

3

Señales y sistemas discretos

3.1. Introducción

Una señal es una función que transmite información, generalmente acerca del estado o comportamiento de un sistema físico. Aunque las señales pueden representarse de muchas maneras, en todos los casos la información está contenida en las variaciones o en los patrones de variaciones de alguna variable. Las señales se pueden representar matemáticamente como una función de una o más variables independientes. Una señal de voz, por ejemplo, se representa matemáticamente como función de una única variable (el tiempo) y una imagen fotográfica como una función (el brillo o la iluminación) dependiente de dos variables espaciales. Es muy frecuente que la variable independiente de la representación matemática de la señal esté asociada al tiempo, aunque en algunos ejemplos específicos esta variable independiente puede representar otra entidad.

La variable independiente en la representación matemática de la señal puede ser continua o discreta, como se estudió en el Capítulo 1. Las señales *continuas en el tiempo* se definen en función de una variable independiente continua, y usualmente se las conoce como señales *analógicas*. Las señales de *tiempo discreto* están definidas solamente para instantes específicos de tiempo. En otras palabras, la variable independiente es discreta, y las señales se representan como una sucesión de números. Señales tales como la voz o imágenes pueden tener tanto una representación de tiempo continuo como de tiempo discreto, y si se satisfacen ciertas condiciones, ambas representaciones son equivalentes. Además de que la variable independiente pueda ser continua o discreta, los valores que toma la función también pueden ser continuos o discretos. Se denominan *señales digitales* aquellas en que tanto la variable independiente como la amplitud de la señal toman valores discretos.

Los sistemas de procesamiento de señales pueden clasificarse de la misma manera que las señales. Los sistemas de tiempo continuo son aquellos en los que tanto la entrada como la salida del sistema es una señal de tiempo continuo (o analógica), mientras que los sistemas de tiempo discreto son aquellos en los que las entradas y las salidas son señales discretas. Un sistema digital se caracteriza porque tanto sus entradas como sus salidas son señales digitales. El procesamiento digital de señales trata con la transformación de señales que son discretas tanto en amplitud como en tiempo. Este curso se especializa en el tratamiento de señales discretas (más que digitales), aunque algunos efectos de la

cuantización de la amplitud en valores discretos se tratarán en las secciones pertinentes. Las señales de tiempo discreto pueden provenir de “tomar muestras” de una señal de tiempo continuo, o pueden ser generadas directamente por algún proceso de tiempo discreto. Cualquiera sea su origen, las señales de tiempo discreto y los sistemas que las procesan poseen muchas características atractivas. En la mayoría de los casos, un sistema de tiempo discreto es un algoritmo: puede ser un código que se ejecuta en un procesador de propósito general (microprocesadores, sistemas de cómputos), de propósito especializado (procesadores digitales de señales o DSP, o FPGAs, etc.), que se codifica directamente en hardware (circuitos integrados específicos ASICs), o que aprovecha fenómenos físicos (dispositivos de ondas acústicas de superficie, CCD o dispositivos de transporte de cargas por sus siglas en inglés). Se puede implementar un sistema completo de procesamiento digital de señales en un único circuito integrado utilizando técnicas de integración de gran escala (VLSI por sus siglas en inglés): ejemplos típicos son los reproductores de audio portátiles, circuitos integrados especializados para comunicaciones electrónicas, etc. Los sistemas de tiempo discreto también pueden utilizarse para simular sistemas de tiempo continuo. Lo más importante es que permiten transformar las señales de maneras que serían imposibles utilizando sistemas de tiempo continuo, ya sea por la complejidad del hardware o por la naturaleza de los procesos a que se someten. Por lo tanto, cuando se necesita procesamiento avanzado y flexible frecuentemente es preferible una representación de la señal en tiempo discreto antes que en tiempo continuo.

En este capítulo se estudian los conceptos fundamentales de las señales y los sistemas de procesamiento de tiempo discreto para señales unidimensionales. Se enfatiza el estudio de la clase de sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Muchas de las propiedades y resultados que se derivarán en este capítulo y los que siguen serán similares a los de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo de tiempo continuo que se estudian en numerosos textos clásicos (Papoulis, 1980; Oppenheim y Willsky, 1983). En realidad, es posible encarar el estudio de los sistemas discretos tratando las sucesiones como señales de tiempo continuo formadas por impulsos (o *deltas de Dirac* $\delta(t)$, estudiados en el Capítulo 2). Este enfoque, realizado con cuidado, puede conducir a resultados correctos y ha sido la base de numerosas presentaciones de sistemas de datos muestreados (tratados, por ejemplo, en los textos de Raggazini y Franklin, 1958; Freeman, 1965; Phillips y Nagle, 1984). Sin embargo, no todas las sucesiones provienen del muestreo de señales continuas y numerosos sistemas de tiempo discreto no son aproximaciones de sistemas analógicos equivalentes. Existen diferencias importantes y fundamentales entre los sistemas de tiempo discreto y los sistemas de tiempo continuo, por lo que en lugar de forzar resultados de la teoría de sistemas continuos para sistemas de tiempo discreto, se derivarán resultados equivalentes utilizando una estructura y notación adecuadas para este tipo de sistemas. Las señales de tiempo discreto se vincularán con las señales de tiempo continuo sólo cuando sea necesario y útil hacerlo.

3.2. Señales de tiempo discreto: sucesiones

Las señales de tiempo discreto se representan matemáticamente como sucesiones de números. Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros. A lo largo del curso, se utilizarán los corchetes [] para indicar la variable independiente de tales funciones, y los paréntesis () para indicar la variable independiente de funciones de variables

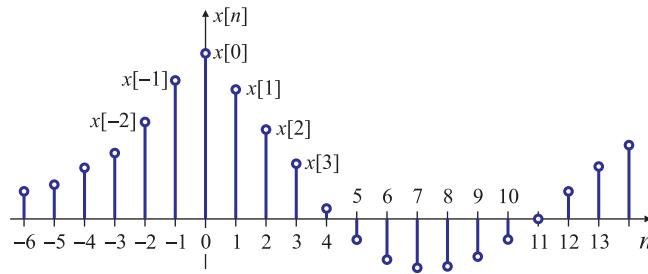


Fig. 3.1. Representación gráfica de una señal de tiempo discreto.

continuas. La manera formal de indicar una sucesión es

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty,$$

donde n es un entero. La forma correcta de indicar una sucesión x de números es $x[\cdot]$, y $x[n]$ es el elemento n -ésimo de la sucesión. Sin embargo, es usual abusar de la notación y utilizar $x[n]$ para indicar la sucesión, y no solamente su elemento n -ésimo.

Las sucesiones o señales discretas se representan gráficamente como se muestra en la Fig. 3.1. Aunque el eje de las absisas se dibuja como un trazo continuo, la sucesión $x[n]$ sólo está definida para valores enteros de n . No es correcto pensar que $x[n]$ es cero cuando el argumento n no es un entero, sino que $x[n]$ no está definida si n no es entero.

Más allá de representar una señal discreta como la gráfica de la Fig. 3.1, también se utilizan otras representaciones que en algunos casos pueden ser más convenientes:

1. Representación funcional, tal como

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 1, 3, \\ 4, & \text{para } n = 2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2. Representación tabular:

n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
	x[n]	...	0	0	0	1	4	1	0	0

3. Representación en forma de sucesión: una sucesión de longitud infinita se representa como

$$x[n] = \{ \dots, 0, 0, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \},$$

↑

donde ↑ indica el origen $n = 0$. Una sucesión de longitud finita puede escribirse

$$x[n] = \{ 3, -2, 0, 1, 4, 1, 0, 0, 4 \}.$$

↑

Una sucesión $x[n]$ que es cero para $n < 0$ puede representarse como

$$x[n] = \{ 0, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \}$$

↑

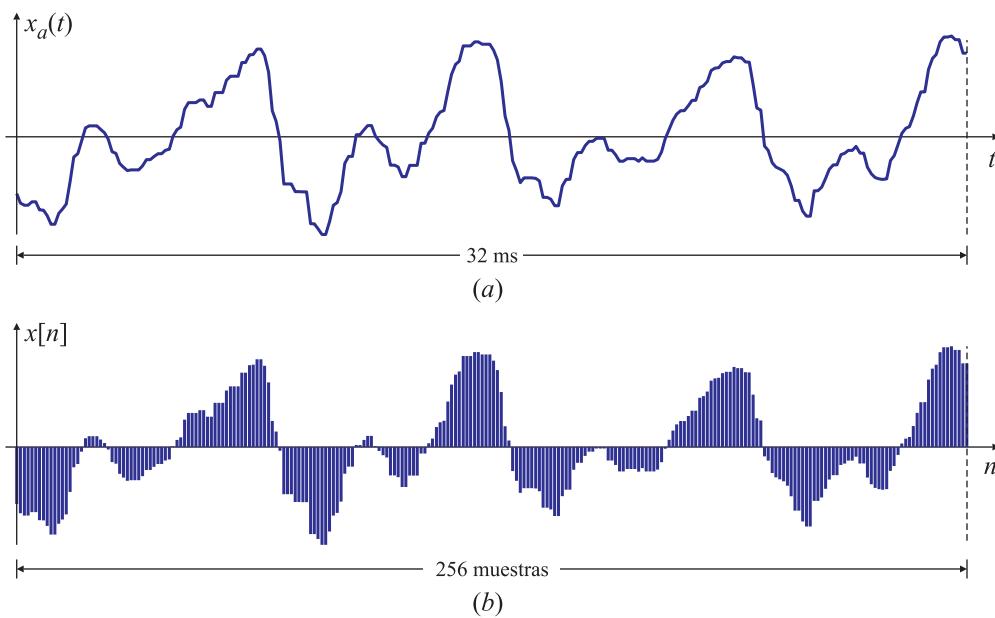


Fig. 3.2. Segmento de una señal vocal $x_a(t)$ de tiempo continuo (a). Sucesión de muestras resultante de muestrear $x_a(t)$ con $T = 125 \mu\text{s}$.

y en este caso puede omitirse la flecha, entendiendo que la muestra correspondiente a $n = 0$ es la de la extrema izquierda.

Estas sucesiones pueden obtenerse por tomar muestras de una señal analógica $x_a(t)$ cada T segundos, proceso que se denomina *muestrear* la señal. En este caso, el valor numérico de la muestra n -ésima de la sucesión es igual al valor de la señal $x_a(t)$ en $t = nT$

$$x[n] = x_a(t)|_{t=nT}, \quad -\infty < n < \infty.$$

La cantidad T se denomina *período de muestreo* y su recíproca es la *frecuencia de muestreo* $F_s = 1/T$. Aunque las sucesiones no siempre resultan de muestrear una señal analógica, es habitual referirse a $x[n]$ como la “ n -ésima muestra” de la sucesión.

Por ejemplo, la Fig. 3.2(a) muestra un segmento de una señal de voz $x_a(t)$ producida por la variación de la presión acústica en función del tiempo sobre la membrana de un micrófono, y la Fig. 3.2(b) muestra una sucesión de muestras $x[n]$ de $x_a(t)$ tomadas cada $T = 125 \mu\text{s}$. Aunque la señal original está definida para cualquier valor de la variable continua t , la sucesión discreta contiene información sobre la señal solamente en instantes de tiempo discretos $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ que corresponden a los instantes de tiempo continuos $t = \dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots$, etc. Como se estudiará más adelante (en el Capítulo 5) la señal original puede recuperarse (o reconstruirse) tan precisamente como se quiera a partir del conjunto de muestras, siempre y cuando cumpla con una serie de requisitos, y las muestras sean tomadas a una velocidad adecuada.

3.2.1. Sucesiones básicas y operaciones entre sucesiones

En el análisis de los sistemas de procesamiento de señales discretas las sucesiones se manipulan de diferentes maneras. El producto y la suma de dos sucesiones $x[n]$ e $y[n]$ se

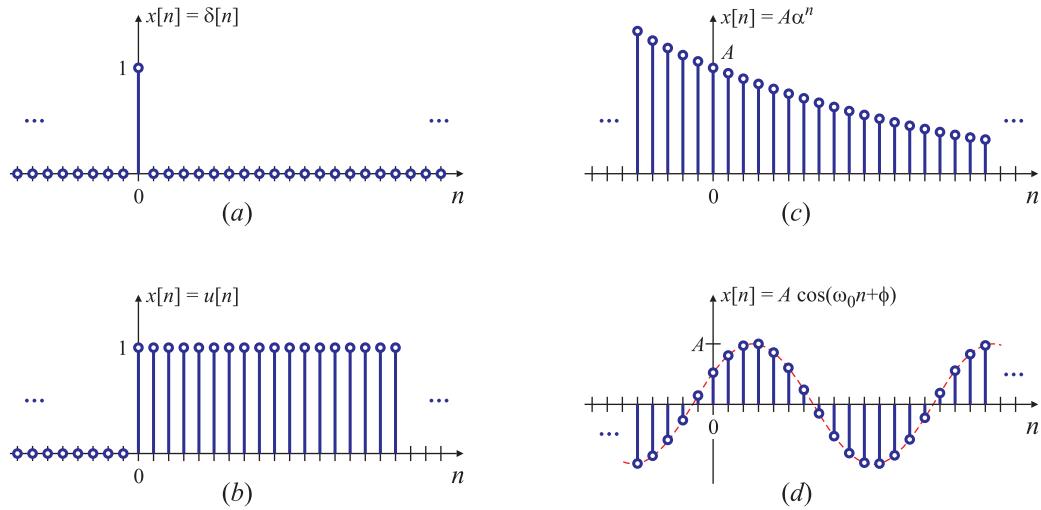


Fig. 3.3. Algunas sucesiones básicas: impulso discreto (a), escalón unitario (b), exponencial real (c), sinusoidal (d).

definen como el producto y la suma muestra a muestra. La multiplicación de una sucesión $x[n]$ por un número α se define como la sucesión formada por el producto del valor cada muestra de la sucesión por α .

Una sucesión $y[n]$ es una versión retardada o corrida de una sucesión $x[n]$ si los valores de $y[n]$ satisfacen

$$y[n] = x[n - n_0]$$

donde n_0 es un entero.

En el estudio de los sistemas discretos, varias sucesiones básicas son de especial importancia. Estas sucesiones se representan en la Fig. 3.3, y se discuten a continuación.

3.2.1.1. El impulso unitario $\delta[n]$

La sucesión *impulso unitario* que se nota como $\delta[n]$ y que se muestra en la Fig. 3.3(a) se define como la sucesión con los valores

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq 0, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Esta definición es mucho más sencilla que la del impulso o delta de Dirac $\delta(t)$ estudiado en el Capítulo 2, pero es tan importante y cumple el mismo papel para los sistemas discretos que el delta de Dirac para los sistemas continuos, aunque no padece de todas sus complicaciones matemáticas: su definición es simple y precisa. Por conveniencia se lo suele denominar *impulso discreto*, o simplemente *impulso* cuando no hay posibilidad de confundirlo con su homólogo continuo.

Como se estudiará en la discusión de los sistemas lineales, uno de los aspectos más importantes de la sucesión impulso $\delta[n]$ es que cualquier sucesión arbitraria $x[n]$ puede representarse como la suma de impulsos escalados y desplazados en el tiempo. Por ejemplo, la

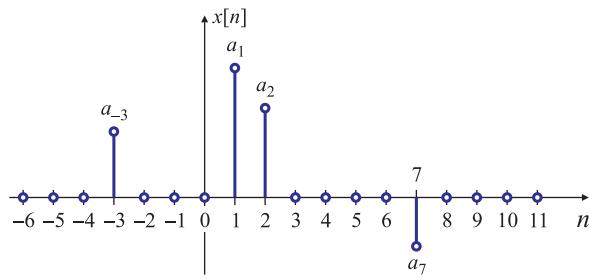


Fig. 3.4. Ejemplo de una sucesión representada como una suma de impulsos discretos escalados y desplazados.

sucesión $x[n]$ de la Fig. 3.4 se puede expresar como

$$x[n] = a_{(-3)}\delta[n + 3] + a_1\delta[n - 1] + a_2\delta[n - 2] + a_7\delta[n - 7].$$

De manera más general, cualquier sucesión puede ser representada como

$$x[n] = \sum_m x[m]\delta[n - m]. \quad (3.1)$$

La expresión (3.1) se utilizará específicamente en la discusión de los sistemas lineales de tiempo discreto.

3.2.1.2. El escalón unitario $u[n]$

La sucesión *escalón unitario*, que se nota $u[n]$ y que se representa esquemáticamente en la Fig. 3.3(b) se define como

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq 0, \\ 0, & \text{si } n < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

El escalón unitario se puede relacionar con el impulso pensándolo como una suma de impulsos desplazados en el tiempo, siguiendo la idea de la ecuación (3.1). Matemáticamente se puede expresar como

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \dots$$

o bien

$$u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n - m].$$

Otra forma de escribir el escalón unitario en función de la sucesión impulso es

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m], \quad (3.3)$$

que expresa que el valor del escalón unitario en el índice (tiempo) n es igual a la suma acumulada de los todos valores de la sucesión impulso desde el índice $m = -\infty$ hasta $m = n$. De los infinitos términos de la suma, todos son nulos excepto si $n \geq 0$, ya que el

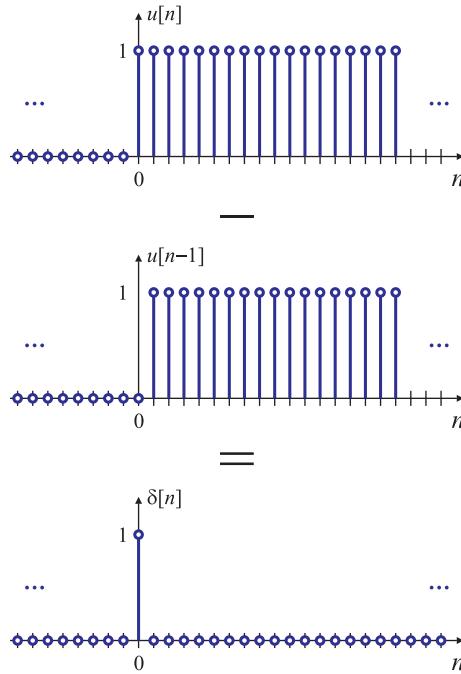


Fig. 3.5. Obtención del impulso $\delta[n]$ a partir de un escalón $u[n]$ y un escalón desplazado $u[n-1]$.

valor del impulso $\delta[m]$ en $m = 0$ es 1. De manera que si $n < 0$ se suman “infinitos” valores nulos, y si $n \geq 0$ a los “infinitos” ceros se le agrega un “1” que se produce cuando el índice m pasa por el valor $m = 0$.

Por otra parte, la sucesión impulso puede expresarse en función del escalón unitario si se la piensa como la resta de dos escalones unitarios, donde uno de ellos está desplazado una muestra hacia la derecha

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1] \quad (3.4)$$

como se muestra en la Fig. 3.5.

3.2.1.3. Exponenciales reales, complejas y sinusoidales discretas

Las sucesiones *exponenciales* y *sinusoidales* son de gran importancia en la representación y análisis de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo. La forma general de una sucesión exponencial es

$$x[n] = A\alpha^n.$$

Si A y α son números reales, entonces la sucesión es real. Si $0 < \alpha < 1$ y A es positivo, entonces los valores de la sucesión son todos positivos y decrecen a medida que aumenta n , como se muestra en la Fig. 3.3(c) y en la Fig. 3.6(a). Si $\alpha > 1$, la magnitud de la sucesión crece a medida que n aumenta, como se muestra en la Fig. 3.6(b). Si $\alpha < 0$, los valores de las muestras son positivos para los n pares, y negativos para los n impares. En particular, si $-1 < \alpha < 0$, su magnitud decrece con los n crecientes, como se muestra en la Fig. 3.6(c), y si $\alpha < -1$ la magnitud crece cuando n aumenta, como se grafica en la Fig. 3.6(d).

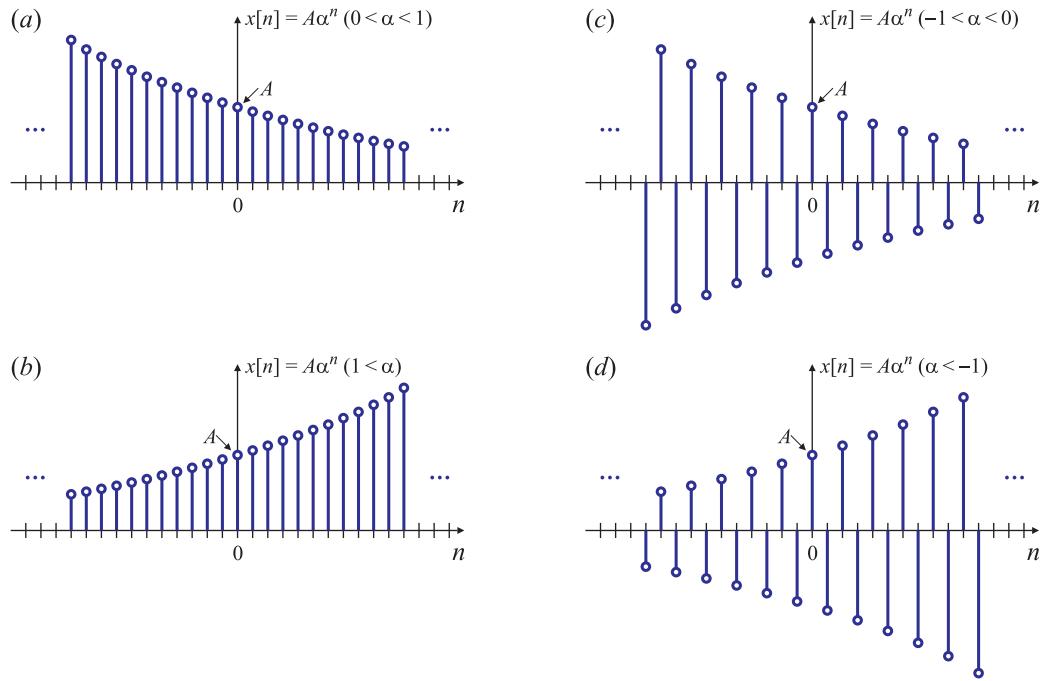


Fig. 3.6. Sucesiones exponenciales reales para $0 < \alpha < 1$ (a), $1 < \alpha < 1$ (b), $-1 < \alpha < 0$ (c) y $\alpha < -1$ (d).

Una sucesión sinusoidal tiene la forma general

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad \text{para todo } n,$$

si A es real, como se muestra en la Fig. 3.3(d).

La sucesión exponencial $A\alpha^n$ con α complejo tiene parte real e imaginaria que son sinusoidales pesadas por una exponencial. Específicamente, si $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ y $A = |A|e^{j\phi}$, la sucesión $x[n] = A\alpha^n$ se puede escribir de cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} x[n] &= A\alpha^n = |A|e^{j\phi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \phi)} \\ &= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \phi). \end{aligned}$$

La sucesión oscila con una envolvente que crece si $|\alpha| > 1$ o que decrece si $|\alpha| < 1$.

Cuando $|\alpha| = 1$, se dice que la sucesión es una *sucesión exponencial compleja*, y tiene la forma

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \phi)} = |A| \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A| \sin(\omega_0 n + \phi), \quad (3.5)$$

es decir, las partes real e imaginaria de $e^{j\omega_0 n}$ varían sinusoidalmente con n . El hecho que n en la ecuación (3.5) sea un número entero establece unas diferencias importantes entre las propiedades de las funciones exponenciales complejas o sinusoidales (de tiempo continuo) y las sucesiones exponenciales complejas o sinusoidales de tiempo discreto. Por analogía con el caso de tiempo continuo, la cantidad ω_0 se denomina la *frecuencia* de la sucesión exponencial compleja o sinusoidal, y ϕ es la *fase*. Sin embargo, como n es un entero adimensional, las dimensiones (unidades) de ω_0 deben ser radianes. Si se desea mantener una analogía más estrecha con el caso de tiempo continuo, se pueden especificar las unidades de ω_0 como *radianes por muestras*, y las unidades de n como *muestras*.

Una diferencia interesante entre el caso continuo y el discreto se observa cuando se considera una sucesión exponencial compleja de frecuencia $\omega_1 = \omega_0 + 2\pi r$, donde r es un entero. En este caso,

$$\begin{aligned} x[n] &= Ae^{j\omega_1 n} = Ae^{j(\omega_0+2\pi r)n} = Ae^{j\omega_0 n}e^{j2\pi rn} \\ &= Ae^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

que concide con la sucesión exponencial compleja de frecuencia ω_0 , ya que $e^{j2\pi rn} \equiv 1$ porque r y n son números enteros: las sucesiones exponenciales complejas o sinusoidales cuyas frecuencias difieren $2\pi r$ radianes entre sí son indistinguibles! En efecto,

$$\begin{aligned} x[n] &= A \cos[(\omega_0 + 2\pi r)n + \phi] \\ &= A \cos(\omega_0 n + \phi). \end{aligned}$$

Las consecuencias de esta propiedad para el caso de las señales discretas que se obtienen al muestrear señales continuas serán estudiadas en detalle en el Capítulo 5. Por ahora, basta con notar que cuando se discuten señales exponenciales complejas $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$, o sinusoides reales $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$ sólo es necesario considerar frecuencias contenidas en un intervalo de longitud 2π , tales como $0 \leq \omega_0 < 2\pi$, o $-\pi < \omega_0 \leq \pi$.

Otra diferencia importante entre las exponenciales complejas y las sinusoidales de tiempo continuo y de tiempo discreto tiene que ver con la periodicidad, como se estudió en el Capítulo 1. En el caso de señales de tiempo continuo, una señal sinusoidal $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ o una exponencial compleja $y(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ son periódicas con período igual a la inversa de la frecuencia, $T = 1/f_0$. En el caso discreto, una sucesión periódica es aquella en que

$$x[n] = x[n + N] \quad \text{para todo } n,$$

donde el período N debe ser un número entero. Para que una sinusoidal discreta $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$ sea periódica de período N (o N -periódica) debe verificarse que

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi),$$

y para que esto sea cierto, es necesario que

$$\omega_0 N = 2\pi r \tag{3.6}$$

donde r es un entero. Algo parecido ocurre con la sucesión exponencial compleja $Ce^{j\omega_0 n}$: para que sea N -periódica debe verificarse que

$$Ce^{j\omega_0 n} = Ce^{j\omega_0(n+N)}$$

que es cierto solamente si $\omega_0 N = 2\pi r$, como en la ecuación (3.6). Por lo tanto, las sucesiones exponenciales complejas y sinusoidales no son necesariamente periódicas con período $2\pi/\omega_0$, y dependiendo del valor de ω_0 puede que ni siquiera sean periódicas!

EJEMPLO 3.1. Periodicidad de sucesiones sinusoidales

Sea la sucesión $x_1[n] = A \cos \omega_1 n$, con $\omega_1 = 3\pi/10$, que se representa en la Fig. 3.7(a). El menor valor de N para el cual se verifica la ecuación (3.6) es $N = 20$, que corresponde a un valor de $r = 3$. De la figura es evidente que $x[0] = x[20]$, $x[1] = x[21]$, etc. Para la sucesión $x_2[n] = \cos \omega_2 n$, con $\omega_2 = 1$, que se muestra en la Fig. 3.7(b), es evidente que no hay valores enteros para N y r que permitan satisfacer la ecuación (3.6). Se observa que $x[0] \neq x[20]$, $x[1] \neq x[21]$, etc, pero son "bastante parecidos". Este tipo de sucesión, que no es periódica pero que "parece" serlo, se suele denominar *cuasi periódica*. \square

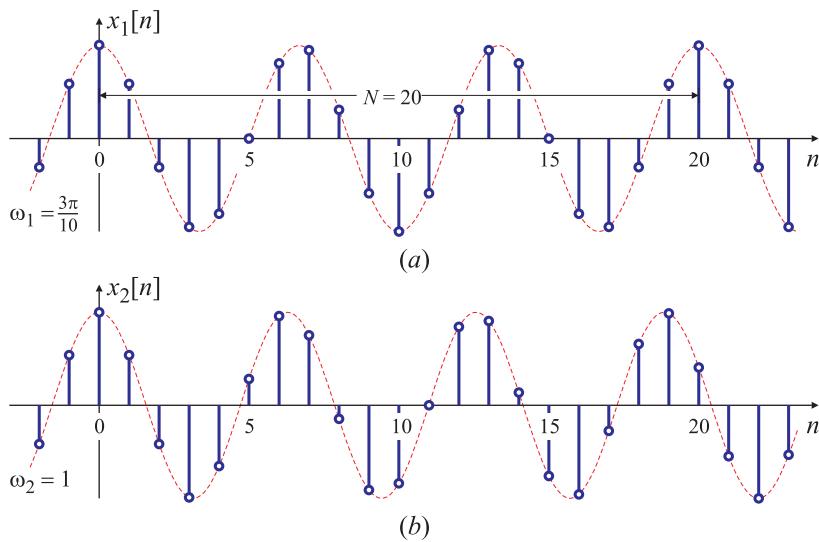


Fig. 3.7. Señal sinusoidal periódica (a), con $\omega_1 = 3\pi/10$, y quasi periódica (b), con $\omega_2 = 1$.

Cuando se combinan la condición enunciada por la ecuación (3.6) junto con la observación previa que las frecuencias ω_0 y $\omega_0 + 2\pi r$ resultan en sucesiones temporales idénticas (y por lo tanto, las frecuencias son indistinguibles), resulta que sólo hay N frecuencias diferentes correspondientes a sucesiones N -periódicas. Uno de tales conjuntos de frecuencias es

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Estas propiedades de las exponenciales complejas y las sinusoidales discretas son fundamentales para la teoría y el diseño de algoritmos computacionales eficientes para el análisis de Fourier de tiempo discreto, que se estudiará detalladamente en el Capítulo siguiente, y en el Capítulo 9.

En el caso de las señales exponenciales complejas y sinusoidales discretas la interpretación de las “bajas” y “altas” frecuencias también es ligeramente diferente que para el caso continuo. Una señal de tiempo continuo $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ oscila cada vez más rápidamente a medida que f_0 crece. En cambio, la señal discreta $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$ oscila más rápidamente a medida que ω_0 se va aumentando desde 0 hasta π . Pero cuando ω_0 se incrementa en el rango entre π y 2π las oscilaciones son cada vez más lentas. Este fenómeno se ilustra en la Fig. 3.8. Debido a la 2π -periodicidad en ω_0 de las sinusoidales y exponenciales complejas discretas, $\omega_0 = 2\pi$ es indistinguible de $\omega_0 = 0$, y en general, las frecuencias en un entorno de $\omega_0 = 2\pi$ son indistinguibles de frecuencias en un entorno de $\omega_0 = 0$. En consecuencia, para las exponenciales complejas y las sinusoidales discretas, valores de ω_0 en un entorno de $2\pi r$, con $r \in \mathbb{Z}$, corresponden a *bajas* frecuencias (oscilaciones relativamente lentas), mientras que valores de $\omega_0 = (\pi + 2\pi r)$, con $r \in \mathbb{Z}$, corresponden a *altas* frecuencias (oscilaciones relativamente rápidas).

EJEMPLO 3.2. Las frecuencias de las señales senoidales discretas

Sea una sucesión senoidal discreta de la forma $x_1[n] = A \cos(\omega_1 n)$ donde $\omega_1 = 2\pi/10$, y otra

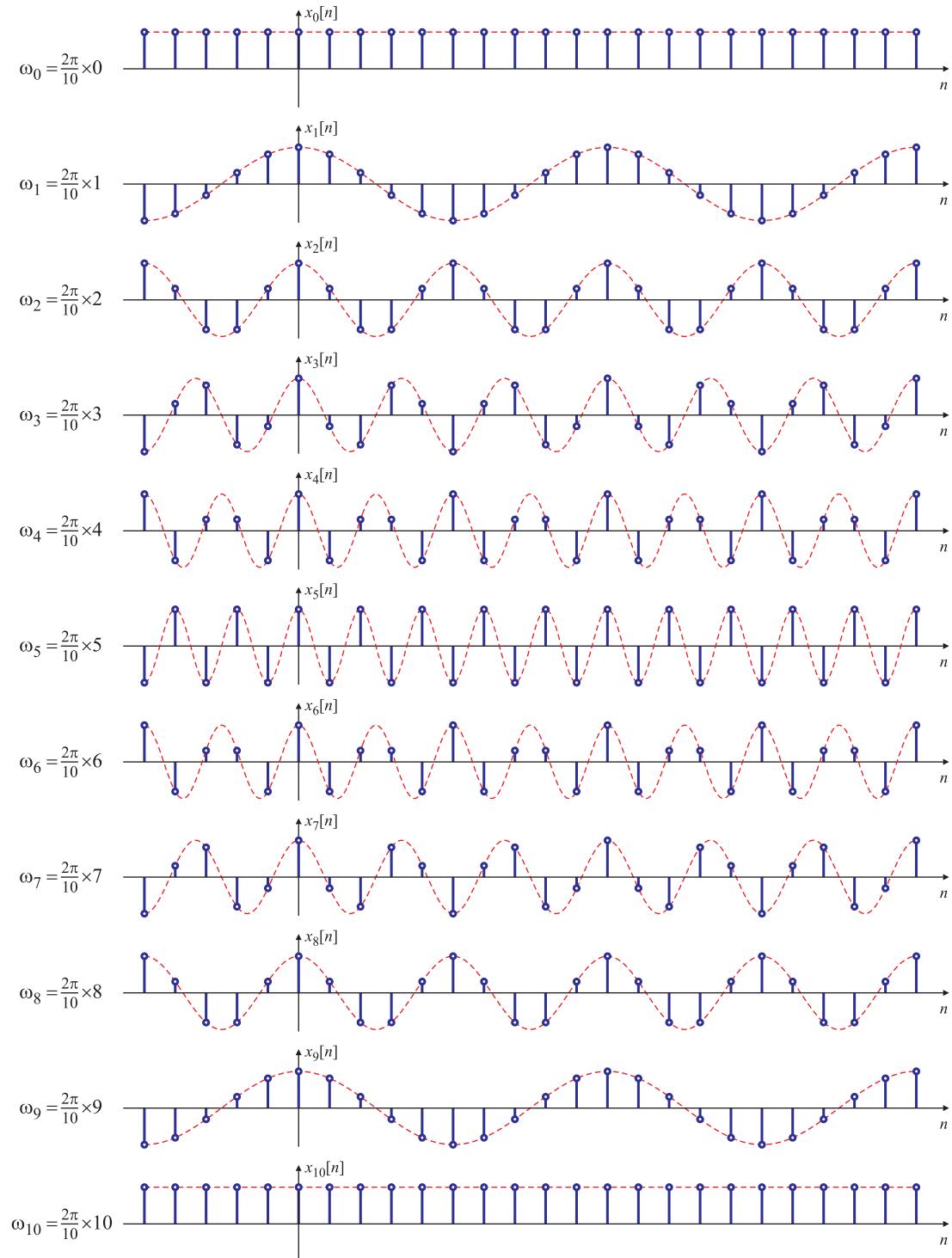


Fig. 3.8. La señal $x[n] = \cos(\omega_k n)$ para distintos valores de $\omega_k = 2\pi/10 \times k$. A medida que ω_k crece desde 0 hasta π (k desde 0 hasta 5), la sucesión oscila más rápidamente, como muestran las líneas de trazo. La oscilación se hace más lenta cuando ω_k crece desde π hasta 2π (k desde 5 hasta 10).

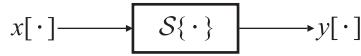


Fig. 3.9. Representación gráfica de un sistema de tiempo discreto que transforma una sucesión de entrada $x[n]$ en una sucesión de salida $y[n]$.

sucesión $x_2[n] = A \cos(\omega_2 n)$ de frecuencia $\omega_2 > \omega_1$, en particular $\omega_2 = 9 \times 2\pi/10$. Como $\cos \theta = \cos(2\pi r - \theta)$, con $r \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned} x_2[n] &= A \cos(\omega_2 n) = A \cos(2\pi n - \omega_2 n) = A \cos[(2\pi - \omega_2)n] = A \cos[(2\pi - \frac{9}{10}2\pi)n] \\ &= A \cos[(\frac{1}{10}2\pi)n] = A \cos(\omega_1 n). \end{aligned}$$

Es decir, que la señal $x_2[n]$ de “frecuencia mayor” ω_2 en realidad coincide “muestra a muestra” con la señal $x_1[n]$ de “frecuencia menor” ω_1 . Estas dos sucesiones $x_1[n]$ y $x_2[n]$ están representadas por la segunda y anteúltima filas de la Fig. 3.8. \square

3.3. Sistemas de tiempo discreto

Un sistema de tiempo discreto se define matemáticamente como una transformación u operador que mapea una sucesión de entrada con valores $x[n]$ en una sucesión de salida con valores $y[n]$. Esta operación puede indicarse de manera abreviada como

$$y[\cdot] = \mathcal{S}\{x[\cdot]\}, \quad (3.7)$$

y gráficamente suele indicarse como se muestra en la Fig. 3.9. La ecuación (3.7) representa una regla o fórmula para calcular los valores de la sucesión de salida a partir de los valores de la sucesión de entrada. Debe tenerse presente que la representación dada por (3.7) es genérica, en el sentido que el valor de la salida en el instante n puede ser una función de varios valores de la sucesión de entrada $x[\cdot]$. Los siguientes ejemplos presentan una serie de sistemas simples, que serán utilizados ampliamente a lo largo de todo el capítulo.

EJEMPLO 3.3. El sistema retardador ideal

El sistema retardador ideal está definido por la ecuación

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty, \quad (3.8)$$

donde n_d es una constante entera positiva denominada el *retardo* del sistema. La señal de salida del sistema retardador está compuesta por la sucesión de entrada desplazada n_d muestras hacia la derecha. Una representación gráfica del sistema retardador ideal se muestra en la Fig. 3.10.

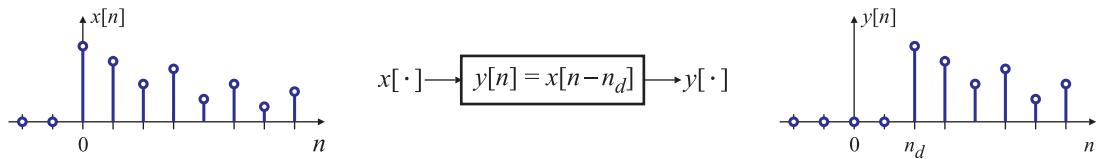


Fig. 3.10. Entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ del sistema retardador $y[n] = x[n - n_d]$ ($n_d = 2$).

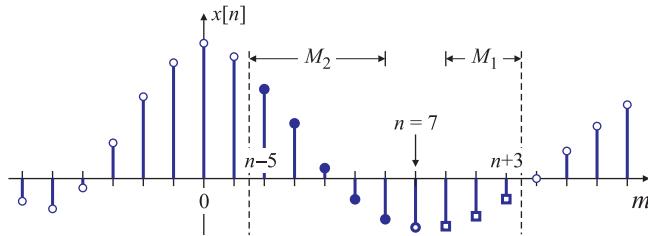


Fig. 3.11. Cálculo de la salida de un promediador con $M_1 = 3$ y $M_2 = 5$.

Si en (3.8) n_d es una constante entera negativa, la salida del sistema sería igual a la sucesión de entrada desplazada n_d muestras hacia la izquierda, lo que correspondería en realidad a un *adelanto* temporal (más que a un retardo). En este último caso el sistema sería un “*adivinador*”. \square

En el Ejemplo 3.3 el cálculo de una muestra de la señal de salida sólo necesita una muestra de la señal de entrada. Este no es el caso para el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.4. Sistema promediador

El sistema promediador más genérico está definido por la ecuación

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{m=-M_1}^{M_2} x[n-m] \\ &= \frac{1}{M_1+M_2+1} (x[n+M_1] + x[n+M_1-1] + \dots + x[n] + x[n-1] + \dots + x[n-M_2]). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Este sistema calcula la n -ésima muestra de la sucesión de salida como el promedio de (M_1+M_2+1) muestras vecinas a la n -ésima muestra de la sucesión de entrada. La Fig. 3.11 muestra una sucesión de entrada $x[n]$ graficada en función de una variable auxiliar m , y se indican las muestras que intervienen en el cálculo de la muestra n -ésima de la salida $y[n]$, para $n = 7$, $M_1 = 3$ y $M_2 = 5$. La salida $y[7]$ es igual a $1/9$ de la suma de todas las muestras de la señal de entrada comprendidas entre las líneas punteadas. En particular,

$$\begin{aligned} y[7] &= x[7+3] + x[7+2] + x[7+1] + && \text{(muestras anteriores a la actual)} \\ &+ x[7] + && \text{(muestra actual)} \\ &+ x[7-1] + x[7-2] + x[7-3] + x[7-4] + x[7-5] && \text{(muestras posteriores a la actual)} \end{aligned}$$

En este caso, intervienen $M_2 = 5$ muestras anteriores (pasadas) a la muestra $n = 7$, indicadas con círculos llenos, y $M_1 = 3$ valores posteriores (futuros), indicados con cuadrados: para calcular $y[7]$, se suman los valores de las muestras desde $x[2]$ hasta $x[10]$, y se divide este resultado por $5+3+1 = 9$. Para calcular $y[8]$, ambas líneas punteadas se desplazan una muestra hacia la derecha: se suman los valores de las muestras desde $x[3]$ hasta $x[11]$, y se divide este resultado por 9, etc. \square

Las clases o tipos de sistemas se definen imponiendo restricciones en las propiedades de la transformación $S\{\cdot\}$ en la ecuación (3.7). Esto conduce a representaciones matemáticas muy generales. De particular importancia son las restricciones y propiedades discutidas en las Secciones 3.3.1-3.3.5.

3.3.1. Sistemas sin memoria

Se dice que un sistema es *sin memoria* si la salida $y[n]$ para cada valor de n depende solamente del mismo número de muestra n de la señal de entrada $x[n]$.

EJEMPLO 3.5. Un sistema sin memoria

Un ejemplo de un sistema sin memoria es aquel en el que $y[n]$ y $x[n]$ están relacionados como

$$y[n] = (x[n])^2$$

ya que el valor de la salida $y[n]$ en $n = n_0$ sólo depende del valor de la entrada $x[n]$ en $n = n_0$. \square

En un sistema con memoria, la salida en el instante actual depende de valores pasados o futuros de la entrada.

EJEMPLO 3.6. Un sistema con memoria

El sistema retardador ideal del Ejemplo 3.8 no es “sin memoria” salvo que $n_d = 0$, que resulta en $y[n] = x[n]$. Este sistema “tiene memoria” independientemente que n_d sea positivo (sistema retardador) o negativo (sistema “adivinador”). El sistema promediador del Ejemplo 3.4 no es “sin memoria”, salvo que $M_1 = M_2 = 0$, en cuyo caso $y[n] = x[n]$. \square

3.3.2. Sistemas lineales

La clase de los sistemas lineales es aquella que satisface el principio de superposición. Si $y_1[n]$ e $y_2[n]$ son las salidas de un sistema cuando se lo excita con entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, respectivamente, es decir

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \mathcal{S}\{x_1[n]\}, \\ y_2[n] &= \mathcal{S}\{x_2[n]\}, \end{aligned}$$

entonces el sistema es lineal *si y sólo si* se satisfacen simultáneamente las siguientes propiedades:

1. Propiedad *aditiva*:

$$\mathcal{S}\{x_1[n] + x_2[n]\} = \mathcal{S}\{x_2[n]\} + \mathcal{S}\{x_1[n]\} = y_1[n] + y_2[n], \quad (3.10)$$

2. Propiedad de *escalado* o de *homogeneidad*:

$$\mathcal{S}\{ax_1[n]\} = a\mathcal{S}\{x_1[n]\} = ay_1[n], \quad (3.11)$$

donde a es una constante arbitraria.

Estas dos propiedades pueden combinarse en el principio de superposición, que se enuncia como

$$\mathcal{S}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\mathcal{S}\{x_1[n]\} + b\mathcal{S}\{x_2[n]\} \quad (3.12)$$

para constantes a, b arbitrarias. Este concepto puede generalizarse a la superposición de muchas entradas. Específicamente, si la entrada se define como

$$x[n] = \sum_m a_m x_m[n]$$

el sistema es lineal si

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} = \sum_m a_m y_m[n],$$

donde $y_m[n]$ es la salida del sistema ante la entrada $x_m[n]$, es decir $y_m[n] = \mathcal{S}\{x_m[n]\}$.

Usando la definición del principio de superposición se puede demostrar fácilmente que los sistemas de los Ejemplos 3.3 y 3.4 son lineales, y que el sistema del Ejemplo 3.5 no es lineal. La forma de demostrar la propiedad de linealidad se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.7. Sistema acumulador

El sistema conocido como *acumulador* está descripto por la relación

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m], \quad (3.13)$$

o también por

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m]. \quad (3.14)$$

Dadas las entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, la salida del sistema ante cada entrada está dada por

$$y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\} = \sum_{m=-\infty}^n x_1[m], \quad y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\} = \sum_{m=-\infty}^n x_2[m],$$

de acuerdo a la ecuación (3.13). Si se construye una entrada $x_3[n]$ formada por la combinación lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$, es decir $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, la salida $y_3[n]$ ante la entrada $x_3[n]$ es, usando nuevamente (3.13),

$$y_3[n] = \mathcal{S}\{x_3[n]\} = \sum_{m=-\infty}^n x_3[m],$$

y desarrollando,

$$y_3[n] = \sum_{m=-\infty}^n (ax_1[m] + bx_2[m]) = a \sum_{m=-\infty}^n x_1[m] + b \sum_{m=-\infty}^n x_2[m] = ay_1[n] + by_2[n].$$

Esta última ecuación muestra que $\mathcal{S}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\mathcal{S}\{x_1[n]\} + b\mathcal{S}\{x_2[n]\}$, y por lo tanto, de acuerdo a la definición del principio de superposición (3.12), el sistema es lineal. \square

Una forma sistemática de probar linealidad se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.8. Un sistema no lineal

Sea el sistema dado por la relación

$$y[n] = x[n] + 1. \quad (3.15)$$

Una forma sistemática para probar la linealidad (o alinealidad) del sistema es:

1. Se definen dos entradas arbitrarias $x_1[n]$ y $x_2[n]$, y se calculan las salidas correspondientes:

$$y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\} = x_1[n] + 1, \quad y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\} = x_2[n] + 1.$$

2. Se construye una nueva entrada $x_3[n]$ que sea combinación lineal de las dos entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, es decir $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$.
3. Se calcula la salida del sistema ante esta nueva entrada usando la relación entre la entrada y la salida del sistema, que en este caso está dada por la ecuación (3.15):

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \mathcal{S}\{x_3[n]\} \\ &= x_3[n] + 1 \\ &= ax_1[n] + bx_2[n] + 1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

4. Se calcula la combinación lineal de las salidas $y_1[n]$ e $y_2[n]$ evaluadas en el Paso 1:

$$\begin{aligned} ay_1[n] + by_2[n] &= a(x_1[n] + 1) + b(x_2[n] + 1) \\ &= ax_1[n] + bx_2[n] + (a + b) \end{aligned} \tag{3.17}$$

5. Se verifica la propiedad de superposición $\mathcal{S}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\mathcal{S}\{x_1[n]\} + b\mathcal{S}\{x_2[n]\}$, es decir, se compara si $y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$ (los resultados de los Pasos 3 y 4). En este caso, es evidente que $y_3[n]$, dado por la ecuación (3.16) es *diferente* de $ay_1[n] + by_2[n]$, dado por la ecuación (3.17), y por lo tanto el sistema *no* es lineal, ya que no satisface el principio de superposición (3.12). \square

Una consecuencia inmediata de la propiedad de escalado u homogeneidad es que si el sistema es lineal, una entrada idénticamente nula ($x[n] \equiv 0$) debe producir una salida también idénticamente nula ($y[n] \equiv 0$), ya que basta tomar $a = 0$ en (3.11). Esta es una forma más sencilla de probar la *no* linealidad del Ejemplo 3.8, como se muestra en el Ejemplo 3.9 a continuación, pero no sirve para probar que un sistema es lineal, como se desarrolla en el Ejemplo 3.10.

EJEMPLO 3.9. Cómo probar que un sistema es no lineal

Para el sistema especificado por la relación

$$y[n] = x[n] + 1,$$

se observa que si se lo excita con $x[n] \equiv 0$ la salida es $y[n] = 1$. Por lo tanto, no se verifica la propiedad de escalado u homogeneidad dada por la ecuación (3.11), y por lo tanto el sistema *no* es lineal. \square

En el siguiente ejemplo muestra que para probar con un contraejemplo, hay que buscar una entrada apropiada.

EJEMPLO 3.10. Cómo *no* probar que un sistema es lineal

El sistema del Ejemplo 3.5 está caracterizado por la relación

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} = (x[n])^2.$$

Es evidente que haciendo $x[n] = 0$ resulta $y[n] = 0$, y por lo tanto *parece* que el sistema satisface la propiedad de homogeneidad. Por supuesto, esto *no* es cierto porque $\mathcal{S}\{ax[n]\} = a^2(x[n])^2 \neq a\mathcal{S}\{x[n]\}$. Este sistema es no lineal ya que no cumple el principio de superposición (3.12). \square

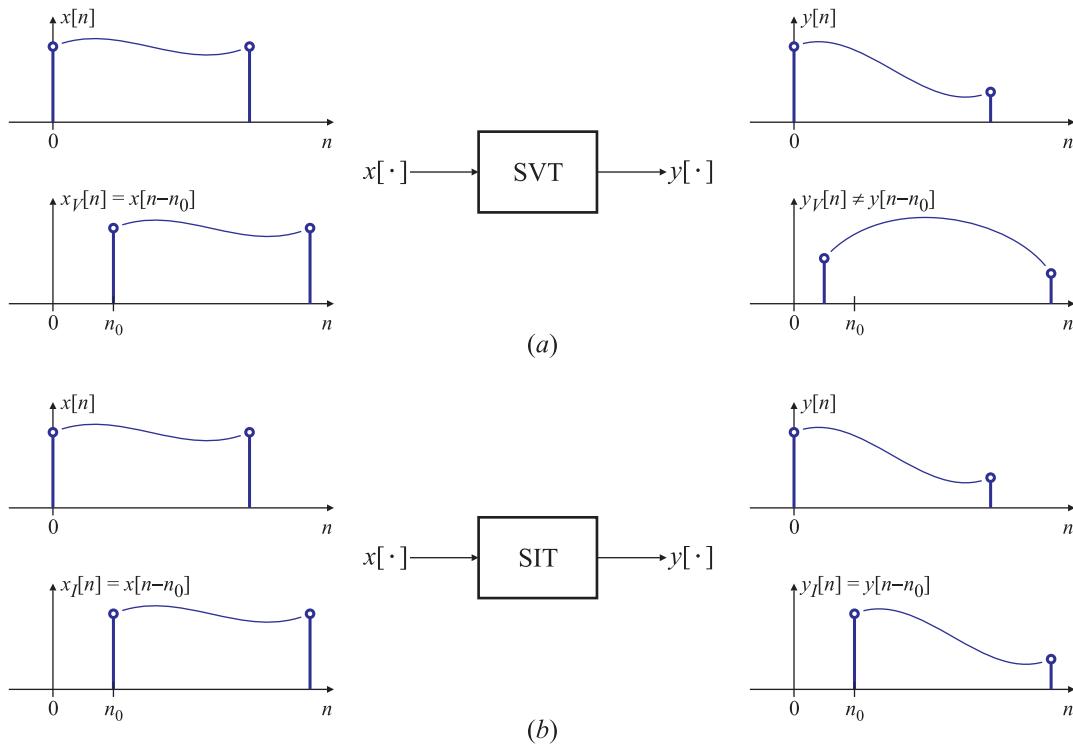


Fig. 3.12. Comportamiento temporal de un sistema *variante* en el tiempo (a) y de un sistema *invariante* en el tiempo (b).

Estos ejemplos muestran que para demostrar que un sistema satisface una determinada propiedad, debe probarse que la verifican para *cualquier tipo* de entrada, y no una entrada específica (por ejemplo, $x[n] = 0$ en el Ejemplo 3.10). Por el contrario, para probar que el sistema *no* cumple con una determinada propiedad, basta con encontrar *una* señal que no verifique la propiedad bajo estudio.

3.3.3. Sistemas invariantes en tiempo

Un sistema *invariante en el tiempo* o *invariante al desplazamiento*, como también suele conocerse esta propiedad, es aquel en el cual un retardo o desplazamiento temporal de la señal de entrada causa un retardo o corrimiento temporal idéntico en la señal de salida. Específicamente, si $y[n]$ es la salida de un sistema ante una entrada $x[n]$, es decir $y[n] = S\{x[n]\}$ se dice que el sistema es *invariante en el tiempo* si la salida del sistema ante una sucesión de entrada $x_1[n] = x[n - n_0]$ es $y_1[n] = y[n - n_0]$. En otras palabras, si $S\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$.

En la Fig. 3.12(a) se muestra el comportamiento de un sistema *variante en el tiempo*. Ante una entrada $x[n]$, el sistema responde con la salida $y[n]$. Si se aplica una entrada $x_V[n] = x[n - n_0]$ el sistema responde con una salida $y_V[n]$ que es distinta de $y[n - n_0]$. En cambio, si el sistema es *invariante en el tiempo*, ante una entrada $x_I[n] = x[n - n_0]$, la salida del sistema $y_I[n]$ es la misma que $y[n]$, pero desplazada n_0 muestras: $y_I[n] = y[n - n_0]$, como se representa en la Fig. 3.12(b).

Todos los sistemas de los Ejemplos 3.3 a 3.9 son invariantes en el tiempo. La forma de demostrar esta propiedad se estudia con el sistema retardador ideal del Ejemplo 3.3.

EJEMPLO 3.11. El sistema retardador ideal

Este sistema está caracterizado por la relación

$$y[n] = x[n - n_d].$$

Para probar si es invariante en el tiempo, se siguen los siguientes pasos:

1. Se define una entrada auxiliar $x_1[n]$ retardando la entrada original $x[n]$ un número n_0 arbitrario de muestras: $x_1[n] = x[n - n_0]$.
2. Se calcula la salida $y_1[n]$ del sistema ante la nueva entrada $x_1[n]$:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \mathcal{S}\{x_1[n]\} \\ &= x_1[n - n_d]. \end{aligned}$$

3. Se escribe la salida $y_1[n]$ en función de la entrada original $x[n]$, usando la definición de la entrada auxiliar:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n - n_d] \\ &= x[(n - n_d) - n_0] \\ &= x[n - n_0 - n_d]. \end{aligned}$$

En este caso se tiene que

$$\mathcal{S}\{x[n - n_0]\} = x[n - n_0 - n_d]. \quad (3.18)$$

4. Se calcula la salida original retardada en n_0 muestras:

$$y[n - n_0] = x[(n - n_0) - n_d] \quad (3.19)$$

5. Se compara el resultado del Paso 3, es decir $\mathcal{S}\{x[n - n_0]\}$, dado por la ecuación (3.18) con el resultado del Paso 4, la salida $y[n - n_0]$, representada en esta caso por la ecuación (3.19). Si son iguales, es decir $\mathcal{S}\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$ el sistema es invariante en el tiempo. De la comparación de (3.18) con (3.19) resulta que el sistema retardador ideal es invariante en el tiempo. \square

Los siguientes dos ejemplos muestran sistemas que son *variantes* en el tiempo.

EJEMPLO 3.12. El sistema compresor

El compresor es un sistema definido por la relación

$$y[n] = x[Mn],$$

donde M es un entero positivo. Este sistema se caracteriza por producir una muestra de salida cada M muestras de la entrada, descartando $(M - 1)$ muestras. En otras palabras, selecciona una de cada M muestras de la entrada, como se representa en la Fig. 3.13. El principio de funcionamiento da indicios que el sistema no es invariante en el tiempo; la demostración matemática sigue los lineamientos mostrados en el Ejemplo 3.11:

1. Se define una entrada auxiliar $x_1[n]$ retardando la entrada original $x[n]$ un número n_0 arbitrario de muestras: $x_1[n] = x[n - n_0]$.

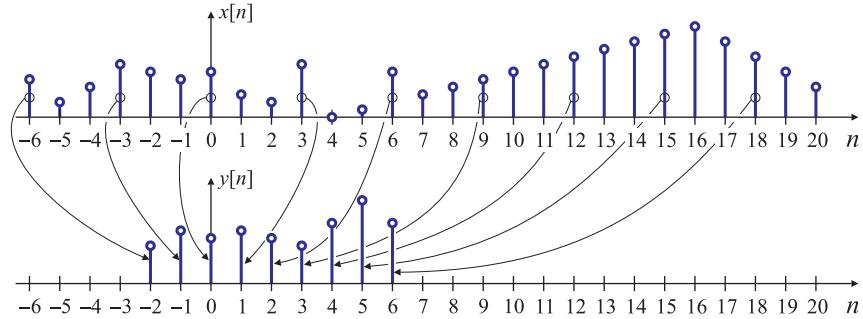


Fig. 3.13. Sucesiones $x[n]$ de entrada e $y[n]$ de salida de un sistema compresor con $M = 3$.

2. Se calcula la salida $y_1[n]$ del sistema ante la nueva entrada $x_1[n]$:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \mathcal{S}\{x_1[n]\} \\ &= x_1[Mn]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

3. Se escribe la salida $y_1[n]$ en función de la entrada original $x[n]$, usando la definición de la entrada auxiliar:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[Mn] \\ &= x[Mn - n_0] \end{aligned} \quad (3.21)$$

de donde resulta que

$$\mathcal{S}\{x[n - n_0]\} = x[Mn - n_0]. \quad (3.22)$$

4. Se calcula la salida original retardada en n_0 muestras:

$$y[n - n_0] = x[M(n - n_0)]. \quad (3.23)$$

5. Se compara el resultado del Paso 3, es decir $\mathcal{S}\{x[n - n_0]\}$, dado por la ecuación (3.22) con el resultado del Paso 4, la salida $y[n - n_0]$, representada en este caso por la ecuación (3.23). En este caso, como (3.22) es distinta de (3.23), resulta que $\mathcal{S}\{x[n - n_0]\} \neq y[n - n_0]$ y por lo tanto el sistema compresor no es invariante en el tiempo (o es variante en el tiempo). \square

Cuando se verifica esta propiedad, debe prestarse atención a la correcta sustitución de las variables, específicamente a la manera de calcular la ecuación (3.21) y la ecuación (3.23). En el primer caso, se tiene que

$$x_1[n] = x[\underline{n} - n_0], \quad (3.24)$$

y se desea calcular

$$y_1[n] = x_1[Mn] \quad (3.25)$$

en función de $x[n]$. En (3.24) la variable es n (se la ha subrayado para enfatizarla). La ecuación (3.25) pide calcular $x_1[Mn]$ para encontrar $y_1[n]$. La expresión $x_1[Mn]$ significa que la variable n en (3.24) debe reemplazarse por Mn :

$$x_1[Mn] = x_1[n]|_{n \rightarrow Mn} = x[n - n_0]|_{n \rightarrow Mn} = x[Mn - n_0],$$

que resulta en la ecuación (3.21). En cambio, cuando se calcula $y[n - n_0]$ en función de $x[n]$ teniendo en cuenta la definición del sistema (3.20), la variable n se debe reemplazar por $(n - n_0)$:

$$y[n - n_0] = y[n]|_{n \rightarrow (n - n_0)} = x[Mn]|_{n \rightarrow (n - n_0)} = x[M(n - n_0)].$$

Es conveniente hacer las sustituciones con cuidado para evitar errores.

EJEMPLO 3.13. Una ganancia variante en el tiempo

El sistema caracterizado por la relación

$$y[n] = a(n)x[n], \quad (3.26)$$

donde $a(n)$ es una función cualquiera de n , representa un sistema cuya ganancia $a(n)$ varía en el tiempo. En general, siempre que los coeficientes que “pesan” a la señal de entrada sean función de la muestra n , el sistema no será invariante en el tiempo. Se demostrará siguiendo el esquema utilizado en los ejemplos previos.

1. Se define una entrada auxiliar $x_1[n]$ retardando la entrada original $x[n]$ un número n_0 arbitrario de muestras: $x_1[n] = x[n - n_0]$.
2. Se calcula la salida $y_1[n]$ del sistema ante la nueva entrada $x_1[n]$, utilizando la definición del sistema (3.26):

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \mathcal{S}\{x_1[n]\} \\ &= a(n)x_1[n]. \end{aligned}$$

3. Se escribe la salida $y_1[n]$ en función de la entrada original $x[n]$, usando la definición de la entrada auxiliar:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= a(n)x_1[n] \\ &= a(n)x[n - n_0] \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$\mathcal{S}\{x[n - n_0]\} = a(n)x[n - n_0]. \quad (3.27)$$

4. Se calcula la salida original retardada en n_0 muestras utilizando la definición del sistema (3.26):

$$y[n - n_0] = y[n]|_{n \rightarrow (n-n_0)} = a(n)x[n]|_{n \rightarrow (n-n_0)} = a(n-n_0)x[(n-n_0)] \quad (3.28)$$

5. Se compara el resultado del Paso 3 con el resultado del Paso 4: como (3.27) es distinta de (3.28), resulta que $\mathcal{S}\{x[n - n_0]\} \neq y[n - n_0]$ y por lo tanto el sistema con ganancia variable es *variante en el tiempo*. \square

Para probar que un sistema no cumple con una propiedad puede utilizarse un contraejemplo, es decir, buscar una señal para la cual la propiedad no se verifique, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.14. Contrajemplo para mostrar que el compresor no es invariante en el tiempo
Es sencillo probar que el sistema compresor del Ejemplo 3.12, con $M > 1$, no es invariante en el tiempo. El procedimiento es el siguiente:

- Definir una entrada adecuada (esto puede requerir cierto ingenio). En este caso, basta con elegir $x_1[n] = \delta[n]$.
- Se calcula la salida del sistema ante esta entrada:

$$y_1[n] = x[Mn] = \delta[Mn] = \delta[n].$$

Esta entrada y salida se representan en la Fig. 3.14(a).

- Se define una segunda entrada que es un desplazamiento temporal de la primera entrada. Para este ejemplo, se define la entrada $x_2[n] = x_1[n - 1]$.

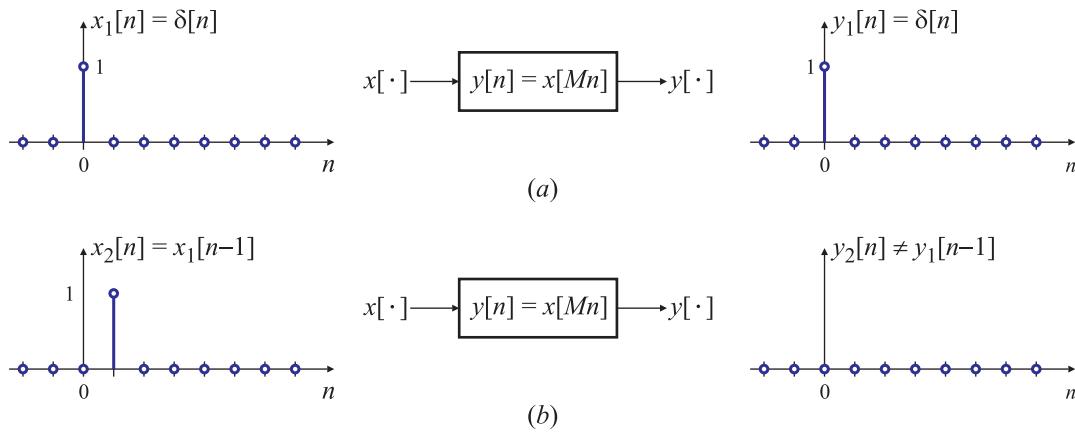


Fig. 3.14. Demostración que el sistema compresor no es invariante en el tiempo: excitación con $x_1[n] = \delta[n]$ (a), y con $x_2[n] = x_1[n-1] = \delta[n-1]$ (b). Como $y_2[n] \neq y_1[n-1]$ el sistema no es invariante en el tiempo.

- Se calcula la salida ante esta entrada:

$$y_2[n] = x_2[Mn] = x_1[Mn-1] = \delta[Mn-1] = 0 \text{ para todo } n.$$

La última igualdad resulta de observar que si $M > 1$ el argumento $Mn-1$ del $\delta[\cdot]$ no se anula para ningún n entero, y por lo tanto $\delta[Mn-1] = 0$ para todo n . Este par entrada/salida se representa en Fig. 3.14(b).

- Se comparan $y_2[n]$ con $y_1[n-1]$.
 - Si son diferentes ($y_2[n] \neq y_1[n-1]$) el sistema *no es invariante en el tiempo*.
 - Si son iguales ($y_2[n] = y_1[n-1]$) no se puede decir nada: sólo que se encontró *una* señal para la cual el sistema es invariante en el tiempo. Pero para probar la invariación, el sistema debe ser invariante en el tiempo para *todas* las señales.
- Para este ejemplo como $y_2[n] \neq y_1[n-1]$, se concluye que el sistema *no es invariante en el tiempo*. \square

Los sistemas *variantes* en el tiempo pueden comportarse de manera muy distinta a un sistema *invariante* en el tiempo, como se mostrará más adelante (en el Ejemplo 3.56).

Aunque los sistemas variantes en el tiempo son mucho mas difíciles de analizar que los invariantes en el tiempo, en el caso de los sistemas discretos son de implementación muy sencilla, y resultan extremadamente útiles para simplificar el diseño de sistemas complejos, como se estudiará en el Capítulo 5. En particular, dos sistemas variantes en el tiempo muy utilizados son el sistema compresor estudiado en el Ejemplo 3.12, y el sistema expansor, definido como

$$y[n] = \begin{cases} x[n/M], & \text{si } n \text{ es múltiplo de } M, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

cuya salida se caracteriza por tener intercalados $(M-1)$ ceros entre cada muestra de la señal de entrada, como se representa en la Fig. 3.15. El lector puede demostrar que el sistema expansor también es variante en el tiempo.

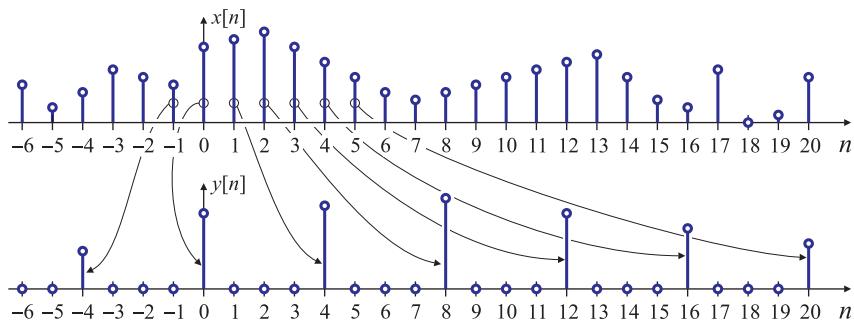


Fig. 3.15. Sucesiones $x[n]$ de entrada e $y[n]$ de salida de un sistema expensor con $M = 4$.

3.3.4. Sistemas causales

Se dice que un sistema es *causal* si su salida $y[n]$ en un instante cualquiera $n = n_0$ depende solamente de los valores actuales y pasados ($n \leq n_0$) de la sucesión de entrada $x[n]$. Matemáticamente, esto implica que si $x_1[n] = x_2[n]$ para todo $n \leq n_0$, entonces $y_1[n] = y_2[n]$ para todo $n \leq n_0$, donde $y_1[n]$, $y_2[n]$ son las salidas del sistema ante las entradas $x_1[n]$, $x_2[n]$, respectivamente. En otras palabras, el sistema no es anticipativo o “adivinador”.

En la Fig. 3.16(a) se muestra el comportamiento temporal de un sistema no causal. Dadas dos entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ que son iguales hasta la muestra n_0 inclusive, se obtienen las

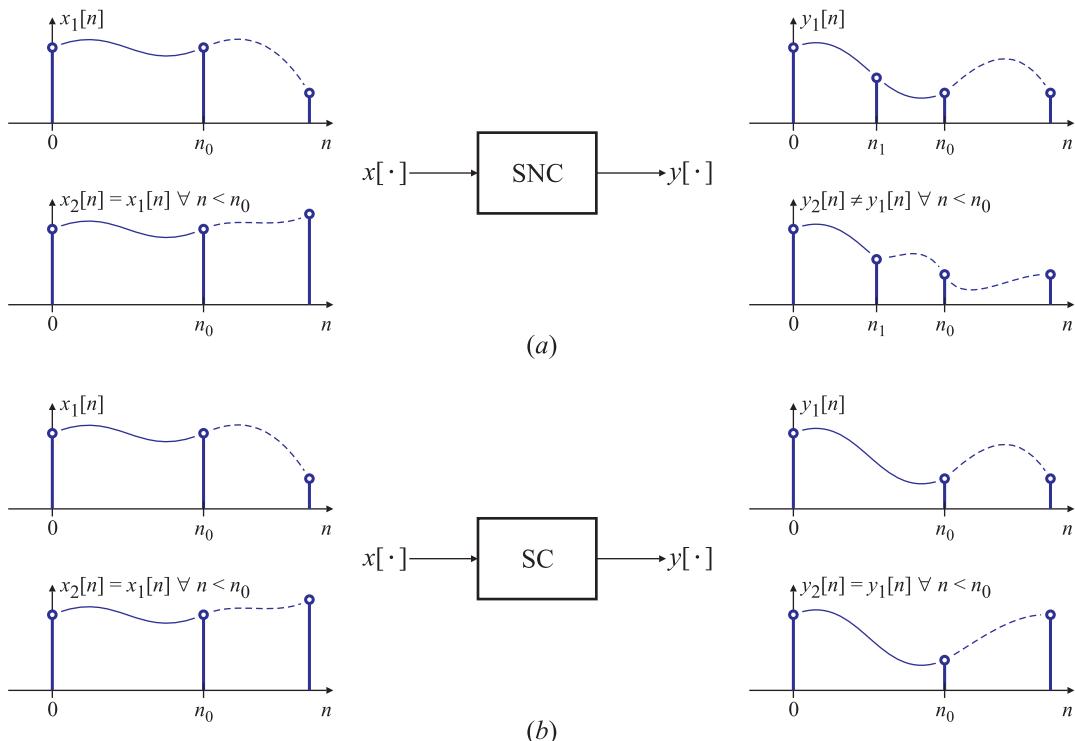


Fig. 3.16. Comportamiento temporal de un sistema *no causal* (a) y de un sistema *causal* (b).

salidas $y_1[n]$ e $y_2[n]$ que son iguales hasta la muestra $n_1 < n_0$, pero que de ahí en adelante difieren. Esto muestra que el sistema “se da cuenta” que la entrada cambia ($n_0 - n_1$) muestras *antes* de que ocurra el cambio. Si el sistema es causal, las salidas se diferencian apenas (o después) que las entradas sean distintas, como se representa en la Fig. 3.16(b): entradas idénticas hasta n_0 producen salidas que son iguales hasta $n = n_0$.

El sistema retardador del Ejemplo 3.3 es causal si $n_d \geq 0$. El sistema promediador del Ejemplo 3.4 es causal si $M_1 = 0$, y $M_2 \geq 0$; si alguna de estas dos condiciones no se cumple, no lo es. El sistema sin memoria del Ejemplo 3.8, el sistema no lineal del Ejemplo 3.9, y el acumulador del Ejemplo 3.7 son causales. En cambio, el sistema compresor del Ejemplo 3.12 es no causal (si $M > 1$) ya que $y[1] = x[M]$. Otro sistema no causal se estudia en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.15. Diferenciador hacia adelante y hacia atrás

El sistema diferenciador hacia adelante está definido por la relación entrada-salida

$$y[n] = x[n+1] - x[n]. \quad (3.29)$$

Evidentemente, la salida en el instante $n = n_0$ depende de la entrada en $n_0 + 1$, y por lo tanto no es causal. En cambio del diferenciador hacia atrás, caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad (3.30)$$

es causal. □

3.3.5. Sistemas estables

Hay muchas definiciones de estabilidad. La que se utilizará en este curso es la estabilidad entrada-salida: un sistema es *estable en el sentido entrada-salida* o *estable E/S* si entradas de magnitud acotada producen salidas de amplitud acotadas. La entrada $x[n]$ es acotada si existe un número B_x (fijo, independiente de n , y finito) tal que

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \quad \text{para todo } n.$$

La estabilidad implica que para cualquier entrada acotada existe un número positivo finito B_y tal que

$$|y[n]| \leq B_y < \infty \quad \text{para todo } n.$$

Los sistemas retardador (Ejemplo 3.8), el promediador (3.4), y el compresor (3.12) son estables, con $B_y = B_x$. El sistema no lineal del Ejemplo 3.8 es estable con $B_y = B_x^2$, mientras que el sistema no lineal del Ejemplo 3.9 también lo es, pero con $B_y = B_x + 1$. Los diferenciadores hacia adelante y hacia atrás del Ejemplo 3.15 son estables, con $B_y = 2B_x$, como se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.16. Estabilidad de los sistemas diferenciadores hacia adelante y hacia atrás

Para el diferenciador hacia adelante $y[n] = x[n+1] - x[n]$, si se supone que $x[n]$ está acotada para

todo n , es decir $|x[n]| \leq B_x$, se tiene que

$$\begin{aligned} |y[n]| &= |x[n+1] - x[n]| \\ &\leq |x[n+1]| + |x[n]| \quad (\text{por desigualdad triangular}) \\ &\leq B_x + B_x \\ &= 2B_x = B_y. \end{aligned}$$

La clave aquí es que como $x[n]$ está acotada para todo n , entonces $|x[n]| \leq B_x$, y también $|x[n+1]| \leq B_x$. El caso del diferenciador hacia atrás es enteramente similar. \square

Las propiedades que se han definido en estas secciones son propias de los *sistemas* y no de las entradas a los mismos. Se podrían encontrar entradas para las cuales las propiedades se verifiquen, pero esto no significa que el sistema posea dicha propiedad. Para que el sistema sea o lineal, o causal, o invariante en el tiempo, o estable, etc. tiene que serlo para *todas* las entradas. Si se puede encontrar una entrada para la cual la propiedad bajo estudio *no* se cumpla, entonces se habrá demostrado que el sistema no posee dicha propiedad.

En el estudio de la estabilidad de los sistemas, es posible, por ejemplo, que un sistema inestable tenga una salida acotada ante *una* entrada acotada específica, pero no necesariamente ante *cualquier* entrada, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.17. Respuesta del acumulador ante un impulso

Si en el acumulador del Ejemplo 3.7 se elige $x[n] = \delta[n]$, es sencillo verificar que si $n < 0$,

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] = 0,$$

y si $n \geq 0$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=-\infty}^n x[m] \\ &= \dots + x[-2] + x[-1] + x[0] + x[1] + \dots + x[n] \\ &= \dots + \delta[-2] + \delta[-1] + \delta[0] + \delta[1] + \dots + \delta[n] \\ &= \dots + 0 + 0 + 1 + 0 + \dots + 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto, $y[n] = u[n]$, como se muestra en la Fig.3.17. Entonces, la entrada $x[n] = \delta[n]$ es acotada, pues $|x[n]| \leq B_x = 1$, y la salida también es acotada, porque $|y[n]| \leq B_y = 1$. \square

Este ejemplo muestra que el acumulador, con esta entrada *particular* $x[n] = \delta[n]$ que es acotada, produce una salida acotada, y uno estaría tentado a asegurar que el sistema es estable. Pero para que el sistema sea estable es necesario que *cualquier* entrada acotada produzca una salida acotada. En el Ejemplo 3.18 se muestra que otra entrada, también acotada, produce una salida que no se puede acotar, y por lo tanto, que el acumulador *no* es un sistema estable.

EJEMPLO 3.18. Inestabilidad del sistema acumulador

En este caso, para el acumulador del Ejemplo 3.18 se elige $x[n] = u[n]$. La salida se puede calcular

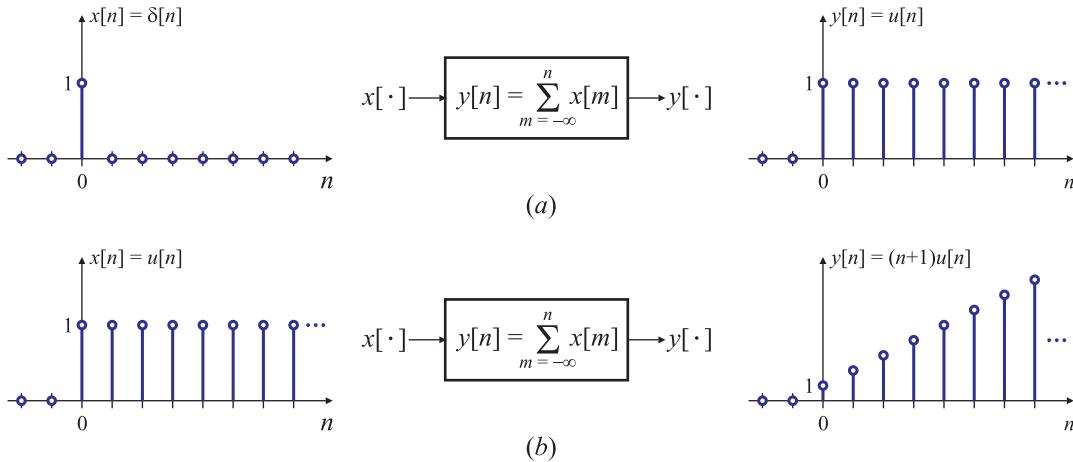


Fig. 3.17. Respuesta del sistema acumulador ante una entrada impulso $x[n] = \delta[n]$ (a), y una entrada escalón $x[n] = u[n]$ (b).

aplicando la relación entrada/salida del sistema

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] = \sum_{m=-\infty}^n u[m],$$

y resulta sencillo verificar que $y[n] = 0$ para $n < 0$, y que $y[n] = (n+1)$ si $n \geq 0$. Por lo tanto, se puede escribir

$$y[n] = (n+1)u[n].$$

Es evidente que la entrada $x[n] = u[n]$ está acotada para todo n , es decir $|x[n]| \leq B_x = 1$. Pero para la salida se encuentra que

$$|y[n]| \leq n + 1.$$

Aunque esta cota es finita para todo n finito, no es posible encontrar un número B_y fijo, positivo, independiente de n tal que $|y[n]| \leq B_y$. Es decir, no existe ningún número B_y fijo, positivo, tal que $(n+1) \leq B_y < \infty$ para todo n . En síntesis, la entrada acotada $x[n] = u[n]$ produce una salida $y[n] = (n+1)u[n]$ que no se puede acotar. Por lo tanto, el sistema acumulador *no* es estable. \square

En el siguiente ejemplo se estudia si un sistema dado satisface las propiedades de linealidad, invariación temporal, causalidad, y estabilidad entrada/salida.

EJEMPLO 3.19. Demostración de propiedades de un sistema

Se desea conocer si el sistema caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = x[n] + \cos(2\pi n/10)x[n-1].$$

es lineal, invariante en el tiempo, causal y estable.

1. **Linealidad:** Si $y_1[n]$, $y_2[n]$ son las salidas del sistema ante entradas $x_1[n]$, $x_2[n]$, es decir

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \mathcal{S}\{x_1[n]\} \\ &= x_1[n] + \cos(2\pi n/10)x_1[n-1], \\ y_2[n] &= \mathcal{S}\{x_2[n]\} \\ &= x_2[n] + \cos(2\pi n/10)x_2[n-1], \end{aligned}$$

la salida del sistema ante una entrada $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ (una combinación lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$) es

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \mathcal{S}\{x_3[n]\} \\ &= x_3[n] + \cos(2\pi n/10)x_3[n-1] \\ &= (ax_1[n] + bx_2[n]) + \cos(2\pi n/10)(ax_1[n-1] + bx_2[n-1]) \\ &= ax_1[n] + a \cos(2\pi n/10)x_1[n-1] + bx_2[n] + b \cos(2\pi n/10)x_2[n-1] \\ &= a(x_1[n] + \cos(2\pi n/10)x_1[n-1]) + b(x_2[n] + \cos(2\pi n/10)x_2[n-1]) \\ &= ay_1[n] + by_2[n], \end{aligned}$$

por lo tanto el sistema **es lineal**.

2. **Invariación temporal:** Si $y[n]$ es la salida del sistema ante una entrada $x[n]$, la salida $y_1[n]$ ante una entrada $x_1[n] = x[n - n_0]$ es

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n] + \cos(2\pi n/10)x_1[n-1] \\ &= x[n - n_0] + \cos(2\pi n/10)x[n - n_0 - 1], \end{aligned} \quad (3.31)$$

mientras que la salida $y[n]$ demorada n_0 muestras es

$$\begin{aligned} y[n - n_0] &= x[n - n_0] + \cos[2\pi(n - n_0)/10]x[n - n_0 - 1] \\ &= x[n - n_0] + \cos[2\pi n/10 - 2\pi n_0/10]x[n - n_0 - 1]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Es evidente que (3.31) es distinta de (3.32) (salvo en el caso particular que n_0 sea múltiplo de 10); esto es, en el caso general, $y[n - n_0] \neq y_1[n]$. Por lo tanto el sistema **no es invariante en el tiempo**. (Se podía sospechar este resultado porque uno de los coeficientes del sistema es función del número de muestra n .)

3. **Causalidad:** El sistema es causal porque sólo depende de **entradas** pasadas. Esto es, dos entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, que son iguales hasta un índice n_0 , producirán salidas $y_1[n]$, $y_2[n]$ que son idénticas al menos hasta n_0 .
4. **Estabilidad entrada/salida:** Para probar que el sistema es estable entrada/salida, se supone que la entrada $x[n]$ está acotada para todo n ; por ejemplo, $|x[n]| \leq B_x$. Entonces se puede encontrar una cota para $y[n]$:

$$\begin{aligned} |y[n]| &\leq |x[n]| + |\cos(2\pi n/10)x[n-1]| \\ &\leq |x[n]| + |\cos(2\pi n/10)| \times |x[n-1]| \\ &\leq B_x + 1 \times B_x \\ &= 2B_x = B_y \end{aligned}$$

Es decir que la cota para la salida $|y[n]|$ es $B_y = 2B_x$. Como una entrada acotada arbitraria provoca una salida acotada, es sistema es *estable* entrada/salida. \square

3.4. Sistemas lineales e invariantes en tiempo

Una clase de sistemas especialmente importante son aquellos que son lineales e invariantes en el tiempo. La combinación de estas dos propiedades resulta en una representación muy conveniente para este tipo de sistemas, que además tienen numerosas aplicaciones en el procesamiento de señales. Se analizará en detalle porqué se facilita el estudio de un sistema si éste es simultáneamente lineal e invariante en el tiempo.

3.4.1. Sistemas lineales

La clase de sistemas lineales está compuesta por aquellos sistemas que satisfacen el principio de superposición (3.12). Si la propiedad de linealidad se combina con la representación de una sucesión cualquiera como una suma de impulsos escalados y desplazados, como en la ecuación (3.1), resulta que el sistema puede caracterizarse completamente por su respuesta impulsiva. Específicamente, sea $h_m[n]$ la respuesta $y[n]$ del sistema ante una entrada $x[n] = \delta[n - m]$, es decir, un impulso aplicado en $n = m$. Entonces, si

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\}, \quad (3.33)$$

resulta que

$$h_m[n] = \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}.$$

De la ecuación (3.1) se tiene que

$$y[n] = \mathcal{S}\left\{\sum_m x[m]\delta[n - m]\right\}.$$

Si el sistema es lineal, satisface el principio de superposición (3.12), y entonces

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_m \mathcal{S}\{x[m]\delta[n - m]\} \\ &= \sum_m x[m]\mathcal{S}\{\delta[n - m]\} \end{aligned}$$

es decir

$$y[n] = \sum_m x[m]h_m[n]. \quad (3.34)$$

donde

$$h_m[n] = \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}$$

representa la salida del sistema cuando se le aplica un impulso en la muestra $n = m$. De acuerdo con (3.34) la respuesta del sistema ante *cualquier* entrada puede ser expresada en función de las respuestas del sistema ante entradas de tipo impulso aplicados en $n = m$, para $-\infty < m < \infty$. Si el sistema *no* es lineal no se puede generalizar la respuesta del sistema más allá de la ecuación (3.33), y aunque puede calcularse la respuesta impulsiva de un sistema no lineal, ésta no es de gran utilidad porque la expresión (3.34) no es válida para este tipo de sistemas.

Una característica interesante de los sistemas lineales es que si se los excita con una entrada nula $x[n] \equiv 0$ para todo n , la salida también tiene que ser nula, como se observa al hacer $x[n] \equiv 0$ en (3.34). Por lo tanto, si la respuesta de un sistema ante una entrada nula es *distinta* de cero, podría ser indicativo de que el sistema *no* es lineal. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto, como se estudia en la Sección 3.7.2.1.

Si sólo se impone la condición de linealidad, el cómputo de la salida requiere conocer la *familia* de sistemas impulsivas $h_m[n]$, es decir, cómo responde el sistema ante impulsos aplicados en todos los posibles instantes de tiempo. En general, es difícil conocer esta familia de respuestas, y por lo tanto la utilidad de la ecuación (3.34) es limitada. Sin embargo, en algunos casos es posible conocer esta respuesta, como se muestra en el siguiente Ejemplo.

EJEMPLO 3.20. Respuesta impulsiva de un sistema lineal y variante en el tiempo

El sistema compresor del Ejemplo 3.12, descripto por la relación $y[n] = x[nM]$, con $M > 0$, es lineal, como puede demostrar el lector. Su respuesta impulsiva se puede calcular con facilidad. Si $x[n] = \delta[n]$, es claro que $y[n] = \delta[n]$. Pero si $x[n] = \delta[n - n_0]$, con $n_0 \neq M$, es $y[n] = 0$. Si la entrada $x[n]$ es un impulso aplicado en un múltiplo de M , por ejemplo, en $n = mM$, la salida es $y[n] = \delta[n - m]$. Este comportamiento se comprueba analizando la Fig. 3.13. Por lo tanto,

$$h_m[n] = \begin{cases} \delta[n - m/M], & \text{si } m \text{ es múltiplo de } M, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (3.35)$$

La salida del sistema compresor ante una entrada $x[n]$ cualquiera puede calcularse utilizando (3.34), y la familia de respuestas impulsivas (3.35):

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_m x[r]h_m[n] \\ &= \sum_r x[rM]h_{rM}[n] \\ &= \sum_r x[rM]\delta[n - rM/M] \\ &= x[nM] \end{aligned}$$

donde el pasaje de la primera a la segunda ecuación tiene en cuenta que $h_m[n] = 0$ si $m \neq rM$, es decir, si m no es múltiplo de M . \square

Si se conoce la familia de respuestas impulsivas de un sistema lineal, pero *variante* en el tiempo, entonces se puede aplicar (3.34) para calcular la respuesta del sistema, como se explora en el Ejercicio 7.

3.4.2. Sistemas lineales e invariantes en tiempo

Para un sistema que es lineal, y que además es invariante en el tiempo, la propiedad de invariación temporal implica que si $y[n] = h[n]$ es la respuesta ante $x[n] = \delta[n]$, entonces la respuesta ante $x_1[n] = \delta[n - m]$ es $y_1[n] = y[n - m] = h[n - m]$. Es decir, si el sistema es invariante en el tiempo,

$$h_m[n] = h[n - m].$$

Con esta restricción adicional, la ecuación (3.34) se puede escribir como

$$y[n] = \sum_m x[m]h[n - m], \quad (3.36)$$

o bien, haciendo un cambio de variables,

$$y[n] = \sum_m h[m]x[n - m], \quad (3.37)$$

El empleo de una u otra de las expresiones (3.36) o (3.37) es cuestión de conveniencia, según el tipo de sucesiones involucradas (de longitud finita o infinita).

Como consecuencia de (3.36)-(3.37), un sistema lineal e invariante en el tiempo (que frecuentemente se notará LIT o SLIT) queda caracterizado completamente por su respuesta

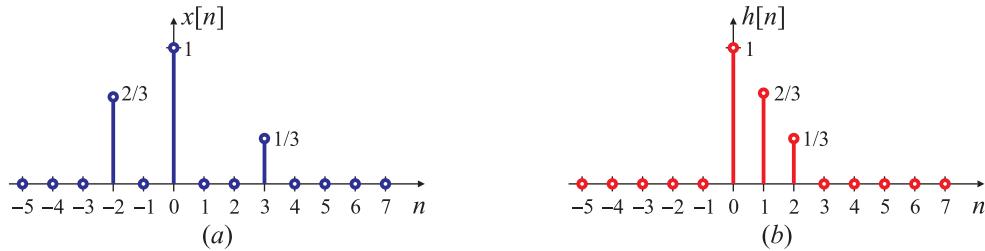


Fig. 3.18. Las señales $x[n]$ y $h[n]$ a convolucionar en el Ejemplo 3.21.

impulsiva $h[n]$ ante un impulso aplicado en un instante cualquiera (usualmente en $n = 0$), en el sentido que, dado $h[n]$ es posible utilizar (3.36)-(3.37) para calcular la salida $y[n]$ ante *cualquier* entrada $x[n]$.

Las ecuaciones (3.36)-(3.37) se conocen como *suma convolución*. Si $y[n]$ es una sucesión cuyos valores están dependen de los valores de dos sucesiones $x[n]$ y $h[n]$ en la forma indicada en (3.36) o (3.37), se dice que $y[n]$ es la convolución de $x[n]$ con $h[n]$, y se nota como

$$y[n] = (x * h)[n]$$

(es frecuente, aunque incorrecto, escribir esta relación como $y[n] = x[n] * h[n]$). La operación *suma convolución* toma dos sucesiones $x[n]$ y $h[n]$ para producir una tercera sucesión $y[n]$. Las expresiones (3.36) o (3.37) permiten calcular el valor de cada una de las muestras de la sucesión $y[n]$ a partir de *todas* las muestras de las sucesiones de entrada $x[n]$ y de respuesta impulsiva $h[n]$.

La derivación de la ecuación (3.36) sugiere la interpretación que la muestra de la entrada en el instante m , representada por $x[m]\delta[n - m]$, es transformada por el sistema en la sucesión de salida $x[m]h[n - m]$, $-\infty < n < \infty$ y que cada una de esas salidas para cada m , se superponen para formar la salida completa $y[n]$. Esta interpretación se ilustra en el siguiente Ejemplo.

EJEMPLO 3.21. Cálculo de la convolución usando la expresión (3.36)

Se desea calcular la convolución de las dos señales $x[n]$ y $h[n]$ que se representan en la Fig. 3.18. La señal $x[n]$ puede decomponerse como la suma de tres sucesiones,

$$x[n] = x_{-2}[n] + x_0[n] + x_3[n]$$

donde cada una de ellas está compuesta por un único impulso, escalado y desplazado:

$$x_{-2}[n] = x[-2]\delta[n + 2], \quad x_0[n] = x[0]\delta[n], \quad x_3[n] = x[3]\delta[n - 3],$$

que se grafican en las Figs. 3.19(a), (b) y (c), respectivamente. En la Figs. 3.19(e), (f) y (g) se representan las salidas ante cada una de estas entradas. Estas salidas no son más que la respuesta impulsiva de la Fig. 3.18(b) escalada y desfasada, que resulta de aplicar la propiedad de homogenidad (escalado) e invariación temporal (desplazamiento):

$$y_{-2}[n] = h[n] * x_{-2}[n] = h[n] * (x[-2]\delta[n + 2]) = x[-2](h[n] * \delta[n + 2]) = x[-2]h[n + 2],$$

$$y_0[n] = h[n] * x_0[n] = h[n] * (x[0]\delta[n]) = x[0](h[n] * \delta[n]) = x[0]h[n],$$

$$y_3[n] = h[n] * x_3[n] = h[n] * (x[3]\delta[n - 3]) = x[3](h[n] * \delta[n - 3]) = x[3]h[n - 3].$$

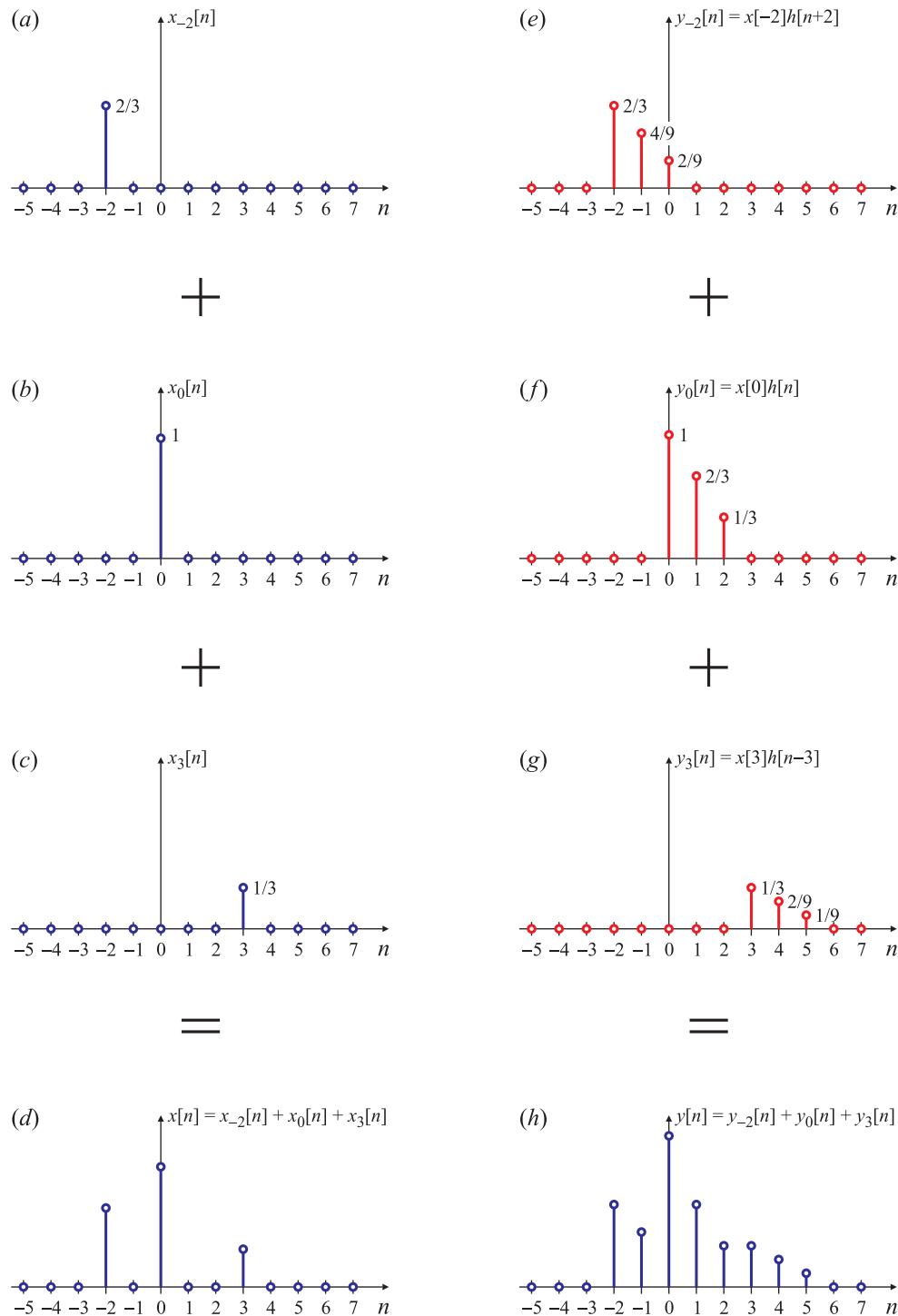


Fig. 3.19. Descomposición de la sucesión $x[n]$ (g) en tres sucesiones $x_{-2}[n]$ (a), $x_0[n]$ (b) y $x_3[n]$ (c), y la respuesta del sistema ante cada una de ellas: $y_{-2}[n]$ (e), $y_0[n]$ (f) e $y_3[n]$ (g). La salida del sistema es $y[n]$ (h) es la suma de las tres salidas parciales.

Cada una de estas salidas parciales es fácil de calcular porque cada una de las entradas es un impulso escalado y desplazado. Finalmente, aplicando el principio de superposición, se puede calcular la salida completa $y[n]$: la respuesta a $x[n]$ es la suma de estas tres respuestas individuales:

$$y[n] = y_{-2}[n] + y_0[n] + y_3[n].$$

Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{2}{3}\delta[n+2] + \delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-3], \\ h[n] &= \delta[n] + \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2], \end{aligned}$$

representadas en las Figs. 3.18(a) y (b), respectivamente, resulta que

$$x_{-2}[n] = \frac{2}{3}\delta[n+2], \quad x_0[n] = \delta[n], \quad x_3[n] = \frac{1}{3}\delta[n-3],$$

como se muestran en las Figs. 3.19(a), (b) y (c), respectivamente. Las salidas del sistema ante cada una de estas entradas son

$$\begin{aligned} y_{-2}[n] &= h[n] * x_{-2}[n] = \frac{2}{3}(\delta[n] + \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2]) * \delta[n+2] \\ &= \frac{2}{3}\delta[n+2] + \frac{4}{9}\delta[n+1] + \frac{2}{9}\delta[n], \\ y_0[n] &= h[n] * x_0[n] = 1(\delta[n] + \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2]) * \delta[n] \\ &= \delta[n] + \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2] \\ y_3[n] &= h[n] * x_3[n] = \frac{1}{3}(\delta[n] + \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2]) * \delta[n-3] \\ &= \frac{1}{3}\delta[n-3] + \frac{2}{9}\delta[n-4] + \frac{1}{9}\delta[n-5], \end{aligned}$$

como se muestran en las Figs. 3.19(e), (f) y (g), respectivamente. Finalmente, la salida total es la suma de estas tres componentes:

$$\begin{aligned} y[n] &= y_{-2}[n] + y_0[n] + y_3[n] \\ &= \frac{2}{3}\delta[n+2] + \frac{4}{9}\delta[n+1] + \frac{11}{9}\delta[n] + \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2] + \frac{1}{3}\delta[n-3] + \frac{2}{9}\delta[n-4] + \frac{1}{9}\delta[n-5], \end{aligned}$$

que se representa en la Fig. 3.19(h). \square

Evidentemente, esta salida también puede hacerse utilizando la expresión (3.37). En este caso, la entrada $x[m]$ es transformada por la muestra de la respuesta impulsiva en el instante m , representada por $h[m]\delta[n-m]$, en la sucesión de salida $x[n-m]h[m]$, $-\infty < n < \infty$ y que cada una de esas salidas para cada m , se superponen para formar la salida completa $y[n]$. A continuación se repite el Ejemplo 3.21 siguiendo esta interpretación.

EJEMPLO 3.22. Cálculo de la convolución aplicando la expresión (3.37)

En este caso, la señal $x[n]$ se descompone en la suma de tres sucesiones,

$$h[n] = h_0[n] + h_1[n] + h_2[n]$$

donde cada una de ellas está compuesta por un único impulso, escalado y desplazado:

$$h_0[n] = h[0]\delta[n], \quad h_1[n] = h[1]\delta[n-1], \quad h_2[n] = h[2]\delta[n-2],$$

que se grafican en las Figs. 3.20(a), (b) y (c), respectivamente. En las Figs. 3.19(e), (f) y (g) se representan las salidas ante cada una de estas entradas. Estas salidas no son más que la respuesta impulsiva de la Fig. 3.18(b) escalada y desfasada, que resulta de aplicar la propiedad de homogeneidad (escalado) e invariación temporal (desplazamiento):

$$\begin{aligned} y_0[n] &= x[n] * h_0[n] = x[n] * (h[0]\delta[n]) = h[0](x[n] * \delta[n]) = h[0]x[n], \\ y_1[n] &= x[n] * h_1[n] = x[n] * (h[1]\delta[n-1]) = h[1](x[n] * \delta[n-1]) = h[1]x[n-1], \\ y_2[n] &= x[n] * h_2[n] = x[n] * (h[2]\delta[n-2]) = h[2](x[n] * \delta[n-2]) = h[2]x[n-2]. \end{aligned}$$

Cada una de estas salidas parciales es fácil de calcular porque es el resultado de la convolución con un impulso escalado y desplazado. La salida completa $y[n]$ se puede calcular aplicando el principio de superposición:

$$y[n] = y_0[n] + y_1[n] + y_2[n].$$

Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{2}{3}\delta[n+2] + \delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-3], \\ h[n] &= \delta[n] + \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2], \end{aligned}$$

representadas en las Figs. 3.18(a) y (b), respectivamente, resulta que

$$h_0[n] = \delta[n], \quad h_1[n] = \frac{2}{3}\delta[n-1], \quad h_2[n] = \frac{1}{3}\delta[n-2],$$

como se muestran en las Figs. 3.20(a), (b) y (c), respectivamente. Las salidas parciales del sistema son

$$\begin{aligned} y_0[n] &= x[n] * h_0[n] = \left(\frac{2}{3}\delta[n+2] + \delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-3]\right) * \delta[n] \\ &= \frac{2}{3}\delta[n+2] + \delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-3], \\ y_1[n] &= x[n] * h_1[n] = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\delta[n+2] + \delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-3]\right) * \delta[n-1] \\ &= \frac{4}{9}\delta[n+1] + \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{2}{9}\delta[n-4] \\ y_2[n] &= x[n] * h_2[n] = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\delta[n+2] + \delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-3]\right) * \delta[n-2] \\ &= \frac{2}{9}\delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-2] + \frac{1}{9}\delta[n-5], \end{aligned}$$

como se muestran en las Figs. 3.20(e), (f) y (g), respectivamente. Finalmente, la salida total es la suma de estas tres componentes:

$$\begin{aligned} y[n] &= y_0[n] + y_1[n] + y_2[n] \\ &= \left(\frac{2}{3}\delta[n+2] + \delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-3]\right) + \\ &\quad \left(\frac{4}{9}\delta[n+1] + \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{2}{9}\delta[n-4]\right) + \\ &\quad \left(\frac{2}{9}\delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-2] + \frac{1}{9}\delta[n-5]\right) \\ &= \frac{2}{3}\delta[n+2] + \frac{4}{9}\delta[n+1] + \frac{11}{9}\delta[n] + \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2] + \frac{1}{3}\delta[n-3] + \frac{2}{9}\delta[n-4] + \frac{1}{9}\delta[n-5], \end{aligned}$$

que se representa en la Fig. 3.20(h). Como es de esperar, el resultado coincide con el calculado en el Ejemplo 3.21. \square

Aunque la expresión de la suma convolución es similar a la integral de convolución de la teoría de sistemas lineales continuos en tiempo que se estudió en el Capítulo 2, no debe pensarse como una aproximación de la integral. Mientras que la integral de convolución juega un papel principalmente teórico en la teoría de sistemas lineales de tiempo continuo, la suma convolución, además de su importancia teórica, frecuentemente provee una manera explícita de implementar sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo. Por ello es importante comprender cabalmente las propiedades de la suma convolución en los cálculos prácticos.

