento revolucionario, y perdió durante la guerra civil rusa.

Kolmogorov fue educado en la escuela de la villa donde vivía, y sus primeros esfuerzos literarios y matemáticos fueron publicados en el periódico escolar. Ya adolescente, diseñó varias máquinas de movimiento perpetuo, ocultando sus defectos tan astutamente que sus maestros no podían descubrirlos. En 1910 fue adoptado por una de sus tíos y se mudó a Moscú, donde concurrió al Gymnasium, donde se graduó en 1920.



Ese año comienza sus estudios en la Universidad Estatal de Moscú y en el Instituto Tecnológico Químico, donde ganó reputación por su erudición. Como estudiante, participó en el seminario del historiador ruso S. V. Bachrushin, y publicó su primer trabajo de investigación sobre la posesión de tierras en la república de Novgorod en los siglos XV y XVI.

Al mismo tiempo (1921-1922) obtenía varios resultados en teoría de conjuntos y series trigonométricas. En 1922 ideó una serie de Fourier que diverge en casi todo punto, lo que le valió reconocimiento internacional. Alrededor de esta época decidió dedicar su vida a las matemáticas. Se graduó de la Universidad Estatal de Moscú en 1925; ese mismo año publica su famoso trabajo sobre lógica intuitiva, y se doctora en 1929.

En 1930 hace su primer largo viaje al exterior, visitando Göttingen, Munich y luego París. Su trabajo pionero *Sobre los métodos analíticos de la teoría de probabilidad* fue publicado en alemán en 1931, el mismo año en que fue nombrado profesor de la Universidad Estatal de Moscú. En 1933 publicó *Fundamentos de la teoría de probabilidad*, estableciendo las bases modernas de esta ciencia. En 1935 ocupó la cátedra de Teoría de Probabilidad en la Facultad de Matemática y Mecánica de la Universidad Estatal de Moscú. En 1939 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de la Unión Soviética. En un artículo de 1938 enunció los teoremas básicos para suavizado y predicción de procesos estocásticos estacionarios, que tendría enormes aplicaciones militares durante la inminente guerra fría.

Más tarde Kolmogorov viró sus intereses hacia el área de turbulencia, y sus trabajos de 1941 tuvieron una significativa influencia en ese campo. En mecánica clásica es conocido por la teoría KAM, presentada por primera vez en 1954 en Amsterdam durante el Congreso Internacional de Matemáticos. En 1957 resolvió el problemas número 13 de Hilbert, en conjunto con su estudiante V. I. Arnold.

En 1942 se casó con Anna Dmitrievna Egorova. Durante toda su vida se dedicó con intensidad a la enseñanza, no sólo a nivel universitario, sino que también desarrolló métodos pedagógicos para niños dotados. En la universidad ocupó distintos cargos, inclusive la dirección de varios departamentos, y fue decano de la Facultad de Matemáticas y Mecánica.

En 1971 se unió a una expedición oceanográfica a bordo del navío Dmitri Mendeleev. Escribió un importante número de artículos para la Gran Enciclopedia Soviética. En sus

últimos años dedicó sus esfuerzos a la relación matemática y filosófica entre la teoría de probabilidad en áreas abstractas y aplicadas. Falleció en Moscú el 20 de octubre de 1987.

(Wikipedia)

Vladimir Kotelnikov

Nació el 6 de setiembre de 1908 en Kazan, Rusia. Creció en una familia de científicos. Su padre fue un prominente ingeniero mecánico, profesor de matemática y mecánica en la Universidad de Kazan; su tía, también matemática, fue profesora de física en el la misma universidad. Su abuelo había sido el fundador del Departamento Matemático de la Sociedad de Naturalistas y Doctores de Kazan.

Luego de graduarse en el colegio de Moscú ingresó en la Escuela Técnica de Comunicaciones, y posteriormente en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Escuela Superior Técnica de Moscú. En 1931, año en que se graduó, esta escuela se convirtió en el Instituto de Ingeniería de Potencia de Moscú (MPEI), institución a la que Vladimir permaneció vinculado por el resto de su vida. Allí comenzó sus estudios de posgrado, colaborando también con el Instituto de Investigación Científica del Ejército Rojo.



Para sus estudios de posgrado eligió como tema la capacidad de transmisión de las líneas de potencia. En sus trabajos fue el primero en formular de manera matemáticamente precisa el “teorema de muestreo” en el período entre 1931 y 1933. En 1932 publicó su trabajo “Sobre la capacidad del éter y los cables en las comunicaciones eléctricas”, en el Primer Congreso del Comité Técnico de Comunicaciones. También realizó estudios sobre filtros no lineales. Al exponer sus trabajos, la impresión general es que “los resultados parecen correctos, pero lucen como ciencia ficción”. Sin embargo, fueron trabajos descollantes porque sentaron las bases del desarrollo de las comunicaciones utilizando señales digitales en el Instituto. Kotelnikov trató de difundir sus resultados a través de la revista “Electrichestvo” (Electricidad) en 1936, pero fueron rechazados. En consecuencia, sus trabajos permanecieron desconocidos en occidente, donde Shannon redescubrió estos resultados en 1948.

Kotelnikov desarrolló numerosos equipos antes y durante la segunda guerra mundial, estableciendo una línea de comunicación segura entre Moscú y Khabarovsk. También desarrolló encriptadores para señales telegráficas, que fueron ampliamente utilizados durante la guerra. Además, sentó los fundamentos teóricos de los métodos de cifrado. Por estos resultados le fue conferido el Premio Stalin de primer grado en 1943 y 1946. Donó el importe de los premios para las necesidades del frente de guerra, que fueron utilizados en la construcción de un tanque.

Después de la guerra trabajó activamente en el área de radiocomunicaciones, fundamentalmente en la teoría de inmunidad al ruido. Este fue el tema de su tesis de doctorado, que no pudo defender durante diez años por la dificultad de encontrar jurados capaces de comprender sus desarrollos.

Kotelnikov participó en la creación de varias instituciones científicas, y tuvo una destacada actuación en el programa espacial ruso en el área de radiolocalización planetaria. Fue

recipiente de numerosísimas distinciones internacionales, y en 2003 se celebró una conferencia internacional en su honor, celebrando sus 95 años, el septuagésimo aniversario de su teorema del muestreo, y el quincuagésimo aniversario de su elección como miembro de la Academia de Ciencias de Rusia, ocasión en que fue felicitado por el presidente Putin.

Falleció en Moscú en febrero de 2005.

(M. K. Tchobanou y N. N. Udalov, “Vladimir Kotelnikov and Moscow Power Engineering Institute”, 2006 International TICSP Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing, Florencia, Italia, 2 al 6 de Setiembre de 2006, pp. 171-178.)

Joseph-Louis Lagrange

Nació en Turín, Italia, el 25 de enero de 1736, como Giuseppe Lodovico Lagrangia. Su interés en las matemáticas despertó cuando leyó el trabajo de Halley sobre el empleo del álgebra en óptica. A los 19 años fue designado profesor de matemáticas de la Escuela Real de Artillería de Turín.

De esta época son sus resultados sobre el cálculo de variaciones, y su trabajo sobre fundamentos de dinámica, basado en el principio de mínima acción y en la energía cinética.

También realizó estudios sobre la propagación del sonido, realizando importantes contribuciones a la teoría de cuerdas vibrantes. Su modelo era un conjunto de n masas discretas unido por cuerdas sin masa. Resolvió el sistema de $n + 1$ ecuaciones diferenciales, donde empleó el método de autovalores por primera vez; haciendo tender n a infinito obtuvo la misma solución funcional que Euler.

Estudió la integración de las ecuaciones diferenciales y realizó varias aplicaciones a tópicos como mecánica de los fluidos, donde introdujo la función lagrangiana. También aplicó sus métodos al estudio de las órbitas de Júpiter y Saturno.

Desde 1766 sucedió a Euler en la dirección de la Academia de Ciencias de Berlín, donde permaneció por 22 años, período durante el cual produjo una serie de trabajos de primera calidad, ganando regularmente el premio de la Academia de Ciencias de París. En 1772 compartió el premio con Euler por el estudio del problema de los tres cuerpos, en 1774 por su trabajo sobre el movimiento de la luna, y en 1780 por las perturbaciones en las órbitas de los cometas inducidas por los planetas.

Su trabajo en Berlín cubrió varias áreas: astronomía, estabilidad del sistema solar, mecánica, dinámica, mecánica de los fluidos, probabilidad, fundamentos del cálculo, teoría de números, etc.

En 1770 presentó su trabajo *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* donde mostraba por qué las ecuaciones de hasta grado 4 pueden resolverse con radicales. En 1787 deja Berlín para asumir como miembro de la Academia de Ciencias de París, donde permaneció por el resto de su vida. En 1788 se publica su *Mécanique analytique* que había escrito en Berlín, donde resume todo el trabajo efectuado en el área de la mecánica desde la época de Newton y es notable por el empleo de la teoría de ecuaciones diferenciales. Con esta obra Lagrange transformó la mecánica en una rama del análisis matemático.