La interpretación precedente de la ecuación (3.36) enfatiza que la suma convolución es el resultado directo de la linealidad y la invariación temporal. Sin embargo, una manera levemente distinta de entender la ecuación (3.36) lleva a una interpretación computacional extremadamente útil. Cuando se la ve como una manera de calcular el n -ésimo valor de la muestra de salida $y[n]$, la expresión (3.36) muestra que $y[n]$ (el n -ésimo valor de la salida) se obtiene multiplicando la sucesión de entrada, expresada como una función del

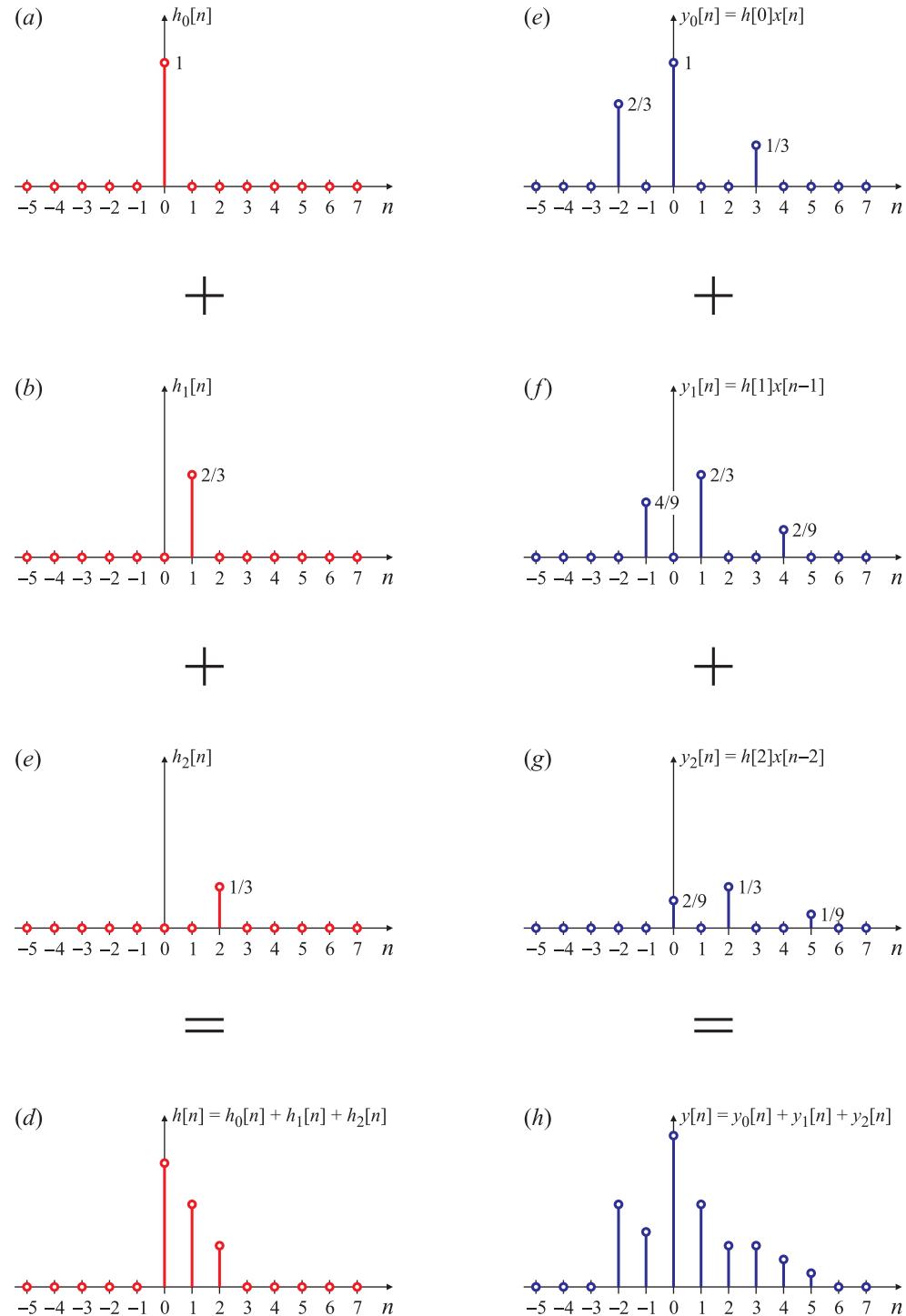


Fig. 3.20. Descomposición de la sucesión $h[n]$ (g) en tres sucesiones $h_0[n]$ (a), $h_1[n]$ (b) y $h_2[n]$ (c), y la respuesta del sistema ante cada una de ellas: $y_0[n]$ (e), $y_1[n]$ (f) e $y_2[n]$ (g). La salida del sistema es $y[n]$ (h) es la suma de las tres salidas parciales.

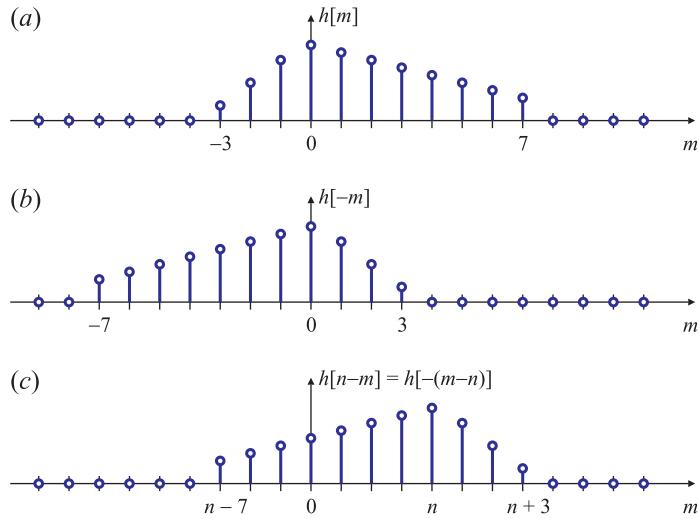


Fig. 3.21. Obtención de la sucesión $h[n-m]$. La sucesión $h[m]$ en función de m (a). La sucesión $h[-m]$ en función de m (b). La sucesión $h[n-m]$ en función de m para $n = 4$ (c).

índice m , por una sucesión cuyas muestras están dadas por $h[n-m]$, $-\infty < m < \infty$, y luego, para cada valor de n fijo, se suman todos los productos $x[m]h[n-m]$, donde m actúa como un índice de los términos a sumar. La operación de convolucionar dos sucesiones involucra entonces el cómputo para todos los valores de n , obteniéndose entonces la salida completa $y[n]$, con $-\infty < n < \infty$. La clave para efectuar los cálculos indicados por (3.36) es entender la forma de la sucesión $h[n-m]$, $-\infty < m < \infty$ para todos los valores de n de interés. A tal fin es útil notar que

$$h[n-m] = h[-(m-n)]. \quad (3.38)$$

La ecuación (3.38) se interpreta más fácilmente con un ejemplo.

EJEMPLO 3.23. Reflexión y desplazamiento de sucesiones

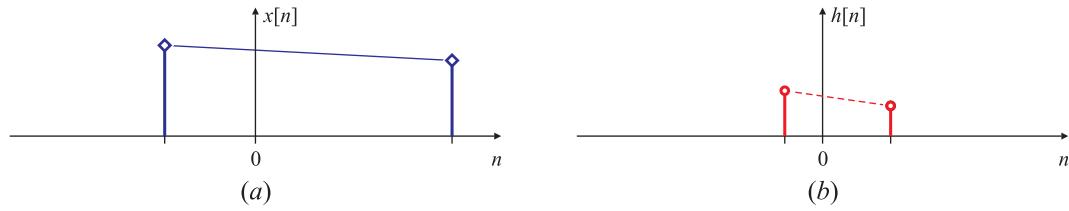
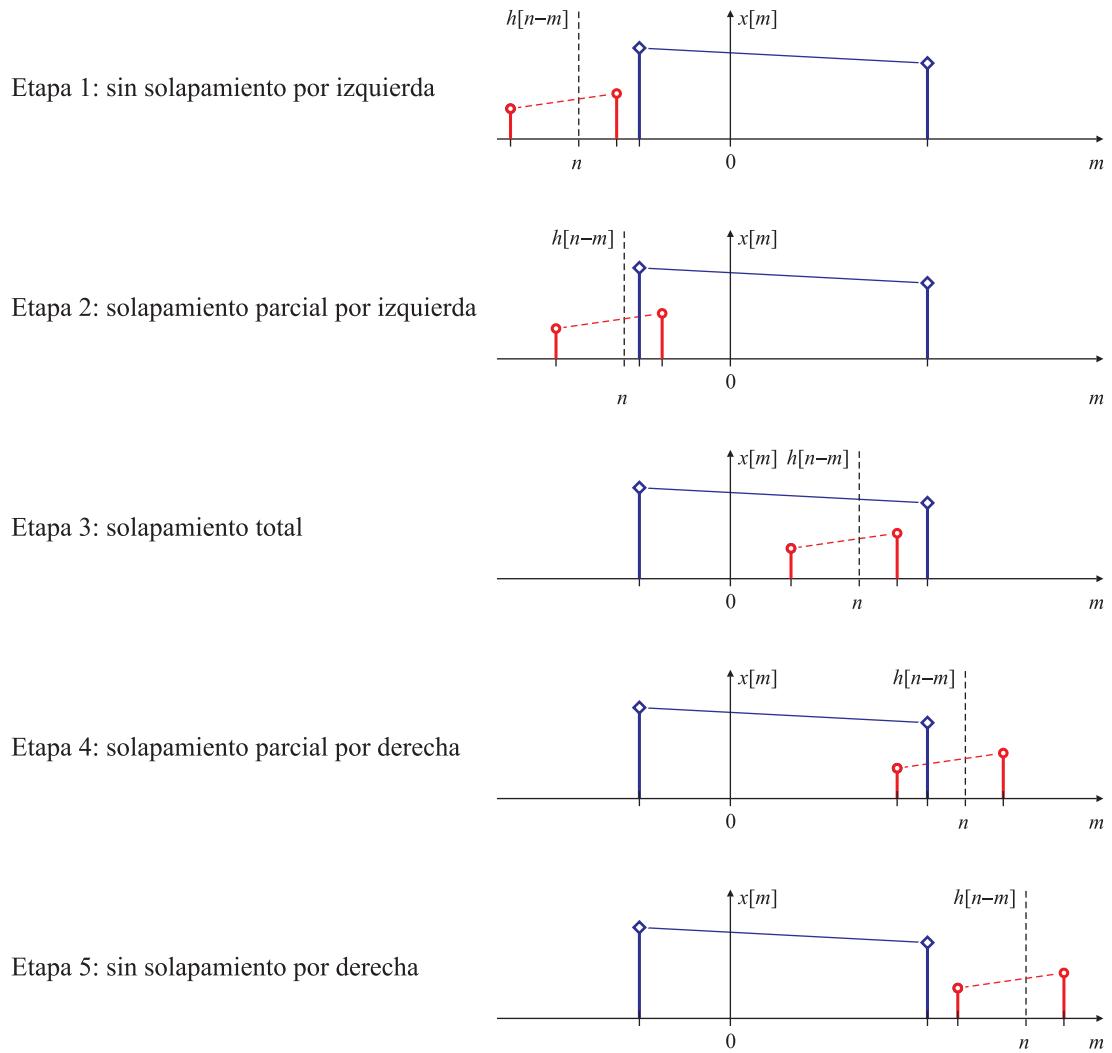
Sea $h[m]$ la sucesión que se muestra en la Fig. 3.21(a). El gráfico de $h[-m]$ en función de m consiste simplemente en reflejar (o “dar vuelta”) $h[m]$ alrededor del eje $m = 0$, como se representa en la Fig. 3.21(b). Reemplazando m por $m-n$, donde n es un entero finito, causa un desplazamiento del origen de la sucesión $h[-m]$ a $m = n$, como se ilustra en la Fig. 3.21(c) para $n = 4$. \square

Generalizando el Ejemplo 3.23, la sucesión $h[n-m]$, donde n es un valor “fijo” y $-\infty < m < \infty$, se obtiene:

1. reflejando $h[m]$ respecto al eje $m = 0$ para obtener $h[-m]$,
2. desplazando el origen de la sucesión reflejada a $m = n$.

3.4.3. Las etapas del cálculo de la convolución

Aunque las expresiones (3.36) o (3.37) indican la forma de calcular la convolución discreta en general, en un caso particular deben ajustarse los límites de la sumatoria de acuerdo

Fig. 3.22. Dos señales $x[n]$ (a) y $h[n]$ (b) a convolucionar.Fig. 3.23. Las cinco etapas de la convolución entre las señales $x[n]$ y $h[n]$ de la Fig. 3.22.

a las sucesiones intervintes. Por ejemplo, dadas dos sucesiones de longitud finita $x[n]$ y $h[n]$ como las que se muestran en la Fig. 3.22, es frecuente distinguir *cinco etapas* en el cálculo de la convolución:

1. sin solapamiento por izquierda;
2. solapamiento parcial por izquierda;
3. solapamiento total;
4. solapamiento parcial por derecha;
5. sin solapamiento por derecha,

como se representa en la Fig. 3.23. En esta figura, las sucesiones $x[m]$ y $h[n - m]$ se han graficado en función de la variable m para distintos valores de n .

La división del cálculo de la convolución en estas cinco etapas facilita el cálculo de la misma, sobre todo cuando se efectúa de manera analítica. Además, pone en evidencia el rango de valores de n que corresponde a cada etapa. Es evidente que en las Etapas 1 y 5 el resultado de la convolución es nulo: $(x * h)[n] = 0$, porque en los dos casos alguna de las sucesiones es nula donde la otra no lo es. Por lo tanto, los productos $x[m]h[n - m]$ (o $x[n - m]h[m]$) son nulos, y suma también lo es. En las restantes tres etapas, esta división permite determinar fácilmente los extremos de las expresiones (3.36) o (3.37). Según se elija una u otra expresión los extremos de cada sumatoria serán distintos, como se pone de manifiesto en los siguientes ejemplos, pero tanto el rango de valores de n que comprende cada etapa como el resultado final de la convolución es el mismo independientemente de la fórmula (3.36) o (3.37) elegida para el cálculo.

En los siguientes ejemplos se indica cómo calcular los rangos de n que limitan cada una de las etapas, para las dos expresiones (3.36) o (3.37) utilizando dos sucesiones $x[n]$ y $h[n]$ de longitud finita, con $x[n]$ no nula para $-L_x \leq n \leq U_x$, y por lo tanto de longitud $\mathcal{L}_x = L_x + U_x + 1$, y $h[n]$ distinta de cero en $-L_h \leq n \leq U_h$, y entonces de largo $\mathcal{L}_h = L_h + U_h + 1$. Para limitar las opciones, se supondrá que la sucesión $h[n]$ es “más corta” que $x[n]$, esto es, $\mathcal{L}_h < \mathcal{L}_x$. Otras opciones se exploran en el Problema 15.

EJEMPLO 3.24. Convolución de dos sucesiones utilizando la ecuación (3.36)

Se desea calcular la convolución entre las señales $x[n]$ y $h[n]$ que se muestran en la Fig. 3.24(a) y (b), respectivamente, utilizando la ecuación (3.36), es decir

$$y[n] = \sum_m x[m]h[n - m].$$

Esta expresión indica que se debe graficar $x[\cdot]$ en función de m , y $h[\cdot]$ en función de $n - m$, para distintos valores de n (la muestra para la cual se desea calcular la salida) como se representa en la Fig. 3.24(c) y (d), respectivamente. En otras palabras, $x[\cdot]$ “queda igual”, y $h[\cdot]$ “queda reflejada”.

La idea es desplazar $h[n - m]$ para distintos valores de n , y analizar para qué valores ocurren cada una de las cinco etapas de la convolución, como se ilustra en la Fig. 3.25.

Etapa 1: Sin solapamiento por izquierda. Como se muestra en la Fig. 3.25(a), las señales $x[m]$ y $h[n - m]$ no se solapan hasta que la muestra de la derecha de $h[n - m]$ coincide con la muestra izquierda de $x[m]$. Esto ocurre siempre que

$$\underbrace{n + L_h}_{\text{muestra derecha de } h[n - m]} < \underbrace{-L_x}_{\text{muestra izquierda de } x[m]}$$

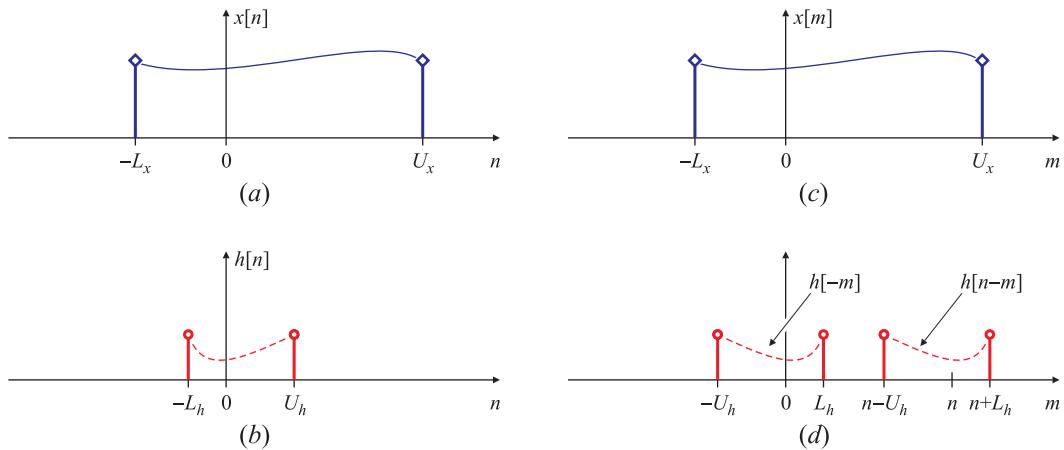


Fig. 3.24. Cálculo de la convolución utilizando la ecuación (3.36). Sucesiones $x[n]$ (a) y $h[n]$ (b) a convolucionar. Sucesiones $x[m]$ (c) y $h[n-m]$ (d) a utilizar en el Ejemplo (3.24).

es decir, cuando

$$n < -L_x - L_h.$$

Como no hay solapamiento, el resultado de la convolución es cero:

$$y[n] = (x * h)[n] = 0 \quad \text{para } n < -L_x - L_h.$$

Etapa 2: *Solapamiento parcial por izquierda.* Esta etapa “comienza” cuando la muestra de la derecha de $h[n-m]$ coincide con la muestra izquierda de $x[m]$, como se representa en la Fig. 3.25(b), y “termina” (para este caso donde $\mathcal{L}_h < \mathcal{L}_x$) una muestra antes que la muestra de la izquierda de $h[n-m]$ coincida con la muestra izquierda de $x[m]$, situación graficada en la Fig. 3.25(c). La primera condición se traduce matemáticamente como:

$$\underbrace{n + L_h}_{\text{muestra derecha de } h[n-m]} \geq \underbrace{-L_x}_{\text{muestra izquierda de } x[m]},$$

y la segunda se puede escribir

$$\underbrace{n - U_h}_{\text{muestra izquierda de } h[n-m]} < \underbrace{-L_x}_{\text{muestra izquierda de } x[m]}.$$

De estas dos condiciones se desprende que la *Etapa 2: solapamiento parcial por derecha* de la convolución queda restringida al rango

$$-L_h - L_x \leq n < U_h - L_x.$$

Para este rango de valores de n , la salida se calcula como

$$y[n] = \sum_{m=-L_x}^{n+L_h} x[m]h[n-m], \quad \text{para } -L_h - L_x \leq n < U_h - L_x.$$

El extremo inferior ($m = -L_x$) queda fijado por la sucesión $x[m]$, que se anula para $m < -L_x$, y el extremo superior ($m = n + L_h$) lo determina la sucesión $h[n-m]$, ya que se anula si $m > n + L_h$. **Estos extremos son válidos sólo para la condición $\mathcal{L}_h < \mathcal{L}_x$ planteada en este ejemplo.** El caso general se estudia en el Problema 15.

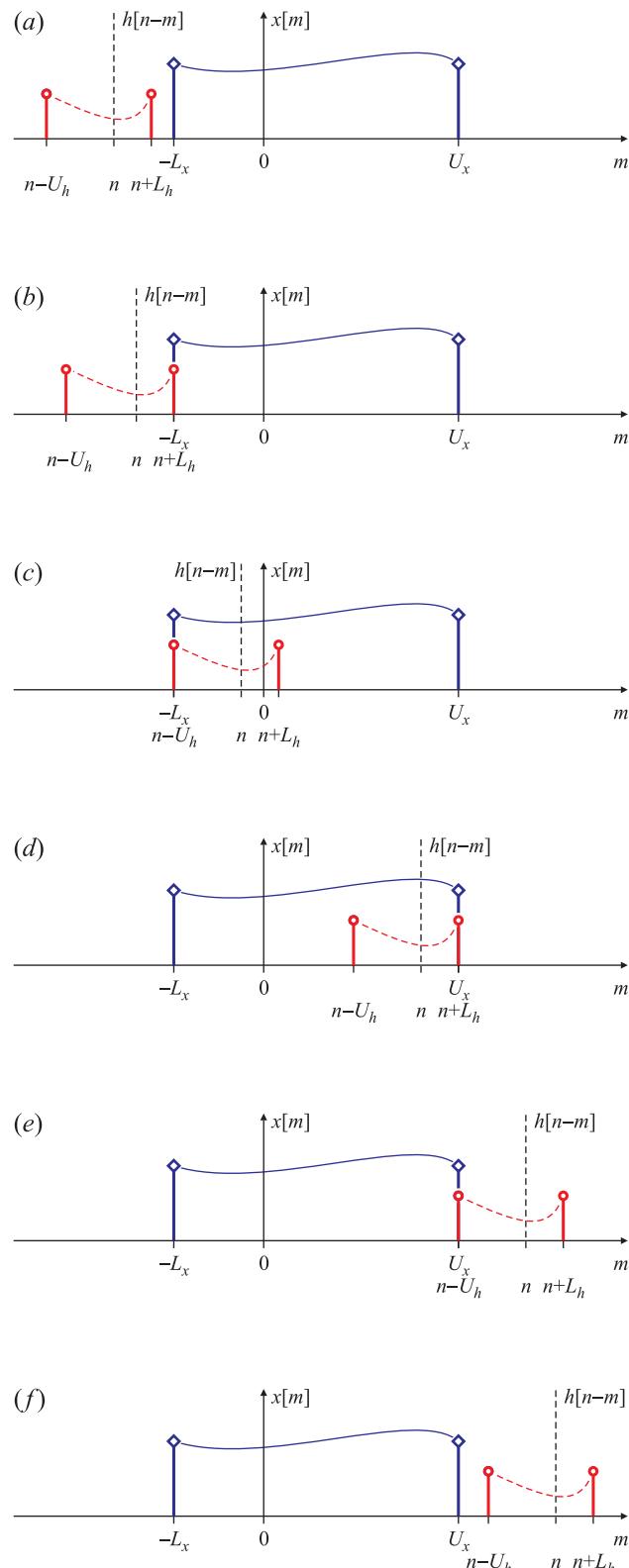


Fig. 3.25. Cálculo de la convolución utilizando la ecuación (3.36). Etapa 1: sin solapamiento por izquierda (a). Principio de la Etapa 2: solapamiento parcial por izquierda (b). Principio de la Etapa 3: solapamiento total (c). Fin de la Etapa 3: solapamiento total (d). Fin de la Etapa 4: solapamiento parcial por derecha (e). Etapa 5: sin solapamiento por derecha (f).

Etapa 3: *Solapamiento total.* Esta etapa ocurre (de vuelta: **para este ejemplo**) cuando la sucesión $h[n-m]$ se superpone completamente con $x[m]$. Comienza cuando la muestra de la izquierda de $h[n-m]$ coincide con la muestra izquierda de $x[m]$, como ilustra la Fig. 3.25(c), y termina cuando la muestra de la derecha de $h[n-m]$ coincide con la muestra derecha de $x[m]$, como se muestra en Fig. 3.25(d). La primera condición queda definida por

$$\underbrace{n - U_h}_{\text{muestra izquierda de } h[n-m]} \geq \underbrace{-L_x}_{\text{muestra izquierda de } x[m]},$$

mientras que la segunda resulta en

$$\underbrace{n + L_h}_{\text{muestra derecha de } h[n-m]} \leq \underbrace{U_x}_{\text{muestra derecha de } x[m]}.$$

Las dos condiciones se pueden escribir como

$$U_h - L_x \leq n \leq U_x - L_h.$$

En esta etapa, los límites de la sumatoria quedan determinados por la sucesión $h[n-m]$, y entonces

$$y[n] = \sum_{m=n-U_h}^{n+L_h} x[m]h[n-m], \quad \text{para } U_h - L_x \leq n \leq U_x - L_h.$$

Etapa 4: *Solapamiento parcial por derecha.* Esta etapa comienza una muestra después que la muestra de la derecha de $h[n-m]$ coincide con la muestra derecha de $x[m]$, como se muestra en Fig. 3.25(d), esto es si

$$\underbrace{n + L_h}_{\text{muestra derecha de } h[n-m]} > \underbrace{U_x}_{\text{muestra derecha de } x[m]}$$

y termina cuando la muestra de la izquierda de $h[n-m]$ coincide con la muestra derecha de $x[m]$, como se ve en Fig. 3.25(e), que se puede escribir como

$$\underbrace{n - U_h}_{\text{muestra izquierda de } h[n-m]} \leq \underbrace{U_x}_{\text{muestra derecha de } x[m]}.$$

Las dos condiciones equivalen a

$$U_x - L_h < n \leq U_x + U_h,$$

y en este rango de valores de n la salida $y[n] = (x * h)[n]$ se calcula como

$$y[n] = \sum_{m=n-U_h}^{U_x} x[m]h[n-m], \quad \text{para } U_x - L_h < n \leq U_x + U_h.$$

Ahora el extremo inferior de la sumatoria ($m = n - U_h$) queda impuesto por $h[n-m]$, y el superior ($m = U_x$) por la entrada $x[m]$.

Etapa 5: *Sin solapamiento por derecha.* Finalmente, esta etapa comienza una muestra después que la muestra de la izquierda de $h[n-m]$ coincide con la muestra derecha de $x[m]$, es decir, cuando

$$\underbrace{n - U_h}_{\text{muestra izquierda de } h[n-m]} > \underbrace{U_x}_{\text{muestra derecha de } x[m]},$$

como se representa en la Fig. 3.25(f). Como siempre se solapan muestras no nulas de una sucesión con las muestras nulas de la otra, nuevamente el resultado de la convolución es nulo, al igual que en la Etapa 1:

$$y[n] = 0, \quad \text{para } n > U_x + U_h.$$

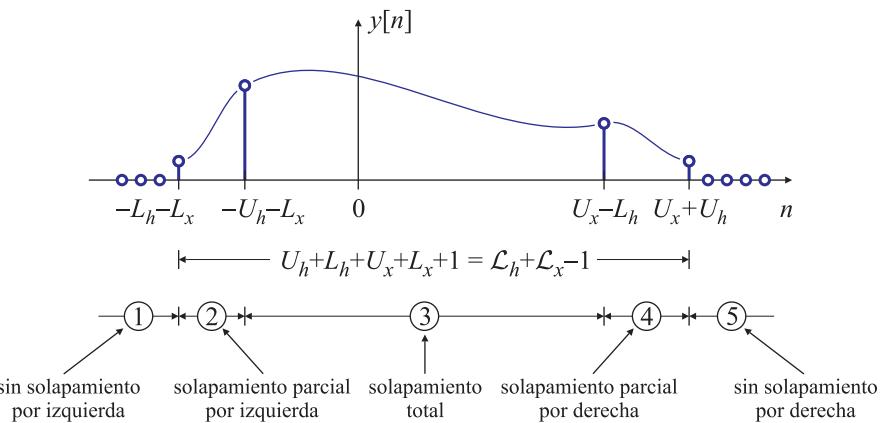


Fig. 3.26. Resultado de la convolución de las sucesiones $x[n]$ y $h[n]$ de la Fig. 3.24 (a) y (b), respectivamente.

En síntesis, la expresión de la salida $y[n] = (x * h)[n]$ calculada con (3.36) se puede escribir como

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < -L_h - L_x, \quad (\text{Etapa 1}) \\ \sum_{m=-L_x}^{n+L_h} x[m]h[n-m], & -L_x - L_h \leq n < U_h - L_x, \quad (\text{Etapa 2}) \\ \sum_{m=n-U_h}^{n+L_h} x[m]h[n-m], & U_h - L_x \leq n \leq U_x - L_h, \quad (\text{Etapa 3}) \\ \sum_{m=n-U_h}^{U_x} x[m]h[n-m], & U_x - L_h < n \leq U_x + U_h, \quad (\text{Etapa 4}) \\ 0, & U_x + U_h < n \quad (\text{Etapa 5}) \end{cases} \quad (3.39)$$

En la Fig. 3.26 se muestra esquemáticamente la salida, indicando el rango de valores de n que corresponde a cada etapa. El resultado de la convolución es no nulo para $-L_x - L_h \leq n \leq U_x + U_h$, y por lo tanto su longitud es $\mathcal{L}_y = L_x + L_h + U_x + U_h + 1 = \mathcal{L}_x + \mathcal{L}_h - 1$. \square

EJEMPLO 3.25. Convolución de dos sucesiones utilizando la ecuación (3.37)

En este ejemplo se calcula la convolución entre las señales $x[n]$ y $h[n]$ de la Fig. 3.27(a) y (b), respectivamente, utilizando la ecuación (3.37), repetida aquí por conveniencia:

$$y[n] = \sum_m h[m]x[n-m].$$

En este caso se debe representar $x[\cdot]$ en función de $n-m$ (queda dada vuelta) y $h[\cdot]$ en función de m (queda igual) para distintos valores de n (la muestra para la cual se desea calcular la salida) como se representa en la Fig. 3.27(c) y (d), respectivamente. En la Fig. 3.28 se muestra el desplazamiento de $x[n-m]$ para distintos valores de n , y se muestran algunos casos particulares de las cinco etapas de la convolución.

Etapa 1: Sin solapamiento por izquierda. Las señales $h[m]$ y $x[n-m]$ no se solapan hasta que la muestra de la derecha de $x[n-m]$ coincide con la muestra de la izquierda de $h[m]$, lo que pasa cuando

$$\underbrace{n+L_x}_{\text{muestra derecha de } x[n-m]} < \underbrace{-L_h}_{\text{muestra izquierda de } h[m]}$$

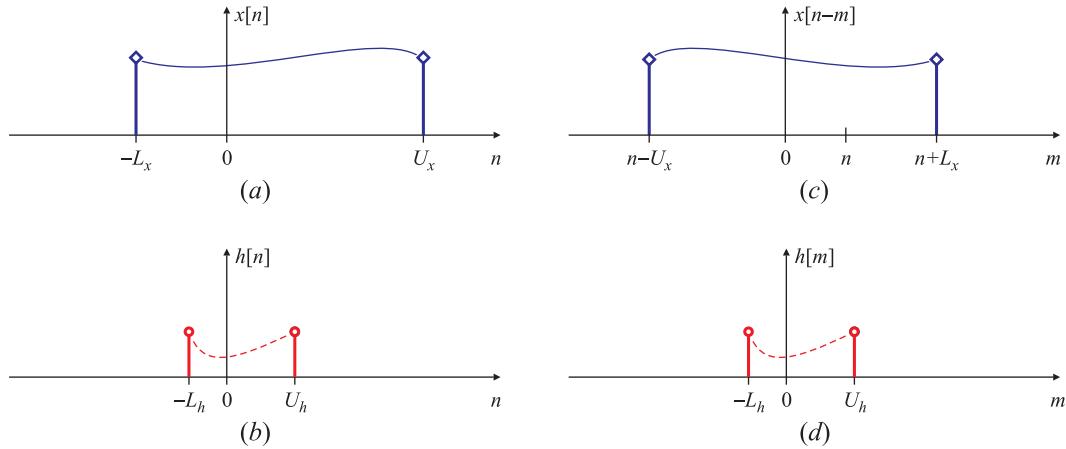


Fig. 3.27. Cálculo de la convolución utilizando la ecuación (3.37). Sucesiones $x[n]$ (a) y $h[n]$ (b) a convolucionar. Sucesiones $x[n - m]$ (c) y $h[m]$ (d) a utilizar en el Ejemplo (3.25).

como se muestra en la Fig. 3.28(a) que se puede escribir como

$$n < -L_x - L_h.$$

En todo este rango de valores de n el resultado de la convolución es cero, porque los valores no nulos de una sucesión se superponen con los valores nulos de la otra. En resumen,

$$y[n] = (x * h)[n] = 0 \quad \text{para } n < -L_x - L_h.$$

Etapa 2: *Solapamiento parcial por izquierda.* La primera muestra no nula de esta etapa se produce cuando la muestra de la derecha de $x[n-m]$ se solapa con la muestra de la izquierda de $h[m]$, como se ilustra en la Fig. 3.28(b), y la última cuando la muestra de la derecha de $x[n-m]$ se solapa con la muestra de la derecha de $h[m]$ (en este caso en que $\mathcal{L}_x > \mathcal{L}_h$), como se muestra en la Fig. 3.28(c). Este rango de valores se traduce en las relaciones

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{n + L_x}_{\text{muestra derecha de } x[n-m]} & \geq & \underbrace{-L_h}_{\text{muestra izquierda de } h[m]} \\ & & \\ \underbrace{n + L_x}_{\text{muestra derecha de } x[n-m]} & < & \underbrace{U_h}_{\text{muestra derecha de } h[m]} \end{array}$$

que puede escribirse como

$$-L_h - L_x \leq n < U_h - L_x.$$

Para este rango de valores de n , la salida $y[n]$ se calcula ajustando los índices de la ecuación (3.37) como

$$y[n] = \sum_{m=-L_h}^{n+L_x} h[m]x[n-m], \quad \text{para } -L_h - L_x \leq n < U_h - L_x.$$

El extremo inferior queda fijado por la sucesión $h[m]$, que es nula para $m < -L_h$, y el extremo superior lo limita la sucesión $x[n-m]$ que es nula para $m > n + L_x$. **Estos extremos son válidos sólo cuando $\mathcal{L}_x > \mathcal{L}_h$, y son diferentes de los extremos calculados en la Etapa 2 del Ejemplo 3.24**, lo que es razonable porque la expresión de la convolución (3.37) es diferente de la (3.36). Sin embargo, el rango de valores de n correspondientes a la Etapa 2 es el mismo en ambos ejemplos.

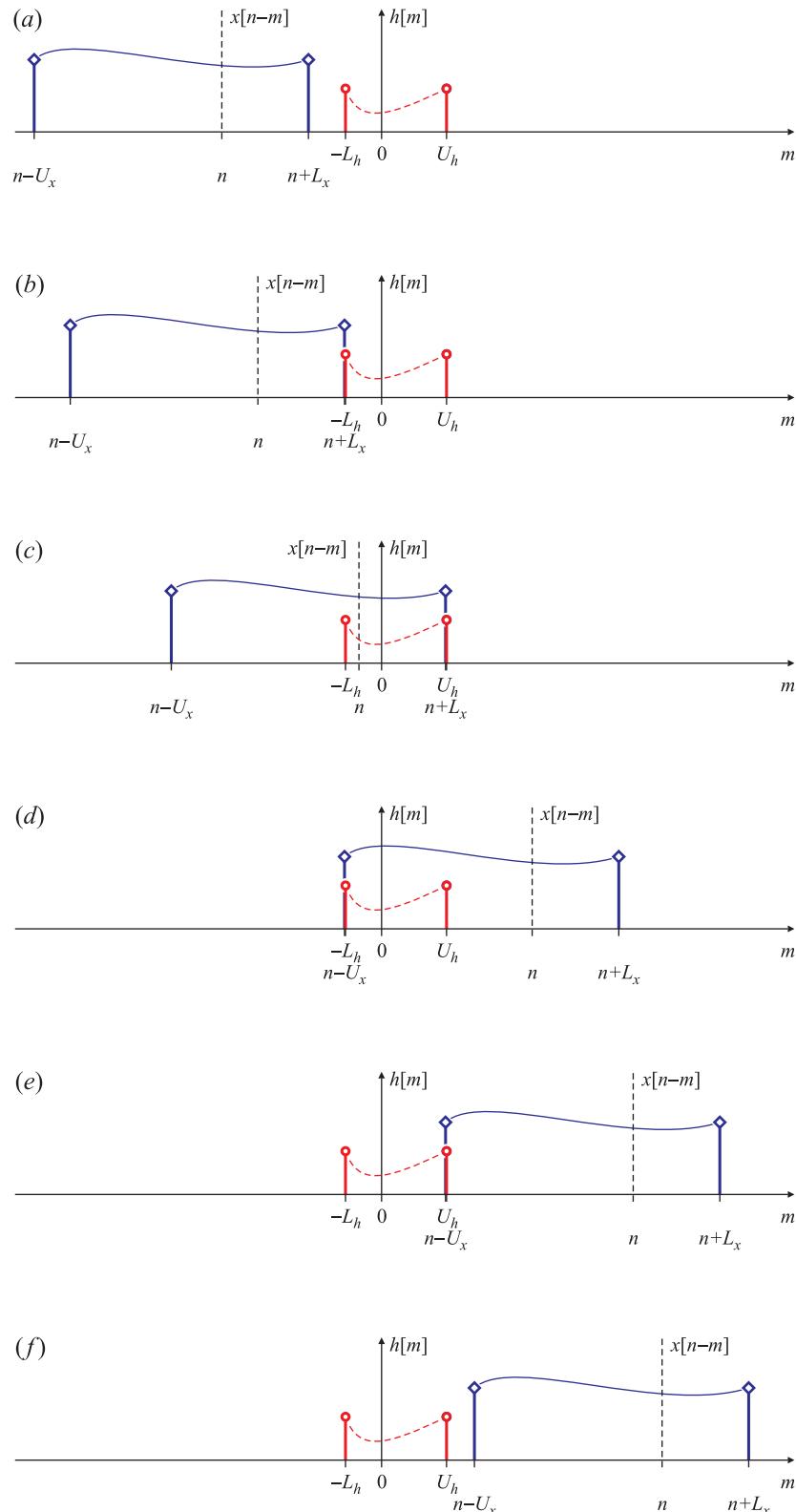


Fig. 3.28. Cálculo de la convolución utilizando la ecuación (3.37). Etapa 1: sin solapamiento por izquierda (a). Principio de la Etapa 2: solapamiento parcial por izquierda (b). Principio de la Etapa 3: solapamiento total (c). Fin de la Etapa 3: solapamiento total (d). Fin de la Etapa 4: solapamiento parcial por derecha (e). Etapa 5: sin solapamiento por derecha (f).

Etapa 3: *Solapamiento total.* La primera muestra de esta etapa se produce cuando la muestra de la derecha de $x[n-m]$ coincide con la muestra derecha de $h[m]$ y la última cuando la muestra izquierda de $x[n-m]$ coincide con la muestra izquierda de $h[m]$, como se muestra en las Figs. 3.28(c) y (d), respectivamente. El rango de valores de n delimitado por estas condiciones puede describirse mediante las relaciones

$$\begin{array}{ccl} \underbrace{n + L_x}_{\text{muestra derecha de } x[n-m]} & \geq & \underbrace{U_h}_{\text{muestra derecha de } h[m]} \\[10pt] \underbrace{n - U_x}_{\text{muestra izquierda de } x[n-m]} & \leq & \underbrace{-L_h}_{\text{muestra izquierda de } h[m]} \end{array}$$

que puede escribirse como

$$U_h - L_x \leq n \leq U_x - L_h.$$

Nuevamente, el rango de valores de n que ocupa la Etapa 3 coincide con el que se calculó en el Ejemplo anterior. Sin embargo, cambian los extremos de la sumatoria porque la expresión (3.37) es diferente de la (3.36):

$$y[n] = \sum_{m=-L_h}^{U_h} h[m]x[n-m], \quad \text{para } U_h - L_x \leq n \leq U_x - L_h$$

Etapa 4: *Solapamiento parcial por derecha.* La primera muestra de esta etapa aparece cuando la muestra no nula de la izquierda de $x[n-m]$ está corrida una muestra a la derecha de la muestra izquierda de $h[m]$, es decir corriendo $x[n-m]$ una muestra a la derecha en el gráfico de la figura Fig. 3.28(d), que se puede expresar matemáticamente como

$$\underbrace{n - U_x}_{\text{muestra izquierda de } x[n-m]} > \underbrace{-L_h}_{\text{muestra izquierda de } h[m]}$$

La última muestra de esta etapa se produce cuando la muestra de la izquierda de $x[n-m]$ se solapa con la muestra de la derecha de $h[m]$, como se representa en la Fig. 3.28(e), que se puede escribir como

$$\underbrace{n - U_x}_{\text{muestra izquierda de } x[n-m]} \leq \underbrace{U_h}_{\text{muestra derecha de } h[m]}$$

Estas dos condiciones se pueden sintetizar en

$$U_x - L_h < n \leq U_x + U_h.$$

Para este rango de valores de n , el extremo inferior de la sumatoria (3.37) es $n - U_x$ (porque para $m < n - U_x$ la sucesión $x[n-m]$ es nula) y el extremo superior es U_h , porque para $m > U_h$ se anula $h[m]$. Por lo tanto,

$$y[n] = \sum_{m=n-U_x}^{U_h} h[m]x[n-m], \quad \text{para } U_x - L_h < n \leq U_x + U_h.$$

Etapa 5: *Sin solapamiento por derecha.* Esta etapa comienza una muestra después que la muestra de la izquierda de $x[n-m]$ se solapa con la muestra de la derecha de la sucesión $h[m]$, como se representa en la Fig. 3.28(f), y que se puede escribir

$$\underbrace{n - U_x}_{\text{muestra izquierda de } x[n-m]} > \underbrace{U_h}_{\text{muestra derecha de } h[m]}$$

Para este rango de valores de n , las muestras no nulas de una sucesión se solapan con las muestras nulas de la otra, y por lo tanto el resultado de la convolución es nulo:

$$y[n] = 0 \quad \text{para } U_x + U_h < n.$$

Los resultados de cada una de estas cinco etapas se pueden sintetizar en la expresión general

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < -L_h - L_x, \\ \sum_{m=-L_h}^{n+L_x} h[m]x[n-m], & -L_x - L_h \leq n < U_h - L_x, \\ \sum_{m=-L_h}^{U_h} h[m]x[n-m], & U_h - L_x \leq n \leq U_x - L_h, \\ \sum_{m=n-U_x}^{U_h} h[m]x[n-m], & U_x - L_h < n \leq U_x + U_h, \\ 0, & U_x + U_h < n \end{cases} \quad (3.40)$$

La sucesión de salida $y[n]$ se representa esquemáticamente en la Fig. 3.26, indicando el rango de valores de n que corresponde a cada etapa. El resultado de la convolución es no nulo para $-L_x - L_h \leq n \leq U_x + U_h$, y por lo tanto su longitud es $\mathcal{L}_y = L_x + L_h + U_x + U_h + 1 = \mathcal{L}_x + \mathcal{L}_h - 1$. \square

A comparar la expresión (3.39) con la ecuación (3.40) se observa que los rangos de n que definen cada etapa son los mismos, ya sea que se utilice la expresión (3.36) o (3.37). Lo que cambian son los extremos de las sumatorias; la forma más sencilla para encontrar correctamente estos extremos es bosquejar las sucesiones $x[m]$ y $h[n-m]$ si se utiliza la expresión (3.36), o las sucesiones $x[n-m]$ y $h[m]$ cuando se emplea la ecuación (3.37), como se representa en las Figs. 3.25 o 3.28, respectivamente.

Dependiendo de la “forma” de las señales, es decir, si tienen longitud finita o infinita, si son causales, etc., pueden no ocurrir todas las etapas de la convolución. En el caso de dos señales causales de longitud infinita, por ejemplo $x[n] = a^n u[n]$ y $h[n] = b^n u[n]$ sólo existen dos etapas en el cálculo de la convolución: sin solapamiento por izquierda (cuando $n < 0$) y solapamiento parcial por derecha (cuando $n \geq 0$). Otros casos se estudian a continuación en algunos ejemplos, y también en el Ejercicio 14.

3.4.4. Ejemplos de cálculo de la suma convolución

Para implementar la convolución de tiempo discreto, el cálculo de la salida $y[n]$ en el instante n implica multiplicar muestra a muestra las dos sucesiones $x[m]$ y $h[m-n]$ y sumar los productos. Para obtener el valor de otra muestra, el origen de la sucesión $h[-m]$ se desplaza hasta la posición de la muestra cuyo valor se desea calcular, y se repite el proceso. Este método de cálculo se aplica ya sea que las sucesiones estén dadas como una lista de números (como ocurre en los sistemas de procesamiento de datos) o analíticamente, si las sucesiones se pueden representar con fórmulas matemáticas sencillas. El siguiente ejemplo muestra el cálculo de la convolución para este último caso.

EJEMPLO 3.26. Cálculo analítico de la convolución usando (3.36)

Una entrada

$$x[n] = a^n u[n]$$

se aplica a un sistema con respuesta impulsiva

$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

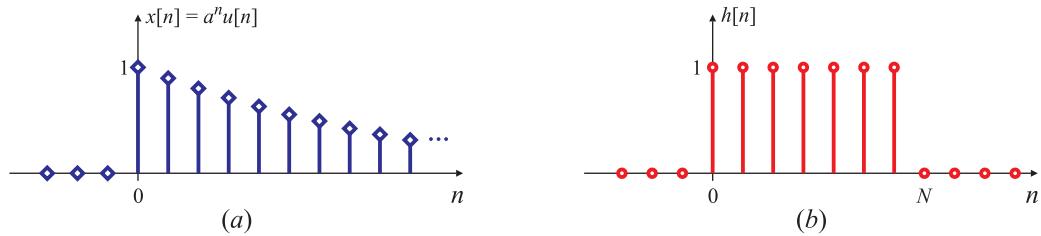


Fig. 3.29. Entrada $x[n] = a^n u[n]$ (a) y respuesta impulsiva $h[n] = u[n] - u[n - N]$ (b) a convolucionar.

Estas sucesiones se representan en la Fig. 3.29(a) y (b). Para calcular la salida $y[n]$ en un valor particular de n , se deben sumar todos los productos de $x[m]h[n-m]$ para todos los valores de m . En este caso, se pueden encontrar fórmulas específicas para $y[n]$ en distintos rangos de valores de n . Como una de las sucesiones tiene longitud semi-infinita (porque $x[n]$ es no nula para todo $n \geq 0$), se pueden reconocer tres etapas de la convolución: sin solapamiento por izquierda, solapamiento parcial por izquierda, y solapamiento total. Debido a que $x[n]$ es distinta de cero para todo $n \geq 0$, nunca hay solapamiento parcial por derecha, ni las sucesiones dejan de solaparse por derecha. A continuación se analizan cada una de estas etapas:

- **Etapa 1: Sin solapamiento por izquierda.** La Fig. 3.30(a) muestra las sucesiones $x[m]$ y $h[n-m]$ cuando n es un entero negativo. Es claro que los valores no nulos de estas sucesiones no se solapan siempre que n sea negativo. Esto es, no hay *solapamiento por izquierda* siempre que $n < 0$. De modo que

$$y[n] = 0, \quad \text{para } n < 0.$$

- **Etapa 2: Solapamiento parcial por izquierda.** En la Fig. 3.30(b) se ilustra el caso en que existe un solapamiento parcial por izquierda, esto es, cuando n es positivo, pero menor que $N-1$, o bien, cuando el extremo inferior de la sucesión, dado por $n-(N-1)$, es negativo: en definitiva, siempre que $0 \leq n \leq N-1$. Estudiando la figura se observa que

$$x[m]h[n-m] = a^m,$$

y entonces

$$y[n] = \sum_{m=0}^n a^m, \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1. \quad (3.41)$$

Estos límites se determinan directamente de la Fig. 3.30(b). La ecuación (3.41) muestra que $y[n]$ es la suma de $n+1$ términos de una serie geométrica de razón a . Esta sumatoria puede expresarse en forma cerrada aplicando la igualdad

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha^k = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2-1}}{1-\alpha}, \quad \text{si } N_2 > N_1. \quad (3.42)$$

Entonces es posible escribir

$$y[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1.$$

- **Etapa 3: Solapamiento total.** Finalmente, la Fig. 3.30(c) muestra las dos sucesiones $x[m]$ y $h[n-m]$ cuando $0 < n - (N-1)$ o $N-1 < n$. En este rango de valores de n se verifica nuevamente que

$$x[m]h[n-m] = a^m, \quad n - (N-1) \leq m \leq n,$$

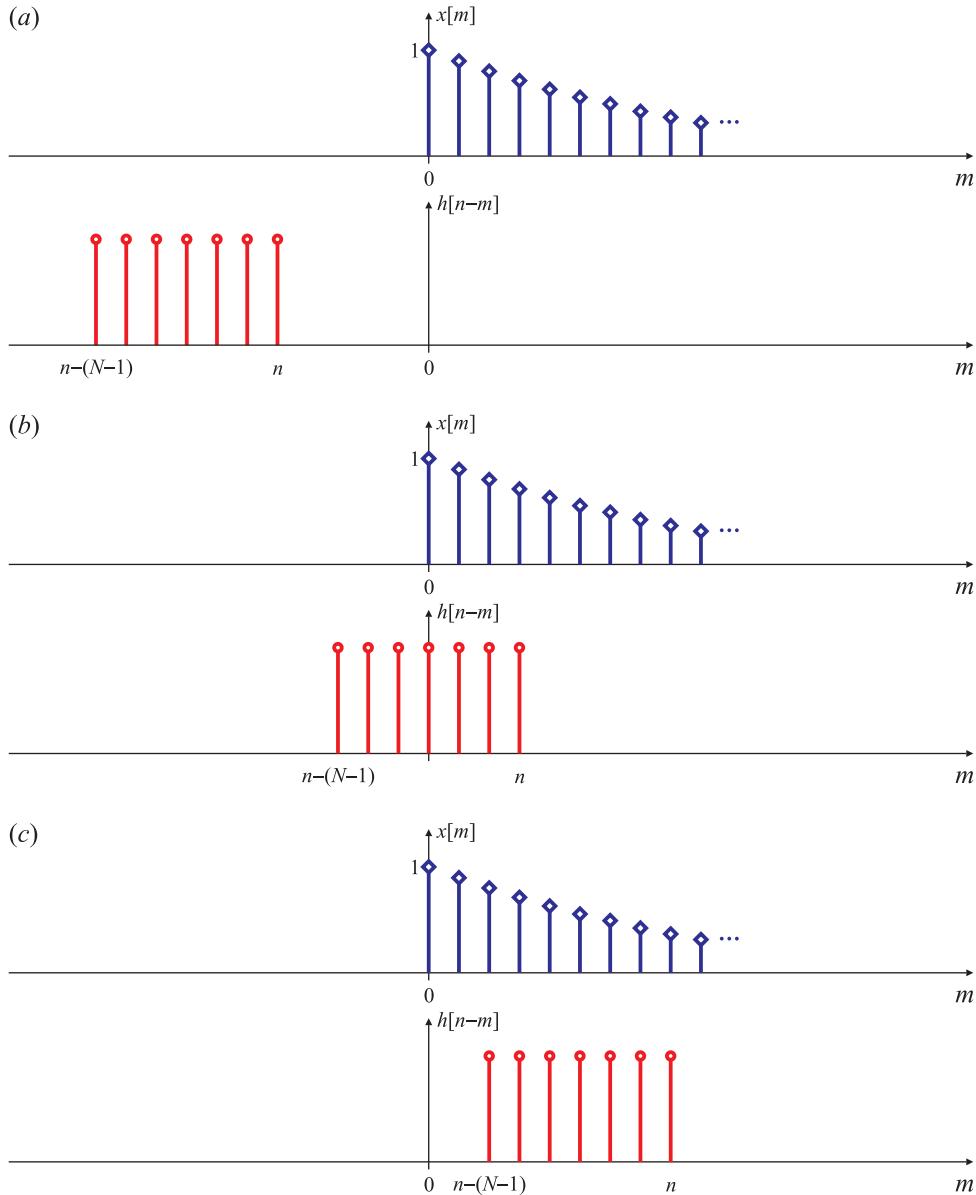


Fig. 3.30. Sucesiones $x[m]$ y $h[n-m]$ interviniéntes en el cálculo de la convolución cuando $0 < n$ (a), $0 \leq n \leq N-1$ (b) y $n > N-1$ (c).

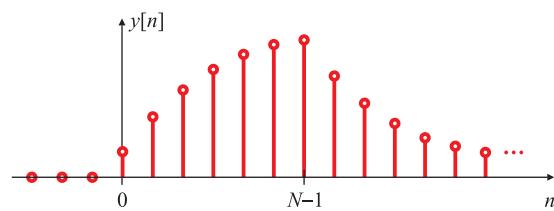


Fig. 3.31. El resultado $y[n]$ de la convolución entre las sucesiones $x[n]$ y $h[n]$ del Ejemplo 3.26.

y por lo tanto

$$y[n] = \sum_{m=n-(N-1)}^n a^m, \quad \text{para } N-1 < n,$$

donde el extremo inferior de la sumatoria es diferente que en (3.41) porque $h[m] = 0$ para $m < n - (N - 1)$. En consecuencia, utilizando (3.42) se puede escribir

$$y[n] = \frac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1-a}$$

o bien

$$y[n] = a^{n-N+1} \frac{1-a^N}{1-a}.$$

Resumiendo

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ a^{n-N+1} \frac{1-a^N}{1-a}, & N-1 < n. \end{cases}$$

Esta sucesión se representa en la Fig. 3.31. □

Este cálculo también puede realizarse utilizando la expresión (3.37) de la suma convolución como se muestra a continuación.

EJEMPLO 3.27. Cálculo analítico de la convolución usando (3.37)

En este caso, se refleja la entrada $x[n]$; es decir, se utilizan las sucesiones $h[m]$ y $x[n-m]$, como se representan en la Fig. 3.32. Nuevamente, debido a que $x[n]$ es de longitud semi-infinita, sólo deben tenerse en cuenta tres etapas en el cálculo de la convolución.

- **Etapa 1:** *Sin solapamiento por izquierda.* Las sucesiones $h[m]$ y $x[n-m]$ para $n < 0$ se grafican en la Fig. 3.32(a). Los valores no nulos de una sucesión se solapan con los valores nulos de la otra, de manera que

$$y[n] = 0, \quad \text{para } n < 0.$$

- **Etapa 2:** *Solapamiento parcial por izquierda.* En la Fig. 3.32(b) se ilustra el caso en que existe un solapamiento parcial por izquierda, esto es, cuando n es positivo ($n > 0$), pero menor que $N-1$, es decir $0 \leq n \leq N-1$. Estudiando la figura se observa que, para este rango de valores de n ,

$$h[m]x[n-m] = a^{n-m},$$

y entonces

$$y[n] = \sum_{m=0}^n a^{n-m}, \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1.$$

Estos límites se determinan directamente de la Fig. 3.32(b). El límite inferior queda definido por $h[m]$, mientras que el límite superior por $x[n-m]$ que es nula siempre que $m > n$. Se tiene entonces

$$y[n] = \sum_{m=0}^n a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^n a^{-m} = a^n \frac{a^{-n-1} - 1}{a^{-1} - 1} = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}, \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1.$$

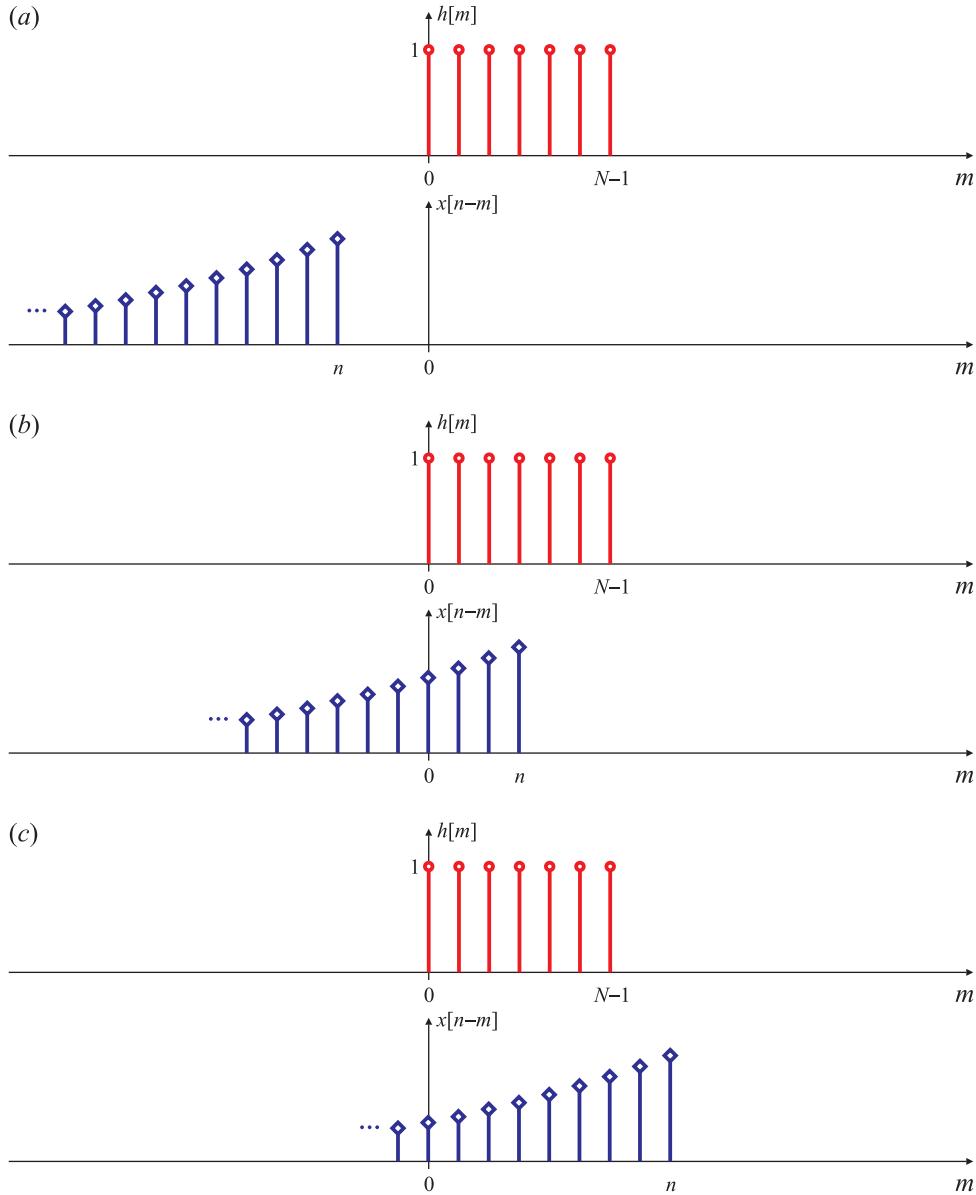


Fig. 3.32. Sucesiones $h[m]$ y $x[n - m]$ intervenientes en el cálculo de la convolución cuando $0 < n$ (a), $0 \leq n \leq N - 1$ (b) y $n > N - 1$ (c).

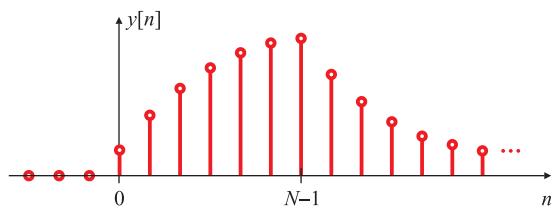


Fig. 3.33. El resultado $y[n]$ de la convolución entre las sucesiones $x[n]$ y $h[n]$ del Ejemplo 3.27, que concide con el resultado del Ejemplo 3.26.

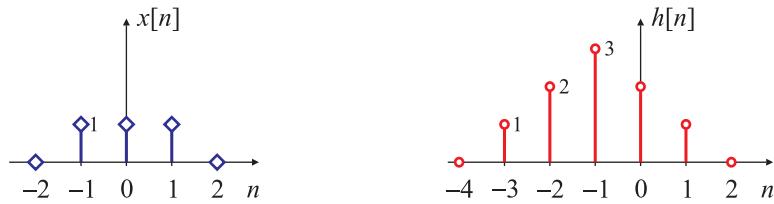


Fig. 3.34. Señales $x[n]$ y $h[n]$ a convolucionar en el Ejemplo 3.28.

- **Etapa 3: Solapamiento total.** Finalmente, la Fig. 3.32(c) muestra las dos sucesiones $h[m]$ y $x[n-m]$ cuando $n > N-1$. Para este rango de valores de n se verifica nuevamente que

$$h[m]x[n-m] = a^{n-m}, \quad n - (N-1) \leq m \leq n,$$

y por lo tanto

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} a^{n-m}, \quad \text{para } N-1 < n,$$

donde tanto el extremo inferior como el superior de la sumatoria quedan definidos por $h[m]$, ya que $h[m] = 0$ para $m < 0$ o $m > (N-1)$. Efectuando los cálculos se encuentra que

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^{N-1} a^{-m} = a^n \frac{a^{-N} - 1}{a^{-1} - 1}$$

o bien

$$y[n] = a^{n-N+1} \frac{1 - a^N}{1 - a}.$$

Resumiendo

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ a^{n-N+1} \frac{1 - a^N}{1 - a}, & N-1 < n, \end{cases}$$

como se muestra en la Fig. 3.33. Este resultado coincide, como es lógico, con el resultado del Ejemplo 3.26. Aunque las expresiones de las sumatorias en cada etapa son diferentes en cada Ejemplo, las regiones que definen cada etapa, y el resultado final son exactamente los mismos. \square

Los Ejemplos 3.26 y 3.27 muestran el cálculo analítico de la convolución cuando la entrada y la respuesta impulsiva quedan representadas por fórmulas matemáticas sencillas. En estos casos, se obtienen formas compactas porque intervienen sumatorias de series geométricas, cuya resultado es conocido.

Cuando alguna de las sucesiones no se puede representar de esta manera, la suma de convolución puede calcularse numéricamente siempre que la entrada, la respuesta impulsiva o ambas sean sucesiones de longitud finita, es decir, cuando alguna de ellas esté formada por un número finito de muestras no nulas.

En el ejemplo anterior sólo aparecen tres de las cinco etapas del cálculo de la convolución, porque una de las sucesiones tiene longitud semi-infinita; en el caso de sucesiones de longitud finita, deben analizarse las cinco etapas, como se estudia en el siguiente ejemplo.

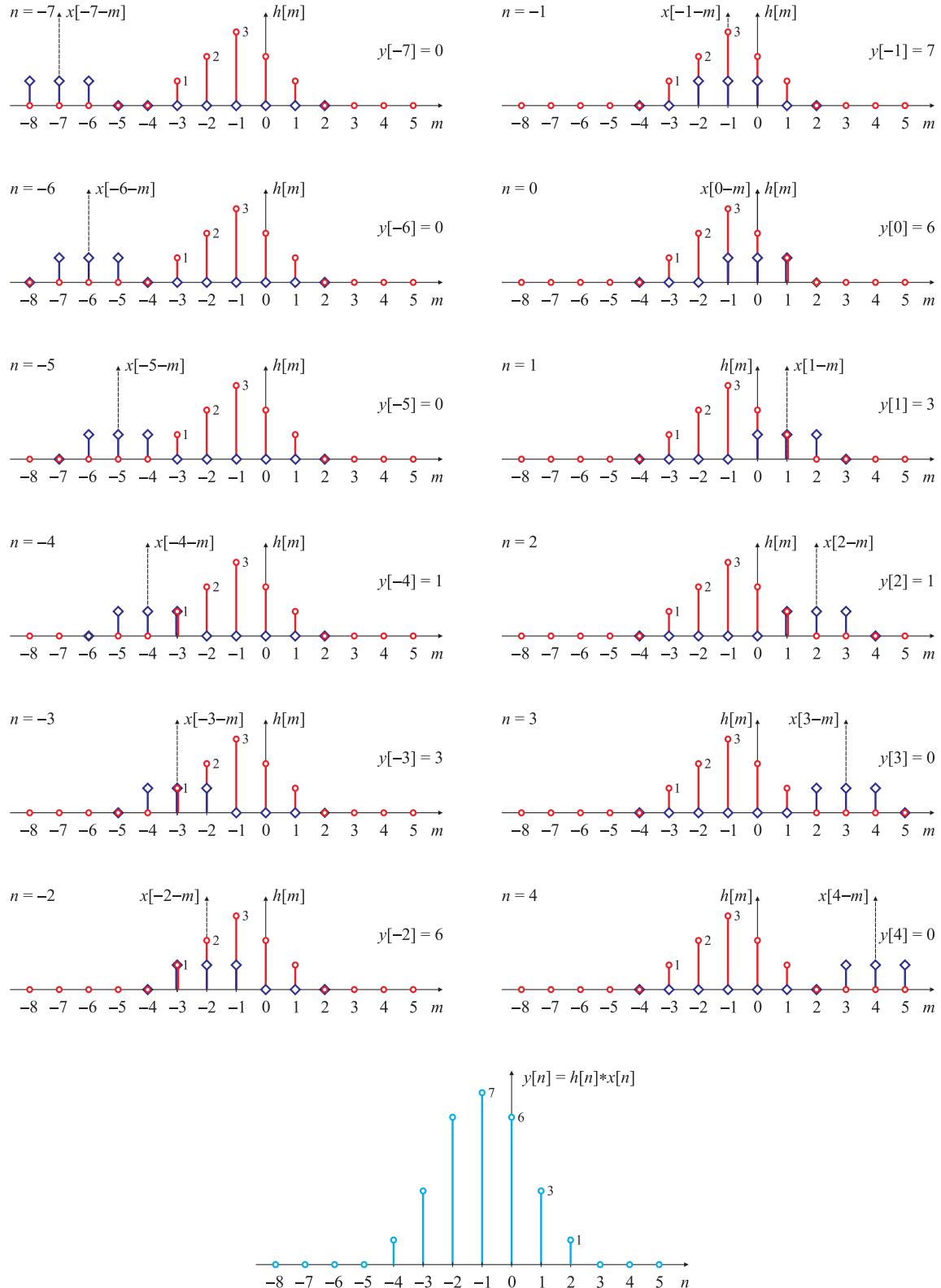


Fig. 3.35. Cálculo gráfico de la convolución de las sucesiones del Ejemplo 3.28.

EJEMPLO 3.28. Convolución de dos sucesiones de longitud finita

Se desea calcular la convolución entre las sucesiones

$$\begin{aligned}x[n] &= \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1], \\h[n] &= \delta[n+3] + 2\delta[n+2] + 3\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1],\end{aligned}$$

representadas en la Fig. 3.34. Como $x[n]$ es simétrica, se elige la forma (3.37) para el cálculo de la convolución, es decir

$$y[n] = \sum_m x[n-m]h[m].$$

En este caso, las cinco etapas de la convolución quedan limitadas por los siguientes rangos de n :

Etapa 1: sin solapamiento por izquierda $n < -4 \Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = 0$

Etapa 2: solapamiento parcial por izquierda $-4 \leq n \leq -2 \Rightarrow y[n] = \sum_{m=-3}^{n+1} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-3}^{n+1} h[m]$

Etapa 3: solapamiento total $-2 \leq n \leq 0 \Rightarrow y[n] = \sum_{m=n-1}^{n+1} x[n-m]h[m] = \sum_{m=n-1}^{n+1} h[m]$

Etapa 4: solapamiento parcial por derecha $0 \leq n \leq 2 \Rightarrow y[n] = \sum_{m=n-1}^1 x[n-m]h[m] = \sum_{m=n-1}^1 h[m]$

Etapa 5: sin solapamiento por derecha $2 < n \Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = 0$

El resultado de la convolución en cada etapa es

Etapa 1:

$$n < 4 \Rightarrow y[n] = 0$$

Etapa 2:

$$\begin{aligned}-4 \leq n \leq -2 &\Rightarrow y[-4] = \sum_{m=-3}^{-4+1} h[m] = h[-3] = 1 \\&y[-3] = \sum_{m=-3}^{-3+1} h[m] = h[-3] + h[-2] = 3 \\&y[-2] = \sum_{m=-3}^{-2+1} h[m] = h[-3] + h[-2] + h[-1] = 6\end{aligned}$$

Etapa 3:

$$\begin{aligned}-2 \leq n \leq 0 &\Rightarrow y[-2] = \sum_{m=-2-1}^{-2+1} h[m] = h[-3] + h[-2] + h[-1] = 6 \\&y[-1] = \sum_{m=-1-1}^{-1+1} h[m] = h[-2] + h[-1] + h[-0] = 7 \\&y[0] = \sum_{m=0-1}^{0+1} h[m] = h[-1] + h[0] + h[1] = 6\end{aligned}$$

Etapa 4:

$$\begin{aligned}0 \leq n \leq 2 &\Rightarrow y[0] = \sum_{m=0-1}^1 h[m] = h[-1] + h[0] + h[1] = 6 \\&y[1] = \sum_{m=1-1}^1 h[m] = h[0] + h[1] = 3 \\&y[2] = \sum_{m=2-1}^1 h[m] = h[1] = 1\end{aligned}$$

Etapa 5:

$$2 < n \Rightarrow y[n] = 0$$

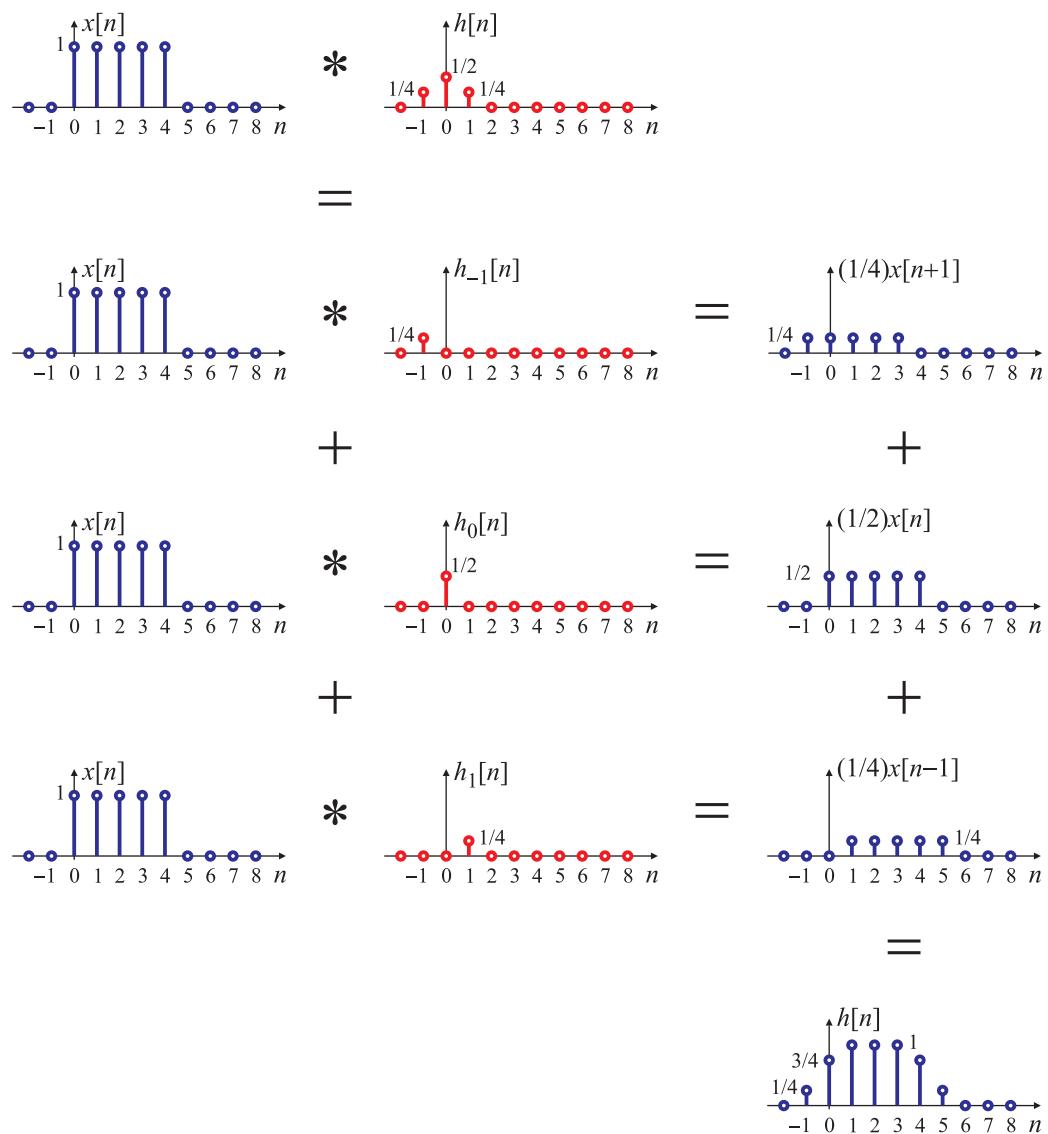


Fig. 3.36. Cálculo gráfico de la convolución de las señales de Ejemplo 3.29.

que se puede sintetizar como

$$y[n] = \delta[n+4] + 3\delta[n+3] + 6\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 6\delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

El cálculo punto a punto para $-7 \leq n \leq 4$ se ilustra en la Fig. 3.35. □

En algunos cálculos de convoluciones entre sucesiones de longitud finita, donde alguna de las sucesiones que intervienen es “corta”, el cálculo de la convolución por definición o gráficamente puede ser más conveniente, como se muestra a continuación.

EJEMPLO 3.29. Cálculo de la convolución de dos sucesiones

Se desea calcular la salida $y[n]$ de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva

$h[n] = (1/4)\delta[n+1] + (1/2)\delta[n] + (1/4)\delta[n-1]$ cuando la entrada es $x[n] = u[n] - u[n-5]$. La salida $y[n]$ se calcula como la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$; esto es

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k].$$

El cálculo puede realizarse aplicando la suma convolución, y como las dos señales son de longitud finita, se deben reconocer las cinco etapas (sin solapamiento a izquierda, solapamiento parcial por izquierda, solapamiento total, solapamiento parcial por derecha, y sin solapamiento a la derecha) y ajustar los índices de la sumatoria para cada caso. Sin embargo, como la respuesta impulsiva tiene sólo tres muestras, $h[n] = (1/4)\delta[n+1] + (1/2)\delta[n] + (1/4)\delta[n-1]$, es más sencillo para este ejercicio efectuar la convolución término a término:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * \left(\frac{1}{4}\delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] \right) \\ &= \frac{1}{4}x[n+1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] \\ &= \frac{1}{4}\delta[n+1] + \frac{3}{4}\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \frac{3}{4}\delta[n-4] + \frac{1}{4}\delta[n-5]. \end{aligned}$$

El cálculo se representa gráficamente en la Fig. 3.36. En este caso, $h_{-1}[n] = h[-1]\delta[n+1]$, $h_0[n] = h[0]\delta[n]$ y $h_1[n] = h[1]\delta[n-1]$. \square

3.5. Propiedades de sistemas lineales e invariantes en tiempo

Como el comportamiento de todos los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo se pueden describir por la suma convolución (3.36) o (3.37), las propiedades de esta clase de sistemas quedan definidas por las propiedades de la convolución de tiempo discreto. Por lo tanto, el resto de las propiedades de sistemas discretos estudiadas en la Sección 3.3 (estabilidad, causalidad, etc.) se reflejan en la respuesta impulsiva, que caracteriza completamente esta clase de sistemas.

Algunas de las propiedades de la clase de sistemas lineales e invariantes en el tiempo pueden derivarse al analizar propiedades de la operación de convolución. Por ejemplo, la convolución es conmutativa:

$$(x * h)[n] = (h * x)[n],$$

como muestran las ecuaciones (3.36)-(3.37). Específicamente, (3.37) puede derivarse de (3.36) sustituyendo variables, haciendo, por ejemplo, $\ell = n - m$:

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[n-\ell]h[\ell] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[\ell]x[n-\ell] = (h * x)[n],$$

intercambiando los roles de $x[n]$ y $h[n]$. En otras palabras, el orden de las sucesiones que participan en la convolución no es importante, y por lo tanto la salida del sistema no cambia si se intercambian los papeles de la entrada y la respuesta impulsiva: un sistema con entrada $x[n]$ y respuesta impulsiva $h[n]$ tiene la misma salida que un sistema con respuesta impulsiva $x[n]$ que se excita con una entrada $h[n]$.

La convolución también es distributiva sobre la suma

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n],$$

que resulta directamente de la propia definición (3.36) y de la linealidad y conmutatividad de la convolución.

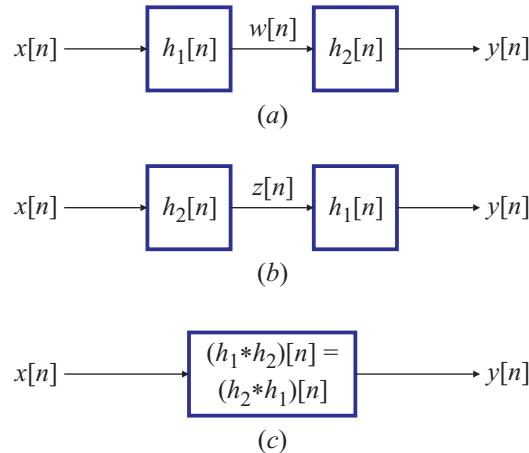


Fig. 3.37. Tres sistemas lineales e invariantes en el tiempo con la misma respuesta impulsiva.

3.5.1. Conexión de sistemas en cascada

En una *conexión en cascada* de sistemas, la salida del primer sistema es la entrada al segundo, la salida del segundo es la entrada del tercero, etc. La conexión en cascada de dos sistemas lineales e invariantes en el tiempo es un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta impulsiva es la convolución de la respuesta impulsiva de los dos sistemas, como se muestra en la Fig. 3.37(a). Para el diagrama bloques de la Fig. 3.37(a), la salida del primer bloque es $h_1[n]$ si la entrada es $x[n] = \delta[n]$. Por lo tanto, la salida del segundo sistema (y por definición, la respuesta impulsiva del sistema completo) será

$$h[n] = (h_1 * h_2)[n]. \quad (3.43)$$

La demostración es sencilla. Si en la Fig. 3.37(a) $w[n]$ es la salida del primer bloque,

$$w[n] = (h_1 * x)[n] = \sum_r x[r]h_1[n - r]. \quad (3.44)$$

Como $w[n]$ es también la entrada del segundo bloque, su salida $y[n]$ está dada por

$$y[n] = (h_2 * w)[n] = \sum_s w[n - s]h_2[s].$$

Notando que $w[n - s] = \sum_r x[r]h_1[(n - s) - r]$, y reemplazando en (3.44) se tiene

$$y[n] = \sum_s \left(\sum_r x[r]h_1[(n - s) - r] \right) h_2[s] = \sum_r x[r] \sum_s h_1[(n - s) - r]h_2[s].$$

Notando que

$$\sum_s h_1[(n - s) - r]h_2[s] = \sum_s h_1[(n - r) - s]h_2[s] = (h_1 * h_2)[n - r],$$

resulta

$$y[n] = \sum_r x[r] \sum_s h_1[(n - s) - r]h_2[s] = \sum_r x[r](h_1 * h_2)[n - r],$$

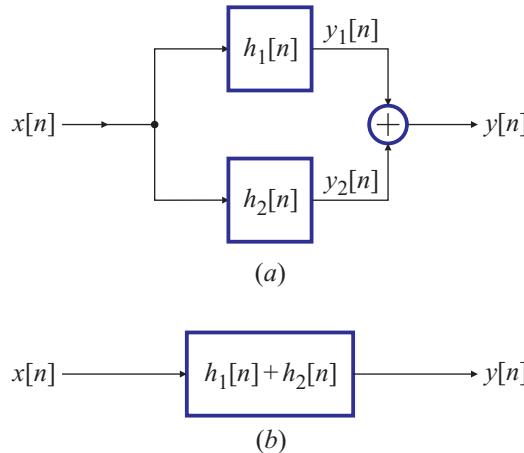


Fig. 3.38. Conexión en paralelo de dos sistemas lineales e invariantes en el tiempo (a), y un sistema equivalente (b).

que muestra que la conexión en cascada de la Fig. 3.37(a) se comporta como el sistema de la Fig. 3.37(c), que es un sistema con respuesta impulsiva $(h_1 * h_2)[n]$.

Como consecuencia de que la convolución es conmutativa, la respuesta impulsiva de la conexión en cascada de sistemas lineales e invariantes en el tiempo es independiente del orden de la conexión. La demostración para el caso mostrado en la Fig. 3.37(b) es similar al desarrollado más arriba. Estos resultados se representan en la Fig. 3.37, donde los tres sistemas tienen la misma respuesta impulsiva entre $y[n]$ y $x[n]$.

3.5.2. Conexión de sistemas en paralelo

En una *conexión en paralelo*, los sistemas tienen la misma entrada y la salida total se produce por la suma de sus salidas. A partir de la propiedad distributiva de la convolución, resulta que la conexión de dos sistemas lineales e invariantes en el tiempo en paralelo es un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta impulsiva es la suma de las respuestas impulsivas de los sistemas individuales

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n].$$

La demostración es más sencilla que para el caso de sistemas conectados en cascada. Si $y_1[n]$, $y_2[n]$ son las salidas de los bloques con respuesta impulsiva $h_1[n]$, $h_2[n]$, respectivamente, como se representa en la Fig. 3.38(a), se tiene que

$$y_1[n] = (h_1 * x)[n] = \sum_r h_1[r]x[n - r], \quad y_2[n] = (h_2 * x)[n] = \sum_r h_2[r]x[n - r].$$

La salida total $y[n]$ está dada por

$$\begin{aligned} y[n] &= y_1[n] + y_2[n] \\ &= \sum_r h_1[r]x[n - r] + \sum_r h_2[r]x[n - r] \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$y[n] = \sum_r (h_1[r] + h_2[r])x[n - r]$$

que muestra que la conexión en paralelo de la Fig. 3.38(a) se comporta como un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h[n] = h_1[n] + h_2[n]$, como se representa en la Fig. 3.38(b).

3.5.3. Causalidad y estabilidad en sistemas lineales e invariantes en tiempo

Las restricciones de linealidad e invariación temporal definen una clase de sistemas con propiedades muy especiales. Como se mencionó más arriba, estos sistemas quedan caracterizados completamente por su respuesta impulsiva. Por lo tanto, las propiedades de causalidad y estabilidad, que también son muy importantes, se pueden determinar a partir de la respuesta impulsiva del sistema.

3.5.3.1. Causalidad

La clase de sistemas causales estudiada en la Sección 3.3.4 es aquella en los cuales la salida del sistema en un instante n_0 cualquiera depende solamente de las entradas correspondientes al instante n_0 y anteriores. De acuerdo a la ecuación (3.36)

$$y[n_0] = \sum_m x[n_0 - m]h[m]$$

la salida $y[n]$ en un instante n_0 dado se puede escribir como

$$y[n_0] = \sum_{m=-\infty}^{-1} x[n_0 - m]h[m] + x[n_0]h[0] + \sum_{m=1}^{\infty} x[n_0 - m]h[m]$$

y desarrollando se observa que

$$y[n_0] = \underbrace{\cdots + x[n_0 + 2]h[-2] + x[n_0 + 1]h[-1]}_{\text{muestras de la entrada posteriores a } n_0} + x[n_0]h[0] + \underbrace{x[n_0 - 1]h[1] + x[n_0 - 2]h[2] + \cdots}_{\text{muestras de la entrada anteriores a } n_0}$$

Para que $y[n_0]$ dependa solamente de $x[n_0]$, $x[n_0 - 1]$, $x[n_0 - 2]$, $x[n_0 - 3]$, etc., es decir, de la entrada en la muestra n_0 y anteriores, la primera sumatoria tiene que ser nula para cualquier entrada aplicada, es decir

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} x[n_0 - m]h[m] = 0 \quad \text{para cualquier } x[n].$$

Esta ecuación impone entonces que

$$h[n] = 0 \quad \text{para } n < 0, \tag{3.45}$$

que es la condición de causalidad para sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Muchas veces se dice que una sucesión $x[n]$ es causal si $x[n] = 0$ para $n < 0$, sugiriendo que podría ser la respuesta impulsiva de un sistema causal.

3.5.3.2. Estabilidad

En la Sección 3.3.5 se definió que un sistema (genérico) es entrada/salida estable si toda entrada acotada produce salidas acotadas. Un sistema *lineal e invariante en el tiempo* es estable si y sólo si su respuesta impulsiva es absolutamente sumable, es decir, si

$$S = \sum_n |h[n]| < \infty. \quad (3.46)$$

Para demostrar este hecho, se observa que

$$|y[n]| = \left| \sum_m h[m]x[n-m] \right| \leq \sum_m |h[m]x[n-m]| = \sum_m |h[m]| |x[n-m]|.$$

Si $x[n]$ está acotada, es decir $|x[n]| \leq B_x$, el reemplazar $x[m-n]$ por B_x refuerza la desigualdad, y por lo tanto

$$|y[n]| \leq B_x \sum_m |h[m]|.$$

Por lo tanto, $y[n]$ es acotada si se satisface (3.46); en otras palabras, la ecuación (3.46) es una condición *suficiente* para estabilidad.

Para probar que también es una condición *necesaria*, se debe demostrar que si $S \rightarrow \infty$, entonces se puede encontrar una entrada acotada que provoque una salida que no esté acotada. Una sucesión de entrada que cumple con estos requisitos es

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0, \\ 0, & h[n] = 0, \end{cases}$$

donde $h^*[n]$ es el complejo conjugado de $h[n]$. Los valores de la sucesión $x[n]$ así definida tienen a lo sumo módulo uno, y por lo tanto, está acotada con $B_x = 1$. Sin embargo, el valor de la salida $y[n]$ para $n = 0$ es

$$y[n] \Big|_{n=0} = \sum_m x[n-m]h[m] \Big|_{n=0} = \sum_m x[-m]h[m] = \sum_m \frac{h^*[m]}{|h[m]|} h[m] = \sum_m \frac{|h[m]|^2}{|h[m]|} = S.$$

Entonces, como $S \rightarrow \infty$ existe una entrada acotada que produce una sucesión de salida que no está acotada. Por lo tanto el sistema no es estable entrada/salida.

3.5.3.3. Algunos ejemplos

Para mostrar cómo se reflejan en la respuesta impulsiva las propiedades de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, se revisan a continuación algunos de los sistemas estudiados en los Ejemplos anteriores. Sólo los sistemas retardador (Ejemplo 3.3) promediador (Ejemplo 3.4), el acumulador (Ejemplo 3.7), y los sistemas diferencias hacia adelante y hacia atrás (Ejemplo 3.15) son lineales e invariantes en el tiempo. Aunque se pueda encontrar la respuesta impulsiva de sistemas no lineales o variantes en el tiempo, en general tiene un interés limitado, ya que la forma habitual de la suma convolución (3.36) o (3.37) no es aplicable, lo mismo que las ecuaciones (3.45) o (3.46) que definen la causalidad y

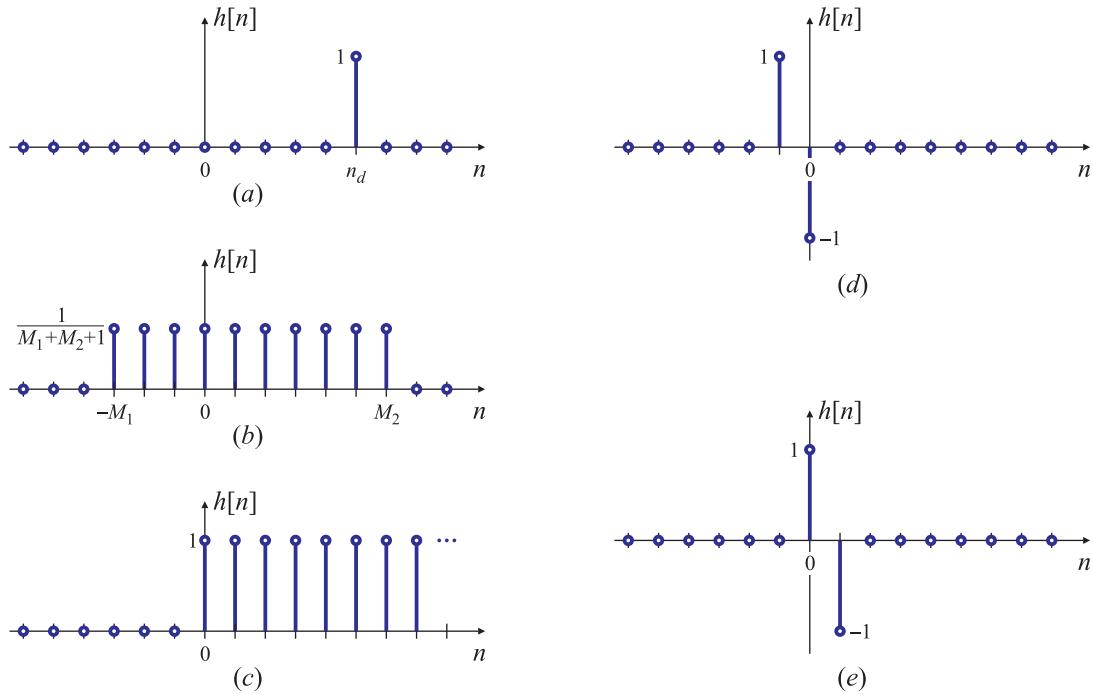


Fig. 3.39. Respuestas impulsivas de sistemas lineales e invariantes en el tiempo: retardo ideal (a), promediador (b), acumulador (c), diferencias hacia adelante (d) y diferencias hacia atrás (e).

la estabilidad para sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Si el sistema es lineal pero variante en el tiempo, se puede calcular la salida $y[n]$ si se conoce la *familia* de respuestas impulsivas $h_k[n]$, que representan la respuesta del sistema cuando la entrada es un impulso aplicado en la muestra k , i.e. $x[n] = \delta[n - k]$ utilizando la expresión (3.34); este enfoque se explora en el Ejercicio 7.

Para calcular las respuestas impulsivas de los sistemas en los Ejemplos 3.3, 3.4, 3.7, y 3.15, basta con calcular la respuesta de cada sistema cuando $x[n] = \delta[n]$, utilizando la relación que define el sistema. Las respuestas impulsivas de cada sistema son:

Retardo ideal (Ejemplo 3.3) Esta sistema está definido por la relación (3.8)

$$y[n] = x[n - n_d].$$

donde n_d es un entero positivo. Si $x[n] = \delta[n]$, $y[n] = h[n]$, y entonces la respuesta impulsiva es

$$h[n] = \delta[n - n_d] \quad (3.47)$$

representada en la Fig. 3.39(a). □

Promediador (Ejemplo 3.4) Este sistema está definido por la relación (3.9)

$$y[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{m=-M_1}^{M_2} x[n - m].$$

Haciendo $x[n] = \delta[n]$, se encuentra que

$$h[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{m=-M_1}^{M_2} \delta[n-m]$$

que puede escribirse como

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (3.48)$$

como se muestra en la Fig. 3.39(b). \square

Acumulador (Ejemplo 3.7) De acuerdo a las ecuaciones (3.13) o (3.14), este sistema está caracterizado por las relaciones

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] = \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m]$$

por lo que la respuesta impulsiva resulta

$$\begin{aligned} h[n] &= \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-m] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \\ &= u[n], \end{aligned} \quad (3.49)$$

tal como se representa en la Fig. 3.39(c). \square

Diferencias hacia adelante (Ejemplo 3.15) Este sistema está caracterizado por la relación

$$y[n] = x[n+1] - x[n],$$

de manera que la respuesta impulsiva es

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n], \quad (3.50)$$

como se muestra en la Fig. 3.39(d). \square

Diferencias hacia atrás (Ejemplo 3.15) En este sistema la entrada y la salida están relacionadas como

$$y[n] = x[n] - x[n-1],$$

y por lo tanto la respuesta impulsiva es

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \quad (3.51)$$

representada en la Fig. 3.39(e). \square

Verificación de la propiedad de causalidad: Para comprobar si el sistema es causal, se debe observar si $h[n] = 0$ para $n < 0$.

- El sistema retardador ideal del Ejemplo (3.3) es causal si $n_d > 0$ en (3.8), como se discute en la Sección 3.3.4. La respuesta impulsiva $h[n]$ de este sistema dada por (3.47) muestra también que es no causal si $n_d < 0$.
- El sistema promediador es causal si $-M_1 > 0$ y $M_2 \geq 0$, como se desprende de su respuesta impulsiva (3.48).
- El sistema acumulador y el sistema de diferencias hacia atrás son causales, de acuerdo con las respuestas impulsivas respectivas dadas por (3.49) y (3.51).
- El sistema de diferencias hacia adelante es no causal, pues $h[-1] = 1 \neq 0$, según se aprecia en la respuesta impulsiva $h[n]$ de la ecuación (3.50).

Verificación de la propiedad de estabilidad: A partir de la respuesta impulsiva de estos sistemas básicos [ecuaciones (3.47) a (3.51)] se puede verificar si cada uno de ellos es estable calculando la sumatoria

$$S = \sum_n |h[n]|.$$

- Para los sistemas retardador ideal, el promediador, y las diferencias adelante y hacia atrás, es claro que $S < \infty$ porque la respuesta impulsiva está formada por un número finito de términos. Estos sistemas se denominan FIR (por *respuesta impulsiva finita*, según sus siglas en inglés), y se estudiarán en la Sección 3.5.6.
- El acumulador, en cambio, es inestable porque

$$S = \sum_n |h[n]| = S = \sum_n u[n] = \infty.$$

En la Sección 3.3.5 se mostró la inestabilidad del acumulador dando un ejemplo de una entrada acotada (un escalón unitario) para la cual no se podía acotar la salida.

La respuesta impulsiva del acumulador es de longitud infinita. Este es un ejemplo de los sistemas denominados IIR (*respuesta impulsiva de longitud infinita*, por sus siglas en inglés), que también se estudiarán en la Sección 3.5.6. No todos los sistemas IIR son inestables, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.30. Estabilidad de un sistema IIR

Para sistema IIR caracterizado por la respuesta impulsiva $h[n] = a^n u[n]$ se tiene que

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n.$$

Si $|a| < 1$, la sumatoria converge porque es la suma de los términos de una serie geométrica con razón menor que la unidad. Entonces

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1 - |a|} < \infty.$$

Por lo tanto, si $|a| < 1$ el sistema es *estable*. Por otro lado, si $|a| \geq 1$, la sumatoria no converge, y el sistema es *inestable*. \square

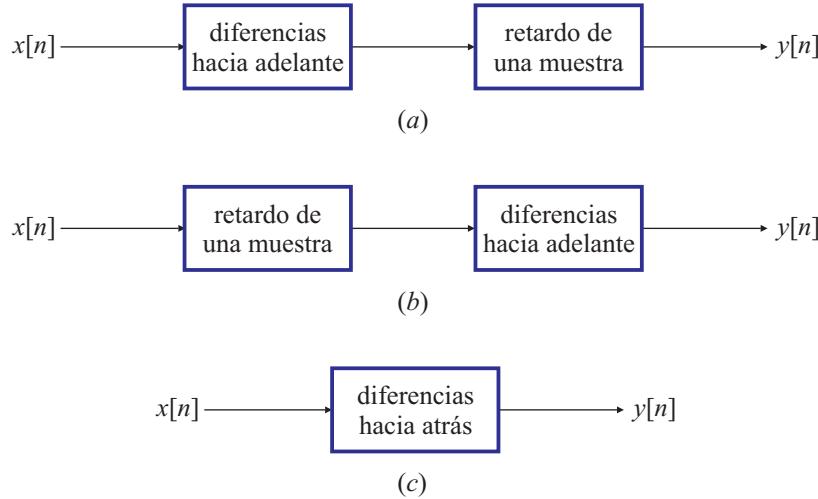


Fig. 3.40. Sistemas equivalentes a causa de la propiedad conmutativa de la convolución.

3.5.4. Causalización de sistemas

La idea de la convolución como una operación entre dos sucesiones permite simplificar muchos problemas que involucren sistemas. Para el retardador ideal puede mostrarse un resultado particularmente útil. Como la salida del retardador es $y[n] = x[n - n_d]$, y como su respuesta impulsiva es $h[n] = \delta[n - n_d]$, resulta que

$$x[n] * \delta[n - n_d] = \delta[n - n_d] * x[n] = x[n - n_d],$$

es decir, que la convolución de una sucesión cualquiera $x[n]$ con un impulso resulta en despalzar el origen de la sucesión $x[n]$ al instante donde está aplicado el impulso.

Como el retardo es una operación fundamental en la implementación de sistemas lineales, el resultado precedente es útil para el análisis y simplificación de interconexiones de sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

EJEMPLO 3.31. Causalización de sistemas

El sistema de la Fig. 3.40(a) está formado por un sistema de diferencias hacia adelante (con respuesta impulsiva $h_{ad}[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$) en cascada con un sistema retardador ideal de una muestra (con respuesta impulsiva $h_r[n] = \delta[n-1]$). De acuerdo con la propiedad conmutativa de la convolución, el orden de los sistemas interviniéntes en la cascada es irrelevante siempre que sean lineales e invariantes en el tiempo (como se sintetiza en la Fig. 3.37). Por lo tanto, la salida del sistema es la misma si se calcula la diferencia hacia adelante de la entrada y se retarda este resultado en una muestra [Fig. 3.40(a)] que si se demora la entrada una muestra, y a éste resultado se le calculan las diferencias hacia atrás [Fig. 3.40(b)]. Además, de acuerdo al resultado de (3.43), la respuesta impulsiva del sistema en cascada es la convolución de las respuestas impulsivas de los sistemas interviniéntes. En consecuencia,

$$\begin{aligned} h[n] &= (h_{ad} * h_r)[n] \\ &= (\delta[n+1] - \delta[n]) * \delta[n-1] \\ &= \delta[n-1] * (\delta[n+1] - \delta[n]) \\ &= \delta[n] - \delta[n-1]. \end{aligned}$$

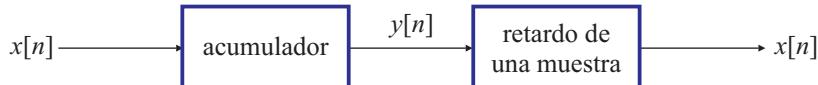


Fig. 3.41. Un sistema acumulador en cascada con un sistema de diferencias hacia atrás.

En otras palabras, la respuesta impulsiva $h[n]$ de la cascada es idéntica a la del sistema de diferencias hacia atrás: la conexión en cascada de los sistemas de la Fig. 3.40(a) y Fig. 3.40(b) puede reemplazarse por un sistema de diferencias hacia atrás, como se muestra en la Fig. 3.40(c). \square

El ejemplo muestra que el sistema no causal de las diferencias hacia adelante en las Fig. 3.40(a) y (b) se convirtió en un sistema causal al conectarlo en cascada con un retardo. En general, cualquier sistema FIR no causal se puede convertir en un sistema causal conectándolo en cascada con un retardo suficientemente largo. Este proceso se suele denominar *causalización* de un sistema no causal.

3.5.5. Sistema inverso

Los sistemas inversos son útiles en aquellas situaciones donde sea necesario “compensar” los efectos causados por un sistema lineal. Si la respuesta impulsiva de un sistema lineal e invariante en el tiempo es $h[n]$, entonces su sistema inverso, *si existe*, tiene una respuesta impulsiva $h_i[n]$ definida por la relación

$$(h * h_i)[n] = (h_i * h)[n] = \delta[n]. \quad (3.52)$$

En general, es complicado resolver la ecuación (3.52) para encontrar $h_i[n]$ a partir de $h[n]$, salvo en casos muy sencillos, como el que se muestra en el siguiente Ejemplo.

EJEMPLO 3.32. Sistema inverso del acumulador

En la Fig. 3.41 se muestra la conexión en cascada de un acumulador, con respuesta impulsiva $h_a[n] = u[n]$, con un sistema de diferencias hacia atrás, con respuesta impulsiva $h_{at}[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$. La respuesta impulsiva de la cascada es

$$h[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n - 1]) = u[n] - u[n - 1] = \delta[n].$$

Este resultado muestra que la combinación de un acumulador con un sistema diferencias hacia atrás (o viceversa) resulta en un sistema cuya respuesta impulsiva es un impulso. Entonces, la salida del sistema en cascada va a ser igual a la entrada, ya que $x[n] * \delta[n] = x[n]$. En este caso, el sistema diferencias hacia atrás compensa exactamente (o *invierte*) el efecto del acumulador. Se dice entonces que el sistema diferencias hacia atrás es el *sistema inverso* del sistema acumulador. Este ejemplo permite interpretar, en función de sistemas, las relaciones entre el impulso y el escalón unitario de las ecuaciones (3.3) y (3.4). \square

Cuando se calcula un sistema inverso es habitual que se pida que sea *causal* y *estable*. En el ejemplo anterior, el sistema inverso $h_i[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$ satisface estos requisitos. Por la propiedad conmutativa de la convolución, un sistema con respuesta impulsiva $h[n] =$

$\delta[n] - \delta[n - 1]$ tendría un sistema inverso cuya respuesta impulsiva es $h_i[n] = u[n]$; en este caso, el sistema inverso es causal pero no estable, lo que dificulta su implementación.

En general, el cálculo de un sistema inverso que sea causal y estable no es trivial, y a veces ni siquiera existe. En casos poco complicados, algunas de las herramientas desarrolladas en las próximas secciones de este capítulo serán de utilidad. Sin embargo, el resultado más general se estudiará en el Capítulo 8 con el desarrollo del método de la Transformada \mathcal{Z} , que también permite resolver la mejor aproximación al sistema inverso en caso que éste no exista.

3.5.6. Sistemas con respuesta impulsiva de longitud finita e infinita

Hasta ahora los sistemas lineales e invariantes en el tiempo se han caracterizado por su respuesta impulsiva $h[n]$. Sin embargo, también resulta conveniente subdividir la clase de sistemas lineales e invariantes en el tiempo en dos tipos: aquellos cuya respuesta impulsiva es idénticamente nula después de un cierto número de muestras (el número de muestras distintas de cero es una cantidad finita), y aquellos otros cuya respuesta impulsiva está formado por un número infinito de muestras no nulas. El primer grupo se denominan sistemas FIR (por las siglas en inglés de *finite impulse response*) y los segundos se conocen como sistemas IIR (por *infinite impulse response*).

Como los sistemas FIR tienen una respuesta impulsiva que es cero fuera de cierto intervalo temporal, es decir

$$h[n] = 0, \quad \text{si } n < -M_1 \text{ o } n > M_2,$$

la ecuación de la convolución puede escribirse

$$y[n] = \sum_{m=-M_1}^{M_2} h[m]x[n-m].$$

Esta expresión muestra que la salida en cualquier instante de tiempo es una suma ponderada de un conjunto finito de valores de la entrada, $x[n + M_1], x[n + M_1 - 1], \dots, x[n], x[n - 1], \dots, x[n - M_2]$. En otras palabras el sistema “pesa” los más recientes M_2 valores pasados y M_1 valores futuros de la entrada $x[n]$ por el valor de la respuesta impulsiva $h[m]$, $m = -M_1, \dots, M_2$, y los suma. Es como si el sistema viese la entrada a través de una especie de “ventana temporal” que sólo muestra los más recientes M_2 valores pasados y M_1 valores futuros de la entrada, despreciando u “olvidando” el resto de los valores. Se dice que un sistema FIR tiene *memoria finita*, en este caso de $M_1 + M_2 + 1$ muestras. Los sistemas retardador ideal, el promediador, y los sistemas de diferencias hacia atrás y hacia adelante de los Ejemplos 3.3, 3.4 y 3.15, respectivamente, son sistemas FIR.

En contraste, un sistema lineal e invariante en el tiempo de tipo IIR tiene una respuesta impulsiva que está compuesta por un número infinito de muestras no nulas. En este caso la ecuación de convolución es

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

donde se ha supuesto que el sistema es causal, como se verá en la Sección 3.5.3.1, aunque esta distinción no es imprescindible. La salida del sistema es una combinación lineal de los

valores de la entrada $x[n]$, $x[n - 1]$, ... pesadas por los valores de la respuesta impulsiva $h[m]$. Como esta suma ponderada tiene en cuenta todas las muestras pasadas de la entrada, se dice que el sistema tiene memoria infinita. El acumulador y el sistema con respuesta impulsiva $h[n] = a^n u[n]$ de los Ejemplos 3.7 y 3.30, respectivamente, son sistemas IIR.

3.6. Sistemas de tiempo discreto descriptos por ecuaciones a diferencia

Hasta ahora se han estudiado sistemas lineales e invariantes en el tiempo que están caracterizados por su respuesta impulsiva $h[n]$, la que permite calcular la salida $y[n]$ del sistema ante cualquier entrada $x[n]$ aplicando la suma de convolución

$$y[n] = \sum_m h[m]x[n - m] = \sum_m h[m - n]x[m].$$

Se ha demostrado en la Sección 3.4.2 que cualquier sistema discreto lineal e invariante en el tiempo queda caracterizado por esta relación entrada-salida. Además, esta expresión sugiere una manera de realizar o implementar tal sistema. En el caso de un sistema FIR la realización involucra sumas, productos, y un número finito de lugares de memoria. Por lo tanto, un sistema FIR se puede realizar directamente implementando una estructura de cálculo que “copie” la estructura de la suma de convolución.

En un sistema IIR, en cambio, la implementación práctica de la suma de convolución es imposible, porque se requeriría un número infinito de lugares de memoria, de sumas, y de productos. Surge el interrogante de si es posible realizar sistemas IIR de alguna forma que no necesite la aplicación de la suma de convolución. Afortunadamente, la respuesta es afirmativa, y existe una manera práctica y eficiente de realizar una familia de sistemas IIR, como se demostrará en esta sección. Dentro de la clase general de sistemas IIR, esta familia de sistemas discretos se describe de manera más conveniente utilizando *ecuaciones a diferencias*. Esta familia o subclase de sistemas IIR es muy útil en gran cantidad de aplicaciones incluyendo la implementación de filtros digitales y el modelado de fenómenos y sistemas físicos.

3.6.1. Sistemas de tiempo discreto recursivos y no recursivos

Como se ha indicado más arriba, la ecuación de la suma de convolución expresa la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo como función sólo de la señal de entrada. Sin embargo, este no necesita ser el caso: hay muchos sistemas en los que es necesario o deseable expresar su salida no sólo en función de los valores actuales y pasados de la entrada, sino también de valores disponibles de la salida actual o calculada previamente, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.33. Promediador acumulativo

El promedio acumulado de una señal $x[n]$ se define como

$$y[n] = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n x[m], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.53)$$

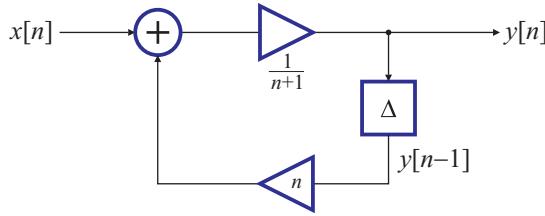


Fig. 3.42. Diagrama bloque de un sistema promediador acumulativo recursivo.

expresión que indica que, para cada valor de n , la salida es el promedio de las $n+1$ muestras pasadas de la entrada. La ecuación (3.53) parece implicar que el cálculo de $y[n]$ necesita el almacenamiento de todas las muestras $x[m]$ para $0 \leq m \leq n$. Como n es creciente, aparentemente se necesitaría una memoria que creciese en el tiempo.

La intuición sugiere que la salida $y[n]$ puede calcularse de manera más eficiente utilizando el valor previo $y[n - 1]$. Reescribiendo (3.53) como

$$(n + 1) y[n] = \sum_{m=0}^{n-1} x[m] + x[n]$$

se nota que

$$\sum_{m=0}^{n-1} x[m] = n y[n - 1],$$

y entonces

$$(n + 1) y[n] = n y[n - 1] + x[n],$$

que puede escribirse

$$y[n] = \frac{n}{n + 1} y[n - 1] + \frac{1}{n + 1} x[n]. \quad (3.54)$$

Esta expresión muestra que el promedio acumulado $y[n]$ puede calcularse *recursivamente* multiplicando el valor pasado de la salida por $n/(n + 1)$, multiplicando la entrada $x[n]$ por $1/(n + 1)$, y sumando los dos productos. Por lo tanto, el cálculo de $y[n]$ utilizando la expresión (3.54) necesita dos multiplicaciones, una suma, y un lugar de memoria, como se representa en la Fig. 3.42. \square

El anterior es un ejemplo de un sistema *recursivo*. En general, un sistema *recursivo* es aquel cuya salida $y[n]$ en el instante n depende de cualquier número $y[n - 1], y[n - 2], \dots$ de valores pasados de la salida.

Para calcular la salida del sistema recursivo (3.54) se comienza con $n = 0$ y se avanza muestra a muestra en el tiempo. Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0], \\ y[1] &= \frac{1}{2}y[0] + x[1], \\ y[2] &= \frac{1}{3}y[1] + x[2] \\ &\vdots \end{aligned}$$

etcétera. Si uno se cansa de calcular de esta manera y quiere pasar el cálculo a otra persona en un instante de tiempo n_0 , la única información que necesita la persona que continúe

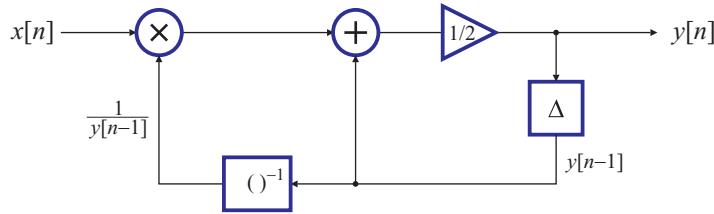


Fig. 3.43. Diagrama bloque del sistema para el cálculo de la raíz cuadrada.

el cálculo es el valor previo de la salida $y[n_0 - 1]$, y los nuevos valores de las muestras de entrada $x[n_0], x[n_0 + 1]$, etc. Entonces el sucesor comienza con

$$y[n_0] = \frac{n_0}{n_0 + 1}y[n_0 - 1] + \frac{1}{n_0 + 1}x[n_0]$$

y continúa el cálculo para valores crecientes de n , $n \geq n_0$, hasta un instante de tiempo n_1 donde se cansa y le pasa el trabajo de cálculo a una tercera persona con la información de $y[n_1 - 1]$.

En otras palabras, para calcular la respuesta $y[n]$ (en el caso del ejemplo, el promedio acumulativo) del sistema (3.54) ante una señal de entrada $x[n]$ aplicada en $n = n_0$, sólo se necesita conocer el valor $y[n_0 - 1]$ y las muestras de la entrada para $n \geq n_0$. El término $y[n_0 - 1]$ se denomina la *condición inicial* del sistema (3.54), y contiene toda la información esencial que es necesaria para determinar la respuesta del sistema ante la entrada $x[n]$ para cualquier $n \geq n_0$, independientemente de lo que haya ocurrido en el pasado.

El ejemplo siguiente muestra el empleo de un sistema recursivo (en este caso no lineal) para calcular la raíz cuadrada de un número.

EJEMPLO 3.34. Cálculo de la raíz cuadrada utilizando un sistema recursivo

Muchas calculadoras y algoritmos calculan la raíz cuadrada de un número utilizando el procedimiento iterativo

$$s_n = \frac{1}{2} \left(s_{n-1} + \frac{a}{s_{n-1}} \right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

donde s_{-1} es una estimación inicial de \sqrt{a} . Cuando la iteración converge, $s_n \approx s_{n-1}$ y entonces $s_n \approx \sqrt{a}$. Este algoritmo se puede implementar mediante el sistema recursivo

$$y[n] = \frac{1}{2} \left(y[n-1] + \frac{x[n]}{y[n-1]} \right) \quad (3.55)$$

representado por el diagrama bloque de la Fig. 3.43. Si este sistema se excita con un escalón de amplitud a , es decir, $x[n] = au[n]$, y se utiliza como condición inicial $y[-1]$ una estimación de \sqrt{a} , la respuesta del sistema tenderá a \sqrt{a} a medida que n crece. Por ejemplo, si $a = 2$ e $y[-1] = 1$, se encuentra que

n	0	1	2	3	4	...
$y[n]$	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{665857}{470832}$	$\frac{886731088897}{627013566048}$...
	$\approx 1,5000$	$\approx 1,41667$	$\approx 1,41422$	$\approx 1,41421$	$\approx 1,41421$...

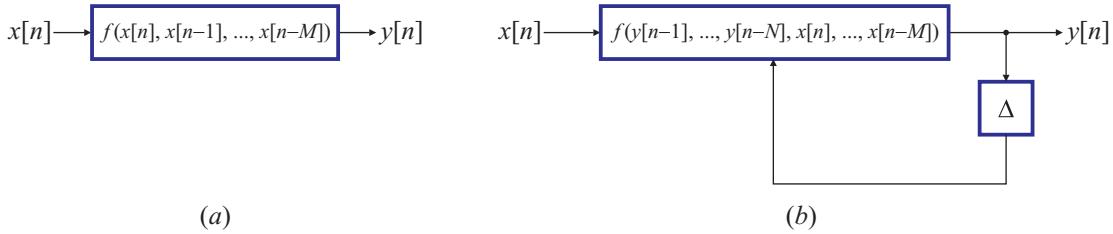


Fig. 3.44. Esquemas de sistemas realizable y causales: no recursivo (a) y recursivo (b).

que converge rápidamente al valor $\sqrt{2} \approx 1,4142135623730950488\dots$. Para calcular $\sqrt{5}$, basta hacer $a = 5$, y eligiendo $y[-1] = 3/2$ se encuentra que

n	0	1	2	3	4	\dots
$y[n]$	$\frac{29}{12}$ $\approx 2,41667$	$\frac{1561}{696}$ $\approx 2,24282$	$\frac{4858801}{2172912}$ $\approx 2,23608$	$\frac{47215679956321}{21115493997024}$ $\approx 2,23607$	$\frac{4458640867429515527072137921}{1993964813366204948047977408}$ $\approx 2,23607$	\dots

que converge al valor $\sqrt{5} \approx 2,2360679774997896964\dots$. \square

En estos ejemplos se han presentado dos sistemas recursivos donde la salida $y[n]$ depende del valor previo de la salida $y[n - 1]$ y del valor $x[n]$ de la entrada actual. Ambos sistemas son causales. En general, se pueden formular sistemas recursivos causales más complejos en los cuales la salida $y[n]$ es función de varios valores pasados de la salida, y del valor actual y pasados de la entrada. El sistema debe tener un número finito de retardos, es decir, debe necesitar un número finito de lugares de memoria para que pueda ser implementado de manera práctica. Entonces la salida de un sistema recursivo causal y prácticamente realizable debe poder expresarse en general como

$$y[n] = f(y[n - 1], y[n - 2], \dots, y[n - N], x[n], x[n - 1], \dots, x[n - M]), \quad (3.56)$$

donde $f(\cdot)$ indica una determinada función de sus argumentos. Esta es una ecuación recursiva que especifica un procedimiento para calcular la salida del sistema en función de valores pasados de la salida, y del valor actual y pasados de la entrada.

Por el contrario, si $y[n]$ sólo depende de valores actuales y pasados de la entrada (pero no de la salida) se puede escribir

$$y[n] = f(x[n], x[n - 1], \dots, x[n - M]). \quad (3.57)$$

Este sistema es *no recursivo*. Los sistemas FIR causales descriptos en la sección anterior en términos de la suma de convolución son sistemas de la forma (3.57).

La diferencia básica entre los sistemas recursivos y no recursivos se representa en la Fig. 3.44: es el lazo de realimentación que inyecta la salida del sistema en el sistema recursivo. Este lazo contiene un retardo Δ (en realidad, puede haber más de uno) que es crucial para asegurar que el sistema es realizable. Si no estuviese, la salida $y[n]$ debería calcularse en función de la misma $y[n]$, que no es posible en los sistemas de tiempo discreto. (Si el elemento de retardo está ausente, se dice que el sistema contiene un *lazo algebraico* que puede hacer que el sistema no tenga solución).

La presencia del lazo de realimentación, es decir la naturaleza recursiva de (3.56) muestra otra diferencia importante entre los sistemas recursivos y no recursivos. Para calcular la salida $y[n_0]$ de un sistema recursivo excitado por una entrada $x[n]$ en un tiempo $n = 0$ se deben conocer todos los valores previos $y[n_0 - 1], y[n_0 - 2], \dots, y[n_0 - N]$. En cambio, en un sistema no recursivo no hace falta conocer los valores pasados de la salida. En otras palabras, la salida de un sistema recursivo debe calcularse “en orden”: $y[0], y[1], \dots$, mientras que la salida de un sistema no recursivo puede calcularse en cualquier orden: $y[200], y[15], y[3], y[300]$, etc.

3.7. Ecuaciones a diferencia lineales con coeficientes constantes

Una subclase importante de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo consiste en aquellos sistemas en los cuales la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ satisfacen una *ecuación lineal a diferencias con coeficientes constantes* de orden N de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (3.58)$$

Esta ecuación establece una relación entre la salida actual $y[n]$ y N valores pasados de la salida: $y[n-1], y[n-2], \dots, y[n-N]$, y la entrada actual $x[n]$ y M valores pasados de la entrada: $x[n-1], x[n-2], \dots, x[n-M]$. Se dice que el sistema tiene *orden N*, que es el número de muestras retrasadas de la salida que intervienen en la ecuación. Contrariamente a lo que sucede en el caso de sistemas continuos, en los cuales $M \leq N$, para el caso de los sistemas discretos no será necesario imponer tal restricción.

Las propiedades descriptas en la Sección 3.5 y algunas de las técnicas de análisis introducidas allí pueden utilizarse para encontrar representaciones en ecuaciones a diferencias de algunos de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo estudiados previamente.

EJEMPLO 3.35. Representación del acumulador con ecuaciones a diferencias

Un ejemplo de la clase de ecuaciones a diferencias lineales con coeficientes constantes es el sistema acumulador definido como

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=-\infty}^n x[m] \\ &= x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + \dots \end{aligned} \quad (3.59)$$

Para mostrar que la entrada y la salida satisfacen una ecuación a diferencias de la forma (3.58), se observa que la salida en el instante $n-1$ está dada por

$$\begin{aligned} y[n-1] &= \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m] \\ &= x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4] + \dots \end{aligned} \quad (3.60)$$

Separando el término correspondiente a $x[n]$, se puede escribir (3.59) como

$$y[n] = x[n] + \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m]. \quad (3.61)$$

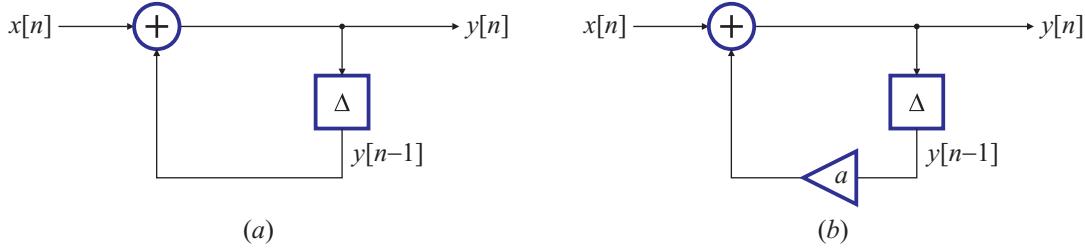


Fig. 3.45. Diagrama bloque de una ecuación a diferencias recursiva para el acumulador $y[n] = x[n] + y[n - 1]$ (a) y para el sistema $y[n] = x[n] + ay[n - 1]$ (b).

Reemplazando (3.60) en (3.61) se encuentra que

$$y[n] = x[n] + y[n - 1], \quad (3.62)$$

de donde se puede obtener la forma deseada de la ecuación a diferencias (3.58) agrupando todos los términos correspondientes a la entrada y la salida en lados opuestos de la ecuación:

$$y[n] - y[n - 1] = x[n]. \quad (3.63)$$

Esta expresión muestra que, además de la definición (3.59), el sistema acumulador puede escribirse como una ecuación lineal a diferencias con coeficientes constantes de la forma (3.58) con $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $M = 0$, $b_0 = 1$. \square

La ecuación a diferencias en la forma (3.62) permite interpretar cómo se puede “realizar” o “implementar” el sistema acumulador. De acuerdo con la ecuación (3.62), para cada valor de n , al valor de la muestra actual de la entrada $x[n]$ se le suma el valor de la salida anterior $y[n - 1]$, que es el valor previo de la suma acumulada. Esta interpretación del acumulador se representa en la forma del diagrama bloque de la Fig. 3.45(a), donde Δ representa un retraso de una muestra, y “físicamente” puede asociarse a un lugar de memoria donde se almacena el valor pasado de la salida.

La ecuación (3.62) y el diagrama bloque de la Fig. 3.45(a) se denominan la *representación recursiva* del sistema, ya que cada valor de la salida se calcula utilizando valores de la sucesión de salida calculados previamente.

El ejemplo siguiente muestra la forma de encontrar la ecuación a diferencias de un sistema simple, con respuesta impulsiva $h[n] = a^n u[n]$.

EJEMPLO 3.36. Ecuación a diferencias para el sistema con respuesta impulsiva $h[n] = a^n u[n]$
Para encontrar una ecuación a diferencias equivalente cuya respuesta impulsiva sea

$$h[n] = a^n u[n],$$

es conveniente especificar una entrada genérica $x[n]$ y calcular la sucesión de salida $y[n]$ a partir de la convolución

$$y[n] = (h * x)[n].$$

Desarrollando algunos términos se tiene que

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-m] \\ &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + h[3]x[n-3] + \dots \\ &= x[n] + ax[n-1] + a^2x[n-2] + a^3x[n-3] + \dots \end{aligned} \quad (3.64)$$

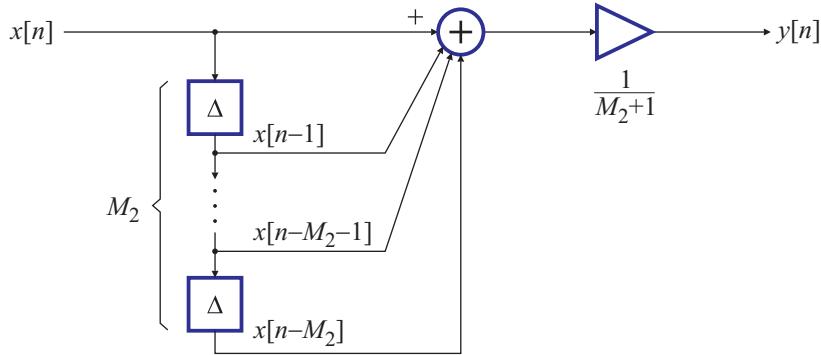


Fig. 3.46. Diagrama bloque de un promediador no recursivo.

Para encontrar la ecuación a diferencias, conviene calcular la salida también en una muestra anterior:

$$\begin{aligned} y[n-1] &= \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-1-m] \\ &= h[0]x[n-1] + h[1]x[n-2] + h[2]x[n-3] + h[3]x[n-4] + \dots \\ &= x[n-1] + ax[n-2] + a^2x[n-3] + a^3x[n-4] + \dots \end{aligned} \quad (3.65)$$

Si se comparan (3.64) y (3.65) se observa que

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + ax[n-1] + a^2x[n-2] + a^3x[n-3] + \dots \\ &= x[n] + a\underbrace{(x[n-1] + ax[n-2] + a^2x[n-3] + \dots)}_{y[n-1]} \end{aligned}$$

y entonces,

$$y[n] = x[n] + ay[n-1], \quad (3.66)$$

que puede escribirse en la forma de ecuación a diferencias como

$$y[n] - ay[n-1] = x[n],$$

que tiene la forma de la ecuación (3.58) con $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -a$, $M = 0$, $b_0 = 1$. La representación en diagrama bloque de la ecuación (3.66) se muestra en la Fig. 3.45(b), y es muy similar a la del acumulador. Más adelante, el Ejemplo 3.38 y los desarrollos de la Sección 3.7.2 mostrarán que esta ecuación a diferencias, con condiciones iniciales nulas, efectivamente tiene la respuesta impulsiva $h[n] = a^n u[n]$. \square

La representación de un sistema utilizando ecuaciones a diferencia no es única, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.37. Representación recursiva del promediador causal

El sistema promediador, estudiado en el Ejemplo 3.4 es causal si $M_1 = 0$. En este caso, de (3.48) se encuentra que la respuesta impulsiva está dada por

$$h[n] = \frac{1}{M_2+1} (u[n] - u[n - (M_2+1)]) = \begin{cases} 1/(M_2+1), & 0 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

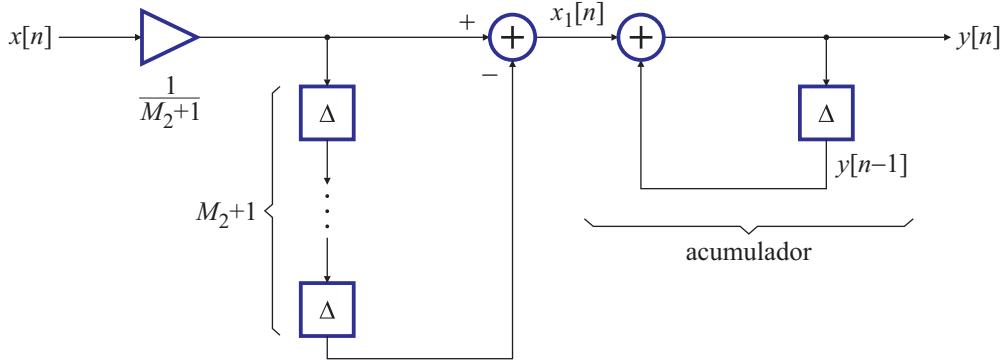


Fig. 3.47. Diagrama bloque de un promediador recursivo.

de donde resulta que

$$\begin{aligned}
 y[n] &= (x * h)[n] \\
 &= \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{m=0}^{M_2} x[n - m] \\
 &= \frac{1}{M_2 + 1} (x[n] + x[n - 1] + \dots + x[n - M_2])
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

que es un caso especial de la ecuación (3.58) con $N = 0$, $a_0 = 1$, $M = M_2$, $b_k = 1/(M_2 + 1)$ para $0 \leq k \leq M_2$. Esta ecuación se representa en forma de diagrama bloque en la Fig. 3.46.

La respuesta impulsiva también puede escribirse como

$$h[n] = \frac{1}{M_2 + 1} (\delta[n] - \delta[n - (M_2 + 1)]) * u[n],$$

que sugiere que el promediador causal puede pensarse como la conexión en cascada de dos sistemas, uno con respuesta impulsiva

$$h_1[n] = \frac{1}{M_2 + 1} (\delta[n] - \delta[n - (M_2 + 1)]),$$

y otro con respuesta impulsiva

$$h_2[n] = u[n],$$

de manera que : $h[n] = (h_1 * h_2)[n]$. De acuerdo con el (3.49), el sistema con respuesta impulsiva $h_2[n]$ es un acumulador, y entonces el promediador causal también puede representarse como el diagrama bloque que se muestra en la Fig. 3.47. Para calcular la ecuación a diferencias vinculada a este diagrama bloque, se observa que la salida del primer sistema puede escribirse como

$$x_1[n] = \frac{1}{M_2 + 1} (x[n] - x[n - (M_2 - 1)]),$$

mientras que, de acuerdo con el Ejemplo 3.35, el sistema acumulador satisface la ecuación a diferencias

$$y[n] - y[n - 1] = x_1[n],$$

de manera que

$$y[n] - y[n - 1] = \frac{1}{M_2 + 1} (x[n] - x[n - (M_2 + 1)]). \tag{3.68}$$

Esta es una ecuación a diferencias con la forma de la ecuación (3.58) con $N = 1$ $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $M = M_2 + 1$, $b_0 = 1/(M_2 + 1)$, $b_{M_2+1} = -1/(M_2 + 1)$, y $b_k = 0$ para $1 \leq k \leq M_2$. \square

Aunque “en el papel” la ecuación a diferencias no recursiva (3.67)

$$y[n] = \frac{1}{M_2 + 1} (x[n] + x[n - 1] + \cdots + x[n - M_2])$$

y la ecuación a diferencias recursiva (3.68)

$$y[n] - y[n - 1] = \frac{1}{M_2 + 1} (x[n] - x[n - (M_2 + 1)])$$

son dos maneras totalmente equivalentes de implementar el mismo sistema (el promediador causal), en la práctica aparecen algunas diferencias:

- La forma no recursiva requiere “recordar” M_2 valores de la entrada, mientras que la forma recursiva necesita acordarse de $M_2 + 1$ valores de la entrada, y un valor de la salida. En otras palabras, mientras que en la implementación no recursiva se necesitan M_2 lugares de memoria, en la recursiva se necesitan $M_2 + 2$. Esta diferencia se puede notar fácilmente en los diagramas bloques de las Figs. 3.46 y 3.47, respectivamente: basta con contar los bloques indicados con “ Δ ”. En la actualidad esta no es una diferencia significativa, porque la memoria es barata.
- Para calcular cada muestra de salida, en la forma no recursiva se deben sumar M_2 muestras de la entrada y se debe hacer una multiplicación mientras que en la forma recursiva sólo se deben hacer dos restas y una multiplicación: es decir $M_2 + 1$ operaciones contra 3 operaciones. Esta diferencia puede ser muy importante en las implementaciones en tiempo real: por ejemplo, en un promediador de 100 muestras, en el lapso de tiempo que transcurre entre dos muestras se deben realizar 101 operaciones en la implementación no recursiva, mientras que sólo se requieren 3 en la implementación recursiva. En otras palabras, en la implementación recursiva puede utilizarse un procesador más lento (o con un reloj de menor velocidad), que seguramente consume menos energía, etc.

Desde el punto de vista teórico la resolución del problema consiste en encontrar una ecuación a diferencias que satisfaga ciertos requerimientos, pero desde el punto de vista práctico la ecuación a diferencias es sólo el punto de partida del diseño. La distintas formas de implementar un sistema, el orden y la forma de las operaciones, el formato numérico empleado para el tratamiento de datos son consideraciones muy importantes al momento de hacer que un determinado algoritmo pueda ser ejecutado en tiempo real en un procesador.

En el Ejemplo 3.37 se mostraron dos representaciones diferentes del mismo sistema: es decir, dos ecuaciones a diferencias cuyo comportamiento entrada-salida es idéntico. En el Capítulo 12 se demostrará que existe un número ilimitado de ecuaciones a diferencias que pueden utilizarse para representar el mismo sistema discreto lineal e invariante en el tiempo. Como se mencionó más arriba, si bien “en el papel” son todas equivalentes, al ejecutarlas en hardware dedicado, o con diferentes formatos numéricos se pueden obtener comportamientos muy diferentes.

3.7.1. Cálculo de las soluciones de las ecuaciones a diferencias

El cálculo de las soluciones de las ecuaciones a diferencias con coeficientes constantes puede resolverse de manera “clásica”, como se estudia en el Apéndice E, o utilizando

herramientas como la Transformada \mathcal{Z} que se estudiará en el Capítulo 6. Cualquiera de estos casos permite, dado un conjunto de *condiciones iniciales* y una función discreta, la entrada $x[n]$, calcular la función discreta que especifica completamente la salida $y[n]$.

Sin embargo, para los sistemas discretos existe otra manera de calcular la salida $y[n]$ muestra a muestra, utilizando el mecanismo de recursión. Si se especifica un conjunto de condiciones auxiliares, es decir, un conjunto de valores de $y[n]$ para $n = -1, -2, \dots, -N$, los restantes valores de $y[n]$ pueden calcularse reescribiendo la ecuación (3.58) como una fórmula recursiva, es decir

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k]. \quad (3.69)$$

Si se especifica la entrada $x[n]$ junto con un conjunto de valores auxiliares, por ejemplo $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$, entonces $y[0]$ se puede calcular aplicando (3.69). Este conjunto de valores son las condiciones iniciales del sistema, que resumen su historia pasada, y que permiten calcular la salida actual y futura. Con $y[0], y[-1], y[-2], \dots, y[-N+1]$ disponibles, se puede calcular $y[1]$, y continuar de esta forma para calcular todos las muestras de la salida que se deseen. Cuando se utiliza este procedimiento, se dice que $y[n]$ se calcula *por recursión o recursivamente*: el cálculo de la salida involucra no sólo los valores de la sucesión de entrada $x[n]$, sino también los valores previos de la sucesión de salida $y[n]$.

Para calcular los valores de $y[n]$ para $n < -N$ (nuevamente, suponiendo que los valores auxiliares $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$ son conocidos) se puede reordenar la ecuación (3.58) como

$$y[n-N] = -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_N} x[n-k], \quad (3.70)$$

a partir de la cual se pueden calcular recursivamente los valores $y[-N-1], y[-N-2]$, etc. El siguiente ejemplo muestra este procedimiento.

EJEMPLO 3.38. Cálculo recursivo de una ecuación a diferencias

La ecuación a diferencias que relaciona la entrada y salida de un sistema es

$$y[n] = ay[n-1] + x[n], \quad (3.71)$$

donde a es una constante real. La salida actual del sistema $y[n]$ se puede calcular en función de la entrada actual $x[n]$ y la salida pasada $y[n-1]$. El sistema se excita con una entrada $x[n]$ supuesta cero para $n < 0$ (entrada *causal*), y se supone que la salida en el instante $n = -1$ previo al cual la entrada deja de ser nula es conocida ($y[-1] = c$). A partir de estos datos, se puede resolver la ecuación (3.71) "muestra a muestra" y calcular una forma cerrada o *explícita* de la salida del sistema (la ecuación (3.71) describe la salida de forma *implícita*). Evaluando los valores sucesivos de $y[n]$ para $n \geq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} y[0] &= ay[-1] + x[0] \\ y[1] &= ay[0] + x[1] = a^2y[-1] + ax[0] + x[1] \\ y[2] &= ay[1] + x[2] = a^3y[-1] + a^2x[0] + ax[1] + x[2] \\ &\vdots \\ y[n] &= ay[n-1] + x[n] \\ &= a^{n+1}y[-1] + a^n x[0] + a^{n-1} x[1] + \cdots + ax[n-1] + x[n] \end{aligned}$$

o, en forma más compacta,

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] + \sum_{k=0}^n a^k x[n-k], \quad n \geq 0. \quad (3.72)$$

Los valores de la salida para $n < 0$ se calculan más fácilmente reescribiendo (3.71) en la forma indicada por (3.70). Despejando $y[n-1]$, se tiene

$$y[n-1] = \frac{1}{a}y[n] - \frac{1}{a}x[n].$$

Repetiendo el procedimiento anterior para los n negativos, y recordando que $x[n] = 0$ para $n < 0$, y que $y[-1] = c$,

$$\begin{aligned} y[-1] &= c, \\ y[-2] &= \frac{1}{a}y[-1] - \frac{1}{a}x[-1] = a^{-1}y[-1], \\ y[-3] &= \frac{1}{a}y[-2] - \frac{1}{a}x[-2] = a^{-2}y[-1], \\ &\vdots \\ y[n] &= a^{n+1}y[-1], \quad n < 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Las expresiones (3.72) y (3.73) pueden combinarse en una única ecuación

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] + \sum_{k=0}^n a^k x[n-k], \quad -\infty < n < \infty, \quad (3.74)$$

donde se sobreentiende que la sumatoria no se efectúa si $n < k = 0$. \square

La respuesta $y[n]$ del sistema dada por (3.74) consta de dos partes. La primera, que contiene al término $y[-1]$ es un resultado de la condición inicial del sistema. La segunda es la respuesta del sistema a la señal de entrada $x[n]$.

Si el sistema está inicialmente en reposo en $n = 0$, entonces su memoria (la salida del retardo) debería ser nula. Entonces $y[-1] = 0$. Se dice entonces que un sistema recursivo está en reposo si sus condiciones iniciales son nulas. Como la memoria del sistema describe, en cierta forma su “estado”, se dice que el sistema está en estado nulo y la salida correspondiente $y_f[n]$ se denomina la *respuesta de estado nulo* o *respuesta forzada*. Para el caso del ejemplo anterior, la respuesta de estado nula o salida fozada del sistema (3.71) es

$$y_f[n] = \sum_{k=0}^n a^k x[n-k], \quad n \geq 0. \quad (3.75)$$

Es interesante notar que (3.75) es una convolución entre la señal de entrada y la respuesta impulsiva

$$h[n] = a^n u[n]. \quad (3.76)$$

También se observa que el sistema descrito por la ecuación a diferencias de primer orden (3.71) es causal, por lo que el límite inferior en la sumatoria de (3.75) es $k = 0$. Además, la condición $y[-1] = 0$ implica que la señal de entrada puede asumirse causal, y por lo tanto el límite superior de la sumatoria es n , ya que $x[n-k] = 0$ cuando $k > n$. En definitiva, el sistema recursivo de primer orden en condiciones de reposo descrito por la

ecuación a diferencias de primer orden (3.71) es un sistema IIR lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva dada por (3.76).

Si el sistema (3.71) no está inicialmente en estado de reposo (es decir, $y[-1] \neq 0$), pero la entrada $x[n] = 0$ para todo n , entonces la salida del sistema se denomina *respuesta de entrada nula o respuesta natural o respuesta libre*, y se nota $y_n[n]$. Para el sistema (3.71) con $x[n] = 0$ para $-\infty < n < \infty$ se tiene que

$$y_n[n] = a^{n+1}y[-1].$$

Un sistema recursivo con condiciones iniciales no nulas no está en reposo ya que produce una salida sin haber sido excitado. La respuesta de entrada nula o natural o libre se debe exclusivamente a la memoria del sistema.

Para sintetizar, la respuesta de entrada nula se obtiene haciendo anulando la señal de entrada ($x[n] \equiv 0$) y por lo tanto es independiente de ella: depende solamente de la naturaleza del sistema y de las condiciones iniciales (su “estado”). Por lo tanto es característica del sistema, de ahí el nombre de respuesta *natural*. Por otro lado, la salida de estado nulo depende de la naturaleza del sistema y de la señal de entrada. Como esta salida es la respuesta cuando el sistema se lo fuerza con una entrada particular, se denomina también salida forzada. En general, la respuesta total del sistema se puede expresar como

$$y[n] = y_n[n] + y_f[n].$$

3.7.2. Linealidad, invariación en el tiempo, causalidad y estabilidad en las ecuaciones a diferencia

En el caso de sistemas representados por ecuaciones a diferencia de orden N mayor que cero, es decir, cuando aparecen muestras pasadas de la señal de salida, la verificación de las propiedades de linealidad, invariación temporal, causalidad y estabilidad entrada-salida requiere ciertas precauciones. En este caso es necesario encontrar una forma que exprese la salida actual sólo en función de la entrada y de las condiciones iniciales, y que no dependa de valores pasados de la salida, como se muestra a continuación.

EJEMPLO 3.39. Forma incorrecta de demostrar propiedades en sistemas recursivos

Para probar la propiedad de linealidad del sistema recursivo caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = x[n] + ay[n - 1], \quad y[-1] = 0,$$

cuyo diagrama bloque se representa en la Fig. 3.45(b), y donde sólo interesa la salida para $n \geq 0$, se supone que $y_1[n]$, $y_2[n]$ son las salidas del sistema ante entradas $x_1[n]$, $x_2[n]$. Es evidente que

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n] + ay_1[n - 1], \\ y_2[n] &= x_2[n] + ay_2[n - 1]. \end{aligned}$$

Para probar que el sistema es lineal debe demostrarse que si $y_3[n]$ es la salida del sistema ante la entrada $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$, resulta que $y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$. A partir de la ecuación a diferencias y de la definición de $x_3[n]$ puede encontrarse que

$$\begin{aligned} y_3[n] &= x_3[n] + ay_3[n - 1] \\ &= \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] + ay_3[n - 1]. \end{aligned}$$

El problema es que no se sabe cuánto vale $y_3[n-1]$! Si se dice que $y_3[n-1] = \alpha y_1[n-1] + \beta y_2[n-1]$, se está usando lo mismo que se quiera probar. Otra alternativa es escribir $y_3[n]$ como función sólo de $y_1[n]$ e $y_2[n]$, explicitando $x_1[n]$ y $x_2[n]$ en función de $y_1[n]$, $y_1[n-1]$ y de $y_2[n]$, $y_2[n-1]$, ya que

$$\begin{aligned}x_1[n] &= y_1[n] - ay_1[n-1], \\x_2[n] &= y_2[n] - ay_2[n-1],\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}y_3[n] &= \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] + ay_3[n-1] \\&= \alpha(y_1[n] - ay_1[n-1]) + \beta(y_2[n] - ay_2[n-1]) + ay_3[n-1] \\&= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] + k + a(-\alpha y_1[n-1] - \beta y_2[n-1] + y_3[n-1]).\end{aligned}$$

Esta expresión *no asegura* que $y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$, porque queda un término remanente dado por

$$a(-\alpha y_1[n-1] - \beta y_2[n-1] + y_3[n-1]).$$

Si efectivamente $y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$, el término entre paréntesis se anula, pero justamente esto es lo que se debe probar. En realidad, lo que prueba es que

$$y_3[n] - ay_3[n-1] = \alpha(y_1[n] + ay_1[n-1]) + \beta(y_2[n] - ay_2[n-1]),$$

pero no la propiedad de linealidad, que era lo que se buscaba. \square

Para evitar este problema se debe trabajar con la expresión en ecuación a diferencias del sistema para eliminar la recursividad, es decir, escribir la muestra actual de la salida $y[n]$ solamente en función de las muestras de la entrada $x[n]$ (actual y pasadas) y las condiciones iniciales, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.40. Demostración de propiedades de un sistema recursivo

El sistema caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] + (-1)^n y[n-1] = x[n],$$

con condición inicial $y[-1] = 0$, se puede escribir como una ecuación recursiva de la forma

$$y[n] = -(-1)^n y[n-1] + x[n] = (-1)^{n+1} y[n-1] + x[n].$$

La forma general de la salida en función sólo de la entrada resulta

$$\begin{aligned}y[0] &= (-1)^{0+1} y[-1] + x[0] = 0 + x[0] = x[0] \\y[1] &= (-1)^{1+1} y[0] + x[1] = x[0] + x[1] \\y[2] &= (-1)^{2+1} y[1] + x[2] = -(x[0] + x[1]) + x[2] \\&\quad -x[0] - x[1] + x[2] \\y[3] &= (-1)^{3+1} y[2] + x[3] = -x[0] - x[1] + x[2] + x[3] \\y[4] &= (-1)^{4+1} y[3] + x[4] = -(-x[0] - x[1] + x[2] + x[3]) + x[4] \\&= x[0] + x[1] - x[2] - x[3] + x[4] \\y[5] &= (-1)^{5+1} y[4] + x[5] = x[0] + x[1] - x[2] - x[3] + x[4] + x[5] \\y[6] &= (-1)^{6+1} y[5] + x[6] = -(x[0] + x[1] - x[2] - x[3] + x[4] + x[5]) + x[6] \\&= -x[0] - x[1] + x[2] + x[3] - x[4] - x[5] + x[6] \\&\vdots\end{aligned}\tag{3.77}$$

En este caso no es sencillo encontrar una forma cerrada para la sucesión de salida $y[n]$ en función de la entrada $x[n]$ (los signos cambian de a dos muestras consecutivas de la entrada por vez), pero tampoco hace falta para demostrar las propiedades. Con un poco de trabajo se puede encontrar que

$$y[n] = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \sum_{r=0}^{(n-1)/2} (-1)^r (x[2r] + x[2r+1]), & \text{si } n \text{ es impar,} \\ x[n] + (-1)^{n/2} \sum_{r=0}^{n/2-1} (-1)^r (x[2r] + x[2r+1]), & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (3.78)$$

Ahora que la salida está expresada sólo en función de los valores actual y pasados de la entrada $x[n]$ se pueden probar las propiedades sin mayores dificultades.

1. **Linealidad:** Si $y_1[n]$ e $y_2[n]$ son las salidas ante entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, respectivamente, la salida ante una entrada $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ es, para $n = 0$,

$$y_3[0] = x_3[0] = ax_1[0] + bx_2[0] = ay_1[0] + by_2[0].$$

De manera similar, para $n = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} y_3[1] &= x_3[0] + x_3[1] = (ax_1[0] + bx_2[0]) + (ax_1[1] + bx_2[1]) \\ &= a(x_1[0] + x_1[1]) + b(x_2[0] + x_2[1]) \\ &= ay_1[1] + by_2[1]. \end{aligned}$$

Para $n = 2$ resulta

$$\begin{aligned} y_3[2] &= -x_3[0] - x_3[1] + x_3[2] \\ &= -(ax_1[0] + bx_2[0]) - (ax_1[1] + bx_2[1]) + (ax_1[2] + bx_2[2]) \\ &= a(-x_1[0] - x_1[1] + x_1[2]) + b(-x_2[0] - x_2[1] + x_2[2]) \\ &= ay_1[2] + by_2[2] \end{aligned}$$

El procedimiento se puede repetir para distintos valores de n , pero es evidente que $y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$, de modo que el sistema es *lineal*.

2. **Causalidad:** Del desarrollo recursivo (3.77) o de la forma general (3.78) se observa que $y[n]$ está en función sólo de $x[i]$, con $0 \leq i \leq n$, es decir que la salida actual sólo depende de valores actuales y pasados de la entrada. Por lo tanto, el sistema es *causal*.
3. **Invariación temporal:** el sistema *no* es invariante en el tiempo por causa del coeficiente $(-1)^n$ que multiplica a $y[n-1]$. Se puede probar con un contraejemplo. Si $x_1[n] = \delta[n]$, la salida $y_1[n]$ es

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	\dots
$y_1[n]$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	\dots

Si $x_2[n] = x_1[n-1] = \delta[n-1]$, la salida $y_2[n]$ es

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	\dots
$y_2[n]$	0	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	\dots

Se observa que $y_2[n] \neq y_1[n-1]$, y por lo tanto el sistema *no* es invariante en el tiempo.

4. **Estabilidad entrada/salida:** Por la forma de la expresión (3.78) parece que el sistema no es estable entrada/salida. La forma más sencilla de comprobarlo es buscando una sucesión acotada que produzca una salida no acotada. Si se elige $x[n]$ variando entre ± 1 , por ejemplo

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	\dots
$x[n]$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	\dots

se encuentra que la salida es

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	\dots
$y[n]$	1	2	-3	-4	5	6	-7	-8	9	\dots

de modo que aunque $|x[n]| \leq 1 = B_x$, $|y[n]| \leq n + 1$, y por lo tanto no existe una cota que asegure que $|y[n]| \leq B_y \forall n$. En consecuencia, el sistema **no** es estable entrada-salida. \square

3.7.2.1. Condiciones iniciales no nulas

Las propiedades de linealidad, invariación en el tiempo y causalidad imponen ciertas restricciones a la respuesta impulsiva para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo descriptos por la suma convolución. Es interesante analizar cómo influyen estas restricciones en los sistemas descriptos por las ecuaciones a diferencias (3.58).

El Ejemplo 3.38 revela algunos aspectos de interés. Para simplificar el análisis, se supondrá que la entrada es un impulso escalado $x[n] = K\delta[n]$, de manera que, según (3.74), la salida será

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] + Ka^n u[n], \quad -\infty < n < \infty. \quad (3.79)$$

A simple vista, parece que:

- El sistema (3.71) **no es lineal**. En un sistema lineal e invariante en el tiempo, si la entrada $x[n]$ es idénticamente nula, la salida $y[n]$ *también debe ser nula*, como se desprende de la propiedad de homogeneidad estudiada en la Sección 3.3.2. Para el caso del sistema (3.71) la entrada se anula eligiendo $K = 0$; sin embargo, la salida $y[n]$ de la ecuación *no* es nula, pues de (3.79) se observa que $y[n] = a^{n+1}y[-1]$.
- El sistema (3.71) **no es invariante en el tiempo**, ya que si la entrada se demora n_0 muestras, $x_1[n] = K\delta[n - n_0]$, es sencillo observar que la salida correspondiente será

$$y_1[n] = a^{n+1}y[-1] + K\delta[n - n_0] \quad (3.80)$$

y evidentemente, $y_1[n] \neq y[n - n_0]$.

- El sistema (3.71) **no es causal**. La salida del sistema en el instante n se calculó iterando la ecuación (3.71) tanto para n positivos como negativos: evidentemente, este es un proceso no causal. La no causalidad también se revela en el análisis de la solución general (3.79): la entrada es un impulso en el origen, pero la salida está definida para valores positivos y *negativos* del índice. En particular, la salida para $n < 0$ se debe al término $y[-1]$.

Pese a estos resultados sorprendentes, un examen detallado muestra que la “falla” de la causalidad, la linealidad y la invariación temporal se debe únicamente a la presencia de una condición inicial $y[-1] \neq 0$. Considerando el sistema (3.71) con condiciones iniciales de reposo ($y[-1] = 0, n < 0$) la salida (3.79) se convierte en

$$y[n] = Ka^n u[n]. \quad (3.81)$$

Entonces:

- Si la entrada es nula ($K = 0$), la salida también se anula: el sistema se comporta como un sistema lineal.
- Si la entrada se retarda n_0 muestras ($x_1[n] = K\delta[n - n_0]$), nuevamente con condiciones iniciales de reposo, la salida es $y_1[n] = Ka^{n-n_0}u[n - n_0] = y[n - n_0]$, lo que implica que el sistema es invariante en el tiempo.
- Como el sistema (con condiciones iniciales nulas) es lineal e invariante en el tiempo, la causalidad puede estudiarse a partir de la respuesta impulsiva. Como $h[n] = a^n u[n]$ y $h[n] = 0$ para $n < 0$ el sistema es causal.

En otras palabras, el suponer que el sistema parte del estado de reposo o, lo que es lo mismo, que sus condiciones iniciales son nulas, hace que la solución del sistema (3.71) cambie de (3.79) a (3.81), con lo cual el sistema se torna lineal, invariante en el tiempo, y causal.

El resultado del Ejemplo 3.38 permite asegurar que si un sistema caracterizado por una ecuación a diferencias lineal con coeficientes constantes es lineal, invariante en el tiempo y causal, tiene una solución única, y las condiciones iniciales compatibles con estas exigencias son las de reposo, es decir, que si la entrada $x[n]$ es nula para todo n menor que algún n_0 , entonces la salida $y[n]$ debe ser nula para todo n menor que n_0 . Esto permite obtener suficientes condiciones iniciales para calcular $y[n]$ para $n \geq n_0$ de forma recursiva utilizando la ecuación (3.69).

En síntesis, para un sistema descripto por una ecuación a diferencias lineal con coeficientes constantes,

- La salida para una entrada dada no está determinada de manera única. Se debe proveer información adicional en función de las condiciones iniciales del sistema o bien especificando determinadas condiciones, como linealidad, causalidad, invariación temporal, etc.
- Si la información auxiliar se provee en la forma de N valores consecutivos de la salida, los valores futuros pueden obtenerse reacomodando la ecuación a diferencias como una relación recursiva que depende de valores crecientes de n ; si se desean calcular los valores previos de la salida, la ecuación a diferencias debe reescribirse como una relación recursiva que dependa de valores decrecientes de n .
- Las propiedades de linealidad, causalidad e invariación temporal dependen de las condiciones auxiliares. El sistema descripto por la ecuación a diferencias es lineal, invariante en el tiempo y causal sólo si las condiciones iniciales son nulas, o en otras palabras, si el sistema estaba inicialmente en reposo.

Si el sistema *no* estaba en reposo o, en otras palabras, las condiciones iniciales no son nulas, se pueden reformular las propiedades de linealidad e invariación temporal para tener en cuenta estas nuevas condiciones.

1. Se dice que un sistema es **lineal** si satisface los siguientes tres requerimientos:

- La respuesta total $y[n]$ es la suma de la respuesta natural o libre $y_n[n]$ (que depende de las condiciones iniciales, y se calcula suponiendo $x[n] \equiv 0$), y la *respuesta de estado nulo, o respuesta forzada* $y_f[n]$ (que es la respuesta del sistema en reposo, i.e. con condiciones iniciales nulas a la entrada $x[n]$). Es decir que

$$y[n] = y_n[n] + y_f[n].$$

- El principio de superposición es aplicable a respuestas de estado nulo o forzadas $y_f[n]$.
 - El principio de superposición es aplicable a las respuestas de entrada nula, naturales o libres del sistema $y_n[n]$.
 - Un sistema que falla en satisfacer alguna de las tres condiciones, es *no lineal* por definición. Obviamente, para un sistema en estado de reposo $y_n[n] = 0$, y entonces basta con la definición de linealidad dada en la Sección 3.3.2.
2. La verificación que un sistema descripto por una ecuación a diferencias (3.69) con condiciones iniciales *no nulas* es **invariante en el tiempo** se basa en el estudio de su respuesta forzada. En el caso de ecuaciones a diferencias con coeficientes constantes, este resultado es trivial. Un sistema caracterizado por ecuaciones a diferencia podría ser variante en el tiempo si los coeficientes a_k y b_k dependieran del índice n (pero entonces la ecuación a diferencias no tendría coeficientes constantes).
3. La **causalidad** del sistema, en cambio, puede verificarse utilizando la respuesta completa, como se muestra en el Ejemplo 3.41. Para el caso de los sistemas caracterizados por ecuaciones a diferencia con coeficientes constantes, la causalidad queda garantizada si la salida en el instante actual depende sólo de valores pasados de la entrada y la salida. En la ecuación recursiva (3.69) esta condición se viola si, por ejemplo, $a_0 = a_1 = \dots = a_q = 0$, ($q < \min\{N, M\}$) con al menos algún $b_i \neq 0$, $i < q$. Una ecuación de este tipo es, por ejemplo

$$y[n - 1] = x[n],$$

donde $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $M = 0$, $b_0 = 1$.

4. La **estabilidad** entrada-salida de los sistemas recursivos con condiciones iniciales *no nulas* queda garantizada si la salida queda acotada para cualquier entrada acotada y cualquier condición inicial acotada, en un intervalo de tiempo que comienza en el instante en que está definida la condición inicial.

Estas consideraciones se estudian en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.41. Demostración de propiedades en sistemas recursivos con condiciones iniciales *no nulas*

Para el sistema recursivo del Ejemplo 3.38, pero con condiciones iniciales *no nulas* ($y[-1] = c \neq 0$), caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = x[n] + ay[n - 1], \quad y[-1] = c, \quad (3.82)$$

donde $x[n] = 0$ para $n < 0$, se desea conocer si el sistema es (i) lineal; (ii) invariante en el tiempo; (iii) causal; (iv) entrada-salida estable.

Para demostrar las propiedades es necesario encontrar una forma cerrada que exprese la salida actual sólo en función de la entrada y de las condiciones iniciales, y que no dependa de valores pasados de la salida. Trabajando por recursión, para $n \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0] + ay[-1] = x[0] + ac, \\ y[1] &= x[1] + ay[0] = x[1] + a(x[0] + ac) = x[1] + ax[0] + a^2c, \\ y[2] &= x[2] + ay[1] = x[2] + a(x[1] + ax[0] + a^2c) = x[2] + ax[1] + a^2x[0] + a^3c. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Para $n < 0$ es conveniente reescribir la ecuación de recursión como

$$y[n-1] = -a^{-1}x[n] + a^{-1}y[n], \quad y[-1] = c,$$

de donde resulta que

$$\begin{aligned} y[-1] &= c \text{ (por hipótesis)} \\ y[-2] &= -a^{-1}x[-1] + a^{-1}y[-1] = 0 + a^{-1}c = ca^{-1} \\ y[-3] &= -a^{-1}x[-2] + a^{-1}y[-2] = 0 + a^{-1}(ca^{-1}) = ca^{-2}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

De las expresiones de (3.83) y (3.84) es sencillo encontrar la forma general

$$y[n] = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x[\ell], \quad (3.85)$$

donde se entiende que la sumatoria no se ejecuta para valores de $n < 0$. En esta respuesta se pueden reconocer la respuesta natural o libre $y_n[n]$, que se obtiene haciendo $x[n] \equiv 0$,

$$y_n[n] = a^{n+1}c, \quad (3.86)$$

y la respuesta de estado nulo o forzada $y_f[n]$, que es la respuesta con condiciones iniciales nulas,

$$y_f[n] = \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x[\ell]. \quad (3.87)$$

Recién a partir de estas expresiones se pueden probar las propiedades.

1. **Linealidad:** Para probar que es lineal, tanto la respuesta natural o libre como la respuesta de estado nulo o forzada deben satisfacer el principio de superposición:

- si $y_{f1}[n]$ es la respuesta forzada ante una entrada $x_1[n]$, que se puede notar como $y_{f1}[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\}$, e $y_{f2}[n]$ la respuesta forzada ante una entrada $x_2[n]$, notado $y_{f2}[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\}$, la respuesta forzada ante una entrada $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ debe ser $\alpha y_{f1}[n] + \beta y_{f2}[n]$. Vale decir, la respuesta $y_{f1}[n]$ ante la entrada $x_1[n]$ es

$$y_{f1}[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\} = \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_1[\ell], \quad n \geq 0,$$

y la respuesta $y_{f2}[n]$ ante la entrada $x_2[n]$ es

$$y_{f2}[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\} = \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_2[\ell], \quad n \geq 0.$$

La respuesta ante una entrada $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ es

$$\begin{aligned} y_{f3}[n] &= \mathcal{S}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}(\alpha x_1[\ell] + \beta x_2[\ell]), \quad n \geq 0 \\ &= \alpha \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_1[\ell] + \beta \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_2[\ell] \end{aligned} \quad (3.88)$$

Si el sistema es lineal, esta respuesta debe ser igual a $y_{f4}[n] = \alpha y_{f1}[n] + \beta y_{f2}[n]$. Operando se encuentra que

$$\begin{aligned} \alpha y_{f1}[n] + \beta y_{f2}[n] &= \alpha \left(\sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_1[\ell] \right) + \beta \left(\sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_2[\ell] \right) \\ &= \alpha \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_1[\ell] + \beta \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_2[\ell] \end{aligned} \quad (3.89)$$

Como (3.88) = (3.89) la respuesta forzada cumple el principio de superposición. En otras palabras, $\mathcal{S}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha y_{f1}[n] + \beta y_{f2}[n]$.

- si $y_{n1}[n]$ es la respuesta natural para una condición inicial $y[-1] = c_1$, e $y_{n2}[n]$ la respuesta natural para una condición inicial $y[-1] = c_2$, la respuesta natural $y_3[n]$ ante una condición inicial $y[-1] = c_3 = \alpha c_1 + \beta c_2$ debe ser $\alpha y_{n1}[n] + \beta y_{n2}[n]$. De acuerdo con (3.86)

$$y_{n1}[n] = a^{n+1}c_1, \quad y_{n2}[n] = a^{n+1}c_2, \quad (3.90)$$

y la salida $y_3[n]$ para la condición inicial $y[-1] = c_3$ es

$$y_{n3}[n] = a^{n+1}c_3 = a^{n+1}(\alpha c_1 + \beta c_2) = \alpha a^{n+1}c_1 + \beta a^{n+1}c_2$$

y según (3.90) se puede observar que

$$y_3[n] = \alpha y_{n1}[n] + \beta y_{n2}[n],$$

de modo que las respuestas naturales también satisfacen el principio de superposición.

- Como tanto la respuesta forzada como la respuesta libre satisfacen el principio de superposición, el sistema (3.82) **es** lineal.

- Invariación temporal:** Para que el sistema sea invariante en el tiempo debe estudiarse la respuesta forzada del sistema. Si se utiliza la respuesta completa, *parece* que el sistema no es causal:

- Si $y_1[n]$ es la salida del sistema ante una entrada $x_1[n]$, se tiene que

$$y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\} = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_1[\ell], \quad n \geq 0. \quad (3.91)$$

La salida $y_2[n]$ ante una entrada $x_2[n] = x_1[n - n_0]$ es

$$y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\} = \mathcal{S}\{x_1[n - n_0]\} = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_1[\ell - n_0], \quad n \geq 0.$$

Haciendo un cambio de variables ($m = \ell - n_0$) se encuentra que

$$\begin{aligned} y_2[n] &= a^{n+1}c + \sum_{m=-n_0}^{n-n_0} a^{n-m-n_0}x_1[m] = a^{n+1}c + a^{n-n_0} \sum_{m=-n_0}^{n-n_0} a^{-m}x_1[m] \\ &= a^{n+1}c + a^{n-n_0} \sum_{m=0}^{n-n_0} a^{-m}x_1[m], \end{aligned} \quad (3.92)$$

donde el último cambio de índice inferior en la sumatoria se debe a que $x_1[n] = 0$ para $n < 0$. Si el sistema es causal, la respuesta $y_2[n]$ ante una entrada $x_2[n] = x_1[n - n_0]$ debe ser $y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\} = \mathcal{S}\{x_1[n - n_0]\} = y_1[n - n_0]$. Calculando entonces la salida $y_1[n - n_0]$ aplicando la ecuación (3.91), (hay que cambiar $n \mapsto n - n_0$ cada vez que aparezca) se tiene que

$$\begin{aligned} y_1[n - n_0] &= a^{(n-n_0)+1}c + \sum_{\ell=0}^{(n-n_0)} a^{(n-n_0)-\ell}x_1[\ell], \quad n \geq 0 \\ &= a^{(n-n_0)+1}c + a^{n-n_0} \sum_{\ell=0}^{n-n_0} a^{-\ell}x_1[\ell]. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Comparando (3.92) con (3.93) se observa que los términos vinculados a la sumatoria, que dependen de la entrada $x_1[n]$, son iguales, mientras que el término que no depende de la entrada en $a^{n+1}c$ en (3.92), y $a^{(n-n_0)+1}c$ en (3.93). Por lo tanto,

$$y_1[n - n_0] \neq \mathcal{S}\{x_1[n - n_0]\},$$

y en consecuencia *parece* que el sistema no es invariante en el tiempo.

- Si el análisis de invariación en el tiempo se realiza utilizando únicamente la respuesta forzada, que resulta de hacer $c = 0$ en (3.92) y (3.93), se verifica trivialmente que el sistema es invariante en el tiempo.

3. **Causalidad:** Un sistema es causal si para cualquier elección de n_0 , el valor de la sucesión de salida en el instante $n = n_0$ depende sólo de los valores de la sucesión de entrada hasta $n = n_0$. Esto implica que si $x_1[n] = x_2[n]$ para $n \leq n_0$, entonces $y_1[n] = y_2[n]$ para $n \leq n_0$. La salida $y_1[n]$ ante la entrada $x_1[n]$ es

$$y_1[n] = \mathcal{S}\{x_1[n]\} = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_1[\ell], \quad n \geq 0,$$

y la salida $y_2[n]$ ante la entrada $x_2[n]$ es

$$y_2[n] = \mathcal{S}\{x_2[n]\} = a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x_2[\ell], \quad n \geq 0.$$

Es evidente que si $x_1[n] = x_2[n]$ para todo $n \leq n_0$, también $y_1[n] = y_2[n]$ para $n \leq n_0$. En consecuencia el sistema es **causal**. Evidentemente, si el sistema es causal con la respuesta completa, también será causal para la respuesta forzada.

4. **Entrada-salida estable:** El sistema es entrada-salida estable si entradas acotadas producen salidas acotadas *sobre un eje de tiempos que comienza en el instante donde se define la condición inicial*. Si la entrada $x[n]$ está acotada por B_x , esto es, $|x[n]| < B_x$ para todo n , la cota de la salida se puede establecer como

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| a^{n+1}c + \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x[\ell] \right| \leq |a^{n+1}c| + \left| \sum_{\ell=0}^n a^{n-\ell}x[\ell] \right| \\ &\leq |a^{n+1}c| + \sum_{\ell=0}^n |a^{n-\ell}x[\ell]| = |a^{n+1}| |c| + \sum_{\ell=0}^n |a^{n-\ell}| |x[\ell]| \\ &\leq |c| |a|^{n+1} + B_x \sum_{\ell=0}^n |a|^{n-\ell} \leq |c| |a|^{n+1} + B_x \frac{1 - |a|^{n+1}}{1 - |a|} \end{aligned}$$

La cota sobre la salida debe ser independiente de n . La importancia de restringir el eje de tiempos se muestra a continuación.

- Si el eje de tiempos es $-\infty < n < \infty$, el sistema no es estable porque $|c| |a|^{n+1}$ no se puede acotar por un número (que no dependa de n): si $|a| > 1$, $|c| |a|^{n+1}$ crece ilimitadamente para $n > 0$, y si $|a| < 1$, $|c| |a|^{n+1}$ crece sin límite pero para $n < 0$. Por lo tanto el sistema no es estable.
- Si el eje de tiempos se restringe al intervalo $n_0 \leq n < \infty$, donde $n_0 = -1$ es el instante donde está definida la condición inicial, la estabilidad sólo depende del valor de $|a|$:
 - Si $|a| > 1$ el término $(1 - |a|^{n+1})/(1 - |a|)$ no se puede hacer independiente de n . Por lo tanto el sistema es inestable.
 - Si $|a| < 1$, entonces $1/(1 - |a|) < (1 - |a|^{n+1})/(1 - |a|)$, de modo que

$$|y[n]| \leq B_x \frac{1 - |a|^{n+1}}{1 - |a|} \leq \frac{B_x}{1 - |a|} = B_y,$$

y en consecuencia el sistema es estable.

Es necesario destacar que la presencia de términos que dependen de la condición inicial $y[-1] = c$ puede hacer parecer que el sistema no es lineal, o invariante en el tiempo. Por ello la verificación de estas propiedades para sistemas que no estén en reposo (condiciones iniciales no nulas) requiere cierto cuidado. \square

La discusión precedente supone que $N \geq 1$ en la ecuación (3.58). Si, en cambio, la ecuación a diferencias tiene orden $N = 0$ no es necesario aplicar la recursión para calcular la sucesión de salida $y[n]$ a partir de la sucesión de entrada $x[n]$, y por lo tanto, no se necesitan condiciones auxiliares. En este caso,

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n - k]. \quad (3.94)$$

Esta ecuación tiene la forma de una convolución, y haciendo $x[n] = \delta[n]$ se observa que la respuesta impulsiva es

$$h[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} \delta[n - k]$$

o bien

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (3.95)$$

La respuesta impulsiva tiene longitud finita, y por lo tanto, el sistema es FIR. En realidad, la salida de cualquier sistema FIR puede calcularse de manera no recursiva utilizando (3.94), donde los coeficientes de la ecuación son las muestras de la respuesta impulsiva (3.95). El sistema promediador del Ejemplo 3.4 con $M_1 = 0$ es un sistema FIR causal. Una característica interesante de este sistema es que la salida también puede calcularse usando un sistema recursivo, como se estudió en el Ejemplo 3.37. En el Capítulo 12 se mostrará que hay muchas maneras posibles de implementar una transformación de señales utilizando ecuaciones a diferencias. La ventaja de un método sobre el otro depende de consideraciones prácticas tales como precisión numérica, almacenamiento de datos, y el número de multiplicaciones y sumas necesarias para calcular cada muestra de la sucesión de salida.

3.7.3. Resumen: cómo probar las propiedades de un sistema

Teniendo en cuenta los contenidos de las Secciones 3.3, 3.4, 3.5 y 3.7, cuando se tiene que probar si un dado sistema es lineal, invariante en el tiempo, causal, estable, conviene seguir los siguientes pasos:

- Detectar si el sistema es **recursivo**, o no.
 - Si *no* es recursivo, seguir adelante.
 - Si *es* recursivo, escribir la salida solamente en función de la entrada, aplicando el método de recursión (Ejemplos 3.41, 3.40), y seguir los lineamientos de la Sección 3.7.2.1.
- Probar si el sistema es **lineal** usando la definición (Sección 3.3.2, Ejemplos 3.7, 3.8).
- Probar si el sistema es **invariante en el tiempo** usando la definición (Sección 3.3.3, Ejemplos 3.11, 3.12).
- Probar si el sistema es **causal**:

- Si el sistema *no es* lineal y/o invariante en el tiempo, utilizar la definición (Sección 3.3.4, Ejemplos 3.11, 3.12).
- Si el sistema *es* lineal e invariante en el tiempo, la causalidad se puede demostrar verificando si la respuesta impulsiva $h[n]$ satisface $h[n] = 0$ para todo $n < 0$ (Sección 3.5.3.1).
- Probar si el sistema es **estable**:
 - Si el sistema *no es* lineal y/o invariante en el tiempo, utilizar la definición (Sección 3.3.5, Ejemplos 3.16, 3.18).
 - Si el sistema *es* lineal e invariante en el tiempo, la causalidad se puede demostrar verificando si la respuesta impulsiva $h[n]$ es absolutamente sumable: $\sum_n |h[n]| < \infty$ (Sección 3.5.3.2) .

3.8. Representación en el dominio frecuencial de señales y sistemas de tiempo discreto

En las secciones previas se han presentado los principales conceptos de la teoría de señales y sistemas de tiempo discreto. Para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, se ha mostrado que la representación de la entrada $x[n]$ como una suma de *impulsos* discretos escalados y retrasados conduce a una representación de la salida como una suma de *respuestas impulsivas* escaladas y retrasadas. Como sucede con las señales de tiempo continuo, las señales discretas se pueden representar de varias maneras diferentes. En particular, las sucesiones sinusoidales y exponenciales complejas tienen un papel muy importante en la representación de señales de tiempo discreto porque son *autofunciones* de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, lo que significa que la respuesta ante una entrada exponencial compleja es otra exponencial compleja de la misma frecuencia, pero escalada y desfasada, y estos cambios son causados por el sistema. Esta propiedad fundamental de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo hace que la representación en función de sinusoides o exponenciales complejas (es decir, una representación de tipo Fourier) sea muy útil en la teoría de sistemas lineales.

3.8.1. Respuesta en frecuencia

En el estudio de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, ya sean de tiempo continuo o de tiempo discreto, una de las entradas más usuales tanto desde el punto de vista teórico como experimental es la señal sinusoidal, $x[n] = A \operatorname{sen}(\omega_0 n + \phi)$. Una señal más sencilla desde el punto de vista analítico, pero estrechamente relacionada con las senoidales, es la exponencial compleja $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $-\infty < n < \infty$. Interesa conocer cuál es la respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo, con respuesta impulsiva $h[n]$, ante una señal de este tipo. De la ecuación (2.62),

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[m-n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{j\omega_0(n-m)} \\ &= e^{j\omega_0 n} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-j\omega_0 m} \right). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Si la suma entre paréntesis converge, se define

$$H(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n h[n]e^{-j\omega n}, \quad (3.97)$$

y entonces la ecuación (3.96) se puede escribir como

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}, \quad (3.98)$$

donde

$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-j\omega_0 m} = H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0}.$$

La expresión (3.97) se denomina la *respuesta en frecuencia* del sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h[n]$. En general, para un valor dado de ω , $H(e^{j\omega})$ es un número complejo y puede representarse en función de su parte real e imaginaria como

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

o en función del módulo y la fase como

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\arg\{H(e^{j\omega})\}}. \quad (3.99)$$

La ecuación (3.96) o la (3.98) se pueden escribir entonces como

$$y[n] = |H(e^{j\omega_0})|e^{j(\omega_0 n + \arg\{H(e^{j\omega})\})}$$

mostrando que el efecto de un sistema lineal e invariante en el tiempo sobre una entrada exponencial compleja es cambiar su amplitud en $|H(e^{j\omega_0})|$ y alterar su fase en $\arg\{H(e^{j\omega})\}$, preservado su frecuencia ω_0 . En otras palabras, la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo excitado con una exponencial compleja de frecuencia ω_0 es otra exponencial compleja de frecuencia ω_0 , pero con amplitud y fase alteradas por el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia evaluada en $\omega = \omega_0$.

3.8.1.1. Existencia de la respuesta en frecuencia

No se profundizará mayormente en las condiciones de la existencia o no de la respuesta en frecuencia, que está definida sólo si la sumatoria (3.96) converge, ya que es un asunto matemático bastante espinoso. Por el momento una condición suficiente para la existencia de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ es que el sistema sea *estable*. Como se estudió en la Sección 3.5.3.2, un sistema lineal e invariante en el tiempo es estable si su respuesta impulsiva es absolutamente sumable, es decir, si $\sum_n |h[n]| < \infty$. Bajo estas condiciones, es sencillo ver que $|H(e^{j\omega})| < \infty$:

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \sum_n h[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_n |h[n]e^{-j\omega n}| = \sum_n |h[n]| < \infty,$$

donde la última desigualdad resulta de suponer que el sistema es estable. Por lo tanto, una condición suficiente para la existencia de la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo es que el mismo sea *estable*.

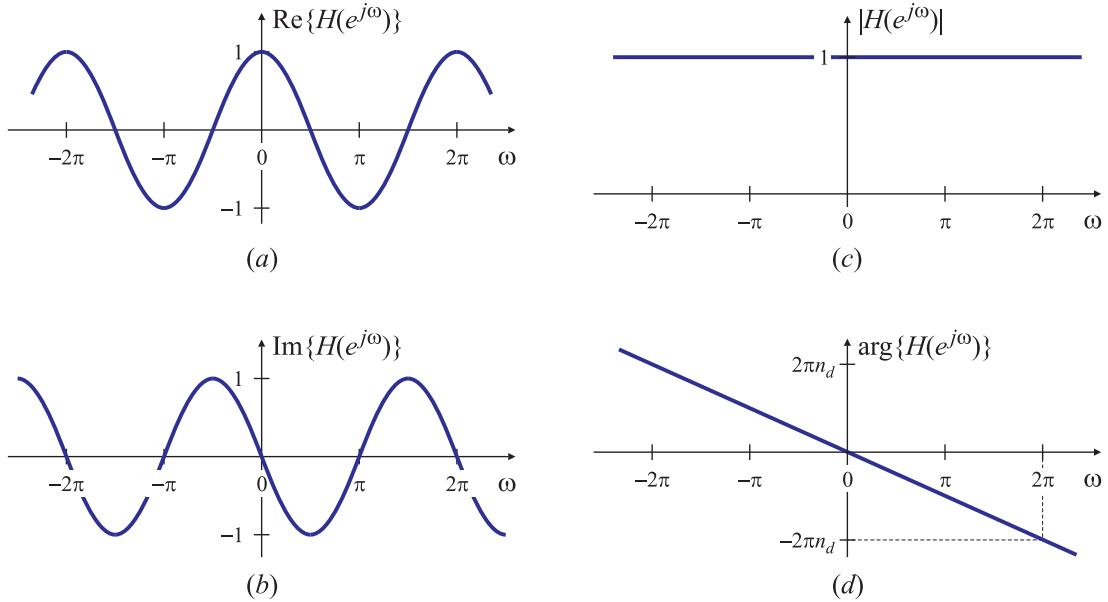


Fig. 3.48. Respuesta en frecuencia del retardador en parte real (a) e imaginaria (b), y en módulo (c) y fase (d).

EJEMPLO 3.42. Respuesta en frecuencia del retardador

Para el sistema retardador representado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = x[n - n_d], \quad (3.100)$$

donde n_d es un entero, si la entrada es $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ la ecuación (3.100) muestra que

$$y[n] = e^{j\omega_0(n-n_d)} = (e^{-j\omega_0 n_d}) e^{j\omega_0 n}. \quad (3.101)$$

La salida es entonces igual a la entrada multiplicada por una cantidad compleja $e^{-j\omega_0 n_d}$ que depende de la frecuencia de la señal de entrada y de la constante n_d . Comparando (3.101) con (3.98) se observa que

$$H(e^{j\omega_0}) = e^{-j\omega_0 n_d},$$

y entonces la respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}, \quad (3.102)$$

para todo ω .

Otra forma de calcular la respuesta en frecuencia es utilizando la definición (3.97). Para ello es necesario conocer la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema (3.100), que ya ha sido calculada [ecuación (3.47)] y es

$$h[n] = \delta[n - n_d].$$

Aplicando la definición (3.97)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n] e^{-j\omega n} = \sum_n \delta[n - n_d] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d},$$

que naturalmente coincide con el resultado anterior (3.102). Aplicando la relación de Euler $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$, la parte real y la parte imaginaria de la respuesta en frecuencia son

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(n_d \omega), \quad H_I(e^{j\omega}) = -\sin(n_d \omega),$$

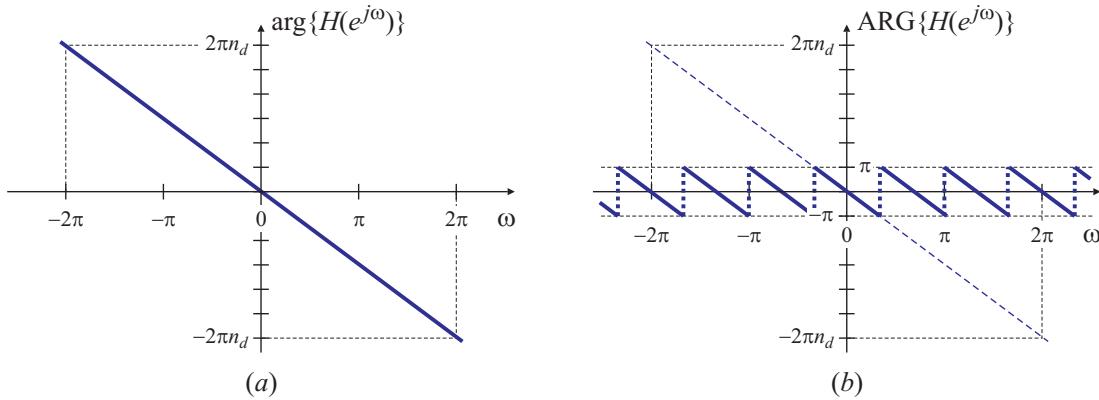


Fig. 3.49. Fase de la frecuencia del retardador $\arg\{H(e^{j\omega})\}$ (a) y $\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\}$ (b).

representadas en la Fig. 3.48(a) y (b), y el módulo y la fase están dados por

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad \arg\{H(e^{j\omega})\} = -n_d\omega,$$

graficados en la Fig. 3.48(c) y (d), respectivamente. \square

Otras consideraciones sobre la existencia de la respuesta en frecuencia se analizan en el Apéndice B.

3.8.1.2. Algunas observaciones sobre la fase de la respuesta en frecuencia

La fase $\arg\{H(e^{j\omega})\}$ no queda determinada de manera única por la expresión (3.99), porque a $\arg\{H(e^{j\omega})\}$ se le puede sumar un múltiplo entero de 2π en cualquier valor de ω sin afectar el resultado de la exponenciación compleja. En algunas ocasiones es necesario referirse al *valor principal* de $\arg\{H(e^{j\omega})\}$, que es el que queda comprendido entre $-\pi$ y π . En estos casos el argumento se notará como $\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\}$; es decir

$$-\pi < \text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} \leq \pi.$$

Cualquier programa de cálculo devuelve siempre el valor del argumento dentro del intervalo $(-\pi, \pi]$; quiere decir que si se calcula la respuesta en frecuencia de un sistema utilizando un programa de cálculo matemático el espectro de fase estará dado por $\text{ARG}\{X(e^{j\omega})\}$. Cuando sea necesario referirse a la función de fase que es una función continua de ω para $0 < \omega < \pi$ se utilizará la notación habitual $\arg\{X(e^{j\omega})\}$.

EJEMPLO 3.43. La fase del retardador

En el ejemplo anterior se encontró que la fase del sistema retardador es

$$\arg\{H(e^{j\omega})\} = -n_d\omega,$$

representada en la Fig. 3.49(a). La respuesta de fase que se obtiene si se utiliza un programa de cálculo matemático, que se basa en alguna variante de la función `atan2(y, x)`, devuelve un ángulo comprendido entre $-\pi$ y π , como se muestra en la Fig. 3.49(b) para el caso de un retardador con

$n_d = 3$. Cuanto mayor sea el retardo tanto mayor será la pendiente de la recta de la Fig. 3.49(a), y también crecerá la cantidad de “saltos” que se producen en la curva de la respuesta de fase de la Fig. 3.49(b). Algunas funciones o comandos, como `unwrap()` en Matlab, tratan de recomponer la curva de fase (es decir, obtener $\arg\{\cdot\}$ a partir de $\text{ARG}\{\cdot\}$), pero como se basan en métodos numéricos no siempre se obtiene una curva idéntica a la de la Fig. 3.49(a). \square

3.8.1.3. Autofunciones para sistemas lineales e invariantes en el tiempo*

En el estudio de vectores y matrices en el álgebra lineal, una expresión del tipo

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \quad (3.103)$$

donde \mathbf{x}, \mathbf{y} son vectores n -dimensionales, y \mathbf{A} es una matriz de $n \times n$ (en símbolos, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$) indica que el vector \mathbf{y} es una *transformación lineal* del vector \mathbf{x} . En particular, existen unos vectores “especiales”, que se indicarán \mathbf{v} , que son tales que el efecto de la matriz \mathbf{A} sobre ellos es escalarlos por un número complejo λ :

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}. \quad (3.104)$$

Para estos vectores “especiales”, denominados *autovectores* o *vectores propios*, el efecto de la matriz \mathbf{A} se reduce al de una multiplicación por un número complejo: un escalado (en general complejo) del vector \mathbf{v} .

Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (tanto de tiempo continuo como de tiempo discreto) comparten la misma estructura matemática de las transformaciones lineales. El análogo de la expresión (3.103) para el caso de sistemas lineales e invariantes en el tiempo es la convolución

$$y[n] = (h * x)[n]. \quad (3.105)$$

La ecuación (3.98) muestra que para el caso particular en que $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, (3.105) toma la forma

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n},$$

que es el equivalente de la ecuación (3.104) para los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo. Esto muestra que $e^{j\omega_0}$ es una *autofunción* del sistema, y $H(e^{j\omega_0})$ es el autovalor asociado. Para los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo el papel de los autovectores lo asumen las exponenciales complejas del tipo $e^{j\omega_0 n}$, que en este caso se denominan *autofunciones* o *funciones propias* y la respuesta en frecuencia, evaluada en la frecuencia ω_0 , actúa como un autovalor. En el caso de los sistemas lineales existen infinitos autovectores (uno para cada frecuencia ω_0) y también infinitos autovalores. La eventual multiplicidad de los mismos, lo mismo que su independencia, dependen de las características del sistema, es decir, de su ecuación a diferencias o respuesta impulsiva.

3.8.2. Características de la respuesta en frecuencia de sistemas discretos

El concepto de la respuesta en frecuencia de sistemas lineales e invariantes en el tiempo es esencialmente la misma para sistemas de tiempo continuo que para sistemas de tiempo discreto. Sin embargo, una diferencia importante es que la respuesta en frecuencia de los sistemas discretos es *siempre* una función periódica de la variable frecuencial ω , con

período 2π . Para probar esta característica basta con sustituir ω por $\omega + 2\pi r$, donde r es un entero, en la definición (3.97):

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi r)}\right) = \sum_n h[n]e^{-j(\omega+2\pi r)n}.$$

Teniendo en cuenta que $e^{\pm j2\pi r} = 1$ si r es entero, se tiene que

$$e^{-j(\omega+2\pi r)n} = e^{-j(2\pi r)n}e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n},$$

y por lo tanto

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi r)}\right) = H(e^{j\omega}) \quad \text{para todo } r \in \mathbb{Z}. \quad (3.106)$$

Es decir que $H(e^{j\omega})$ es 2π -periódica, lo que justifica en parte la notación utilizada para la respuesta en frecuencia: $H(e^{j\omega})$ pone de manifiesto la periodicidad, que quedaría oculta si se la hubiese notado como $H(\omega)$. La razón de esta periodicidad está relacionada directamente con la observación (en la Sección 3.2.1.3) de que la sucesión

$$x_1[n] = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty,$$

es indistinguible de la sucesión

$$x_2[n] = e^{j(\omega+2\pi r)n}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \text{con } r \in \mathbb{Z}.$$

Como estas dos sucesiones son idénticas para todos los valores de n , el sistema debe responder de igual manera para cualquiera de las dos sucesiones de entrada, lo que implica que debe satisfacerse la ecuación (3.106).

Como $H(e^{j\omega})$ es 2π -periódica, y como las frecuencias ω y $\omega + 2\pi r$ son indistinguibles, sólo es necesario especificar $H(e^{j\omega})$ sobre un intervalo de longitud 2π , que puede ser $0 \leq \omega < 2\pi$, o bien $-\pi < \omega \leq \pi$. La periodicidad inherente define la respuesta en frecuencia fuera de este intervalo. Por simplicidad y compatibilidad con la respuesta en frecuencia de sistemas de tiempo continuo es preferible a veces especificar $H(e^{j\omega})$ sobre el intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$. Como se estudió en la Sección 3.2.1.3 y en el Ejemplo 3.2, las “bajas frecuencias” son las cercanas a $\omega = 0$, mientras que las “altas frecuencias” son las vecinas a $\omega = \pm\pi$. Debido a que las sucesiones sinusoidales con frecuencias que difieren un número entero de veces 2π son indistinguibles, se puede generalizar la idea anterior definiendo que las *bajas frecuencias* son aquellas próximas a los *múltiplos pares* de π , mientras que las *altas frecuencias* son las vecinas a los *múltiplos impares* de π .

EJEMPLO 3.44. Filtros selectivos en frecuencia ideales

Una clase importante de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo son aquellos cuya respuesta en frecuencia es unitaria sobre un cierto rango de frecuencias, y cero en el resto. Estos sistemas se denominan filtros selectivos en frecuencia ideales (o, brevemente, *filtros ideales*) porque si la señal sinusoidal de entrada tiene una frecuencia comprendida dentro de la *banda de paso* (donde la respuesta en frecuencia del filtro es 1) pasa inalterada por el filtro, esto es, la salida es igual a la entrada, mientras que si su frecuencia está dentro de la *banda de rechazo* (donde se anula la respuesta en frecuencia del filtro) resulta completamente bloqueada por el sistema: en este caso la salida es nula.

La respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos ideal se representa en la Fig. 3.50(a). Debido a la periodicidad de la respuesta en frecuencia de los sistemas discretos, ésta tiene el aspecto de un

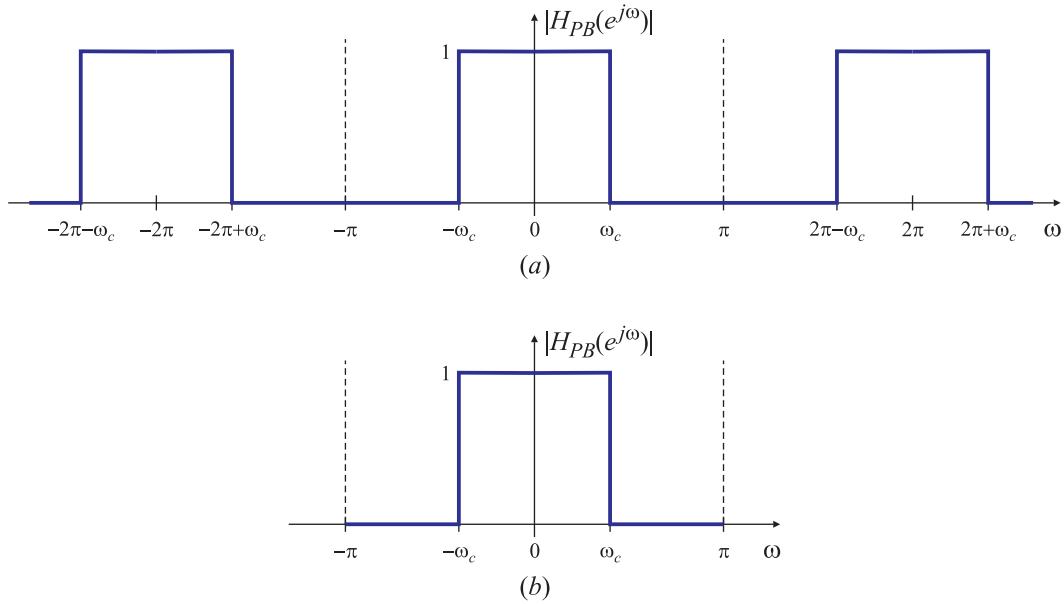


Fig. 3.50. Filtro pasabajas ideal: periodicidad de la respuesta en frecuencia (a), y un período de la respuesta en frecuencia (b).

filtro multibanda ya que las frecuencias vecinas a $\omega = 2\pi$ son indistinguibles de las frecuencias próximas a $\omega = 0$. Sin embargo, este filtro sólo deja pasar las sucesiones sinusoidales que coincidan con aquellas de frecuencia $-\omega_c < \omega_0 < \omega_c$, y cancela las que sean homólogas a las de frecuencias $(-\pi < \omega_0 < -\omega_c) \cup (\omega_c < \omega_0 < \pi)$. Como la respuesta en frecuencia queda completamente definida

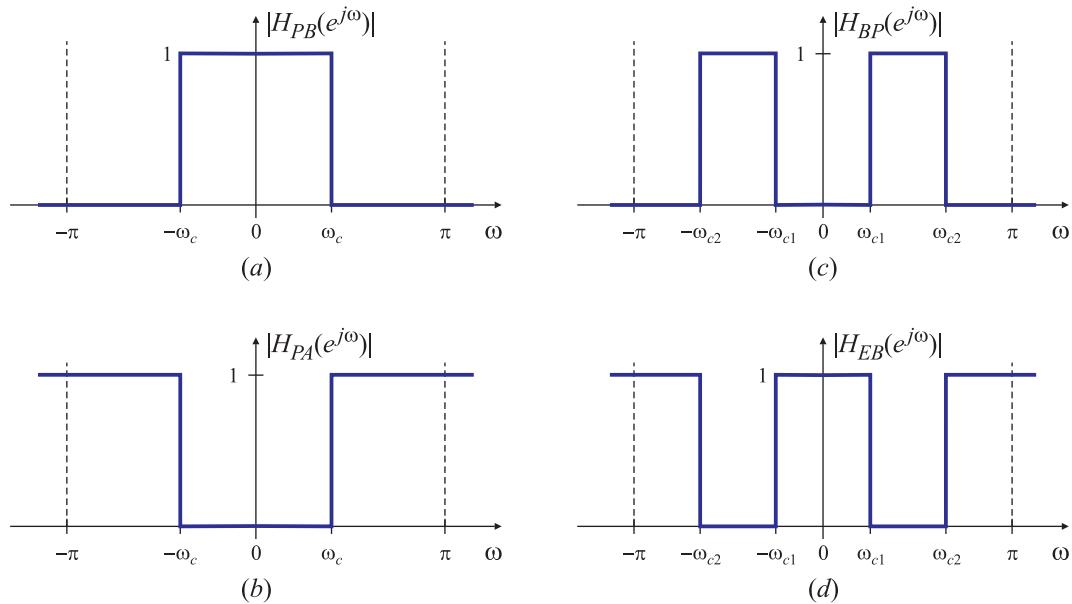


Fig. 3.51. Filtros ideales selectivos en frecuencia: pasabajos (a), pasaaltos (b), pasabanda (c) y eliminabanda (d). En todos los casos, la respuesta en frecuencia es 2π -periódica, pero sólo se representa el período comprendido entre $-\pi < \omega \leq \pi$.

por su comportamiento sobre el intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$, en general la respuesta en frecuencia del pasabajos ideal suele representarse en la forma indicada en la Fig. 3.50(b). Se sobreentiende que la respuesta en frecuencia se repite periódicamente con período 2π fuera del intervalo representado.

Las respuestas en frecuencia para los filtros ideales tipo pasaaltos, pasabanda, y eliminabanda se grafican en la Fig. 3.51(b), (c) y (d), respectivamente. \square

En los siguientes ejemplos se calcula la respuesta en frecuencia de varios sistemas simples estudiados a lo largo de este capítulo.

EJEMPLO 3.45. Respuesta en frecuencia del sistema diferencias hacia atrás

El sistema diferencias hacia atrás (3.30), caracterizado por la ecuación

$$y[n] = x[n] - x[n-1],$$

y cuya respuesta impulsiva es (3.51)

$$h_{\text{at}}[n] = \delta[n] - \delta[n-1], \quad (3.107)$$

representada en la Fig. 3.39(e), tiene respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \sum_n h_{\text{at}}[n] e^{-j\omega n} = \sum_n (\delta[n] - \delta[n-1]) e^{-j\omega n} = 1 - e^{-j\omega}.$$

Aunque este resultado es correcto, es difícil intuir la "forma" de la respuesta en frecuencia. Para lograr expresiones más compactas, que sean más sencillas de graficar, conviene reemplazar los términos de la forma $e^{j\theta} - 1$ eligiendo $e^{j\theta/2}$ como factor común y escribiendo el resto como un seno o un coseno. En este caso,

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega} \\ &= e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) \\ &= e^{-j\omega/2}2j \sin(\omega/2). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la unidad imaginaria j se puede escribir como $j = e^{j\pi/2}$, la respuesta en frecuencia del sistema diferencias hacia atrás resulta

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2})} 2 \sin(\omega/2), \quad (3.108)$$

donde

$$|H(e^{j\omega})| = |2 \sin(\omega/2)|, \quad \text{y} \quad \arg\{H(e^{j\omega})\} = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2},$$

para $0 \leq \omega < 2\pi$. Estas expresiones muestran que el módulo de la respuesta en frecuencia es el módulo de un seno, y la fase es una recta de pendiente $-1/2$, con una ordenada al origen de $\pi/2$. En particular, la respuesta en frecuencia sea anula para $\omega = 0$ y $\omega = 2\pi$, y alcanza su valor máximo en $\omega = \pi$ donde vale $H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 2$ (con fase nula). El módulo y la fase de la respuesta en frecuencia se representan en la Fig. 3.52(a). \square

EJEMPLO 3.46. Respuesta en frecuencia del sistema diferencias hacia adelante

El sistema diferencias hacia adelante (3.29) caracterizado por

$$y[n] = x[n+1] - x[n]$$

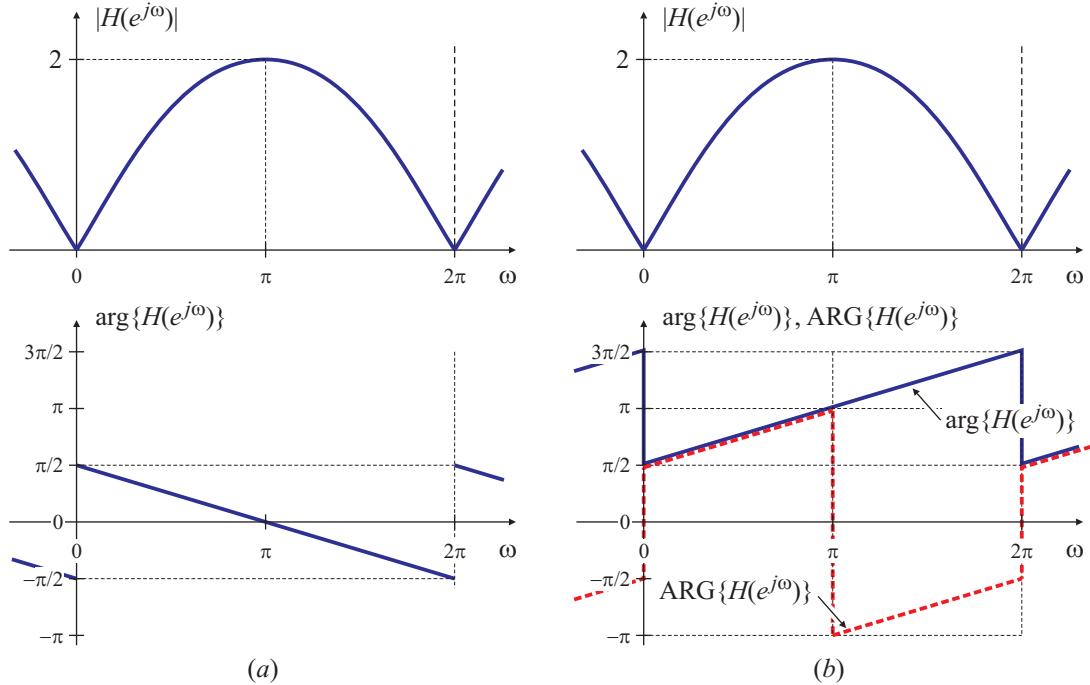


Fig. 3.52. Respuesta en frecuencia en módulo y fase del sistema diferencias hacia atrás $y[n] = x[n] - x[n - 1]$ (a) y diferencias hacia adelante $y[n] = x[n + 1] - x[n]$ (b).

tiene una respuesta impulsiva dada por (3.50), que se repite aquí por conveniencia

$$h_{ad}[n] = \delta[n+1] - \delta[n], \quad (3.109)$$

y que se representa en la Fig. 3.39(d). La respuesta en frecuencia se calcula como

$$H(e^{j\omega}) = \sum_n h_{ad}[n] e^{-j\omega n} = \sum_n (\delta[n+1] - \delta[n]) e^{-j\omega n} = e^{j\omega} - 1.$$

Esta respuesta en frecuencia se puede escribir de manera de facilitar su interpretación como

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{j\omega} - 1 \\ &= e^{j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) \\ &= e^{j\omega/2}2j \sin(\omega/2), \end{aligned}$$

que finalmente resulta en

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2})} 2 \sin(\omega/2), \quad (3.110)$$

donde

$$|H(e^{j\omega})| = |2 \sin(\omega/2)|, \quad \text{y} \quad \arg\{H(e^{j\omega})\} = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2},$$

para $0 \leq \omega < 2\pi$. El módulo de esta respuesta en frecuencia es el módulo de un seno, que se anula en $\omega = 0$ y en $\omega = 2\pi$, y que alcanza su máximo en $\omega = \pi$ donde vale $|H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 2$. Por otra parte, la curva de fase $\arg\{H(e^{j\omega})\}$ es una recta de pendiente *positiva* de valor $+1/2$, con ordenada al origen $\pi/2$, como se representa con una línea continua en la Fig. 3.52(b). En la figura se representa también (con línea de trazos) la función $\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\}$, limitada entre $-\pi$ y π . Mientras que en $\omega = 0$ y en $\omega = 2\pi$ la función $\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\}$ tiene un salto de valor π por el cambio de signo del $\sin(\omega/2)$, en $\omega = \pi$ el salto tiene una amplitud de 2π que ocurre porque el valor de $\arg\{H(e^{j\omega})\}$ es mayor que π en ese punto. En la representación de $\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\}$ aparecen

entonces saltos de amplitud π y 2π , lo que entorpece la interpretación de este tipo de gráficos. En cualquier caso, como en $\omega = \pi$ la fase vale $\arg\{H(e^{j\pi})\} = \pi$ (o $\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = \pm\pi$) el valor de la respuesta a esta frecuencia es $H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = -2$. \square

Si se comparan las expresiones analíticas de la respuesta en frecuencia del sistema diferencias hacia atrás con la del sistema diferencias hacia adelante, dadas por las ecuaciones (3.108) y (3.110), respectivamente, se nota que ambos sistemas tienen el mismo módulo de la respuesta en frecuencia. Como la ganancia del sistema es mucho menor para las frecuencias próximas a $\omega = 0$ que para las cercanas a $\omega = \pi$, bloqueando completamente el paso de señales de frecuencia $\omega = 0$, los dos sistemas se comportan como filtros pasaaltos. Ambos sistemas difieren en su curva de fase, como se aprecia al comparar las Figs. 3.52(a) y (b), y en sus respuestas impulsivas, dadas por (3.107) y (3.109). Sin embargo, las respuestas impulsivas están relacionadas por

$$h_{\text{at}}[n] = h_{\text{ad}}[n - 1],$$

como se mostró en el Ejemplo 3.31: la respuesta impulsiva del sistema diferencias hacia atrás es la respuesta impulsiva del sistema diferencias hacia adelante retardada en una muestra. Como se verá más adelante en la Sección 3.11.3, estas características (tener el mismo módulo de la respuesta en frecuencia, pero distinta curva de fase, y con las respuestas impulsivas vinculadas por un retardo) están estrechamente relacionadas.