Como miembro de la Academia participó en la comisión de pesos y medidas en 1790, donde favoreció el empleo de una base decimal. En 1808 Napoleón lo designó Conde del Imperio, y en 1813 fue nombrado *grand croix de la Ordre Impérial de la Réunion*. Murió una semana más tarde, el 10 de abril de 1813, en París.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

Pierre Simon, Marqués de Laplace

Astónomo, físico y matemático francés, nacido en Beaumont en Auge, el 23 de marzo de 1749. Estudió en la Escuela Militar de Beaumont, y por recomendación de D'Alembert, impresionado por una carta suya sobre mecánica, fue nombrado profesor de la Escuela Militar de París. Posteriormente pasó a la Escuela Normal. En 1799 fue nombrado Ministro del Interior durante el Consulado. En el Imperio fue senador y conde (1806) y recibió la Gran Cruz de la Legión de honor. Después de las restauración borbónica (1817) recibió el título de marqués de Laplace. En matemáticas aportó muchos avances al cálculo de probabilidades y a la estadística, y se le deben la transformación integral de Laplace, la ecuación diferencial de Laplace, y el *laplaciano*, un operador diferencial igual a la suma de las derivadas segundas de una función en un espacio multidimensional.



En química, ayudó a Lavoisier a demostrar que la respiración es una forma de combustión, colaborando con él en el diseño de un calorímetro. En física estudió los fenómenos de capilaridad y la transmisión del sonido en los gases; obtuvo una fórmula para calcular la altura sobre el nivel del mar a partir de la presión atmosférica, y proporcionó la base matemática para explicar distintos fenómenos de termología (estudio del calor) y electromagnetismo.

En astronomía, su aportación fundamental fue la demostración de la estabilidad del sistema solar, de acuerdo a la mecánica celeste basada en la gravitación universal de Newton. Antes se creía que los movimientos de los astros eran inestables, y el propio Newton creyó necesaria la intervención de Dios para mantener el sistema en equilibrio. Laplace demostró que los movimientos medios de los planetas y los satélites son estables, que las desviaciones se compensan, y que las anomalías aparentes son periódicas. En particular, explicó la aceleración de la Luna como resultado de la excentricidad de la órbita terrestre, y estudió los movimientos de los satélites de Júpiter y Saturno.

Como a Lavoisier, se lo ha acusado de aprovecharse de los descubrimientos de otros, pero también hay que reconocer que sus hallazgos superan lo que obtuvo de los demás.

En 1785 fue elegido miembro de la Academia francesa de Ciencias, presidiéndola varias veces. Entre sus obras destacan *Exposition du système du monde* (1796), donde presenta la hipótesis nebulosa, que afirma que el sistema solar se formó como consecuencia de una contracción de una nube de gas y polvo; *Traité de mécanique céleste* (1798-1827), y *Théorie analytique des probabilités* (1812). Se cuenta que al presentar a Napoleón un ejemplar de su Mecánica Celeste, el emperador le dijo: *Has escrito este libro sin mencionar al autor del universo*, a lo que Laplace replicó: *Señor, yo no necesito esa hipótesis*. Cuando Lagrange lo supo, dijo: *Pues es una hipótesis excelente. Explica muchas cosas*.

Laplace falleció en París el 5 de marzo de 1827.

(Manuel Alfonseda, *Grandes Científicos de la Humanidad*, Espasa, 1998, Tomo I.)

Henri Léon Lebesgue

Nació el 28 de junio de 1875 en Beauvais, Oise, Picardie, France. Matemático francés, fue profesor de las universidades de Rennes, Poitiers, París, y del Colegio de Francia.

Trabajó en topología, parte de las matemáticas que estudia las figuras geométricas sin tener en cuenta su tamaño ni ciertas distorsiones de su forma.

Con base en el trabajo de otros matemáticos, entre ellos Emile Borel y Camille Jordan, Lebesgue formuló la teoría de la medida en 1901. Al año siguiente definió la integral de Lebesgue, la cual generaliza la noción de la integral de Riemann al extender el concepto de área bajo una curva para incluir funciones discontinuas. Este es uno de los logros del análisis moderno que expande el alcance del análisis de Fourier. Lebesgue dio a conocer este desarrollo en su disertación "Intégrale, longueur, aire" ("Integral, longitud, área") presentada en la Universidad de Nancy en 1902.