EJEMPLO 3.47. Respuesta en frecuencia del sistema acumulador

El sistema acumulador está caracterizado por la ecuación (3.13) o (3.14), es decir

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] = \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m],$$

y su respuesta impulsiva es $h[n] = u[n]$, graficada en la Fig. 3.39(c). Para calcular la respuesta en frecuencia se observa que

$$H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n}.$$

Aquí surge un inconveniente: la respuesta en frecuencia es la suma de una serie geométrica de razón $e^{j\omega}$, pero como $|e^{j\omega}| = 1$, no se puede calcular la suma de la serie. Por lo tanto, con las herramientas disponibles hasta el momento no se puede calcular la respuesta de frecuencia del acumulador. Este resultado es compatible con lo postulado en la Sección 3.8.1.1, ya que, como se demostró en el Ejemplo 3.18, el acumulador *no* es un sistema estable. \square

EJEMPLO 3.48. Respuesta en frecuencia del sistema recursivo $y[n] - ay[n - 1] = x[n]$

En el Ejemplo 3.36 se mostró que el sistema caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] - ay[n - 1] = x[n] \quad (3.111)$$

tiene una respuesta impulsiva

$$h[n] = a^n u[n],$$

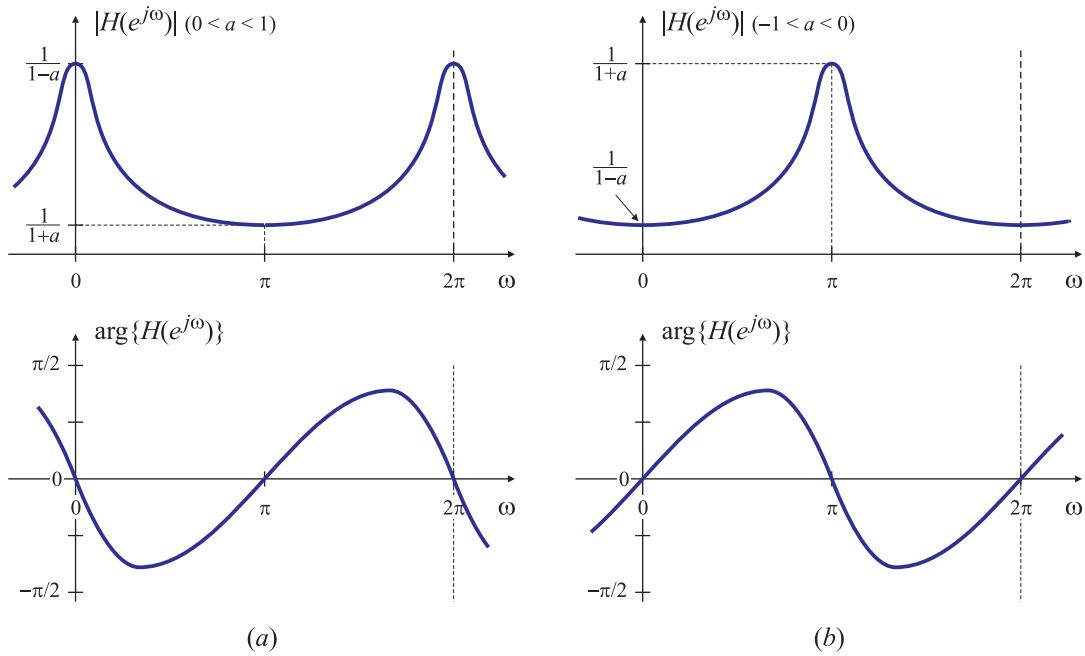


Fig. 3.53. Respuesta en frecuencia en módulo y fase del sistema $y[n] = x[n] + ay[n - 1]$ para $0 < a < 1$ (a) y $-1 < a < 0$ (b).

Previamente, en el Ejemplo 3.30 se probó que este sistema es estable cuando $|a| < 1$. Por lo tanto, en estas condiciones se puede calcular su respuesta en frecuencia, que resulta

$$H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n. \quad (3.112)$$

Esta es una serie geométrica de razón $ae^{-j\omega}$. Como se ha supuesto que $|a| < 1$, entonces $|ae^{-j\omega}| = |a| < 1$, y la sumatoria de (3.112) converge. Recordando que $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1/(1 - \rho)$, resulta

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

Es trivial calcular el módulo y la fase de esta respuesta. En el primer caso se tiene que

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{1 - a \cos \omega + ja \sin \omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos \omega)^2 + (a \sin \omega)^2}}$$

que puede escribirse como

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}}$$

y por otro lado,

$$\arg\{H(e^{j\omega})\} = -\arctan\left(\frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}\right).$$

Si se evalúa la respuesta en frecuencia en $\omega = 0$ y en $\omega = \pi$, se encuentra que

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a + a^2}} = \frac{1}{1 - a}, \quad (3.113)$$

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2a + a^2}} = \frac{1}{1 + a}. \quad (3.114)$$

Como se mencionó más arriba, estos resultados sólo son válidos si $|a| < 1$. Si $a = 0$ el sistema es un "copiador" pues $y[n] = x[n]$, como se desprende de la ecuación (3.111), y no es muy interesante. Los casos que sí interesan son cuando $-1 < a < 0$, y $0 < a < 1$.

- Caso $0 < a < 1$. Como a es positivo, pero menor que uno, de (3.113) y (3.114) se tiene que

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=0} > H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}$$

y por lo tanto el sistema se comporta como un filtro *pasabajos*. Las gráficas del módulo y la fase de la respuesta en frecuencia se representan en la Fig. 3.53(a).

- Caso $-1 < a < 0$. Como a es negativo, pero de módulo menor que uno, de (3.113) y (3.114) resulta que

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=0} < H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}.$$

Como el sistema tiene menos ganancia para las frecuencias próximas a $\omega = 0$ que para las frecuencias vecinas a $\omega = \pi$ se comporta como un filtro pasaaltos. Las curvas del módulo y la fase se muestran en la Fig. 3.53(b). \square

EJEMPLO 3.49. Respuesta en frecuencia del promediador

El sistema promediador del Ejemplo 3.4 está caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{m=-M_1}^{M_2} x[n-m]$$

y tiene respuesta impulsiva dada por la ecuación (3.48), repetida aquí por conveniencia,

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

representada en la Fig. 3.39(b). Por lo tanto, su respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n}.$$

Esta ecuación se puede sumar aplicando la relación (3.42), de modo que

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M_1+M_2+1} \frac{e^{j\omega M_1} - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{1}{M_1+M_2+1} e^{j\omega M_1} \frac{1 - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Para lograr expresiones más compactas, que sean más sencillas de graficar, conviene reemplazar los términos de la forma $1 - e^{j\theta}$ como en el Ejemplo 3.45. Recordando que

$$e^{j\theta} - 1 = e^{j\frac{\theta}{2}} \left(e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}} \right) = e^{j\frac{\theta}{2}} 2j \sin(\theta/2)$$

la ecuación (3.115) se puede escribir como

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{e^{j\omega M_1}}{M_1+M_2+1} \frac{e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2} (e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\ &= e^{-j\omega(M_2-M_1)/2} \frac{1}{M_1+M_2+1} \frac{(e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2})}{(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\ &= e^{-j\omega(M_2-M_1)/2} \left(\frac{1}{M_1+M_2+1} \frac{\sin[\omega(M_1+M_2+1)/2]}{\sin(\omega/2)} \right) \end{aligned} \quad (3.116)$$

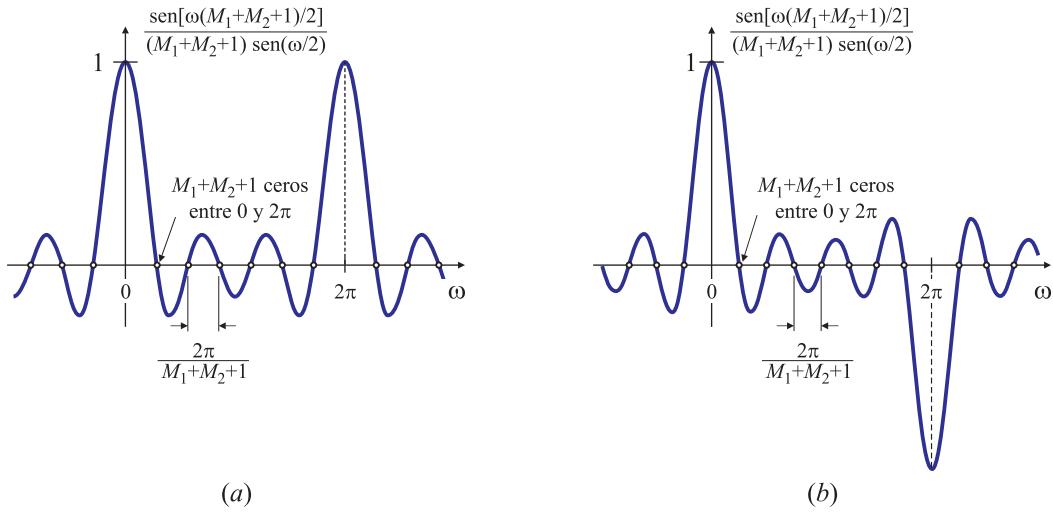


Fig. 3.54. Gráfico de $\frac{\sin[\omega M/2]}{[M \sin(\omega/2)]}$ para $M = (M_1 + M_2 + 1)$ impar (a) y par (b).

En esta expresión se reconocen dos términos: la exponencial compleja $e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}$ que tiene módulo unitario y fase $\phi(\omega) = -(M_2 - M_1)/2\omega$, y el término entre paréntesis, que es el kernel o núcleo de Dirichlet (o sinc periódico) definido en el Capítulo 2, y repetido aquí por conveniencia:

$$\Phi_{T_0, M}(x) = \frac{1}{M} \frac{\sin(\pi T_0 M x)}{\sin(\pi T_0 x)}.$$

El término entre paréntesis de (3.116) coincide con $\Phi_{T_0, M}(x)$ haciendo $M = M_1 + M_2 + 1$, $T_0 = 1/(2\pi)$, y $\omega = x$. Esta es una función real, que toma valores positivos y negativos, y que tiene la forma que se muestra en la Fig. 3.54(a) o 3.54(b) según $(M_1 + M_2 + 1)$ sea impar o par, respectivamente. Sin embargo, para encontrar la respuesta en frecuencia del promediador, es más conveniente graficar su módulo y fase, como se representa en la Fig. 3.55(a) para $(M_1 + M_2 + 1)$ impar o en la Fig. 3.55(b) para $(M_1 + M_2 + 1)$ par. La principal diferencia entre los casos en que $(M_1 + M_2 + 1)$ es par o impar

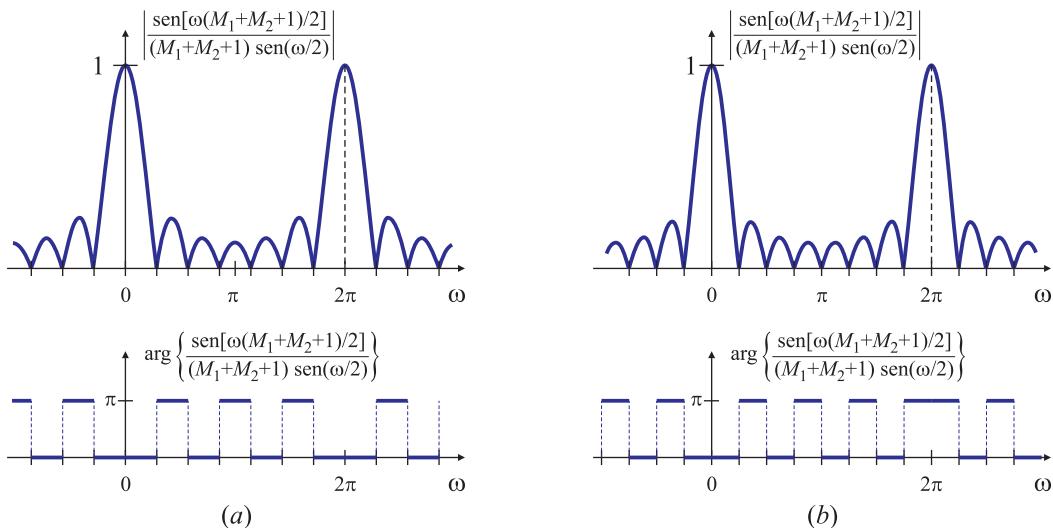


Fig. 3.55. Módulo y fase de $\frac{\sin[\omega M/2]}{[M \sin(\omega/2)]}$ para $M = (M_1 + M_2 + 1)$ impar (a) y par (b).

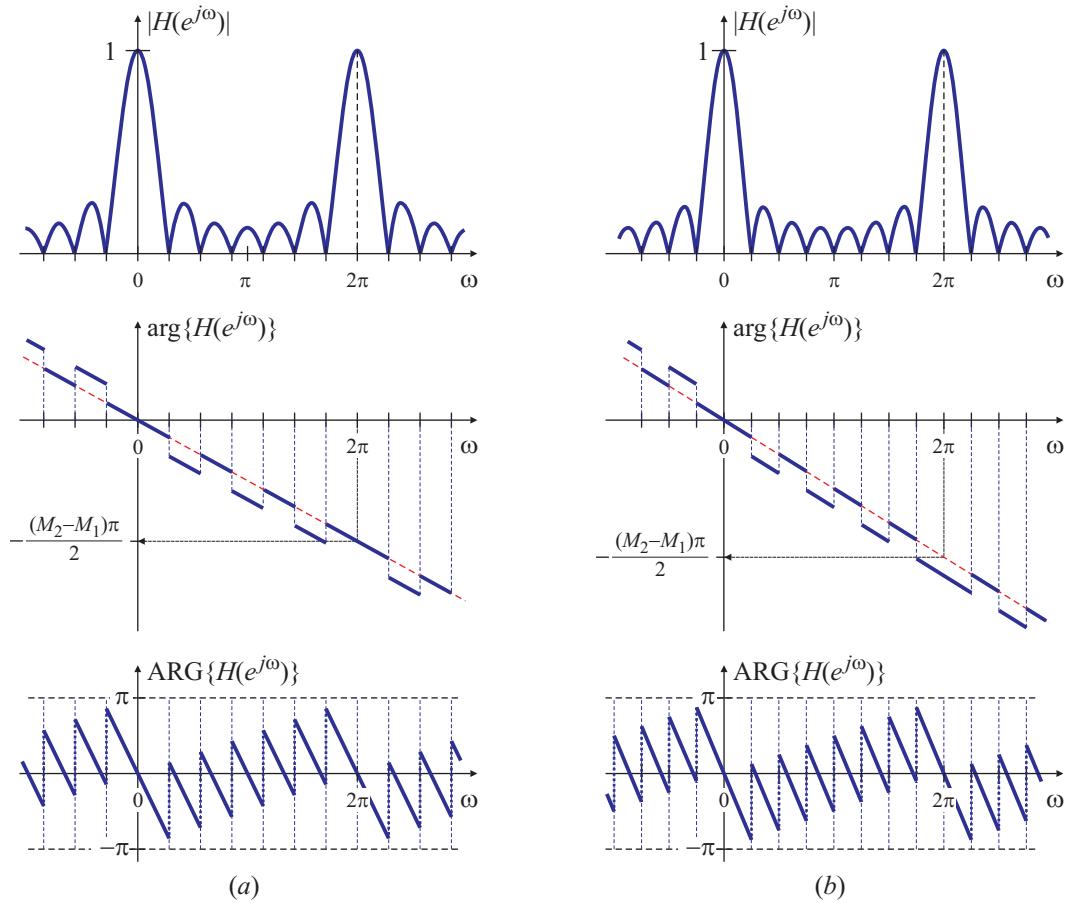


Fig. 3.56. Gráfico del módulo y la fase del promediador para (M_1+M_2+1) impar (a) y par (b).

es que en el primer caso la función tiene un cero en $\omega = \pi$ y en el segundo no, como se aprecia en las Figs. 3.54(b) y 3.55(b). Con respecto a la fase, en los intervalos de frecuencia donde la función es positiva la fase es un múltiplo par de 2π , mientras que en los intervalos donde es negativa la fase es un múltiplo impar de 2π . En la Fig. 3.55 se eligió (arbitrariamente) una fase nula $\phi = 0$ o $\phi = \pi$ para los intervalos donde la función es positiva o negativa, respectivamente.

Con estas herramientas se puede graficar la respuesta en frecuencia del promediador, cuya expresión analítica es la ecuación (3.116). Como el módulo de $e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}$ es unitario, el módulo de la respuesta en frecuencia coincide con el representado en la Fig. 3.55, como se muestra en la Fig. 3.56. La fase de la respuesta en frecuencia es la suma de las fases de $e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}$ y de $\text{sen}[\omega(M_1+M_2+1)/2]/[(M_1+M_2+1)\text{sen}(\omega/2)]$: a la recta de pendiente $-(M_2 - M_1)/2$ se le deben sumar los saltos de π de la función, como se representa en la Fig. 3.56. En este caso, se consideró que la fase de la función vale $-\pi$ para $\omega > 0$ y π para $\omega < 0$. De todos modos, considerar que los saltos son positivos o negativos es totalmente arbitrario, porque lo que interesa es el valor del seno o coseno de este ángulo, que coincide con el de un ángulo ϕ congruente, es decir, comprendido entre $-\pi$ y π . Además, la pendiente de la curva de fase depende de los valores de M_1 y M_2 : si el sistema es causal ($M_1 \leq 0$: la respuesta impulsiva es no nula para muestras ubicadas a la derecha del origen) la pendiente de la fase es negativa. Si el sistema no es causal, pero $M_1 = M_2$ (la respuesta impulsiva es simétrica respecto al origen) el aporte de fase del factor $e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}$ es nulo, y por lo tanto la respuesta tiene la forma de Fig. 3.55. La pendiente puede llegar a ser positiva si $M_2 - M_1 < 0$, cuando la respuesta impulsiva tiene más muestras a la izquierda del origen que a la derecha. En la figura también se representa la curva de fase $\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\}$, limitada entre $\pm\pi$, para el caso en que

$M_1 = 0$. Aunque en este caso el sistema es causal, la forma de $\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\}$ no indica con tanta claridad el efecto del retardo como la curva de $\arg\{H(e^{j\omega})\}$.

Por otra parte, el módulo de la respuesta en frecuencia es mayor para frecuencias cercanas a $\omega = 0$ que para frecuencias vecinas a $\omega = \pi$. Esta atenuación de las altas frecuencias indica que el promediador suaviza las variaciones rápidas de la señal de entrada; en otras palabras, el promediador se comporta aproximadamente como un filtro pasabajos, lo que es consistente con el comportamiento que intuitivamente se esperaría de un promediador. \square

3.8.3. Respuesta de estado estacionario

En la Sección 3.10 se mostrará que una amplia clase de señales puede representarse por una combinación de exponenciales complejas de la forma

$$x[n] = \sum_k c_k e^{j\omega_k n}. \quad (3.117)$$

Aplicando el principio de superposición, la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ será

$$y[n] = \sum_k c_k H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_k} e^{j\omega_k n}. \quad (3.118)$$

Por lo tanto, si se puede encontrar una representación de $x[n]$ como una superposición de exponenciales complejas, como en la ecuación (3.117), se puede calcular la salida utilizando (3.118) si se conoce la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema. El siguiente ejemplo muestra esta propiedad de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo para el caso muy frecuente, y por lo tanto de gran interés, en que la entrada $x[n]$ es una entrada senoidal.

EJEMPLO 3.50. Respuesta de un SLIT ante entradas sinusoidales

Aplicando la relación de Euler es sencillo expresar una sinusoidal como combinación de exponenciales. Recordando que $\cos \theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$, si

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

también se puede escribir

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n + \phi)} \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \end{aligned}$$

De (3.98), la respuesta del sistema ante la entrada $x_1[n] = (A/2)e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$ es

$$y_1[n] = H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0} \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n}$$

y la respuesta ante la entrada $x_2[n] = (A/2)e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$ es

$$y_2[n] = H(e^{j\omega})|_{\omega=-\omega_0} \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}.$$

Por lo tanto la respuesta total es

$$y[n] = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (3.119)$$

Esta expresión es válida para cualquier tipo de respuesta impulsiva, pero resulta más interesante cuando la respuesta impulsiva $h[n]$ es real, como se verá a continuación. \square

EJEMPLO 3.51. Respuesta del sistema retardador ideal ante una entrada senoidal

Para el sistema retardador del Ejemplo 3.42, se tiene que $H(e^{j\omega}) = e^{-jn_d\omega}$, y por lo tanto, si $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$, interesa conocer el valor de la respuesta en frecuencia para $\omega = \pm\omega_0$:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega_0}) &= H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0} = e^{-jn_d\omega}|_{\omega=\omega_0} = e^{-jn_d\omega_0}, \\ H(e^{-j\omega_0}) &= H(e^{j\omega})|_{\omega=-\omega_0} = e^{-jn_d\omega}|_{\omega=-\omega_0} = e^{jn_d\omega_0}, \end{aligned}$$

de modo que (3.119) se puede escribir como

$$\begin{aligned} y[n] &= H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \\ &= e^{-jn_d\omega_0} \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + e^{jn_d\omega_0} \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0(n-n_d)} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0(n-n_d)} \\ &= \frac{A}{2} e^{j[\omega_0(n-n_d)+\phi]} + \frac{A}{2} e^{-j[\omega_0(n-n_d)+\phi]} \\ &= A \cos[\omega_0(n-n_d) + \phi]. \end{aligned} \quad (3.120)$$

En otras palabras, si el sistema retardador ideal se excita con una entrada $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$, la salida es $y[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi - \omega_0 n_d)$. Es decir que la salida tiene la misma frecuencia y la misma amplitud que la señal de entrada, pero está desfasada $\theta = -\omega_0 n_d$ radianes.

En este sistema, la salida de estado estacionario también puede calcularse a partir de la ecuación a diferencias del sistema, que para el retardador es

$$y[n] = x[n - n_d].$$

Si la entrada es $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$, es trivial observar que

$$y[n] = x[n - n_d] = A \cos[\omega_0(n - n_d) + \phi],$$

que naturalmente coincide con (3.120). Este ejemplo muestra que en un sistema tan simple como el retardador la aplicación de la técnica de respuesta en frecuencia para determinar la salida de estado estacionario no presenta grandes ventajas. Sin embargo, en sistemas apenas más complicados la ventaja es notable, como se verá en el Ejemplo 3.52. \square

El ejemplo muestra una situación que es habitual en la mayoría de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo que se estudiarán en el curso: *si la respuesta impulsiva del sistema es real, $h[n] \in \mathbb{R}$, entonces $H(e^{j\omega_0})$ y $H(e^{-j\omega_0})$ están relacionados: teniendo en cuenta (3.97) se tiene que*

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega_0}) &= H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0} = \sum_n h[n] e^{-j\omega_0 n}, \\ H(e^{-j\omega_0}) &= H(e^{j\omega})|_{\omega=-\omega_0} = \sum_n h[n] e^{j\omega_0 n}. \end{aligned}$$

Recordando que $(e^{j\theta})^* = e^{-j\theta}$, y que $h[n] = h^*[n]$ si $h[n]$ es real, donde “*” indica conjugación, resulta que

$$H^*(e^{j\omega_0}) = \left(\sum_n h[n] e^{-j\omega_0 n} \right)^* = \sum_n h^*[n] (e^{-j\omega_0 n})^* = \sum_n h[n] e^{j\omega_0 n} = H(e^{-j\omega_0}).$$

Es decir que si $h[n]$ es real entonces $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$, o en otras palabras, que la función transferencia del sistema evaluada en frecuencias ω_0 y $(-\omega_0)$ tiene el mismo módulo y fase de signo contrario. Matemáticamente, si

$$H(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| e^{j \arg\{H(e^{j\omega_0})\}},$$

entonces

$$H(e^{-j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| e^{-j \arg\{H(e^{j\omega_0})\}}.$$

Por lo tanto, si a un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva real se lo excita con una entrada de la forma

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi), \quad -\infty < n < \infty$$

el Ejemplo 3.50 muestra que la salida está dada por la ecuación (3.119), que en vista de los comentarios recientes puede escribirse como

$$\begin{aligned} y[n] &= H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \\ &= |H(e^{j\omega_0})| e^{j \arg\{H(e^{j\omega_0})\}} \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + |H(e^{j\omega_0})| e^{-j \arg\{H(e^{j\omega_0})\}} \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \\ &= \frac{A}{2} |H(e^{j\omega_0})| \left(e^{j\omega_0 n} e^{j\phi} e^{j \arg\{H(e^{j\omega_0})\}} + e^{-j\omega_0 n} e^{-j\phi} e^{-j \arg\{H(e^{j\omega_0})\}} \right) \end{aligned}$$

que resulta en

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \arg\{H(e^{j\omega_0})\}). \quad (3.121)$$

Resumiendo, si un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva real $h[n]$ y respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ se excita con una entrada sinusoidal de frecuencia ω_0 de la forma

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi), \quad -\infty < n < \infty,$$

la salida está dada por

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \arg\{H(e^{j\omega_0})\}), \quad -\infty < n < \infty.$$

La salida es una señal sinusoidal de la misma frecuencia ω_0 que la señal de entrada, con una amplitud y una fase alteradas por el módulo $|H(e^{j\omega_0})|$ y la fase $\arg\{H(e^{j\omega_0})\}$ de la respuesta en frecuencia evaluada a la frecuencia ω_0 .

Este resultado es válido *sólo* si el sistema tiene respuesta impulsiva real, es decir, si $h[n] \in \mathbb{R}$. El caso en que $h[n]$ es compleja se plantea en el Ejercicio 4.

EJEMPLO 3.52. Respuesta de estado estacionario en el sistema diferencias hacia atrás
 Para el sistema de diferencias hacia atrás, caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = x[n] - x[n-1], \quad (3.122)$$

se encontró en el Ejemplo 3.45 que su respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = 2 \operatorname{sen}(\omega/2) e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2})},$$

que está representada en módulo y fase en la Fig. 3.52(a). Si la entrada es $x[n] = A \cos(\omega_0 n)$, la salida de estado estacionario puede calcularse aplicando la técnica de respuesta en frecuencia, o reemplazando $x[n]$ en la ecuación a diferencias.

- Si se aplica la técnica de respuesta en frecuencia, la salida de estado estacionario $y[n]$ está dada por (3.121). En $\omega = \omega_0$,

$$|H(e^{j\omega})| = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\right), \quad \arg\{H(e^{j\omega})\} = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_0}{2},$$

y entonces

$$y[n] = 2A \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \cos(\omega_0 n - \omega_0/2 + \pi/2)$$

que puede escribirse como

$$y[n] = -2A \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \operatorname{sen}(\omega_0 n - \omega_0/2). \quad (3.123)$$

- Si la salida de estado estacionario se calcula a partir de la ecuación a diferencias, de acuerdo con (3.122) se tiene que para $x[n] = A \cos(\omega_0 n)$,

$$\begin{aligned} y[n] &= A \cos(\omega_0 n) - A \cos[\omega_0(n-1)] \\ &= A \cos(\omega_0 n) - A \cos(\omega_0 n - \omega_0). \end{aligned} \quad (3.124)$$

Aplicando en el segundo término la relación trigonométrica $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$, se encuentra que

$$\begin{aligned} y[n] &= A \cos(\omega_0 n) - A \cos(\omega_0 n) \cos \omega_0 - A \operatorname{sen}(\omega_0 n) \operatorname{sen} \omega_0 \\ &= A(1 - \cos \omega_0) \cos(\omega_0 n) - A \operatorname{sen} \omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 n). \end{aligned}$$

Aplicando ahora la identidad trigonométrica $a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}[\theta + \phi]$, donde

$$\phi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \begin{cases} 0, & b \geq 0, \\ \pi, & b < 0, \end{cases}$$

con $a = A(1 - \cos \omega_0)$, $b = -A \operatorname{sen} \omega_0 < 0$ para $0 \leq \omega_0 < \pi$, y $\theta = \omega_0 n$, resulta

$$y[n] = A \sqrt{(1 - \cos \omega_0)^2 + (\operatorname{sen} \omega_0)^2} \operatorname{sen}\left[\omega_0 n + \arctan\left(\frac{1 - \cos \omega_0}{-\operatorname{sen} \omega_0}\right) + \pi\right].$$

Notando que

$$\sqrt{(1 - \cos \omega_0)^2 + (\operatorname{sen} \omega_0)^2} = \sqrt{2 - 2 \cos \omega_0} = \sqrt{4 \frac{1 - \cos \omega_0}{2}} = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\right),$$

y que

$$\arctan\left(\frac{1 - \cos \omega_0}{-\operatorname{sen} \omega_0}\right) = -\arctan\left[\frac{1 - \cos \omega_0}{\operatorname{sen} \omega_0}\right] = -\frac{\omega_0}{2},$$

se tiene finalmente

$$y[n] = -2A \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \operatorname{sen}(\omega_0 n - \omega_0/2)$$

que naturalmente coincide con (3.123).

Este mismo resultado puede obtenerse utilizando programas matemáticos de cálculo simbólico. Por ejemplo, en Mathematica se puede simplificar la ecuación (3.124) mediante los comandos:

```
Simplify[TrigExpand[ExpandAll[A Cos[\omega0 n] - A Cos[\omega0 (n-1)]]]]
```

para encontrar (3.123)

$$2 A \sin\left[\frac{\omega_0}{2}\right] \sin\left[\frac{1}{2}(\omega_0 - 2n\omega_0)\right]$$

Esto es posible porque la ecuación a diferencias del sistema es muy sencilla. Para sistemas representados por ecuaciones a diferencias más complicadas, sólo el método de cálculo utilizando la respuesta en frecuencia permite obtener una expresión manejable de la salida de estado estacionario.

En este ejemplo es evidente que la técnica de respuesta en frecuencia permite obtener la salida de estado estacionario con muchos menos pasos y de manera mucho más sencilla que reemplazando la entrada en la ecuación a diferencias. \square

En los ejemplos 3.51 y 3.52 se puede calcular la salida de estado estacionario directamente a partir de la ecuación a diferencias de manera relativamente sencilla porque ambos sistemas son FIR: la salida $y[n]$ en un instante dado sólo depende de la entrada en ese instante y de sus valores pasados. Puede ser complicado encontrar una forma cerrada y compacta como (3.123), pero el cálculo de la salida en función de la entrada, como en (3.124), no presenta mayores dificultades. En cambio, en un sistema IIR la presencia de los términos que dependen de muestras pasadas de la salida $y[n-1], y[n-2], \dots, y[n-N]$ hace que sea mucho más difícil calcular la salida de estado estacionario reemplazando $x[n]$ en la ecuación a diferencias. Por ejemplo, para el sistema con respuesta impulsiva $h[n] = a^n u[n]$, con $|a| < 1$, caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = ay[n-1] + x[n], \quad (3.125)$$

aparece el problema de especificar correctamente la condición inicial: no es razonable imponer $y[-1] = 0$ porque la entrada $x[n] = A \cos(\omega_0 n)$ está aplicada desde $n > -\infty$. Una manera de resolver el inconveniente es asignando a $y[-1]$ un valor c a determinar, suponiendo que la salida es de la forma

$$y[n] = A\rho \cos(\omega_0 n + \theta), \quad (3.126)$$

y encontrar los valores de ρ , θ y c para que la solución calculada por recursión usando (3.125) con $x[n] = A \cos(\omega_0 n)$

$$y[n] = ay[n-1] + A \cos(\omega_0 n). \quad (3.127)$$

sea igual a la calculada con (3.126) para $-\infty < n < \infty$. Algunos valores de ambas expresiones se muestran en la siguiente tabla.

n	$y[n]$ de (3.126)	$y[n]$ de (3.127)
-2	$A\rho \cos(-2\omega_0 + \theta)$	$a^{-1}c - a^{-1}A \cos(-\omega_0)$
-1	$A\rho \cos(-\omega_0 + \theta)$	c
0	$A\rho \cos(\theta)$	$ac + A$
1	$A\rho \cos(\omega_0 + \theta)$	$a^2c + aA + A \cos(\omega_0)$
2	$A\rho \cos(2\omega_0 + \theta)$	$a^3c + a^2A + aA \cos(\omega_0) + A^2 \cos(2\omega_0)$
:	:	:

Igualando los términos correspondientes a $n = -1$, $n = 0$ y $n = 1$, es posible, aunque muy laborioso, encontrar que

$$c = \frac{A \cos \omega_0 - aA}{1 - 2a \cos \omega_0 + a^2}, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega_0 + a^2}}, \quad \theta = -\arctan \frac{a \sin \omega_0}{1 - a \cos \omega_0},$$

de modo que la salida de estado estacionario está dada por (3.126).

Este mismo resultado se puede obtener mucho más fácilmente utilizando las técnicas de respuesta en frecuencia, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3.53. Respuesta de un sistema IIR excitado con entradas senoidales

Se desea conocer la respuesta del sistema IIR representado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = a y[n - 1] + x[n], \quad y[-1] = 0,$$

cuando la señal de entrada es

$$x[n] = A \sin(\omega_0 n) + B \cos(\omega_1 n),$$

con $a = 0,8$, $A = 1$, $B = -1$, $\omega_0 = 0,1\pi$, $\omega_1 = 0,3\pi$, $\theta = \pi/6$. Para simplificar el análisis conviene separar la entrada en dos componentes: una de frecuencia ω_0 , dada por $x_0[n] = A \sin(\omega_0 n)$, $-\infty < n < \infty$, y otra de frecuencia ω_1 definida como $x_1[n] = B \cos(\omega_1 n + \theta)$, $-\infty < n < \infty$. De este modo la entrada $x[n]$ puede escribirse

$$x[n] = x_0[n] + x_1[n].$$

Si $y_0[n]$, $y_1[n]$ son las salidas del sistema ante las entradas $x_0[n]$, $x_1[n]$, se tiene que

$$y_0[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \sin [\omega_0 n + \arg\{H(e^{j\omega_0})\}] \quad (3.128)$$

$$y_1[n] = B |H(e^{j\omega_1})| \cos [\omega_1 n + \theta + \arg\{H(e^{j\omega_1})\}]. \quad (3.129)$$

La respuesta en frecuencia del sistema $y[n] = a y[n - 1] + x[n]$, $y[-1] = 0$ se ha calculado en el Ejemplo 3.48 y está dada por

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg\{H(e^{j\omega})\}}$$

con

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}}, \quad \arg\{H(e^{j\omega})\} = -\arctan \left(\frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega} \right),$$

que se representa en la Fig. 3.57 para $a = 0,8$.

A los valores de las frecuencias ω_0 y ω_1 de la señal de entrada se encuentra que

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0} &= 2,02143 - j2,08955 = 2,90730 e^{-j0,80197}, \\ H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_1} &= 0,75731 - j0,92519 = 1,19562 e^{-j0,88485}, \end{aligned}$$

y entonces, de (3.128) y (3.129) resulta

$$y_0[n] = 2,90730 \sin(0,1\pi n - 0,80197), \quad (3.130)$$

$$y_1[n] = -1,19562 \cos(0,3\pi n + \frac{\pi}{6} - 0,88485). \quad (3.131)$$

Las señales $x_0[n]$ e $y_0[n]$ y $x_1[n]$ e $y_1[n]$ se grafican en las Figs. 3.58 y 3.59. Finalmente, aplicando el principio de superposición, se tiene que $y[n] = y_0[n] + y_1[n]$, es decir

$$y[n] = 2,90730 \sin(0,1\pi n - 0,80197) - 1,19562 \cos(0,3\pi n + \frac{\pi}{6} - 0,88485). \quad (\square)$$

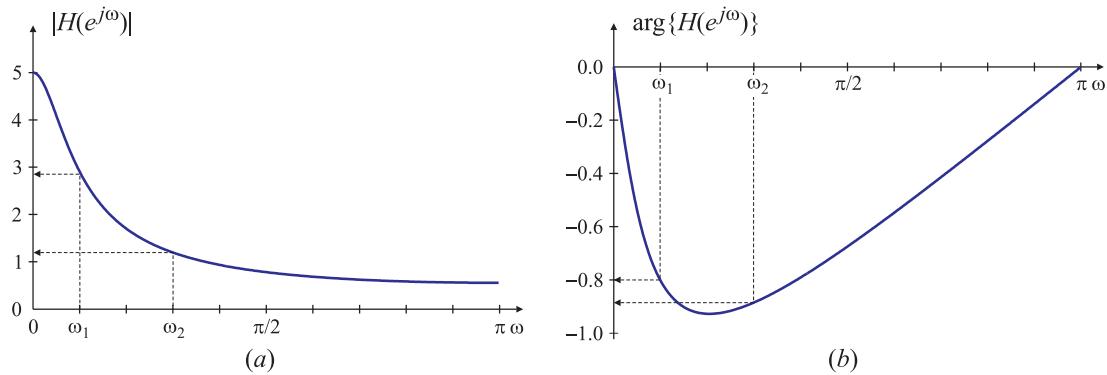


Fig. 3.57. Respuesta en frecuencia en módulo (a) y fase (b) para el filtro IIR del Ejemplo 3.53 con $a = 0,8$.

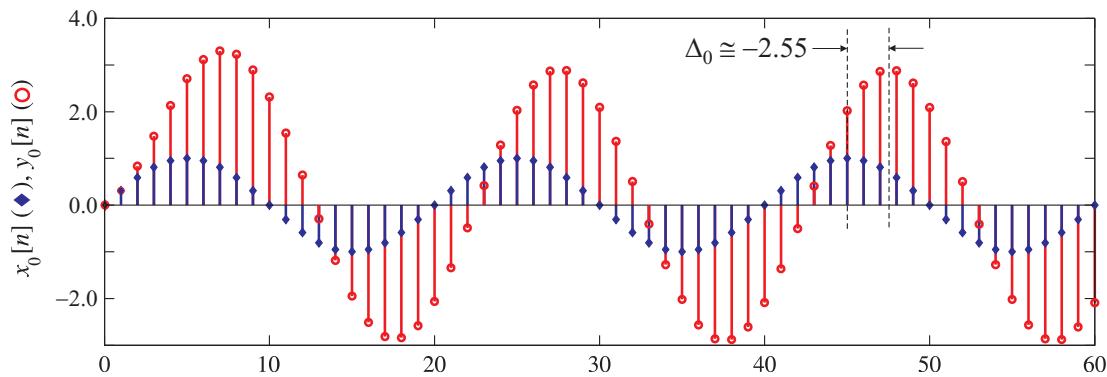


Fig. 3.58. Señal de entrada $x_0[n] = \sin(0,1\pi n)$ (◆) y de salida $y_0[n]$ (○) del sistema del Ejemplo 3.53.

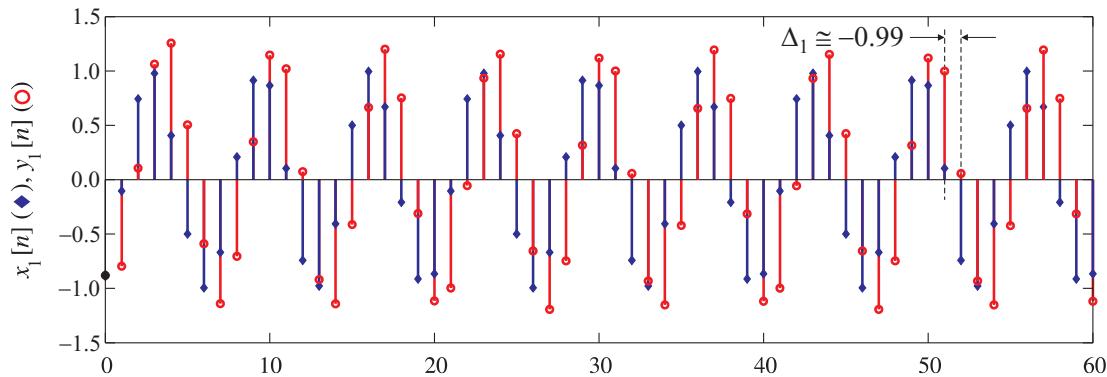


Fig. 3.59. Señal de entrada $x_1[n] = -\cos(0,3\pi n + \pi/6)$ (◆) y de salida $y_1[n]$ (○) del Ejemplo 3.53.

EJEMPLO 3.54. Una forma alternativa de escribir las salidas

Las componentes de la salida también se pueden escribir como

$$\begin{aligned}y_0[n] &= A |H(e^{j\omega_0})| \operatorname{sen} [\omega_0(n + \Delta_0)] \\y_1[n] &= B |H(e^{j\omega_1})| \cos [\omega_1(n + \Delta_1) + \phi],\end{aligned}$$

donde

$$\Delta_0 = \frac{\arg\{H(e^{j\omega_0})\}}{\omega_0}, \quad \Delta_1 = \frac{\arg\{H(e^{j\omega_1})\}}{\omega_1},$$

son los *retardos de fase* (en fracciones de muestra) de cada salida con respecto a la entrada correspondiente. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}y_0[n] &= 2,90730 \operatorname{sen}(0,1\pi n - 0,80197), \\&= 2,90730 \operatorname{sen}[0,1\pi(n - 2,55274)] \\y_1[n] &= -1,19652 \cos(0,3\pi n + \frac{\pi}{6} - 0,88485) \\&= -1,19652 \cos[0,3\pi(n - 0,93886) + \frac{\pi}{6}]\end{aligned}$$

de modo que

$$y[n] = 2,90730 \operatorname{sen}[0,1\pi(n - 2,55274)] - 1,19652 \cos[0,3\pi(n - 0,93886) + \frac{\pi}{6}].$$

Esta forma de escribir la respuesta muestra que el sistema retarda la señal de frecuencia $\omega_0 = 0,1\pi$ en 2.55 muestras, y la señal de frecuencia $\omega_1 = 0,3\pi$ en 0.93 muestras. Estos retardos se pueden observar fácilmente en las Fig. 3.58, y con un poco más de dificultad en la Fig. 3.59, que muestran las señales de entrada y salida del sistema. Los valores del retardo que se “miden” en la figuras son muy similares a los calculados. \square

EJEMPLO 3.55. Respuestas de un sistema FIR excitado con senoidales

La misma entrada del Ejemplo 3.53 se aplica a un filtro FIR promediador de $N = 5$ muestras cuya respuesta impulsiva es

$$h[n] = \begin{cases} 1/N, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Este sistema ya fue estudiado en el Ejemplo 3.59. Haciendo $M_1 = 0$, $M_2 = N-1 = 4$ se encuentra que

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{N \sin(\omega/2)} = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{5 \sin(\omega/2)}, \quad (3.132)$$

graficada en la Fig. 3.60 en módulo y fase para $N = 5$.

Para calcular la salida de estado estacionario se procede como en el Ejemplo 3.53 del sistema IIR. Las frecuencias que componen la señal de entrada $x[n]$ son $\omega_0 = 0,1\pi$, y $\omega_1 = 0,3\pi$, y el valor de la respuesta en frecuencia del sistema en esos puntos está dada por

$$\begin{aligned}H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0} &= +0,73138 - j0,53138 = 0,90403 e^{-j0,62832}, \\H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_1} &= -0,09626 - j0,29626 = 0,31151 e^{-j1,88496}.\end{aligned}$$

La salida del sistema ante cada una de estas entradas es

$$\begin{aligned}y_0[n] &= A |H(e^{j\omega_0})| \operatorname{sen} [\omega_1 n + \arg\{(He^{j\omega_1})\}] \\y_1[n] &= B |H(e^{j\omega_1})| \cos [\omega_2 n + \theta + \arg\{H(e^{j\omega_2})\}].\end{aligned}$$

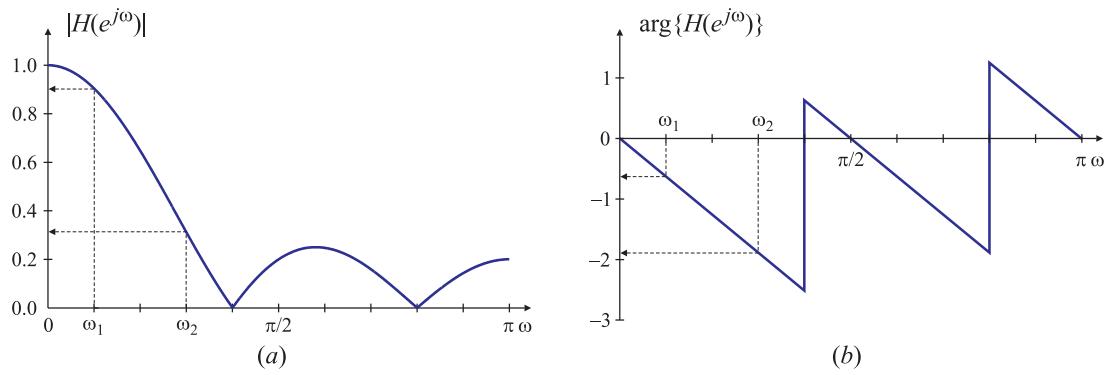


Fig. 3.60. Respuesta en frecuencia en módulo (a) y fase (b) para el filtro FIR promediador de $N = 5$ muestras del Ejemplo 3.55.

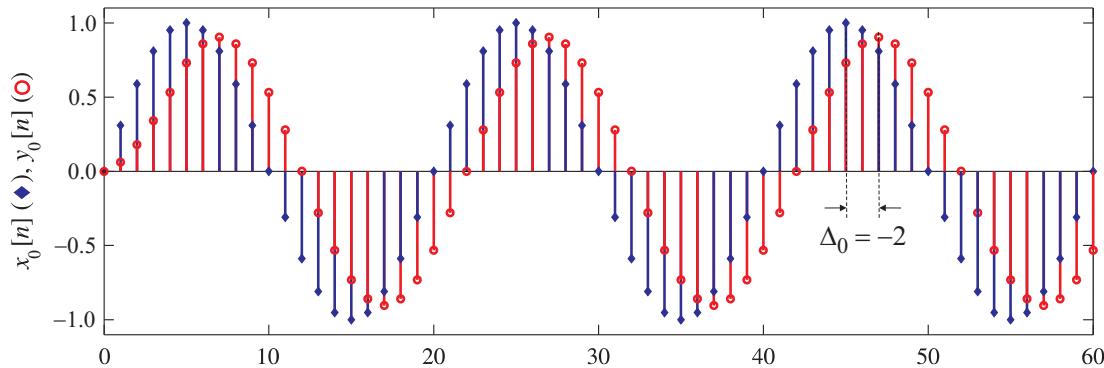


Fig. 3.61. Señal de entrada (◆) $x_0[n] = \sin(0,1\pi n)$ y de salida $y_0[n]$ (○) del filtro FIR promediador del Ejemplo 3.55.

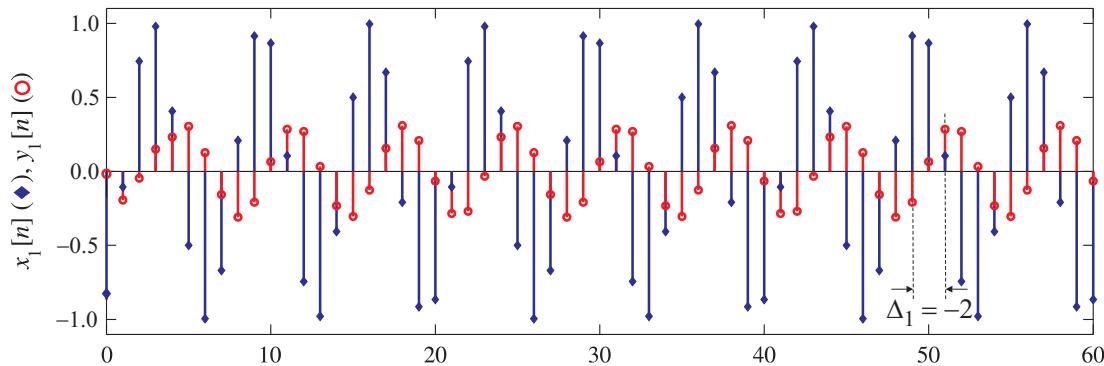


Fig. 3.62. Señal de entrada (◆) $x_1[n] = -\cos(0,3\pi n + \pi/6)$ y de salida $y_1[n]$ (○) del filtro FIR promediador del Ejemplo 3.55.

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}y_0[n] &= 0,90403 \operatorname{sen}(0,1\pi n - 0,62832), \\y_1[n] &= -0,31151 \cos(0,3\pi n + \frac{\pi}{6} - 1,88496),\end{aligned}$$

y aplicando el principio de superposición resulta que

$$y[n] = y_0[n] + y_1[n]$$

es decir

$$y[n] = 0,90403 \operatorname{sen}(0,1\pi n - 0,62832) - 0,31151 \cos(0,3\pi n + \frac{\pi}{6} - 1,88496)$$

que para poner de manifiesto los retardos producidos por el sistema se puede escribir como

$$y[n] = 0,90403 \operatorname{sen}[0,1\pi(n-2)] - 0,31151 \cos[0,3\pi(n-2) + \frac{\pi}{6}] \quad (3.133)$$

En la Fig. 3.61 y en la Fig. 3.62 se representan las señales de entrada $x_0[n]$, $x_1[n]$ y de salida $y_0[n]$, $y_1[n]$ para las componentes frecuenciales $\omega_0 = 0,1\pi$ y $\omega_1 = 0,3\pi$, respectivamente. \square

Las Figs. 3.61 y 3.62, lo mismo que la expresión matemática de la salida dada por la ecuación (3.133), muestran que este sistema retarda las dos componentes de distinta frecuencia en la misma cantidad de muestras (2 muestras en este caso). En el sistema IIR del Ejemplo 3.54 las mismas componentes frecuenciales sufrían retardos diferentes (2,55 muestras para la señal de frecuencia $\omega_1 = 0,1\pi$, y 0,93 muestras para la señal de frecuencia $\omega_2 = 0,3\pi$). Esta característica de retrasar la misma cantidad de tiempo las componentes sinusoidales de distinta frecuencia de la señal de entrada sólo puede conseguirse con una clase especial de sistemas FIR que se denominan *sistemas con fase lineal generalizada (SFLG)*, como se estudiará en el Capítulo 6. No todo FIR es un SFLG, pero todo SFLG es un FIR (o por lo menos, los SFLG que se pueden implementar son FIR). Como se estudiará más adelante, esta característica que es muy deseable en ciertas aplicaciones, sólo puede conseguirse con sistemas discretos: no existe un sistema analógico que pueda producir exactamente este comportamiento.

3.8.3.1. Respuesta de estado estacionario de sistemas variantes en el tiempo

En la sección anterior se ha demostrado que la salida de estado estacionario de un sistema lineal e invariante en el tiempo excitado por una señal sinusoidal (o exponencial compleja) de frecuencia ω_0 es una señal sinusoidal escalada y desfasada, pero de frecuencia *idéntica* a la de la señal de entrada. El siguiente ejemplo muestra que si el sistema es lineal, pero *variante* en el tiempo, la señal de salida puede tener una frecuencia *distinta* de la frecuencia de la señal de entrada.

EJEMPLO 3.56. Respuesta de sistemas variantes e invariantes en el tiempo ante entradas exponenciales complejas

Sea el sistema *invariante* en el tiempo definido por

$$y_I[n] = \rho e^{j\theta} x[n],$$

donde ρ y θ son constantes reales, y el sistema *variante* en el tiempo

$$y_V[n] = \rho e^{j(\omega_s n + \theta)} x[n].$$

Mientras que el primer sistema puede pensarse como un sistema con ganancia (compleja) constante, el segundo sistema es un caso particular del sistema con ganancia variable estudiado en el Ejemplo 3.13, con $a(n) = e^{j(\omega_s n + \theta)}$. Es sencillo demostrar que ambos sistemas son lineales (tarea que queda a cargo del lector). Cuando se los excita con una entrada de tipo exponencial compleja, $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ la salida del sistema *invariante* en el tiempo es

$$y_I[n] = \rho e^{j\theta} A e^{j\omega_0 n} = \rho A e^{j(\omega_0 n + \theta)} \quad (3.134)$$

mientras que la salida del sistema *variante* en el tiempo es

$$y_V[n] = \rho e^{j(\omega_s n + \theta)} A e^{j\omega_0 n} = \rho A e^{j[(\omega_s + \omega_0)n + \theta]}. \quad (3.135)$$

La comparación de las salidas $y_I[n]$ e $y_V[n]$ muestra que para ambos sistemas lineales la salida es una exponencial compleja escalada (por ρ) y desfasada (en θ). Sin embargo:

- En el sistema lineal e *invariante* en el tiempo la señal de salida tiene la *misma* frecuencia que la señal de entrada.
- En el sistema lineal y *variante* en el tiempo la señal de salida tiene una frecuencia *distinta* que la señal de entrada: mientras que la entrada es una señal de frecuencia ω_0 , la salida es una señal de frecuencia $(\omega_s + \omega_0)$.

Este ejemplo puede servir de ayuda para resolver el Ejercicio 7. □

3.8.4. Entradas exponenciales complejas aplicadas abruptamente

Se ha estudiado que en los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo, entradas tipo exponenciales complejas de la forma

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \quad \text{para } -\infty < n < \infty \quad (3.136)$$

producen salidas

$$y_{ee}[n] = H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0} e^{j\omega_0 n} \quad \text{para } -\infty < n < \infty. \quad (3.137)$$

(El porqué del subíndice “ee” se justificará unas líneas más abajo). Tales señales de entrada, que están definidas sobre un eje temporal doblemente infinito ($-\infty < n < \infty$) pueden parecer modelos de señales poco prácticos. Sin embargo son muy apropiados para representar matemáticamente una amplia clase de señales, aún aquellas que están definidas sobre un intervalo de tiempo finito.

Es interesante conocer cómo se comportan los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo cuando se les aplican entradas de naturaleza más práctica, de la forma

$$x[n] = e^{j\omega n} u[n],$$

es decir, exponenciales complejas que se aplican “de golpe” en un determinado instante de tiempo, que por convención se elige aquí en $n = 0$. Utilizando la definición de la suma convolución (3.36), la salida de un sistema discreto lineal, invariante en el tiempo y *causal* con respuesta impulsiva $h[n]$ ante este tipo de entrada es

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_m h[m] x[n - m].$$

Como tanto $h[n]$ como $x[n]$ son nulas para $n < 0$, en el cálculo de la convolución sólo aparecen dos etapas (sin solapamiento por izquierda, y solapamiento parcial por izquierda) de modo que para $n < 0$ resulta $y[n] = 0$, y para $n \geq 0$ la salida se puede escribir como

$$y[n] = \sum_{m=0}^n h[m]x[n-m] = \sum_{m=0}^n h[m]e^{j\omega(n-m)} = \left(\sum_{m=0}^n h[m]e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n}, \quad (3.138)$$

donde el extremo inferior de la sumatoria resulta de notar que $h[m] = 0$ para $m < 0$, y el extremo superior de la observación que $x[n-m] = 0$ para $n-m < 0$, es decir, cuando $m > n$.

Lo que interesa es relacionar esta salida con la salida que tiene el sistema cuando se lo excita con una entrada exponencial compleja que está aplicada “desde siempre”, es decir la señal de entrada $x[n]$ dada por (3.136). Esta salida es (3.137), que de acuerdo a la definición (3.97) de la respuesta en frecuencia, y teniendo en cuenta que $h[n]$ es causal, se puede escribir como

$$y_{ee}[n] = \left(\sum_{m=0}^{\infty} h[m]e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n}. \quad (3.139)$$

Comparando (3.139) con (3.138), se nota que la única diferencia está en el extremo superior de la sumatoria. Es evidente que

$$\sum_{m=0}^n (\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} (\cdot) - \sum_{m=n+1}^{\infty} (\cdot)$$

y entonces, para $n \geq 0$ la salida $y[n]$ ante la entrada aplicada abruptamente, dada por (3.138) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} h[m]e^{-j\omega m} - \sum_{m=n+1}^{\infty} h[m]e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} h[m]e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} h[m]e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} \end{aligned}$$

es decir que

$$y[n] = \underbrace{H(e^{j\omega})e^{j\omega n}}_{y_{ee}[n]} + \underbrace{\left(- \sum_{m=n+1}^{\infty} h[m]e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n}}_{y_t[n]}$$

que está compuesta por dos términos:

- el primero, *la salida de estado estacionario* $y_{ee}[n]$, dada por (3.139), corresponde a la salida producida por la entrada que está aplicada “desde siempre” (la entrada es una *autofunción* del sistema);
- el segundo, *la salida transitoria* $y_t[n]$, dada por

$$y_t[n] = - \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} h[m]e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n}$$

es la cantidad en que difiere la salida $y[n]$ del sistema ante una entrada aplicada abruptamente de la salida de estado estacionario $y_{ee}[n]$.

La magnitud de la respuesta transitoria está acotada por

$$|y_t[n]| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} h[m] e^{-j\omega m} e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |h[m]|. \quad (3.140)$$

lo que muestra que:

- si el sistema es FIR, es decir la respuesta impulsiva $h[n]$ tiene longitud finita con $h[n] = 0$ salvo para $0 \leq n \leq N - 1$, entonces el término $y_t[n] = 0$ cuando $n \geq N - 1$, ya que

$$\left| y_t[n] \right| \Big|_{n=N-1} \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |h[m]| \Big|_{n=N-1} = \sum_{m=N}^{\infty} |h[m]| = 0.$$

En este caso,

$$y[n] = y_{ee}[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \quad \text{para } n \geq N - 1.$$

En otras palabras, en un sistema FIR la salida del sistema ante una entrada aplicada abruptamente *coincide* con la respuesta de estado estacionario después de $N - 1$ muestras: el transitorio también tiene una longitud finita.

- si el sistema es IIR (la respuesta impulsiva $h[n]$ tiene una duración infinita), la contribución de la respuesta transitoria no desaparece abruptamente. Pero si la magnitud de la respuesta impulsiva decrece para valores de n crecientes, es decir si

$$|h[n]| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

entonces

$$|y_t[n]| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En particular, la ecuación (3.140) puede escribirse como

$$|y_t[n]| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} h[m] e^{-j\omega m} e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |h[m]| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h[m]|.$$

En otras palabras, la magnitud de la respuesta transitoria está acotada por la suma de los valores absolutos de todas las muestras de la respuesta impulsiva. Si esta suma converge, es decir

$$\sum_{m=0}^{\infty} |h[m]| < \infty \quad (3.141)$$

entonces la magnitud de la respuesta transitoria efectivamente tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. (Es una propiedad de las sucesiones convergentes que si $\sum_m |h[m]| < \infty$, entonces los términos satisfacen $|h[n]| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. La recíproca *no* es cierta!) La expresión (3.141) es la condición de estabilidad de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo. Por lo tanto, una condición *suficiente* para que el transitorio tienda a cero es que el sistema sea *estable*. En este caso, para n suficientemente grande, la respuesta de estado estacionario $y_{ee}[n]$ domina a la respuesta transitoria. En cambio, si el sistema es inestable, a medida que n crece la magnitud de la respuesta transitoria puede ser mayor que la de magnitud de la salida de estado estacionario, como se muestran en los Ejemplos 3.62 y 3.63.

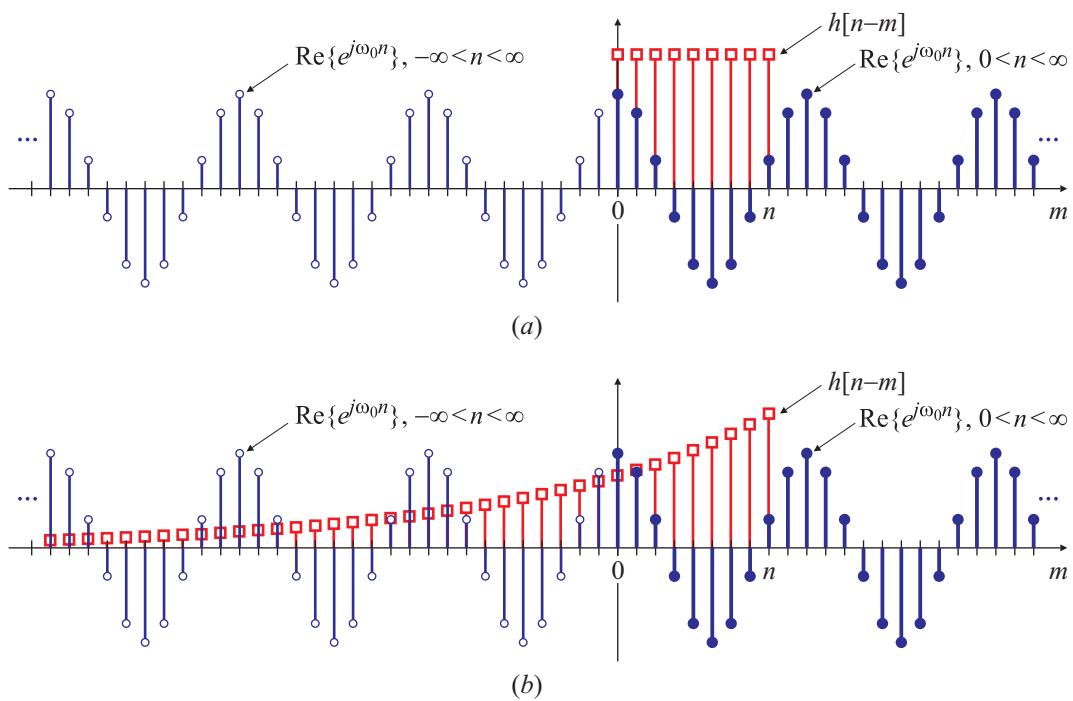


Fig. 3.63. Convolución de la parte real de una exponencial compleja aplicada abruptamente con una respuesta impulsiva de longitud finita FIR (a) y de longitud infinita IIR (b).

En la Fig. 3.63 se muestra la parte real de una exponencial compleja de frecuencia $\omega_0 = 2\pi/10$. Los puntos llenos (“●”) representan la exponencial aplicada abruptamente, mientras que los puntos huecos (“○”) la parte que falta de una exponencial aplicada “desde siempre”. Las muestras identificadas con un cuadrado (“□”) representan la respuesta impulsiva $h[n - m]$ en función de m para $n = 8$. Para el caso de longitud finita representado en la Fig. 3.63(a) es evidente que la salida consistirá solamente de la respuesta de estado estacionario para $n \geq 8$ (porque los cuadrados no “pesan” círculos huecos), mientras que en el caso de longitud infinita que se muestra en la Fig. 3.63(b) es claro que las muestras que faltan (los círculos huecos) tienen cada vez menos efecto a medida que n crece, debido a la magnitud decreciente de la respuesta impulsiva.

No es sorprendente que la condición para la existencia de la respuesta en frecuencia sea la misma que para asegurar que la respuesta de estado estacionario domine sobre la respuesta transitoria: una exponencial compleja definida para todo n , como la de la ecuación (3.136) se puede pensar como una entrada aplicada abruptamente en $n = -\infty$. La propiedad de autofunciones de las exponentiales complejas depende de la estabilidad del sistema, ya que para cualquier n finito, la magnitud de la respuesta transitoria debe ser nula, de modo que la única contribución que se observe a la salida sea la respuesta de estado estacionario $y_{ee}[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ para todo n finito.

Estas consideraciones muestran que, si se está interesado en el comportamiento *a largo plazo* de un sistema lineal, causal, invariante en el tiempo, y *estable*, no importa si la entrada senoidal fue aplicada “desde siempre” ($n = -\infty$) o abruptamente en $n = 0$, ya que después de un cierto intervalo de tiempo las dos salidas ($y_{ee}[n]$ e $y[n]$, respectivamente)

son iguales:

$$y[n] \rightarrow y_{ee}[n] \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Esto simplifica enormemente el cálculo de la salida en los casos en que $x[n]$ es una señal senoidal de la forma $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)u[n]$, porque en lugar de aplicar la suma convolución para calcular $y[n]$ a partir de $x[n]$, basta con aplicar la ecuación (3.121) usando $x_{ee}[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$, $-\infty < n < \infty$. Es cierto que este cálculo requiere conocer $H(e^{j\omega})$, y evaluarla a la frecuencia ω_0 de la señal de excitación, pero usualmente esta operación es mucho menos complicada que efectuar la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$.

EJEMPLO 3.57. Salida de un sistema IIR ante una entrada escalón

El sistema IIR del Ejemplo 3.53, repetido aquí por conveniencia

$$y[n] + ay[n - 1] = x[n], \quad y[-1] = 0,$$

con $a = 0,8 < 1$ (que asegura que el sistema es estable) se excita con una entrada $x[n] = Cu[n]$. Esta señal puede pensarse como un coseno de frecuencia $\omega_0 = 0$ aplicado abruptamente en $n = 0$, es decir

$$x[n] = C \cos(\omega_0 n)u[n],$$

con $\omega_0 = 0$. La salida de estado estacionario es, de acuerdo a (3.121),

$$y_{ee}[n] = C|H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \arg\{|H(e^{j\omega_0})|\}),$$

donde

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0}} = \frac{1}{1 - a}.$$

Por lo tanto la salida de estado estacionario es

$$y_{ee}[n] = \frac{C}{1 - a} \quad \text{para } -\infty < n < \infty. \quad (3.142)$$

Para calcular la salida real se aplica la suma convolución. Recordando que $h[n] = a^n u[n]$, se encuentra que

$$y[n] = \sum_m h[m - n]x[m] = \sum_{m=0}^n h[m - n]x[m] = \sum_{m=0}^n Ca^{n-m} = Ca^n \frac{1 - a^{-(n+1)}}{1 - a^{-1}} = \frac{a^n - a^{-1}}{1 - a^{-1}} C$$

que finalmente puede escribirse como

$$y[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} C = \underbrace{\frac{1}{1 - a} C}_{y_{ee}[n]} + \underbrace{\frac{-a^{n+1}}{1 - a} C}_{y_t[n]}.$$

El primer término es la salida de estado estacionario $y_{ee}[n]$, y coincide con la expresión calculada en base a la respuesta en frecuencia, dada por la ecuación (3.142). El segundo término es la respuesta transitoria $y_t[n]$, y es claro que $|y_t[n]| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

En sistemas más complicados, puede ser más conveniente calcular la respuesta transitoria como

$$y_t[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ y[n] - y_{ee}[n], & n \geq 0. \end{cases}$$

que para $n \geq 0$ resulta

$$y_t[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} C - \frac{1}{1 - a} C = \frac{-a^{n+1}}{1 - a} C,$$

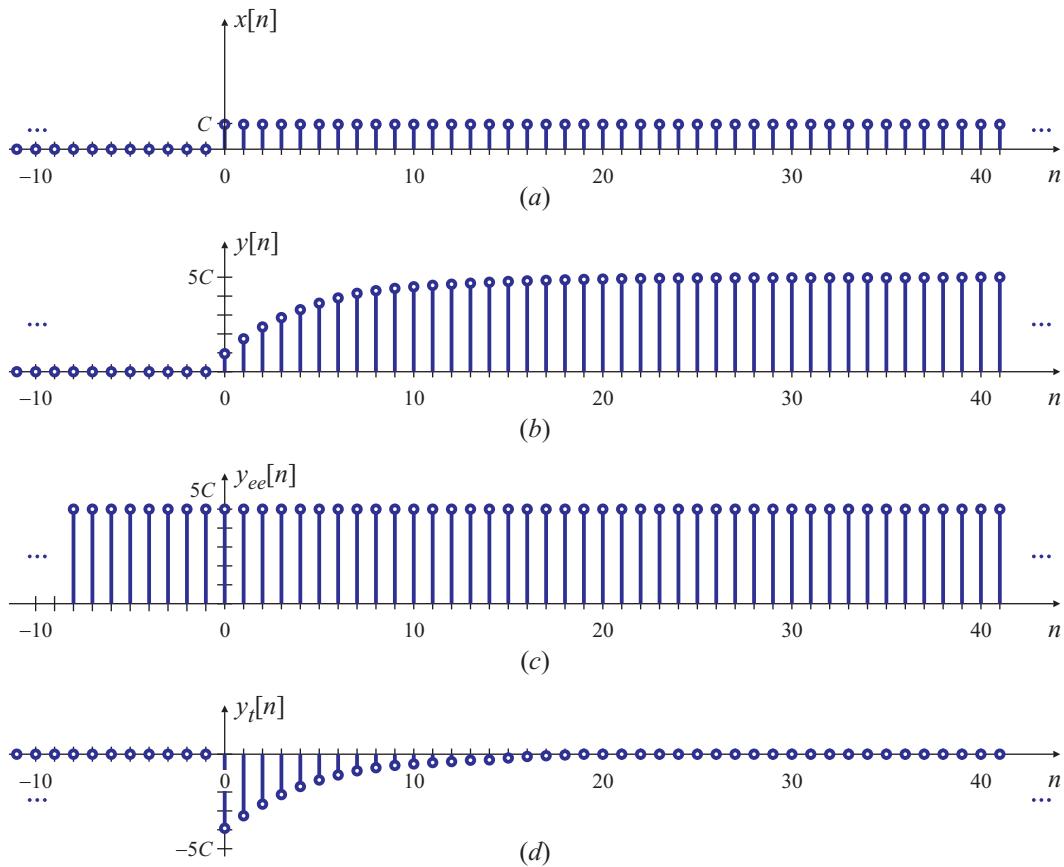


Fig. 3.64. Señal de entrada $x[n] = u[n]$ (a), señal de salida $y[n]$ (b), salida de estado estacionario $y_{ee}[n]$ (c) y salida transitoria $y_t[n] = y[n] - y_{ee}[n]$ (d) del sistema $y[n] = ay[n - 1] + x[n]$ del Ejemplo 3.57 para $a = 0,8$.

que obviamente coincide con el resultado anterior.

En este ejemplo, la magnitud de la respuesta transitoria decrece a medida que aumenta el tiempo porque $|a| < 1$, lo que es natural porque este sistema es *estable*, como se mostró en el Ejemplo 3.30. En la Fig. 3.64 se representan la entrada $x[n]$, la respuesta del sistema $y[n]$ ante esta entrada, la respuesta de estado estacionario $y_{ee}[n]$ y la respuesta transitoria para las primeras 50 muestras, para $a = 0,8$, apreciándose que $y[n] \rightarrow y_{ee}[n]$ y que $|y_t[n]| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. \square

En el siguiente ejemplo se muestra que el cálculo de la salida $y[n]$ aplicando la convolución puede ser bastante complicado, aún para sistemas simples, y que el cálculo de la salida de estado estacionario es mucho más sencillo y aporta la misma información en aquellos casos de sistemas estables donde importe el comportamiento a largo plazo y no el comportamiento transitorio, ya que en esos casos, $y[n] \rightarrow y_{ee}[n]$ cuando $n \rightarrow \infty$.

EJEMPLO 3.58. Salida de un sistema IIR ante una entrada senoidal aplicada abruptamente

El sistema IIR del Ejemplo 3.53

$$y[n] + ay[n - 1] = x[n], \quad y[-1] = 0,$$

con $a = 0,8 < 1$ se excita con una entrada cosenoidal aplicada abruptamente en $n = 0$, es decir

$$x[n] = C \cos(\omega_0 n) u[n], \quad (3.143)$$

con $\omega_0 \neq 0$, como se muestra en la Fig. 3.65(a). La salida de estado estacionario es, según (3.121),

$$y_{ee}[n] = C |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \arg\{|H(e^{j\omega_0})|\}),$$

donde

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega_0 + a^2}} e^{-j \arctan\left(\frac{a \sin \omega_0}{1 - a \cos \omega_0}\right)}.$$

Por lo tanto la salida de estado estacionario es

$$y_{ee}[n] = \frac{C}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega_0 + a^2}} \cos\left[\omega_0 n - \arctan\left(\frac{a \sin \omega_0}{1 - a \cos \omega_0}\right)\right] \quad \text{para } -\infty < n < \infty, \quad (3.144)$$

que se representa en la Fig. 3.65(b) con círculos (○). Para calcular la salida ante la entrada (3.143) se aplica la suma convolución. Recordando que $h[n] = a^n u[n]$, se encuentra que

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{m=0}^n h[m] x[n-m] = C \sum_{m=0}^n a^m \cos[\omega_0(n-m)],$$

donde los extremos de la sumatoria resultan de que tanto $h[n]$ como $x[n]$ son nulas cuando $n < 0$. Para calcular la sumatoria es conveniente escribir el coseno usando la fórmula de Euler, $\cos \theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$. Entonces

$$y[n] = \frac{C}{2} \sum_{m=0}^n a^m \left[e^{j\omega_0(n-m)} + e^{-j\omega_0(n-m)} \right] = \frac{C}{2} e^{j\omega_0 n} \sum_{m=0}^n a^m e^{-j\omega_0 m} + \frac{C}{2} e^{-j\omega_0 n} \sum_{m=0}^n a^m e^{j\omega_0 m}.$$

Recordando que $\sum_{m=0}^n \rho^m = (1 - \rho^{n+1})/(1 - \rho)$, se tiene que

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{C}{2} \frac{1 - (ae^{-j\omega_0})^{n+1}}{1 - ae^{-j\omega_0}} e^{j\omega_0 n} + \frac{C}{2} \frac{1 - (ae^{j\omega_0})^{n+1}}{1 - ae^{j\omega_0}} e^{-j\omega_0 n} \\ &= \frac{C}{2} \frac{[1 - (ae^{-j\omega_0})^{n+1}] (1 - ae^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} + [1 - (ae^{j\omega_0})^{n+1}] (1 - ae^{-j\omega_0}) e^{-j\omega_0 n}}{(1 - ae^{-j\omega_0})(1 - ae^{j\omega_0})} \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$y[n] = \frac{C}{2} \frac{[a^{n+2} - a^{n+1} e^{-j\omega_0} + e^{j\omega_0 n} - ae^{j\omega_0(n+1)}] + [a^{n+2} - a^{n+1} e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0 n} - ae^{-j\omega_0(n+1)}]}{(1 - ae^{-j\omega_0})(1 - ae^{j\omega_0})}.$$

Operando se encuentra que

$$y[n] = C \frac{a^{n+2} - a^{n+1} \cos \omega_0 + \cos(\omega_0 n) - a \cos[\omega_0(n+1)]}{1 - 2a \cos \omega_0 + a^2}. \quad (3.145)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 n) - a \cos[\omega_0(n+1)] &= \cos(\omega_0 n) - a \cos(\omega_0 n) \cos \omega_0 + a \sin(\omega_0 n) \sin \omega_0 \\ &= [1 - a \cos \omega_0] \cos(\omega_0 n) + a \sin \omega_0 \sin(\omega_0 n) \end{aligned}$$

y sabiendo que $a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos[\theta - \arctan(b/a)]$, resulta

$$\cos(\omega_0 n) - a \cos[\omega_0(n+1)] = \sqrt{1 - 2a \cos \omega_0 + a^2} \cos\left[\omega_0 n - \arctan\left(\frac{a \sin \omega_0}{1 - a \cos \omega_0}\right)\right]$$

Finalmente, reemplazando en (3.145), se encuentra que

$$y[n] = Ca^{n+1} \frac{a - \cos \omega_0}{1 - 2a \cos \omega_0 + a^2} + \frac{C}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega_0 + a^2}} \cos\left[\omega_0 n - \arctan\left(\frac{a \sin \omega_0}{1 - a \cos \omega_0}\right)\right], \quad (3.146)$$

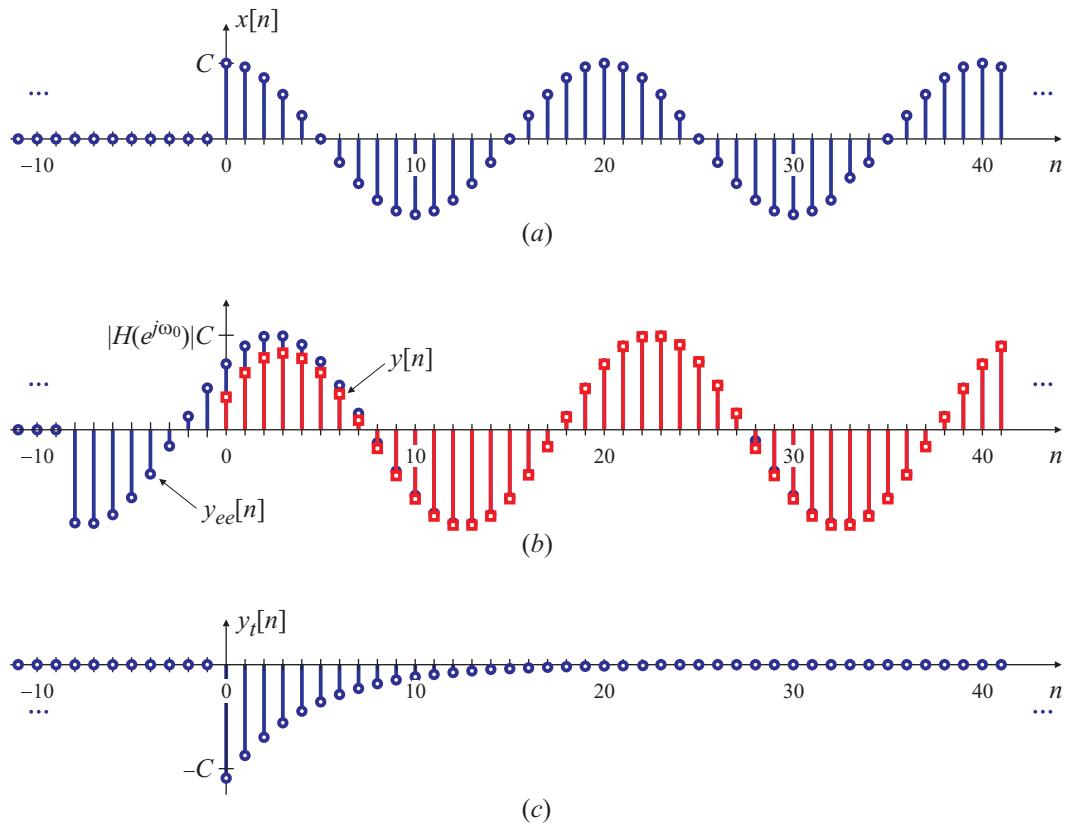


Fig. 3.65. Señal de entrada $x[n] = \cos(\omega_0 n)u[n]$ (a), señal de salida $y[n]$ y de estado estacionario $y_{ee}[n]$ (b), y salida transitoria $y_t[n] = y[n] - y_{ee}[n]$ (c) del sistema $y[n] = ay[n - 1] + x[n]$ del Ejemplo 3.58 para $a = 0,8$ y $\omega_0 = \pi/10$.

para $n \geq 0$, representada con cuadrados (\square) en la Fig. 3.65(b). El primer término es la respuesta transitoria,

$$y_t[n] = Ca^{n+1} \frac{a - \cos \omega_0}{1 - 2a \cos \omega_0 + a^2},$$

que se extingue cuando $n \rightarrow \infty$ porque $|a| < 1$, como se muestra en la Fig. 3.65(c). El segundo término es la respuesta de estado estacionario,

$$y_{ee}[n] = \frac{C}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega_0 + a^2}} \cos \left[\omega_0 n - \arctan \left(\frac{a \sin \omega_0}{1 - a \cos \omega_0} \right) \right],$$

que se representa círculos en la Fig. 3.65(b) y naturalmente coincide con la calculada en (3.144). Este ejemplo muestra que si no interesa el comportamiento transitorio, calcular la salida utilizando la respuesta en frecuencia es mucho menos complicado que usando la convolución, aún para el caso de este sistema tan simple. \square

EJEMPLO 3.59. Salida estacionaria y transitoria en un sistema FIR

Se desea conocer la salida de estado estacionario y la salida transitoria de un sistema FIR tipo promediador del Ejemplo 3.55 cuya respuesta impulsiva es

$$h[n] = \begin{cases} 1/N, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

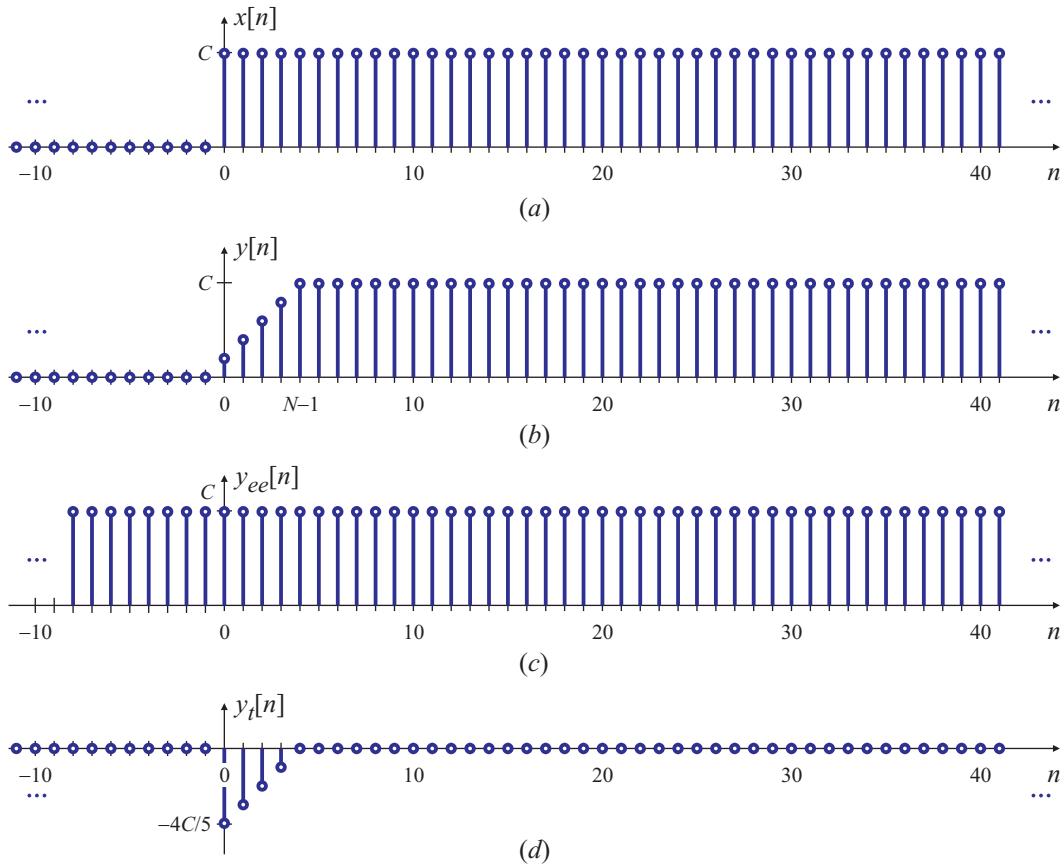


Fig. 3.66. Señal de entrada $x[n] = u[n]$ (a), señal de salida $y[n]$ (b), salida de estado estacionario $y_{ee}[n]$ (c) y salida transitoria $y_t[n] = y[n] - y_{ee}[n]$ (d) del sistema $y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[n-m]/N$ del Ejemplo 3.59 para $N = 5$.

con $N = 5$, cuando se lo excita con una entrada tipo escalón, $x[n] = Cu[n]$. Al igual que en el Ejemplo 3.57, esta entrada puede pensarse como un coseno de frecuencia $\omega_0 = 0$:

$$x[n] = C \cos(\omega_0 n)u[n]. \quad (3.147)$$

La salida de estado estacionario se calcula con (3.121), y está dada por

$$y_{ee}[n] = C|H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \arg\{|H(e^{j\omega_0})|\}).$$

La respuesta en frecuencia dada por (3.132) fue calculada en el Ejemplo 3.55, y se representa en la Fig. 3.60. A la frecuencia $\omega_0 = 0$ de la señal de entrada, el valor de la respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0} = 1,$$

que tiene módulo unitario y fase nula. La salida de estado estacionario $y_{ee}[n]$ es una constante de amplitud c :

$$y_{ee}[n] = C \quad \text{para todo } n. \quad (3.148)$$

La salida $y[n]$ del sistema ante la entrada $x[n] = Cu[n]$ dada por (3.147) puede calcularse utilizando la suma convolución. Como la respuesta impulsiva $h[n]$ es de longitud finita, se reconocen tres etapas en el cálculo de la convolución (sin solapamiento por izquierda para $n < 0$, solapamiento parcial por izquierda para $0 \leq n < N - 1$, y solapamiento total para $n \geq N$).

A esta altura del curso no debería ser complicado verificar que

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ C(n+1)/N, & 0 \leq n \leq N-1, \\ C, & n > N-1. \end{cases} \quad (3.149)$$

La respuesta transitoria es

$$y_t[n] = y[n] - y_{ee}[n],$$

y entonces

$$y_t[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ C(n+1-N)/N, & 0 \leq n < N-1, \\ 0, & n \geq N-1. \end{cases}$$

La respuesta transitoria también es de longitud finita, y que la salida del sistema coincide con la de estado estacionario cuando $n \geq N-1$. En la Fig. 3.66 se representan la entrada $x[n]$, la salida $y[n]$ del sistema ante esta entrada, la respuesta de estado estacionario $y_{ee}[n]$ y la respuesta transitoria para las primeras 50 muestras: se observa que $y[n] = y_{ee}[n]$ después de $N-1 = 4$ muestras, y que el transitorio tiene una duración finita de $N-1 = 4$ muestras. \square

EJEMPLO 3.60. Respuestas de un sistema IIR excitado con senoidales

Se desea conocer la respuesta del sistema IIR del Ejemplo 3.53 y compararla con la respuesta de estado estacionario cuando la señal de entrada es una combinación de sinusoidales aplicadas abruptamente:

$$x[n] = [A \operatorname{sen}(\omega_1 n) + B \cos(\omega_2 + \theta) + C] u[n], \quad (3.150)$$

con $a = 0,8$, $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $\omega_1 = 0,1\pi$, $\omega_2 = 0,3\pi$, $\theta = \pi/6$. Esta señal se puede escribir como

$$x[n] = (x_0[n] + x_1[n] + x_2[n])u[n]$$

donde

$$x_0[n] = A \operatorname{sen}(\omega_1 n), \quad x_1[n] = B \cos(\omega_2 + \theta), \quad x_2[n] = C.$$

Las salidas de *estado estacionario* $y_{ee}[n]$ para las señales de entrada $x_0[n]$ y $x_1[n]$ fueron calculadas en el Ejemplo 3.53 y para la entrada $x_2[n]$ en el Ejemplo 3.57. Combinando estos resultados, dados por las ecuaciones (3.130), (3.131) y (3.142), se encuentra que la salida de *estado estacionario* para la entrada (3.150) es

$$\begin{aligned} y_{ee}[n] &= 5 + 2,90730 \operatorname{sen}(0,1\pi n - 0,80197) - 1,19652 \cos(0,3\pi n + \frac{\pi}{6} - 0,88485) \\ &= 5 + 2,90730 \operatorname{sen}[0,1\pi(n - 2,55274)] - 1,19652 \cos[0,3\pi(n - 0,93886) + \frac{\pi}{6}]. \end{aligned}$$

La respuesta $y[n]$ del sistema ante la entrada (3.150) se puede calcular usando la suma convolución o por recursión. Para el caso de una entrada tipo coseno aplicado abruptamente esta salida se calculó en el Ejemplo 3.58 [ecuación (3.146)]; una forma de cálculo más sencilla se estudiará en el Capítulo 6. Las respuestas $y_i[n]$ del sistema ante una entrada abrupta y la salida de *estado estacionario* $y_{ee_i}[n]$ para cada una de las componentes ($i = 0, 1, 2$) de la señal de entrada se comparan en la Fig. 3.67. La respuesta de *estado estacionario* se indica mediante diamantes (\blacklozenge), y la respuesta $y[n]$ ante la entrada $x[n]$ aplicada abruptamente mediante círculos (\circ). También se grafica la respuesta transitoria,

$$y_{ti}[n] = y_i[n] - y_{ee_i}[n],$$

que muestra que todas las componentes de la salida convergen al valor de *estado estacionario* en aproximadamente 20 muestras. \square

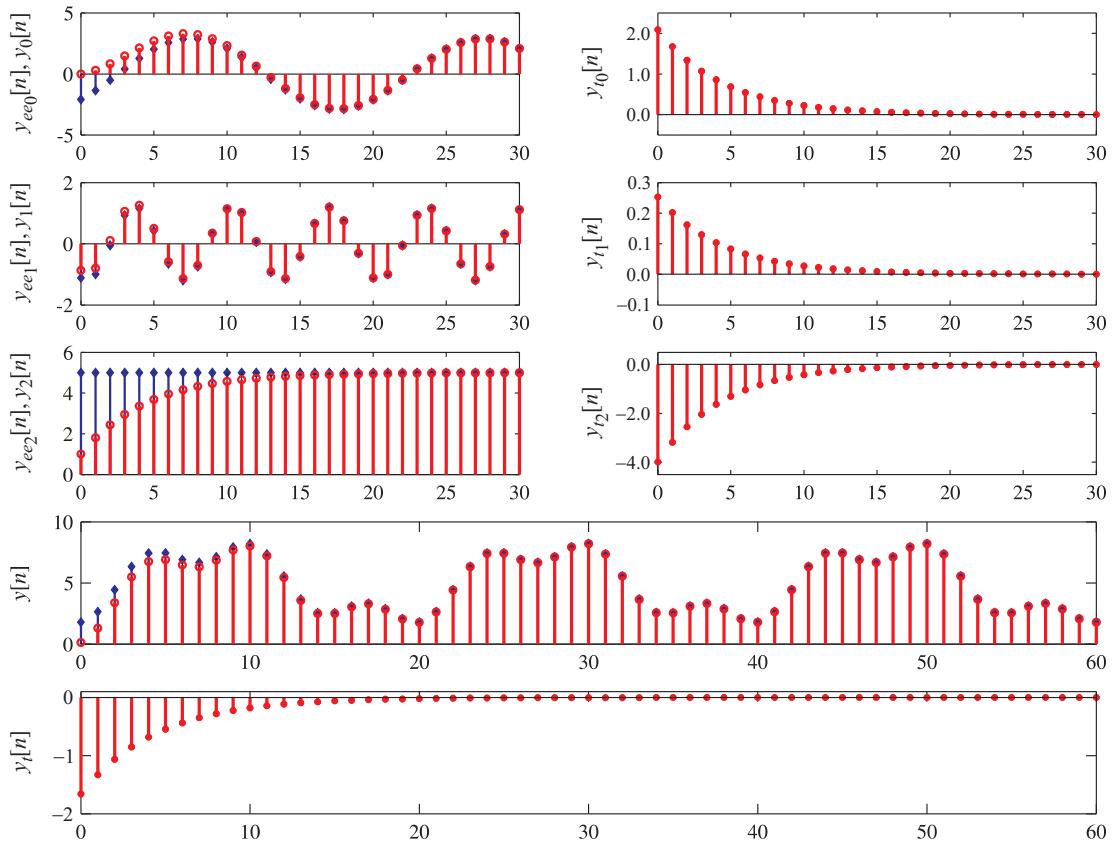


Fig. 3.67. Comparación de las respuestas $y_i[n]$ (○), las salidas de estado estacionario $y_{ee_i}[n]$ (♦) y las salidas transitorias $y_{t_i}[n]$ para el sistema IIR $y[n] = ay[n - 1] + x[n]$.

EJEMPLO 3.61. Respuestas de un sistema FIR excitado con senoidales

La misma entrada del ejemplo anterior se aplica al filtro FIR promediador de los Ejemplos 3.55 y 3.59, donde se calculó la salida de estado estacionario $y_{ee}[n]$ dada por (3.133) para entradas sinusoidales, y por (3.148) para una entrada constante.

Las herramientas con que se dispone hasta el momento para calcular la respuesta $y[n]$ del sistema ante la entrada (3.150)

$$x[n] = [A \operatorname{sen}(\omega_1 n) + B \cos(\omega_2 + \theta) + C] u[n],$$

aplicada abruptamente es la suma convolución o el método de recursión. Aplicando cualquiera de ellas, se pueden calcular las respuestas $y_i[n]$ del sistema ante esta entrada. Para el caso de la señal $x_2[n] = Cu[n]$ esta salida se calculó en el Ejemplo 3.59, y está dada por (3.149). En la Fig. 3.68 se muestran las salidas, $y_i[n]$ indicadas con círculos (○), y también las salidas de estado estacionario $y_{ee_i}[n]$ marcadas como (♦) para cada una de las componentes $x_i[n]$ de la señal de entrada ($i = 0, 1, 2$) junto con la respuesta transitoria $y_{t_i}[n] = y_i[n] - y_{ee_i}[n]$. También se muestra la respuesta conjunta $y[n]$ y la respuesta transitoria $y_t[n]$. Todas las componentes de la señal de salida convergen a la solución de estado estacionario en sólo $N - 1 = 4$ muestras, y el error es nulo a partir de la muestra $n = N = 5$ en adelante. □

El siguiente ejemplo muestra que si el sistema *no es estable*, la respuesta de estado estacionario no domina sobre la respuesta transitoria, pero tampoco significa necesariamente

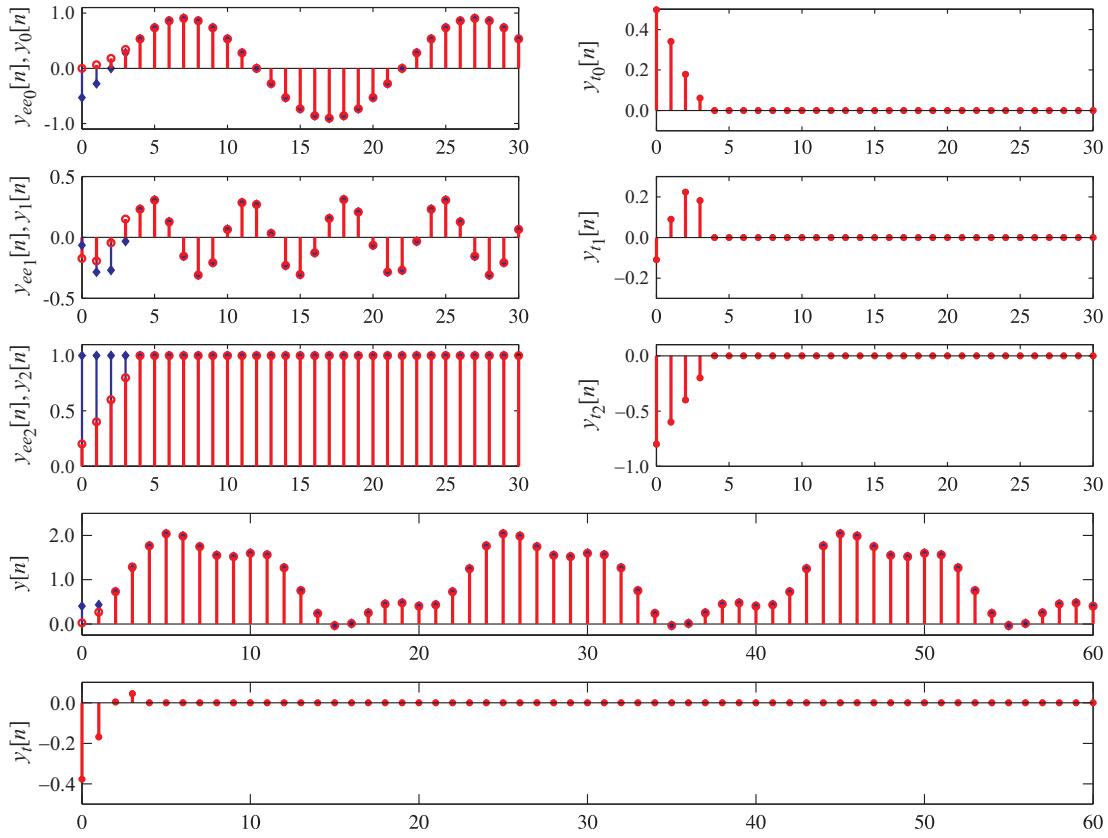


Fig. 3.68. Comparación de las respuestas $y_i[n]$ (○), las salidas de estado estacionario $y_{eei}[n]$ (◆) y las salidas transitorias $y_{ti}[n]$ para el sistema FIR promediador de $N = 5$ muestras.

que la magnitud de la respuesta transitoria crece sin límite a medida que n crece: este comportamiento depende tanto del sistema como de la señal de excitación.

EJEMPLO 3.62. Respuesta estacionaria y transitoria en un sistema inestable

El sistema caracterizado por la ecuación a diferencias $y[n] - \sqrt{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n]$, con $y[-1] = y[-2] = 0$ tiene respuesta impulsiva

$$h[n] = \sqrt{2} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{4}(n+1)\right] u[n].$$

Este sistema lineal e invariante en el tiempo es *inestable* porque

$$\sum_n |h[n]| \rightarrow \infty.$$

Sin embargo, como se podrá calcular después de estudiar los contenidos de la Sección [aplicaciones TFTD] su respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \sqrt{2}e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega}}.$$

Si este sistema se excita con una entrada senoidal

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) u[n]$$

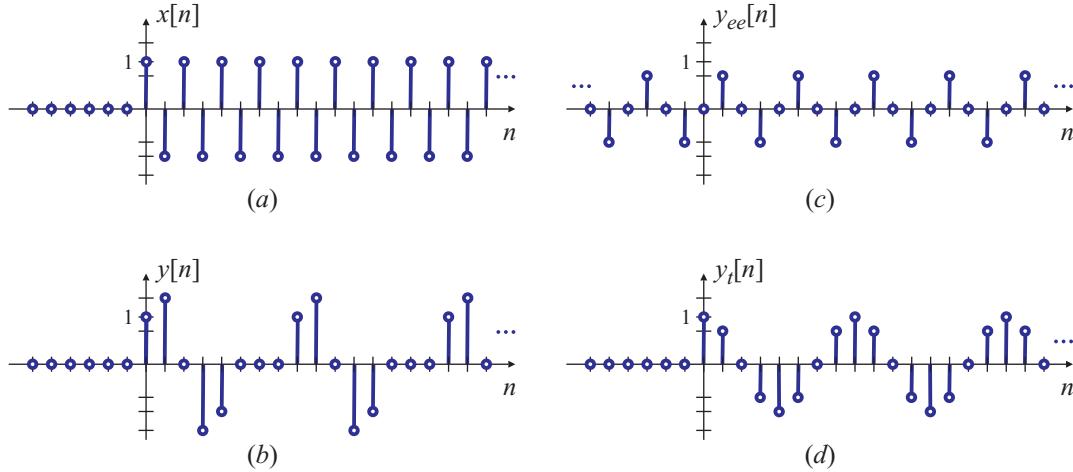


Fig. 3.69. Respuestas del sistema discreto del Ejemplo 3.62: entrada $x[n]$ (a), salida $y[n]$ (b), salida de estado esacionario $y_{ee}[n]$ (c) y salida transitoria $y_t[n]$ (d).

graficada en la Fig. 3.69(a), la salida se puede calcular por recursión y es

$$y[n] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right] u[n]$$

Para $n \geq 0$ es una sucesión periódica de período $N = 8$. Algunos valores se listan a continuación:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$y[n]$	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-1	0	0	0	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-1	0	0	0	1	...

y se representan en la Fig. 3.69(b).

Para calcular la respuesta de estado estacionario es necesario conocer $H(e^{j\omega})$ en $\omega = \pi/2$:

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}$$

y por lo tanto,

$$|H(e^{j\omega_0})| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arg\{H(e^{j\omega_0})\} = -\frac{\pi}{2}.$$

De acuerdo con (3.121), la salida de estado estacionario ante una entrada $x_{ee}[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ para $-\infty < n < \infty$ es

$$y_{ee}[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right),$$

que tiene período 4, y se grafica en la Fig. 3.69(c). Algunos de los valores de esta sucesión son:

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$y_{ee}[n]$...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	...

Finalmente, la respuesta transitoria para $n \geq 0$ es

$$\begin{aligned} y_t[n] &= y[n] - y_{ee}[n] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{aligned}$$

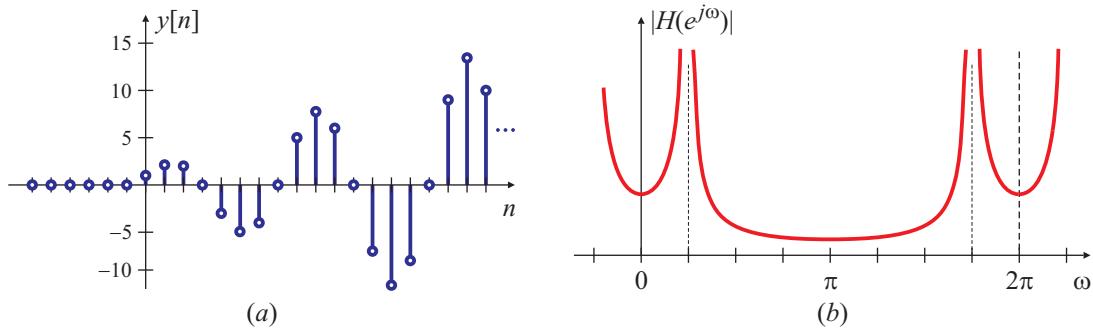


Fig. 3.70. Respuesta impulsiva (a) y módulo de la respuesta en frecuencia (b) del sistema inestable del Ejemplo 3.63.

es decir

$$y_t[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n].$$

Algunos de los valores de esta sucesión de período 8, graficada en la Fig. 3.69(d), son:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$y_{ee}[n]$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	...

Es evidente que en este caso la magnitud de la respuesta transitoria $y_t[n]$ no tiende a cero a medida que n crece. Tampoco es cierto que la salida de estado estacionario domine sobre la respuesta transitoria, porque mientras la cota C_e sobre la respuesta transitoria es

$$C_e = \max_n |y_{ee}[n]| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

la cota sobre la respuesta transitoria es

$$C_t = \max_n |y_t[n]| = 1$$

y es claro que $C_t > C_e$.

□

En este ejemplo una entrada acotada produce una salida acotada, a pesar que el sistema es *inestable*. Esto no debe sorprender, porque es un caso similar al estudiado en el Ejemplo 3.17 donde se calculó la respuesta de un sistema acumulador al excitarlo con un impulso. La definición de estabilidad en la Sección 3.3.5 exige que ante *cualquier* entrada acotada la salida permanezca acotada. En el próximo ejemplo se cambia la sucesión de entrada que sigue siendo acotada pero que produce una salida cuya magnitud crece a medida que transcurre el tiempo. En este caso no es posible calcular la salida de estado estacionario, y no tiene mucho sentido hablar de salida “transitoria”.

EJEMPLO 3.63. Respuesta estacionaria y transitoria en un sistema inestable (parte 2)

El sistema del Ejemplo 3.62 se excita con una señal también sinusoidal, pero de distinta frecuencia:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n]. \quad (3.151)$$

La salida se puede calcular por recursión, y está dada por

$$y[n] = \frac{n+2}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{4}(n+1)\right] u[n], \quad (3.152)$$

algunos de cuyos valores para $n \geq 0$ son

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$y[n]$	1	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	2	0	-3	$\frac{-7}{\sqrt{2}}$	-4	0	5	$\frac{11}{\sqrt{2}}$	6	0	-7	$\frac{-15}{\sqrt{2}}$	-8	0	9	...

La evolución de $y[n]$ en función de n se representa en la Fig. 3.70(a). El sistema es inestable porque la entrada acotada (3.151) produce una salida cuya magnitud crece sin límite, como se aprecia en (3.152).

Por otra parte, el intento de calcular la salida de estado estacionario fracasa: cuando se pretende evaluar la respuesta en frecuencia para $\omega_0 = \pi/4$ se encuentra que

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega}} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} + 2e^{-j2\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{(1-j) - (1+j)}$$

es decir

$$\|H(e^{j\omega})\|_{\omega \rightarrow \omega_0} \rightarrow \infty.$$

como se puede apreciar en la curva del módulo de la respuesta en frecuencia que se grafica en la Fig. 3.70(b). En síntesis, este ejemplo muestra que para la entrada (3.151) no se puede distinguir un estado transitorio y otro estacionario en la señal de salida de este sistema. \square

Los Ejemplos 3.62 y 3.63 muestran la naturaleza de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo inestables:

- La inestabilidad no significa necesariamente que la salida “explota” o crece sin límites, como se muestra en el Ejemplo 3.62.
- La distinción entre “estado transitorio” y “estado estacionario” sólo tiene sentido para sistemas estables. Aún en el caso en que la salida resulte acotada, como en el Ejemplo 3.62, no puede asegurarse que la salida de estado estacionario domine sobre la salida transitoria, lo que en cierta forma invalida su nombre.
- Que el sistema sea inestable no significa que no pueda calcularse su respuesta en frecuencia. Ciertamente, el cálculo no puede basarse en la definición (3.97), porque en general la sumatoria no converge. Aunque la respuesta en frecuencia puede calcularse utilizando las herramientas que se estudiarán en la próxima sección, el Ejemplo 3.63 muestra que su utilidad es bastante limitada. De aquí que en general cuando se habla de la respuesta en frecuencia de un sistema, implícitamente se asume que el sistema es estable.

3.9. ¿Qué falta?

Hasta el momento, se ha mostrado que los sistemas lineales e invariantes en el tiempo pueden especificarse completamente con su respuesta impulsiva $h[n]$ o con una ecuación a diferencias con coeficientes constantes y condiciones iniciales nulas. Aunque estas representaciones son totalmente equivalentes (aunque no son únicas para el caso de las ecuaciones a diferencias) el pasaje de una a otra forma puede ser complicado, como se representa en la Fig. 3.71.

Por ejemplo, si un sistema se especifica por una ecuación a diferencias, su respuesta impulsiva $h[n]$ puede calcularse por recursión, como en el Ejemplo 3.41. Pero encontrar una expresión genérica puede ser bastante complicado, como se muestra a continuación.

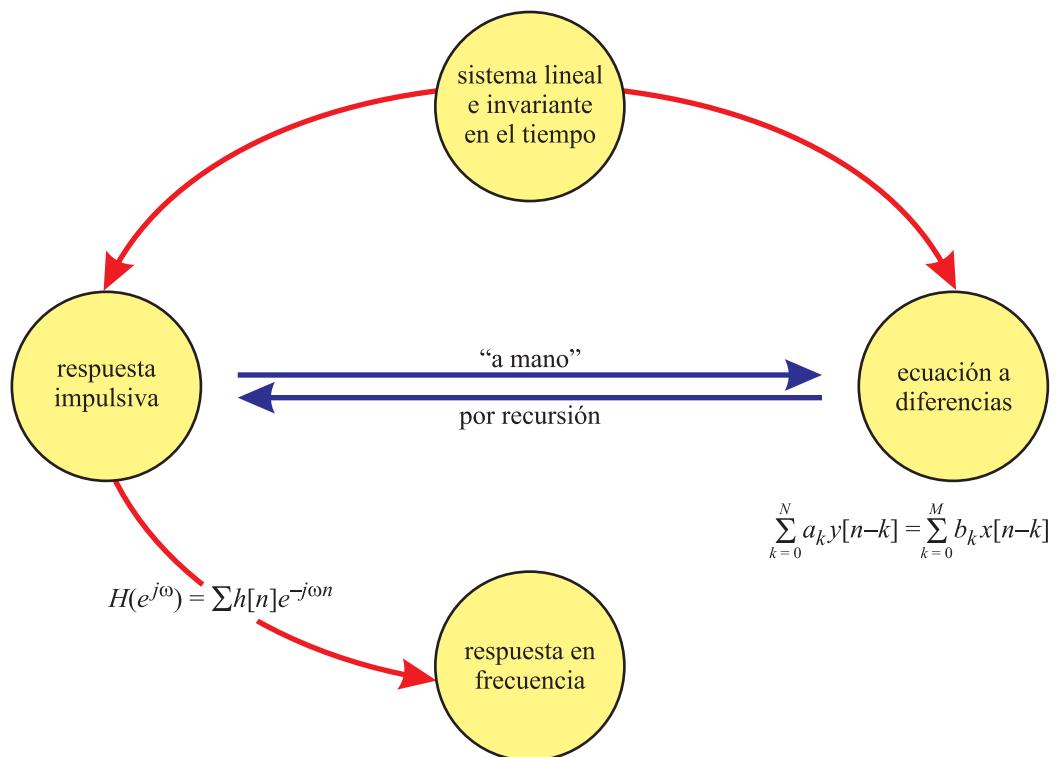


Fig. 3.71. Relaciones entre las representaciones de sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

EJEMPLO 3.64. Cálculo de la respuesta impulsiva a partir de la ecuación a diferencias
Dado el sistema caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] - ay[n-1] - by[n-2] = x[n],$$

con condiciones iniciales nulas $y[-1] = y[-2] = 0$, la respuesta impulsiva se calcula haciendo $x[n] = \delta[n]$, $h[n] = y[n]$, y escribiendo la ecuación a diferencias en forma recursiva:

$$h[n] = ah[n-1] + bh[n-2] + \delta[n].$$

Para los valores de $n \geq 0$ se pueden calcular los valores de $h[n]$ según se listan en la siguiente tabla:

n	$h[n]$
0	1
1	a
2	$a^2 + b$
3	$a^3b + 2ab$
4	$a^4 + 3a^2b + b^2$
5	$a^5 + 4a^3b + 3ab^2$
6	$a^6 + 5a^4b + 6a^2b^2 + b^3$
\vdots	\vdots

A primera vista, no parece sencillo generalizar $h[n]$ para cualquier valor de n . Con los métodos que

se estudiarán en el Capítulo 6 se puede calcular que la forma general de la respuesta impulsiva es

$$h[n] = \frac{1}{2} \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n u[n]$$

que evidentemente no es sencilla de deducir a partir de los valores calculados por recursión. \square

También es complicado encontrar la ecuación a diferencias a partir de la respuesta impulsiva $h[n]$. Una forma de calcularla se mostró en los Ejemplos 3.35 y 3.36, donde se obtuvo la ecuación a diferencias del acumulador, y del sistema con respuesta impulsiva $h[n] = a^n u[n]$, utilizando manipulaciones algebraicas sencillas y un poco de ingenio. Pero este método “artesanal” muchas veces no resulta práctico, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.65. Determinación de la ecuación a diferencias a partir de la respuesta impulsiva

Dada la respuesta impulsiva de longitud infinita (IIR)

$$h[n] = a^n u[n] + b^{n-1} u[n-1] \quad (3.153)$$

es muy difícil encontrar la ecuación a diferencias utilizando el método empleado en los Ejemplos 3.35 y 3.36: primero habría que encontrar $y[n]$ en función de $x[n]$ haciendo la convolución entre $h[n]$ y una $x[n]$ genérica, que probablemente resulte en una ecuación que expresa $y[n]$ en función de las infinitas muestras pasadas de $x[n]$. Después debería calcularse $y[n]$ para distintos valores de n , y finalmente aguzar el ingenio para lograr encontrar una relación entre $y[n]$ y sus muestras pasadas, y $x[n]$ y sus muestras pasadas. Más adelante se encontrará que la respuesta impulsiva indicada en la ecuación (3.153) se puede obtener por recursión de la ecuación a diferencias

$$y[n] - (a + b) y[n-1] + ab y[n-2] = x[n] + (1 - b)x[n-1] - a x[n-2],$$

con condiciones iniciales nulas, $y[-1] = y[-2] = 0$. La forma y los coeficientes de esta ecuación a diferencias permiten deducir que no es trivial encontrar esta expresión aplicando la técnica de los Ejemplos 3.35 y 3.36. \square

Estos ejemplos muestran que si bien es posible pasar de una a otra representación, con las herramientas desarrolladas hasta ahora este pasaje es complicado y para nada sistemático.

El cálculo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ muestra otro inconveniente. Tal como se la ha definido en (3.97), para calcularla es necesario conocer la respuesta impulsiva $h[n]$. Esto significa que si se parte de una ecuación a diferencias, primero tiene que calcularse su respuesta impulsiva, por ejemplo, aplicando el método de recursión, y recién entonces se puede obtener la respuesta en frecuencia. Esto no sólo es poco práctico, sino que en los casos de sistemas marginalmente estables como el planteado en el Ejemplo 3.62 no se la podría calcular.

En el resto del Capítulo se desarrollan técnicas que permiten solucionar estos problemas en la gran mayoría de los casos. La solución completa se alcanza con el desarrollo de la Transformada Z que se estudia en el Capítulo 6. Sin embargo, las herramientas que se presentan a continuación son tan poderosas que tienen aplicaciones en muchísimos otros campos además de la teoría de sistemas. Bien puede decirse que el desarrollo explosivo del procesamiento de señales en los últimos años se debe al descubrimiento de formas muy eficientes de implementar algunas de las ideas que se discuten a continuación.

3.10. Representación de sucesiones con transformadas de Fourier

En esta sección se estudiará en detalle la manera de representar una señal cualquiera de la forma propuesta en la ecuación (3.117):

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}.$$

Una manera sería tratando de “recuperar” la señal $x[n]$ a partir de su respuesta en frecuencia $X(e^{j\omega})$ dada por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n}. \quad (3.154)$$

Recordando las definiciones de las series complejas de Fourier del Capítulo 2, una señal periódica $\tilde{x}(t)$, de período T , se puede representar como

$$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T} kt}, \quad (3.155)$$

con

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T \tilde{x}(t) e^{-j\frac{2\pi}{T} kt} dt. \quad (3.156)$$

Comparando $X(e^{j\omega})$ con $\tilde{x}(t)$, se nota que ambas son periódicas (la primera con período 2π , y la segunda con período T), y por lo tanto, $X(e^{j\omega})$ puede expresarse usando series de Fourier. Comparando las expresiones (3.154) con (3.155), en esta serie de Fourier bastaría hacer los reemplazos

$$c_k \rightarrow x[n], \quad k \rightarrow -n, \quad T \rightarrow 2\pi, \quad t \rightarrow \omega,$$

de modo que aplicando estos reemplazos en (3.156) se podría decir que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{\omega n} d\omega \quad (3.157)$$

Las ecuaciones (3.154)-(3.157)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n}$$

(3.154)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

(3.157)

son un par transformado de Fourier. La expresión (3.154) es la *transformada de Fourier de tiempo discreto* o TFTD de la sucesión $x[n]$, y también se la conoce como *ecuación de análisis*, ya que analiza la sucesión $x[n]$ para determinar cuánto de cada componente frecuencial es necesario para sintetizar $x[n]$ utilizando la ecuación (3.157). Ésta, a su vez, es la *transformada inversa de Fourier de tiempo discreto*, y se la denomina *ecuación de síntesis*, porque representa a $x[n]$ como la superposición de exponenciales complejas infinitesimalmente pequeñas de la forma

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

donde $X(e^{j\omega})$ indica el aporte de cada una de las componentes exponenciales complejas, y ω varía sobre un intervalo de longitud 2π . En la expresión (3.157) el intervalo de integración es cualquiera de longitud 2π . Dependiendo del caso, puede ser conveniente elegir el intervalo $[0, 2\pi)$ o el intervalo $(-\pi, \pi]$, como se verá en los ejemplos. Esta equivalencia entre las series de Fourier de las señales de tiempo continuo y la representación en transformada de Fourier de las señales de tiempo discreto es muy útil porque se pueden aplicar todas las propiedades que se han estudiado en el Capítulo 2.

La deducción del par transformado (3.154)-(3.157) se basó en el hecho que la transformada de Fourier es una señal periódica, pero no se demostró explícitamente que una fuera la inversa de la otra, ni tampoco qué tipo de señales puede ser representado usando (3.157). Para demostrar que (3.157) es la inversa de (3.154), se puede calcular $X(e^{j\omega})$ usando (3.154), y sustituir este resultado en (3.157). Específicamente, se define

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \left(\sum_m x[m] e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} d\omega,$$

y se debe probar que $\hat{x}[n] \equiv x[n]$. En la sumatoria que está entre paréntesis se ha cambiado el índice de la suma para no confundirlo con el índice n para el cual se calcula el valor de $\hat{x}[n]$. Si la sumatoria converge uniformemente para todo ω , se pueden intercambiar el orden de la integral y el de la sumatoria para obtener

$$\hat{x}[n] = \sum_m x[m] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega m} e^{j\omega n} d\omega \right) = \sum_m x[m] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega \right). \quad (3.158)$$

Evaluando la integral entre paréntesis se encuentra que, si $n - m \neq 0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \frac{1}{2\pi j(n-m)} \left(e^{j\pi(n-m)} - e^{-j\pi(n-m)} \right).$$

Recordando que $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin \theta$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \frac{\sin[\pi(n-m)]}{\pi(n-m)} = \text{sinc}(n-m), \quad \text{si } n - m \neq 0.$$

Si $n - m = 0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\omega = 1.$$

De modo que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \text{sinc}(n-m) = \delta[n-m] = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (3.159)$$

que resulta de observar que m y n son enteros (porque son los índices de las variables discretas). La ecuación (3.159) es interesante porque muestra distintas formas de representar un impulso discreto que pueden ser de utilidad en numerosos desarrollos.

Reemplazando este resultado en (3.158) se encuentra que

$$\hat{x}[n] = \sum_m x[m] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega m} e^{j\omega n} d\omega \right) = \hat{x}[n] = \sum_m x[m] \delta[n-m] = x[n],$$

que demuestra que las ecuaciones (3.157) y (3.154) efectivamente son un par transformado.

Tal como se comentó al definir la respuesta en frecuencia en la Sección 3.8, la transformada de Fourier de tiempo discreto es una función compleja de la variable ω , y por lo tanto se la puede expresar como parte real y parte imaginaria

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \quad (3.160)$$

o en forma polar como

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\arg\{X(e^{j\omega})\}}. \quad (3.161)$$

Las cantidades $|X(e^{j\omega})|$ y $\arg\{X(e^{j\omega})\}$ son la *magnitud* (o módulo) y la *fase*, respectivamente, de la transformada de Fourier de tiempo discreto. A veces, a la transformada de Fourier también se la conoce como el *espectro de Fourier*, o simplemente, el *espectro* de $x[n]$. Cuando se necesita mayor precisión, los términos *espectro de magnitud* y *espectro de fase* suelen utilizarse para referirse a $|X(e^{j\omega})|$ y a $\arg\{X(e^{j\omega})\}$, respectivamente.

Comparando la ecuación (3.97) con la (3.154) se observa que la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo

$$H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n]e^{-j\omega n}$$

es la transformada de Fourier de tiempo discreto de su respuesta impulsiva $h[n]$, y por lo tanto, la respuesta impulsiva de un sistema puede obtenerse a partir de su respuesta en frecuencia utilizando la ecuación de síntesis (3.157)

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega,$$

como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.66. TFTD de un impulso

La transformada de Fourier de tiempo discreto de la sucesión $x[n] = \delta[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]e^{j\omega n} = \sum_n \delta[n]e^{j\omega n} = e^{j0} = 1$$

que es una función continua que toma un valor constante (y finito) para todo ω . □

El Ejemplo 3.66 ha permitido establecer el par transformado

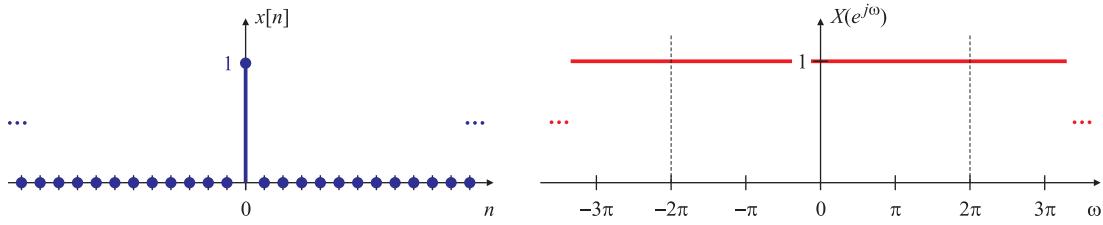
$$\delta[n] \iff 1 \quad \forall \omega \quad (3.162)$$

que se representa en la Fig. 3.72.

EJEMPLO 3.67. Respuesta impulsiva del filtro pasabajos ideal

La respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos ideal, como el que se muestra en la Fig. 3.73(b) es

$$H_{PB}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi, \end{cases} \quad (3.163)$$

Fig. 3.72. El impulso unitario $\delta[n]$ (a) y su TFTD (b).

donde se sobreentiende la 2π -periodicidad de la respuesta en frecuencia. La respuesta impulsiva $h_{PB}[n]$ se puede calcular aplicando TFTD inversa (3.157). Para $n \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} h_{PB}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{PB}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi j n} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) \\ &= \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen} \omega_c n = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\operatorname{sen} [\pi (\frac{\omega_c}{\pi}) n]}{\pi (\frac{\omega_c}{\pi}) n} = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_c}{\pi} n \right), \end{aligned}$$

y para $n = 0$,

$$h_{PB}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{PB}(e^{j0}) e^{j0n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi},$$

de manera que la respuesta impulsiva del filtro pasabajos puede escribirse como

$$h_{PB}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_c}{\pi} n \right), \quad -\infty < n < \infty.$$

(3.164)

representada de manera genérica en la Fig. 3.73(a).

□

En general, el cálculo de la respuesta impulsiva de los filtros ideales es muy sencillo porque estos filtros tienen valor unitario en la banda de paso, y valor nulo en la banda de rechazo. En el ejemplo siguiente se calcula la respuesta impulsiva del filtro pasaaltos; las respuestas impulsivas de los pasabandas y eliminabandas se obtendrán más adelante aplicando propiedades.

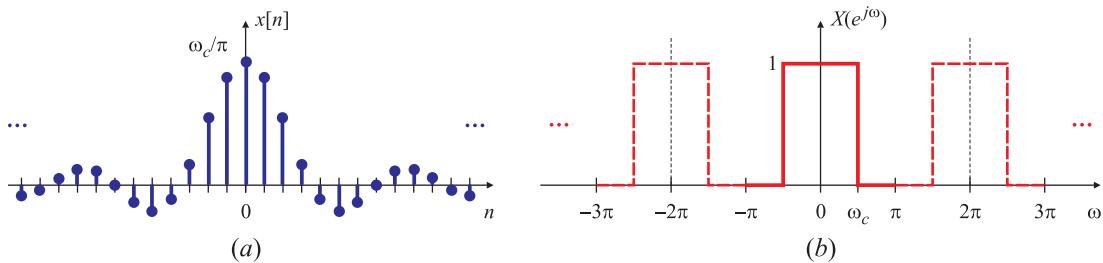


Fig. 3.73. Respuesta impulsiva (a) y respuesta en frecuencia (b) del filtro pasabajos ideal.

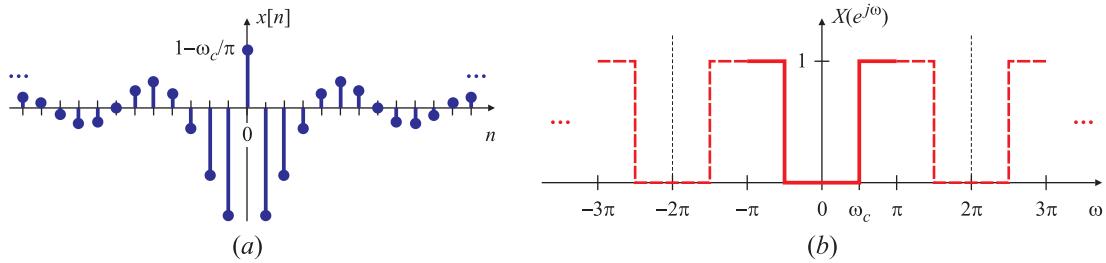


Fig. 3.74. Respuesta impulsiva (a) y respuesta en frecuencia (b) del filtro pasaaltos ideal.

EJEMPLO 3.68. Respuesta impulsiva del filtro pasaaltos

La respuesta en frecuencia de un filtro pasaaltos ideal es

$$H_{PA}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 < |\omega| < \omega_c, \\ 1, & |\omega| > \omega_c, \end{cases}$$

sobreentendiendo que esta respuesta es 2π -periódica. Aplicando la ecuación de síntesis (3.157) se puede calcular la respuesta impulsiva del filtro pasaaltos. Si $n \neq 0$

$$\begin{aligned} h_{PA}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{PA}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j n} (e^{-j\omega_c n} - e^{-j\pi n} + e^{j\pi n} - e^{j\omega_c n}) = \frac{1}{2\pi j n} (e^{-j\omega_c n} - e^{j\omega_c n}) \\ &= -\frac{1}{\pi n} \operatorname{sen} \omega_c n = -\frac{\omega_c}{\pi} \frac{\operatorname{sen} [\pi (\frac{\omega_c}{\pi}) n]}{\pi (\frac{\omega_c}{\pi}) n}, \end{aligned}$$

mientras que si $n = 0$,

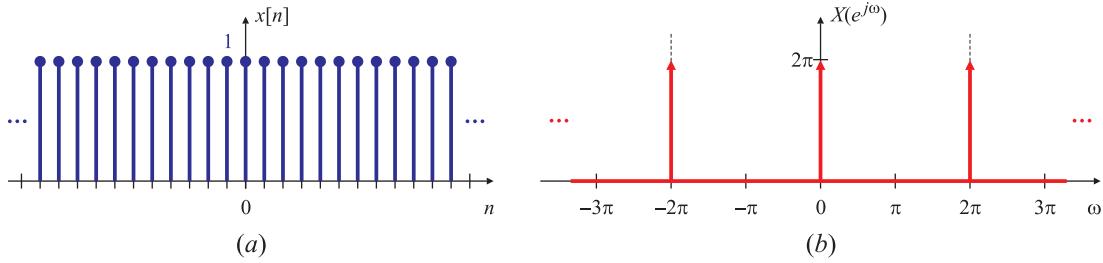
$$\begin{aligned} h_{PA}[0] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{PA}(e^{j0}) e^{j0n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\omega_c} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c}^{\pi} d\omega = \frac{1}{2\pi} (-\omega_c + \pi + \pi - \omega_c) \\ &= \frac{1}{2\pi} (2\pi - 2\omega_c) = 1 - \frac{\omega_c}{\pi}. \end{aligned}$$

La respuesta impulsiva para todo n puede escribirse de manera más compacta como

$$h_{PA}[n] = \delta[n] - \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right), \quad -\infty < n < \infty. \quad (3.165)$$

que tiene el aspecto que se muestra en la Fig. 3.74. □

En estos ejemplos no se han discutido las condiciones para la existencia o no de la Transformada de Fourier de tiempo discreto. Una posibilidad, ya explorada en la Sección 3.8.1.1, es que la sucesión temporal sea absolutamente sumable. Otros tipos de convergencia se analizan en el Apéndice B, en particular para sucesiones que no son absolutamente sumables, pero sí de cuadrado sumables. Sin embargo, en la teoría de sistemas discretos hay sucesiones muy útiles que no son absolutamente sumables ni de cuadrado sumables para las cuales también se puede encontrar una representación con transformadas de Fourier, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Fig. 3.75. La constante $x[n] = 1$ (a) y su TFTD (b).**EJEMPLO 3.69. TFTD de una constante**

La sucesión $x[n] = 1$ para todo n no es ni absolutamente sumable, ni de cuadrado sumable, y la ecuación (3.154) no converge (uniformemente o en media cuadrática). Sin embargo, es posible y útil definir la transformada de Fourier para esta señal. Por similitud con la transformada de Fourier de tiempo continuo de una constante que establece que $\mathcal{F}\{k\} = k\delta(f)$, y teniendo en cuenta la 2π -periodicidad de las transformadas de Fourier de tiempo discreto, se propone el siguiente par transformado:

$$x[n] = 1 \iff X(e^{j\omega}) = \sum_r 2\pi\delta(\omega + 2\pi r). \quad (3.166)$$

Los impulsos que aparecen en la transformada son los impulsos de Dirac, que dependen de una variable continua, que tienen ancho nulo, altura “infinita”, y área unitaria, definidos en el Capítulo 2 con las siguientes propiedades:

- $\delta(\omega) = 0$ para $\omega \neq 0$;
- $X(e^{j\omega})\delta(\omega) = X(e^{j0})\delta(\omega)$ (propiedad de colador);
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)d\omega = 1$;

La justificación de que la ecuación (3.166) es la transformada de Fourier de una constante resulta de antitransformar (3.166) usando (3.157):

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_r 2\pi\delta(\omega + 2\pi r) \right) e^{j\omega n} d\omega = \sum_r \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r) e^{j\omega n} d\omega. \end{aligned}$$

De los infinitos impulsos que forman la transformada el intervalo de integración sólo contiene el que queda comprendido en el intervalo $(-\pi, \pi]$, que corresponde a $r = 0$, y entonces

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = 1,$$

lo que “prueba” el par transformado (3.166), que se representa en la Fig. 3.75. □

El siguiente ejemplo es una generalización interesante.

EJEMPLO 3.70. TFTD de sucesiones exponenciales complejas

Sea una sucesión $x[n]$ cuya TFTD $X(e^{j\omega})$ es el tren de impulsos periódico

$$X(e^{j\omega}) = \sum_r 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r). \quad (3.167)$$

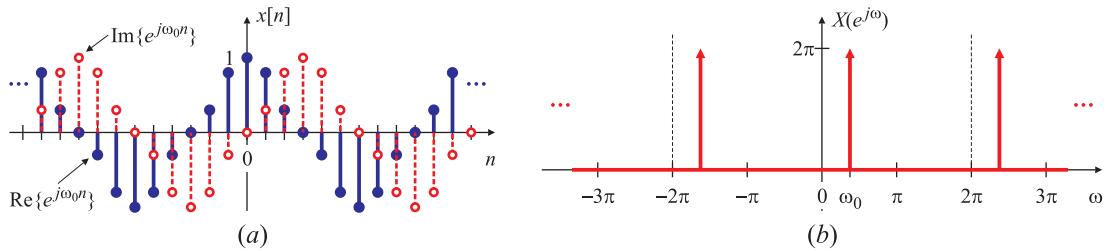


Fig. 3.76. La exponencial compleja $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ (a) y su TFTD (b).

Se puede suponer sin mayores inconvenientes que ω_0 está comprendido entre $-\pi$ y π ; si esto no es cierto, debido a la 2π -periodicidad de $X(e^{j\omega})$ siempre habrá un impulso localizado en una frecuencia ω'_0 contenida en este intervalo. Por ello se puede redefinir ω_0 como la frecuencia del impulso que yace en el intervalo entre $-\pi$ y π sin que cambie el espectro $X(e^{j\omega})$.

Sustituyendo (3.167) en (3.157), y teniendo en cuenta que el rango de integración contiene solamente el impulso correspondiente a $r = 0$ en (3.167), se encuentra que

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_r 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \right] e^{j\omega n} d\omega \\ &= \sum_r \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega \\ &= e^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

para todo n . De esta forma se establece el par transformado de Fourier:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \iff X(e^{j\omega}) = \sum_r 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r). \quad (3.168)$$

que se representa en la Fig. 3.76. Si $\omega_0 = 0$, este par transformado coincide con (3.166) estudiado en el Ejemplo 3.69. \square

La sucesión $x[n]$ del Ejemplo 3.70 no es absolutamente sumable, ni de cuadrado sumable, y tampoco $|X(e^{j\omega})|$ es finito para todo ω . Por lo tanto, la “igualdad” matemática

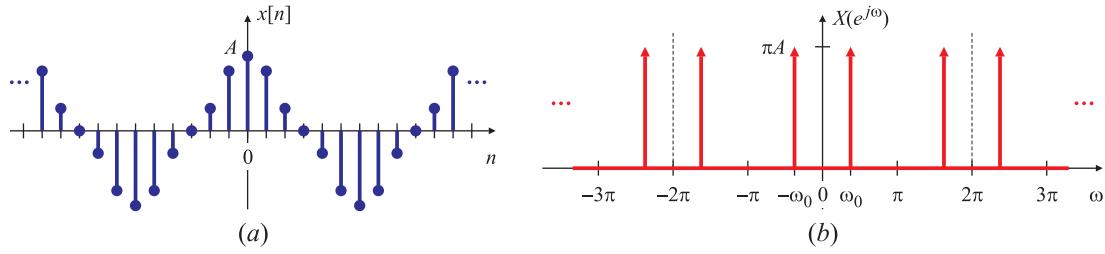
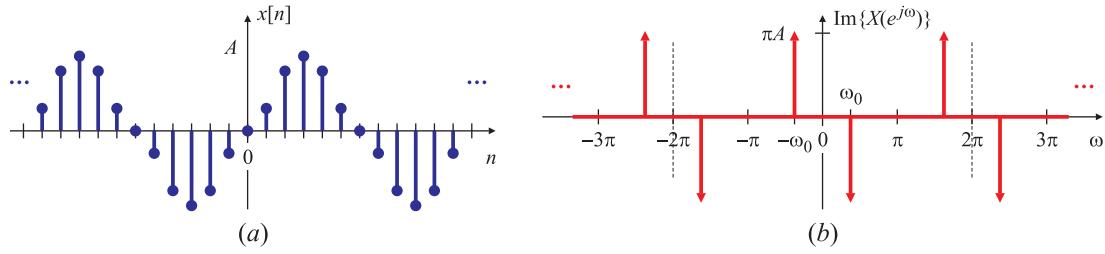
$$\sum_n e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_r 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$$

debe interpretarse utilizando la teoría de las funciones generalizadas (Lighthill, 1958), que permite extender rigurosamente el concepto de transformada de Fourier a la clase de sucesiones que pueden expresarse como la suma de componentes frecuenciales discretas

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, \quad -\infty < n < \infty.$$

El resultado del Ejemplo 3.70 permite establecer que la TFTD de esta sucesión es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_r \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k + 2\pi r).$$

Fig. 3.77. La señal $x[n] = A \cos \omega_0 n$ (a) y su TFTD (b).Fig. 3.78. La señal $x[n] = A \sin \omega_0 n$ (a) y su TFTD (b).**EJEMPLO 3.71. TFTD de sucesiones sinusoidales**

La sucesiones senoidales $x[n] = A \cos(\omega_0 n)$ o $x[n] = A \sin(\omega_0 n)$, con $-\infty < n < \infty$ se pueden expresar utilizando la fórmula de Euler. Por ejemplo, para el coseno se tiene que

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 n},$$

y entonces

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_n \left(\frac{A}{2} e^{j\omega_0 n} \right) e^{-j\omega n} + \sum_n \left(\frac{A}{2} e^{-j\omega_0 n} \right) e^{-j\omega n} \\ &= \frac{A}{2} \sum_n e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} + \frac{A}{2} \sum_n e^{-j\omega_0 n} e^{-j\omega n}. \end{aligned}$$

Aplicando los resultados del Ejemplo 3.70 se tiene que

$$\sum_n e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_r 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad \sum_n e^{-j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_r 2\pi\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r)$$

de modo que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_r \pi A \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) + \pi A \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r).$$

La demostración para el caso de $x[n] = A \sin(\omega_0 n)$ es similar. Este desarrollo permite establecer los pares transformados de Fourier

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n) \iff X(e^{j\omega}) = \sum_r \pi A \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) + \pi A \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (3.169)$$

$$x[n] = A \sin(\omega_0 n) \iff X(e^{j\omega}) = \sum_r j\pi A \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) - j\pi A \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (3.170)$$

que se representan en la Fig. 3.77 y en la Fig. 3.78, respectivamente. \square

3.11. Propiedades de la TFTD

Una variedad de propiedades y teoremas permite extender las operaciones realizadas sobre sucesiones a operaciones efectuadas sobre las transformadas. Estos teoremas son muy similares a los derivados en el Capítulo 2 para las series y transformadas de Fourier de tiempo discreto. Para facilitar el enunciado de las propiedades, se utilizará la siguiente notación:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\{x[n]\}, \\ x[n] &= \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} \\ x[n] &\iff X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Esto es, $\mathcal{F}\{x[n]\}$ indica “tomar la transformada de Fourier de tiempo discreto de $x[n]$ ”, y \mathcal{F}^{-1} es la operación inversa.

3.11.1. Sumatoria de las muestras y área de la TFTD

Estas dos propiedades son triviales, pero muy útiles para revisar los cálculos. A partir de la ecuación de análisis de la TFTD, el valor de la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ en $\omega = 0$ es la suma de las muestras de la sucesión temporal $x[n]$:

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \sum_n x[n] \quad (3.171)$$

como se representa en la Fig. 3.79(a).

Por otra parte, usando la ecuación de síntesis se encuentra que el valor de la muestra $x[n]$ en $n = 0$ es

$$x[n]|_{n=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega})d\omega, \quad (3.172)$$

lo que significa que el valor promedio del área de la TFTD en un período concide con el valor de la sucesión temporal en $n = 0$, como muestra esquemáticamente la Fig. 3.79(b).

Estas dos propiedades sirven para revisar los cálculos de las transformadas, y pueden ser útiles para establecer otras identidades que serían complicadas de resolver utilizando técnicas matemáticas.

EJEMPLO 3.72. Propiedad de área de la TFTD

Para algunos de los diferentes ejemplos estudiados hasta el momento estas propiedades son más o menos evidentes.

- Para el caso del sistema retardador (Ejemplo 3.42) con respuesta impulsiva $h[n] = \delta[n - n_d]$ y TFTD $H(e^{j\omega}) = e^{-jn_d\omega}$ se verifica trivialmente que $h[0] = 0$, y también $\int_{2\pi} e^{jn_d\omega} d\omega = 0$. Además, $\sum_n h[n] = 1$, que coincide con $H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1$, como se aprecia en la Fig. 3.48(c).
- Para el sistema diferencias hacia atrás, con respuesta impulsiva $h[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$ o diferencias hacia adelante, con respuesta impulsiva $h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$ (Ejemplos 3.45 y 3.46, respectivamente), se tiene que $\sum_n h[n] = 0$ que es igual al valor de la TFTD $H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 0$, como se observa en la Fig. 3.52(a). Para el sistema diferencias hacia atrás $h[0] = 1$, y por lo tanto $\int_{2\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 1$, como se puede calcular fácilmente:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} (1 - e^{-j\omega}) d\omega = 1.$$

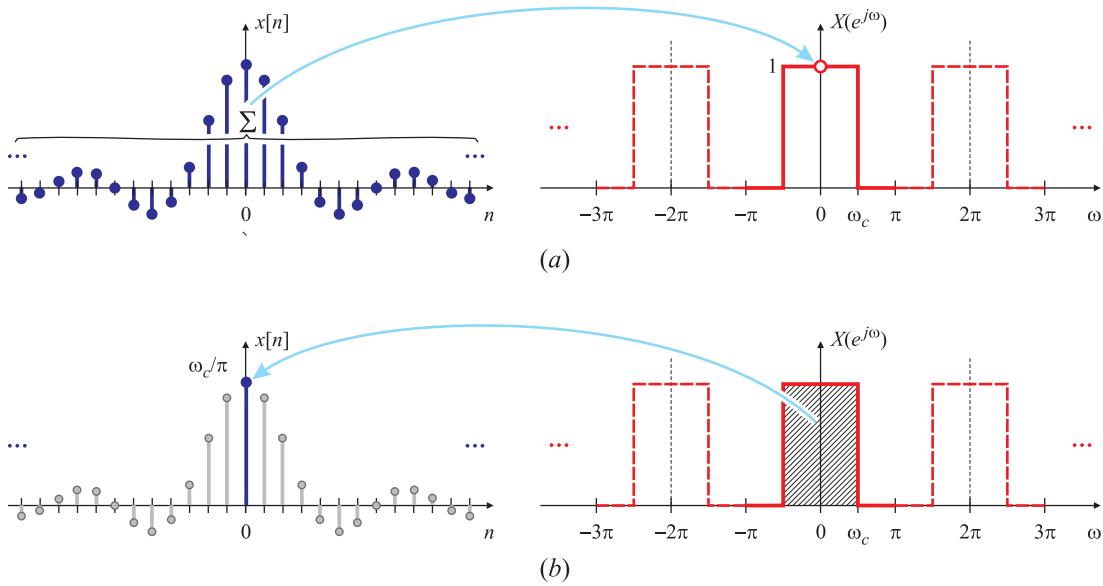


Fig. 3.79. El valor de la sumatoria de las muestras de la sucesión es igual al valor de la TFTD en $\omega = 0$ (a), y el área promedio de la TFTD sobre 2π es igual al valor de la muestra en $n = 0$ (b).

Es trivial verificar que para el sistema diferencias hacia atrás, para el cual $H(e^{j\omega}) = e^{j\omega} - 1$, resulta $\int_{2\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = -1$, que coincide con el valor de $h[0] = -1$.

- Para el sistema recursivo con respuesta impulsiva $h[n] = a^n u[n]$, con $|a| < 1$, y TFTD $H(e^{j\omega}) = 1/(1 - ae^{-j\omega})$, estudiado en el Ejemplo 3.48, se tiene que $\sum_n h[n] = 1/(1 - a)$ que tiene el mismo valor que $H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1/(1 - a)$. Pero en este caso es más útil la propiedad de área, ya que es trivial notar que $h[0] = 1$, pero es más complicado resolver la integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} d\omega$$

que requiere conceptos avanzados de la teoría de variable compleja (la primitiva de la integral es $-j \ln(e^{j\omega} - a)$, y para resolver la integral hay que estudiar el corte del logaritmo). Otra solución es escribir $H(e^{j\omega})$ como la suma de una parte par y otra parte impar, ya que la integral de la parte impar es nula. En este caso, las partes par e impar coinciden con las partes real e imaginaria, y entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \frac{1 - a \cos \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2} d\omega$$

que tampoco es una integral sencilla de resolver. En cualquiera de los casos, programas de cálculo matemático simbólico permiten verificar la identidad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} d\omega = 1.$$

- Para el promediador del Ejemplo 3.88 la propiedad (3.171) es útil para verificar que la TFTD (la respuesta en frecuencia en el caso del ejemplo) tiene visos de estar bien calculada. Mientras que en el ejemplo el valor de $H(e^{j\omega})$ en $\omega = 0$ resulta en una singularidad evitable (que se puede salvar aplicando la regla de l'Hôpital), la propiedad (3.171) muestra que $H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1$, como se aprecia en la Fig. 3.55. La identidad (3.172) permite establecer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \frac{e^{jM_1\omega} - e^{j(M_2+1)\omega}}{1 - e^{j\omega}} d\omega = M_1 + M_2 + 1,$$

que será útil para algunas derivaciones posteriores (y resulta complicada de calcular aplicando las propiedades de la integral).

- Para el filtro pasabajos ideal del Ejemplo 3.67 en cambio, es sencillo calcular la integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi}$$

porque la respuesta en frecuencia tiene valor unitario en el intervalo $-\omega_c < \omega < \omega_c$, y se anula en el intervalo complementario. El valor del área promedio coincide con el valor de la muestra $h[n]|_{n=0} = \omega_c/\pi$. La propiedad (3.171) sin embargo permite establecer una identidad muy útil:

$$\sum_n \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right) = H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1$$

que no es fácil de calcular usando las técnicas convencionales porque $h[n] = (\omega_c/\pi) \operatorname{sinc}(\omega_c n/\pi)$ no es una serie geométrica. Estas dos identidades se representan en la Fig. 3.79. \square

En el Apéndice A se aplicarán estas propiedades para resolver un problema de gran interés en el procesamiento de señales.

3.11.2. Linealidad de la TFTD

Si $X_1(e^{j\omega})$, $X_2(e^{j\omega})$ son las TFTD de $x_1[n]$, $x_2[n]$, respectivamente, la TFTD de $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ es

$$\begin{aligned} X_3(e^{j\omega}) &= \sum_n x_3[n] e^{-j\omega n} = \sum_n (ax_1[n] + bx_2[n]) e^{-j\omega n} = \sum_n ax_1[n] e^{-j\omega n} + \sum_n bx_2[n] e^{-j\omega n} \\ &= a \sum_n x_1[n] e^{-j\omega n} + b \sum_n x_2[n] e^{-j\omega n} = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

de modo que se verifica el siguiente par transformado:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \iff aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}). \quad (3.173)$$

EJEMPLO 3.73. Linealidad de la TFTD

Un ejemplo de la propiedad de linealidad es la derivación de la TFTD de las señales senoidales en el Ejemplo 3.71. Es claro que

$$x_3[n] = A \operatorname{sen}(\omega_0 n + \phi)$$

se puede escribir como

$$x_3[n] = A \frac{e^{j(\omega_0 n + \phi)} - e^{-j(\omega_0 n + \phi)}}{2j} = -j \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + j \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}.$$

Si $x_1[n] = e^{j\omega_0 n}$ y $x_2[n] = e^{-j\omega_0 n}$ resulta que

$$x_3[n] = -j \frac{A}{2} e^{j\phi} x_1[n] + j \frac{A}{2} e^{-j\phi} x_2[n].$$

Conociendo los pares transformados

$$\begin{aligned} x_1[n] &= e^{j\omega_0 n} \iff X_1(e^{j\omega}) = \sum_r 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \\ x_2[n] &= e^{-j\omega_0 n} \iff X_2(e^{j\omega}) = \sum_r 2\pi\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) \end{aligned}$$

la propiedad de linealidad establece que la TFTD de $x_3[n]$ es

$$X_3(e^{j\omega}) = -j\frac{A}{2}e^{j\phi}X_1(e^{j\omega}) + j\frac{A}{2}e^{-j\phi}X_2(e^{j\omega})$$

lo que permite establecer el par transformado de Fourier

$$A \sin(\omega_0 n + \phi) \iff \sum_r -j\pi A \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) + j\pi A \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r),$$

que coincide con el calculado en el Ejemplo 3.71. \square

La propiedad de linealidad también puede utilizarse para derivar la respuesta impulsiva de los filtros ideales tipo pasaaltos, pasabanda, y eliminabanda a partir de la respuesta impulsiva del filtro pasabajos y de otras transformadas conocidas.

EJEMPLO 3.74. Respuesta impulsiva del filtro pasaaltos

Esta respuesta impulsiva se derivó en el Ejemplo 3.68. Sin embargo, se puede calcular de manera más sencilla observando la relación entre el filtro pasabajos $H_{PB}(e^{j\omega})$ y el pasaaltos $H_{PA}(e^{j\omega})$, y aplicando propiedades de la TFTD. La respuesta en frecuencia del filtro pasaaltos puede escribirse en función de la respuesta en frecuencia del pasabajos como

$$H_{PA}(e^{j\omega}) = 1 - H_{PB}(e^{j\omega}),$$

como sugieren la Fig. 3.80(a). Aplicando la TFTD inversa a esta expresión, y recordando el par transformado (3.162) se encuentra que

$$\begin{aligned} h_{PA}[n] &= \delta[n] - h_{PB}[n] \\ &= \delta[n] - \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right), \quad -\infty < n < \infty, \end{aligned}$$

que coincide con (3.165). Esta forma de derivar la respuesta impulsiva es mucho más sencilla y con menos posibilidad de error que el cálculo a partir de la transformada inversa de $H_{PA}(e^{j\omega})$. \square

EJEMPLO 3.75. Respuesta impulsiva del filtro pasabanda y eliminabanda

La misma idea del Ejemplo 3.74 puede aplicarse para calcular las respuestas impulsivas de los filtros pasabanda y eliminabanda. La respuesta en frecuencia del filtro pasabanda puede escribirse como la diferencia entre la respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos $H_{PB2}(e^{j\omega})$ con frecuencia de corte ω_{c2} y otro $H_{PB1}(e^{j\omega})$ con frecuencia de corte ω_{c1} , como se muestra en la Fig. 3.80(b):

$$H_{BP}(e^{j\omega}) = H_{PB2}(e^{j\omega}) - H_{PB1}(e^{j\omega}).$$

La respuesta impulsiva se obtiene entonces combinando las respuestas impulsivas del tipo (3.164)

$$h_{BP}[n] = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c2}}{\pi} n\right) - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c1}}{\pi} n\right), \quad -\infty < n < \infty. \quad (3.174)$$

La respuesta en frecuencia del filtro eliminabanda puede escribirse como la suma de las respuestas de un filtro pasaaltos con frecuencia de corte ω_{c2} y la de un pasabajos con frecuencia de corte ω_{c1} como se representa en la Fig. 3.80(c):

$$H_{EB}(e^{j\omega}) = H_{PA}(e^{j\omega}) + H_{PB}(e^{j\omega}).$$

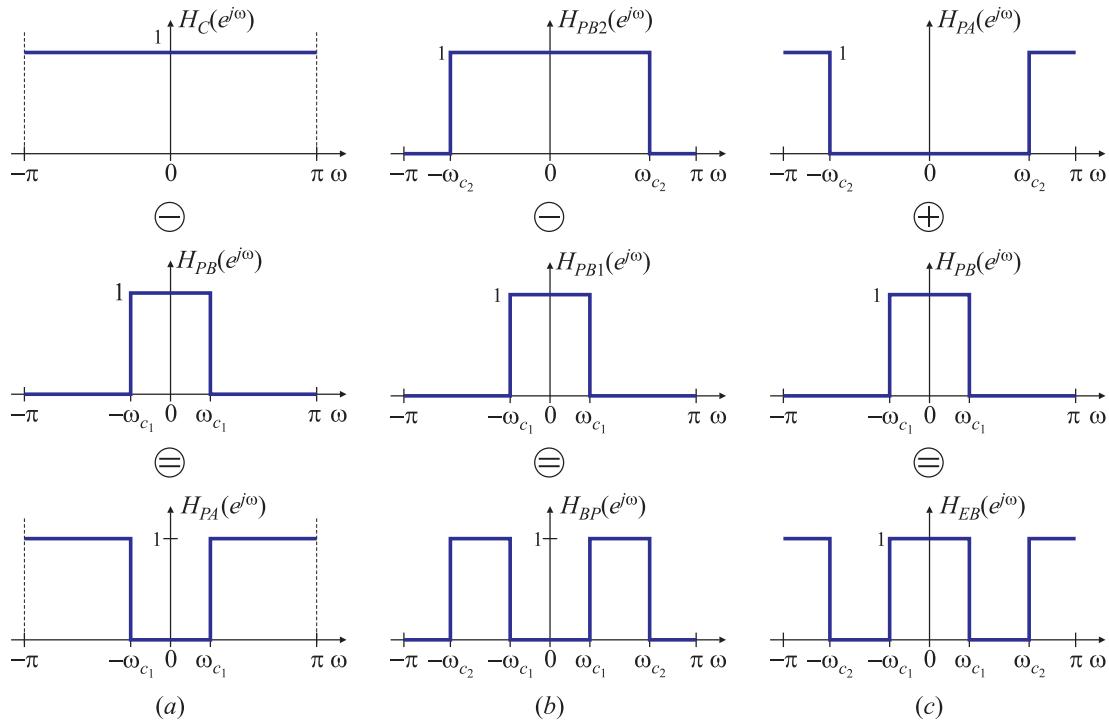


Fig. 3.80. Cálculo de la respuesta de filtros ideales pasaaltos (a), pasabanda (b) y eliminabanda (c) como combinaciones de constantes y filtros pasabajos.

La respuesta impulsiva es entonces la combinación de (3.164) y (3.165)

$$h_{EB}[n] = \delta[n] - \frac{\omega_{c2}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c2}}{\pi} n\right) + \frac{\omega_{c1}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c1}}{\pi} n\right), \quad -\infty < n < \infty. \quad (3.175)$$

La respuesta en frecuencia del filtro eliminabanda también puede escribirse como una ganancia unitaria a la que se le resta un filtro pasabanda:

$$H_{EB}(e^{j\omega}) = 1 - H_{BP}(e^{j\omega}),$$

y entonces la respuesta impulsiva resulta

$$h_{EB}[n] = \delta[n] - h_{BP}[n].$$

Aplicando (3.174), se encuentra que

$$h_{EB}[n] = \delta[n] - \frac{\omega_{c2}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c2}}{\pi} n\right) + \frac{\omega_{c1}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c1}}{\pi} n\right), \quad -\infty < n < \infty,$$

que por supuesto coincide con (3.175). \square

En estos ejemplos se puede comprobar fácilmente la propiedad de área de la TFTD:

- Para el filtro pasaaltos, $h[0] = 2(\pi - \omega_c)/(2\pi) = 1 - \omega_c/\pi$.
- Para el filtro pasabanda, $h[0] = 2(\omega_{c2} - \omega_{c1})/(2\pi) = \omega_{c2}/\pi - \omega_{c1}/\pi$.
- Para el filtro eliminabanda, $h[0] = 2[\omega_c + (\pi - \omega_{c2})]/(2\pi) = 1 - \omega_{c2}/\pi + \omega_{c1}/\pi$.

3.11.3. Desplazamiento temporal

Si $X(e^{j\omega})$ es la TFTD de $x[n]$, la TFTD de la sucesión

$$x_d[n] = x[n - n_d]$$

es

$$X_d(e^{j\omega}) = \sum_n x_d[n]e^{-j\omega n} = \sum_n x[n - n_d]e^{-j\omega n}.$$

Haciendo el cambio de variables $m = n - n_d$ se tiene

$$X_d(e^{j\omega}) = \sum_n x[n - n_d]e^{-j\omega n} = \sum_n x[m]e^{-j\omega(m + n_d)} = e^{-jn_d\omega} \sum_n x[n]e^{-j\omega n} = e^{-jn_d\omega} X(e^{j\omega})$$

lo que establece el siguiente par transformado, conocido como propiedad de *desplazamiento temporal*:

$$x[n - n_d] \iff e^{-jn_d\omega} X(e^{j\omega}). \quad (3.176)$$

EJEMPLO 3.76. Propiedad de desplazamiento temporal

En el Ejemplo 3.66 se demostró el par transformado de Fourier

$$x[n] = \delta[n] \iff X(e^{j\omega}) = 1 \text{ para todo } \omega.$$

Si $x[n]$ se desplaza en el tiempo n_d muestras, la propiedad de desplazamiento temporal indica que

$$x[n - n_d] = \delta[n - n_d] \iff \mathcal{F}\{x[n - n_d]\} = e^{-jn_d\omega}. \quad (3.177)$$

En la Sección 3.5.3.3 se mostró, en la ecuación (3.47), que $h[n] = \delta[n - n_d]$ es la respuesta impulsiva del sistema retardador ideal, cuya respuesta en frecuencia, calculada en el Ejemplo 3.42 coincide exactamente con el par transformado (3.177). El módulo y la fase de esta transformada se representan en la Fig. 3.48(c) y (d), respectivamente. \square

EJEMPLO 3.77. TFTD del escalón unitario

El escalón unitario $x[n] = u[n]$ no es ni absolutamente sumable ni de cuadrado sumable, y por lo tanto es difícil calcular su TFTD por definición. Sin embargo, la aplicación de las propiedades de linealidad y de desplazamiento temporal permiten calcular su transformada. En primer lugar, se escribe

$$u[n] = x_1[n] + x_2[n], \quad (3.178)$$

donde

$$x_1[n] = \frac{1}{2}, \quad -\infty < n < \infty, \quad x_2[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \geq 0, \\ -\frac{1}{2}, & n < 0. \end{cases}$$

La señal $x_1[n] = 1/2$ tiene TFDT

$$X_1(e^{j\omega}) = \pi \sum_r \delta(w + 2\pi r) \quad (3.179)$$

como se calculó en el Ejemplo 3.69. Para calcular la TFTD de $x_2[n]$, se observa que

$$\delta[n] = x_2[n] - x_2[n - 1].$$

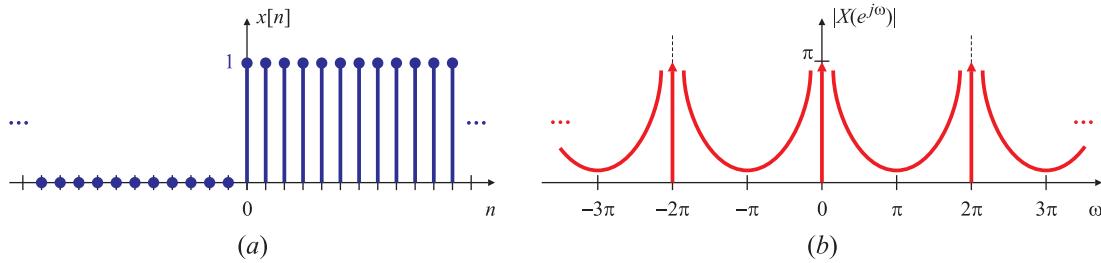


Fig. 3.81. El escalón unitario $u[n]$ (a) y el módulo de su TFTD (b).

Transformando término a término esta expresión, y aplicando la propiedad de desplazamiento temporal, se tiene

$$1 = X_2(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} X_2(e^{j\omega}),$$

de modo que

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}. \quad (3.180)$$

Teniendo en cuenta (3.179) y (3.180), se puede establecer el par transformado

$$x[n] = u[n] \iff X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_r \pi \delta(\omega + 2\pi r) \quad (3.181)$$

que se representa en la Fig. 3.81. \square

Una de las aplicaciones más importantes de la propiedad de desplazamiento temporal, junto con la propiedad de linealidad, es el cálculo de la respuesta impulsiva y de la respuesta en frecuencia de ecuaciones a diferencias que se estudia en la Sección 3.13.

3.11.4. Desplazamiento frecuencial (modulación)

Para probar la propiedad de desplazamiento frecuencial o modulación basta con sustituir variables. Si $X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]e^{-j\omega n}$, se tiene que

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega-\omega_0)}) &= \sum_n x[n]e^{-j(\omega-\omega_0)n} \\ &= \sum_n (e^{j\omega_0 n} x[n]) e^{-j\omega n}, \end{aligned}$$

lo que establece el par transformado

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \iff X(e^{j(\omega-\omega_0)}). \quad (3.182)$$

Esta propiedad también se denomina *propiedad de modulación* porque la señal $x[n]$ modula a una exponencial compleja cuya frecuencia ω_0 depende del corrimiento frecuencial.

EJEMPLO 3.78. Propiedad de modulación

En el Ejemplo 3.69 se estableció que la transformada de $x[n] = 1$ para todo n es $X(e^{j\omega}) =$

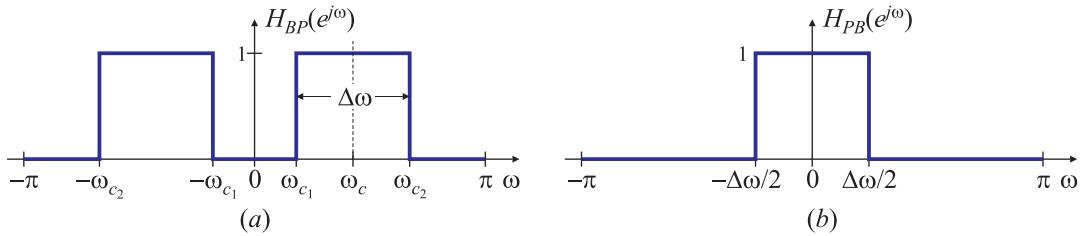


Fig. 3.82. Respuesta en frecuencia del filtro pasabanda (a) y del pasabajos prototipo a ser desplazado en frecuencia (b).

$\sum_r 2\pi\delta(\omega + 2\pi r)$, como se muestra en la Fig. 3.75. Si se desplaza en frecuencia $X(e^{j\omega})$ en una cantidad ω_0 se tiene que

$$X_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)}) = \sum_r 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r),$$

que de acuerdo a la propiedad de modulación es la transformada de la sucesión temporal

$$x_1[n] = e^{j\omega_0 n} x[n] = e^{j\omega_0 n},$$

que coincide con el par transformado calculado en el Ejemplo 3.70, representado en la Fig. 3.76. \square

EJEMPLO 3.79. Cálculo de la respuesta impulsiva del filtro pasabanda ideal aplicando la propiedad de desplazamiento frecuencial

La respuesta impulsiva del filtro pasabanda ya fue calculada en el Ejemplo 3.75 aplicando la propiedad de linealidad de la TFTD. En este ejemplo se aplicará la propiedad de modulación. El filtro pasabanda con respuesta en frecuencia

$$H_{BP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega_{c_1} < |\omega| < \omega_{c_2}, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que se grafica en la Fig. 3.82(a) puede pensarse que está compuesto por un filtro pasabajo desplazado en frecuencia en $\pm\omega_c$, donde ω_c es una frecuencia equidistante de las frecuencias de corte del pasabanda:

$$\omega_c = \frac{\omega_{c_1} + \omega_{c_2}}{2}. \quad (3.183)$$

La respuesta en frecuencia del pasabajos es

$$H_{PB}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \Delta\omega/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (3.184)$$

donde $\Delta\omega$ es el ancho de la banda de paso del filtro pasabanda,

$$\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1}, \quad (3.185)$$

como se representa en la Fig. 3.82(b). La respuesta impulsiva del filtro pasabajos ideal con respuesta en frecuencia (3.184) es

$$h_{PB}[n] = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} n\right).$$

como se calculó en el Ejemplo 3.67. Con las definiciones de ω_c y $\Delta\omega$ dadas por (3.183) y (3.185), respectivamente, es claro que

$$H_{BP}(e^{j\omega}) = H_{PB}(e^{j(\omega+\omega_c)}) + H_{PB}(e^{j(\omega-\omega_c)})$$

y aplicando la propiedad de linealidad y la de corrimiento frecuencial, se tiene que

$$\begin{aligned} h_{BP}[n] &= e^{j\omega_c n} h_{PB}[n] + e^{-j\omega_c n} h_{PB}[n] \\ &= h_{BP}[n] = 2 \cos(\omega_c n) h_{PB}[n] \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$h_{BP}[n] = \frac{\Delta\omega}{\pi} \cos(\omega_c n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} n\right). \quad (3.186)$$

Esta respuesta impulsiva no parece ser igual a (3.174) calculada en el Ejemplo 3.67. Sin embargo, si se reemplazan ω_c y $\Delta\omega$ de acuerdo con (3.183) y (3.185),

$$\begin{aligned} h_{BP}[n] &= \frac{\Delta\omega}{\pi} \cos(\omega_c n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} n\right) \\ &= \frac{\Delta\omega}{\pi} \cos(\omega_c n) \frac{2}{\Delta\omega n} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} n\right) \\ &= \frac{2}{\pi n} \cos(\omega_c n) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} n\right) \\ &= \frac{2}{\pi n} \cos\left(\frac{\omega_{c1} + \omega_{c2}}{2} n\right) \sin\left(\frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{2} n\right) \end{aligned}$$

y aplicando la propiedad trigonométrica $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$,

$$\begin{aligned} h_{BP}[n] &= \frac{1}{\pi n} \sin\left[\left(\frac{\omega_{c1} + \omega_{c2}}{2} + \frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{2}\right) n\right] - \frac{1}{\pi n} \sin\left[\left(\frac{\omega_{c1} + \omega_{c2}}{2} - \frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{2}\right) n\right] \\ &= \frac{1}{\pi n} \sin(\omega_{c2} n) - \frac{1}{\pi n} \sin(\omega_{c1} n) \\ &= \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin(\omega_{c2} n)}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin(\omega_{c1} n)}{\omega_{c1} n} \end{aligned}$$

finalmente resulta

$$h_{BP}[n] = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c2}}{\pi} n\right) - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c1}}{\pi} n\right), \quad -\infty < n < \infty,$$

que coincide con la expresión (3.174) del Ejemplo 3.67. \square

3.11.5. Reflexión temporal

La reflexión temporal de una sucesión $x[n]$ es la sucesión $x[-n]$. Su TFTD es

$$\mathcal{F}\{x[-n]\} = \sum_n x[-n] e^{-j\omega n} = \sum_m x[m] e^{j\omega m} = X(e^{-j\omega}).$$

(Del segundo al tercer término se hizo el cambio de variables $n = -m$). Si $x[n]$ es real, el anteúltimo término se puede escribir como $X^*(e^{j\omega})$. De modo que se establecen los siguientes pares transformados:

$$x[-n] \iff X(e^{-j\omega})$$

y si $x[n]$ es real,

$$x[-n] \iff X^*(e^{j\omega}). \quad (3.187)$$

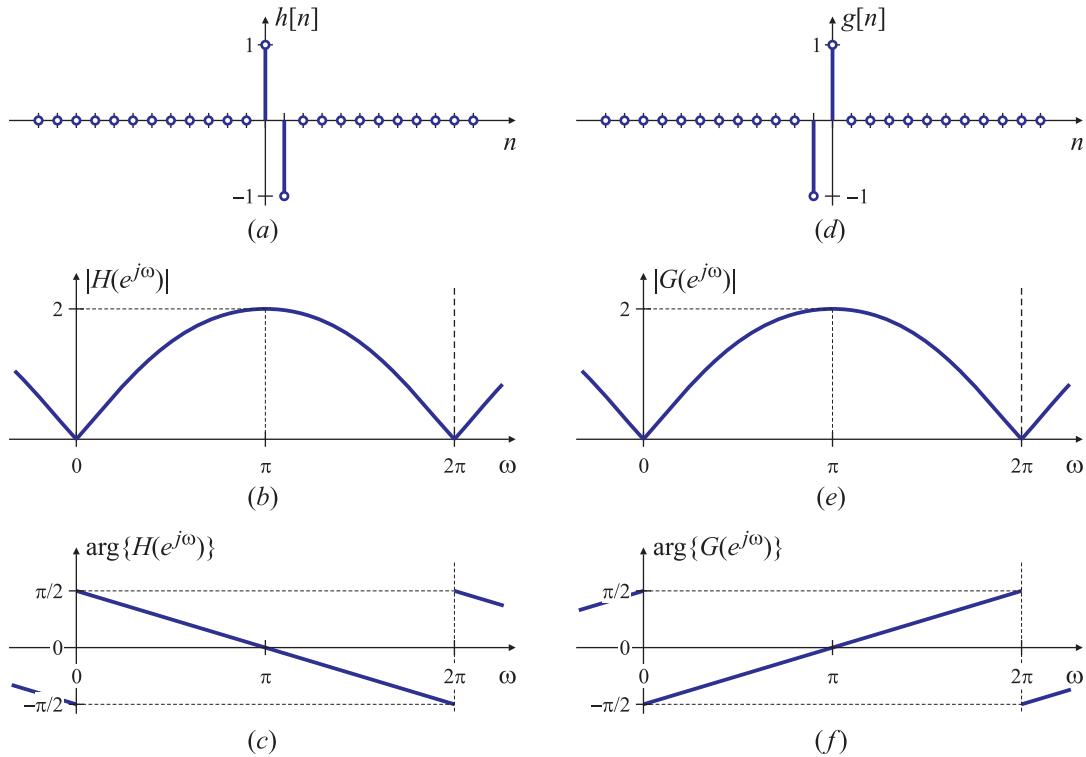


Fig. 3.83. Propiedad de reflexión temporal: respuestas impulsivas $h[n]$ (a) y $g[n] = h[-n]$ (d), módulo (b), (e), y fase (c), (f) de la respuesta en frecuencia.

EJEMPLO 3.80. Reflexión temporal de una sucesión

El sistema diferencias hacia atrás tiene una respuesta impulsiva

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1],$$

graficada en la Fig. 3.83(a) y su respuesta en frecuencia (o TFTD), calculada en el Ejemplo 3.45 es

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2})} 2 \sin(\omega/2). \quad (3.188)$$

cuyo módulo y fase se representan en la Fig. 3.83(b) y (c), respectivamente. Si $g[n]$ es la reflexión temporal de $h[n]$ se tiene que $g[n] = h[-n]$ y entonces

$$\begin{aligned} g[n] &= \delta[n] - \delta[-n-1] \\ &= \delta[n] - \delta[n+1] \end{aligned}$$

(por definición del impulso discreto, $\delta[-n-1] = \delta[n+1]$). Esta sucesión se grafica en la Fig. 3.83(d), y su TFTD es

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega}) &= 1 - e^{j\omega} = e^{j\frac{\omega}{2}} (e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}) \\ &= -2j e^{j\frac{\omega}{2}} \sin(\omega/2) = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\omega}{2}} \sin(\omega/2) \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la identidad $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$. Finalmente, se tiene que

$$G(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2})} 2 \sin(\omega/2) \quad (3.189)$$

cuyo módulo y fase se muestran en la Fig. 3.83(e) y (f), respectivamente. Comparando (3.188) con (3.189), es claro que $G(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$. \square

3.11.6. Propiedades de simetría

Las propiedades de simetría de la transformada de Fourier son muy útiles para facilitar la resolución de problemas. Previamente es necesario definir algunos tipos especiales de sucesiones.

Una sucesión *conjugada simétrica* $x_e[n]$ es aquella que satisface

$$x_e[n] = x_e^*[-n]$$

mientras que una sucesión *conjugada antisimétrica* $x_o[n]$ verifica

$$x_o[n] = -x_o^*[-n]$$

donde “*” indica conjugación. Cualquier sucesión $x[n]$ puede descomponerse como la suma de una sucesión conjugada simétrica y otra conjugada antisimétrica:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

donde

$$x_e[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n], \quad (3.190)$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2} (x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n], \quad (3.191)$$

Si las sucesiones son *reales*, las sucesiones conjugadas simétricas son *pares* ($x_e[n] = x_e[-n]$) y las sucesiones conjugadas antisimétricas son *impares* ($x_o[n] = -x_o[-n]$).

Las transformadas de Fourier también se pueden descomponer como la suma de *funciones* conjugadas simétricas y conjugadas antisimétricas:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

donde

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})], \quad (3.192)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})]. \quad (3.193)$$

Sustituyendo $(-\omega)$ por ω en (3.192) y (3.193) se encuentra que $X_e(e^{j\omega})$ es conjugada simétrica, y $X_o(e^{j\omega})$ es conjugada antisimétrica:

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{j\omega}), \quad \text{y} \quad X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{j\omega}).$$

Si una función real de variable continua es conjugada simétrica, se dice que es una función *par*, y si es conjugada antisimétrica se dice que es una función *ímpar*.

Las propiedades de simetría de la transformada de Fourier para señales $x[n]$ y sus transformadas $X(e^{j\omega})$ se resumen en la Tabla 3.1, y se representan gráficamente en la Fig. 3.84.

Las primeras seis propiedades se aplican para una sucesión compleja genérica $x[n]$ con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$.

Las Propiedades 1 y 2 resultan de aplicar directamente la definición. Para la Propiedad 1 se tiene que

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = \sum_n x^*[n]e^{-j\omega n} = \left(\sum_n x[n]e^{j\omega n} \right)^* = X^*(e^{-j\omega}).$$

Tabla 3.1. Propiedades de simetría de la TFTD.

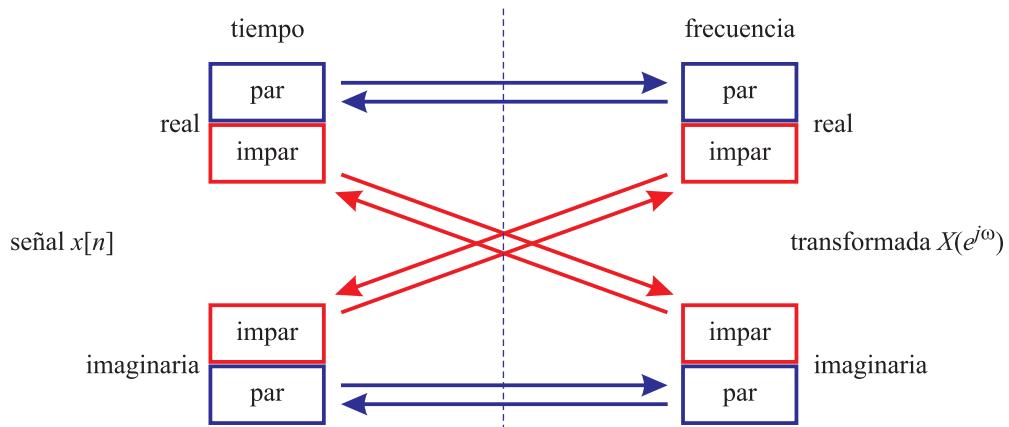
Propiedad	Sucesión $x[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$
1	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2	$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3	$\text{Re}\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$
4	$j \text{Im}\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$
5	$x_e[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = \text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
6	$x_o[n]$	$jX_I(e^{j\omega}) = j \text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$
<i>Las siguientes propiedades se aplican sólo cuando $x[n]$ es real</i>		
7	Cualquier $x[n]$ real	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
8	Cualquier $x[n]$ real	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$
9	Cualquier $x[n]$ real	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$
10	Cualquier $x[n]$ real	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
11	Cualquier $x[n]$ real	$\arg\{X(e^{j\omega})\} = -\arg\{X(e^{-j\omega})\}$
12	$x_e[n]$	$X_R(e^{j\omega})$
13	$x_o[n]$	$jX_I(e^{j\omega})$

Para la Propiedad 2,

$$\mathcal{F}\{x^*[-n]\} = \sum_n x^*[-n]e^{-j\omega n} = \sum_m x^*[m]e^{j\omega m} = \left(\sum_m x[m]e^{-j\omega m} \right)^* = X^*(e^{j\omega}).$$

Las Propiedades 3 y 4 resultan de las Propiedades 1 y 2, junto con la propiedad de linealidad: como

$$\text{Re}\{x[n]\} = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x^*[n], \quad j \text{Im}\{x[n]\} = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x^*[n],$$

**Fig. 3.84.** Síntesis de las propiedades de simetría para las señales y sus transformadas.

se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\operatorname{Re}\{x[n]\}\} &= \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}X^*(e^{-j\omega}) = X_e(e^{j\omega}), \\ j\mathcal{F}\{\operatorname{Im}\{x[n]\}\} &= \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}X^*(e^{-j\omega}) = X_o(e^{j\omega}),\end{aligned}$$

de acuerdo a las definiciones (3.192) y (3.193), respectivamente.

Las Propiedades 5 y 6 se derivan de manera similar. Teniendo en cuenta que

$$x_e[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x^*[-n], \quad x_o[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x^*[-n],$$

las Propiedades 1 y 2, junto con la propiedad de linealidad, permiten establecer que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x_e[n]\} &= \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}X^*(e^{j\omega}) = \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} = X_R(e^{j\omega}), \\ \mathcal{F}\{x_o[n]\} &= \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}X^*(e^{j\omega}) = j\operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} = jX_I(e^{j\omega}).\end{aligned}$$

Si $x[n]$ es una sucesión real las propiedades de simetría son mucho más directas y útiles. Específicamente, para una sucesión real, la Propiedad 7 establece que transformada de Fourier es conjugada simétrica, como se verifica al calcular $X^*(e^{-j\omega})$

$$X^*(e^{-j\omega}) = \left(\sum_n x[n] e^{j\omega n} \right)^* = \sum_n x^*[n] e^{-j\omega n} = \sum_n x[n] e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}),$$

teniendo en cuenta que $x[n] = x^*[n]$ porque $x[n]$ es real.

Expresando $X(e^{j\omega})$ en función de sus partes real e imaginaria,

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

se pueden derivar las Propiedades 8 y 9. En particular, como $x[n]$ es real, se puede escribir

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n} = \sum_n x[n] \cos(\omega n) + j \left(-\sum_n x[n] \sin(\omega n) \right),$$

de donde

$$X_R(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] \cos(\omega n), \quad X_I(e^{j\omega}) = -\sum_n x[n] \sin(\omega n).$$

En estas expresiones, la variable ω es el argumento de los cosenos o los senos dentro de la sumatoria, y muestran que la parte real de la TFTD $X_R(e^{j\omega})$ es una función *par* de la variable ω , y la parte imaginaria de la TFTD $X_I(e^{j\omega})$ es una función *impar* de la frecuencia. Específicamente,

$$\begin{aligned}X_R(e^{j\omega})|_{\omega=-\omega} &= \sum_n x[n] \cos(-\omega n) = \sum_n x[n] \cos(\omega n) = X_R(e^{j\omega}) \\ X_I(e^{j\omega})|_{\omega=-\omega} &= -\sum_n x[n] \sin(-\omega n) = \sum_n x[n] \sin(\omega n) = -X_I(e^{j\omega}).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas relaciones, cuando la TFTD se expresa en forma polar,

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg\{X(e^{j\omega})\}},$$

es claro que el modulo de la TFTD es una función par de la frecuencia, y que su argumento es una función impar (Propiedades 10 y 11).

Finalmente, si $x[n]$ es real,

$$x_e[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[-n], \quad x_o[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[-n],$$

y teniendo en cuenta (3.187),

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x_e[n]\} &= \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}X^*(e^{j\omega}) = \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} = X_R(e^{j\omega}), \\ \mathcal{F}\{x_o[n]\} &= \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}X^*(e^{j\omega}) = j\operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} = jX_I(e^{j\omega}),\end{aligned}$$

lo que prueba las Propiedades 12 y 13.

EJEMPLO 3.81. Aplicación de las propiedades de simetría

En el Ejemplo 3.48 se demostró que la TFTD de la sucesión $x[n] = a^n u[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad \text{si } |a| < 1.$$

Como esta sucesión es real, se aplican las Propiedades 7 a 11 de la Tabla 3.1, y utilizando propiedades de números complejos es sencillo verificar que

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X^*(e^{-j\omega}) && \text{(Propiedad 7)} \\ X_R(e^{j\omega}) &= \frac{1 - a \cos \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2} = X_R(e^{-j\omega}) && \text{(Propiedad 8)} \\ X_I(e^{j\omega}) &= \frac{-a \sin \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2} = -X_I(e^{-j\omega}) && \text{(Propiedad 9)} \\ |X(e^{j\omega})| &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}} = |X(e^{-j\omega})| && \text{(Propiedad 10)} \\ \arg\{X(e^{j\omega})\} &= \arctan\left(\frac{-a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}\right) = -\arg\{X(e^{-j\omega})\} && \text{(Propiedad 11)}\end{aligned}$$

Estas funciones se representan en la Fig. 3.85(a) para $a = 0,8$ y $a = 0,5$, y en la Fig. 3.85(b) para $a = -0,9$ y $a = -0,5$, respectivamente. \square

Pero más interesante es aplicar estas propiedades para derivar otras transformadas sin necesidad de aplicar la definición, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.82. TFTD de una sucesión par

La sucesión

$$y[n] = a^{|n|}, \quad -\infty < n < \infty$$

que tiene simetría par, como se muestra en la Fig. 3.86(a) para $0 < a < 1$, y en la Fig. 3.86(c) para $-1 < a < 0$, se puede escribir como

$$y[n] = x[n] + x[-n] - \delta[n],$$

donde el término $\delta[n]$ tiene en cuenta que $y[n] = 1$ en $n = 0$. Aplicando propiedades se tiene que

$$\begin{aligned}Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega}) - 1 \\ &= 2\operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} - 1 = 2X_R(e^{j\omega}) - 1 \\ &= \frac{2 - 2a \cos \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2} - 1\end{aligned}$$

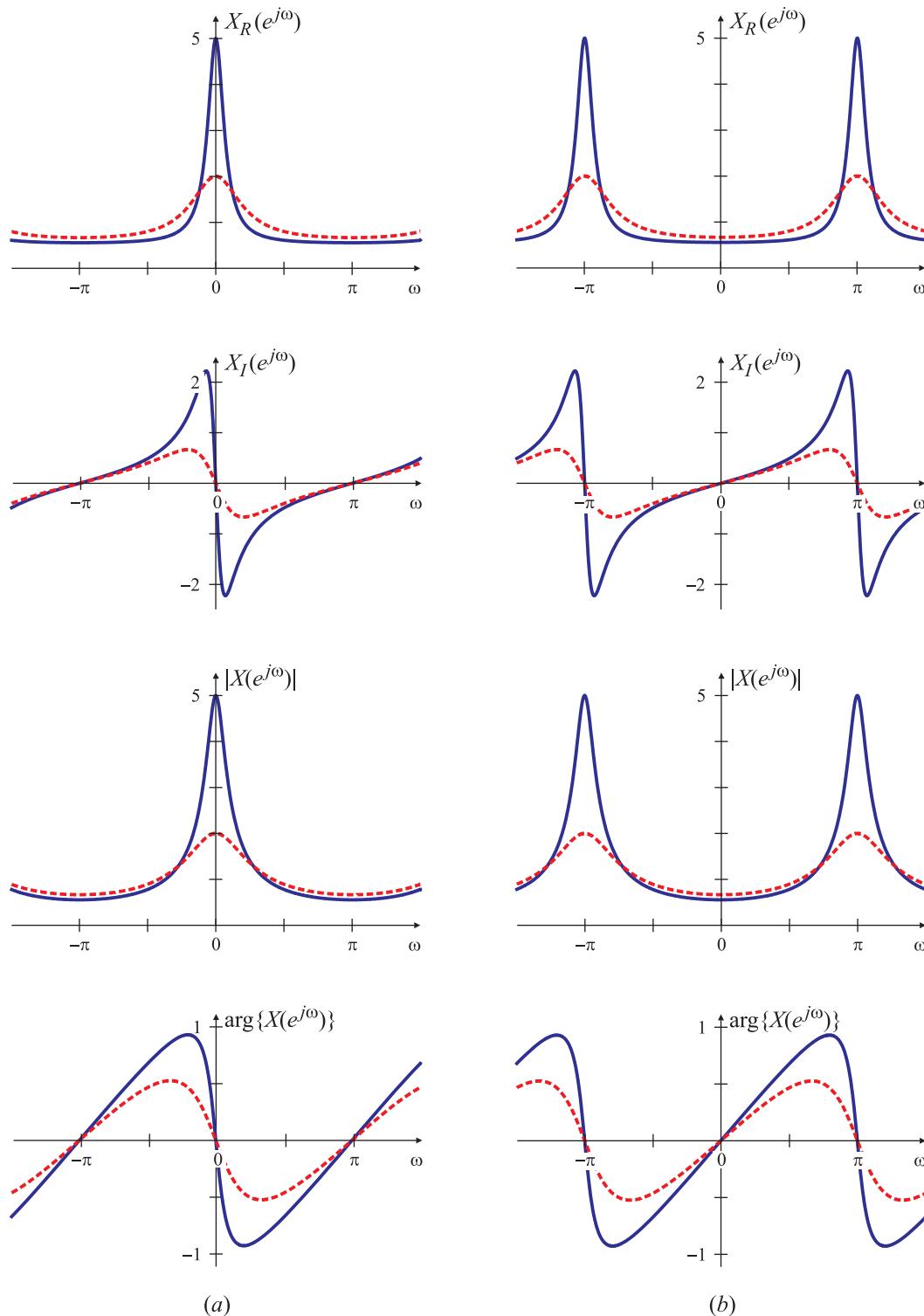


Fig. 3.85. Parte real, parte imaginaria, módulo y fase de la TFTD de la sucesión $x[n] = a^n u[n]$ para $a = 0,8$ (—) y $a = 0,5$ (- -) (a), y para $a = -0,8$ (—) y $a = -0,5$ (- -) (b).

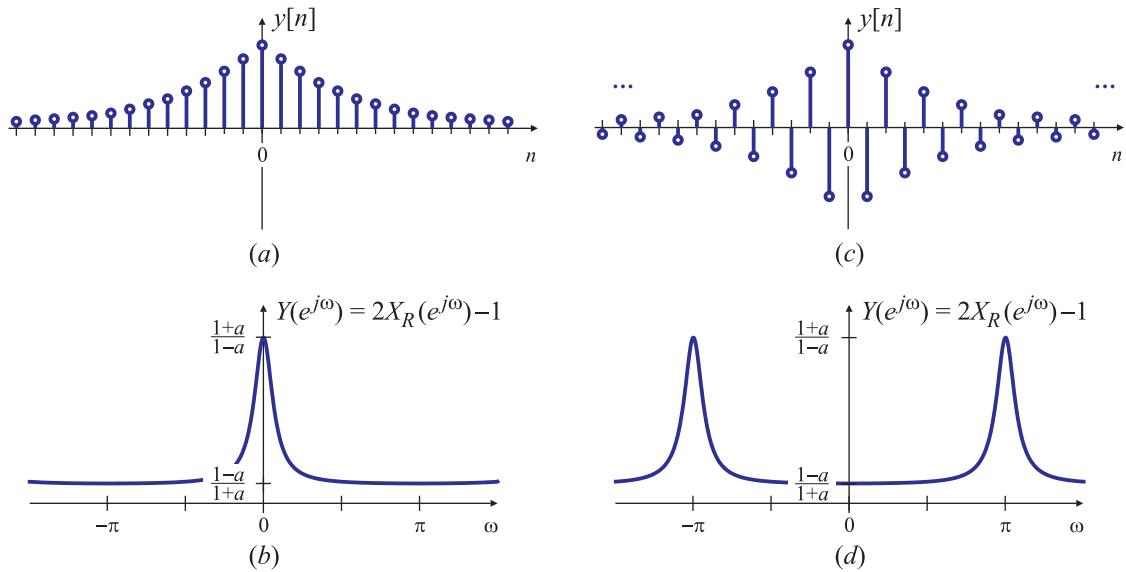


Fig. 3.86. Sucesión $y[n] = a^{|n|} u[n]$ y su TFTD $Y(e^{j\omega})$ para $0 < a < 1$ [(a), (b)] y $-1 < a < 0$ [(c), (d)], respectivamente.

y por lo tanto,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2}.$$

Como $y[n]$ es real y tiene simetría par, $Y(e^{j\omega})$ también es real y con simetría par (Propiedad 12 de la Tabla 3.1), como se muestra en las Figs. 3.86(b) y (d) para $0 < a < 1$, y $-1 < a < 0$, respectivamente. \square

EJEMPLO 3.83. TFTD de una sucesión impar

La sucesión

$$z[n] = a^n u[n] - a^{-n} u[-n], \quad -\infty < n < \infty,$$

es impar, como se muestra en la Fig. 3.87(a) para $0 < a < 1$, y en la Fig. 3.87(c) para $-1 < a < 0$.

Si TFTD se Si $X(e^{j\omega})$ es la TFTD de la sucesión $x[n] = a^n u[n]$, calculada en el Ejemplo 3.81, la TFTD de $x[-n] = a^{-n} u[-n]$ es $X^*(e^{j\omega})$. Por lo tanto

$$z[n] = x[n] - x[-n]$$

y su TFTD se puede calcular aplicando propiedades:

$$\begin{aligned} Z(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega}) \\ &= j2 \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} \\ &= j2X_I(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Entonces, del Ejemplo 3.81 se tiene que

$$Z(e^{j\omega}) = j \frac{-2a \sin \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$$

que, como indica la Propiedad 13 de la Tabla 3.1, es una función imaginaria pura, y con simetría impar respecto a la frecuencia, tal como se representa en la Fig. 3.87(b) y (d) para $0 < a < 1$ y para $-1 < a < 0$, respectivamente. \square

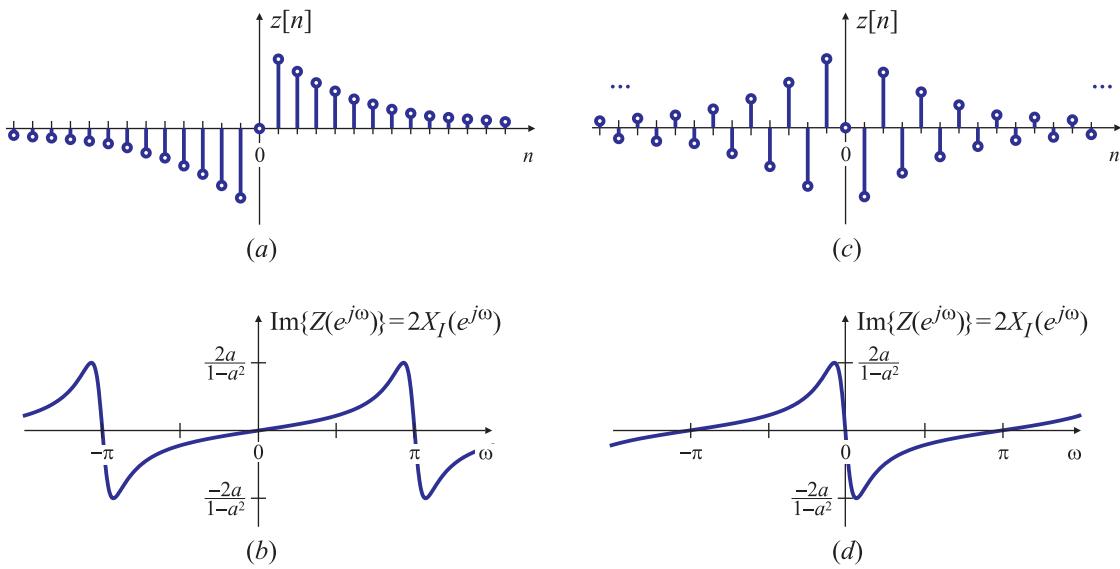


Fig. 3.87. Sucesión impar $z[n] = a^n u[n] + a^{-n} u[-n]$ y su TFTD $Z(e^{j\omega})$ para $0 < a < 1$ [(a), (b)] y $-1 < a < 0$ [(c), (d)], respectivamente.

En el Ejemplo 3.77 se calculó la TFTD de la sucesión $x[n] = u[n]$. En este ejemplo se vuelve a calcular la transformada pero utilizando propiedades de simetría, para destacar las diferencias con el cálculo del espectro de la señal de tiempo continuo $x(t) = u(t)$ desarrollada en el Capítulo 2.

EJEMPLO 3.84. Cálculo de la TFTD de un escalón $u[n]$

El escalón $x[n] = u[n]$, mostrado en la Fig. 3.88(a), se puede descomponer en parte par e impar, $u[n] = x_e[n] + x_o[n]$ y por lo tanto

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \mathcal{F}\{x_e[n]\} + \mathcal{F}\{x_o[n]\}, \quad (3.194)$$

donde la parte par $x_e[n]$ representada en la Fig. 3.88(b) está dada por

$$x_e[n] = \frac{1}{2} (u[n] + u[-n]) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ 1/2, & \text{si } n \neq 0, \end{cases}$$

y la parte impar $x_o[n]$, graficada en la Fig. 3.88(c), es

$$x_o[n] = \frac{1}{2} (u[n] - u[-n]) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n > 0, \\ 0, & \text{si } n = 0, \\ -1/2, & \text{si } n < 0, \end{cases} \quad (3.195)$$

La TFTD de $x_e[n]$ se puede calcular con facilidad si se escribe $x_e[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}$ y recordando que $\mathcal{F}\{\delta[n]\} = 1$, y $\mathcal{F}\{1\} = \sum_r \delta(\omega - 2\pi r)$, se tiene que

$$\mathcal{F}\{x_e[n]\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_r 2\pi\delta(\omega - 2\pi r). \quad (3.196)$$

Se observa que se verifican las propiedades de simetría: la señal $x_e[n]$ es real y par, y su TFTD $\mathcal{F}\{x_e[n]\}$ es real y par (Tabla 3.1).

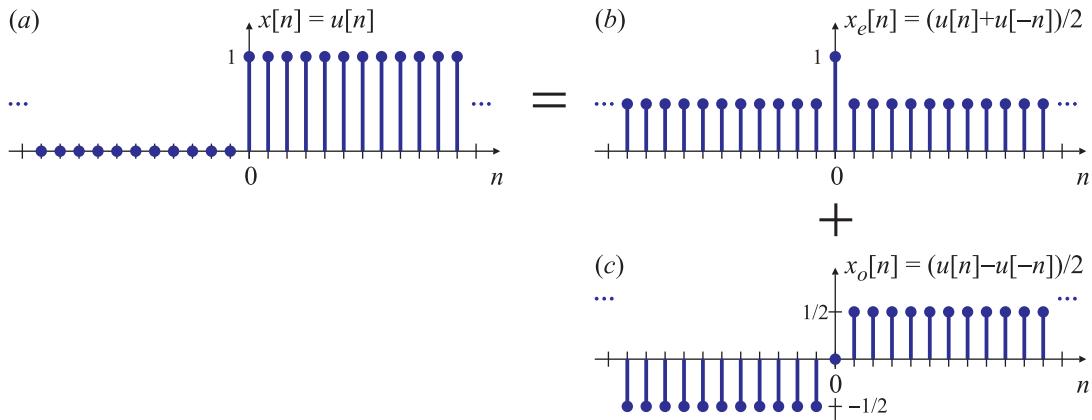


Fig. 3.88. Cálculo de la TFTD de una señal escalón por descomposición en parte par e impar.

La transformada de $x_o[n]$ es un poco más complicada. Aplicando directamente la propiedad de reflexión temporal (3.187) a la ecuación (3.195) se tiene que

$$\mathcal{F}\{x_o[n]\} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{u[n]\} - \mathcal{F}\{u[-n]\}) = \frac{1}{2} \mathcal{F}\{u[n]\} - \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{u[n]\})^* = j \operatorname{Im}\{\mathcal{F}\{u[n]\}\}. \quad (3.197)$$

Reemplazando las expresiones (3.196) y (3.197) en (3.194) no se llega a ningún resultado útil:

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \frac{1}{2} + \sum_r \pi \delta(\omega - 2\pi r) + j \operatorname{Im}\{\mathcal{F}\{u[n]\}\}$$

ya que no se puede determinar $\mathcal{F}\{u[n]\}$ a partir de esta expresión. Una alternativa es notar que $x_o[n]$ también puede escribirse como

$$x_o[n] = \frac{1}{2}u[n-1] - \frac{1}{2}u[-n-1]$$

y aplicando las propiedades de desplazamiento temporal (3.187) y de reflexión temporal (3.187) se encuentra que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_o[n]\} &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\{u[n-1]\} - \frac{1}{2}\mathcal{F}\{u[-n-1]\} = \frac{1}{2}e^{-j\omega}\mathcal{F}\{u[n]\} - \frac{1}{2}(e^{-j\omega}\mathcal{F}\{u[n]\})^* \\ &= j \operatorname{Im}\{e^{-j\omega}\mathcal{F}\{u[n]\}\}. \end{aligned}$$

Descomponiendo $e^{-j\omega} = \cos\omega - j \operatorname{sen}\omega$, y $\mathcal{F}\{u[n]\} = \operatorname{Re}\{\mathcal{F}\{u[n]\}\} + j \operatorname{Im}\{\mathcal{F}\{u[n]\}\}$ se puede escribir

$$\mathcal{F}\{x_o[n]\} = j \operatorname{Im}\{e^{-j\omega}\mathcal{F}\{u[n]\}\} = j [-\operatorname{Re}\{\mathcal{F}\{u[n]\}\} \operatorname{sen}\omega + \operatorname{Im}\{\mathcal{F}\{u[n]\}\} \cos\omega],$$

y notando que $\operatorname{Re}\{\mathcal{F}\{u[n]\}\} = \mathcal{F}\{x_e[n]\}$, $j \operatorname{Im}\{\mathcal{F}\{u[n]\}\} = \mathcal{F}\{x_o[n]\}$, se tiene que

$$\mathcal{F}\{x_o[n]\} = -j\mathcal{F}\{x_e[n]\} \operatorname{sen}\omega + \mathcal{F}\{x_o[n]\} \cos\omega$$

de donde

$$\mathcal{F}\{x_o[n]\} = -j\mathcal{F}\{x_e[n]\} \frac{\operatorname{sen}\omega}{1 - \cos\omega}.$$

Reemplazando $\mathcal{F}\{x_e[n]\}$ por el resultado encontrado en (3.196) resulta

$$\mathcal{F}\{x_o[n]\} = -\frac{j}{2} \frac{\operatorname{sen}\omega}{1 - \cos\omega}, \quad (3.198)$$

que es una función imaginaria e impar de la frecuencia, como corresponde a la transformada de una función impar, según la Tabla 3.1). Utilizando (3.196) y (3.198) se obtiene el resultado buscado:

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \frac{1}{2} + \sum_r \pi \delta(\omega - 2\pi r) - \frac{j}{2} \frac{\operatorname{sen}\omega}{1 - \cos\omega} = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos\omega - j \operatorname{sen}\omega}{1 - \cos\omega} + \sum_r \pi \delta(\omega - 2\pi r)$$

que resulta en

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{j\omega}}{1 - \cos \omega} + \sum_r \pi \delta(\omega - 2\pi r). \quad (3.199)$$

Este resultado parece distinto al obtenido en el Ejemplo 3.77, dado por (3.181), repetido aquí:

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_r \pi \delta(\omega + 2\pi r). \quad (3.200)$$

Pero multiplicando y dividiendo el primer término de (3.200) por $(1 - e^{j\omega})$ es fácil ver que

$$\left(\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \right) \left(\frac{1 - e^{j\omega}}{1 - e^{j\omega}} \right) = \frac{1 - e^{j\omega}}{1 - e^{j\omega} - e^{-j\omega} + 1} = \frac{1 - e^{j\omega}}{2 - 2 \cos \omega} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{j\omega}}{1 - \cos \omega}$$

que coincide con el primer término de (3.199). \square

El desarrollo este ejemplo es más complicado que el del Ejemplo 3.77, y también bastante diferente de la forma de cálculo de la transformada para la señal de tiempo continuo $u(t)$ efectuada en el Capítulo 2, lo que muestra que no siempre es conveniente extrapolar los desarrollos para tiempo continuo a tiempo discreto.

3.11.7. Diferenciación en frecuencia

Diferenciando la ecuación de análisis $X(e^{j\omega})$ dada por (3.154) respecto a la frecuencia se encuentra que

$$\frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}) = \sum_n \frac{d}{d\omega} (x[n]e^{-j\omega n}) = \sum_n -jnx[n]e^{-j\omega}$$

lo que permite establecer el par transformado

$$-jnx[n] \iff \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}),$$

que también se puede escribir (multiplicando ambos miembros por j) como

$$nx[n] \iff j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}). \quad (3.201)$$

Esta propiedad no es tan importante como la propiedad de desplazamiento temporal o frecuencial, pero es cómoda para calcular las transformadas de sucesiones de la forma $nx[n]$, cuya convergencia no siempre es fácil de probar.

EJEMPLO 3.85. TFTD de la sucesión $na^n u[n]$

Calcular por definición la TFTD de la sucesión

$$x[n] = na^n u[n]$$

que se muestra en la Fig. 3.89(a) para $a = 0,6$, y en la Fig. 3.89(d) para $a = -0,6$ no es sencillo porque la forma cerrada de

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n na^n u[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} na^n e^{-j\omega n}$$

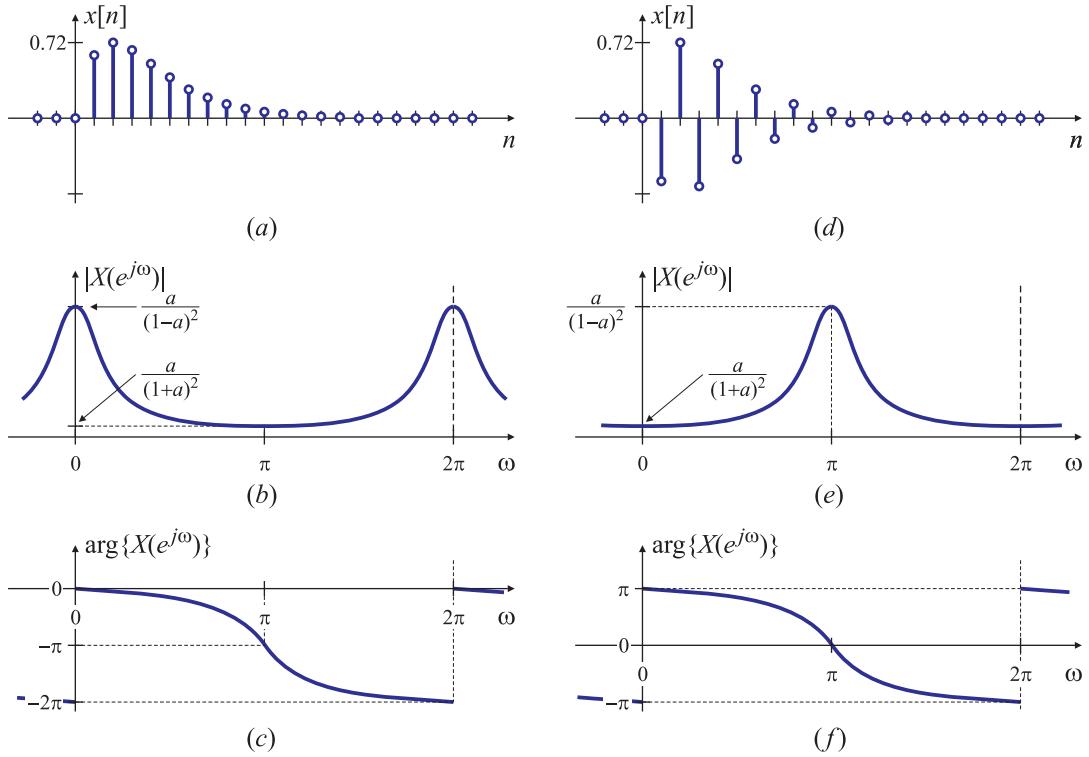


Fig. 3.89. Propiedad de derivación frecuencial: respuestas impulsivas, módulo y fase de la respuesta en frecuencia de la sucesión $x[n] = na^n$ para $a = 0,6$ [(a), (b), (c)] y $a = -0,6$ [(d), (e), (f)], respectivamente.

no suele recordarse con facilidad (habría que buscarla en una tabla de sumatorias). Sin embargo, aplicando la propiedad de derivación en frecuencia es sencillo calcular la TFTD de la sucesión $x[n]$. Si $y[n] = a^n u[n]$, en el Ejemplo 3.48 se encontró que

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

si $|a| < 1$. La propiedad de derivación en frecuencia establece que, si

$$x[n] = ny[n] \iff X(e^{j\omega}) = j \frac{d}{d\omega} Y(e^{j\omega}).$$

Por lo tanto,

$$X(e^{j\omega}) = j \frac{d}{d\omega} Y(e^{j\omega}) = j \frac{-jae^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$$

es decir

$$X(e^{j\omega}) = \frac{ae^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$$

cuyo módulo y fase son

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \frac{a}{1 - 2a \cos \omega + a^2} \right|, \\ \arg\{X(e^{j\omega})\} &= -\omega - \arctan \left(\frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega} \right), \end{aligned}$$

respectivamente. Estas respuestas se grafican en la Fig. 3.89(b), (c) para $a = 0,6$, y en la Fig. 3.89(e), (f) para $a = -0,6$. \square

3.11.8. Teorema de convolución temporal

Esta propiedad, junto con la de desplazamiento temporal, es una de las más útiles de la teoría de transformadas de Fourier de tiempo discreto, de la misma manera que ocurre para la transformada de tiempo continuo. Su derivación es sencilla. Si $X(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ son la TFTD de $x[n]$, $h[n]$, respectivamente, y si

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_m x[m]h[n - m],$$

la TFTD $Y(e^{j\omega})$ de $y[n]$ se puede calcular por definición como

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_n y[n]e^{-j\omega n} = \sum_n \left(\sum_m x[m]h[n - m] \right) e^{-j\omega n}.$$

Intercambiando el orden de las sumatorias, se tiene que

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_m x[m] \left(\sum_n h[n - m]e^{-j\omega n} \right). \quad (3.202)$$

El término entre paréntesis es la TFTD de la sucesión $h[n - m]$, es decir, $h[n]$ desplazada m muestras en tiempo. Aplicando la propiedad de desplazamiento temporal,

$$\sum_n h[n - m]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega m}H(e^{j\omega}).$$

Reemplazando en (3.202),

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_m x[m] \left(\sum_n h[n - m]e^{-j\omega n} \right) = \sum_m x[m]e^{-j\omega m}H(e^{j\omega}).$$

Como $H(e^{j\omega})$ no depende de m , se puede escribir afuera de la sumatoria:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \sum_m x[m]e^{-j\omega m} = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}). \quad (3.203)$$

De esta forma se demuestra el par transformado

$$y[n] = (x * h)[n] \iff Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}). \quad (3.204)$$

que indica que la transformada de la convolución temporal de dos sucesiones es igual a la multiplicación de cada una de las transformadas.

EJEMPLO 3.86. La propiedad de desplazamiento temporal como un caso especial del teorema de convolución

Una sucesión $x[n]$ y su versión retrasada $x_d[n] = x[n - n_d]$ se pueden relacionar convolucionando $x[n]$ con un impulso desplazado n_d unidades de tiempo:

$$x_d[n] = x[n - n_d] = x[n] * \delta[n - n_d].$$

Si $X(e^{j\omega})$ es la TFTD de $x[n]$, y recordando el par transformado

$$\delta[n - n_d] \iff e^{-jn_d\omega}$$

la transformada de $x_d[n]$ se puede calcular aplicando el teorema de convolución:

$$x_d[n] = \delta[n - n_d] * x[n] \iff e^{-jn_d\omega}X(e^{j\omega})$$

que coincide con el resultado obtenido en la Sección 3.11.3. □

El teorema de convolución también puede interpretarse como una consecuencia directa de la cualidad de autofunciones de las exponenciales complejas. Si $H(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia de un sistema con respuesta impulsiva $h[n]$, y si la entrada es $x[n] = e^{j\omega n}$, la salida del sistema es

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}.$$

Es decir, las exponenciales complejas son las autofunciones de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, y la TFTD $H(e^{j\omega})$ de la respuesta impulsiva $h[n]$ su autovalor. La ecuación de síntesis de la transformada de Fourier es una representación de la sucesión $x[n]$ como una superposición de exponenciales complejas de tamaño infinitesimal:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega} \Delta\omega \\ &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_k \left[X(e^{jk\Delta\omega}) \frac{\Delta\omega}{2\pi} \right] e^{jk\Delta\omega}. \end{aligned}$$

En otras palabras, la sucesión $x[n]$ se puede pensar como la suma de infinitas exponenciales complejas $e^{jk\Delta\omega}$ de amplitud $X(e^{jk\Delta\omega})\Delta\omega/(2\pi)$. Por la propiedad de superposición de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, y teniendo en cuenta la cualidad de autofunciones de las exponenciales complejas, se tiene que

$$\begin{aligned} y[n] &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_k \left[X(e^{jk\Delta\omega}) \frac{\Delta\omega}{2\pi} \right] H(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k X(e^{jk\Delta\omega})H(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega} \Delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega, \end{aligned}$$

lo que significa que la TFTD $Y(e^{j\omega})$ de $y[n]$ es

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}),$$

como en la ecuación (3.203).