Además de aproximadamente 50 artículos, escribió dos libros: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904) y *Leçons sur les séries trigonométriques* (1906) donde amplía el análisis de Fourier. A su vez, contribuyó en otras áreas de matemáticas como topología, teoría del potencial y análisis de Fourier. En 1905 presentó una discusión sobre las condiciones que Lipschitz y Jordan habían utilizado para asegurar que $f(x)$ es la suma de su serie de Fourier.

En 1910 recibió una cátedra en la Sorbonne, pero no se concentró en el área de estudio que él había iniciado: su trabajo era una generalización, pero Lebesgue era temeroso de las mismas. En sus palabras: *Reducida a teorías generales, las matemáticas serían una forma hermosa sin contenido. Morirían rápidamente.* A pesar de que desarrollos posteriores demostraron que su temor no tenía fundamentos, nos permite entender el curso que siguió su trabajo.

En 1922 fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias de París, y en 1930 de la Royal Society de Londres. Falleció el 26 de julio de 1941 en Paris, France.

(Manuel Alfonseda, *Grandes Científicos de la Humanidad*, Espasa, 1998, Tomo I.)

Adrien-Marie Legendre

Matemático francés, nacido en París el 18 de septiembre de 1752. Hizo importantes contribuciones a la estadística, la teoría de números, el álgebra abstracta y el análisis matemático.

Gran parte de su trabajo fue perfeccionado posteriormente por otros: sus trabajos en las raíces de los polinomios inspiró la teoría de Galois; los trabajos de Abel en las funciones elípticas se construyeron sobre los de Legendre; parte de la obra de Gauss sobre estadística y teoría de números complementaba la suya.

En 1830 dio una prueba del último teorema de Fermat para el exponente $n = 5$, casi simultáneamente con Dirichlet en 1828.

En teoría de números, conjeturó la ley de la reciprocidad cuadrática, probada luego por Gauss. Realizó trabajos pioneros en la distribución de los números primos, y en la aplicación del análisis a la teoría de números. Su conjetura del teorema de los números primos (1796) fue comprobada por Hadamard y de la Vallée-Poussin en 1898.

Legendre realizó una cantidad impresionante de trabajo en las funciones elípticas, incluyendo la clasificación de las integrales elípticas, pero se necesitó la genialidad de Abel al estudiar las inversas de las funciones de Jacobi para solucionar completamente el problema.

Se le conoce por la Transformada de Legendre, utilizada para pasar de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana de la mecánica clásica. También se usa en termodinámica para obtener la entalpía de las energías libres de Helmholtz y Gibbs partiendo de la energía interna. Falleció en Auteuil, Francia, el 10 de enero de 1833.

(Wikipedia)



Gottfried Wilhelm von Leibniz

Nació en Leipzig, Sajonia (hoy Alemania) el 1 de Julio de 1646. En 1671 publica *Hypothesis Physica Nova* (Nuevas hipótesis físicas), donde proclamaba, como Kepler, que el movimiento depende de la acción de un espíritu.

Por esa época, emprendió la construcción de una máquina de calcular, que prometió a la Academia de Ciencias de París.

Durante su estancia en París desarrolló las características básicas de su versión del cálculo, y en 1675 escribió un manuscrito donde aparece por primera vez el símbolo $\int f(x) dx$, y la regla de derivación del producto. Fue electo miembro de la Real Sociedad de Londres en 1673.

De vuelta en Hanover (1678-1679) se involucró en otras actividades, tales como el drenaje de agua de las minas de las montañas de Harz, donde proponía utilizar la energía eólica y del agua para el funcionamiento de las bombas.



Sus logros matemáticos incluyen el desarrollo de un sistema de aritmética binaria (1679); a raíz de su trabajo sobre resolución de sistemas de ecuaciones lineales sentó las bases de la teoría de determinantes. Se abocó también al estudio de la dinámica, perfeccionando las ideas de energía cinética, potencial y momento.

Sobre el final de su vida, se empeñó en una célebre disputa con Newton sobre la prioridad de la invención del cálculo. Falleció en 1714 en Hanover.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)

James Clerk Maxwell

Nació en Edimburgo, el 13 de junio de 1831. Físico escocés conocido principalmente por haber desarrollado un conjunto de ecuaciones que expresan las leyes básicas de la electricidad y magnetismo así como por la estadística de Maxwell-Boltzmann en la teoría cinética de gases.