EJEMPLO 3.87. Cálculo de la salida de estado estacionario usando el teorema de convolución temporal

El teorema de convolución temporal sirve para interpretar el cálculo de la salida de estado estacionario de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h[n]$ cuando se lo excita con una señal de entrada $x[n] = A \cos(\omega_0 n)$, como la que se representa en la Fig. 3.90(a). El espectro de esta señal es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_r \pi A \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) + \pi A \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r),$$

como se muestra en la Fig. 3.90(d). El sistema tiene una respuesta impulsiva $h[n]$, y una respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, como las graficadas en las Fig. 3.90(b) y (e), respectivamente. La salida $y[n]$ del sistema es

$$y[n] = (x * h)[n],$$

y el teorema de convolución temporal asegura que

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \times H(e^{j\omega}).$$

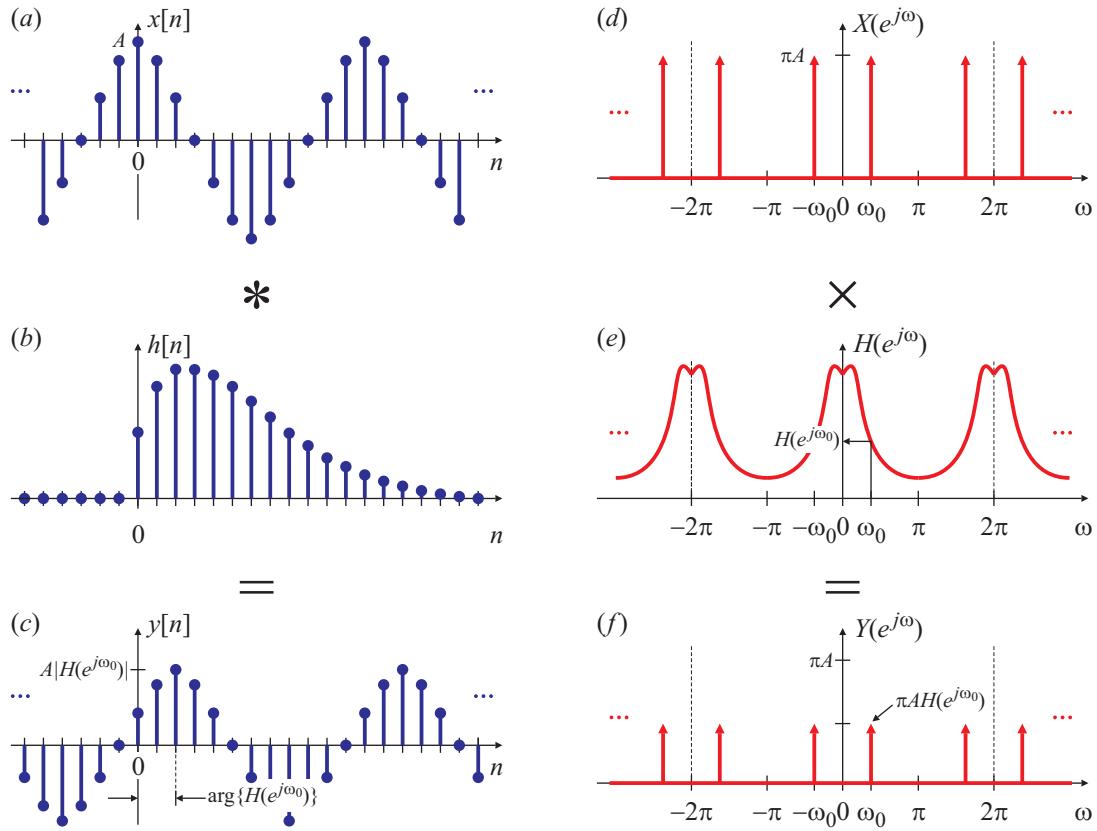


Fig. 3.90. Cálculo de la salida de estado estacionario de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h[n]$ cuando se lo excita con una entrada senoidal $x[n] = A \cos(\omega_0 n)$.

Como $X(e^{j\omega})$ es un tren de impulsos, $Y(e^{j\omega})$ también estará representada por un tren de impulsos,

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) \times \left(\sum_r \pi A \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) + \pi A \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \right) \\ &= \sum_r \pi A H(e^{j\omega}) \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) + \pi A H(e^{j\omega}) \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \end{aligned}$$

y la propiedad del colador del impulso indica que su área queda escalada por el valor que toma la función $H(e^{j\omega})$ en los lugares donde está aplicado el impulso:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_r \pi A H(e^{-j\omega_0}) \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) + \pi A H(e^{j\omega_0}) \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$$

como se representa en la Fig. 3.90(f). En este paso se ha tenido en cuenta que $H(e^{j\omega})$ es 2π -periódico, y entonces $H(e^{j(\pm\omega_0+2\pi r)}) = H(e^{\pm j\omega_0})$. Por lo tanto, la salida $y[n]$ también será una señal sinusoidal escalada por $|H(e^{j\omega_0})|$ y desfasada por $\arg\{H(e^{j\omega_0})\}$

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \arg\{H(e^{j\omega_0})\}),$$

como se muestra en la Fig. 3.90(c), que es el mismo resultado obtenido en la Sección 3.8.3. (En el gráfico de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ no se ha graficado la fase para no complicar demasiado el dibujo). \square

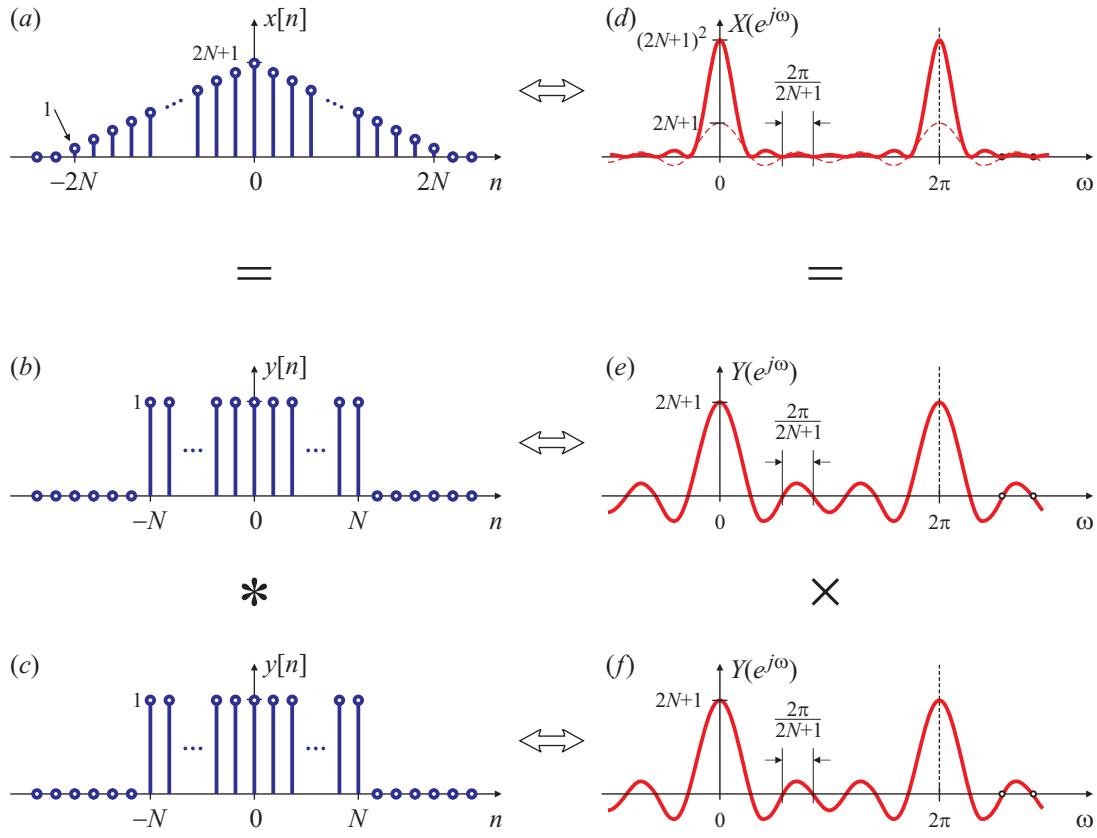


Fig. 3.91. Cálculo de la TFTD de un pulso triangular aplicando el teorema de convolución temporal.

El teorema de convolución temporal también se puede aplicar para calcular la TDFT de señales un poco más complicadas.

EJEMPLO 3.88. TFTD de un pulso triangular

El pulso triangular $x[n]$ de largo $4N + 1$, definido como

$$x[n] = \begin{cases} (2N+1) - |n|, & -2N \leq n \leq 2N, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

representado en la Fig. 3.91(a), se puede pensar como la convolución de dos pulsos rectangulares $y[n]$ de longitud $2N + 1$ definidos por

$$y[n] = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

representados en las Figs. 3.91(b) y (c). Estos pulsos rectangulares $y[n]$ pueden pensarse como la respuesta impulsiva de un promediador no causal con ganancia $2N + 1$. Recordando el Ejemplo , su TFTD $Y(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia del promediador, dada por la ecuación (3.116) con $M_1 = M_2 = N$, y escalada por $2N + 1$. Por lo tanto,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{\sin[\omega(2N+1)/2]}{\sin(\omega/2)},$$

como se muestra en las Figs. 3.91(e) y (f). Aplicando el teorema de convolución temporal, como $x[n] = (y * y)[n]$, resulta que

$$X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) \times Y(e^{j\omega})$$

es decir

$$X(e^{j\omega}) = \left(\frac{\sin[\omega(2N+1)/2]}{\sin(\omega/2)} \right)^2, \quad (3.205)$$

representada esquemáticamente en la Fig. 3.91(d). Este resultado se puede revisar aplicando propiedades:

- Como $x[n]$ tiene simetría par, $X(e^{j\omega})$ debe real y par, como efectivamente lo es (3.205).
- Para aplicar la propiedad de área, el valor de $\sum_n x[n]$ puede calcularse recordando que $\sum_{m=0}^M m = M(M+1)/2$. Es claro que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-2N}^{2N} x[n] &= 2 \sum_{n=0}^{2N} x[n] - x[0] = 2 \sum_{n=0}^{2N} [(2N+1)-n] - (2N+1) \\ &= 2(2N+1)^2 - 2 \sum_{n=0}^{2N} n - (2N+1) \\ &= 2(2N+1)^2 - 2(2N+1)N - (2N+1) \\ &= (2N+1)^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, es trivial observar que $X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = (2N+1)^2$, verificándose entonces que $X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \sum_n x[n]$.

Este resultado es similar al obtenido en el Capítulo 2 para un pulso triangular continuo. \square

Esta manera de calcular la TFTD del pulso triangular está limitada a pulsos de longitud $4N+1$, es decir, que el número total de muestras es impar, y puede ser 5, 9, 13, etc. En el Problema 15 se muestra que la TFTD de pulsos de largo $4N-1$ (impares, de largo 3, 7, 11, etc.) coincide con (3.205), pero hay que cambiar las funciones $y[n]$ a convolucionar. Se puede comprobar que si el pulso triangular está formado por un número *par* de muestras, no puede quedar centrado en el origen, y las dos muestras del centro toman el mismo valor.

EJEMPLO 3.89. Convolución de sucesiones de longitud finita

Este teorema es extremadamente práctico para calcular las convoluciones de sucesiones de longitud finita. En el Ejemplo 3.28 se calculó la convolución por definición de las sucesiones

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1], \\ h[n] &= \delta[n+3] + 2\delta[n+2] + 3\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1], \end{aligned}$$

y para poder realizar el cálculo fue necesario identificar los límites de cada una de las cinco etapas de la convolución. La aplicación de la propiedad (3.204) resulta mucho más ventajosa, porque evita este paso que puede ser tedioso y conducir a errores. Si $y[n] = (x * h)[n]$, la propiedad de convolución temporal indica que

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}).$$

El cálculo de $X(e^{j\omega})$ y de $H(e^{j\omega})$ es trivial: aplicando la propiedad de desplazamiento temporal al impulso se encuentra que

$$X(e^{j\omega}) = e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}, \quad \text{y} \quad H(e^{j\omega}) = e^{j3\omega} + 2e^{j2\omega} + 3e^{j\omega} + 2e^{j0\omega} + e^{-j\omega},$$

y entonces

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = & e^{j\omega} \times (e^{j3\omega} + 2e^{j2\omega} + 3e^{j\omega} + 2e^{j0\omega} + e^{-j\omega}) \\ & + 1 \times (e^{j3\omega} + 2e^{j2\omega} + 3e^{j\omega} + 2e^{j0\omega} + e^{-j\omega}) \\ & + e^{-j\omega} \times (e^{j3\omega} + 2e^{j2\omega} + 3e^{j\omega} + 2e^{j0\omega} + e^{-j\omega}). \end{aligned}$$

Organizando la multiplicación con cuidado se facilita el cálculo final. Agrupando por columnas las potencias del mismo grado de $e^{j\omega}$ se tiene

$$\begin{array}{ccccccccc} Y(e^{j\omega}) = & e^{j4\omega} & + & 2e^{j3\omega} & + & 3e^{j2\omega} & + & 2e^{j\omega} & + & 1e^{j0\omega} \\ & + & e^{j3\omega} & + & 2e^{j2\omega} & + & 3e^{j\omega} & + & 2e^{j0\omega} & + & 1e^{-j\omega} \\ & & + & e^{j2\omega} & + & 2e^{j\omega} & + & 3e^{j0\omega} & + & 2e^{-j\omega} & + & 1e^{-j2\omega} \end{array}$$

que resulta en

$$Y(e^{j\omega}) = e^{j4\omega} + 3e^{j3\omega} + 6e^{j2\omega} + 7e^{j\omega} + 6 + 3e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}.$$

Finalmente, aplicando la propiedad de desplazamiento se calcula fácilmente la transformada inversa

$$y[n] = \delta[n+4] + 3\delta[n+3] + 6\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 6\delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

El cálculo de la convolución usando esta técnica evita tener que definir los intervalos de la variable n en cada etapa, y resulta mucho más sencillo que aplicar la definición. \square

3.11.9. Teorema de convolución frecuencial, modulación o ventaneo

Éste es otro de los teoremas importantes del análisis frecuencial de señales discretas. Si $X(e^{j\omega})$, $W(e^{j\omega})$ son las transformadas de Fourier de tiempo discreto de las sucesiones $x[n]$, $w[n]$, la transformada de Fourier de la sucesión

$$y[n] = x[n]w[n]$$

se puede calcular como sigue. Por definición,

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_n y[n]e^{-j\omega n} = \sum_n x[n]w[n]e^{-j\omega n}. \quad (3.206)$$

Reemplazando $x[n]$ o $w[n]$ por su ecuación de síntesis, por ejemplo

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (3.207)$$

se tiene que

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\sigma})e^{j\sigma n} d\sigma \right) w[n]e^{-j\omega n}. \quad (3.208)$$

En (3.208) se ha cambiado la variable de integración ω de (3.207) por la variable σ para evitar confusiones porque ω en (3.207) no tiene nada que ver con ω en (3.206). Cambiando el orden de la suma y la integración en (3.208) y reacomodando algunos términos resulta

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\sigma}) \sum_n w[n]e^{j\sigma n} e^{-j\omega n} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\sigma}) \sum_n w[n]e^{-j(\omega-\sigma)n} d\sigma.$$

La expresión de la sumatoria dentro de la integral es la transformada de Fourier de tiempo discreto de la sucesión $w[n]$, pero evaluada en la frecuencia $(\omega - \sigma)$, es decir

$$\sum_n w[n] e^{-j(\omega-\sigma)n} = W(e^{j(\omega-\sigma)}),$$

de modo que

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\sigma}) W(e^{j(\omega-\sigma)}) d\sigma \quad (3.209)$$

lo que permite establecer el par transformado

$$x[n]w[n] \iff \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\sigma}) W(e^{j(\omega-\sigma)}) d\sigma.$$

La ecuación (3.209) es una *convolución periódica*, es decir, la convolución de dos señales periódicas cuyo intervalo de integración se extiende sólo sobre un período. La dualidad inherente en la mayoría de los teoremas de las transformadas de Fourier es evidente cuando se comparan los teoremas de convolución y modulación. Sin embargo, al contrario de lo que sucede con las transformadas de tiempo continuo, donde la dualidad es completa, en el caso de tiempo discreto aparecen diferencias importantes porque la transformada de Fourier es una suma (la variable temporal es discreta) mientras que la transformada inversa es una integral con un integrando periódico (la variable frecuencial es continua). Aunque para las funciones de tiempo continuo se demostró que la transformada de la convolución en tiempo es igual a la multiplicación de las transformadas y viceversa, en tiempo discreto esta afirmación debe cambiarse levemente: la transformada de la convolución de sucesiones es igual al producto de transformadas periódicas, y la transformada del producto de sucesiones es igual a la convolución *periódica* de las transformadas correspondientes.

3.11.10. Teorema de Parseval

El teorema de Parseval está vinculado a la energía de las señales. Como se estudió en el Capítulo 1, la energía de una señal discreta se define como

$$E_x = \sum_n |x[n]|^2 = \sum_n x[n]x^*[n] \quad (3.210)$$

si la suma converge. Si se nota $w[n] = x^*[n]$, el último término de (3.210) resulta $\sum_n x[n]w[n]$. Comparando con la expresión (3.206) en el desarrollo del teorema de modulación o ventanao, se encuentra que

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_n x[n]w[n] = Y(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\sigma}) W(e^{j(\omega-\sigma)}) d\sigma \Big|_{\omega=0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\sigma}) W(e^{-j\sigma}) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.211)$$

Teniendo en cuenta que $w[n] = x^*[n]$, $W(e^{j\sigma}) = \sum_n x^*[n]e^{-j\sigma n}$, y entonces

$$W(e^{-j\sigma}) = \sum_n x^*[n]e^{-j(-\sigma)n} = \left(\sum_n x[n]e^{-j\sigma n} \right)^* = X^*(e^{j\omega}).$$

Reemplazando en (3.211),

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\sigma}) W(e^{-j\sigma}) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\sigma}) X^*(e^{j\sigma}) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\sigma})|^2 d\sigma.$$

Por lo tanto, la identidad de Parseval se puede escribir como

$$\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.212)$$

La función $|X(e^{j\omega})|^2$ se conoce *espectro de densidad de energía*, porque determina cómo se distribuye la energía en el dominio frecuencial. Necesariamente, el espectro de densidad de energía sólo está definido para señales de energía finita.

Una versión generalizada del Teorema de Parseval, que se puede deducir de manera similar, establece que

$$\sum_n x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) d\omega.$$

La principal aplicación de la identidad de Parseval es intercambiar una operación de *integración* en un dominio, que generalmente es complicada, por una *sumatoria* en el otro dominio, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.90. Error de aproximación en filtros

Es frecuente que, cuando se desea implementar un filtro con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ y respuesta impulsiva $h[n]$, uno deba conformarse con una versión aproximada $H_a(e^{j\omega})$, con respuesta impulsiva $h_a[n]$. Una de las formas de medir la diferencia entre el filtro deseado y el aproximado es utilizando el error medio cuadrático, que en el caso de la respuesta en frecuencia de sistemas discretos se puede expresar como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_a(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

Aplicando la identidad de Parseval (3.212) es claro que

$$\mathcal{E} = \sum_n |h[n] - h_a[n]|^2,$$

que en general es mucho más fácil de calcular que la integral. Mayores detalles se estudian en el Apéndice B. \square

3.12. Aplicaciones de la TFTD

Las propiedades estudiadas en la sección anterior, listadas en la Tabla 3.2, junto con una serie pares transformados de uso frecuente, que se sintetizan en la Tabla 3.3, son muy útiles para determinar transformadas y antitransformadas de Fourier de tiempo discreto. Frecuentemente, utilizando algunos pares transformados conocidos y las propiedades de la TFTD se puede representar una sucesión en función de operaciones sobre otras sucesiones para las cuales las transformadas son conocidas, simplificando una tarea que puede ser difícil o rutinaria, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Tabla 3.2. Propiedades de la TFTD

Propiedad	Sucesión $x[n], y[n]$	Transformada de Fourier de tiempo discreto $X(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega})$
linealidad	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
corrimiento temporal	$x[n - n_d]$ ($n_d \in \mathbb{Z}$)	$e^{-jn_d\omega} X(e^{j\omega})$
corrimiento frecuencial	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
reflexión	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ si $x[n]$ es real
derivación frecuencial	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
convolución temporal	$(x * y)[n]$	$X(e^{j\omega}) \times Y(e^{j\omega})$
convolución frecuencial	$x[n] \times y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\omega$
área de la transformada	$x[n]_{n=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$	
“área” de la sucesión	$\sum_n x[n] = X(e^{j\omega}) _{\omega=0}$	
Identidad de Parseval	$\sum_n x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	
	$\sum_n x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) d\omega$	

3.12.1. Cálculo de transformadas aplicando propiedades

EJEMPLO 3.91. Determinación de la TFTD de la sucesión $x[n] = 2(0,8)^{n+3}u[n - 2]$
 La sucesión $x[n]$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} x[n] &= 2(0,8)^{n+3}u[n - 2] \\ &= 2(0,8)^5(0,8)^{n-2}u[n - 2] \\ &= 2(0,8)^5x_1[n - 2], \end{aligned} \tag{3.213}$$

donde

$$x_1[n] = (0,8)^n u[n].$$

Tabla 3.3. Sucesiones típicas y sus transformadas de Fourier de tiempo discreto

Sucesión	Transformada de Fourier de tiempo discreto
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_d]$	$e^{-jn_d\omega}$
$1 \ (-\infty < n < \infty)$	$\sum_r 2\pi \delta(\omega - 2\pi r)$
$a^n u[n] \ (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$a^{ n } \ (a < 1)$	$a \frac{\cos \omega - a}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$
$a^n u[n] - a^{-n} u[-n] \ (a < 1)$	$j \frac{-a \sin \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_r \pi \delta(\omega - 2\pi r)$
$na^n u[n] \ (a < 1)$	$\frac{ae^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
$r^n \frac{\sin[\omega_p(n+1)]}{\sin \omega_p}$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
$\frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right)$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \omega < \pi. \end{cases}$
$\frac{\omega_c}{2\pi} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right) \right]^2 = \frac{1 - \cos(\omega_c n)}{\pi n^2 \omega_c}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 - \left \frac{\omega}{\omega_c} \right , & \omega < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \omega < \pi. \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$	$e^{-j\frac{(N-1)}{2}\omega} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$
$x[n] = \begin{cases} N+1- n , & -N \leq n \leq N, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$	$\left(\frac{\sin[(N-1)\omega/2]}{\sin(\omega/2)} \right)^2$
$\frac{\pi n}{2} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2} n\right) \right]^2 = \frac{1 - \cos(\pi n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} j, & -\pi < \omega < 0, \\ -j, & 0 < \omega \leq \pi. \end{cases}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_r 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r)$
$\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_r \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r) + \sum_r \pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r)$
$\sin(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_r j\pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r) - \sum_r j\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r)$

De acuerdo a la tabla de transformadas,

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0,8e^{-j\omega}}, \quad (3.214)$$

y de la tabla de propiedades,

$$X(e^{j\omega}) = 2(0,8)^5 e^{-j2\omega} X_1(e^{j\omega}). \quad (3.215)$$

Finalmente, de (3.214) y (3.215) resulta

$$X(e^{j\omega}) = 2(0,8)^5 \frac{e^{-j2\omega}}{1 - 0,8e^{-j\omega}}. \quad (3.216)$$

Para comparar la ventaja de esta manera de calcular las transformadas, se computa la TFTD de (3.213) a partir de la definición. Se tiene entonces

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{2(0,8)^{n+3} u[n-2]\} e^{-j\omega n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2(0,8)^{n+3} e^{-j\omega n}.$$

Se efectúa el cambio de variable $n = m + 2$, de modo que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=2}^{\infty} 2(0,8)^{n+3} e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{\infty} 2(0,8)^{(m+2)+3} e^{-j\omega(m+2)} = 2(0,8)^5 e^{-j2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} (0,8)^m e^{-j\omega m},$$

y por lo tanto,

$$X(e^{j\omega}) = 2(0,8)^5 \frac{e^{-j2\omega}}{1 - 0,8e^{-j\omega}}$$

que naturalmente coincide con (3.216). \square

EJEMPLO 3.92. Cálculo de la TFTD de la sucesión $x[n] = n(0,5)^n u[n]$.

La presencia del factor n sugiere aplicar la propiedad de derivación frecuencial. Se define entonces $x[n] = nx_1[n]$, donde $x_1[n] = (0,5)^n u[n]$. De la tabla de transformadas se encuentra que $X_1(e^{j\omega}) = (1 - 0,5e^{-j\omega})^{-1}$, y por lo tanto

$$X(e^{j\omega}) = j \frac{d}{d\omega} X_1(e^{j\omega}) = j \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - 0,5e^{-j\omega}} \right) = -j \frac{-0,5e^{-j\omega}(-j)}{(1 - 0,5e^{-j\omega})^2} = \frac{0,5e^{-j\omega}}{(1 - 0,5e^{-j\omega})^2} \quad \square$$

EJEMPLO 3.93. Cómputo de la TFTD de $x[n] = (n+2)(-0,7)^{n-1}u[n-2]$

La sucesión $x[n]$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} x[n] &= (n+2)(-0,7)^{n-1}u[n-2] = (-0,7)^{-1}[(n-2)+4](-0,7)^{n-2}u[n-2] \\ &= (-0,7)^{-1}(n-2)(-0,7)^{n-2}u[n-2] + (-0,7)^{-1}4(-0,7)^{n-2}u[n-2] \\ &= (-0,7)^{-1}x_2[n-2] + (-0,7)^{-1}4x_1[n-2], \end{aligned}$$

donde $x_1[n] = (-0,7)^n u[n]$, y $x_2[n] = nx_1[n]$. Aplicando propiedades resulta

$$X(e^{j\omega}) = (-0,7)^{-1}e^{-j2\omega} X_2(e^{j\omega}) + (-0,7)^{-1}4e^{-j2\omega} X_1(e^{j\omega}).$$

A partir de los resultados de los Ejemplos 3.91 y 3.92 se tiene que

$$\begin{aligned} X_1(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 + 0,7e^{-j\omega}}, \\ X_2(e^{j\omega}) &= j \frac{d}{d\omega} X_1(e^{j\omega}) = \frac{-0,7e^{-j\omega}}{(1 + 0,7e^{-j\omega})^2}, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= (-0,7)^{-1} e^{-j2\omega} \frac{-0,7e^{-j\omega}}{(1 + 0,7e^{-j\omega})^2} + (-0,7)^{-1} 4e^{-j2\omega} \frac{1}{1 + 0,7e^{-j\omega}} \\ &= (-0,7)^{-1} \left(\frac{-0,7e^{-j3\omega} + 4e^{-j2\omega}(1 + 0,7e^{-j\omega})}{(1 + 0,7e^{-j\omega})^2} \right) \\ &= (-0,7)^{-1} e^{-j2\omega} \left(\frac{-0,7e^{-j\omega} + 4 + 4 \cdot 0,7e^{-j\omega}}{(1 + 0,7e^{-j\omega})^2} \right) \end{aligned}$$

de donde resulta finalmente

$$X(e^{j\omega}) = \frac{(-0,7)^{-1} e^{-j2\omega} (4 + 2,1e^{-j\omega})}{(1 + 0,7e^{-j\omega})^2} \quad \square$$

3.12.2. Cálculo de transformadas inversas

Las propiedades también pueden utilizarse para calcular fácilmente la transformada inversa. En particular, esta técnica es útil para calcular la respuesta impulsiva $h[n]$ de un sistema a partir de su respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.94. Cálculo de la sucesión $h[n]$ cuya TFTD es $H(e^{j\omega}) = (1 - ae^{-j\omega})^{-2}$.

La respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ se puede escribir como el producto de dos transformadas,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2} = X(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

donde

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}},$$

lo que sugiere aplicar la propiedad de convolución temporal. Se tiene entonces que

$$v[n] = (x * x)[n]$$

donde $x[n]$ es la transformada inversa de $X(e^{j\omega})$. Según la tabla de transformadas, $x[n] = a^n u[n]$, y por lo tanto,

$$h[n] = (x * x)[n] = \sum_{m=0}^n x[m]x[n-m] = \sum_{m=0}^n a^m a^{n-m} = \sum_{m=0}^n a^n \quad (3.217)$$

de donde resulta

$$h[n] = (n+1)a^n u[n]. \quad (3.218)$$

El factor $u[n]$ resulta de observar que la sumatoria del último término de (3.217) no se ejecuta si $n < 0$. \square

EJEMPLO 3.95. Otra manera de calcular la TFTD inversa de $H(e^{j\omega}) = (1 - ae^{-j\omega})^{-2}$.

El Ejemplo 3.92 sugiere que esta transformada inversa también podría calcularse aplicando la propiedad de derivación frecuencial. Sabiendo que

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

es la TFTD de $x_1[n] = a^n u[n]$, se tiene que la TFDT de

$$x_2[n] = nx_1[n] = na^n u[n]$$

es

$$X_2(e^{j\omega}) = j \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right) = \frac{ae^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})^2}.$$

Como

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{a} X_2(e^{j\omega}),$$

resulta

$$h[n] = \frac{1}{a} x_2[n+1] = \frac{1}{a} (n+1) a^{n+1} u[n+1] = (n+1) a^n u[n+1].$$

Aunque $u[n+1] = 1$ en $n = -1$, el factor $(n+1)$ se anula, de modo que $h[n]$ se puede escribir

$$h[n] = (n+1) a^n u[n],$$

que coincide con el resultado (3.218) calculado previamente. \square

EJEMPLO 3.96. Transformada inversa de una función racional de $e^{-j\omega}$

Para calcular la respuesta impulsiva correspondiente a una respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - ce^{j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})}$$

es conveniente escribir $H(e^{j\omega})$ como un desarrollo en fracciones parciales,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - be^{-j\omega}}.$$

Los valores de A y B se encuentran igualando los numeradores,

$$1 - ce^{j\omega} = A - Abe^{-j\omega} + B - Bae^{-j\omega} = (A + B) + (Ab + Ba)e^{-j\omega},$$

de donde resulta $A + B = 1$, $Ab + Ba = c$. Operando se encuentra que

$$A = \frac{c - a}{b - a}, \quad B = \frac{b - c}{b - a}.$$

Por lo tanto

$$H(e^{j\omega}) = \left(\frac{c - a}{b - a} \right) \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \left(\frac{b - c}{b - a} \right) \frac{1}{1 - be^{-j\omega}}.$$

De la tabla de transformadas se tiene que

$$h[n] = \left(\frac{c - a}{b - a} \right) a^n u[n] + \left(\frac{b - c}{b - a} \right) b^n u[n].$$

siempre que a sea distinto de b . Si $a = b$ los dos denominadores son iguales, y $H(e^{j\omega})$ podría haberse escrito como

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A + B}{1 - ae^{-j\omega}}$$

cuya respuesta impulsiva es $h[n] = (A + B)a^n u[n]$. \square

3.13. Aplicación en las ecuaciones a diferencia

La propiedad de desplazamiento temporal y el teorema de convolución temporal son muy útiles para resolver un problema que quedaba pendiente desde la definición de la respuesta en frecuencia en la Sección 3.8.1: cómo obtener la respuesta en frecuencia de un sistema representado por una ecuación a diferencia (con condiciones iniciales nulas) sin tener que calcular su respuesta impulsiva $h[n]$. Si $x[n]$ representa la entrada de un sistema con respuesta impulsiva $h[n]$, la salida se calcula como

$$y[n] = (x * h)[n],$$

y por el teorema de convolución frecuencial,

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

de donde se encuentra que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}. \quad (3.219)$$

Por otra parte, la forma general de una ecuación a diferencias es

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (3.220)$$

donde $y[-1] = \dots = y[-N] = 0$, y que también se puede escribir como

$$\begin{aligned} a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_N y[n-N] &= \\ b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_M x[n-M]. \end{aligned}$$

Transformando término a término, y aplicando la propiedad de desplazamiento temporal, se tiene que

$$\begin{aligned} a_0 Y(e^{j\omega}) + a_1 e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) + a_2 e^{-j2\omega} Y(e^{j\omega}) + \dots + a_N e^{-jN\omega} Y(e^{j\omega}) &= \\ b_0 X(e^{j\omega}) + b_1 e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) + b_2 e^{-j2\omega} X(e^{j\omega}) + \dots + b_M e^{-jM\omega} X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Factorizando $Y(e^{j\omega})$ y $X(e^{j\omega})$ en los miembros de la izquierda y de la derecha, respectivamente, resulta

$$Y(e^{j\omega})(a_0 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-j2\omega} + \dots + a_N e^{-jN\omega}) = X(e^{j\omega})(b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-j2\omega} + \dots + b_M e^{-jM\omega}).$$

Finalmente, teniendo en cuenta (3.219) se encuentra que la respuesta en frecuencia del sistema representado por la ecuación a diferencias (3.220) es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-j2\omega} + \dots + b_M e^{-jM\omega}}{a_0 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-j2\omega} + \dots + a_N e^{-jN\omega}},$$

o en forma genérica

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (e^{-j\omega})^k}{\sum_{k=0}^N a_k (e^{-j\omega})^k}. \quad (3.221)$$

En esta expresión se ha puesto de manifiesto que $H(e^{j\omega})$ puede escribirse como el cociente de dos polinomios en la variable $z^{-1} = e^{-j\omega}$. Si c_k y p_k representan los ceros de los

polinomios numerador y denominador, respectivamente (que para simplificar la notación se supondrán todos distintos), se tiene que $H(e^{j\omega})$ también puede expresarse como

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_M \prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-j\omega})}{a_N \prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega})},$$

o bien, aplicando el método de fracciones parciales,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M-N} B_k e^{-jk\omega} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - p_k e^{-j\omega})},$$

donde la primera sumatoria sólo aparece si $M \geq N$. Esta forma de representar la respuesta impulsiva es característica de los sistemas discretos: en los sistemas continuos no es habitual que aparezcan términos como los representados por la primera sumatoria, ya que en general el grado del polinomio numerador es menor o a lo sumo igual al grado del polinomio denominador. Este no es el caso de los sistemas discretos, donde M puede ser menor, igual o mayor que N .

Antitrasnformando la expresión anterior se encuentra que la respuesta impulsiva de un sistema representado por una ecuación a diferencias con condiciones iniciales nulas tiene la forma

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M-N} B_k \delta[n - k] + \sum_{k=1}^N A_k p_k^n u[n]. \quad (3.222)$$

En síntesis, para encontrar la respuesta en frecuencia de una ecuación a diferencias como (3.220) se escribe un cociente de polinomios de potencias de $(e^{-j\omega})$ donde los coeficientes del polinomio numerador son los coeficientes b_k que “pesan” las muestras pasadas de la entrada, y los coeficientes a_k del polinomio denominador son los coeficientes que “pesan” las muestras pasadas de la salida. El término $b_k x[n - k]$ ($a_k y[n - k]$) de la ecuación a diferencias se convierte en el término $b_k e^{-jk\omega}$ ($a_k e^{-jk\omega}$) del polinomio numerador (denominador).

EJEMPLO 3.97. Propiedad de desplazamiento temporal: ecuaciones a diferencia

En el Ejemplo 3.48 se calculó la respuesta en frecuencia del sistema recursivo $y[n] = ay[n - 1] + x[n]$, con $y[-1] = 0$ utilizando la ecuación de análisis (3.154) y el conocimiento de la respuesta impulsiva $h[n] = a^n u[n]$. Esta respuesta en frecuencia se puede calcular directamente reconociendo los coeficientes de la ecuación a diferencia. Escribiendo

$$y[n] - ay[n - 1] = x[n]$$

como

$$a_0 y[n] + a_1 y[n - 1] = b_0 x[n]$$

se observa que los parámetros de (3.220) son $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, y $M = 0$, $b_0 = 1$. Entonces la respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

que coincide con la calculada en el Ejemplo 3.48. □

En el siguiente ejemplo se estudia un sistema un poco más complicado.

EJEMPLO 3.98. Respuesta en frecuencia de una ecuación a diferencias

En el Ejemplo 3.64 se mostró que si bien se podía encontrar la respuesta impulsiva del sistema caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] - ay[n - 1] - by[n - 2] = x[n] \quad \text{con } y[-1] = y[-2] = 0,$$

aplicando el método de recursión, no era sencillo encontrar la forma general de la respuesta $h[n]$, complicando el cálculo de la respuesta en frecuencia. Aplicando la propiedad de desplazamiento temporal el cálculo es trivial. Trasformando término a término la ecuación a diferencias se tiene que

$$Y(e^{j\omega}) - ae^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) - be^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}),$$

que puede escribirse como

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega} - be^{-j2\omega}}.$$

Esta expresión también puede obtenerse reconociendo los coeficientes de (3.220) y reemplazando en (3.221). En este caso, la ecuación a diferencia es

$$a_0y[n] + a_1y[n - 1] + a_2y[n - 2] = b_0x[n],$$

con $N = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = -a$, $a_2 = -b$, y $M = 0$, $b_0 = 1$. Entonces,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0}{a_0 + a_1e^{-j\omega} + a_2e^{-j2\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega} - be^{-j2\omega}}.$$

Transformar término a término, o reemplazar los coeficientes de la ecuación a diferencia en (3.221) es esencialmente lo mismo, y elegir uno u otro método es cuestión de costumbre. \square

La aplicación de la propiedad de desplazamiento temporal facilita el cálculo de las respuestas en frecuencia, pero debe recordarse que la respuesta en frecuencia sólo tiene sentido para sistemas *estables*, y esta cualidad puede quedar oculta en la ecuación a diferencias.

EJEMPLO 3.99. Cálculo incorrecto de una respuesta en frecuencia

El sistema caracterizado por la ecuación recursiva

$$y[n] = y[n - 1] + x[n]$$

se puede escribir como la ecuación a diferencias

$$y[n] - y[n - 1] = x[n]$$

donde se reconocen los parámetros $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, y $M = 0$, $b_0 = 1$, con lo que la respuesta en frecuencia sería

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}.$$

Sin embargo este resultado es incorrecto porque, tal como se mostró en el Ejemplo 3.35, este sistema tiene una respuesta impulsiva $h[n] = u[n]$ y por lo tanto no es estable. Una forma de calcular correctamente la TFTD de esta sucesión se mostró en el Ejemplo 3.77. \square

EJEMPLO 3.100. Determinación de la respuesta impulsiva de una ecuación a diferencias
 La respuesta impulsiva de la ecuación a diferencias con coeficientes constantes

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1],$$

satisface

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1].$$

Para expresar $h[n]$ en forma cerrada, se calcula la TFTD aplicando propiedades. Resulta entonces

$$H(e^{j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}) = 1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega},$$

de donde

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - (1/4)e^{-j\omega}}{1 - (1/2)e^{-j\omega}}.$$

La respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ queda expresada como una función racional de $e^{-j\omega}$, y la respuesta impulsiva $h[n]$ puede resolverse como en el Ejemplo 3.96. Específicamente, se nota que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - (1/4)e^{-j\omega}}{1 - (1/2)e^{-j\omega}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (1/2)e^{-j\omega}},$$

y antitransformando término a término resulta

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \quad (3.223)$$

Este ejemplo puede resolverse de manera más sencilla aplicando propiedades, notando que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - (1/2)e^{-j\omega}} - \frac{e^{-j\omega}}{4} \frac{1}{1 - (1/2)e^{-j\omega}}.$$

Se tiene entonces que

$$h[n] = (1/2)^n u[n] - \frac{1}{4}(1/2)^{n-1} u[n-1]. \quad (3.224)$$

A primera vista, las expresiones (3.223) y (3.224) parecen distintas, pero el cálculo de unos pocos términos muestran que son idénticas. \square

EJEMPLO 3.101. Determinación de la respuesta impulsiva de una ecuación a diferencias
 Un sistema está caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] + \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = -2x[n] - \frac{1}{10}x[n-1] + \frac{51}{90}x[n-2] + \frac{2}{45}x[n-3] - \frac{1}{9}x[n-4].$$

Su función transferencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{-2 - \frac{1}{10}e^{-j\omega} + \frac{51}{90}e^{-j2\omega} + \frac{2}{45}e^{-j3\omega} - \frac{1}{9}e^{-j4\omega}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}},$$

donde el orden del numerador ($M = 4$) es mayor que el orden del denominador ($N = 2$). Efectuando el cociente de polinomios, se encuentra que

$$H(e^{j\omega}) = 1 + \frac{2}{5}e^{-j\omega} + \frac{2}{3}e^{-j2\omega} + \frac{-3 + \frac{4}{3}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}.$$

Factorizando el denominador del último término, y expresándolo como suma de fracciones parciales resulta que

$$H(e^{j\omega}) = 1 + \frac{2}{5}e^{-j\omega} + \frac{2}{3}e^{-j2\omega} + \frac{(-1)}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{(-2)}{1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}}.$$

Antitrasnformando término a término se encuentra que la respuesta impulsiva es

$$h[n] = \delta[n] + \frac{2}{5}\delta[n-2] + \frac{2}{3}\delta[n-2] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

En este ejemplo, como $M - N = 2$ aparecen 3 términos correspondientes a $\sum_{k=0}^{M-N} B_k \delta[n-k]$ en la ecuación (3.222). \square

Si aparecen raíces múltiples el procedimiento es más complejo, y resulta conveniente resolver el problema aplicando otras técnicas, como se muestra en el siguiente ejemplo. La solución más efectiva se estudiará en el Capítulo 6 cuando se estudie la Transformada \mathcal{Z} .

EJEMPLO 3.102. Determinación de la respuesta impulsiva de una ecuación a diferencias

La respuesta en frecuencia de la ecuación a diferencias con coeficientes constantes

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = 3x[n] + 4x[n-1]$$

se puede calcular aplicando propiedades como

$$Y(e^{j\omega})(1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) = X(e^{j\omega})(3 + 4e^{-j\omega})$$

de donde

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{3 + 4e^{-j\omega}}{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}} = \frac{3 + 4e^{-j\omega}}{(1 + e^{-j\omega})^2}.$$

La respuesta impulsiva se puede calcular tomando en cuenta los resultados de los Ejemplos 3.92 y 3.94. La función transferencia $H(e^{j\omega})$ se puede escribir como

$$H(e^{j\omega}) = (3 + 4e^{-j\omega})X_1(e^{j\omega}), \quad \text{con} \quad X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 + e^{-j\omega})^2}.$$

Resulta entonces que

$$h[n] = 3x_1[n] + 4x_1[n-1],$$

donde $x_1[n]$ es la transformada inversa de $X_1(e^{j\omega})$. De acuerdo a los resultados del Ejemplo 3.94 (con $a = -1$) resulta $x_1[n] = (n+1)(-1)^n u[n]$, y en consecuencia

$$h[n] = 3(n+1)(-1)^n u[n] + 4n(-1)^{n-1} u[n-1].$$

Notando que $4n(-1)^{n-1} u[n-1] = 4n(-1)^{n-1} u[n]$, esta respuesta impulsiva también puede escribirse como

$$\begin{aligned} h[n] &= 3(n+1)(-1)^n u[n] + 4n(-1)^{n-1} u[n] \\ &= 3(n+1)(-1)^n u[n] - 4n(-1)^n u[n] \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$h[n] = (3-n)(-1)^n u[n].$$

\square

Como la aplicación de la TFTD permite calcular de manera muy sencilla la respuesta en frecuencia de un sistema, también facilita enormemente el cálculo del sistema inverso. Como se estudió en la Sección 3.5.5, si $h[n]$ es la respuesta impulsiva de un sistema, la respuesta impulsiva del sistema inverso $h_i[n]$ debe verificar

$$(h * h_i)[n] = \delta[n]. \quad (3.225)$$

Si $H(e^{j\omega})$ y $H_i(e^{j\omega})$ son las respuestas en frecuencia del sistema y la del sistema inverso, respectivamente, la aplicación del teorema de convolución temporal de la TFTD a (3.225) resulta en

$$H(e^{j\omega}) \times H_i(e^{j\omega}) = 1,$$

de modo que el sistema inverso se calcula como

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}. \quad (3.226)$$

El sistema inverso calculado de esta manera no asegura que el mismo sea *estable*, por lo que esta propiedad debe verificarse en cada caso, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.103. Cálculo del sistema inverso del sistema $y[n] = ay[n - 1] + x[n]$

El sistema caracterizado por la ecuación a diferencias $y[n] = ay[n - 1] + x[n]$ tiene una respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

como se calculó en el Ejemplo 3.97. De acuerdo con (3.226), la respuesta en frecuencia del sistema inverso es

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} = 1 - ae^{-j\omega},$$

y la ecuación a diferencias correspondiente se puede calcular a partir de

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 - ae^{-j\omega}$$

que resulta en

$$y[n] = x[n] - ax[n - 1].$$

La respuesta impulsiva de este sistema es $h[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$, que corresponde a un sistema FIR, y por lo tanto es estable. \square

EJEMPLO 3.104. Sistema inverso del promediador

El promediador causal de N muestras responde a la ecuación a diferencias

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=\ell}^{N-1} x[n - \ell] \quad (3.227)$$

y su respuesta impulsiva es

$$h[n] = \begin{cases} 1/N, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

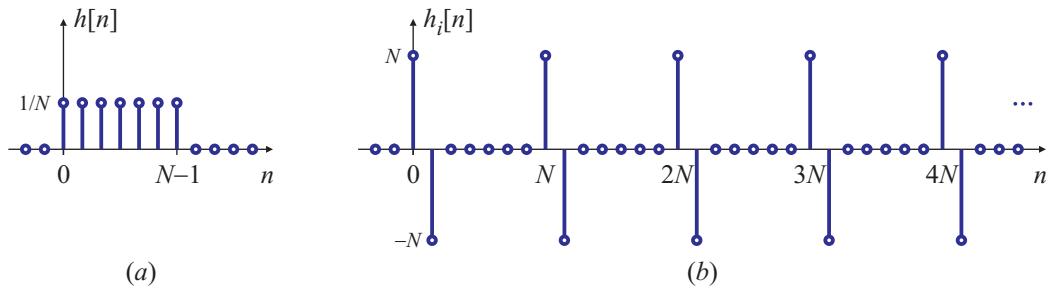


Fig. 3.92. Respuesta impulsiva $h[n]$ del promediador causal de N muestras, y respuesta impulsiva $h_i[n]$ del sistema inverso.

como se muestra en la Fig. 3.92(a). Aunque en el Ejemplo 3.88 se encontró que su respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}, \quad (3.228)$$

para calcular el sistema inverso es más conveniente antitransformar término a término la ecuación (3.227). Es claro que

$$y[n] = \frac{1}{N} (x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \dots + x[n-(N-1)]),$$

y entonces,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} (1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + \dots + e^{-j(N-1)\omega}) X(e^{j\omega}).$$

Por lo tanto, otra manera de expresar (3.228) es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} (1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + \dots + e^{-j(N-1)\omega}).$$

El sistema inverso del promediador se calcular como

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} = \frac{N}{1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + \dots + e^{-j(N-1)\omega}},$$

que se puede representar con la ecuación a diferencias

$$y[n] = Nx[n] - y[n-1] - y[n-2] - \dots - y[n-(N-1)].$$

En este caso, el sistema inverso es IIR, y por lo tanto debe estudiarse su estabilidad. La respuesta impulsiva es

$$h_i[n] = \begin{cases} N, & \text{si } n \text{ es múltiplo de } N, \\ -N, & \text{si } n-1 \text{ es múltiplo de } N, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

como se muestra en la Fig. 3.92(b). Como la respuesta impulsiva no es absolutamente sumable, el sistema es *inestable*. \square

En el Capítulo 6 se estudiarán otras maneras de calcular un sistema que se parezca “lo más posible” al sistema inverso, y que sea causal y estable.

Otra aplicación muy importante de la TFTD es para resolver *sistemas* de ecuaciones a diferencia, como se muestra en el siguiente ejemplo.

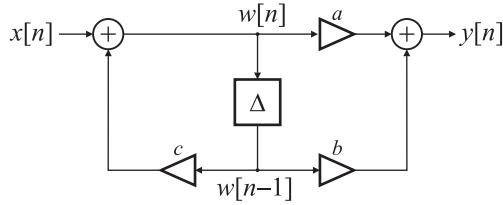


Fig. 3.93. Diagrama bloque del sistema discreto correspondiente al Ejemplo 3.105.

EJEMPLO 3.105. Sistemas de ecuaciones a diferencias

En la Fig. 3.93 se muestra el diagrama bloque de un sistema discreto. La variable de entrada es $x[n]$, la variable de salida es $y[n]$, y $w[n]$ es una variable intermedia. El bloque indicado Δ representa un retraso, por eso si la entrada al bloque es $w[n]$ la salida es $w[n - 1]$. Observando el diagrama de la figura, se puede derivar la relación entre $w[n]$ con $x[n]$ y $w[n - 1]$, y entre $y[n]$ con $w[n]$ y $w[n - 1]$:

$$w[n] = x[n] + c w[n - 1], \quad (3.229)$$

$$y[n] = a w[n] + b w[n - 1]. \quad (3.230)$$

Este sistema discreto se representa con un *sistema* de ecuaciones a diferencias en lugar de una única ecuación a diferencia como en los ejemplos anteriores. El sistema se puede expresar en la forma usual despejando $y[n]$ en función de $x[n]$. Esto se puede lograr de dos formas distintas: trabajando en el dominio temporal o en el dominio frecuencial.

- En el dominio **temporal**, para encontrar $w[n]$ y $w[n - 1]$ en función de $x[n]$ e $y[n]$ las ecuaciones (3.229)-(3.230) se reescriben como

$$x[n] = w[n] - cw[n - 1]$$

$$y[n] = aw[n] + bw[n - 1]$$

de donde resulta

$$w[n] = \frac{1}{b + ac} (bx[n] + cy[n]).$$

Reemplazando, por ejemplo, en (3.230) se encuentra que

$$\begin{aligned} y[n] &= a w[n] + b w[n - 1] \\ &= \frac{a}{b + ac} (bx[n] + cy[n]) + \frac{b}{b + ac} (bx[n - 1] + cy[n - 1]) \\ &= \frac{ab}{b + ac} x[n] + \frac{ac}{b + ac} y[n] + \frac{b^2}{b + ac} x[n - 1] + \frac{bc}{b + ac} y[n - 1] \end{aligned}$$

y entonces

$$\left(1 - \frac{ac}{b + ac}\right) y[n] = \frac{ab}{b + ac} x[n] + \frac{b^2}{b + ac} x[n - 1] + \frac{bc}{b + ac} y[n - 1]$$

es decir

$$y[n] = ax[n] + bx[n - 1] + cy[n - 1]$$

- En el dominio **frecuencial** la ecuación a diferencias puede conseguirse de manera más sencilla. Expresando la TFTD de las ecuaciones (3.229) y (3.230), se tiene que

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + ce^{-j\omega}W(e^{j\omega}), \quad (3.231)$$

$$Y(e^{j\omega}) = aW(e^{j\omega}) + be^{-j\omega}W(e^{j\omega}). \quad (3.232)$$

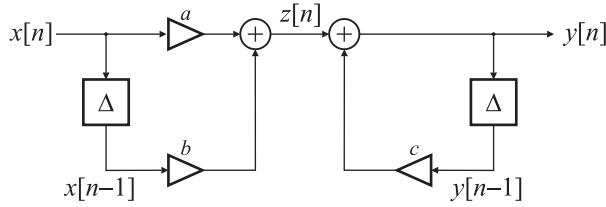


Fig. 3.94. Diagrama bloque alternativo del sistema discreto correspondiente al Ejemplo 3.105.

De (3.231) resulta que

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ce^{-j\omega}} X(e^{j\omega})$$

y reemplazando en (3.232),

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{a}{1 - ce^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \frac{be^{-j\omega}}{1 - ce^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) \quad (3.233)$$

que se puede escribir como

$$Y(e^{j\omega}) - ce^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = aX(e^{j\omega}) + be^{-j\omega} X(e^{j\omega}).$$

Finalmente, basta antitransformar para obtener

$$y[n] - cy[n - 1] = ax[n] + bx[n - 1].$$

que es la misma expresión que se obtuvo trabajando en el dominio tiempo.

Esta ecuación a diferencias se puede representar con el diagrama en bloques de la Fig. 3.94. La respuesta impulsiva puede calcularse muy fácilmente a partir de la ecuación (3.233), que resulta en

$$h[n] = a c^n u[n] + b c^{n-1} u[n - 1],$$

que también puede escribirse como

$$h[n] = -\frac{b}{c} \delta[n] + \left(a + \frac{b}{c} \right) c^n u[n].$$

Este ejemplo muestra que el cálculo en el dominio frecuencial no sólo es más sencillo, sino que permite derivar fácilmente otros resultados. \square

Es interesante comparar los diagramas bloques de las Figs. 3.93 y 3.94. Aunque ambos representan el sistema con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{a + be^{-j\omega}}{1 - ce^{-j\omega}}$$

la *implementación* de ambos sistemas es diferente: en el primer caso es necesario resolver dos ecuaciones a diferencias para calcular cada muestra de la salida $y[n]$,

$$\begin{aligned} w[n] &= x[n] + cw[n - 1], \\ y[n] &= aw[n] + bw[n - 1], \end{aligned}$$

mientras que en el segundo sólo hace falta resolver una única ecuación:

$$y[n] = ax[n] + bx[n - 1] + cy[n - 1].$$

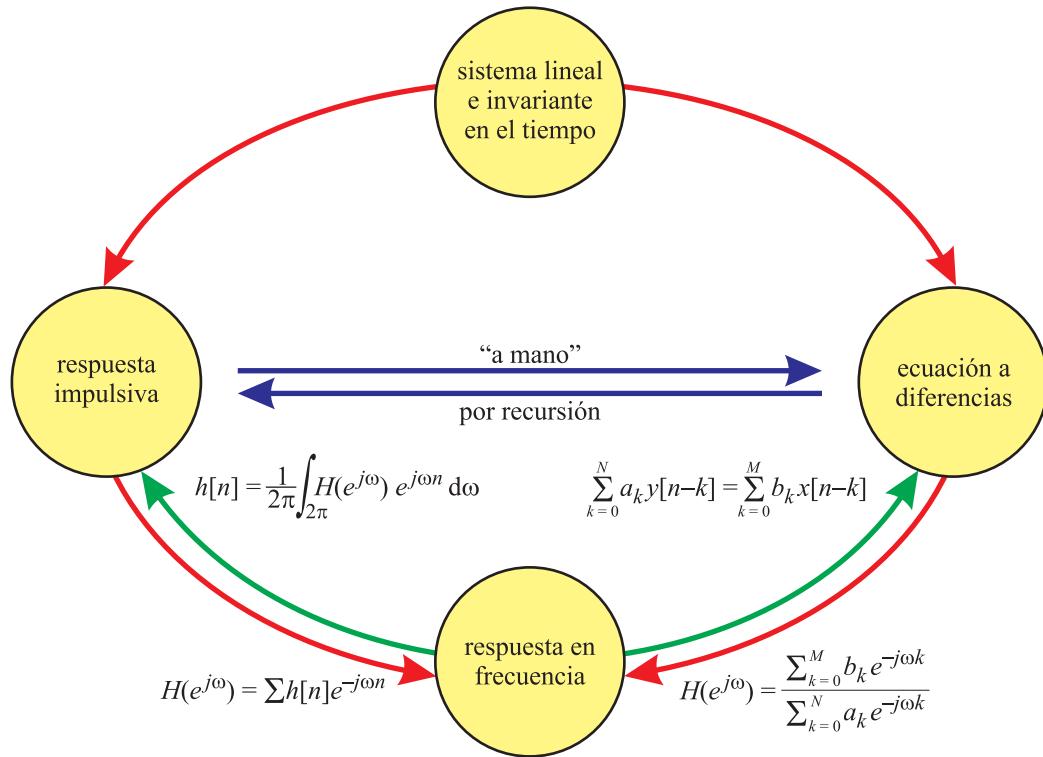


Fig. 3.95. Relaciones entre las representaciones de sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Los bloques Δ están asociados a lugares de memoria donde es necesario almacenar la muestra pasada de $w[n]$ o de $x[n]$ e $y[n]$: la implementación de la Fig. 3.94 necesita el doble de memoria que la de la Fig. 3.93.

Si bien la respuesta en frecuencia de ambas implementaciones es la misma, en casos prácticos donde los coeficientes a , b , c , y/o las operaciones aritméticas se ejecuten con precisión finita, las respuestas de una u otra pueden ser bastante diferentes, sobre todo para sistemas de ecuaciones a diferencias de alto orden.

3.14. Conclusión

Dado un sistema lineal e invariante en el tiempo, la elección de una representación en base a la respuesta impulsiva o a una ecuación a diferencias generalmente está vinculado a la manera de implementar dicho sistema. En general, para los sistemas FIR se prefiere una implementación usando la convolución discreta, que necesita conocer la respuesta impulsiva. Sin embargo, como se mostró en el Ejemplo 3.37, también es posible representar sistemas FIR utilizando conexiones de sistemas IIR. Para estos sistemas la única forma posible de implementación en tiempo real es usando una ecuación a diferencias.

Desde el punto de vista teórico, las dos representaciones son equivalentes, y la TDFT facilita la conversión entre una y otra forma, completando el esquema de la Fig. 3.71 como se muestra en la Fig. 3.95. Gracias a esta herramienta, el pasaje de una ecuación a

diferencias

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (3.234)$$

a una respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (3.235)$$

es trivial, y prácticamente no requiere ningún cálculo: basta con reemplazar los coeficientes de una representación en la otra. De esta forma también se simplifica el pasaje de una representación basada en la respuesta impulsiva $h[n]$ a una tipo ecuación a diferencias: en lugar de hacer el procedimiento “a mano”, como en los Ejemplos 3.35 y 3.36 (lo que muchas veces es complicado o hasta imposible) el camino preferido es calcular la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ usando la definición

$$H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n] e^{-j\omega n},$$

y de aquí pasar a la ecuación a diferencias “copiando” los coeficientes de la respuesta en frecuencia (3.235) en la ecuación a diferencias (3.234).

Para obtener la respuesta impulsiva $h[n]$ a partir de la ecuación a diferencias, las dos alternativas posibles tienen más o menos la misma dificultad. Por un lado se puede aplicar el método por recursión como en el Ejemplo 3.38 o en el Ejemplo 3.64. Otra forma es obtener la respuesta en frecuencia [reemplazando los coeficientes de (3.234) en (3.235)] y calcular la antitransformada

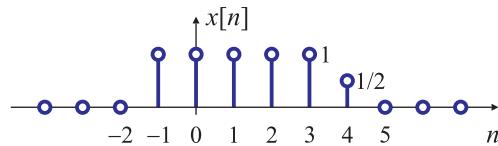
$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

Cualquiera de estos dos métodos permiten el cálculo de la respuesta impulsiva “muestra a muestra”, y obtener una expresión cerrada puede ser complicado. La transformada \mathcal{Z} , que se estudiará en el Capítulo 6, permitirá resolver este inconveniente.

3.15. Ejercicios: Sistemas discretos

Ejercicio 1. Calcule la salida $y[n]$ de cada uno de los siguientes sistemas para la entrada $x[n]$ que se muestra en la figura.

- | | |
|-----------------------|--|
| (1) $y[n] = x[n - 2]$ | (4) $y[n] = x[n - 1] \delta[n - 3]$. |
| (2) $y[n] = x[4 - n]$ | (5) $y[n] = 5\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$. |
| (3) $y[n] = x[2n]$. | (6) $y[n] = x[n^2]$. |



Ejercicio 2. Las primeras muestras de un sistema causal discreto cuya entrada es $x[n]$ son:

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0], \\ y[1] &= x[1] + (1/2)x[0], \\ y[2] &= x[2] + (1/2)x[1] + (1/3)x[0], \\ y[3] &= x[3] + (1/2)x[2] + (1/3)x[1] + (1/4)x[0], \\ &\vdots \end{aligned}$$

1. Escriba la expresión general de $y[n]$.
2. Compruebe si el sistema es (i) lineal; (ii) invariante en el tiempo; (iii) estable E/S.
3. Calcule la respuesta impulsiva.

Ejercicio 3. Considere tres sistemas con las siguientes relaciones entrada-salida:

$$\begin{aligned} \text{Sistema 1: } y[n] &= x[-n], \\ \text{Sistema 2: } y[n] &= ax[n-1] + bx[n] + cx[n+1], \\ \text{Sistema 3: } y[n] &= x[-n], \end{aligned}$$

donde a, b, c son números reales. Encuentre la relación entrada-salida para el sistema interconectado (Ayuda: no es igual al Sistema 2). ¿Bajo qué condiciones sobre los números a, b, c , el sistema tiene alguna de las siguientes propiedades?

1. El sistema interconectado es lineal e invariante en el tiempo.
2. La relación entrada-salida del sistema completo es idéntica a la del Sistema 2.
3. El sistema completo es causal.



Ejercicio 4. Verifique (y justifique!) si cada uno de los sistemas (a)-(e) de la Lista I, con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$, satisface las propiedades (1)-(5) de la Lista II.

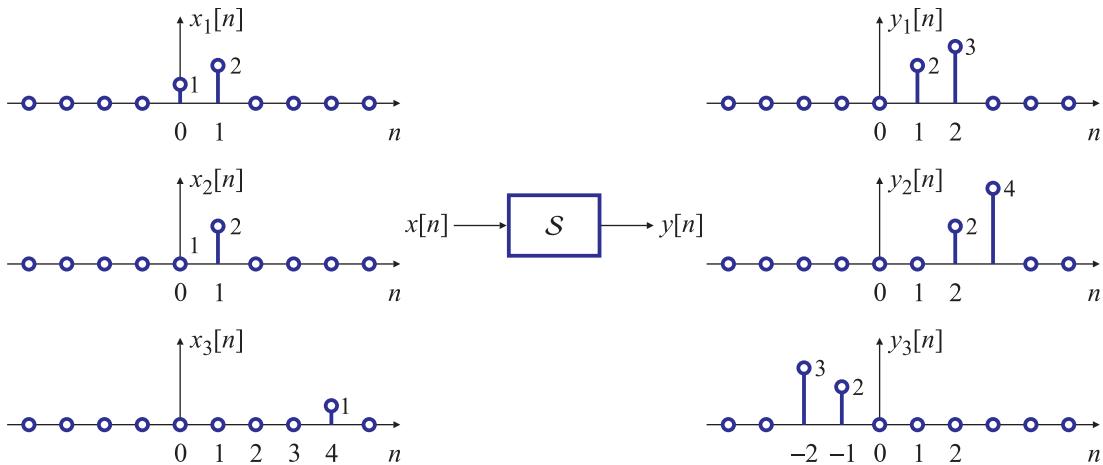
Lista I: Sistemas	Lista II: Propiedades
(a) $y[n] = x[n]x[n - 1]$	(1) Sin memoria.
(b) $y[n] = x[-n]$	(2) Invariante en el tiempo
(c) $y[n] = x[n] + nx[n + 1]$	(3) Lineal.
(d) $y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k]$	(4) Causal.
(e) $y[n] = \begin{cases} x[n], & \text{si } x[n] \geq 0, \\ 0, & \text{si } x[n] < 0. \end{cases}$	(5) Estable E/S.

Ejercicio 5. Cuando el sistema lineal \mathcal{S} se excita con la entrada $x_0[n] = \delta[n]$ la salida es $y_0[n] = h_0[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$. En cambio, si la entrada es $x_1[n] = \delta[n - 1]$ la salida resulta $y_1[n] = h_1[n] = -\delta[n - 1] - \delta[n - 2]$. Calcule, si es posible,

1. la salida $y_2[n]$ ante una entrada $x_2[n] = a\delta[n] + b\delta[n - 1]$;
2. la salida $y_3[n]$ ante una entrada $x_3[n] = a\delta[n - 1] + b\delta[n - 2]$.

Ejercicio 6. Un sistema \mathcal{S} es invariante en el tiempo. Cuando se lo excita con las entradas $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$, las salidas son $y_1[n]$, $y_2[n]$, $y_3[n]$, como se muestra en la figura.

1. Determine si el sistema \mathcal{S} es lineal.
2. Si la entrada al sistema \mathcal{S} es un impulso, $x_4[n] = \delta[n]$, ¿puede calcular la salida? Calcúlela, en caso afirmativo, y justifique por qué no se puede en caso contrario.



Ejercicio 7. Para el sistema lineal \mathcal{S} con respuesta impulsiva $h_\ell[n] = a^n b^{-\ell} u[n - \ell]$, con $n \geq \ell \geq 0$, y $|a| < 1$, $|b| < 1$

1. Determine si es invariante en el tiempo.
2. Calcule la respuesta $y_1[n]$ del sistema si la entrada es un escalón $x_1[n] = u[n]$.
3. Calcule la salida $y_2[n]$ cuando la entrada es $x_2[n] = u[n-1]$. Compare $y_2[n]$ con $y_1[n]$.

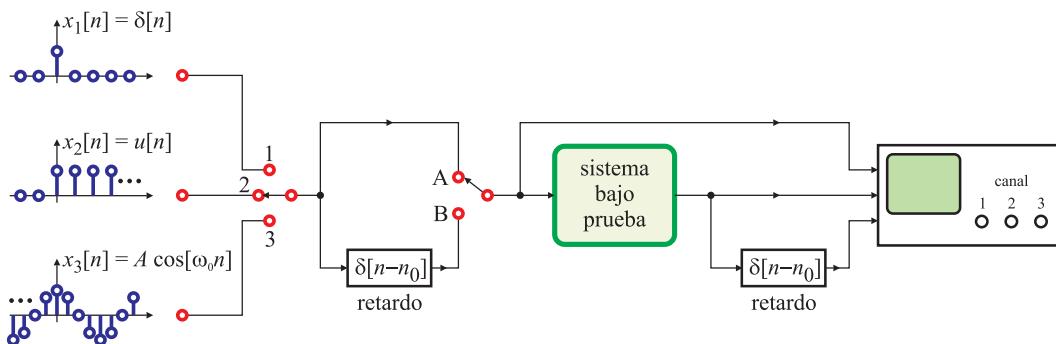
En cada inciso analice los casos en que (i) $a = b$ y (ii) $a \neq b$.

Ejercicio 8. Se tienen tres sistemas discretos:

- \mathcal{S}_1 es lineal e invariante en el tiempo;
- \mathcal{S}_2 es no lineal;
- \mathcal{S}_3 es variante en el tiempo.

Se dispone de un banco de trabajo como el que se muestra en la figura para ensayar estos sistemas. Se pueden elegir tres entradas distintas (un impulso, un escalón y una sinusoidal) mediante la llave selectora LL1, y retardar o no la señal aplicada al sistema usando la llave LL2. En el osciloscopio se pueden visualizar simultáneamente la entrada, la salida, y la salida demorada n_0 muestras del sistema bajo prueba.

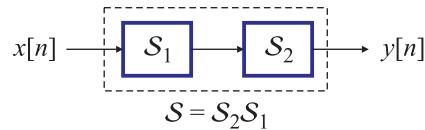
Explique detalladamente el proceso que utilizaría (posición de las llaves, qué espera ver en la pantalla del osciloscopio de acuerdo a las características de cada sistema, etc.) para identificar si el sistema bajo prueba es \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 o \mathcal{S}_3 . Tenga presente que la respuesta no es única, y trate de identificar cada sistema con el menor número posible de pasos.



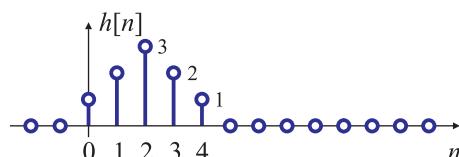
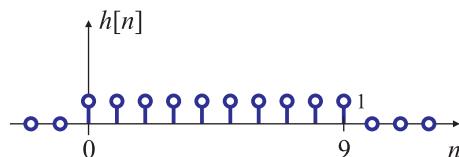
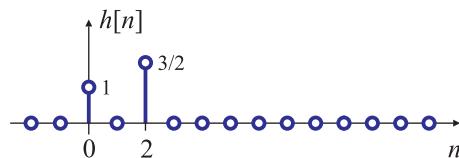
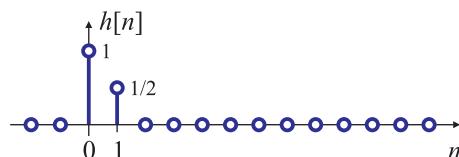
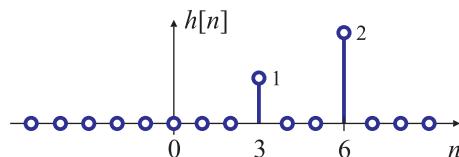
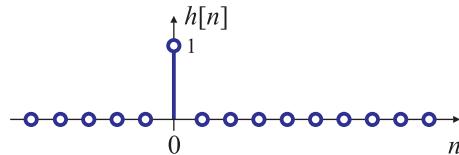
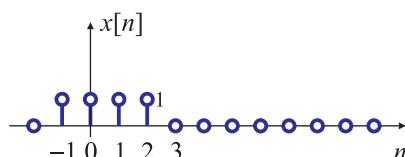
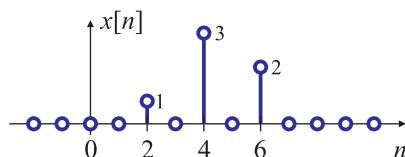
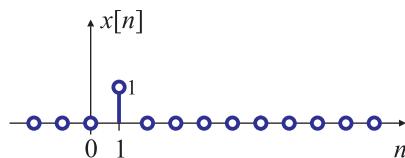
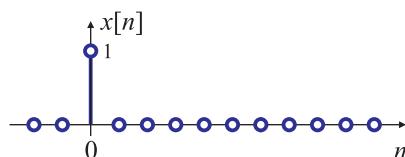
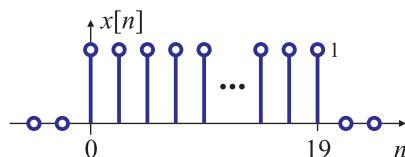
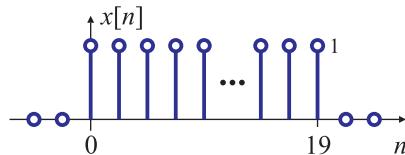
C) Ejercicio 9. El sistema discreto \mathcal{S} está formando por la conexión cascada de \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 , como se muestra en la figura. Determine si los siguientes postulados son verdaderos o no.

1. Si \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 son lineales, entonces \mathcal{S} es lineal.
2. Si \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 son invariantes en el tiempo, entonces \mathcal{S} es invariante en el tiempo.
3. Si \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 son causales, entonces \mathcal{S} es causal.
4. Si \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 son lineales e invariantes en el tiempo, entonces \mathcal{S} es lineal e invariante en el tiempo.
5. Si \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 son lineales e invariantes en el tiempo, entonces $\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2\mathcal{S}_1$ (el intercambio del orden de la conexión no cambia al sistema compuesto \mathcal{S}).

6. Repita el inciso 5 suponiendo que \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 son lineales y *variantes en el tiempo*.
7. Si \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 no son lineales, entonces \mathcal{S} no es lineal.
8. Si \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 son estables, entonces \mathcal{S} es estable.
9. Muestre con ejemplos que los recíprocos de los incisos 1 a 8 no son ciertos.



Ejercicio 10. Calcule de la manera más sencilla posible la convolución entre las señales $x[n]$ y $h[n]$ que se muestran en las siguientes figuras.



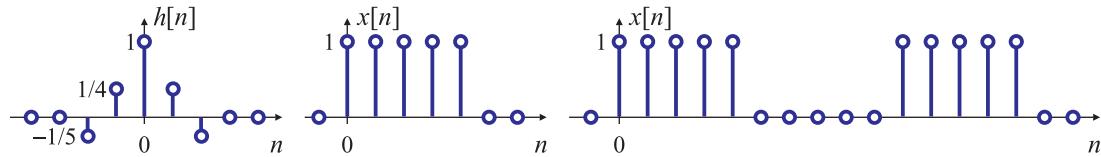
Ejercicio 11. Efectúe las siguientes operaciones, y elabore sobre sus resultados:

1. Multiplique los números enteros 131 y 122.

2. Calcule la convolución de las señales $\{1, 3, 1\}$ y $\{1, 2, 2\}$.
3. Multiplique los polinomios $1 + 3x + x^2$ y $1 + 2x + 2x^2$.
4. Multiplique los números 1,31 y 12,2.

Ejercicio 12. Para las señales $x[n]$ y $h[n]$ que se muestran en la figura,

1. Determine los rangos de cada una de las cinco etapas de la convolución.
2. Especifique para cada etapa los extremos de la sumatoria $\sum_{m=N_1}^{N_2} x[m]h[m-n]$ y $\sum_{m=M_1}^{M_2} x[m-n]h[m]$.
3. Calcule y grafique la salida $y[n] = (x * h)[n]$
4. Aprovechando el resultado anterior, calcule y grafique $y[n] = (x_2 * h)[n]$.



Ejercicio 13. Calcule y grafique la salida $y[n]$ de un SLIT:

1. con respuesta impulsiva $h[n] = a^n u[n]$, con $0 < a < 1$, cuando se lo excita con la entrada $x[n] = u[-n]$.
2. con respuesta impulsiva $h[n] = a^n u[n]$, con $0 < a < 1$, cuando se lo excita con la entrada $x[n] = u[n] - u[n - 10]$.
3. con respuesta impulsiva $h[n] = a^{-n} u[-n]$, con $0 < a < 1$, cuando se lo excita con la entrada $x[n] = u[n]$.
4. con respuesta impulsiva $h[n] = a^{n+(N-1)}$ si $-(N-1) \leq n \leq 0$, y $h[n] = 0$ en caso contrario, cuando la entrada es $x[n] = u[n]$.

Ejercicio 14. La salida $y[n]$ de un SLIT con respuesta impulsiva $h[n]$ y entrada $x[n]$ es

$$y[n] = \sum_m h[m]x[n-m] = \sum_m x[m]h[n-m].$$

Reconozca las etapas del cálculo de la convolución y determine los extremos de cada sumatoria suponiendo que las señales no son de longitud finita si:

1. $h[n]$ y $x[n]$ son anticausales ($h[n] = x[n] = 0$ para todo $n \geq 0$).
2. $h[n]$ y $x[n]$ son causales.
3. $h[n]$ es causal y $x[n]$ es anticausal.
4. $h[n]$ es anticausal y $x[n]$ es causal.

Ejercicio 15. Sean $x[n]$, con $L_1 \leq n \leq U_1$ y $h[n]$, con $L_2 \leq n \leq U_2$ dos señales de duración finita, es decir, $x[n] = 0$ si $n \notin [L_1, U_1]$ y $h[n] = 0$ si $n \notin [L_2, U_2]$.

1. Determine el rango $L \leq n \leq U$ donde la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ es no nula en términos de L_1, L_2, U_1, U_2 .
2. Demuestre que la salida $y[n]$ está dada por

$$y[n] = \sum_{k=\max(L_1, n-U_2)}^{\min(U_1, n-L_2)} x[k]h[n-k] = \sum_{k=\max(L_2, n-U_1)}^{\min(U_2, n-L_1)} x[n-k]h[k].$$

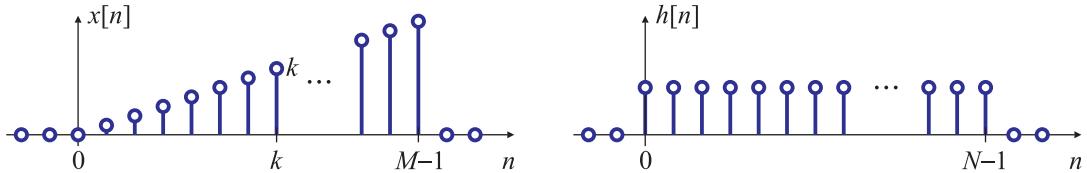
Ejercicio 16. Para las siguientes señales calcule analítica y gráficamente la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$. Revise las soluciones usando los resultados del Ejercicio 15.

- | | |
|--|---|
| $1. x[n] = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & 0 \leq n \leq 6, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$ | $h[n] = \begin{cases} 1, & -2 \leq n \leq 2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$ |
| $2. x[n] = \begin{cases} \alpha^n, & -3 \leq n \leq 5, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$ | $h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$ |
| $3. x[n] = \begin{cases} 1, & -2 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$ | $h[n] = \begin{cases} 2, & -1 \leq n \leq 2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$ |

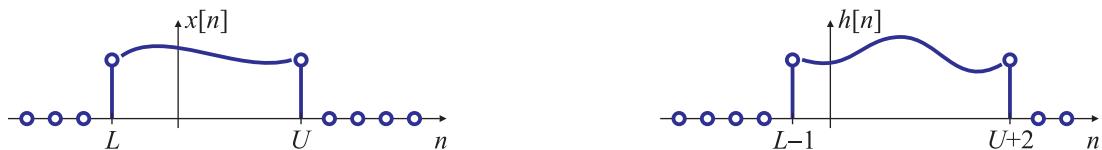
Ejercicio 17. Calcule la convolución entre las señales de la figura, donde $N \gg M$:

$$x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq M-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1. Determine los rangos $N_1 \leq n \leq N_2$ de cada una de las etapas de la convolución.
2. Sabiendo que $\sum_{n=0}^{M-1} n = M(M-1)/2$, calcule $y[n] = (x * h)[n]$ en cada etapa.

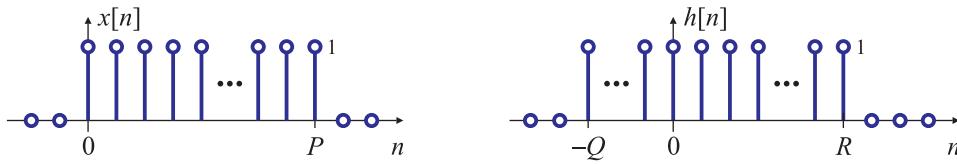


Ejercicio 18. Las señales $x[n]$ y $h[n]$ son distintas de cero en el rango $L \leq n \leq U$ y $L-1 \leq n \leq U+1$, con $L < 0$ y $U > 0$ como se muestra en la figura.



1. Indique el rango de valores de n para los cuales $y[n] = (x * h)[n]$ es distinto de cero.
2. Indique el rango de valores de n para cada etapa del cálculo de la convolución.
3. Encuentre los extremos N_1 y N_2 de la sumatoria en función de L y U para la etapa de solapamiento parcial por izquierda cuando la convolución se calcula como $\sum_{m=N_1}^{N_2} x[m-n]h[m]$.

Ejercicio 19. Calcule la convolución entre las señales $x[n]$ y $h[n]$ de la figura. Encuentre el rango $N_1 \leq n \leq N_2$ donde el resultado de la convolución no es idénticamente nulo, e indique los puntos de interés de esta señal (máximos, mínimos, puntos de quiebre, etc.)



Ejercicio 20. Determine, si es posible, la respuesta al impulso de los sistemas definidos por las siguientes ecuaciones entrada-salida:

1. $y[n] = x[n] - x[n-4]$, el sistema es causal.
2. $y[n] = x[n] - x[n-4]$, el sistema *no* es causal.
3. $y[n] = 2x[n] + 4x[n-1] + 2x[n-2]$, el sistema es causal.
4. $y[n] + y[n-1] = x[n-1]$, el sistema es causal.
5. $y[n] + y[n-1] = x[n-1]$, el sistema *no* es causal.
6. $y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$, el sistema es causal.

Ejercicio 21. Para las siguientes ecuaciones a diferencias de sistemas *causales*:

Sistema 1: $y[n] = ny[n-1] + x[n]$, con $y[-1] = 0$.

Sistema 2: $y[n] = \frac{n}{|n|+1}y[n-1] + x[n]$, con $y[-1] = 0$.

1. Calcule la respuesta impulsiva $h[n]$ para todo n .
2. Determine si el sistema es (i) lineal; (ii) invariante en el tiempo; (iii) estable E/S.

Ejercicio 22. Compruebe si cada uno de los siguientes sistemas es (i) lineal; (ii) invariante en el tiempo; (iii) causal; (iv) estable E/S.

Sistema 1: $y[n] - (-1)^n y[n-1] = x[n]$, con $y[-1] = 0$

Sistema 2: $y[n] = x[n] + \cos(2\pi n/10)x[n-1]$

Sistema 3: $y[n] = [1 + (-1)^n]x[n]$

Sistema 4: $y[n] = (-1)^n x[n]$

Sistema 5: $y[n] = \begin{cases} x[n], & \text{si } n \geq 0, \\ 0, & \text{si } n < 0. \end{cases}$

Sistema 6: $y[n] = \begin{cases} 6x[n-5], & \text{si } x[n] \leq 6, \\ 7x[n-5], & \text{si } x[n] > 6. \end{cases}$

Ejercicio 23. Para los sistemas descriptos por ecuaciones a diferencias finitas

Sistema 1: $y[n] = ay[n-1] + \frac{1}{a}x[n]$, con $y[-1] = 0$.

Sistema 2: $y[n] + ay[n-1] = x[n] + b(x[n-1])^2$, con $y[-1] = 0$,

1. ¿Para qué rango de valores de a y b es estable entrada/salida?
2. Determine si el sistema es (i) lineal; (ii) invariante en el tiempo; (iii) causal.

Ejercicio 24. Para los sistemas causales caracterizados por las ecuaciones a diferencias

Sistema 1: $y[n] = n^2y[n-1] + x[n]$, con $y[-1] = 0$.

Sistema 2: $y[n] = (-1)^n x[n] + y[n-1]$, con $y[-1] = 0$.

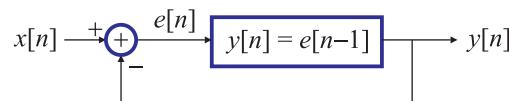
1. Compruebe si el sistema es (i) lineal; (ii) invariante en el tiempo; (iii) estable E/S.
2. Determine las respuestas impulsivas $h_0[n]$ para $x[n] = \delta[n]$, y $h_1[n]$ para $x[n] = \delta[n-1]$.
3. Para cada sistema escriba (si es posible) la expresión genérica de la salida $y[n]$ para una entrada arbitraria $x[n]$ en función de $h_0[n]$, $h_1[n]$ y $x[n]$. (Ayuda: para el Sistema 1 no se puede, pero sí para el Sistema 2.)

Ejercicio 25. Calcule por recursión la respuesta impulsiva para

1. el sistema recursivo $y[n] = 0,2y[n-1] + x[n] - 0,3x[n-1] + 0,02x[n-2]$ con condiciones iniciales nulas;
2. el sistema no recursivo $y[n] = x[n] - 0,1x[n-1]$.

Si todo está bien la salida debe ser la misma en ambos casos. ¿Es posible? ¿Por qué?

Ejercicio 26. Considere el sistema de la figura. Suponga que $y[n] = 0$ para $n < 0$.



1. Dibuje la señal de salida cuando $x[n] = \delta[n]$.
2. Dibuje la señal de salida cuando $x[n] = u[n]$.

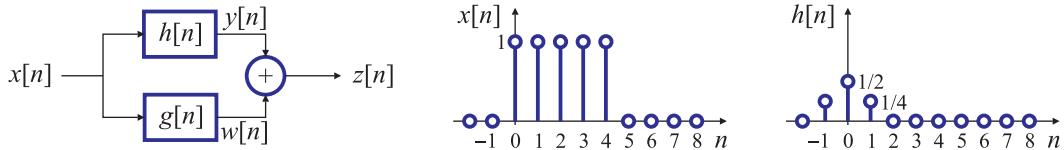
Ejercicio 27. Para el sistema caracterizado por la ecuación a diferencias finitas

$$y[n] = a x[n] + b y[n - 1], \text{ con } y[-1] = 0,$$

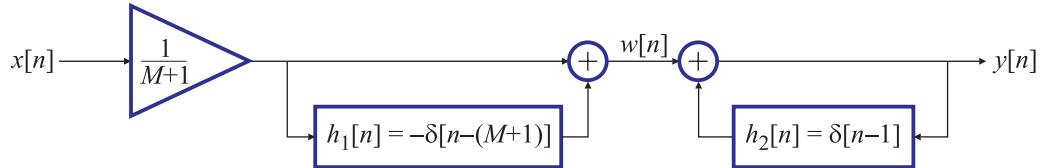
calcule la respuesta a una entrada escalón unitario $x[n] = u[n]$, dando valores a los parámetros a y b de forma tal que la amplitud de la respuesta de estado estacionario sea unitaria ($|y_{ee}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y[n]| = 1$)

Ejercicio 28. Para el sistema discreto representado por el diagrama bloque de la figura, donde $x[n] = u[n] - u[n - 5]$ y $h[n] = (1/4)\delta[n + 1] + (1/2)\delta[n] + (1/4)\delta[n - 1]$,

1. Calcule la salida parcial $y[n] = (x * h)[n]$
2. Calcule la respuesta impulsiva $g[n]$ de manera que $z[n] = x[n]$.
3. Determine si los sistemas caracterizados por $h[n]$, $g[n]$ y $h[n] + g[n]$ son causales.

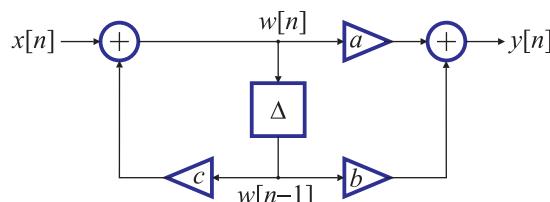


Ejercicio 29. Para el sistema de la figura,



1. Verifique que satisface una ecuación a diferencias de la forma $y[n] + ay[n - 1] = bx[n] + cx[n - N]$, e indique los valores de a , b y c .
2. Suponiendo que $y[-1] = 0$, calcule por recursión la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema, para $0 \leq n \leq 2N$. El sistema ¿es FIR o IIR?
3. Determine si el sistema completo es (i) lineal; (ii) invariante en el tiempo; (iii) causal; (iv) estable entrada/salida.

Ejercicio 30. Para el sistema discreto que se muestra en la figura,



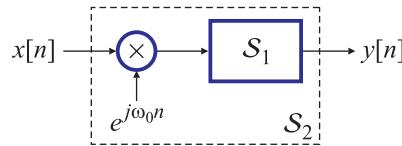
1. Encuentre la expresión de $w[n]$ en función de $x[n]$ y $w[n - 1]$, y la de $y[n]$ en función de $w[n]$ y $w[n - 1]$.

2. Calcule $y[n]$ en función de $x[n]$.
3. Usando los resultados del inciso anterior, calcule por recursión la salida $y[n]$ del sistema para una entrada arbitraria $x[n]$, suponiendo que $w[-1] = k$. **Ayuda:** calcule $y[-1], y[0], y[1], y[2]$ y trate de generalizar sus resultados.
4. Encuentre el rango de valores de a, b, c , para que el sistema sea estable E/S.

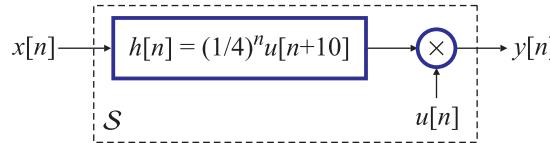
Ejercicio 31. Encuentre las ecuaciones a diferencias de sistemas lineales e invariantes en el tiempo caracterizados por las siguientes respuestas impulsivas:

1. $h[n] = (j/2)^n u[n] + (-j/2)^n u[n]$.
2. $h[n] = (1/4)^n u[n] + (1/3)^n u[n - 1]$.

Ejercicio 32. En el sistema S_2 de la figura, el subsistema S_1 es lineal, invariante en el tiempo, y estable, y tiene una respuesta impulsiva $h[n]$. Determine si el sistema S_2 es: (i) lineal; (ii) invariante en el tiempo; (iii) estable entrada/salida.



Ejercicio 33. La salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo excitado con una entrada $x[n]$, cuya respuesta impulsiva es $h[n] = (1/4)^n u[n + 10]$ se multiplica por un escalón $u[n]$ para obtener la salida $y[n]$. Determine si el sistema completo S es: (i) lineal; (ii) causal; (iii) invariante en el tiempo; (iv) estable entrada/salida.



Ejercicio 34. Verifique que una sucesión $x[n]$ absolutamente sumable ($\sum_n |x[n]| = M_x < \infty$) tiene energía finita ($E = \sum_n |x[n]|^2 < \infty$). Compruebe que la recíproca no es cierta. **Ayuda:** demuestre primero que si $\sum_n |x[n]| = M_x$, entonces $|x[n]| < N_x$ para todo n .

Ejercicio 35. Para el sistema definido por la ecuación a diferencias $y[n] = (x[n])^2 + 1$,

1. Calcule la respuesta impulsiva $h[n]$.
2. Determine $\sum_n |h[n]|$.
3. ¿Contradice este resultado la condición de estabilidad BIBO?

Ejercicio 36. Demuestre que si la entrada a un SLIT discreto es una señal periódica $\tilde{x}[n]$ de período N , la salida $\tilde{y}[n]$ también es periódica con el mismo período N .

Ejercicio 37. Si $z[n] = x[n] * y[n]$, y $w[n] = x[n - N_1] * y[n - N_2]$, determine la relación entre $z[n]$ y $w[n]$.

Ejercicio 38. Verifique que la convolución:

1. es *comutativa*: $(x * y)[n] = (y * x)[n]$. Realice una demostración formal.
2. es *asociativa* $((x * y) * z)[n] = (x * (y * z))[n]$
3. Estas propiedades se satisfacen sólo si las sucesiones involucradas son **estables**, es decir que son **absolutamente sumables**. Como contraejemplo, verifique que la asociaitividad *no* se cumple si $x[n] = c = \text{constante}$, $y[n] = u[n]$, y $z[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$.

I **Ejercicio 39.** Muestre que en un sistema causal, la respuesta impulsiva $h[n]$ satisface $h[n] = 0$ para $n < 0$.

Ejercicio 40. Si $x_e[n]$ y $x_o[n]$ son las partes par e impar de $x[n]$, demuestre que una señal de energía finita verifica

$$\sum_n |x[n]|^2 = \sum_n |x_e[n]|^2 + \sum_n |x_o[n]|^2.$$

Ayuda: demuestre primero que $4x_e[n]x_o[n] = (x[n])^2 - (x[-n])^2$.

Ejercicio 41. Para el sistema lineal causal descrito por la ecuación a diferencias

$$y[n] - 5y[n - 1] + 6y[n - 2] = 2x[n - 1],$$

1. Determine la respuesta homogénea del sistema, es decir, las respuestas posibles si $x[n] = 0$ para todo n .
2. Calcule la respuesta impulsiva del sistema.
3. Calcule la respuesta del sistema si $x[n] = u[n]$.

Ejercicio 42. La correlación entre dos señales $x[n]$ e $y[n]$ se define como

$$r_{xy}[n] = \sum_k x[k]y[k + n].$$

Determine la relación entre la convolución $(x * y)[n]$ y la correlación $r_{xy}[n]$.

(M) Ejercicio 43. *Convolución de dos sucesiones de distinta duración.*

MATLAB no puede ser utilizado directamente para calcular la convolución de dos señales arbitrarias de longitud infinita. Se provee una función llamada `conv` que calcula la convolución entre dos sucesiones de duración finita. La función `conv` asume que las dos sucesiones comienzan en la muestra $n = 0$, y se invoca mediante

```
>> y = conv(x, h)
```

El inconveniente es que esta función no soporta “información temporal” para trabajar correctamente con funciones que comiencen en otro índice distinto de $n = 0$. El propósito de este ejercicio es solucionar este inconveniente.

Implemente una función `conv_m` que permita tener en cuenta la información temporal de las señales. La función deberá tener como entrada no sólo las sucesiones a convolucionar, sino también un par de vectores que indiquen la extensión temporal de cada una de ellas. Por ejemplo, la sucesión $x[-3] = 1, x[-2] = 2, x[-1] = 3, x[0] = 4, x[1] = 3, x[2] = 2$ se especificará mediante las sucesiones

```
x = [ 1 2 3 4 3 2];
nx = [-3 -2 -1 0 1 2];
```

La función deberá invocarse de la siguiente manera

```
[y, ny] = conv_m(x, nx, h, nh)
```

Pruebe su función efectuando la correlación de las siguientes sucesiones

```
x = [3 11 7 0 -1 4 2]; nx = [-3:3];
h = [2 3 0 -5 2 1]; nh = [-1:4];
```

y revise los resultados de los ejercicios 10, 12 y 16.

Ayuda: Los resultados del Ejercicio 15 son de utilidad para calcular correctamente la información temporal de la señal resultado de la convolución (`ny` en los ejemplos previos).

Comentario: Las sucesiones temporales discretas pueden graficarse utilizando el comando `stem`. Por ejemplo, `stem(nx, x)` grafica la sucesión temporal $x[n]$. La entrada $x[n]$, la respuesta impulsiva del sistema $h[n]$, y la salida $y[n]$ se pueden graficar con los siguientes comandos:

```
figure;
subplot(3,1,1); stem(nx,x); ylabel('x[n]');
subplot(3,1,2); stem(nh,h); ylabel('h[n]');
subplot(3,1,3); stem(ny,y); ylabel('y[n]');
```

El tamaño de los círculos puede cambiarse por medio de la propiedad `MarkerSize`. Por ejemplo:

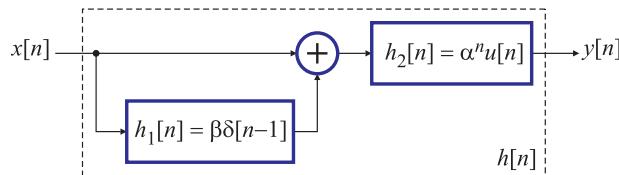
```
h = stem(ny,y);
set(h, 'MarkerSize', 2, 'MarkerFaceColor', 'b');
```

hace que los círculos sean más pequeños, y estén coloreados de azul.

3.16. Ejercicios: Respuesta en frecuencia

Ejercicio 1. Para el sistema con respuesta impulsiva $h[n]$ que se muestra en la figura,

1. calcule la respuesta impulsiva $h[n]$ y la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$;
2. encuentre la ecuación a diferencias que relaciona la salida $y[n]$ y la entrada $x[n]$;
3. determine si es causal;
4. encuentre bajo qué condiciones es estable.



Ejercicio 2. Calcule la salida $y[n]$, $-\infty < n < \infty$ cuando la entrada es $x[n] = \cos(\pi n/2)$, $-\infty < n < \infty$, para el sistema discreto con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega - \frac{\pi}{4})} \left(\frac{1 + e^{-j2\omega} + 4e^{-j4\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}} \right).$$

Ejercicio 3. Sea $H(e^{j\omega})$ la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h[n]$, donde $h[n]$ es compleja.

1. Demuestre que $H^*(e^{-j\omega})$ es la respuesta en frecuencia de un sistema con respuesta impulsiva $h^*[n]$.
2. Muestre que si $h[n]$ es real, la respuesta en frecuencia es conjugada simétrica, i.e. $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$.

Ejercicio 4. Para el sistema discreto con respuesta impulsiva $h[n] = (j/2)^n u[n]$ determinar la respuesta en estado estacionario cuando la entrada es $x[n] = \cos(\pi n) u[n]$.

Ejercicio 5. Calcule la respuesta del sistema lineal, causal e invariante en el tiempo descripto por la ecuación a diferencias $y[n] + (1/2)y[n-1] = x[n]$ ante las entradas que se listan a continuación, utilizando el método más conveniente en cada caso (suma convolución, o método de la respuesta en frecuencia)

$$1. \quad x[n] = (1/2)^n u[n]. \qquad \qquad \qquad 2. \quad x[n] = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}n + \phi_1\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}n + \phi_2\right)$$

Ejercicio 6. Para el sistema lineal e invariante en el tiempo descripto por la ecuación a diferencias

$$y[n] = \sum_{m=0}^3 x[n-2m] - \sum_{m=1}^3 (0.81)^m y[n-2m],$$

calcule analíticamente la respuesta de estado estacionario para las siguientes excitaciones:

1. $x[n] = 5 + 10(-1)^n$.
2. $x[n] = 1 + \cos(0.5\pi n + \pi/2)$.
3. $x[n] = 2 \operatorname{sen}(\pi n/4) + 3 \cos(3\pi n/4)$.
4. $x[n] = \sum_{k=0}^5 (k+1) \cos(\pi kn/4)$
5. $x[n] = \cos(\pi n)$.

(M) Revise sus resultados con MATLAB generando 200 muestras de la señal $x[n]$, $0 \leq n \leq 200$, y usando la función `filter` para obtener $y[n]$.

(I) **Ejercicio 7.** En la tabla se muestran las entradas y salidas de cinco sistemas. Determine si cada uno de ellos puede ser lineal e invariante en el tiempo. Si la respuesta es afirmativa, especifique si puede haber más de un SLIT con el mismo par de señales entrada/salida. Justifique sus respuestas.

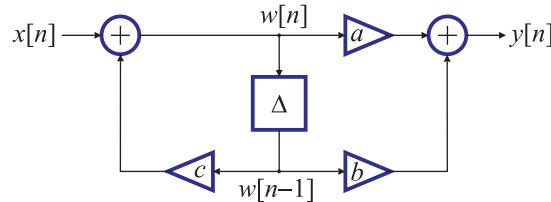
Sistema	Entrada	Salida
A	$(1/2)^n$	$(1/4)^n$
B	$e^{jn/8} u[n]$	$2e^{jn/8} u[n]$
C	$e^{jn/8}$	$2e^{jn/8}$
D	$e^{jn/8} u[n]$	$e^{jn/6} u[n]$
E	$e^{jn/8}$	$e^{jn/6}$

Ejercicio 8. Para los siguientes sistemas lineales e invariantes en el tiempo caracterizados por sus ecuaciones a diferencias, o sus respuestas impulsivas,

1. Calcule la respuesta impulsiva $h[n]$ o la ecuación a diferencias del sistema, según corresponda, y determine si el sistema es FIR o IIR.
2. Calcule la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, y exprésela de la forma más sencilla posible.
3. Grafique el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia, destacando los valores en $\omega = 0$, $\omega = \pi$, y en todas las singularidades relevantes.
4. Indique si se trata de un filtro pasabajos, pasaaltos, pasabanda, eliminabanda.
5. Determine la salida de estado estacionario $y_{ee}[n]$ ante la entrada especificada, y determine el retardo en muestras entre la entrada y la salida.
6. Calcule la respuesta transitoria $y_{tr}[n]$ del sistema (completa si el sistema es FIR, o las primeras 3 muestras si el sistema es IIR).
7. Revise sus resultados calculando la respuesta en frecuencia y las salidas (real, de estado estacionario y transitoria) usando MATLAB.
 - a) Sistema: $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \sqrt{2}x[n-1] + x[n-2]$,
entrada: $x[n] = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 1$.

- b) Sistema: $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \sqrt{2}x[n-1] + x[n-2]$,
 entrada: $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{6}\right) + 1$.
- c) Sistema: $y[n] = 3x[n+3] + 2x[n+2] + 2x[n-2] + 3x[n-3]$,
 entrada: $x[n] = [1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 3\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)]u[n]$.
- d) Sistema: $y[n] = x[n] + x[n-1]$,
 entrada: $x[n] = [1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)]u[n]$.
- e) Sistema: $y[n] = x[n] - x[n-1]$,
 entrada: $x[n] = [1 + 2\cos(\omega_0 n)]u[n]$ con $\omega_0 = \pi/1000$.
- f) Sistema: $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$,
 entrada: $x[n] = [1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)]u[n]$.
- g) Respuesta impulsiva: $h[n] = \frac{1}{4}\delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1]$,
 entrada: $x[n] = [3 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}n + \theta_1\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \theta_2\right)]u[n]$.
- h) Respuesta impulsiva: $h[n] = -\frac{1}{8}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{8}\delta[n-2]$,
 entrada: $x[n] = [3 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{10}n\right)]u[n]$.
- i) Respuesta impulsiva: $h[n] = a\delta[n] - ab^n u[n]$, con $0 < b < 1$ y $a > 0$,
 entrada: $x[n] = [1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 3\cos(\pi n)]u[n]$.

Ejercicio 9. Para el sistema discreto que se muestra en la figura,



1. Calcule $H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$ aplicando propiedades de la TFTD.
2. Encuentre la ecuación a diferencias que relaciona $y[n]$ con $x[n]$.
3. Calcule analíticamente la respuesta impulsiva del sistema.
4. ¿Cuál es la relación entre a , b y c , todos reales y distintos de cero, para que $H(e^{j\omega}) \equiv 1$? ¿Y para que $|H(e^{j\omega})| = 1$?