Maxwell fue una de las mentes matemáticas más preclaras de su tiempo y se le representa frecuentemente como el ejemplo del científico clásico del siglo XIX cuya influencia se deja notar grandemente en la física del siglo XX habiendo hecho contribuciones fundamentales en la comprensión de la naturaleza. En 1931 con motivo de la conmemoración del centenario de su nacimiento Albert Einstein describió el trabajo de Maxwell como “el más profundo y provechoso que la física ha experimentado desde los tiempos de Newton”



Maxwell, que desde un principio mostró una gran facilidad para las disciplinas científicas, inició sus estudios universitarios a la edad de 13 años. Con 15 redactó un importante trabajo de mecánica. A los 25 fue nombrado catedrático en Aberdeen, después en Londres y, en 1871, de un instituto especialmente construido para él en Cambridge. Además de su actividad profesional, Maxwell se dedicó a la realización de estudios de carácter privado en sus posesiones de Escocia.

Entre sus primeros trabajos científicos Maxwell trabajó en el desarrollo de una teoría del color y de la visión y estudió la naturaleza de los anillos de Saturno demostrando que estos no podían estar formados por un único cuerpo sino que debían estar formados por una miríada de cuerpos mucho más pequeños. También fue capaz de probar que la teoría nebulosa de la formación del Sistema Solar vigente en su época era errónea ganando por estos trabajos el Premio Adams de Cambridge en 1859. También en 1859 Maxwell formuló la expresión termodinámica que establece la relación entre la temperatura de un gas y la energía cinética de sus moléculas. En 1860, Maxwell demostró que era posible realizar fotografías en color utilizando una combinación de filtros rojo verde y azul obteniendo por este descubrimiento la Medalla Rumford ese mismo año.

Es el creador de la moderna electrodinámica y el fundador de la teoría cinética de los gases. Descubrió las ecuaciones que llevan su nombre (ecuaciones de Maxwell), y que se definen como las relaciones fundamentales entre las perturbaciones eléctricas y magnéticas, que simultáneamente permiten describir la propagación de las ondas electromagnéticas que, de acuerdo con su teoría, tienen el mismo carácter que las ondas luminosas.

En el prefacio de su obra *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873) declaró que su principal tarea consistía en justificar matemáticamente conceptos físicos descritos hasta ese momento de forma únicamente cualitativa, como las leyes de la inducción electromagnética y de los campos de fuerza, enunciadas por Michael Faraday. Con este objeto, Maxwell introdujo el concepto de onda electromagnética, que permite una descripción matemática adecuada de la interacción entre electricidad y magnetismo mediante sus célebres ecuaciones que describen y cuantifican los campos de fuerzas. Su teoría sugirió la posibilidad de generar ondas electromagnéticas en el laboratorio, hecho que corroboró Heinrich Hertz en 1887, ocho años después de la muerte de Maxwell.

Sus teorías constituyeron el primer intento de unificar dos campos de la física que, antes de sus trabajos, se consideraban completamente independientes: la electricidad y el magnetismo (conocidos como electromagnetismo).

Maxwell falleció en Cambridge, Reino Unido, el 5 de noviembre de 1879.

(Wikipedia)

Albert Abraham Michelson

Nació en Strzelno, Polonia, el 19 de diciembre de 1852. Hijo de Samuel Michelson y de Rozalia, hija de Abraham Przylubski. Dejó su Prusia natal (en lo que hoy es Polonia) con sus padres en 1855. Vivió primero en Nueva York, y más adelante en Virginia City, Nevada y San Francisco, donde su familia prosperó en los negocios.

A los 17 años entró en la Academia Naval de los Estados Unidos en Annapolis, Maryland, en donde aprendió más de la ciencia que del arte marítimo. Obtuvo el grado de oficial en 1873 y prestó servicios como instructor científico en la Academia entre 1875 y 1879.



Ya en 1877, cuando aún era oficial de la Marina de los Estados Unidos, Michelson empezó a estudiar una mejora del método para medir la velocidad de luz basado en espejos rotativos, que había inventado Léon Foucault, utilizando instrumentos ópticos mejores y de mayor tamaño.

Llevó a cabo algunas mediciones preliminares con equipos improvisados en gran medida en 1878, período en el que sus trabajos llamaron la atención de Simon Newcomb, director del Nautical Almanac Office, que ya estaba muy adelantado en sus proyectos de medición. Michelson publicó sus resultados de $299,910 \pm 50$ km/s en 1879 antes de unirse al equipo de Newcomb, en Washington. Se inició de ese modo entre ambos una larga colaboración profesional y amistad. Tras dos años de estudios en Europa, dejó la Armada en 1881.

En 1883 aceptó una plaza de profesor de Física en la Case School of Applied Science de Cleveland y proyectó allí un interferómetro mejorado.