(I) **Ejercicio 10.** Calcule la salida de un SLIT con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j\omega 3}, & |\omega| < \frac{2\pi}{16} \left(\frac{3}{2}\right), \\ 0, & \frac{2\pi}{16} \left(\frac{3}{2}\right) \leq |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

si la entrada es un tren de impulsos unitarios con período $N = 16$:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - 16m].$$

Ejercicio 11. Calcule los coeficientes a_1 , b_0 , b_1 , y b_2 para que el sistema discreto caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] + a_1 y[n - 1] = b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] + b_2 x[n - 2]$$

satisfaga simultáneamente estos requisitos:

- bloquee completamente las señales de frecuencia $\omega_0 = \pi/2$;
- tenga ganancia unitaria a frecuencia cero: $H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1$;
- tenga ganancia $1/9$ en $\omega = \pi$: $H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 1/9$.

Ejercicio 12. Dos sistemas con respuesta impulsiva $h_1[n] = a^n u[n]$ y $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, respectivamente, se conectan en cascada.

1. Calcule la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema completo.
2. Calcule las funciones transferencia $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$ correspondientes a $h_1[n]$ y $h_2[n]$, y la función transferencia $H(e^{j\omega})$ de la cascada.
3. Si $a = 1/4$ y $\omega_0 = \pi/2$, calcule la salida de estado estacionario $y_{ee}[n]$ de la cascada cuando la entrada es $x[n] = u[n] + \sqrt{2} \cos(\omega_0 n + \pi/6)$, y determine el retardo en muestras entre la señal de entrada y la de salida.

Ejercicio 13. Dos sistemas lineales e invariantes en el tiempo $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$ se conectan en cascada. El sistema $H_1(e^{j\omega})$ tiene la respuesta en frecuencia

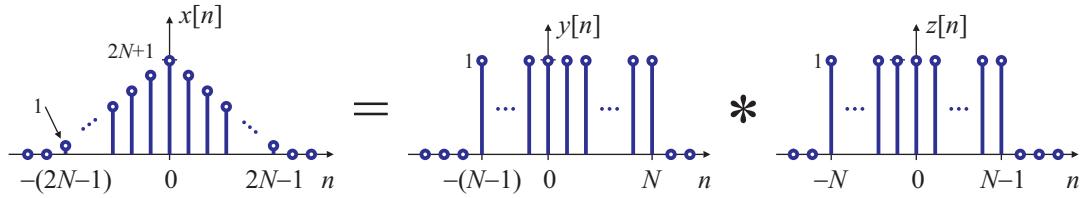
$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| < \pi, \end{cases}$$

y el sistema $H_2(e^{j\omega})$ está descrito por la ecuación a diferencias $y[n] = x[n] - x[n - 1]$. La entrada al sistema es $x[n] = \cos(0,6\pi n) + 3\delta[n - 5] + 2$, para $-\infty < n < \infty$. Aplicando las propiedades de linealidad e invariación temporal, determine la respuesta del sistema (puede hacerse directamente por inspección). Justifique sus pasos.

Ejercicio 14. Determine analíticamente la TFTD de cada una de las siguientes sucesiones. Grafique el módulo y la fase de $X(e^{j\omega})$ usando MATLAB.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $x[n] = 3(0,9)^n u[n]$. | 4. $x[n] = (n + 2)(-0,7)^{n-1} u[n - 3]$. |
| 2. $x[n] = 2(0,8)^{n+2} u[n - 2]$. | 5. $x[n] = (n + 3)(1/4)^{n-1} u[n + 2]$. |
| 3. $x[n] = n(0,5)^n u[n]$. | |

Ejercicio 15. Calcule la transformada de Fourier de la señal triangular $x[n]$ de largo $4N - 1$ que se muestra en la figura. Demuestre que tal señal puede escribirse como la convolución de las señales $y[n]$ y $z[n]$ de largo $2N$, y aplique el teorema de convolución temporal.



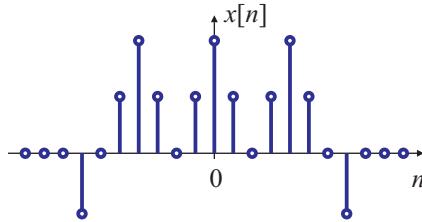
Ejercicio 16. Usando la propiedad de desplazamiento frecuencial, muestre que la TFTD de un pulso sinusoidal $x[n] = \cos(\omega_0 n) R_N[n]$ con

$$R_N[n] = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

es

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin[(\omega - \omega_0)(2N+1)/2]}{\sin[(\omega - \omega_0)/2]} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin[(\omega + \omega_0)(2N+1)/2]}{\sin[(\omega + \omega_0)/2]} \right\}.$$

Ejercicio 17. La sucesión $x[n]$ de la figura tiene una TFTD $X(e^{j\omega})$. Efectúe los siguientes cálculos aplicando las propiedades de la TFTD, y no evaluando explícitamente $X(e^{j\omega})$.



1. Determine $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$.
2. Calcule $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}$.
3. Encuentre y grafique $\arg\{X(e^{j\omega})\}$.
4. Evalúe $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$.
5. Calcule y grafique la señal cuya TFTD es $\operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\}$.
6. Calcule y grafique la señal cuya TFTD es $X(e^{-j\omega})$.

Ejercicio 18. Un filtro pasabajos ideal tiene respuesta impulsiva $h_{PB}[n]$, y respuesta en frecuencia

$$H_{PB}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/5, \\ 0, & \pi/5 \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

En base a la respuesta impulsiva de este filtro se construyen los tres filtros que se indican a continuación. Para cada caso calcule la respuesta en frecuencia, grafíquela para $|\omega| \leq \pi$, y determine el tipo de filtro (pasabajos, pasa altos, pasabanda, eliminabanda).

1. $h_1[n] = (-1)^n h_{PB}[n] = e^{j\pi n} h_{PB}[n].$
2. $h_2[n] = 2h_{PB}[n] \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right).$
3. $h_3[n] = \frac{1/10}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{10}n\right) h_{PB}[n].$

Ejercicio 19. Un sistema con respuesta impulsiva $g[n]$ es el *sistema inverso* del sistema con respuesta impulsiva $h[n]$ si $(h * g)[n] = \delta[n]$. Si $h[n] = a^n u[n - 1]$, con $|a| < 1$,

1. calcule la respuestas en frecuencia $G(e^{j\omega})$ e impulsiva $g[n]$ del sistema inverso;
2. determine si el sistema inverso es causal y estable.
3. Si $|a| > 1$, ¿existe el sistema inverso? En caso afirmativo ¿es estable? ¿es causal?

Ejercicio 20. Calcule la respuesta impulsiva $h[n]$ del filtro con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j, & -\pi < \omega < 0, \\ -j, & 0 < \omega \leq \pi, \end{cases}$$

y determine la salida de estado estacionario $y_{ee}[n]$ si la entrada es $x[n] = A \cos(\omega_0 n)$.

Ejercicio 21. Aplicando la propiedad de derivación frecuencial, verifique que la TFTD inversa de

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{\omega}{\omega_c} \right|, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases} \quad \text{es} \quad \frac{\omega_c}{2\pi} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{2\pi}n\right) \right]^2 = \frac{1 - \cos(\omega_c n)}{\pi n^2 \omega_c}.$$



Ejercicio 22. Un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h[n]$ tiene respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$.

1. Demuestre que el sistema es FIR, sabiendo que:
 - a) El sistema es causal;
 - b) $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$;
 - c) La transformada de Fourier de $h[n + 1]$ es real;
2. Si además de las condiciones anteriores, se cumple que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 2, \quad \text{y} \quad H(e^{j\pi}) = 0.$$

¿tiene información suficiente para caracterizar completamente el sistema?. En caso afirmativo, determine la respuesta impulsiva $h[n]$. En caso contrario, especifique las condiciones que debe satisfacer $h[n]$.

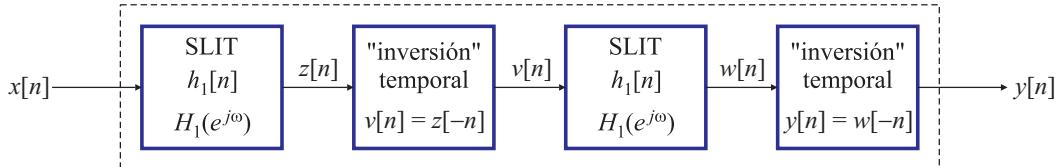
Ejercicio 23. Si $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de la sucesión $x[n]$ (que se supone compleja), demuestre los siguientes pares transformados:

1. $x^*[n] \Leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$.
2. $x^*[-n] \Leftrightarrow X^*(e^{j\omega})$.
3. $\operatorname{Re}\{x[n]\} \Leftrightarrow X_e(e^{j\omega}) \doteq \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$, el conjugado simétrico de $X(e^{j\omega})$.
4. $j \operatorname{Im}\{x[n]\} \Leftrightarrow X_o(e^{j\omega}) \doteq \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$, el conjugado antisimétrico de $X(e^{j\omega})$.

Ejercicio 24. Si $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ son las TFTD de las sucesiones $x[n]$ e $y[n]$, demuestre la versión generalizada del Teorema de Parseval

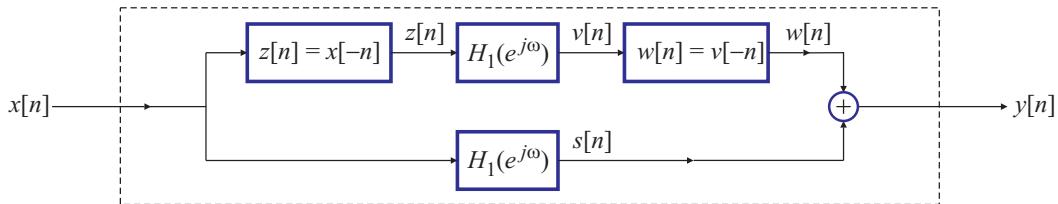
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) d\omega.$$

- (I) **Ejercicio 25.** En la cascada de sistemas discretos que se muestra en la figura, el inversor temporal está definido como $v[n] = z[-n]$ e $y[n] = w[-n]$. Si $x[n]$ y $h_1[n]$ son reales,



1. Exprese $Z(e^{j\omega})$, $V(e^{j\omega})$, $W(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ en función de $X(e^{j\omega})$ y $H_1(e^{j\omega})$.
2. Encuentre la respuesta $H(e^{j\omega})$ del sistema completo.
3. Determine la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema completo en función de $h_1[n]$.

Ejercicio 26. En el diagrama bloque de la figura $H_1(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia de un sistema con respuesta impulsiva $h_1[n]$.



1. Exprese $Z(e^{j\omega})$, $V(e^{j\omega})$, $W(e^{j\omega})$, $S(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ en función de $X(e^{j\omega})$ y $H_1(e^{j\omega})$.
2. Encuentre la respuesta $H(e^{j\omega})$ del sistema completo.
3. Determine la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema completo en función de $h_1[n]$.

- (I) **Ejercicio 27.** La convolución dos sucesiones es nula para todo n . ¿Se puede afirmar que alguna de las dos sucesiones es cero para todo n ? Considere los siguientes casos, justificando su respuesta si es afirmativa o elaborando un contraejemplo en caso contrario.

1. Las sucesiones son de longitud finita.
2. Las sucesiones son de longitud infinita.
3. Una de las sucesiones es de longitud finita, y la otra de longitud infinita.

Ejercicio 28. La señal $x_E[n]$ es una señal de energía, es decir que $\sum_n |x_E[n]|^2 < \infty$. La señal $y_P[n]$ es una señal de potencia, es decir que satisface

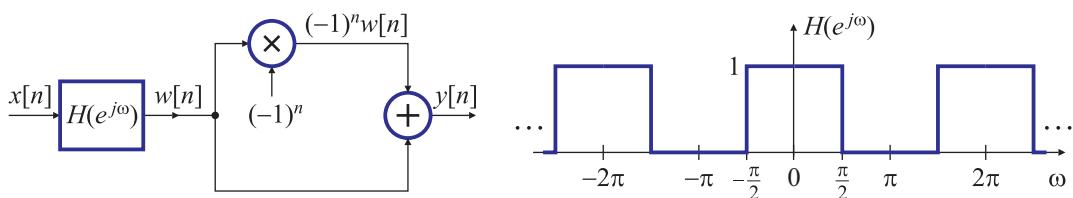
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |y_P[n]|^2 < \infty.$$

Si $h[n]$ es la respuesta impulsiva de un sistema lineal e invariante en el tiempo, de ejemplo de señales $x_E[n]$, $y_P[n]$ y $h[n]$ tales que el sistema:

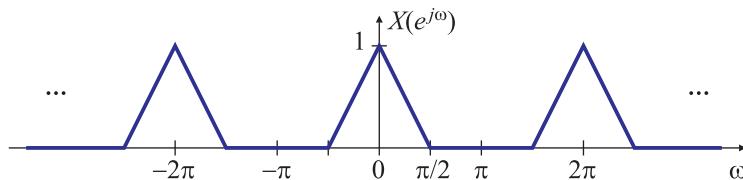
1. ante una entrada de energía $x_E^{(1)}[n]$ tiene una salida de energía $x_E^{(2)}[n]$.
2. ante una entrada de energía $x_E[n]$ tiene una salida de potencia $y_P[n]$.
3. ante una entrada de potencia $y_P[n]$ tiene una salida de energía $x_E[n]$.
4. ante una entrada de potencia $y_P^{(1)}[n]$ tiene una salida de potencia $y_P^{(2)}[n]$.

Ejercicio 29. Para el sistema de la figura, determine la salida $y[n]$ cuando $x[n]$ es un impulso unitario $\delta[n]$, y $H(e^{j\omega})$ es el filtro pasabajos ideal con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$



Ejercicio 30. Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de la sucesión $x[n]$. Determine las transformadas de $y_s[n]$, $y_d[n]$ y de $y_e[n]$ en función de $X(e^{j\omega})$, si $X(e^{j\omega})$ es como se muestra en la figura.



1. Muestreador: $y_m[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}. \end{cases}$

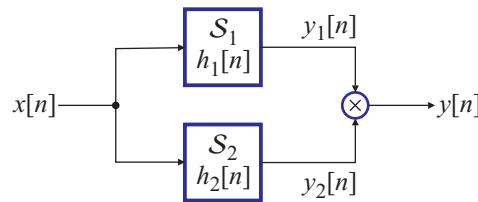
2. Compresor: $y_c[n] = x[2n]$.

3. Expansor: $y_e[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}. \end{cases}$

Ejercicio 31. Para el sistema representado por la ecuación a diferencias $y[n] = (-1)^n x[n]$,

1. Determine y justifique si es lineal, invariante al desplazamiento, causal, estable entrada/salida.
2. Calcule la TFTD $Y(e^{j\omega})$ de $y[n]$ en función de la TFTD $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$.
3. En base al resultado del inciso anterior, grafique el módulo de los espectros de $x[n]$ e $y[n]$ cuando $x[n] = \cos(\pi n/6)$.

Ejercicio 32. Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 tienen respuestas impulsivas $h_1[n]$ y $h_2[n]$.



1. Determine si el sistema completo con entrada $x[n]$ y salida $y[n] = y_1[n] \times y_2[n]$ es un sistema lineal e invariante en el tiempo. Justifique su respuesta.
2. Si $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$ son las respuestas en frecuencia de los sistemas \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 , y $X(e^{j\omega})$ es la TFTD de $x[n]$, donde

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < 0,2\pi, \\ \neq 0, & 0,2\pi < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} \neq 0, & |\omega| \leq 0,4\pi, \\ 0, & 0,4\pi < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

y

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \neq 0, & |\omega| \leq 0,3\pi, \\ 0, & 0,3\pi < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

encuentre en qué rangos de frecuencias la TFTD $Y(e^{j\omega})$ de $y[n]$ es nula.

3.A

Diseño de filtros FIR tipo I

“Implementar” o “realizar” un filtro es encontrar una ecuación a diferencias que permita calcular su salida en el instante actual $y[n]$ en función de la entrada actual $x[n]$ y las entradas y salidas pasadas, $x[n-1], x[n-2], \dots, x[n-M], y[n-1], y[n-2], \dots, y[n-N]$. En la mayoría de las aplicaciones la respuesta en frecuencia deseada es constante a tramos con transiciones abruptas entre las bandas, como los filtros ideales presentados en las Secciones 3.10 y 3.11.2, lo que hace que la respuesta impulsiva tenga longitud infinita y no sea causal. Si se quiere implementar con ecuaciones a diferencias alguno de los filtros ideales tipo pasabajos (3.164), pasaaltos (3.165), pasabanda (3.174) o eliminabanda (3.175), no pueden representarse en la forma de la ecuación a diferencias (3.233) porque la respuesta impulsiva de esos filtros está formada por combinaciones de “sinc”, mientras que la respuesta impulsiva de los filtros implementados con ecuaciones a diferencia está formada por términos exponenciales de la forma $p_k^n u[n]$. En otras palabras, *no se puede implementar un filtro ideal utilizando una ecuación a diferencias*.

Entonces, ¿cómo implementar un filtro que se parezca “lo más posible” a un filtro ideal? Una solución sencilla es *truncar* la respuesta impulsiva $h_i[n]$ del filtro ideal. Los efectos de esta truncación se estudian en las siguientes secciones.

3.A.1. Truncación de la respuesta impulsiva

Como los términos de la respuesta impulsiva $h_i[n]$ del filtro ideal decaen según $1/|n|$ porque son suma de “sinc” se esperaría que truncando esta respuesta tomando un número suficiente de términos, la respuesta en frecuencia del filtro ideal y la del filtro truncado no sean muy diferentes. Entonces se elige que la respuesta impulsiva del filtro truncado $h_T[n]$ sea

$$h_T[n] = \begin{cases} h_i[n], & -M \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (3.A.1)$$

donde $h_i[n]$ es la respuesta impulsiva de alguno de los filtros ideales, dada por las ecuaciones (3.164), (3.165), (3.174) o (3.175).

Una manera conveniente de indicar el proceso de truncación es definiendo una función auxiliar, denominada *ventana temporal*, *ventana de truncación* o simplemente *ventana*,

notada $w[n]$ y definida en este caso como

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (3.A.2)$$

Esta ventana se denomina *rectangular* o “boxcar” en la literatura en inglés.

La respuesta impulsiva del filtro truncado $h_T[n]$ puede escribirse en función de la respuesta impulsiva del filtro ideal $h_i[n]$ y de la ventana $w[n]$ como

$$h_T[n] = h_i[n] \times w[n].$$

Aprovechando la simetría de las respuestas impulsivas de los filtros ideales, $h_i[n] = h_i[-n]$, la respuesta en frecuencia del filtro truncado se puede escribir como

$$\begin{aligned} H_T(e^{j\omega}) &= \sum_n h_T[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-M}^M h_T[n] e^{-j\omega n} = h_T[0] + \sum_{n=1}^M h_T[n] (e^{-j\omega n} + e^{j\omega n}) \\ &= h_T[0] + 2 \sum_{n=1}^M h_T[n] \cos(\omega n). \end{aligned} \quad (3.A.3)$$

Este resultado muestra que la respuesta en frecuencia del filtro truncado es *real* y *simétrica* con respecto a ω (porque ω es el argumento de una función par, el coseno).

Aunque la expresión de $H_T(e^{j\omega})$ dada por la ecuación (3.A.3) es correcta, no permite visualizar fácilmente cómo cambia la respuesta en frecuencia del filtro ideal cuando se trunca su respuesta impulsiva.

Otra forma de calcular la respuesta en frecuencia $H_T(e^{j\omega})$ del filtro con respuesta impulsiva truncada es aplicando el teorema de ventaneo o de convolución (periódica) frecuencial, que relaciona esta respuesta con la respuesta en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ del filtro ideal, y la respuesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ de la ventana temporal:

$$H_T(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_i(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_i(e^{j(\omega-\theta)}) W(e^{j\theta}) d\theta. \quad (3.A.4)$$

Aunque la expresión de la convolución que aparece en (3.A.4) es la convolución periódica, y no la convolución lineal estudiada en el Capítulo 2, el proceso de cálculo es similar, y permite intuir la “forma” de la respuesta en frecuencia buscada. En definitiva, para conocer cómo se altera la respuesta de la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada es necesario conocer la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular

3.A.1.1. Respuesta en frecuencia de la ventana rectangular

La respuesta en frecuencia de la ventana rectangular es

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \sum_n w[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-M}^M e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\omega(m-M)} \\ &= e^{j\omega M} \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\omega m} = e^{-j\omega M} \frac{1 - e^{-j(2M+1)\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= e^{j\omega M} \frac{e^{-j(2M+1)\omega/2} (e^{j(2M+1)\omega/2} - e^{-j(2M+1)\omega/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \end{aligned}$$

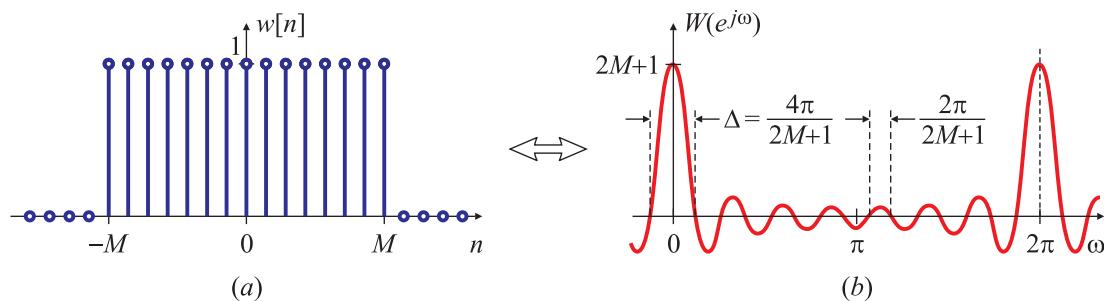


Fig. 3.A.1. Ventana rectangular: respuesta temporal (a) y frecuencial (b).

Tabla 3.A.1. Variación del área de los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular en función de M .

M	número de lóbulo lateral						
	1	2	3	4	5	6	7
10	117,974	-13,9219	8,3603	-6,0857	4,8729	-4,1415	3,6728
15	117,933	-13,8600	8,2555	-5,9356	4,6737	-3,8881	3,3585
20	117,918	-13,8376	8,2179	-5,8823	4,6042	-3,8016	3,2538
25	117,911	-13,8271	8,2003	-5,8575	4,5719	-3,7616	3,2060
30	117,907	-13,8213	8,1906	-5,8438	4,5543	-3,7399	3,1801
35	1179,05	-13,8177	8,1847	-5,8356	4,5436	-3,7268	3,1645
40	117,903	-13,8154	8,1809	-5,8302	4,5367	-3,7183	3,1543
45	117,902	-13,8139	8,1782	-5,8265	4,5319	-3,7124	3,1474
50	117,901	-13,8127	8,1763	-5,8238	4,5285	-3,7082	3,1424

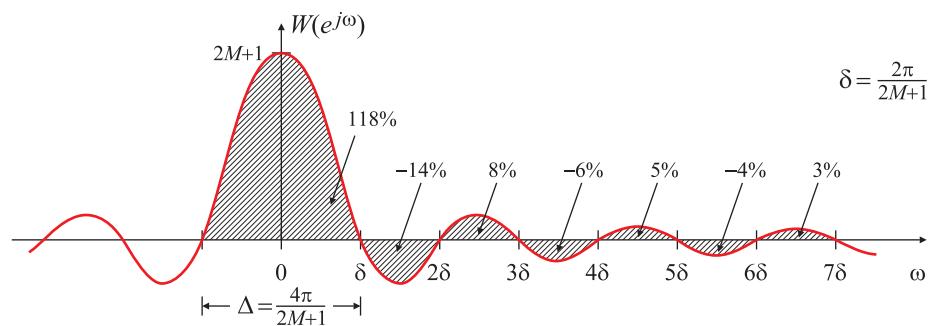


Fig. 3.A.2. Área de los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular.

que finalmente puede escribirse como

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{2M+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}. \quad (3.A.5)$$

Esta respuesta tiene la forma del núcleo de Dirichlet estudiado en el Capítulo 2, y coincide, salvo por un factor de escala, con la respuesta en frecuencia del filtro promediador estudiado en el Ejemplo 3.88, dada por la ecuación (3.116) (haciendo $-M_1 = M_2 = M$). La representación temporal de $w[n]$ y de su respuesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ se muestran en la Fig. 3.A.1 para $M = 7$. Algunas características destacables de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular son:

- La respuesta en frecuencia tiene $2M+1$ ceros en el intervalo $0 \leq \omega < 2\pi$, como se desprende de (3.A.5). En $\omega = 0$ se cancelan simultáneamente el numerador y denominador; aplicando la regla de L'Hôpital, se encuentra que $W(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 2M+1$.
- El área cubierta por un período de la respuesta en frecuencia es 2π . Esto se puede demostrar a partir de la propiedad de área de la TFTD (ecuación (3.172), Sección 3.11.1) de donde sale inmediatamente que

$$\int_0^{2\pi} W(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi w[0] = 2\pi \quad (3.A.6)$$

pues $w[n] = 1$ para $-M \leq n \leq M$.

- Las áreas de cada lóbulo referidas al área total de la ventana, en función de la semilongitud M se detallan en la Tabla 3.A.1. Las áreas convergen rápidamente a los valores aproximados indicados en la Fig. 3.A.2.
- Un parámetro útil es el ancho Δ del lóbulo principal, que como se aprecia en la Fig. 3.A.1(b), es el doble de la distancia entre los ceros vecinos a $\omega = 0$ (o a $\omega = 2\pi r$, con $r \in \mathbb{Z}$), es decir

$$\Delta = \frac{4\pi}{2M+1}. \quad (3.A.7)$$

3.A.1.2. Respuesta en frecuencia del filtro truncado aplicando el teorema de ventaneo o de convolución frecuencial

Conociendo la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular, y aplicando el teorema de ventaneo o de convolución (periódica) frecuencial, el cálculo de la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada es directo, y se sintetiza en la Fig. 3.A.3.

La respuesta impulsiva $h_i[n]$ y la respuesta en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ del filtro ideal se representan en las Figs. 3.A.3(a) y (d), mientras que la respuesta temporal $w[n]$ y frecuencial $W(e^{j\omega})$ de la ventana rectangular se repiten en las Figs. 3.A.3(b) y (e). La transformada de Fourier de tiempo discreto de la multiplicación de las respuestas temporales $h_i[n]$ y $w[n]$, que da como resultado la respuesta impulsiva truncada $h_T[n]$, es la convolución periódica de las respuestas en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ y $W(e^{j\omega})$, representadas en las Figs. 3.A.3(c) y (f), respectivamente.

El proceso de cálculo de la convolución periódica (en este caso, en el dominio frecuencia) es similar (pero no igual!) al desarrollado en el Capítulo 2 al estudiar el efecto Gibbs.

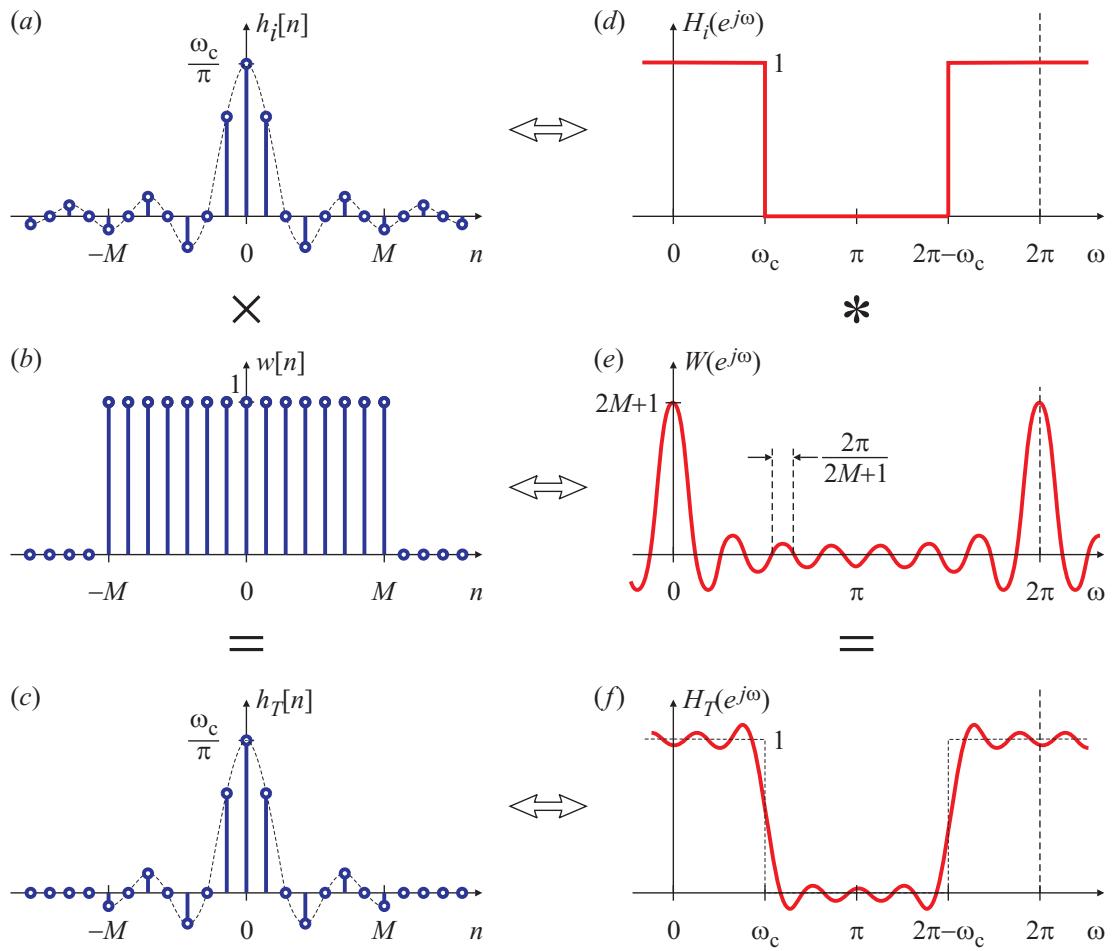


Fig. 3.A.3. Cálculo de la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada. Respuesta impulsiva $h_i[n]$ (a) y respuesta en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ (d) del filtro ideal; respuesta impulsiva $w[n]$ (b) y respuesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ (e) de la ventana rectangular; respuesta impulsiva $h_T[n]$ (c) y respuesta en frecuencia $H_T(e^{j\omega})$ (f) del filtro truncado.

Mientras que en el Capítulo 2 se truncaba el número de armónicas que se utilizaban para reconstruir la señal temporal, en este caso se trunca el número de muestras de la respuesta impulsiva. El efecto de la truncación se manifestaba entonces en la aparición de sobrepicos en la señal *temporal* reconstruida, mientras que ahora estos sobrepicos aparecen en la respuesta en *frecuencia*. Los elementos que se truncan están definidos en un dominio discreto (los coeficientes de la serie de Fourier o las muestras de la respuesta impulsiva) mientras que las señales que se ven alteradas a causa de la truncación están definidas en un dominio continuo (la función periódica o la respuesta en frecuencia, respectivamente). Otra diferencia es que en el caso tratado en el Capítulo 2, la convolución se efectuaba entre una señal periódica (la onda cuadrada) y una señal aperiódica (el sinc); ahora la convolución involucra dos señales periódicas: la respuesta en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ del filtro ideal, que es una onda cuadrada de período 2π , y la respuesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ de la ventana de truncación, que en este caso es el núcleo de Dirichlet (o “sinc” periódico), también de período 2π .

3.A.1.3. Cálculo de la convolución periódica

La integral de convolución periódica (3.A.4) se puede analizar gráficamente de la misma manera en que fue estudiada la convolución lineal en el Capítulo 2. Hay algunas pequeñas diferencias por el hecho que las dos señales a convolucionar son periódicas (y del mismo período).

La convolución lineal (común) entre dos funciones periódicas no está definida: esto significa que puede no converger para algunos valores. Por ejemplo, dada una señal periódica $f(t) = f(t + nT)$, donde T es el período y $n \in \mathbb{Z}$, y que por simplicidad supondremos que es simétrica $f(t) = f(-t)$, la convolución de esta señal con sí misma es

$$g(t) = (f * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(t - \tau)d\tau,$$

y es sencillo ver que esta función no converge para $t = 0$:

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)^2d\tau \rightarrow \infty,$$

donde la última relación se justifica porque la integral representa el área del cuadrado de la función periódica comprendida entre $-\infty < t < \infty$, y por lo tanto no está acotada para ninguna función $f(\cdot)$, salvo $f(t) \equiv 0$ para todo t . La expresión de la convolución periódica salva este inconveniente restringiendo el intervalo de integración a un período. En el caso de las respuestas en frecuencia de señales discretas, el período es 2π . Aunque la expresión (3.A.4) es conveniente, el resultado es el mismo independientemente de dónde se inicie el período de integración. Esto es:

$$(W * H_i)(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon} H_i(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon} H_i(e^{j(\omega-\theta)})W(e^{j\theta})d\theta$$

para cualquier ε real. Por lo tanto, a veces es más conveniente notar

$$(W * H_i)(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_i(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_i(e^{j(\omega-\theta)})W(e^{j\theta})d\theta$$

sobreentendiéndose que la integral se calcula sobre un período de longitud 2π . Es habitual que el intervalo de integración sea $[0, 2\pi)$ o $[-\pi, \pi]$.

El procedimiento gráfico del cálculo de la convolución periódica utilizando la expresión

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_i(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

se representa en la Fig. 3.A.4. El cálculo de esta integral supone reflejar $W(e^{j\theta})$ respecto al eje $\theta = 0$ para obtener $W(e^{j(-\theta)})$. Como $W(e^{j\theta})$ es simétrica respecto a θ , $W(e^{-j\theta}) = W(e^{j\theta})$, de manera que no se pueden distinguir en los gráficos de la Fig. 3.A.4. Esta simetría implica que el valor de la ventana en $\theta = \omega_1$ es igual al valor de la ventana en $\theta = 2\pi - \omega_1$: $W(e^{j\omega_1}) = W(e^{j(2\pi-\omega_1)})$. Además, por la periodicidad en 2π de $W(e^{j\theta})$, resulta que $W(e^{j(\omega_1-\theta)}) = W(e^{j[-(2\pi-\omega_1)-\theta]})$, es decir, desplazar $W(e^{-j\theta})$ en ω_1 unidades hacia la derecha es lo mismo que desplazarla $(2\pi - \omega_1)$ unidades hacia la izquierda.

Para calcular el valor de la convolución periódica en un valor particular $\omega = \omega_1$ se debe desplazar el origen $\theta = 0$ de la respuesta en frecuencia de la ventana hacia este valor particular $\theta = \omega_1$. El caso para $\omega_1 = 0$ se representa en la Fig. 3.A.4(a). Las partes sombreadas

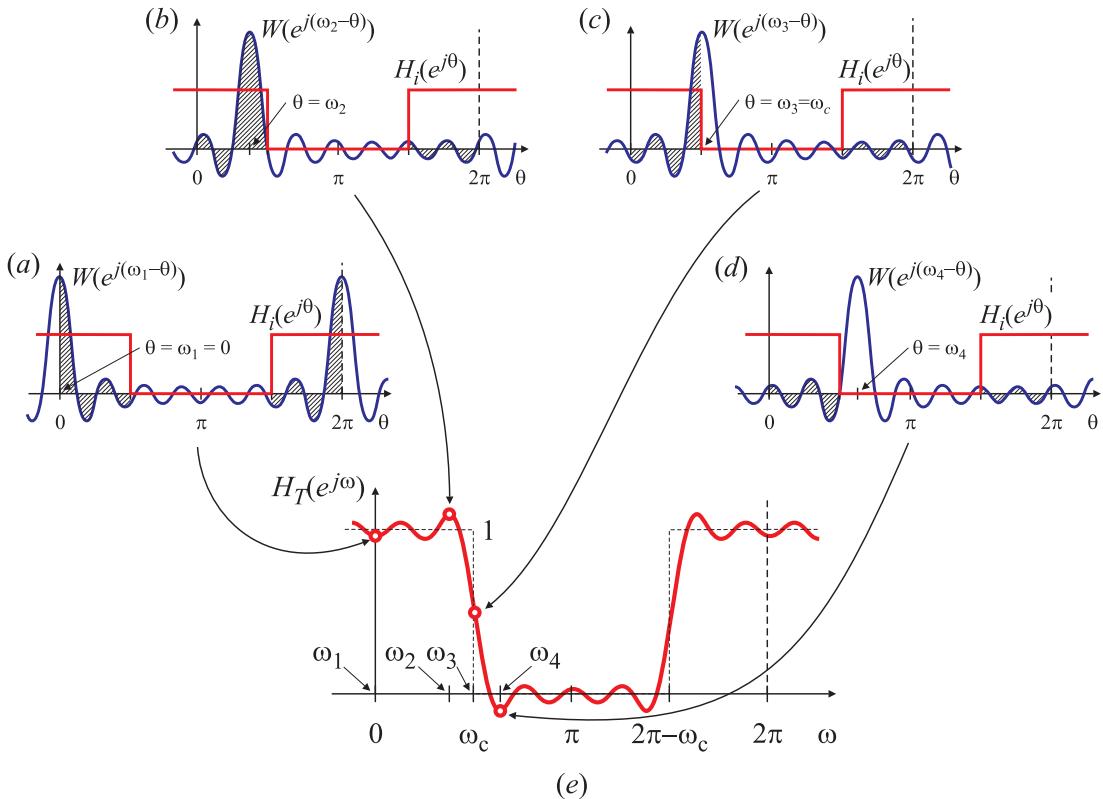


Fig. 3.A.4. Cálculo gráfico de la convolución periódica.

representan el área de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular multiplicada por la respuesta en frecuencia del filtro ideal que queda comprendida en el intervalo $[0, 2\pi]$; es decir, el área sombreada representa en este caso

$$\int_0^{2\pi} H_i(e^{j\theta})W(e^{j(-\theta)})d\theta.$$

Esta integral es muy similar al área total de la ventana, pues el único área que se descarta son los pequeños lóbulos comprendidos entre ω_c y $2\pi - \omega_c$, cuya área neta es pequeña por la alternancia de los signos de estos lóbulos. De modo que el valor de la integral es aproximadamente 2π (puede que sea ligeramente mayor o menor), y entonces resulta que

$$H_T(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_1=0} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} H_i(e^{j\theta})W(e^{j(-\theta)})d\theta}_{\approx 2\pi} \approx 1,$$

como se muestra en la Fig. 3.A.4(e) para $\omega = \omega_1$.

En la Fig. 3.A.4(b) se muestra la evaluación de la integral de convolución para $\omega = \omega_2$. En este valor de frecuencia el área bajo el lóbulo principal contribuye completamente al área total, pero el lóbulo lateral negativo a la derecha del lóbulo principal queda comprendido dentro del rango de frecuencia en donde $H_i(e^{j\theta}) = 0$, y por lo tanto, no contribuye a la reducción del área total, como ocurría en el cálculo para $\omega = \omega_1$. En definitiva, la integral

el ligeramente superior a la unidad, y por lo tanto el valor de la convolución también es mayor que 1:

$$H_T(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_2} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} H_i(e^{j\theta})W(e^{j(\omega_2-\theta)})d\theta}_{>2\pi} > 1,$$

como se indica en la Fig. 3.A.4(e) para $\omega = \omega_2$. Esta forma gráfica de calcular la convolución permite estimar aproximadamente para qué frecuencia se produce el sobreímbolo. En este caso el máximo ocurre para $\omega \approx \omega_2$ porque todo el lóbulo principal queda multiplicado por 1, y uno de los mayores lóbulos laterales con área negativa queda multiplicado por 0. Como el ancho del lóbulo, dado por la ecuación (3.A.7), es $\Delta = 4\pi/(2M + 1)$ el sobreímbolo está ubicado en $\omega \approx \omega_2 = \hat{\omega}_{\max,P}$, donde

$$\hat{\omega}_{\max,P} = \omega_c - \frac{\Delta}{2} = \omega_c - \frac{2\pi}{2M + 1}.$$

El área en esta frecuencia puede pensarse como que es la mitad del área de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular más la mitad del área del lóbulo principal. De acuerdo con los valores de la Tabla 3.A.1,

$$H_T(e^{j\omega})|_{\omega=\hat{\omega}_{\max,P}=\omega_c-\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_i(e^{j\theta})W(e^{j(\omega_2-\theta)})d\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1,179) \approx 1,0895,$$

es decir que en $\omega = \hat{\omega}_{\max,P} = \omega_c - \Delta/2$ la respuesta en frecuencia del filtro truncado tiene un sobreímbolo de aproximadamente 8,9 %.

Cuando la convolución periódica se calcula para $\omega = \omega_3 = \omega_c$, casi la mitad de $W(e^{j(\omega_3-\theta)})$ queda comprendida dentro del rango de frecuencias donde $H_i(e^{j\theta}) = 0$, como se representa en Fig. 3.A.4(c). El área neta es entonces aproximadamente la mitad del área total de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular, de modo que

$$H_T(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_3=\omega_c} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} H_i(e^{j\theta})W(e^{j(\omega_2-\theta)})d\theta}_{\approx \pi} \approx \frac{1}{2},$$

como se muestra en la Fig. 3.A.4(e) para $\omega = \omega_3 = \omega_c$. Este es un resultado conocido de la teoría de Fourier: para una función discontinua, la aproximación dada por una suma finita de exponenciales complejas converge al valor medio del salto en el punto de discontinuidad.

Finalmente, en la Fig. 3.A.4(d) se muestra el cálculo para $\omega = \omega_4$, frecuencia para la cual el lóbulo principal de la ventana rectangular no contribuye al área total de la integral. El área neta es negativa, por efecto del lóbulo lateral negativo a la izquierda del lóbulo principal, como se representa en la Fig. 3.A.4(e) para $\omega = \omega_4$. En este punto el lóbulo principal no contribuye al cálculo de la convolución, y entonces el resultado alcanza aproximadamente el mínimo valor negativo. Nuevamente, el cálculo gráfico permite estimar la posición de este mínimo en $\omega \approx \omega_4 = \hat{\omega}_{\min,P}$, donde

$$\hat{\omega}_{\min,P} = \omega_c + \frac{\Delta}{2} = \omega_c + \frac{2\pi}{2M + 1}.$$

El área bajo la curva $H_i(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$ en $\omega = \omega_4$ puede calcularse como la mitad del área bajo la curva de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular menos la mitad

del área del lóbulo principal. Por lo tanto

$$H_T(e^{j\omega})|_{\omega=\hat{\omega}_{\max,P}=\omega_c-\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_i(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega_c-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1,179) \approx -0,0895.$$

En otras palabras, el sobreímpetu negativo tiene una amplitud de aproximadamente 8,9 %.

Este análisis cualitativo muestra que el efecto de truncar la respuesta impulsiva en un rango $-M \leq n \leq M$ hace que la respuesta en frecuencia resulte con ondulaciones ocasionadas por la forma de la respuesta en frecuencia de la ventana de truncación. La frecuencia de estas ondulaciones es igual al ancho de los lóbulos laterales de la ventana rectangular, y por lo tanto es inversamente proporcional a $N = 2M + 1$ (el largo de la respuesta impulsiva de la ventana temporal). Por otra parte, la altura de las ondulaciones depende solamente del área encerrada bajo la curva de respuesta en frecuencia de la ventana rectangular, y esta es *independiente de M*, como indica la ecuación (3.A.6); para el caso de la ventana rectangular, el máximo de estas ondulaciones es aproximadamente un 8,9 %. Lo que sí cambia es la posición de los máximos y mínimos de estas ondulaciones que ocurren aproximadamente en

$$\hat{\omega}_{\max,P} = \omega_c - \frac{2\pi}{2M+1}, \quad \hat{\omega}_{\min,P} = \omega_c + \frac{2\pi}{2M+1},$$

como sugieren las Fig. 3.A.4(b), (d), (e). La separación entre el máximo y el mínimo de la respuesta en frecuencia es aproximadamente igual al ancho Δ del lóbulo principal de la ventana, dado por (3.A.7). Por lo tanto, al incrementar M el tamaño de estos sobreímpetus casi no cambia (es independiente de M) pero aumenta la frecuencia de las ondulaciones y la ubicación de los máximos y mínimos se acercan hacia la frecuencia de corte, como se comprobará en el Ejemplo 3.A.1. Como se verá más adelante, esta característica sirve para estimar el orden necesario de un filtro que cumpla con ciertos requisitos de diseño.

Estos cálculos aproximados son válidos siempre que el ancho Δ del lóbulo principal de la ventana rectangular sea mucho menor que el ancho de banda de los filtros (que es $2\omega_c$ para el caso del pasabajos). Desde el punto de vista temporal, esto equivale a considerar que M es “grande”, es decir, que el filtro con respuesta impulsiva truncada utiliza una cantidad suficiente de términos de la respuesta impulsiva $h_i[n]$ del filtro ideal.

3.A.1.4. El filtro causal

Hasta ahora se ha conseguido obtener respuesta impulsiva $h_T[n]$ de longitud finita $2M + 1$ dada por la ecuación (3.A.1), que es adecuada para implementar un filtro FIR. Pero esta respuesta no es causal pues $h_T[n] \neq 0$ para $n < 0$. La forma de obtener un filtro causal es desplazando la respuesta impulsiva M muestras hacia la derecha:

$$h_C[n] = h_T[n - M] = \begin{cases} h_i[n - M], & 0 \leq n \leq 2M + 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La respuesta en frecuencia del filtro causal se calcula fácilmente aplicando la propiedad de desplazamiento temporal de la TDFT

$$h_C[n] = h_T[n - M] \iff H_C(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega} H_T(e^{j\omega}),$$

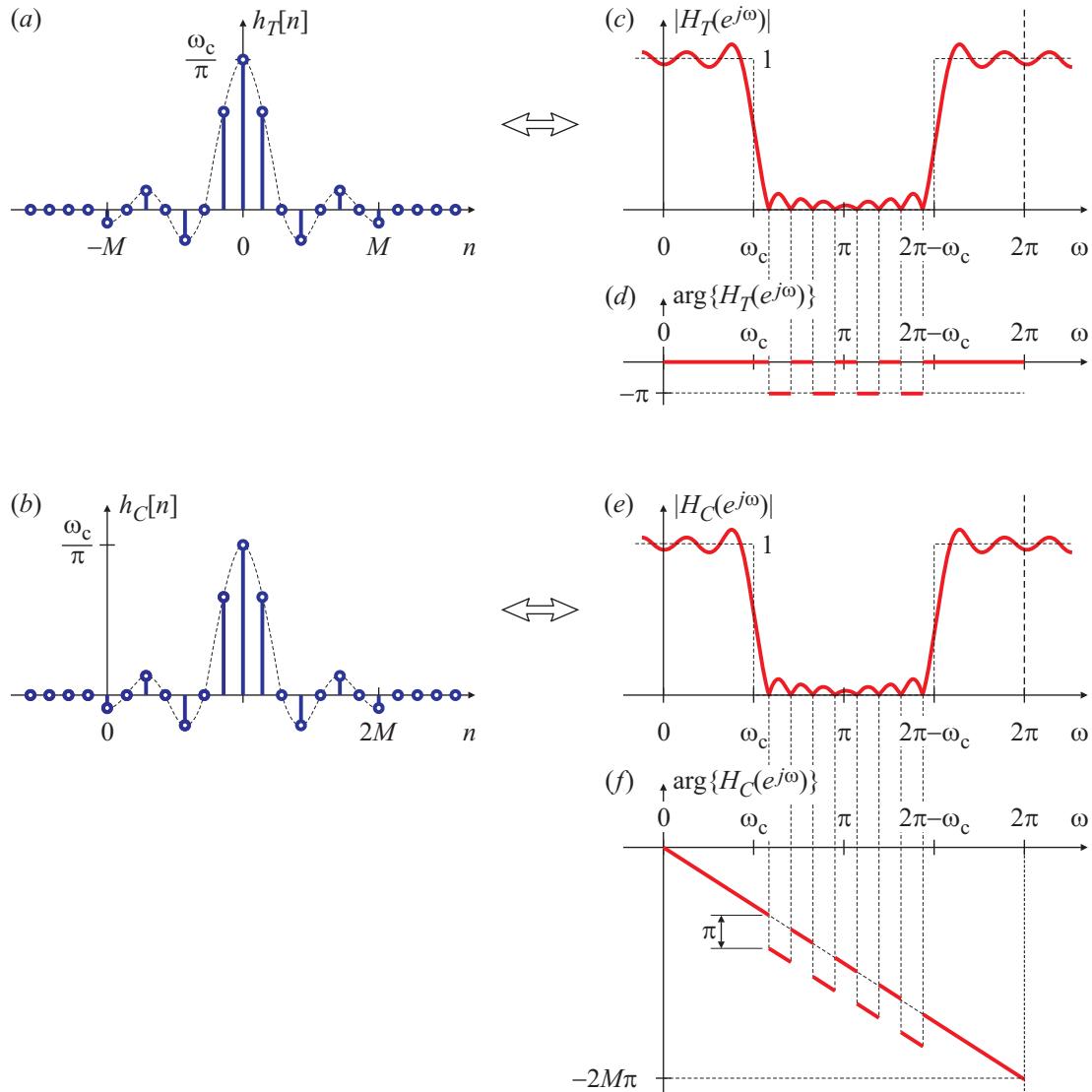


Fig. 3.A.5. Efectos de causalizar el filtro truncado. Respuesta temporal $h_T[n]$ (a) y frecuencial $H_T(e^{j\omega})$ en módulo (c) y fase (d) del filtro truncado. Respuesta temporal $h_C[n]$ (b) y frecuencial $H_C(e^{j\omega})$ en módulo (e) y fase (f) del filtro truncado causalizado.

y teniendo en cuenta (3.A.3), se encuentra que

$$H_C(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega} \left(h_T[0] + 2 \sum_{n=1}^M h_T[n] \cos(\omega n) \right). \quad (3.A.8)$$

El proceso de causalización no altera el módulo de la respuesta en frecuencia, pero sí su fase, como se muestra en la Fig. 3.A.5. En la Fig. 3.A.5(a) se representa la respuesta impulsiva del filtro, y en la Fig. 3.A.5(c) y (d) la respuesta en frecuencia en módulo y en fase. El módulo de esta respuesta es la misma de la Fig. 3.A.3(f), y se ha agregado el gráfico de la fase de la respuesta en frecuencia: los tramos donde la fase vale $(-\pi)$ en la Fig. 3.A.5(d) corresponden a los rangos de frecuencia donde $H_T(e^{j\omega})$ es negativo

en la Fig. 3.A.3(f). En la Fig. 3.A.5(b) se representa la respuesta impulsiva “causalizada”, que es la respuesta de la Fig. 3.A.5(a) pero desplazada M muestras hacia la derecha. El módulo de la respuesta en frecuencia del filtro causal se representa en la Fig. 3.A.5(e), que naturalmente es el mismo que la del filtro truncado no causal, Fig. 3.A.5(c). La que cambia es la fase, que se grafica en la Fig. 3.A.5(f), donde se tiene en cuenta el desfasaje lineal introducido por el término $e^{-jM\omega}$ en la ecuación (3.A.8), y los saltos de $(\pm\pi)$ que tiene la fase del filtro truncado no causal.

EJEMPLO 3.A.1. Implementacion de un filtro “ideal” causal

El propósito es diseñar un filtro pasabajos con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/2$. La respuesta en frecuencia deseada para $-\pi < \omega < \pi$ es

$$H_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| < \pi, \end{cases}$$

y se entiende que la respuesta se extiende periódicamente cada 2π . La respuesta impulsiva está dada por la ecuación (3.164), de modo que

$$h_i[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right).$$

Esta respuesta impulsiva, que se representa en la Fig. 3.A.3(a), se anula para los n pares, de modo que también puede escribirse como

$$h_i[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{2}{|n|\pi}(-1)^{\frac{|n|-1}{2}}, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

y algunos de sus valores son:

n	0	± 1	± 3	± 5	± 7	± 9	± 11	± 13	± 15	\dots
$h_i[n]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$-\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$-\frac{2}{11\pi}$	$\frac{2}{13\pi}$	$-\frac{2}{15\pi}$	\dots

Para implementar el filtro se elige limitar la respuesta a 15 términos, es decir se dejan sólo $M = 7$ muestras a izquierda y derecha de la muestra correspondiente a $n = 0$. La respuesta impulsiva truncada $h_T[n]$ se muestra en la Fig. 3.A.3(c) o en la Fig. 3.A.5(a). La respuesta en frecuencia del sistema con respuesta impulsiva truncada es

$$\begin{aligned} H_T(e^{j\omega}) &= \sum_n h_T[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-7}^7 h_T[n]e^{-j\omega n} \\ &= -\frac{2}{7\pi}e^{j7\omega} + \frac{2}{5\pi}e^{j5\omega} - \frac{2}{3\pi}e^{j3\omega} + \frac{2}{\pi}e^{j\omega} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}e^{-j\omega} - \frac{2}{3\pi}e^{-j3\omega} + \frac{2}{5\pi}e^{-j5\omega} - \frac{2}{7\pi}e^{-j7\omega} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \cos \omega - \frac{4}{3\pi} \cos 3\omega + \frac{4}{5\pi} \cos 5\omega - \frac{4}{7\pi} \cos 7\omega. \end{aligned}$$

Esta respuesta se representa en la Fig. 3.A.3(f), o en la Fig. 3.A.5(c) y (d) en módulo y fase.

Para obtener un sistema causal, la respuesta impulsiva se desplaza $M = 7$ muestras a la derecha, como se indica en la Fig. 3.A.5(b). La respuesta en frecuencia es

$$\begin{aligned} H_C(e^{j\omega}) &= e^{-j7\omega} H_T(e^{j\omega}) \\ &= e^{-j7\omega} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \cos \omega - \frac{4}{3\pi} \cos 3\omega + \frac{4}{5\pi} \cos 5\omega - \frac{4}{7\pi} \cos 7\omega \right) \end{aligned}$$

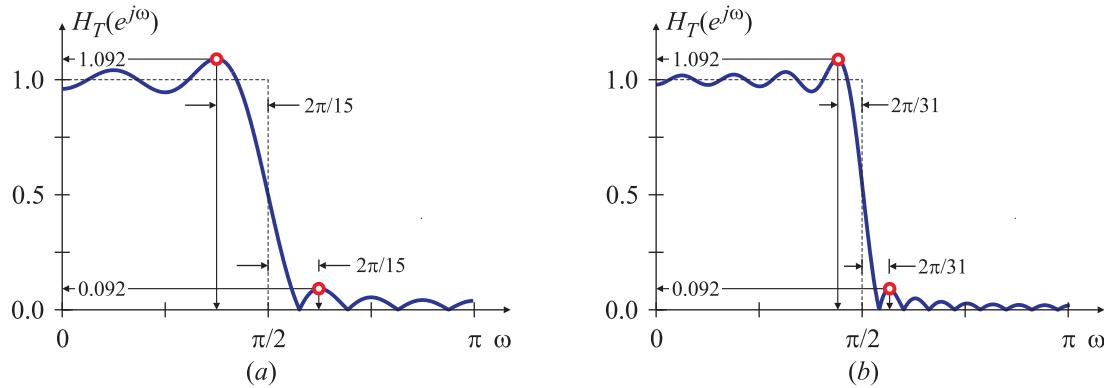


Fig. 3.A.6. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado para $M = 7$ (a), y para $M = 15$ (b).

y su módulo y fase se grafican en la Fig. 3.A.5(e) y (f), respectivamente. El máximo de la respuesta en frecuencia en la banda de paso es $H_C(e^{j\omega})_{\max,P} = 1,0921$ (0,76 dB) y se alcanza en $\omega_{\max,P} = 0,375\pi$. El mayor sobreímpetu de la banda de rechazo –que corresponde al mínimo de $H_T(e^{j\omega})$ – es $H_C(e^{j\omega})_{\max,R} = 0,0921$ (-20,71 dB) y se alcanza en $\omega_{\max,R} = 0,625\pi$. Tal como fuera explicado en el análisis cualitativo de la Sección 3.A.1.3, tanto el sobreímpetu positivo como el sobreímpetu negativo tienen la misma magnitud (0,0921 en este caso) porque representan las áreas que se suman o se dejan de sumar al hacer la convolución. Además estos sobreímpetus aparecen aproximadamente a $\pm 2\pi/(2M+1) = \pm(2/15)\pi = \pm 0,133\pi$ de la frecuencia de corte ω_c (en realidad, ocurren en $\omega_c \pm 0,125\pi$). Estos extremos se detallan en la Fig. 3.A.6(a).

Si se aumenta el largo del filtro, por ejemplo anulando las muestras de la respuesta impulsiva ideal $h_i[n]$ que están más alla de $M = 15$ muestras a izquierda y derecha de la muestra correspondiente a $n = 0$, se obtiene un filtro FIR de $N = 2M + 1 = 31$ muestras de longitud. La respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada es

$$\begin{aligned} H_T(e^{j\omega}) = & \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \cos \omega - \frac{4}{3\pi} \cos 3\omega + \frac{4}{5\pi} \cos 5\omega - \frac{4}{7\pi} \cos 7\omega + \\ & \frac{4}{9\pi} \cos 9\omega - \frac{4}{11\pi} \cos 11\omega + \frac{4}{13\pi} \cos 13\omega - \frac{4}{15\pi} \cos 15\omega. \end{aligned}$$

Para causalizar el sistema se debe desplazar la respuesta impulsiva $M = 15$ muestras hacia la derecha, resultando en la respuesta en frecuencia del sistema causal

$$\begin{aligned} H_C(e^{j\omega}) = & e^{-j15\omega} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \cos \omega - \frac{4}{3\pi} \cos 3\omega + \frac{4}{5\pi} \cos 5\omega - \frac{4}{7\pi} \cos 7\omega + \right. \\ & \left. \frac{4}{9\pi} \cos 9\omega - \frac{4}{11\pi} \cos 11\omega + \frac{4}{13\pi} \cos 13\omega - \frac{4}{15\pi} \cos 15\omega \right). \end{aligned}$$

El módulo de la respuesta en frecuencia se representa en Fig. 3.A.6(b), donde también se indican los valores de los sobreímpetus en la banda de paso y en la banda de rechazo. El máximo de la respuesta en frecuencia de la banda de paso alcanza el valor $H_C(e^{j\omega})_{\max,P} = 1,0901$ (0,75 dB) en $\omega_{\max,P} = 0,4375\pi$, mientras que el máximo de la respuesta en frecuencia en la banda de rechazo toma el valor $H_C(e^{j\omega})_{\max,R} = 0,0901$ (-20,9 dB) y se alcanza en $\omega_{\max,R} = 0,5625\pi$. Nuevamente, el valor de los desvíos en la banda de paso y en la banda de rechazo son iguales, y se producen aproximadamente en $\omega_c \pm 2\pi/(2M+1) = \omega_c \pm 0,064516\pi$ (el lugar exacto donde ocurren es en $\omega_c \pm 0,0625\pi = \omega_c \pm \pi/16$). \square

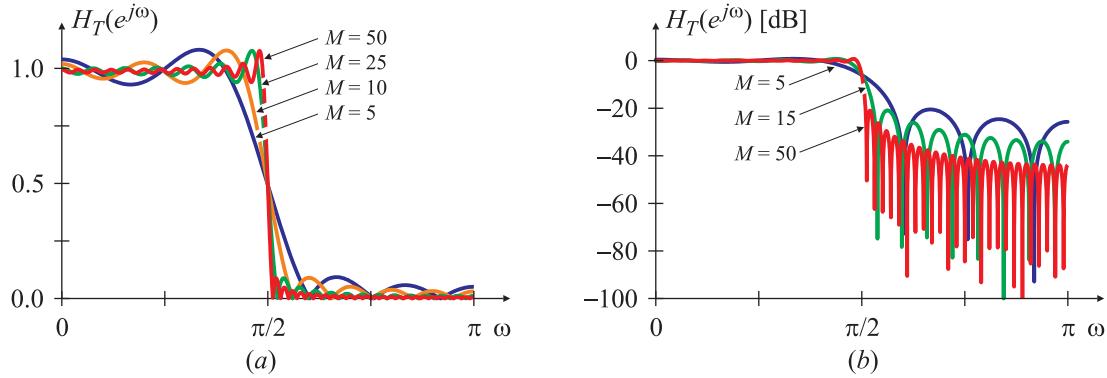


Fig. 3.A.7. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado con la ventana rectangular en escala lineal (a) y en dB (b) para distintos valores de M .

La Fig. 3.A.6 muestra que los valores de los sobrepicos en la bandas de paso y de rechazo para los FIR de 15 y 31 muestras de longitud ($M = 7$ o $M = 15$) son iguales. En la Fig. 3.A.7(a) se observa la respuesta en frecuencia para filtros de diferente longitud: el valor del máximo sobrepico es el mismo tanto para la banda de paso como para la banda de rechazo. Estos valores se resumen en la Tabla 3.A.2 donde se indica el valor del máximo sobrepico en la banda de paso $|H(e^{j\omega})|_{\max,P}$, la frecuencia exacta $\omega_{\max,P}$, y la estimación de la frecuencia $\hat{\omega}_{\max,P}$ donde aparece el sobrepico, dada por

$$\hat{\omega}_{\max,P} = \omega_c - \frac{2\pi}{2M + 1},$$

y el error relativo porcentual entre ellas,

$$\Delta\omega \% = 100 \frac{\hat{\omega}_{\max,P} - \omega_{\max,P}}{\omega_{\max,P}}.$$

La tabla permite apreciar que efectivamente el valor del sobrepico es independiente de la longitud de la respuesta impulsiva, y que tiende a un valor constante cercano al 9 %. Por otra parte, la estimación de la frecuencia donde ocurre el sobrepico mejora a medida que

Tabla 3.A.2. Magnitud y ubicación de los sobrepicos en la banda de paso de filtros truncados con una ventana rectangular de diferente longitud.

M	$\omega_{\max,P}$	$\hat{\omega}_{\max,P}$	$\Delta\omega \%$	$ H(e^{j\omega}) _{\max,P}$
5	$0,3334\pi$	$0,3182\pi$	-4,5571	1,0942
10	$0,4000\pi$	$0,4048\pi$	1,1843	1,0912
25	$0,4615\pi$	$0,4608\pi$	-0,1654	1,0897
50	$0,4800\pi$	$0,4802\pi$	0,0453	1,0896
75	$0,4868\pi$	$0,4868\pi$	-0,0126	1,0895
100	$0,4900\pi$	$0,4900\pi$	0,0121	1,0895
150	$0,4933\pi$	$0,4934\pi$	0,0141	1,0895

aumenta M , y el error de estima que se alcanza es despreciable para la mayoría de las aplicaciones.

Las respuestas en frecuencia graficadas en dB se muestran en la Fig. 3.A.7(b) para $M = 5$ y para $M = 50$. Si bien el valor del sobrepico en la banda de paso no afecta demasiado el desempeño del filtro, el valor del sobrepico en la banda de rechazo limita la atenuación máxima que es posible obtener en esta banda, que tiene un valor mínimo de -20 dB. El aumento de la cantidad de términos $2M + 1$ de la respuesta impulsiva hace que el filtro corte de manera más abrupta, disminuyendo el ancho de la zona de transición, pero no aumenta significativamente la atenuación que se puede alcanzar en la banda de rechazo.

3.A.2. Reducción de las ondulaciones aplicando ventanas

En muchas aplicaciones se necesita que la respuesta del filtro truncado “se parezca más” a la del filtro ideal. En la Sección 3.A.1.2 se muestra que la principal diferencia entre la respuesta en frecuencia del filtro ideal y la del filtro truncado se debe a que ésta resulta de convolucionar (periódicamente) la primera con la respuesta en frecuencia de la ventana de truncación, como se representa en la Fig. 3.A.3. Esto sugiere que una manera de hacer que ambas respuestas sean “más parecidas” es cambiar la ventana de truncación por alguna otra cuya respuesta en frecuencia sea más conveniente.

Para que la respuesta en frecuencia del filtro truncado fuese idéntica a la respuesta en frecuencia del filtro ideal, la respuesta en frecuencia de la ventana de truncación debería ser un impulso de área 2π que se repite periódicamente cada 2π . En efecto, si

$$W(e^{j\omega}) = \sum_r 2\pi\delta(\omega + 2\pi r) \quad (3.A.9)$$

es claro que la respuesta en frecuencia del filtro truncado $H_T(e^{j\omega})$ es

$$\begin{aligned} H_T(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_i(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_i(e^{j\theta}) \sum_r 2\pi\delta(\omega - \theta + 2\pi r) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_i(e^{j\theta}) 2\pi\delta(\omega - \theta) d\theta = H_i(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

es decir, que coincide exactamente con la respuesta en frecuencia del filtro ideal $H_i(e^{j\omega})$, como se muestra en la Fig. 3.A.8. Pero este resultado no es práctico, porque si $W(e^{j\omega})$ está dada por (3.A.9), la Tabla 3.3 muestra que la ventana temporal de truncación es

$$w[n] = 1 \quad \text{para todo } n,$$

que tiene largo infinito! En otras palabras, la respuesta impulsiva del filtro truncado debería tener la misma longitud que la respuesta impulsiva del filtro ideal: infinita (la ventana de truncación no trunca nada!).

Este análisis indica que deben esperarse algunas diferencias entre la respuesta en frecuencia del filtro ideal, y la respuesta en frecuencia del filtro truncado. Frecuentemente, lo que más molesta es la ondulación de la respuesta en frecuencia del filtro truncado, y se prefiere minimizar esta variación (sobre todo en la banda de rechazo) a cambio de tener una transición más suave entre la banda de paso y la banda de rechazo.

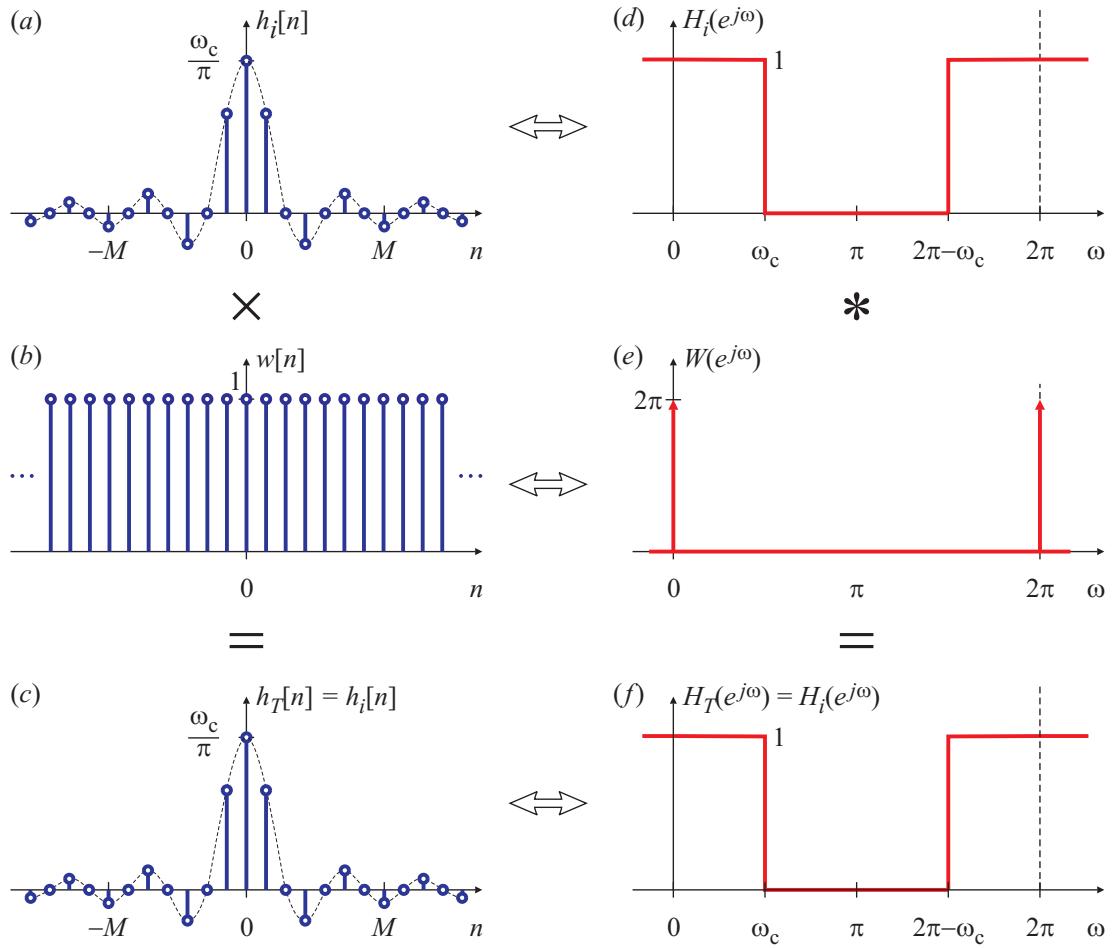


Fig. 3.A.8. Para que la respuesta en frecuencia $H_T(e^{j\omega})$ del filtro truncado (f) coincida con la del filtro ideal $H_i(e^{j\omega})$ (d), la ventana de truncación tiene que tener una respuesta en frecuencia impulsiva (e). Esto significa que la ventana $w[n]$ es constante e igual a 1 para todo n (b), y por lo tanto la respuesta impulsiva $h_T[n]$ del filtro truncado (c) es igual a la respuesta impulsiva $h_i[n]$ del filtro ideal (a).

El análisis de la Sección 3.A.1.2 muestra que la causa de las ondulaciones son los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular. Por lo tanto, una forma de atenuar dichas ondulaciones es utilizando una ventana que no tenga lóbulos laterales, o si los tiene, que sean de amplitud mucho menor.

La propiedad de derivación frecuencial de la Sección 3.11.7 indica que cuanto más suave sea una respuesta en frecuencia (es decir, cuanto mayor sea el número de derivadas continuas que tiene), tanto más rápidamente decrece su antitransformada a medida que crece n : si una respuesta en frecuencia se tiene que derivar α veces antes que aparezca una respuesta en frecuencia discontinua, la sucesión temporal decrece en función de $1/n^\alpha$. Por lo tanto, una forma de obtener una respuesta en frecuencia con lóbulos laterales pequeños es utilizando una ventana de truncación cuya forma temporal decrezca suavemente a cero, y no de manera abrupta como la de la ventana rectangular.

Todas las ventanas temporales de largo $N = 2M + 1$ tienen características similares:

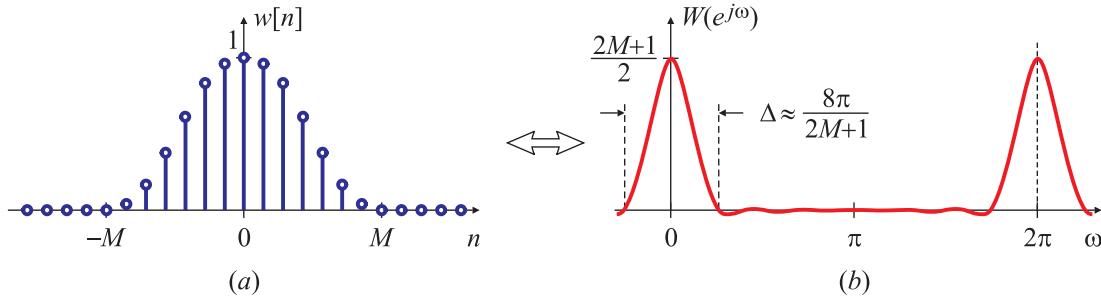


Fig. 3.A.9. Ventana de von Hann: respuesta temporal (a) y frecuencial (b).

- son simétricas en función de \$n\$;
- tienden suavemente a cero a medida que \$n \rightarrow \pm M\$.

La forma en que tienden a cero es lo que diferencia el comportamiento de las distintas ventanas, y se traduce en respuestas en frecuencias distintas.

Se han propuesto una gran variedad de ventanas que tienen estas características, como se estudiarán más adelante, pero para fijar las ideas se representarán con una ventana específica, la ventana de von Hann, que se define como¹

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{2M+1}n\right), & |n| \leq M, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (3.A.10)$$

Esta es una ventana de largo \$N = 2M + 1\$, igual que la ventana rectangular, como se muestra en la Fig. 3.A.9(a). Su respuesta en frecuencia es

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M w[n]e^{-j\omega n} = 1 + \sum_{r=1}^M \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{2M+1}n\right) \right] \cos(\omega n),$$

que se representa esquemáticamente en la Fig. 3.A.9(b). Los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia de esta ventana son mucho menores que los de la ventana rectangular, y por lo tanto es de esperar que la respuesta en frecuencia del filtro truncado con esta ventana tenga menos ondulaciones tanto en la banda de paso como en la banda de rechazo.

3.A.2.1. Respuesta en frecuencia de la ventana de von Hann

Otra manera de calcular la respuesta en frecuencia de la ventana de von Hann es escribir

$$w[n] = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{2M+1}n\right) \right] w_R[n], \quad -\infty < n < \infty,$$

¹En algunos textos, la ventana de von Hann se define como

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{2M}n\right), & |n| \leq M, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De esta forma, \$h[n] = 0\$ para \$n = \pm M\$, y por lo tanto la longitud efectiva de la ventana es \$2M - 1\$. De todos modos esta es una diferencia mínima, y no altera significativamente los resultados que se presentan aquí.

donde $w_R[n]$ es la ventana rectangular dada por (3.A.2). De esta forma,

$$w[n] = \frac{1}{2}w_R[n] + \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{2M+1}n}w_R[n] + \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{2M+1}n}w_R[n],$$

donde se aplicó la identidad trigonométrica $\cos \theta = e^{j\theta}/2 + e^{-j\theta}/2$. Aplicando la propiedad de desplazamiento frecuencial o propiedad de modulación (3.182), la respuesta en frecuencia de la ventana de von Hann puede escribirse en función de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular como

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}W_R(e^{j\omega}) + \frac{1}{4}W_R\left(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{2M+1})}\right) + \frac{1}{4}W_R\left(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{2M+1})}\right) \quad (3.A.11)$$

donde $W_R(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular, dada por (3.A.5). Despues de algunos pasos algebraicos se encuentra que la respuesta en frecuencia de la ventana de von Hann es

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \left[\frac{2(\cos \frac{\pi}{N} - 1)(\cos \frac{\pi}{N} + \cos^2 \frac{\omega}{2})}{\cos \frac{2\pi}{N} - \cos \omega} \right] W_R(e^{j\omega}) \\ &= \left[\frac{2(\cos \frac{\pi}{N} - 1)(\cos \frac{\pi}{N} + \cos^2 \frac{\omega}{2})}{\cos \frac{2\pi}{N} - \cos \omega} \right] \frac{\sin(\frac{2M+1}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})} \end{aligned}$$

donde $N = 2M+1$. Lo interesante de esta expresión es que el numerador del término entre corchetes no se anula, por lo tanto los ceros de la respuesta en frecuencia de la ventana de von Hann *parecen* ser los mismos que los de la ventana rectangular. Sin embargo, como el denominador del término entre corchetes se anula cuando $\omega = \pm 2\pi/N \pm 2\pi = 2\pi \pm 2\pi/(2M+1)$, este cero del denominador cancela el primer cero a la derecha e izquierda de $\omega = 0$ y de $\omega = 2\pi$ en el numerador. En definitiva, esta ventana tiene dos ceros menos que la ventana rectangular en el intervalo $[0, 2\pi]$, es decir, tiene $2M - 2$ ceros en este intervalo.

Por otra parte, en $\omega = 0$ el valor de la respuesta en frecuencia es

$$W(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \sum_{n=-M}^M \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{2M+1}n\right) = \frac{2M+1}{2},$$

y en la singularidad donde se anula del denominador del término entre corchetes el valor de la respuesta en frecuencia es

$$W(e^{j\omega})|_{\omega=\pm\frac{2\pi}{2M+1}} = \frac{2M+1}{4}.$$

Sintetizando, la respuesta en frecuencia de la ventana de von Hann tiene un lóbulo principal

$$\Delta = \frac{8\pi}{2M+1} \quad (3.A.12)$$

que es más ancho (el doble) que el de la ventana rectangular debido a la cancelación adicional del cero del numerador, y un menor valor (la mitad) de su respuesta en frecuencia en $\omega = 0$. En la Fig. 3.A.10 se comparan las respuestas en frecuencia de ambas ventanas.

Para calcular la respuesta en frecuencia del filtro truncado por esta ventana es conveniente conocer el área que ocupan cada uno de los lóbulos laterales. La comparación de la

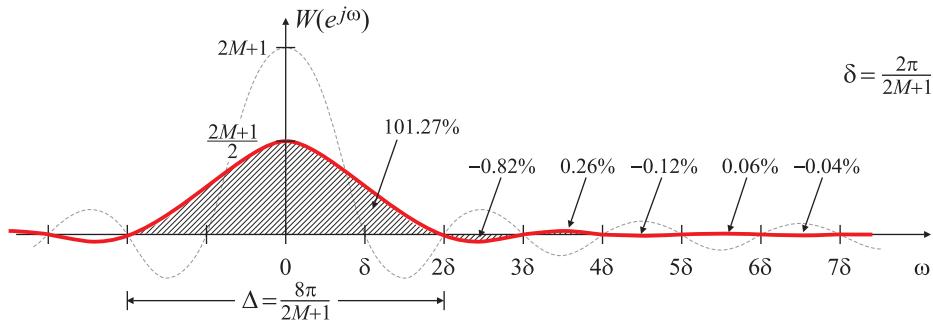


Fig. 3.A.10. Área de los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia de la ventana de von Hann. La respuesta en frecuencia de la ventana rectangular se indica con línea de puntos.

Tabla 3.A.3. Variación del área de los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia de la ventana de von Hann en función de M .

M	número de lóbulo lateral						
	1	2	3	4	5	6	7
10	101,271	-0,8217	0,2645	-0,1203	0,0657	-0,0408	0,0281
15	101,270	-0,8211	0,2645	-0,1191	0,0640	-0,0385	0,0252
20	101,270	-0,8210	0,2644	-0,1189	0,0637	-0,0382	0,0248
25	101,270	-0,8210	0,2643	-0,1188	0,0636	-0,0382	0,0247
30	101,270	-0,8210	0,2643	-0,1188	0,0636	-0,0381	0,0246
35	101,270	-0,8210	0,2643	-0,1188	0,0636	-0,0381	0,0246
40	101,270	-0,8210	0,2643	-0,1188	0,0636	-0,0381	0,0246
45	101,270	-0,8210	0,2643	-0,1188	0,0636	-0,0381	0,0246
50	101,270	-0,8210	0,2643	-0,1188	0,0636	-0,0381	0,0246

Fig. 3.A.10 muestra que en la ventana de von Hann los lóbulos laterales tienen mucha menor amplitud y área que los de la ventana rectangular. Sin embargo, el área total de la ventana sigue siendo 2π , de acuerdo con la propiedad de área (3.172) de la TFTD, y observando que $w[0] = 1$. Las áreas de los 7 primeros lóbulos referidas al área total de la ventana se listan en la Tabla 3.A.3 para distintos valores de M . Se observa que las áreas convergen rápidamente a los valores indicados en la Fig. 3.A.10, y que efectivamente son mucho menores que las áreas de los lóbulos de la ventana rectangular, indicados en la Tabla 3.A.1.

3.A.2.2. Respuesta en frecuencia del filtro truncado con la ventana de Hann

Nuevamente, el teorema de ventaneo o de convolución frecuencial sirve para analizar el comportamiento del filtro cuando su respuesta impulsiva se trunca con la ventana de Hann. El análisis se resume en la Fig. 3.A.11. La respuesta impulsiva $h_i[n]$ infinitamente larga del filtro ideal [Fig. 3.A.11(a)] se trunca (es decir, se multiplica muestra a muestra en tiempo) con la ventana de von Hann, cuya respuesta impulsiva se esquema-

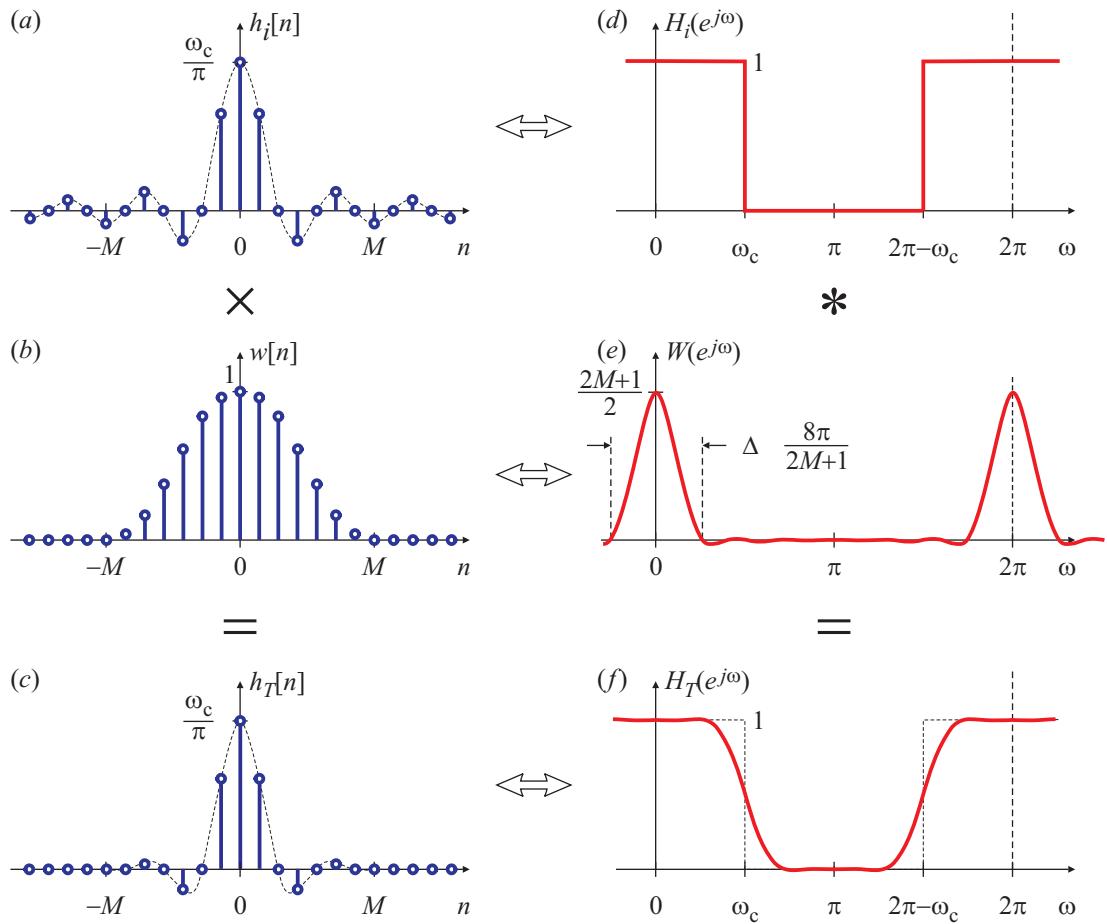


Fig. 3.A.11. Cálculo de la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada con ventana de von Hann. Respuesta impulsiva $h_i[n]$ (a) y respuesta en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ (d) del filtro ideal; respuesta impulsiva $w[n]$ (b) y respuesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ (e) de la ventana de von Hann; respuesta impulsiva $h_T[n]$ (c) y respuesta en frecuencia $H_T(e^{j\omega})$ (f) del filtro truncado.

tiza en la Fig. 3.A.11(b), resultando en la respuesta truncada $h_T[n]$ que se grafica en la Fig. 3.A.11(c). Como la respuesta impulsiva de la ventana tiende suavemente a cero, no se observan discontinuidades en la respuesta impulsiva del filtro truncado. En este punto, puede ser ilustrativo comparar la respuesta impulsiva del filtro truncado con la ventana de von Hann con la truncada con la ventana rectangular, representada en la Fig. 3.A.3(c).

El teorema de ventaneo o de convolución frecuencial establece que la TFTD del producto de dos sucesiones en el dominio tiempo es igual a la convolución periódica de sus transformadas en el dominio frecuencia. Por lo tanto, la respuesta en frecuencia del filtro truncado con la ventana de von Hann resulta de convolucionar periódicamente la respuesta en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ del filtro ideal, representada en la Fig. 3.A.11(d), con la respuesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ de la ventana, que se muestra en la Fig. 3.A.11(e). Como ésta tiene ondulaciones de menor amplitud que la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular, la respuesta en frecuencia del filtro truncado $H_T(e^{j\omega})$ que se grafica en la Fig. 3.A.11(f) también tiene ondulaciones de menor amplitud. Además, como el lóbulo principal es más

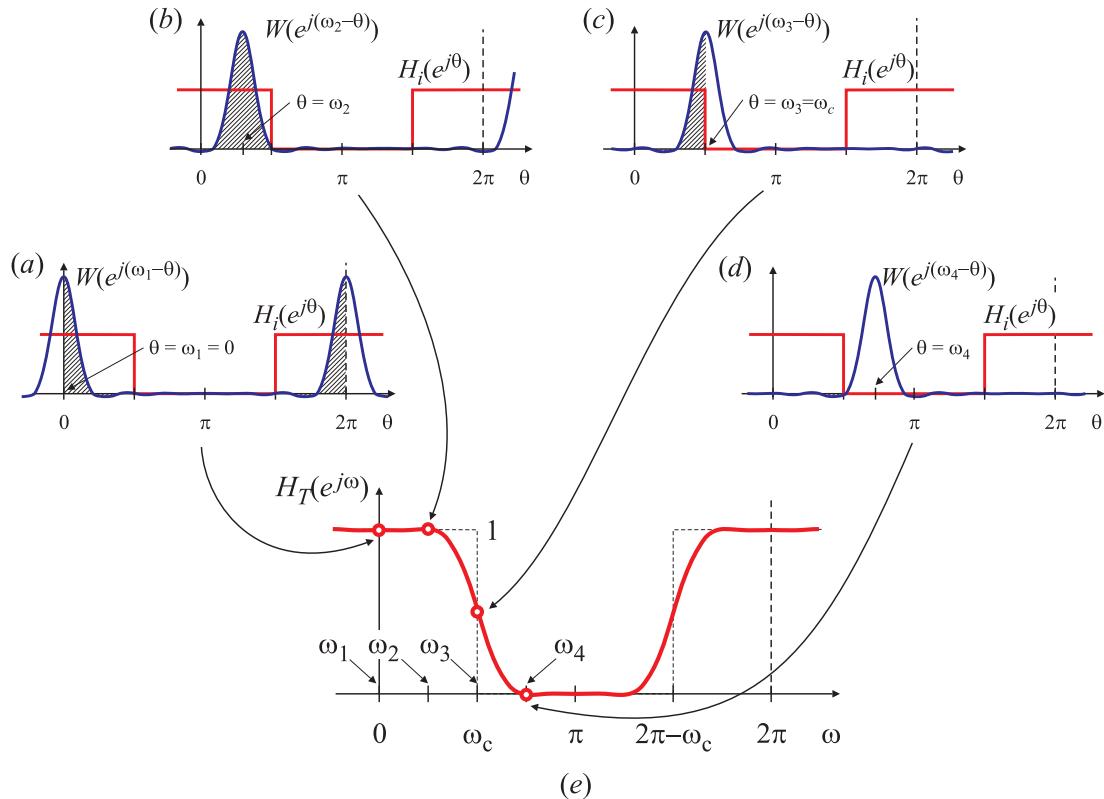


Fig. 3.A.12. Cálculo gráfico de la convolución periódica para el filtro truncado con la ventana de von Hann.

ancho que el de una ventana rectangular del mismo largo, la distancia entre el máximo (en la banda de paso) y el mínimo (en la banda de rechazo) también es mayor. Por lo tanto la zona de transición de un filtro diseñado con una ventana de von Hann será mayor que la de un filtro diseñado con una ventana rectangular de la misma longitud.

La ubicación de los extremos relativos puede estimarse en base al cálculo gráfico de la convolución periódica, como se estudió en el caso de la ventana rectangular. Este análisis para el filtro diseñado con la ventana de von Hann se representa en la Fig. 3.A.12.

En la Fig. 3.A.12(a) se muestra el cálculo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado con la ventana de von Hann para $\omega = 0$. Como $H_i(e^{j\omega}) = 0$ entre ω_c y $2\pi - \omega_c$, en el cálculo del área sólo intervienen las áreas sombreadas en la figura; las áreas que no se consideran son muy pequeñas, y por lo tanto el área total es casi igual al área total de la ventana de von Hann, que es 2π . Por lo tanto, el valor de la respuesta en frecuencia del filtro truncado en $\omega = 0$ es

$$H_T(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_1=0} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} H_i(e^{j\theta}) W(e^{j(-\theta)}) d\theta}_{\approx 2\pi} \approx 1,$$

como se muestra en la Fig. 3.A.12(e) para $\omega = \omega_1$.

La ubicación del máximo de la respuesta en frecuencia se encuentra aproximadamente en $\omega = \omega_2$, de manera que el lóbulo principal queda totalmente comprendido en el rango en

que $H_i(e^{j\omega}) = 1$, dejando afuera el primer lóbulo lateral negativo. Esta frecuencia ω_2 es aproximadamente

$$\omega_2 = \omega_c - \frac{\Delta}{2},$$

donde Δ es el ancho del lóbulo principal, que para esta ventana está dado por (3.A.12). El valor del área bajo la curva $H_i(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})$ es el indicado por las zonas sombreadas en la Fig. 3.A.12(b). Este área se puede calcular considerando que está formada por la mitad del área de la ventana, más la mitad del lóbulo principal. De acuerdo al valor indicado en la Tabla 3.A.3,

$$H_T(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_2=\omega_c-\frac{\Delta}{2}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_i(e^{j\theta})W(e^{j(-\theta)})d\theta}_{>2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1,01271) \approx 1,0064.$$

En otras palabras, la respuesta en frecuencia en $\omega_2 = \omega_c - \Delta/2$ tiene un sobrepico de aproximadamente un 0,64 %, como se indica en la Fig. 3.A.12(e) para $\omega = \omega_2$. Este valor era del 8,9 % para la ventana rectangular (casi 14 veces mayor).

Cuando se evalúa la magnitud de la respuesta en frecuencia para la frecuencia de corte $\omega = \omega_c$, como se representa en la Fig. 3.A.12(c), prácticamente la mitad del área de la ventana de von Hann queda multiplicada por 1 (en la banda de paso del filtro ideal), y el resto por cero. Por lo tanto, el área bajo la curva $H_i(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})$ para $\omega = \omega_3 = \omega_c$ es aproximadamente 1/2.

Finalmente, el mínimo de la curva de respuesta en frecuencia del filtro truncado se alcanza para el valor de $\omega = \omega_4$ que deja al lóbulo principal de la ventana fuera del cálculo del área, como se muestra en la Fig. 3.A.12(d). Este valor de frecuencia es

$$\omega_4 = \omega_c + \frac{\Delta}{2},$$

donde Δ es el ancho del lóbulo principal dado por (3.A.12). El área en este punto puede pensarse como la mitad del área de la ventana de von Hann, *menos* la mitad del área del lóbulo principal. Según los valores de la Tabla 3.A.3,

$$H_T(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_4=\omega_c+\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_i(e^{j\theta})W(e^{j(-\theta)})d\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1,01271) \approx -0,0064,$$

es decir que el en $\omega = \omega_4 = \omega_c - \Delta/2$ tiene un sobrepico negativo de aproximadamente el 0,64 %, tal como se indica en la Fig. 3.A.12(e).

Esta análisis gráfico muestra las siguientes diferencias entre el filtro truncado con la ventana de von Hann y el truncado con la ventana rectangular:

- Los sobrepicos positivos y negativos son mucho menores para el filtro truncado con la ventana de von Hann que para el truncado con la ventana rectangular (8,9 % vs. 0,64 %). Por lo tanto, las ondulaciones de la respuesta en frecuencia en la banda de paso y en la banda de rechazo son mucho menores para el primero que para el segundo.
- Los sobrepicos positivos y negativos están separados aproximadamente por el ancho del lóbulo principal. Para una longitud $N = 2M + 1$ dada, los sobrepicos están más separados en el filtro truncado con la ventana de von Hann que en el filtro truncado con la ventana rectangular. En otras palabras, la zona de transición del primero es mayor que la del segundo.

Tal como fue mencionado para el caso de la ventana rectangular, estos cálculos aproximados son válidos siempre que el ancho Δ del lóbulo principal de la ventana sea mucho menor que el ancho de banda de los filtros, que en el dominio temporal significa que el filtro con respuesta impulsiva truncada utiliza una cantidad adecuada de términos de la respuesta impulsiva $h_i[n]$ del filtro ideal.

EJEMPLO 3.A.2. Filtro pasabajos truncado con la ventana de von Hann

En este ejemplo se analiza el mismo filtro del Ejemplo 3.A.1 cuando la respuesta impulsiva del filtro ideal se trunca con una ventana de von Hann. La respuesta impulsiva en este caso es

$$h_T[n] = h_i[n]w[n],$$

donde $h_i[n]$ y $w[n]$ están dados por (3.164) y (3.A.10), respectivamente:

$$h_T[n] = \begin{cases} \frac{1}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{2M+1}n\right)\right], & |n| \leq M, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para $M = 7$, los valores de la respuesta impulsiva son

n	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7
$h_T[n]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\cos(2\pi/15)}{2\pi}$	0	$-\frac{3-\sqrt{5}}{24\pi}$	0	$\frac{1}{20\pi}$	0	$\frac{-1+\cos(\pi/15)}{14\pi}$
	= 0,5000	$\approx 0,3045$	0	$\approx -0,0694$	0	$\approx 0,0159$	0	$\approx -0,0005$

y el módulo de la respuesta en frecuencia se muestra en la Fig. 3.A.13(a). El valor de la amplitud de los sobrepicos es cercana al 0,6 %, y los mismos se ubican aproximadamente en $\omega \approx \omega_c \pm \Delta/2 = \omega_c \pm 4/15\pi \approx \omega_c \pm 0,266\pi$.

En la Fig. 3.A.13(b) se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia para un filtro de longitud $N = 31$ (con $M = 15$). Tal como se explicó anteriormente, se mantienen los valores de los sobrepicos, pero ahora se ubican más próximos a la frecuencia de corte, en $\omega \approx \omega_c \pm \Delta/2 = \omega_c \pm 4\pi/31 \approx \omega_c \pm 0,129\pi$. \square

La Fig. 3.A.13 muestra que efectivamente el valor del sobrepico es prácticamente independiente de M , y que en este caso es mucho menor que el sobrepico de la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada con la ventana rectangular, representado en la Fig. 3.A.6. En la Fig. 3.A.14(a) se muestran el módulo de las respuestas en frecuencia de filtros de distinta longitud, y el sobrepico es apenas perceptible. Sin embargo, son más interesantes las curvas de respuesta en frecuencia graficadas en dB que se muestran en la Fig. 3.A.14(b), porque revelan que con este filtro es posible conseguir atenuaciones mucho mayores en la banda de rechazo que las que se pueden obtener con el filtro con respuesta impulsiva truncada con la ventana rectangular de la Fig. 3.A.7(b): mientras que en este último caso no se puede conseguir una atenuación mayor que 50 dB, en el filtro con respuesta impulsiva truncada con la ventana de von Hann esta atenuación se supera ampliamente. Además, la pendiente con que decrece la ganancia en la banda de rechazo en función de la frecuencia es mucho mayor en este caso.

En la Tabla 3.A.4 se compara la ubicación estimada del sobrepico, dada por

$$\hat{\omega}_{\max, P} = \omega_c - \frac{\Delta}{2},$$

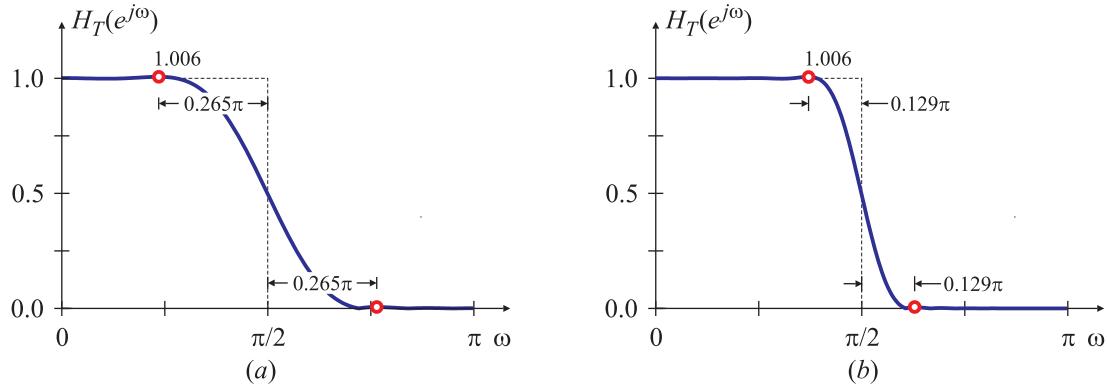


Fig. 3.A.13. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado con la ventana de von Hann para $M = 7$ (a) y para $M = 15$ (b).

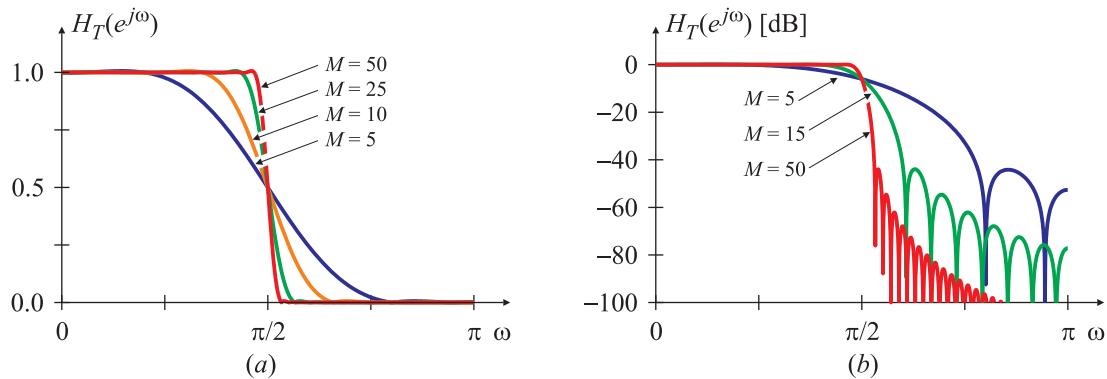


Fig. 3.A.14. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado con la ventana de von Hann en escala lineal (a) y en dB (b) para distintos valores de M .

Tabla 3.A.4. Magnitud y ubicación de los sobrepicos en la banda de paso de filtros truncados con ventana de Hann de diferente longitud.

M	$\omega_{\max,P}$	$\hat{\omega}_{\max,P}$	$\Delta\omega \%$	$ H(e^{j\omega}) _{\max,P}$
5	$0,1447\pi$	$0,1364\pi$	5,7535	1,00619
10	$0,3091\pi$	$0,3095\pi$	-0,1252	1,00636
25	$0,4216\pi$	$0,4216\pi$	$2,16 \times 10^{-3}$	1,00635
50	$0,4604\pi$	$0,4604\pi$	$-0,13 \times 10^{-6}$	1,00635
75	$0,4735\pi$	$0,4735\pi$	$24,15 \times 10^{-6}$	1,00635
100	$0,4801\pi$	$0,4801\pi$	$-7,58 \times 10^{-6}$	1,00635
150	$0,4867\pi$	$0,4867\pi$	$-1,48 \times 10^{-6}$	1,00635

donde Δ es el ancho del lóbulo principal de la ventana, dado por (3.A.12), con la posición real $\omega_{\text{máx}, P}$, y el error relativo porcentual

$$\Delta\omega \% = 100 \frac{\hat{\omega}_{\text{máx}, P} - \omega_{\text{máx}, P}}{\omega_{\text{máx}, P}}.$$

El valor del sobrepico no depende de M , y existe un pequeño sesgo en la estimación de la posición del máximo, pero este error es pequeño y decrece a medida que aumenta M . Este comportamiento es el mismo que se observó para la respuesta en frecuencia del filtro truncado con la ventana rectangular, como se muestra en la Tabla 3.A.2. Este dato es útil para elaborar una técnica de diseño de filtros utilizando ventanas.

3.A.3. Otras ventanas

Las ventanas temporales tienen aplicación no sólo para el diseño de filtros, sino también en el análisis frecuencial de señales, como se estudiará en el Capítulo 11. Por lo tanto, se han propuesto una enorme cantidad de ventanas con distintas características. Sin embargo, para el diseño de filtros FIR las más usuales son la ventana de von Hann, la ventana de Hamming, la de Blackman y la de Kaiser. La ventana rectangular, aunque es la más sencilla de todas, no suele utilizarse por las grandes ondulaciones que presenta tanto en la banda de paso como en la banda de rechazo del filtro.

Todas estas ventanas cumplen con la propiedad de que sus transformadas de Fourier están concentradas en $\omega = 0$ (y los múltiplos de 2π), tal como se analizó en la Sección 3.A.2, y tienen una expresión matemática relativamente sencilla lo que las hace fácil de calcular. Las ventanas de von Hann, Hamming, y Blackman pertenecen a una clase más general de ventanas cosenoidales, y por lo tanto sus transformadas de Fourier pueden escribirse en función de réplicas desplazadas en frecuencia de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular, como se detalló para la ventana de von Hann en la ecuación (3.A.11). Para el diseño de filtros no es necesario conocer la forma analítica de la respuesta en frecuencia de la ventana, pero conocer su aspecto general es útil para entender cómo cambia la respuesta en frecuencia del filtro truncado en base a un análisis similar al de la Sección 3.A.1.3.