En 1887 colaboró con su colega Edward Williams Morley en el experimento Michelson-Morley. Su experimento sobre el movimiento relativo esperado entre la Tierra y el éter, el hipotético medio en el que se suponía que viajase la luz, llevó a resultados nulos.

Es prácticamente seguro que Albert Einstein era conocedor del trabajo; lo que ayudó mucho a aceptar la teoría de la relatividad. Michelson creó también un interferómetro para medir con gran precisión la longitud del metro basándose en las longitudes de onda de una de las líneas espectrales de un gas estableciendo así un patrón de medida universal.

En 1892 Michelson, tras su paso como profesor de Física por la Clark University de Worcester, Massachusetts, desde 1889, fue Jefe del Departamento de Física de la nueva Universidad de Chicago, cargo en el que permaneció hasta que se jubiló en 1929. En 1907 se convirtió en el primer estadounidense que obtuvo el premio Nobel de Física. Entre 1923 y 1927 fue presidente de la Academia Nacional de Ciencias. Falleció el 9 de mayo de 1931 en Pasadena, California.

(Wikipedia)

Isaac Newton

Sir Isaac Newton nació en 4 de enero de 1643 en Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra. Estableció las bases del cálculo diferencial e integral, varios años antes (y de manera independiente) que Leibniz. Ante el retiro de Barrow, ocupó la cátedra Lucasiana en la Universidad de Cambridge.

Su libro *Optica* (1704) explica su teoría sobre la naturaleza ondulatoria de la luz, aunque algunos de sus resultados se apoyaban en la teoría corpuscular.

Su mayor logro fueron sus trabajos en física y mecánica celeste, que culminó con la teoría de gravitación universal. Su *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) se considera el mejor libro científico jamás escrito. En él explicaba una serie de fenómenos aparentemente no relacionados: la órbita excéntrica de los cometas, las mareas y sus variaciones, la precesión del eje terrestre, el movimiento de la luna debido a la perturbación ocasionada por la gravedad solar.

Newton fue el primero en demostrar que las leyes naturales que gobiernan el movimiento en la Tierra y las que gobiernan el movimiento de los cuerpos celestes son las mismas. Se lo suele considerar como el científico más grande de todos los tiempos, y a su obra como la culminación de la Revolución científica. Sus trabajos científicos le valieron reconocimiento internacional aún en vida.

Entre sus hallazgos científicos se encuentran merecen citarse el descubrimiento de que el espectro de color que se observa cuando la luz blanca pasa por un prisma es inherente a esa luz, en lugar de provenir del prisma (como había sido postulado por Roger Bacon en el siglo XIII); su argumentación sobre la posibilidad de que la luz estuviera compuesta por partículas; el desarrollo de una ley de conducción térmica, que describe la tasa de enfriamiento de los objetos expuestos al aire; sus estudios sobre la velocidad del sonido en el aire; y su propuesta de una teoría sobre el origen de las estrellas.

Newton comparte con Leibniz el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física. También contribuyó en otras áreas de las matemáticas, desarrollando el teorema del binomio.

En sus últimos años abandonó la academia, ocupando cargos políticos en Londres, y fue electo presidente de la Real Academia de Ciencias, desde donde disputó vivamente con Leibniz sobre la paternidad del cálculo diferencial. Falleció en Londres en 1727.

(J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*)



Harry Nyquist

Nació en Nilsby, Suecia, el 7 de febrero de 1889; emigró a los Estados Unidos de América en 1907 y comenzó sus estudios en la Universidad de North Dakota en 1912. Realizó un

doctorado en Física en la Universidad de Yale en 1917. Trabajó para AT&T desde 1917 hasta 1934, luego se cambió a Bell Telephone Laboratories.

Como ingeniero en los laboratorios de Bell, desarrolló un importante trabajo en ruido térmico (Johnson-Nyquist noise) y en la estabilidad de los amplificadores realimentados.

Su temprano trabajo teórico en la determinación de los requerimientos del ancho de banda para la transmisión de la información, el cual fue publicado en *Certain factors affecting telegraph speed* (Bell System Technical Journal, 3, 324-346, 1924), contribuyó a la fundación de los avances posteriores realizados por Claude Shannon, el cual condujo al desarrollo de la Teoría de la Información.



En 1927 Nyquist determinó que una señal analógica limitada en banda debería ser muestreada como mínimo con una frecuencia doble que el ancho de banda de la señal para ser convertida en una representación adecuada en forma digital. Nyquist publicó sus resultados en el artículo *Certain topics in Telegraph Transmission Theory* (1928). Esta regla es ahora conocida como el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon.

Se retiró de Bell Labs en 1954 y murió en Harlingen, Texas el 4 de abril de 1976.

(Wikipedia)

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes en análisis y geometría diferencial, algunas de ellas allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.



Nació en Breselenz, una aldea cercana a Dannenberg en el Reino de Hanóver, actualmente parte de Alemania, el 17 de septiembre de 1826. Su padre Friedrich Bernhard Riemann era pastor luterano en Breselenz y había luchado en las guerras napoleónicas. Bernhard era el segundo de seis niños, su frágil salud y la temprana muerte de casi todos sus hermanos fueron debidos a la mala alimentación en su niñez. Su madre también murió tempranamente.

En 1840 Bernhard fue a Hanóver a vivir con su abuela y a visitar el Lyceum. Después de la muerte de su abuela en 1842 entró al Johanneum Lüneburg. Desde pequeño demostró una fabulosa capacidad para el cálculo unido a una timidez casi enfermiza. Durante sus estudios de secundaria aprendía tan rápido que en seguida adelantaba a todos sus profesores.

En 1846, a la edad de 19, comenzó a estudiar filología y teología en la Universidad de Göttingen; su motivación principal era complacer a su padre y poder ayudar a su familia haciéndose pastor. Atendió a conferencias de Gauss sobre el método de mínimos cuadrados. En 1847 su padre reunió el dinero suficiente para que comenzara a estudiar

matemáticas.

En 1847 se trasladó a Berlín, donde enseñaban Jacobi, Dirichlet y Steiner. En 1848, cuando estallaron manifestaciones y movimientos obreros por toda Alemania, Riemann fue reclutado por las milicias de estudiantes y ayudó a proteger al rey en su palacio de Berlín. Permaneció allí por dos años y volvió a Göttingen en 1849.

Riemann dio sus primeras conferencias en 1854, en las cuales fundó el campo de la geometría de Riemann. Lo promovieron a profesor extraordinario en la universidad de Göttingen en 1857 y se hizo profesor ordinario en 1859. En 1862 se casó con Elise Koch.

Entre sus obras merecen citarse *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (1851), disertación sobre la teoría general de funciones de variable compleja, basada en las hoy llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann, donde presenta el concepto hoy conocido como superficie de Riemann..

En *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854) realizado para acceder a su cargo de Privadozent ("Profesor auxiliar"), analiza las condiciones de Dirichlet para el problema de representación de funciones en serie de Fourier. Con este trabajo definió el concepto de integral de Riemann y creó una nueva rama de las matemáticas: la teoría de funciones de una variable real.

Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (1854) es una transcripción de una clase magistral impartida por Riemann a petición de Gauss, y versa sobre los fundamentos de la geometría, generalizando los principios de la geometría euclíadiana y la no euclídea. La unificación de todas las geometrías se conoce hoy en día como geometría de Riemann y es básica para la Teoría de la Relatividad de Einstein.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (1859) es su trabajo más célebre, y trata sobre la teoría de números. La mayor parte está dedicado a los números primos, y en él introduce la función zeta.

Murió de tuberculosis en su tercer viaje a Italia en Selasca, el 20 de junio de 1866.

(Wikipedia)

Claude Elwood Shannon

Los primeros años de su vida los pasó en Gaylord, donde se graduó de la secundaria en 1932. Desde joven, Shannon demostró una inclinación hacia las cosas mecánicas. Resaltaba respecto a sus compañeros en las asignaturas de ciencias. Su héroe de la niñez era Edison, a quien luego se acercó bastante en sus investigaciones.

En 1932 ingresó en la Universidad de Michigan, siguiendo a su hermana Catherine, doctora en matemática. En 1936 obtuvo los títulos de ingeniero electricista y matemático. Su interés por la matemática y la ingeniería continuó durante toda su vida.

En 1936 aceptó la posición de asistente de investigación en el Departamento de Ingeniería Eléctrica en el Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT). Su situación le permitió continuar estudiando mientras trabajaba por horas para el departamento, donde trabajó en el computador analógico más avanzado de esa era, el analiza-



dor diferencial de Vannevar Bush.

En ese momento surgió su interés hacia los circuitos complejos de relés. Intentando simplificar centralitas telefónicas de relés se dio cuenta de que estos podían usarse para hacer cálculos. Sumado esto a su gusto por la lógica y el álgebra booleana pudo desarrollar esta idea durante el verano de 1937, que pasó en los laboratorios Bell en la ciudad de Nueva York.

En su tesis de maestría en el MIT, demostró cómo el álgebra booleana se podía utilizar en el análisis y la síntesis de la conmutación y de los circuitos digitales. La tesis despertó un interés considerable cuando apareció en 1938 en las publicaciones especializadas. En 1940 le fue concedido el Premio a ingenieros americanos del Instituto Americano Alfred Nobel de Estados Unidos, una concesión dada cada año a una persona de no más de treinta años. Un cuarto de siglo más tarde H. H. Goldstine, en su libro *Las computadoras desde Pascal hasta Von Neumann*, citó su tesis como una de las más importantes de la historia que ayudó a cambiar el diseño de circuitos digitales.

Durante el verano de 1938 realizó trabajos de investigación en el MIT y le fue concedida la beca Bolles cuando trabajaba como ayudante de enseñanza mientras realizaba un doctorado en matemática.

En 1940 estudió una maestría en ingeniería eléctrica y se doctoró en filosofía matemática. Shannon pasó quince años en los laboratorios Bell, una asociación muy fructífera con muchos matemáticos y científicos de primera línea como Harry Nyquist, Walter Houser Brattain, John Bardeen y William Bradford Shockley, inventores del transistor; George Stibitz, quien construyó computadoras basadas en relevadores y muchos otros más.

Durante este período Shannon trabajó en muchas áreas, descollando en la teoría de la información, un desarrollo que fue publicado en 1948 como *Una Teoría Matemática de la Comunicación*. En este trabajo se demostró que todas las fuentes de información (telégrafo eléctrico, teléfono, radio, la gente que habla, las cámaras de televisión, etc.,...) se pueden medir y que los canales de comunicación tienen una unidad de medida similar. Mostró también que la información se puede transmitir sobre un canal si y sólo si la magnitud de la fuente no excede la capacidad de transmisión del canal que la conduce, y sentó las bases para la corrección de errores, supresión de ruidos y redundancia.

En el área de las computadoras y de la inteligencia artificial publicó en 1950 un trabajo que describía la programación de una computadora para jugar al ajedrez, convirtiéndose en la base de posteriores desarrollos.

A lo largo de su vida recibió numerosas condecoraciones y reconocimientos de universidades e instituciones de todo el mundo.

Claude Elwood Shannon falleció el 24 de febrero del año 2001, a la edad de 84 años, después de una larga lucha en contra la enfermedad de Alzheimer.

(Wikipedia)

John Wilder Tukey

Nació el 16 de junio de 1915 en New Bedford, Massachusetts. Obtuvo una Maestría en Ciencias en 1937 en la Universidad de Brown, antes de trasladarse a la universidad de Princeton donde recibió un Doctorado en Matemáticas. Durante la Segunda Guerra Mun-

dial trabajó en la Oficina de la Investigación de Control de Fuego de Artillería y colaboró con Samuel Wilks y William Cochran. Después de la guerra regresó a Princeton dividiendo su tiempo entre la universidad y los Laboratorios AT&T Bell.

Su interés estadístico fue amplio y variado. Es particularmente recordado por el desarrollo junto con James Cooley de la transformada rápida de Fourier. En 1970, desarrolló la estimación Jackknife, también denominada la Quenouille-Tukey Jackknife. Introdujo el Diagrama de la Caja (Box Plot) y el Diagrama de Tallos y Hojas (Steam and Leaf Plot) en su libro *Análisis Exploratorio de Datos*.

También contribuyó a la práctica estadística y articuló la importante distinción entre el análisis de datos exploratorio y el análisis de datos confirmativo. Aunque creía en la utilidad de separar los dos tipos de análisis, demostró que a veces, especialmente en la ciencia natural, esto era problemático.



Entre sus muchas contribuciones a la sociedad civil, Tukey prestó sus servicios en un comité de la Sociedad Estadística Americana que produjo un informe que criticaba las conclusiones del Informe Kinsey, “Problemas Estadísticos del Reporte Kinsey sobre el Comportamiento Sexual en el Varón Humano”.

Tukey acuñó muchos términos estadísticos que ahora son de uso común, pero las dos más famosas palabras inventadas por él están relacionadas con la informática. Mientras trabajaba con John von Neumann en los primeros diseños de computadoras, Tukey introdujo la palabra ”bit” como contracción de “dígito binario” (por sus siglas en inglés Binary Digit). También impuso la expresión *computer software* en un artículo de 1958 en el American Mathematical Monthly, aparentemente el primer uso del término. También fue el creador del no tan conocido “Lines Media-Media”, un método más simple para obtener la línea de regresión. Se retiró en 1985, y falleció en New Brunswick, New Jersey en el 2000.

(Wikipedia)