En las Fig. 3.A.15 a 3.A.18 se muestra la respuesta impulsiva de cada una de estas ventanas, y el módulo de su transformada de Fourier. Para enfatizar las diferencias, las respuestas en frecuencia se grafican en decibeles (dB) normalizados al máximo valor de la respuesta en frecuencia. Las características de las ventanas relevantes para el diseño de filtros se listan en la Tabla 3.A.5.

3.A.3.1. Comparación de las distintas ventanas

La respuesta en frecuencia de la ventana rectangular tiene el lóbulo principal más angosto, y por lo tanto, para un largo $N = 2M + 1$ dado es la que produce las transiciones más abruptas en la zona próxima a la discontinuidad en $\omega = \omega_c$ del filtro ideal $H_i(e^{j\omega})$. Sin embargo, la amplitud del primer lóbulo lateral está sólo 13 dB por debajo de la amplitud del lóbulo principal resultando en oscilaciones de gran amplitud en la respuesta en frecuencia del filtro truncado $H_T(e^{j\omega})$. Para las ventanas de von Hann, Hamming y Blackman el primer lóbulo lateral tiene una amplitud mucho menor, pero el lóbulo principal es

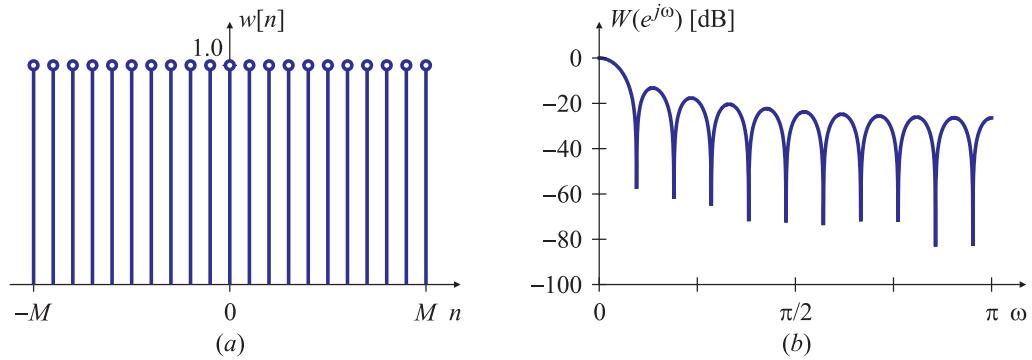


Fig. 3.A.15. Ventana rectangular en el dominio tiempo (a) y en el dominio frecuencia (b).

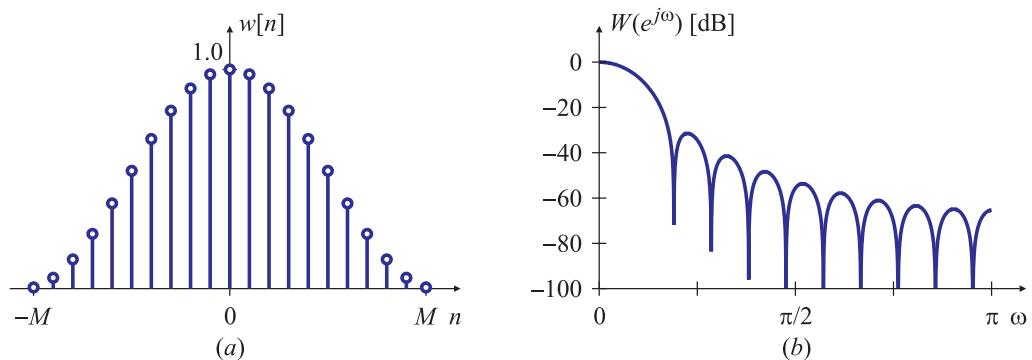


Fig. 3.A.16. Ventana de von Hann en el dominio tiempo (a) y en el dominio frecuencia (b).

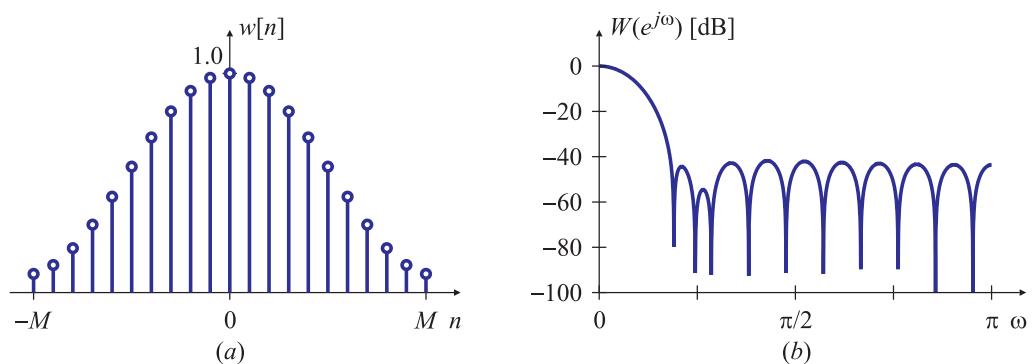


Fig. 3.A.17. Ventana de Hamming en el dominio tiempo (a) y en el dominio frecuencia (b).

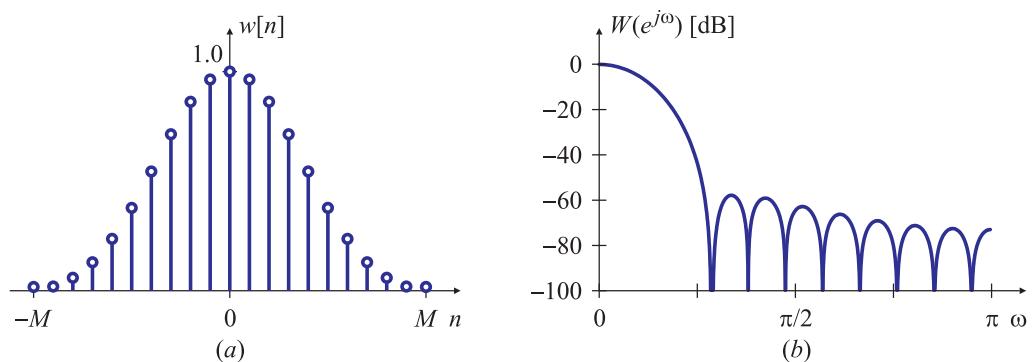


Fig. 3.A.18. Ventana de Blackman en el dominio tiempo (a) y en el dominio frecuencia (b).

Tabla 3.A.5. Comparación de las ventanas temporales típicas utilizadas para el diseño de filtros FIR de largo $N = 2M + 1$.

ventana	expresión temporal $w[n]$ para $ n \leq M$ (se anulan para $ n > M$)	ancho lóbulo principal	amplitud 1 ^{er} lóbulo lateral	error de aprox. ($20 \log_{10} \delta$)	pendiente lóbulos laterales
rectangular: $w[n] = 1$		$\frac{4\pi}{2M+1}$	-13 dB	-21	-6 dB/oct
von Hann: $w[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{2M+1} n\right)$		$\frac{8\pi}{2M+1}$	-31 dB	-44	-18 dB/oct
Hamming: $w[n] = \frac{27}{50} + \frac{23}{50} \cos\left(\frac{2\pi}{2M+1} n\right)$		$\frac{8\pi}{2M+1}$	-41 dB	-53	-6 dB/oct
Blackman: $w[n] = \frac{21}{50} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{2M+1} n\right)$ $+ \frac{2}{25} \cos\left(\frac{4\pi}{2M+1} n\right)$		$\frac{12\pi}{2M+1}$	-57 dB	-74	-18 dB/oct

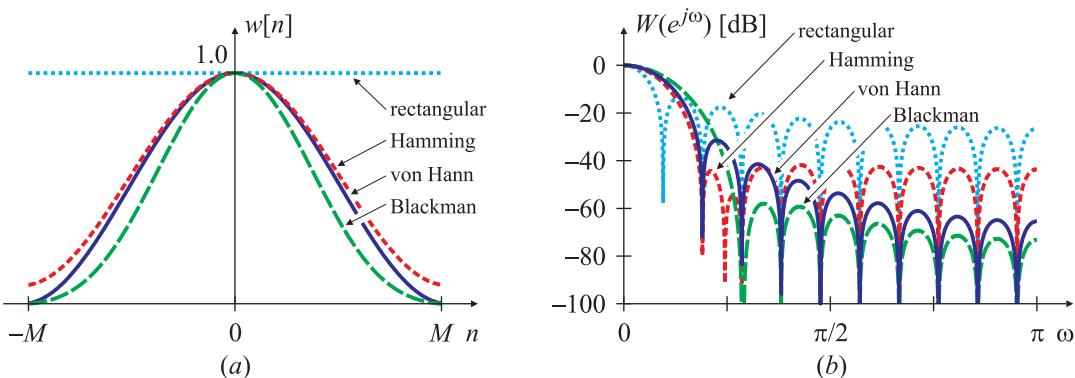


Fig. 3.A.19. Comparación de las distintas ventanas en el dominio tiempo (a) y en el dominio frecuencia (b). Las curvas del módulo de la respuesta en frecuencia en dB fueron normalizadas al valor de $W(e^{j\omega})|_{\omega=0}$.

más ancho, de modo que los filtros diseñados con estas ventanas tendrán respuestas en frecuencia con ondulaciones de menor amplitud, pero la transición en la zona vecina a la discontinuidad será menos abrupta que para el filtro diseñado con la ventana rectangular.

El valor para $n = \pm M$ en la ventana de Hamming es más grande que el de la ventana de von Hann, por lo tanto la transición a cero en el dominio temporal es más abrupta, y en consecuencia los lóbulos laterales de su respuesta en frecuencia tendrán una amplitud un poco mayor. Sin embargo, ha sido diseñada de manera tal que el primer lóbulo lateral tenga menor amplitud que el de la ventana de von Hann, lo que puede hacer que la transición de la respuesta en frecuencia del filtro sea un poco más abrupta.

La respuesta en frecuencia de la ventana de Blackman tiene los lóbulos laterales de menor amplitud, y por lo tanto la respuesta en frecuencia del filtro diseñado con esta ventana tiene variaciones muy pequeñas. Por otra parte, su lóbulo principal es el más ancho de las ventanas presentadas aquí, y por lo tanto el filtro diseñado con ella tendrá la banda de

transición más amplia para un largo $N = 2M + 1$ dado.

Para las ventanas que en el dominio temporal tienden suavemente a cero, como la de Von Hann y Blackman, los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia disminuyen más rápidamente a medida que ω tiende a π que en las ventanas en que la transición es más abrupta, como la rectangular y la de Hamming. Esta característica es útil cuando se necesitan filtros con mucha atenuación en la banda de rechazo.

En la Fig. 3.A.19 se comparan las formas temporales y las respuestas en frecuencia de cada una de estas ventanas. Para facilitar la comparación, las muestras de las ventanas fueron graficadas en función de una variable continua, y las curvas del módulo de la respuesta en frecuencia fueron normalizadas al valor de $W(e^{j\omega})|_{\omega=0}$.

3.A.4. Diseño de filtros FIR usando ventanas

El diseño de filtros prácticos, que puedan ser implementados en un procesador digital de señales, tiene en cuenta que un filtro real no puede tener una característica de respuesta en frecuencia como la de un filtro ideal, es decir que pase de ganancia unitaria en una banda de frecuencias a ganancia cero en la banda complementaria. En otras palabras, que deje pasar inalterada la señal que ocupa una cierta banda de frecuencias mientras bloquea completamente aquellas que ocupen una banda distinta.

Especificaciones realísticas que debe satisfacer un filtro práctico real tienen la forma indicada en la Fig. 3.A.20(a) para un filtro pasabajos. La banda de frecuencias donde la ganancia es unitaria más/menos una cierta tolerancia δ_p se denomina *banda de paso*, mientras que la banda de frecuencias donde la ganancia debe ser menor que una cierta tolerancia δ_r (normalmente pequeña) es la *banda de rechazo*. Las frecuencias que limitan cada una de las bandas se denominan *frecuencias esquina*. En el caso de la Fig. 3.A.20(a), las frecuencias esquina son ω_p y ω_r para la banda de paso y de rechazo. Las Fig. 3.A.20(b) a (d) muestran especificaciones típicas para filtros pasaaltos, pasabanda y eliminabandas, respectivamente.

En general, las especificaciones de ganancia en las bandas de paso y de rechazo suelen especificarse en decibeles (dB), como se muestran en la Fig. 3.A.21(a); por este motivo, los parámetros de las ventanas relativos a la magnitud de su respuesta en frecuencia se especifican en dB, como en la Tabla 3.A.5. En el diseño de filtros analógicos era habitual especificar la *atenuación*, en lugar de la ganancia, como se representa en la Fig. 3.A.21(b).

Dado un conjunto de especificaciones, como cualquiera de los que se muestran en las Fig. 3.A.20(a) a (d), el proceso de diseño de un filtro FIR implica:

- calcular la respuesta impulsiva de un filtro ideal, y
- elegir una ventana de truncación,

que sean apropiados para cumplir con las especificaciones requeridas. Para cumplir satisfactoriamente estos ítems, es conveniente recordar las principales características que resultan de truncar la respuesta impulsiva de un filtro ideal con una ventana, como se estudió en detalle en la Sección 3.A.1.2, y como se representan en la Fig. 3.A.22:

1. El valor de la ganancia del filtro truncado en la frecuencia de corte del filtro ideal es aproximadamente la mitad de la ganancia en la banda de paso;

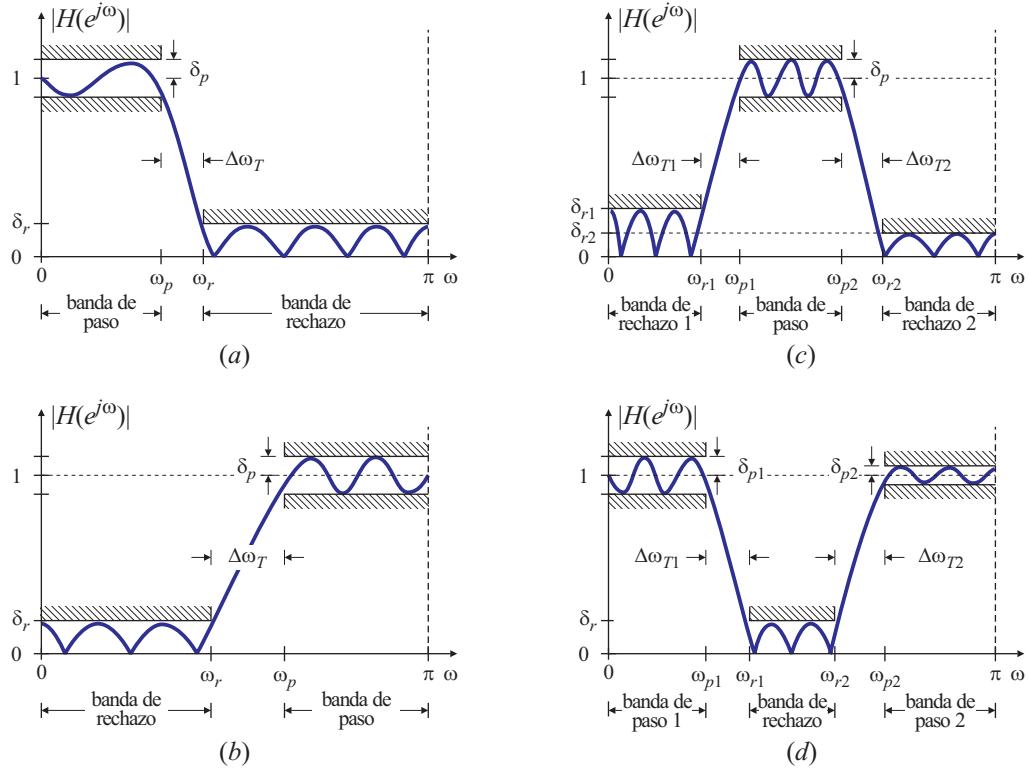


Fig. 3.A.20. Especificaciones de diseño para los distintos tipos de filtros.

2. El valor de pico del error de aproximación δ_p en la banda de paso es el mismo que el error δ_r en la banda de rechazo, es decir, $\delta_p = \delta_r = \delta$;
3. Los máximos del error de aproximación en la bandas de paso y de rechazo están localizados en frecuencias equidistantes de la frecuencia de corte del filtro ideal;
4. La distancia entre las ubicaciones de los picos del error de aproximación es aproximadamente igual al ancho del lóbulo principal de la ventana;

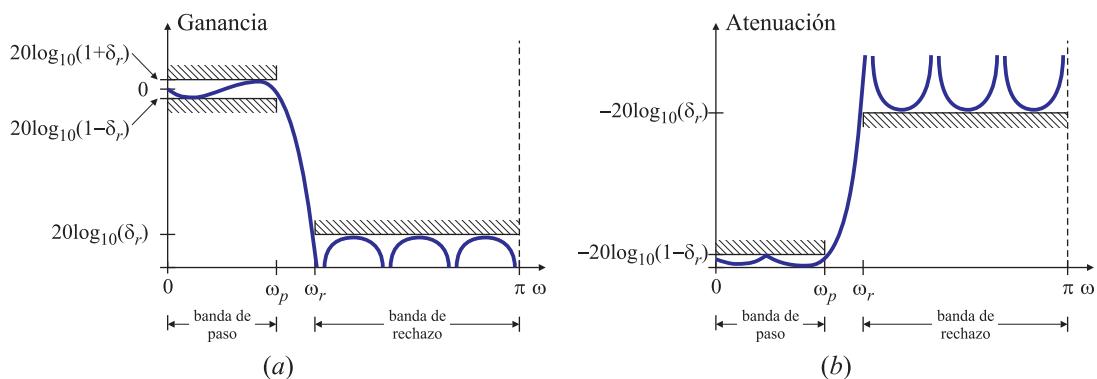


Fig. 3.A.21. Especificaciones de ganancia (a) y atenuación (b) de un filtro pasabajos.

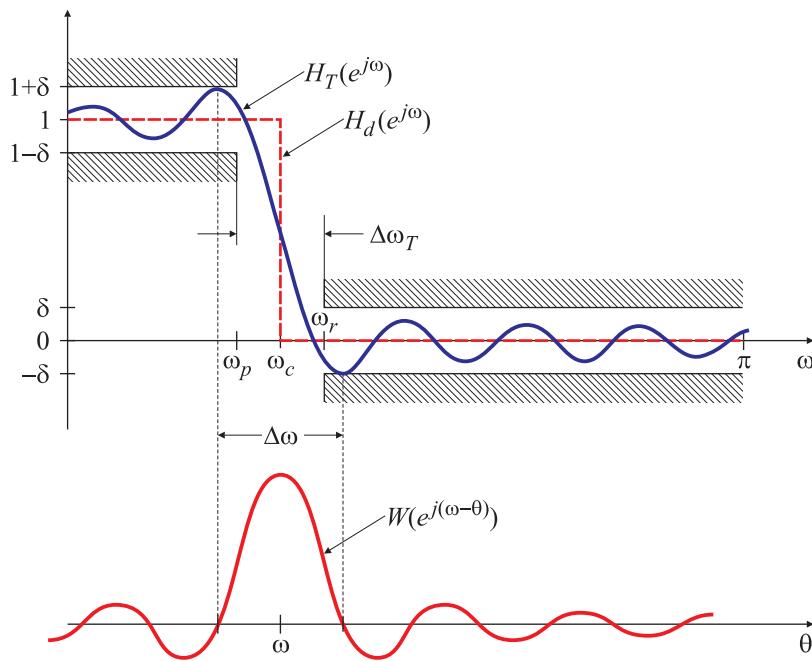


Fig. 3.A.22. Característica de la respuesta en frecuencia del filtro truncado $H_T(e^{j\omega})$, la del filtro ideal $H_d(e^{j\omega})$, y la respuesta en frecuencia de la ventana de truncación $W(e^{j\omega})$.

5. El valor de pico del error de aproximación depende de la *forma* de la ventana (es decir, del tipo: rectangular, von Hann, Hamming, Blackman, etc.), y no del largo $N = 2M + 1$ del filtro;
6. El lóbulo principal $\Delta\omega$ de la ventana es mas ancho que la zona de transición $\Delta\omega_T$;
7. El ancho $\Delta\omega$ del lóbulo principal de la ventana es inversamente proporcional al largo del filtro $N = 2M + 1$.

Estas características muestran que, para cumplir con un conjunto de especificaciones dado,

- Las frecuencias de corte del filtro ideal se ubican en medio de la zona de transición:

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_r}{2}$$

para los filtros pasabajos o pasaaltos, o

$$\omega_{c1} = \frac{\omega_{p1} + \omega_{r1}}{2}, \quad \omega_{c2} = \frac{\omega_{p2} + \omega_{r2}}{2},$$

para los filtros pasabanda y eliminabanda.

- El tipo de ventana debe elegirse teniendo en cuenta las tolerancias requeridas en la banda de paso y de rechazo de acuerdo a los valores de la Tabla 3.A.5, en especial prestando atención al valor del error de aproximación (quinta columna de la Tabla) y a la pendiente de atenuación de los lóbulos laterales. Con esta técnica de diseño la ondulación en la banda de paso y en la banda de rechazo son iguales ($\delta_p = \delta_r = \delta$), y entonces para seleccionar una ventana apropiada se debe elegir el menor entre δ_p y δ_r (usualmente, δ_r).

- Los valores del ancho de la zona de transición $\Delta\omega$ son

$$\Delta\omega_T = |\omega_p - \omega_r|$$

para los filtros pasabajas o pasaaltos, y

$$\Delta\omega_T = \min\{\Delta\omega_{T1}, \Delta\omega_{T2}\}$$

para los filtros pasabanda y eliminabanda, donde

$$\Delta\omega_{T1} = |\omega_{p1} - \omega_{r1}|, \quad \Delta\omega_{T2} = |\omega_{p2} - \omega_{r2}|.$$

- Una *estimación* del orden del filtro se obtiene igualando el ancho de la zona de transición del filtro $\Delta\omega_T$ con el ancho del lóbulo principal de la ventana $\Delta\omega$, especificado en la Tabla 3.A.5 en función de $N = 2M + 1$:

$$\Delta\omega = \Delta\omega_T,$$

y por lo tanto

$$M = \left\lceil \frac{2\pi\rho}{\Delta\omega_T} - \frac{1}{2} \right\rceil,$$

donde $\lceil \cdot \rceil$ es la función *techo* ($\lceil x \rceil$ = menor entero mayor que x) , y

$$\rho = \begin{cases} 1, & \text{para la ventana rectangular,} \\ 2, & \text{para las ventanas de von Hann o de Hamming,} \\ 3, & \text{para la ventana de Blackman.} \end{cases}$$

De acuerdo a los ítems 4 y 6 de las características enunciadas más arriba, esta elección de M ubica los sobrepicos justo en las frecuencias esquina de las banda de paso y de rechazo, lo que resulta en una longitud que puede ser ligeramente mayor que la estrictamente necesaria.

- La respuesta impulsiva $h_T[n]$ del filtro truncado se obtiene pesando la respuesta impulsiva del filtro ideal $h_i[n]$ con la ventana de truncación $w[n]$ del tipo elegido y longitud calculada:

$$h_T[n] = h_i[n] \times w[n], \quad -M \leq n \leq M.$$

Los filtros diseñados de esta manera siempre tienen longitud impar.

- Como las respuestas impulsivas de los filtros ideales y las de las ventanas son simétricas con respecto al origen, la respuesta en frecuencia del filtro truncado se puede escribir como

$$\begin{aligned} H_T(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-M}^M h_T[n]e^{-j\omega n} \\ &= h_T[0] + \sum_{n=1}^M h_T[n](e^{-j\omega n} + e^{j\omega n}) \\ &= h_T[0] + 2 \sum_{n=1}^M h_T[n] \cos(\omega n) \end{aligned}$$

que muestra que la respuesta en frecuencia del filtro truncado es *real* y simétrica con respecto a ω . La fase es 0 cuando $H_T(e^{j\omega}) > 0$, o $\pm\pi$ cuando $H_T(e^{j\omega}) < 0$.

- La respuesta impulsiva $h_C[n]$ del filtro causal se calcula retardando en M muestras la respuesta impulsiva del filtro truncado $h_T[n]$:

$$h_C[n] = h_T[n - M], \quad 0 \leq n \leq 2M.$$

De acuerdo a las propiedades de la TFTD, la respuesta en frecuencia del filtro causal es

$$H_C(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega} H_T(e^{j\omega})$$

lo que significa que el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro causal es idéntico al módulo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado:

$$|H_C(e^{j\omega})| = |H_T(e^{j\omega})|,$$

y su fase es

$$\arg\{H_C(e^{j\omega})\} = -M\omega \pm \arg\{H_T(e^{j\omega})\},$$

que es una recta de pendiente $-M\omega$, con saltos de $\pm\pi$ cuando $H_T(e^{j\omega})$ cambia de signo. Por lo tanto, el filtro causal es un sistema de fase lineal generalizada (SFLG), como se comentó después del Ejemplo 3.55.

- Evidentemente, estas reglas de diseño se basan en aproximaciones, y por lo tanto *siempre* debe verificarse que el filtro truncado o el causal cumplen con las especificaciones de diseño. En general, para especificaciones no demasiado exigentes en términos de ganancias muy pequeñas en la banda de rechazo, o bandas de transición muy angostas, el ajuste se limita a variar el orden del filtro para satisfacer los requisitos de diseño.
- El “mejor” filtro es el que satisface las especificaciones de diseño con la menor longitud $N = 2M + 1$ posible, ya que el número de operaciones por segundo que debe realizar el procesador utilizado para implementar el filtro es proporcional a N .

Los filtros diseñados con esta técnica siempre resultan en respuestas impulsivas de longitud impar, y simétricas con respecto a la muestra $n = M$: este tipo de filtros se denominan filtros FIR de fase lineal generalizada de tipo I. Además, en este apéndice sólo se trató el diseño de filtros cuyo *módulo* de la respuesta en frecuencia debe aproximarse a ciertas características de diseño. En muchas otras aplicaciones interesa que la fase, la respuesta impulsiva u otras características del filtro satisfagan ciertos requisitos de diseño. Algunos de estos diseños se estudiarán en los Capítulos 9 y 10.

Las reglas de diseño enunciadas más arriba se aplican para el diseño de los filtros de los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.A.3. Diseño de un pasabajos con atenuación moderada en la banda de rechazo

Se debe diseñar un filtro pasabajos que satisfaga las siguientes especificaciones:

Banda de paso	0 a $\pi/5$
Banda de rechazo	$2\pi/5$ a π
Ganancia en la banda de paso [dB]	$0 \pm 0,5$
Ganancia en la banda de rechazo [dB]	-40

Las frecuencias esquina son $\omega_p = \pi/5$, y $\omega_r = 2\pi/5$. La ondulación en la banda de paso es

$$20 \log_{10}(1 + \delta_p) = 0,5, \text{ de donde } \delta_p \approx 0,06.$$

Por otro lado, la ondulación en la banda de rechazo es

$$20 \log_{10}(\delta_r) = -40, \text{ de donde } \delta_r = 0,01.$$

Como la ondulación en la banda de rechazo ($\delta_r = 0,01$) es menor que la ondulación de la banda de paso ($\delta_p \approx 0,06$), aquella es la que debe tenerse en cuenta para el diseño del filtro. Por lo tanto, $\delta = 0,01$ (-40 dB). De acuerdo con la quinta columna de la Tabla 3.A.5 (error de aproximación), esta ondulación se puede obtener con una ventana de von Hann (-44 dB), una de Hamming (-53 dB) o una de Blackman (-74 dB). Como la banda de transición del filtro es

$$\Delta\omega_T = \omega_r - \omega_p = \frac{\pi}{5}$$

si se utiliza la ventana de von Hann o la de Hamming el largo del filtro se calcula como

$$\frac{8\pi}{2M+1} = \frac{\pi}{5} \text{ de donde } M = 20 \text{ o } N = 41,$$

mientras que si se utiliza la ventana del Blackman el largo del filtro es

$$\frac{12\pi}{2M+1} = \frac{\pi}{5} \text{ de donde } M = 30 \text{ o } N = 61.$$

De acuerdo a las reglas de diseño enunciadas más arriba, es conveniente elegir la ventana de von Hann o la de Hamming como ventana de truncación, ya que resultan en filtros de menor longitud, lo que demanda menor cantidad de operaciones por segundo cuando se lo implementa en un procesador de señales.

Como no se dispone de otros argumentos para decidir entre la ventana de von Hann o la de Hamming, la elección entre una y otra es arbitraria; para este ejemplo se selecciona la ventana de **Hamming**.

La respuesta impulsiva del filtro ideal está dada por la ecuación (3.164), es decir

$$h_i[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right),$$

donde

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_r}{2} = \frac{3\pi}{10}.$$

La respuesta impulsiva del filtro truncado es

$$h_T[n] = h_i[n] \times w[n], \quad -20 \leq n \leq 20,$$

donde $w[n]$ está dada por

$$w[n] = \frac{27}{50} + \frac{23}{50} \cos\left(\frac{2\pi}{2M+1}n\right),$$

de acuerdo a la Tabla 3.A.5. Finalmente, la respuesta impulsiva del sistema causal es

$$h_C[n] = h_T[n - 20], \quad 0 \leq n \leq 40.$$

El listado de los coeficientes es:

$h[0] = h[40] = 0,000000$	$h[10] = h[30] = 0,000000$
$h[1] = h[39] = -0,001248$	$h[11] = h[29] = 0,017957$
$h[2] = h[38] = -0,001906$	$h[12] = h[28] = 0,026318$
$h[3] = h[37] = -0,000837$	$h[13] = h[27] = 0,010676$
$h[4] = h[36] = 0,002165$	$h[14] = h[26] = -0,025535$
$h[5] = h[35] = 0,004965$	$h[15] = h[25] = -0,055478$
$h[6] = h[34] = 0,003875$	$h[16] = h[24] = -0,042857$
$h[7] = h[33] = -0,002662$	$h[17] = h[23] = 0,031222$
$h[8] = h[32] = -0,010548$	$h[18] = h[22] = 0,148120$
$h[9] = h[31] = -0,011407$	$h[19] = h[21] = 0,256130$
	$h[20] = 0,300000$

La respuesta impulsiva del filtro causal se grafica en la Fig. 3.A.23(a), y el módulo de la respuesta en frecuencia en la Fig. 3.A.23(b). El filtro diseñado cumple con exceso las especificaciones, y por lo tanto se puede reducir la longitud de la ventana de truncación para satisfacer los requisitos con el menor orden posible. Después de un par de pruebas se encuentra que el filtro truncado a $\pm M = \pm 15$ muestras (el largo del filtro es $N = 2M + 1 = 31$) cumple adecuadamente con las especificaciones de diseño. Los coeficientes de este nuevo filtro son

$$\begin{aligned} h[0] &= h[30] = 0,001748 & h[8] &= h[22] = 0,008567 \\ h[1] &= h[29] = 0,001351 & h[9] &= h[21] = -0,021821 \\ h[2] &= h[28] = -0,001043 & h[10] &= h[20] = -0,049868 \\ h[3] &= h[27] = -0,004818 & h[11] &= h[19] = -0,040082 \\ h[4] &= h[26] = -0,006050 & h[12] &= h[18] = 0,030084 \\ h[5] &= h[25] = 0,000000 & h[13] &= h[17] = 0,145723 \\ h[6] &= h[24] = 0,012152 & h[14] &= h[16] = 0,255093 \\ h[7] &= h[23] = 0,019553 & h[15] &= 0,300000 \end{aligned}$$

y su respuesta impulsiva se grafica en la Fig. 3.A.24(a). El módulo de la respuesta en frecuencia se muestra en la Fig. 3.A.24(b), notándose que las especificaciones de diseño se cumplen ajustadamente en la banda de rechazo, y holgadamente en la banda de paso.

Si en lugar de la ventana de Hamming se elige la ventana de **von Hann**, el cálculo de la estimación de la longitud del filtro resulta en el mismo valor $M = 40$ ($N = 41$) que para la ventana de Hamming. Los coeficientes del filtro causal son

$$\begin{aligned} h[0] &= h[40] = 0,000000 & h[10] &= h[30] = 0,000000 \\ h[1] &= h[39] = -0,000178 & h[11] &= h[29] = 0,017030 \\ h[2] &= h[38] = -0,000610 & h[12] &= h[28] = 0,025316 \\ h[3] &= h[37] = -0,000406 & h[13] &= h[27] = 0,010382 \\ h[4] &= h[36] = 0,001336 & h[14] &= h[26] = -0,025043 \\ h[5] &= h[35] = 0,003551 & h[15] &= h[25] = -0,055766 \\ h[6] &= h[34] = 0,003050 & h[16] &= h[24] = -0,042516 \\ h[7] &= h[33] = -0,002236 & h[17] &= h[23] = 0,031085 \\ h[8] &= h[32] = -0,009271 & h[18] &= h[22] = 0,147838 \\ h[9] &= h[31] = -0,010363 & h[19] &= h[21] = 0,256009 \\ & & h[20] &= 0,300000 \end{aligned}$$

y su respuesta impulsiva se grafica en la Fig. 3.A.25(a). A pesar que esta respuesta es prácticamente indistinguible de la respuesta impulsiva del filtro diseñado con ventana de Hamming que se muestra en la Fig. 3.A.23(a), la respuesta en frecuencia sí es diferente, como se aprecia al comparar la respuesta de este filtro, representada en Fig. 3.A.25(b) con la del filtro truncado con la ventana de Hamming que se muestra Fig. 3.A.23(b).

En la Fig. 3.A.25(b) se observa que las especificaciones de diseño se satisfacen en exceso. Por ello es posible disminuir el largo del filtro y seguir cumpliendo con los requisitos. Después de unos ensayos se encuentra que $M = 15$ es un valor apropiado para satisfacer los requerimientos. Los valores de la respuesta impulsiva son

$$\begin{aligned} h[0] &= h[30] = 0,000054 & h[8] &= h[22] = 0,008090 \\ h[1] &= h[29] = 0,000306 & h[9] &= h[21] = -0,021006 \\ h[2] &= h[28] = -0,000475 & h[10] &= h[20] = -0,048668 \\ h[3] &= h[27] = -0,003043 & h[11] &= h[19] = -0,039500 \\ h[4] &= h[26] = -0,004540 & h[12] &= h[18] = 0,029849 \\ h[5] &= h[25] = 0,000000 & h[13] &= h[17] = 0,145232 \\ h[6] &= h[24] = 0,010721 & h[14] &= h[16] = 0,254882 \\ h[7] &= h[23] = 0,017962 & h[15] &= 0,300000 \end{aligned}$$

que nuevamente son muy similares a los valores de la respuesta impulsiva del filtro diseñado con la ventana de Hamming, como resulta de comparar la Fig. 3.A.26(a) con la Fig. 3.A.24(a). Nuevamente, las respuestas en frecuencia son diferentes, sobre todo en la banda de transición. El módulo

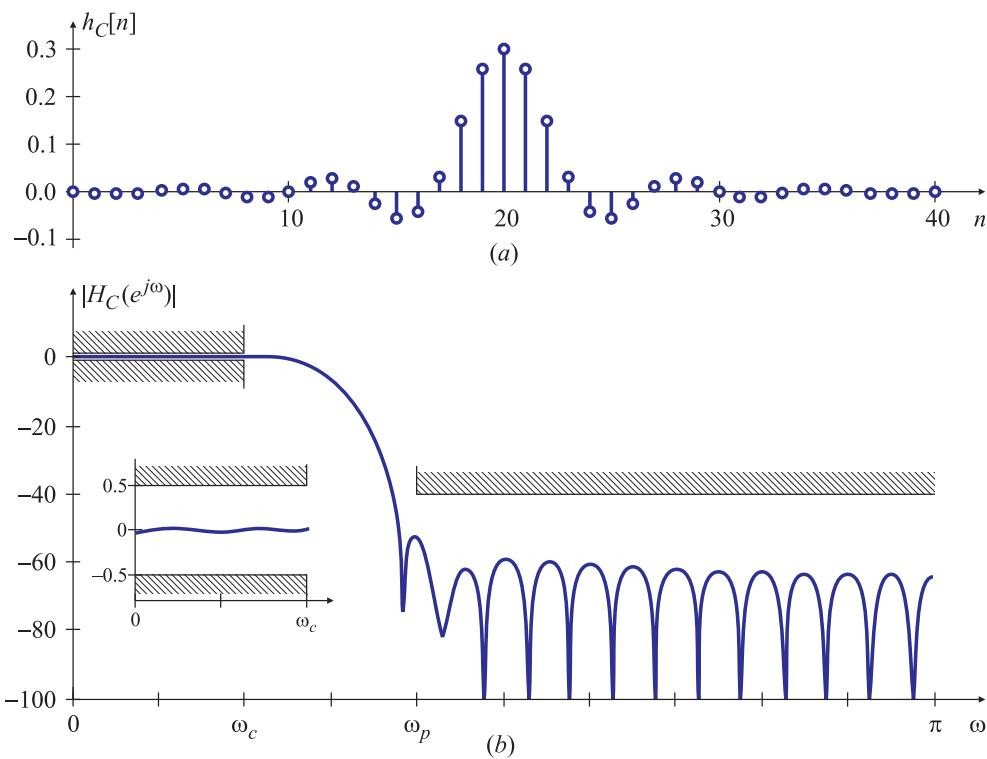


Fig. 3.A.23. Respuesta impulsiva (a) y módulo de la respuesta en frecuencia (b) del filtro pasabajos del Ejemplo 3.A.3 diseñado con ventana de Hamming de largo 41 ($M = 20$).

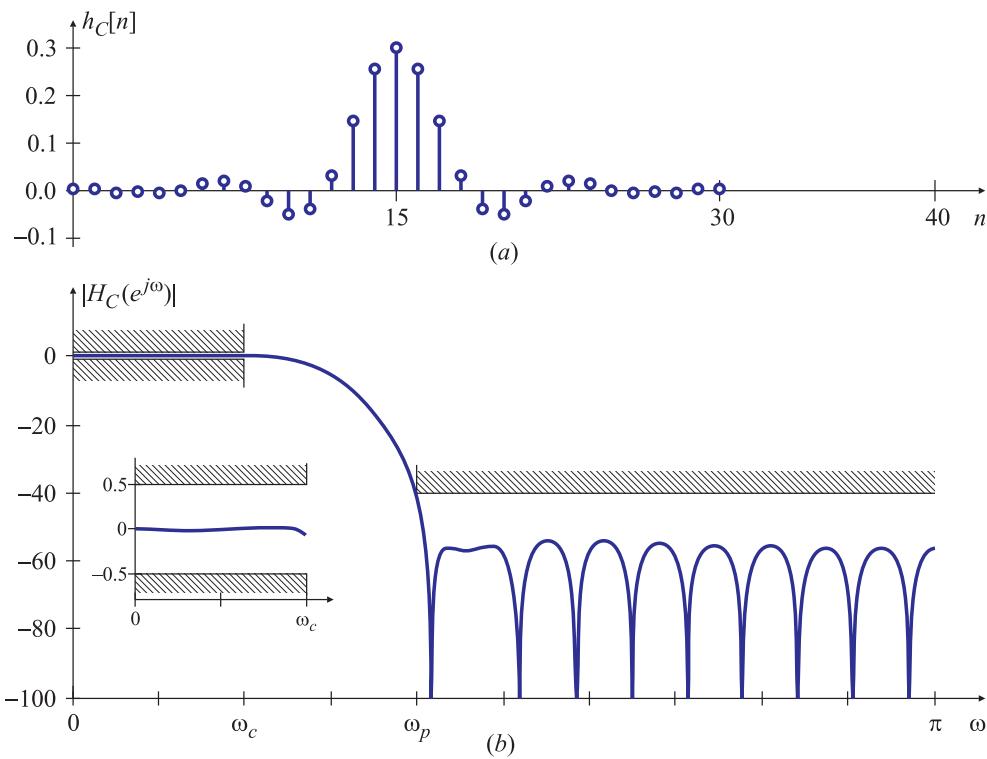


Fig. 3.A.24. Respuesta impulsiva (a) y módulo de la respuesta en frecuencia (b) del filtro pasabajos del Ejemplo 3.A.3 diseñado con ventana de Hamming de largo 31 ($M = 15$).

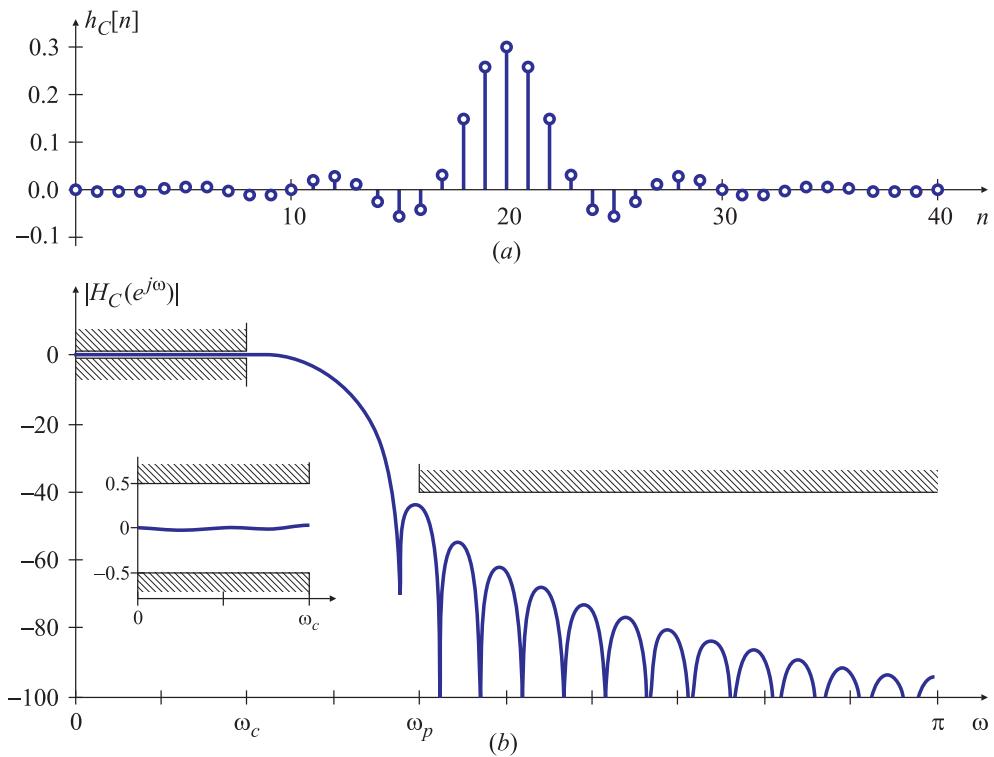


Fig. 3.A.25. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabajas del Ejemplo 3.A.3 diseñado con ventana de von Hann de largo $N = 41$ ($M = 20$).

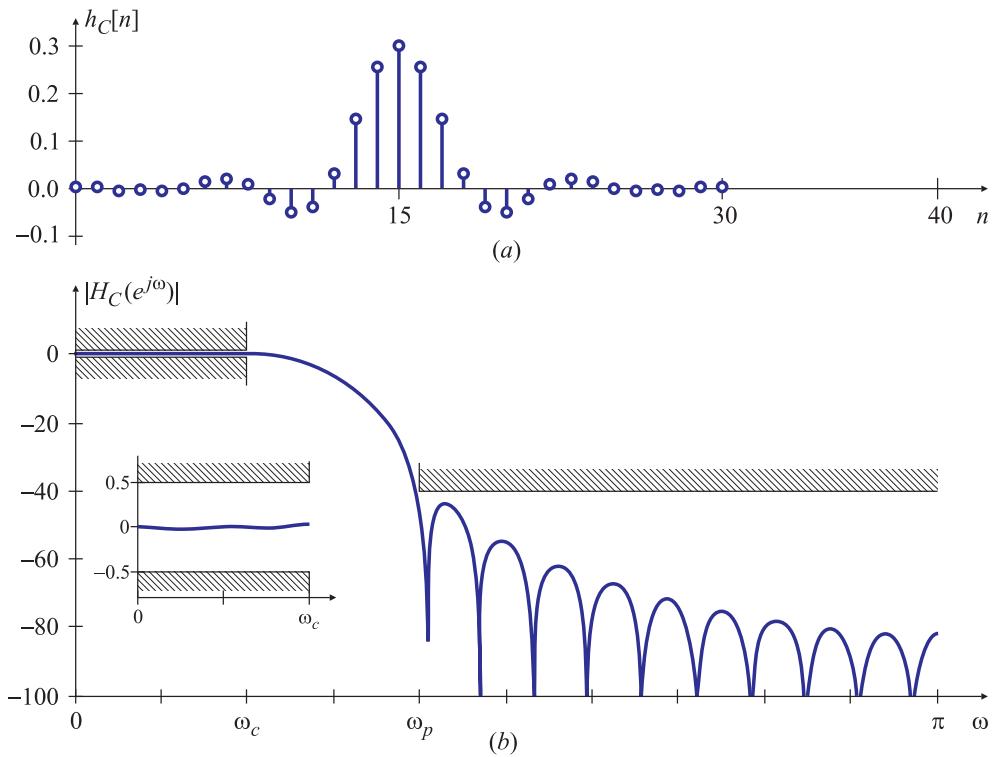


Fig. 3.A.26. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabajas del Ejemplo 3.A.3 diseñado con ventana de von Hann de largo $N = 31$ ($M = 15$).

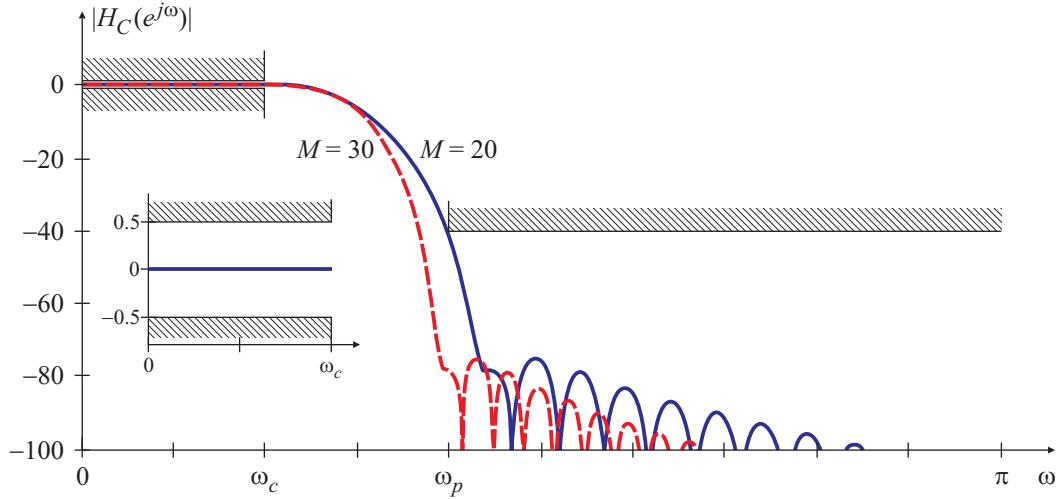


Fig. 3.A.27. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabajas del Ejemplo 3.A.3 diseñado con ventana de Blackman de largo $N = 61$ ($M = 30$) y $N = 41$ ($M = 20$).

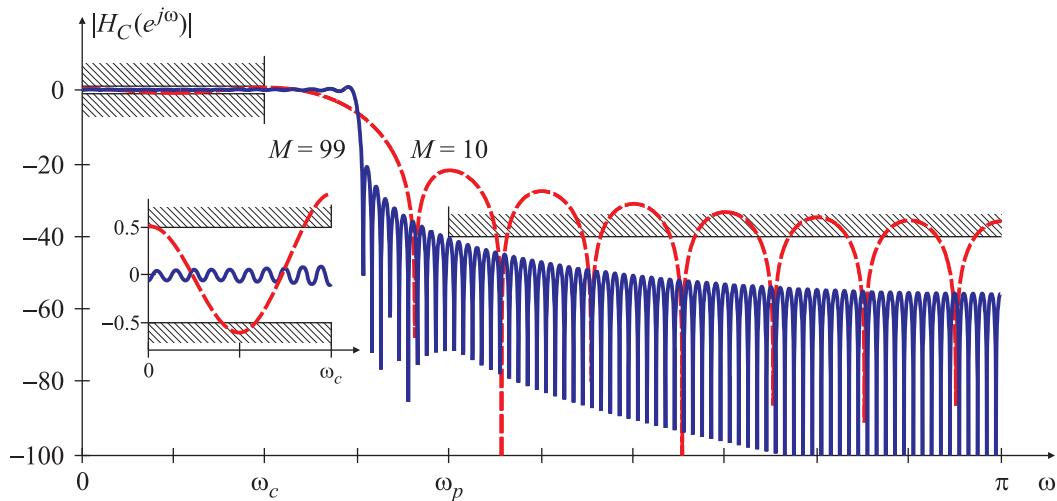


Fig. 3.A.28. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabajas del Ejemplo 3.A.3 diseñado con ventana rectangular de largo $N = 21$ ($M = 10$) y $N = 199$ ($M = 99$).

de la respuesta en frecuencia del filtro truncado con la ventana de von Hann, que se muestra en la Fig. 3.A.26(b) cumple exactamente con los requisitos de diseño en la banda de rechazo, pero satisface estos requisitos en exceso en la banda de paso.

Si el filtro se diseña utilizando la ventana de Blackmann de largo $N = 61$ ($M = 30$) se obtiene la respuesta en frecuencia que se muestra con línea de trazos en la Fig. 3.A.27. Nuevamente, los requisitos se satisfacen en exceso tanto en la banda de paso como en la banda de rechazo. Si se disminuye el largo hasta $N = 41$ ($M = 20$) las especificaciones se cumplen ajustadamente en la banda de rechazo, pero en exceso en la banda de paso, como se aprecia en la respuesta graficada con línea continua en la Fig. 3.A.27. De todos modos, en cualquiera de los casos este filtro tiene una longitud mayor que los diseñados con la ventana de Hamming o de von Hann, por lo tanto es conveniente implementar cualquiera de ellos en lugar del diseñado con la ventana de Blackman.

Finalmente, parece que no sería posible obtener un filtro que satisfaga los requisitos de diseño utilizando la ventana rectangular, porque la Tabla 3.A.5 muestra que el error de aproximación es de

sólo 21 dB. Pero como los lóbulos laterales decrecen a razón de 6 dB/octava, se puede aumentar la longitud de manera de desplazar los sobrepicos más cerca de la frecuencia de transición. Teniendo en cuenta el ancho del lóbulo principal de la ventana rectangular $\Delta\omega = 4\pi/(2M + 1)$ se encuentra que el largo estimado del filtro diseñado con la ventana rectangular es $N = 21$ ($M = 10$). La respuesta en frecuencia se muestra con línea de trazos en la Fig. 3.A.28. Es evidente que las especificaciones no se cumplen, ni en la banda de paso ni en la banda de rechazo. En este caso, al contrario de lo que sucede con las ventanas anteriores, es necesario *aumentar* el orden del filtro para intentar cumplir con los requerimientos. Luego de una serie de intentos, se encuentran que los requisitos de diseño se satisfacen con $M = 99$ (un largo de $N = 2M + 1 = 199$), como se muestra con línea continua en la Fig. 3.A.28. Evidentemente, este filtro no representa una buena opción frente a los filtros truncados con la ventana de Hamming o de von Hann, que tienen una longitud aproximadamente 6,4 veces menor. \square

Con respecto al filtro diseñado con la ventana de Hamming y el diseñado con la ventana de von Hann, ambos de longitud $N = 31$ ($M = 15$), no hay motivos que permitan decir que uno es mejor o peor que otro, ya que los dos satisfacen exactamente los requisitos de diseño. El comportamiento diferente en la banda de transición no debería importar porque precisamente en esta banda se espera que la respuesta del filtro cambie desde una ganancia unitaria a una ganancia pequeña (o viceversa) de manera más o menos controlada. En la Sección 3.A.6 se aprovechan algunas propiedades de la TFTD para diseñar filtros en que la banda de transición varíe de manera suave y continua entre la banda de paso y la banda de rechazo.

Las especificaciones requeridas para el filtro del Ejemplo 3.A.3 son relativamente fáciles de cumplir. Una atenuación de 40 dB (relación de 100 a 1) no es excesiva: dependiendo del rango de frecuencia, una diferencia de amplitud de 0.01 resulta perfectamente audible. Si la atenuación en la banda de rechazo se incrementa a 80 dB, la Tabla 3.A.5 indica que este valor excede el error de aproximación de todas las ventanas listadas. En este caso, para cumplir con las especificaciones será necesario incrementar el orden de la ventana, de manera de desplazar el error de aproximación dentro de la banda de transición. En estos casos, las ventanas cuyos lóbulos laterales decrecen rápidamente en función de la frecuencia (von Hann, Blackman) pueden resultar en filtros de menor longitud, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.A.4. Diseño de un pasabajos con gran atenuación en la banda de rechazo

Se debe diseñar un filtro pasabajos con las mismas frecuencias esquina que el filtro del Ejemplo 3.A.3, con mayor atenuación en la banda de rechazo:

Banda de paso	0 a $\pi/5$
Banda de rechazo	$2\pi/5$ a π
Ganancia en la banda de paso [dB]	$0 \pm 0,5$
Ganancia en la banda de rechazo [dB]	-80

Nuevamente, como el error de pico la banda de rechazo ($\delta_r = 10^{-80/20} = 0,0001$) es mucho menor que el de la banda de paso ($\delta_p \approx 0,06$), es el que domina la elección de la ventana. Sin embargo, al analizar la Tabla 3.A.5 se observa que el error de pico de las ventanas es mayor que el requerido. Esto indica que posiblemente deba aumentarse el orden para satisfacer los requisitos de diseño.

Como las frecuencias esquina son las mismas que las del Ejemplo 3.A.3, la estimación inicial de la longitud del filtro para cada ventana también es la misma, y como muestran la Fig. 3.A.23(b), la Fig. 3.A.25(b) y las líneas de trazos de la Fig. 3.A.27 y la Fig. 3.A.28, para las ventanas de Hamming,

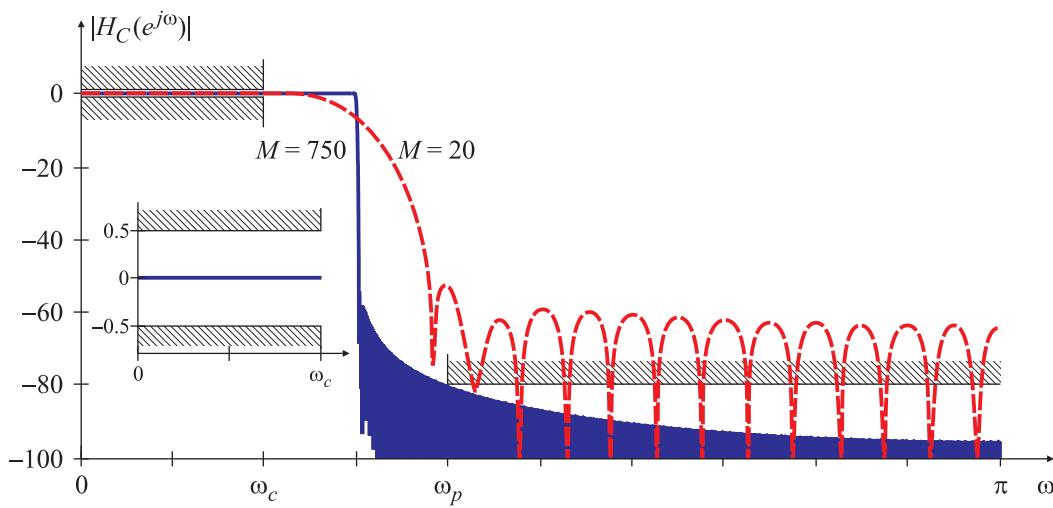


Fig. 3.A.29. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabajas del Ejemplo 3.A.4 diseñado con ventana de Hamming de largo 1501 ($M = 750$).

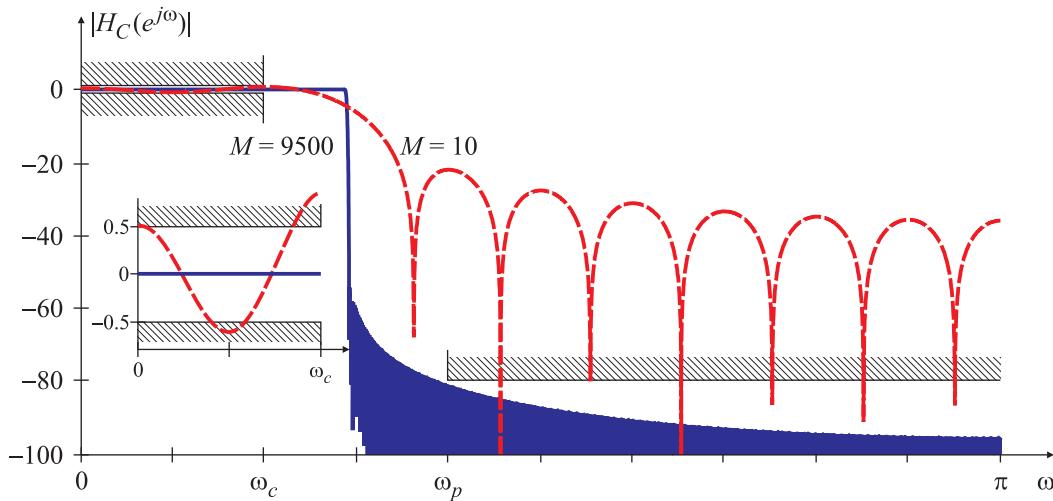


Fig. 3.A.30. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabajas del Ejemplo 3.A.4 diseñado con ventana de rectangular de largo 19001 ($M = 9500$).

von Hann, Blackman y rectangular, respectivamente, en ninguno de estos casos se satisfacen las especificaciones, como se lista en esta Tabla:

ventana	$ H_C(e^{j\omega}) $	M	$N = 2M + 1$	Atenuación
Hamming	Fig. 3.A.23(b)	20	41	59 dB
von Hann	Fig. 3.A.25(b)	20	41	44 dB
Blackman	Fig. 3.A.27	30	61	75 dB
Rectangular	Fig. 3.A.28	10	21	21 dB

Por lo tanto, la única alternativa es incrementar la longitud por prueba y error para cumplir los requisitos. Después de un poco de experimentación se encuentra que el largo necesario para cada

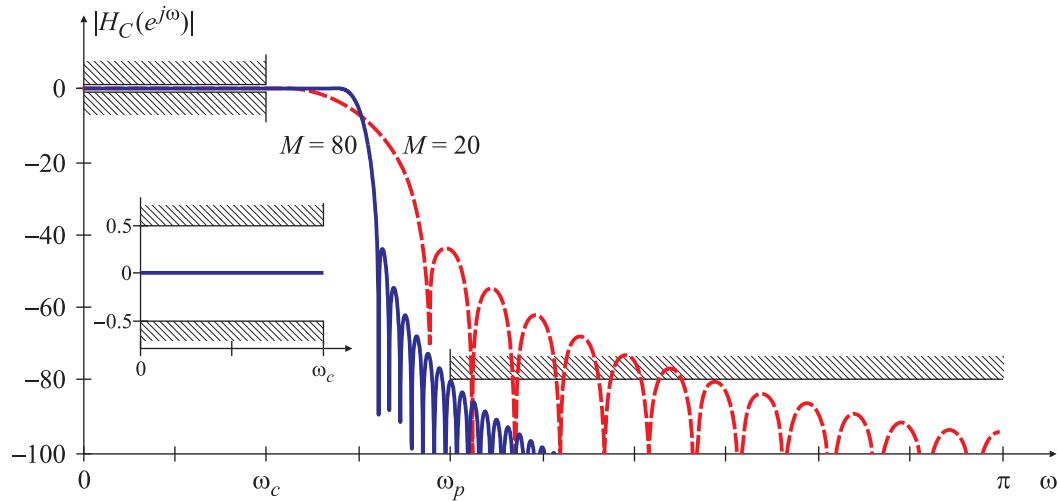


Fig. 3.A.31. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabajas del Ejemplo 3.A.4 diseñado con ventana de von Hann de largo 161 ($M = 80$).

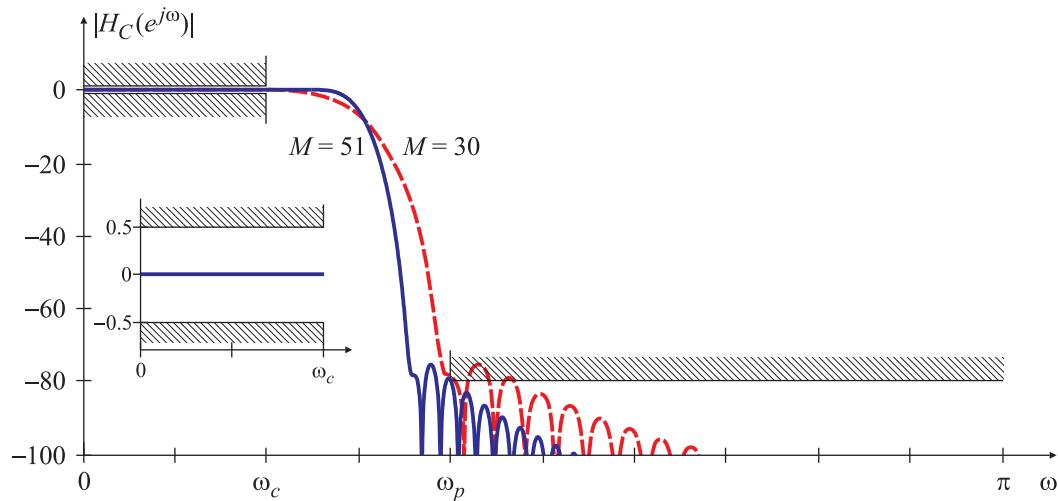


Fig. 3.A.32. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabajas del Ejemplo 3.A.4 diseñado con ventana de Blackman de largo 103 ($M = 51$).

ventana es:

ventana	M	$N = 2M + 1$	$\frac{M_{\text{real}}}{M_{\text{calculado}}}$
Hamming	750	1501	$\frac{750}{20} = 37,5$
von Hann	80	161	$\frac{80}{20} = 4$
Blackman	51	103	$\frac{51}{30} = 1,7$
Rectangular	9500	19001	$\frac{9500}{10} = 950$

Es evidente que las ventanas de Hamming y la rectangular no resultan convenientes para el diseño de estos filtros, cuyas respuestas en frecuencia se muestran en la Fig. 3.A.29 y Fig. 3.A.30, respectivamente. Como la atenuación requerida es mayor que el error de aproximación de las ventanas es necesario incrementar (mucho!) el orden para desplazar los sobrepicos desde la banda de rechazo

hacia dentro de la banda de transición. Ya que los lóbulos laterales de estas ventanas decrecen lentamente en función de la frecuencia (-6 dB/octava o -20 dB/década) es necesario aumentar mucho más el largo del filtro que para las ventanas de von Hann o de Blackman, cuyos lóbulos laterales decrecen mucho más rápidamente, a razón de -18 dB/octava o -60 dB/década. La respuesta en frecuencia de los filtros diseñados con estas ventanas se grafican en la Fig. 3.A.31 y en la Fig. 3.A.32, respectivamente. En este caso la ventana de Blackman es la opción más conveniente para truncar la respuesta impulsiva del filtro, porque es la que resulta en el filtro de menor longitud. \square

3.A.5. Diseño de filtros FIR usando la ventana de Kaiser

En los Ejemplos 3.A.3 y 3.A.4 se muestra que es relativamente sencillo diseñar filtros FIR que satisfagan los requisitos de diseño, aún cuando éstos sean bastante exigentes. Lo que resulta incómodo es que el método de diseño truncando la respuesta impulsiva del filtro ideal con ventanas temporales requiere iterar varias veces cambiando el largo de la ventana hasta conseguir un filtro que cumpla con las especificaciones pedidas utilizando la respuesta impulsiva más corta posible. La ventana de Kaiser permite minimizar o hasta eliminar estas iteraciones.

3.A.5.1. Ventana de Kaiser

En 1966 Kaiser propuso una ventana casi óptima usando funciones de Bessel de primer tipo modificada de orden cero, definida como

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{2n}{2M+1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, & |n| \leq M, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (3.A.13)$$

donde $I_0(x)$ (la función de Bessel de primer tipo modificada de orden cero) está dada por

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2.$$

Esta función se encuentra tabulada y disponible en todos los programas de cálculo matemático. Contrariamente a las otras ventanas presentadas, la ventana de Kaiser depende de dos parámetros: la semilongitud M y el parámetro de forma β . Con estas variables se puede cambiar la relación entre el ancho del lóbulo principal (con M) y la atenuación de los lóbulos laterales (con β); para un β dado, la atenuación de los lóbulos laterales es independiente de M . Para $\beta = 0$ la ventana de Kaiser es idéntica a la ventana rectangular, y para $\beta \approx 6$ es similar a la ventana de von Hann.

En la Fig. 3.A.33(a) se muestra la forma temporal de la ventana para distintos valores de β y en la Fig. 3.A.33(b) sus transformadas de Fourier para $M = 10$ graficadas en dB y normalizadas al valor máximo de la respuesta en frecuencia de la ventana. Finalmente, la Fig. 3.A.33(c) muestra la transformada de Fourier de la ventana de Kaiser para $\beta = 6$ y para $M = 5, 10$ y 20 . Estos gráficos muestran claramente que a medida que β crece mientras M permanece constante disminuye la amplitud de los lóbulos laterales, pero se incrementa el ancho del lóbulo principal. Por otra parte, si β se mantiene constante y se

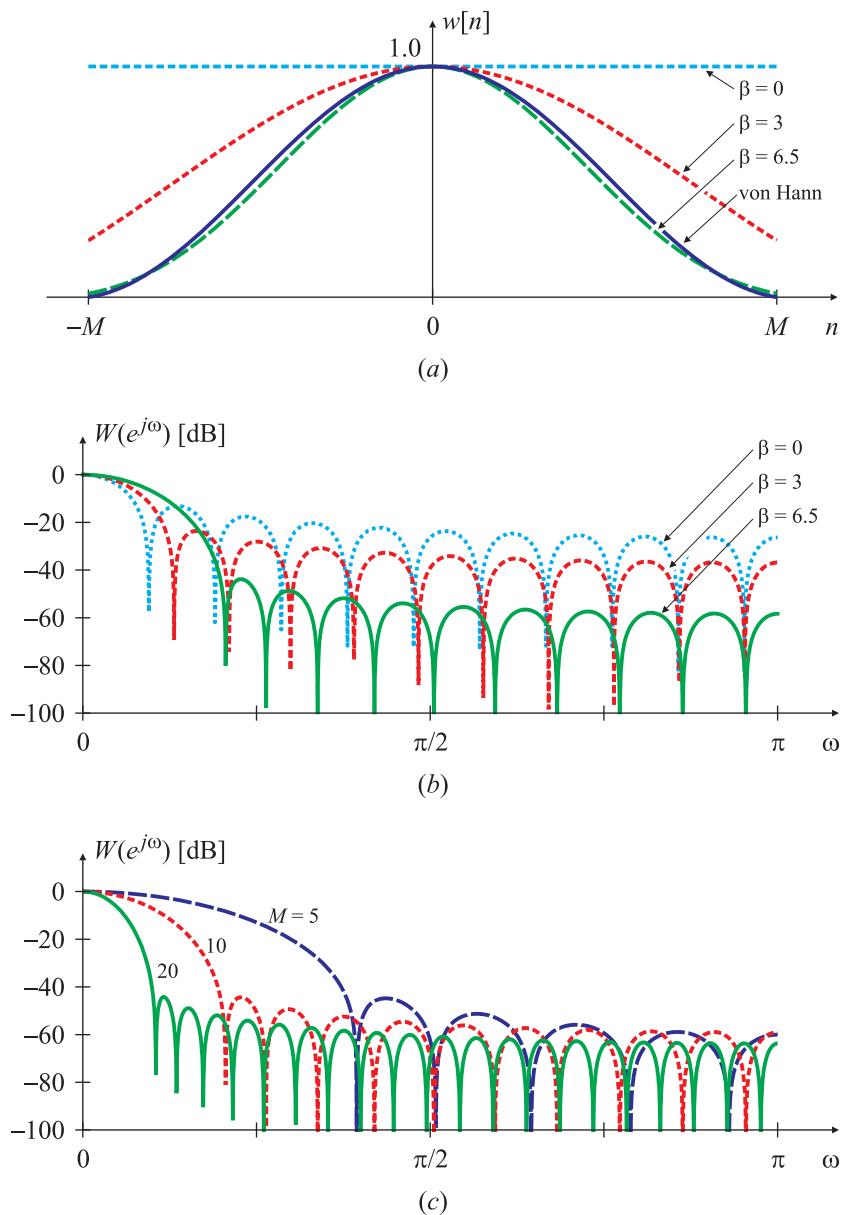


Fig. 3.A.33. Ventana de Kaiser en el dominio tiempo (a) y en el dominio frecuencia, para $M = 10$ fijo y distintos valores de β (b), y para $\beta = 6$ fijo y distintos valores de M (c).

incrementa M la atenuación de los lóbulos laterales no cambia, pero disminuye el ancho del lóbulo principal.

3.A.5.2. Aplicación al diseño de filtros FIR

Después de una intensa experimentación numérica Kaiser obtuvo un par de fórmulas que permiten al diseñador de filtros estimar el valor de β y M necesarios para satisfacer las restricciones de diseño de un filtro selectivo en frecuencia. En particular, encontró que el

error de aproximación (δ en la Fig. 3.A.20) está determinado por el valor de β sobre un amplio rango de condiciones útiles. Si el diseñador especifica δ , la frecuencia de corte de la banda de paso ω_p se define como la frecuencia más alta para la que $|H_T(e^{j\omega})| \geq 1 - \delta$ mientras que la frecuencia de corte de la banda de rechazo ω_r es la menor frecuencia para la cual $|H_T(e^{j\omega})| \leq \delta$. Por lo tanto, la banda de transición de un filtro pasabajo tienen un ancho

$$\Delta\omega_T = \omega_p - \omega_r.$$

Definiendo

$$A = -20 \log_{10} \delta,$$

Kaiser determinó experimentalmente que el valor de β necesario para obtener un determinado valor de A está dado por

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A - 8,7), & 50 < A, \\ 0,5842(A - 21)^{0,4} + 0,07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50, \\ 0, & A < 21. \end{cases} \quad (3.A.14)$$

(el caso $\beta = 0$ coincide con la ventana rectangular, para la cual la atenuación de la banda de rechazo es un 9 %, o 21 dB). Además, para alcanzar estos valores de A y $\Delta\omega_T$ el valor de N debe satisfacer

$$N = 2M + 1 = \frac{A - 8}{2,285 \Delta\omega_T} \quad \text{o bien} \quad M \approx \frac{A - 8}{4,57 \Delta\omega_T}. \quad (3.A.15)$$

La ecuación (3.A.15) es correcta entre ± 2 para un amplio rango de valores de $\Delta\omega_T$ y A . Por lo tanto, con estas fórmulas el método de diseño utilizando la ventana de Kaiser casi no requiere iteraciones o prueba y error.

El método de diseño utilizando la ventana de Kaiser se demuestra con un ejemplo.

EJEMPLO 3.A.5. Diseño de un pasabajos con atenuación moderada en la banda de rechazo con ventana de Kaiser

El mismo filtro del Ejemplo 3.A.3, cuyas especificaciones se repiten aquí para comodidad del lector

Banda de paso	0 a $\pi/5$
Banda de rechazo	$2\pi/5$ a π
Ganancia en la banda de paso [dB]	$0 \pm 0,5$
Ganancia en la banda de rechazo [dB]	-40

se diseña utilizando una ventana de Kaiser. Como la atenuación en la banda de rechazo es de $A = 40$ dB, de (3.A.14) resulta que

$$\beta = 0,5842(A - 21)^{0,4} + 0,07886(A - 21) = 3,4$$

y recordando que $\Delta\omega_T = \pi/5$, de (3.A.15) se tiene que

$$M = \frac{A - 8}{4,57 \Delta\omega_T} = 11,14$$

y por lo tanto se elige $M = 11$ (o $N = 23$). En la Fig. 3.A.34 se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia, y se observa que el filtro satisface los requisitos de diseño. En realidad, la respuesta toca apenas el borde de la banda de rechazo; si este comportamiento no fuese admisible, se corrige fácilmente aumentando haciendo $M = 12$ (o $N = 25$). \square

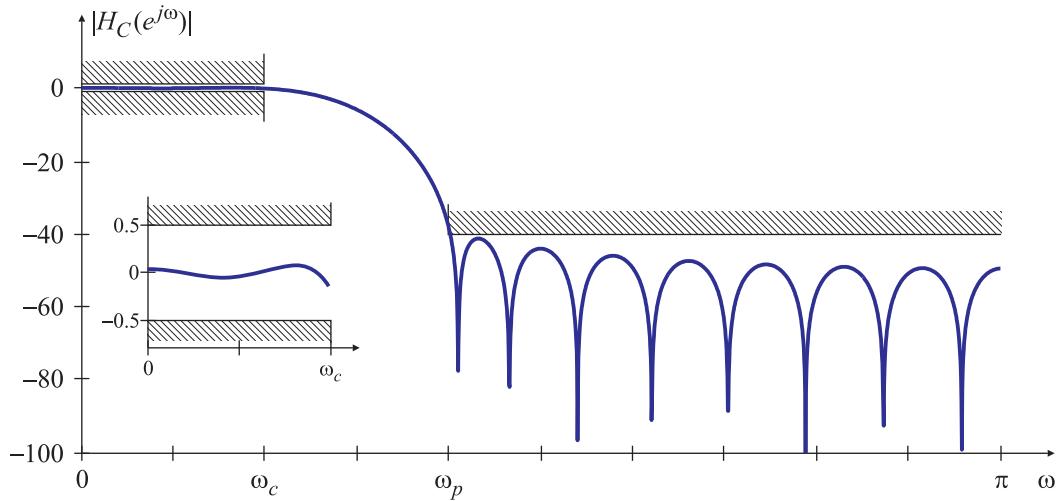


Fig. 3.A.34. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabajas del Ejemplo 3.A.5 diseñado con ventana de Kaiser de largo $N = 23$ ($M = 11$), con un $\beta = 3,39$.

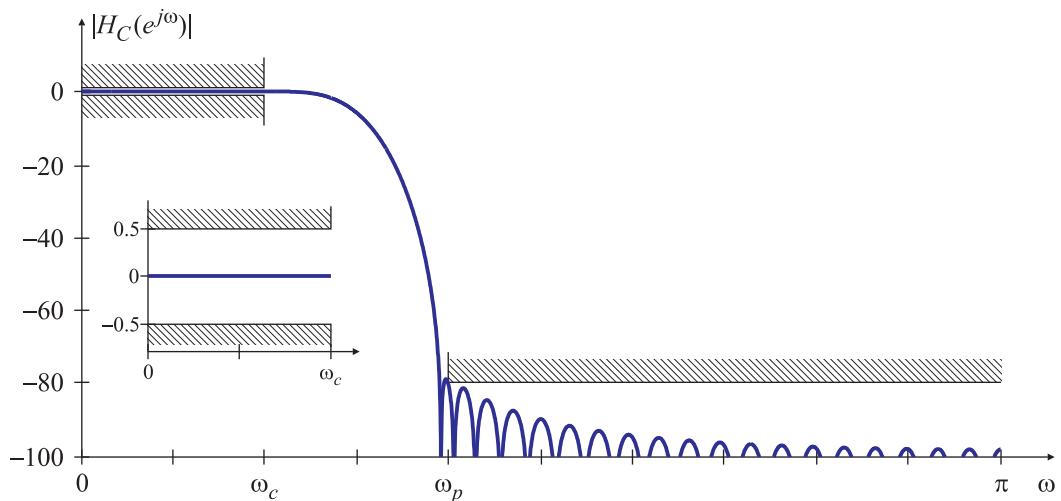


Fig. 3.A.35. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabajas del Ejemplo 3.A.5 diseñado con ventana de Kaiser de largo $N = 57$ ($M = 28$), con un $\beta = 7,86$.

EJEMPLO 3.A.6. Diseño de un pasabajas con gran atenuación en la banda de rechazo con ventana de Kaiser

El mismo filtro del Ejemplo 3.A.4 (el mismo del ejemplo anterior, pero con una atenuación en la banda de rechazo de 80 dB) se diseña utilizando la ventana de Kaiser. Como $A = 80$, el parámetro β resulta

$$\beta = 0,1102(A - 8,7) = 7,86,$$

y recordando que $\Delta\omega_T = \pi/5$ la semi-longitud del filtro es

$$M = \frac{A - 8}{4,57 \Delta\omega_T} = 25,1$$

y por lo tanto se elige $M = 26$. Con este valor el filtro apenas excede las restricciones de la banda de rechazo, y una pequeña iteración muestra que con $M = 28$ se satisfacen ajustadamente los

requisitos de diseño tanto en la banda de paso como en la banda de rechazo, como se muestra en la Fig. 3.A.35. \square

Comparando las respuestas de los filtros de los Ejemplos 3.A.3 y 3.A.4, diseñados con las ventanas de Hamming, Blackman, von Hann y rectangular (Fig. 3.A.24 a Fig. 3.A.28, y Fig. 3.A.29 a Fig. 3.A.32), con la respuesta de los filtros de los Ejemplos 3.A.5 y 3.A.6 diseñados con la ventana de Kaiser (Fig. 3.A.34 y Fig. 3.A.35, respectivamente), se aprecia la conveniencia de esta última ventana: además de eliminar prácticamente el diseño por “prueba y error”, la respuesta es la que cumple más ajustadamente con los requisitos de diseño, y el filtro que se obtiene es el de menor orden, como se resume en la Tabla siguiente

Ventana	Atenuación: 40 dB				Atenuación: 80 dB			
	$ H_C(e^{j\omega}) $	M	Largo	N	$ H_C(e^{j\omega}) $	M	Largo	N
Hamming	Fig. 3.A.24(b)	15	31		Fig. 3.A.29	750	1501	
von Hann	Fig. 3.A.26(b)	20	41		Fig. 3.A.31	80	161	
Blackman	Fig. 3.A.27	15	31		Fig. 3.A.32	51	103	
rectangular	Fig. 3.A.28	99	199		Fig. 3.A.30	9500	19001	
Kaiser	Fig. 3.A.34	11	23		Fig. 3.A.35	28	57	

En los siguientes ejemplos se muestra el diseño de un filtro pasabanda con ventana de Kaiser que, como se especifica con diferentes atenuaciones en las bandas de rechazo y diferentes bandas de transición, se puede diseñar siguiendo dos enfoques distintos.

EJEMPLO 3.A.7. Diseño de un filtro pasabanda usando ventana de Kaiser

Se debe diseñar un filtro pasabanda que satisfaga las siguientes especificaciones:

Banda de paso	0,35π a 0,40π
Ganancia en la banda de paso [dB]	0 ± 0,5
Banda de rechazo 1	0 a 0,30π
Ganancia en la banda de rechazo 1 [dB]	-50
Banda de rechazo 2	0,50π a π
Ganancia en la banda de rechazo 2 [dB]	-70

Por lo tanto, las frecuencias esquina de la banda de paso son $\omega_{p1} = 0,35\pi$, $\omega_{p2} = 0,40\pi$, y las de la banda de rechazo son $\omega_{r1} = 0,30\pi$ y $\omega_{r2} = 0,5\pi$. Las bandas de transición tienen distinto ancho $\Delta\omega_{T1} = |\omega_{r1} - \omega_{p1}| = 0,05\pi$, y $\Delta\omega_{T2} = |\omega_{r2} - \omega_{p2}| = 0,1\pi$, y la atenuación en las bandas de rechazo también es diferente ($A_{r1} = 50$ dB, $A_{r2} = 70$ dB). Tal como fue estudiado en la Sección 3.A.4, en el diseño con ventanas la ondulación en la banda de paso y en la banda de rechazo, lo mismo que el ancho de la zona de transición, depende del tipo y de la longitud de la ventana. Por lo tanto, con esta técnica no es posible diseñar filtros que tengan atenuaciones distintas en bandas diferentes (si bien esto no es enteramente cierto, tal diseño conlleva algunas dificultades, como se muestra en el próximo ejemplo). De aquí que deben elegirse las condiciones más restrictivas para asegurar un diseño satisfactorio. En consecuencia, se elige la misma atenuación de $A_r = 70$ dB en las dos bandas de rechazo, y una misma banda de transición $\Delta\omega_T = 0,05\pi$. Si bien la frecuencia esquina inferior del filtro pasabanda ideal se *debe* elegir en

$$\omega_{c1} = \frac{\omega_{p1} + \omega_{r1}}{2} = 0,375\pi,$$

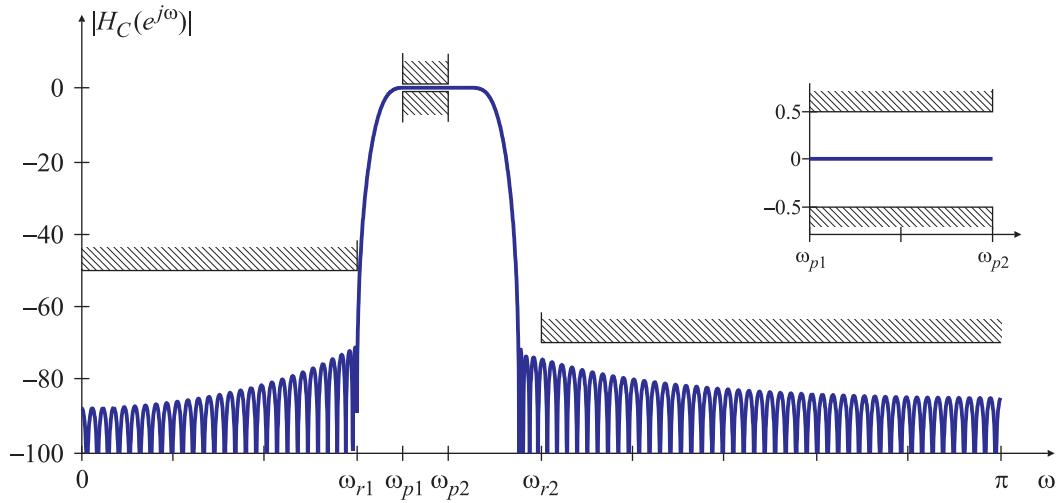


Fig. 3.A.36. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabanda del Ejemplo 3.A.7 diseñado con ventana de Kaiser de largo $N = 175$ ($M = 87$), con un $\beta = 7,86$.

la frecuencia de corte superior puede elegirse arbitrariamente dentro del intervalo

$$\omega_{p2} + \frac{\Delta\omega_T}{2} \leq \omega_{c2} \leq \omega_{r2} - \frac{\Delta\omega_T}{2},$$

de modo que la (menor) zona de transición quede adyacente a la frecuencia esquina superior de la banda de paso o a la frecuencia esquina superior de la banda de rechazo. En este caso el intervalo resulta $0,425\pi \leq \omega_{c2} \leq 0,475\pi$, y en este diseño se elige equidistante de ambas frecuencias esquina, es decir

$$\omega_{c2} = \frac{\omega_{p2} + \omega_{r2}}{2} = 0,45\pi.$$

La respuesta impulsiva del filtro pasabanda ideal está dada por la ecuación (3.174), es decir

$$h_i[n] = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c2}}{\pi} n\right) - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c1}}{\pi} n\right), \quad (3.174)$$

mientras que los parámetros de la ventana de Kaiser resultan

$$\begin{aligned} \beta &= 0,1102(A - 8,7) = 6,76, \\ M &= \frac{A - 8}{4,57 \Delta\omega_T} = 86,36 \end{aligned}$$

por lo que se elige $M = 87$. Es decir que el largo del filtro FIR es $N = 2M + 1 = 175$. La respuesta impulsiva del filtro truncado es

$$h_T[n] = h_i[n]w[n], \quad -M \leq n \leq M,$$

donde $w[n]$ está dada por (3.A.13), y la respuesta impulsiva causal es

$$h_C[n] = h_T[n - M], \quad 0 \leq n \leq 2M.$$

En la Fig. 3.A.36 se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro, verificándose que se cumplen adecuadamente todas las restricciones de diseño. Sin embargo, mientras que la atenuación para la banda de rechazo comprendida entre $\omega_{p2} = 0,50\pi$ y $\omega = \pi$, y la banda de transición entre $\omega_{r1} = 0,30\pi$ y $\omega_{p1} = 0,35\pi$ son relativamente ajustadas, se obtiene mayor atenuación que la pedida en la banda de rechazo comprendida entre $\omega = 0$ y $\omega_{r1} = 0,30\pi$, y la banda de transición entre $\omega_{p2} = 0,40\pi$ y $\omega_{r2} = 0,50\pi$ es menor que la especificada. \square

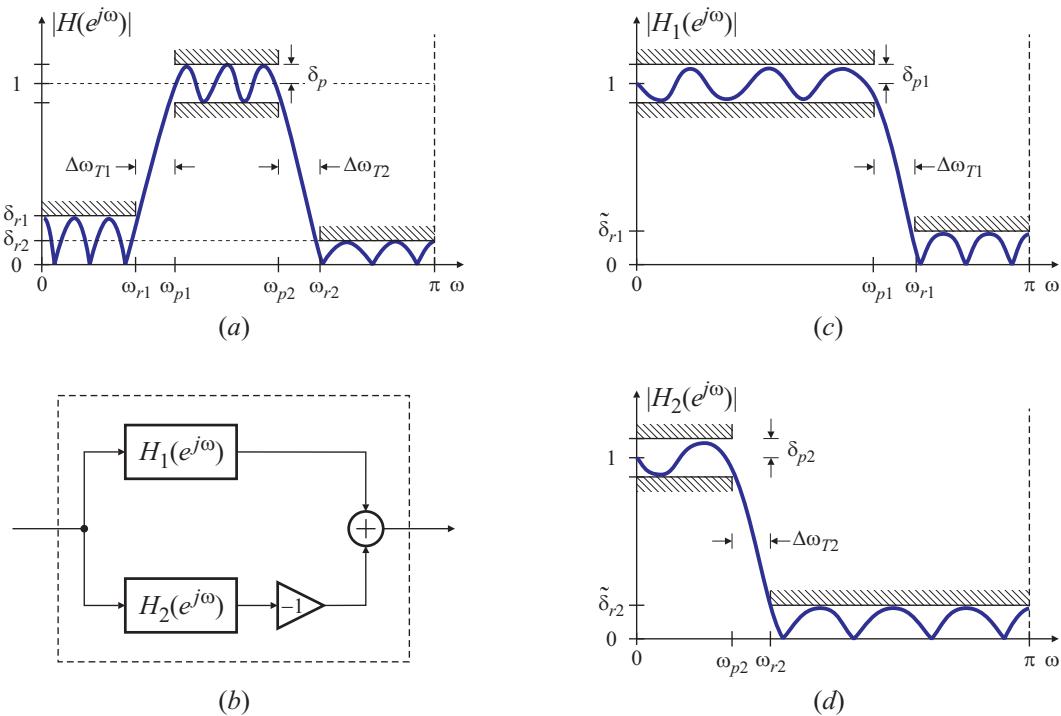


Fig. 3.A.37. Especificaciones de la respuesta en frecuencia de un filtro pasabanda (a) diseñado como la diferencia de dos filtros pasabajos independientes (b). Especificaciones de cada uno de los filtros pasabajos (c) y (d).

En el ejemplo anterior se combinan desfavorablemente dos condiciones que resultan en un filtro de longitud elevada: la banda de transición más angosta está vinculada a una atenuación moderada, mientras que una gran atenuación sigue a una banda de transición relativamente amplia. Por el método de diseño, el filtro prototípico debe tener bandas de transición angostas con grandes atenuaciones, lo que resulta en un orden elevado. En el siguiente ejemplo se explora una alternativa para disminuir la longitud del filtro: en lugar de utilizar la expresión de la respuesta impulsiva del filtro pasabanda dada por (3.174) se “restan” dos filtros pasabajos. Aunque puede conseguirse un filtro de orden ligeramente menor, aparecen algunos inconvenientes.

EJEMPLO 3.A.8. Diseño de un filtro pasabanda usando ventana de Kaiser (segunda versión)
 En este ejemplo se explora el diseño del filtro pasabanda del Ejemplo 3.A.7 como la resta de dos filtros pasabajos diseñados de manera individual, de manera similar a la representada en la Fig. 3.80(b). En otras palabras, mientras que en el Ejemplo 3.A.7 se diseñan dos filtros pasabajos ideales, se restan, y después se trunca la respuesta impulsiva, en este caso se diseñan dos filtros pasabajos ideales, se truncan y después se restan. Como los filtros pasabajos se diseñan separadamente, cada uno de ellos puede cumplir de manera más ajustada con los requisitos de diseño. Ahora es necesario definir las especificaciones de diseño para cada uno de los pasabajos. En la Fig. 3.A.37(a) se representan las especificaciones del filtro pasabanda \$H(e^{j\omega})\$. Como éste se implementa como la resta de dos pasabajos \$H_1(e^{j\omega})\$ y \$H_2(e^{j\omega})\$, es decir, conectados en paralelo como se muestra en la Fig. 3.A.37(b), las atenuaciones en las bandas de paso y de rechazo del filtro pasabanda resultan,

$$\delta_p = \delta_{p1} + \delta_{p2}, \quad \delta_{r1} = \delta_{p1} + \delta_{p2}, \quad \delta_{r2} = \tilde{\delta}_{r1} + \tilde{\delta}_{r2}.$$

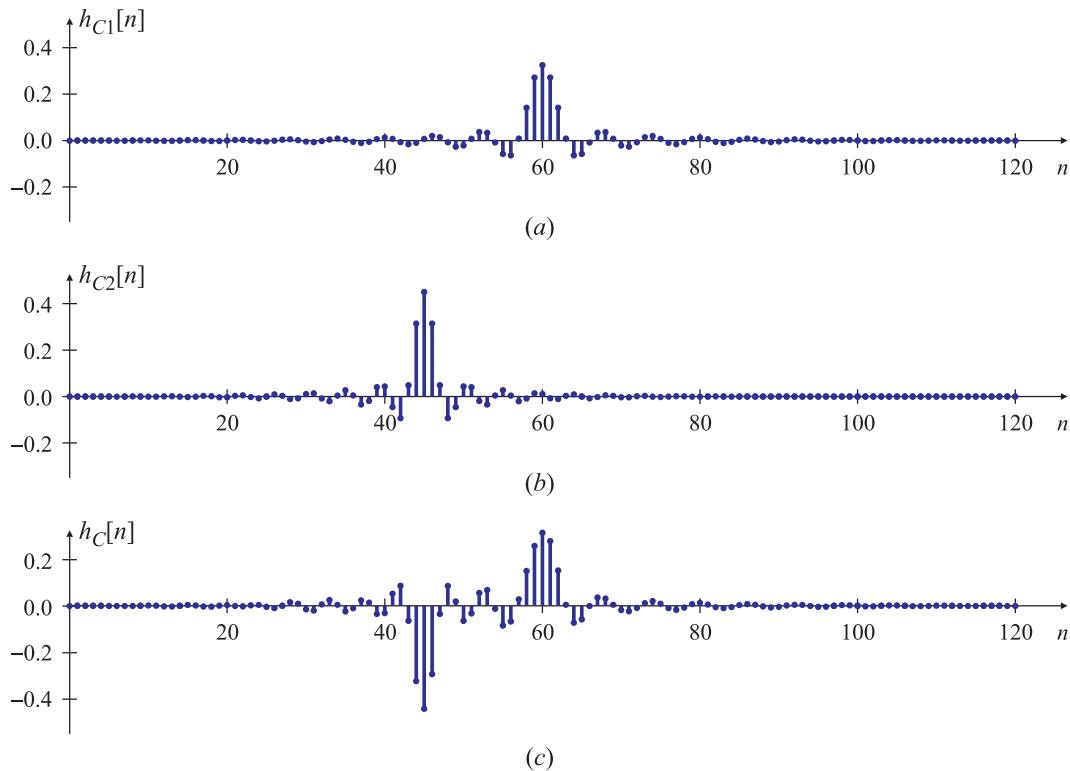


Fig. 3.A.38. Respuesta impulsiva de los filtros pasabajos causales: $h_{C1}[n]$ (a), $h_{C2}[n]$ (b) y del filtro pasabanda causal $h_C[n] = h_{C1}[n] - h_{C2}[n]$ (c).

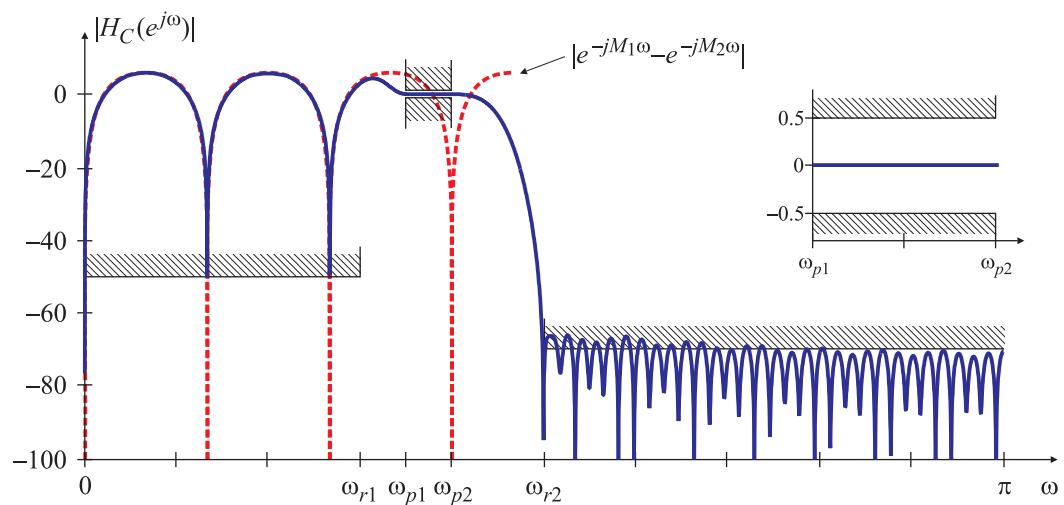


Fig. 3.A.39. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabanda del Ejemplo 3.A.7 construido como diferencia de los dos filtros cuyo módulo se grafica en la Fig. 3.A.40.

Como en este ejemplo las atenuaciones requeridas en la banda de rechazo son bastante altas (por el método de diseño la atenuación en la banda de rechazo tiene la misma amplitud que la desviación respecto a la unidad en la banda de paso) se espera que la atenuación en la banda de paso δ_p se satisfaga sin problemas. Lo mismo se puede pensar de la atenuación δ_{r1} en la primera banda de rechazo: 50 dB de atenuación son equivalentes a $\delta_{p1} = 0,0032$, mientras que la atenuación δ_{p2} de 70 dB en la segunda banda de rechazo es una cantidad 10 veces menor: $\delta_{p2} = 0,00032$. Por lo tanto, si se cumplen las especificaciones de las bandas de rechazo de los filtros pasabajos con algún margen no debería haber problemas para conseguir la atenuación deseada en la primera banda de rechazo, porque $\delta_{r1} = \delta_{p1} + \delta_{p2}$. Sin embargo, esto no necesariamente es cierto para la segunda banda de rechazo. Aunque el filtro $H_2(e^{j\omega})$ se diseñe para satisfacer $\tilde{\delta}_{r2}$, la ganancia de la banda de rechazo del filtro pasabanda es la suma de las ganancias de la banda de rechazo de los filtros pasabajos, y entonces $\delta_{r2} = \tilde{\delta}_{r1} + \tilde{\delta}_{r2}$. Si $H_1(e^{j\omega})$ se diseña para cumplir exactamente con $\tilde{\delta}_{r1} = \delta_{r1}$, en este caso no se van a satisfacer los requisitos de diseño para la segunda banda de rechazo. Una opción evidente es elegir $\tilde{\delta}_{r1} = \delta_{r2}$, pero esto resultaría en un filtro de orden similar al del Ejemplo 3.A.7, porque se tiene la misma banda de transición y la misma atenuación. Lo que puede ayudar es la pendiente de decrecimiento de los lóbulos laterales del filtro $H_1(e^{j\omega})$: si decaen lo suficientemente rápido, su amplitud puede ser menor que $\tilde{\delta}_{r1}$ en el rango de la segunda banda de rechazo, permitiendo satisfacer las especificaciones de diseño.

En este ejemplo, y para apreciar los efectos mencionados más arriba, los filtros pasabajos $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$ se diseñarán para cumplir con las siguientes especificaciones:

$$H_1(e^{j\omega}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Banda de paso} & 0 \text{ a } 0,40\pi \\ \text{Banda de rechazo} & 0,50\pi \text{ a } \pi \\ \text{Ganancia en la banda de paso [dB]} & 0 \pm 0,5 \\ \text{Ganancia en la banda de rechazo [dB]} & -70 \end{array} \right.$$

de modo que $\omega_{p1} = 0,4\pi$, $\omega_{r1} = 0,5\pi$, $A_{r1} = 70$, y

$$H_2(e^{j\omega}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Banda de paso} & 0 \text{ a } 0,30\pi \\ \text{Banda de rechazo} & 0,35\pi \text{ a } \pi \\ \text{Ganancia en la banda de paso [dB]} & 0 \pm 0,5 \\ \text{Ganancia en la banda de rechazo [dB]} & -50 \end{array} \right.$$

que resulta en $\omega_{p1} = 0,3\pi$, $\omega_{r1} = 0,35\pi$, $A_{r2} = 50$. Los filtros ideales $H_{i1}(e^{j\omega})$, $H_{i2}(e^{j\omega})$ tienen respuestas impulsivas

$$h_{i1}[n] = \frac{\omega_{c1}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c1}}{\pi} n\right), \quad h_{i2}[n] = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c2}}{\pi} n\right),$$

con $-\infty < n < \infty$, y

$$\omega_{c1} = \frac{\omega_{p1} + \omega_{r1}}{2} = 0,45\pi, \quad \omega_{c2} = \frac{\omega_{p2} + \omega_{r2}}{2} = 0,375\pi.$$

Los filtros ideales se truncan (cada uno) con una ventana de Kaiser. Para el filtro $H_1(e^{j\omega})$ con $\Delta\omega_{T1} = \omega_{r1} - \omega_{p1} = 0,1\pi$ y $A_{r1} = 70$ resulta $\beta_1 = 4,55$, $M_1 = 60$. Para el filtro $H_2(e^{j\omega})$ con $\Delta\omega_{T2} = \omega_{r2} - \omega_{p2} = 0,05\pi$ y $A_{r2} = 50$ se encuentra que $\beta_2 = 6,75$ y $M_2 = 45$. Las respuestas truncadas son entonces

$$\begin{aligned} h_{T1}[n] &= h_{i1}[n] \times w_1[n], \quad -M_1 \leq n \leq M_1 \\ h_{T2}[n] &= h_{i2}[n] \times w_2[n], \quad -M_2 \leq n \leq M_2 \end{aligned}$$

donde $w_1[n]$, $w_2[n]$ son las respuestas impulsivas de las ventanas de Kaiser calculadas con (3.A.13) usando los parámetros β_1 , M_1 y β_2 , M_2 , respectivamente. Finalmente, las respuestas impulsivas causalizadas de los filtros son

$$\begin{aligned} h_{C1}[n] &= h_{T1}[n - M_1], \quad 0 \leq n \leq 2M_1, \\ h_{C2}[n] &= h_{T2}[n - M_2], \quad 0 \leq n \leq 2M_2, \end{aligned}$$

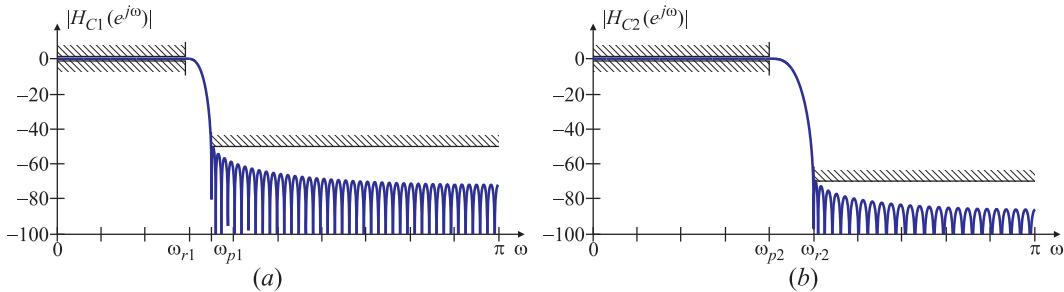


Fig. 3.A.40. Módulo de la respuesta en frecuencia de los filtros pasabajos del Ejemplo 3.A.8 diseñados con ventana de Kaiser de largo $N_1 = 121$ ($M_1 = 60$), con un $\beta_1 = 4,55$ (a) y $N_2 = 91$ ($M_2 = 45$), con un $\beta_2 = 6,75$ (b).

que se representan en la Fig. 3.A.38(a) y (b), respectivamente. El módulo de la respuesta en frecuencia de cada una de estas respuestas impulsivas se muestran en la Fig. 3.A.40(a) y (b), respectivamente, verificándose que se satisfacen los requisitos de diseño.

En la Fig. 3.A.38(c) se muestra la respuesta impulsiva del filtro pasabanda, $h_C[n] = h_{C1}[n] - h_{C2}[n]$ para $0 \leq n \leq 2M_1$. Como $M_1 > M_2$, la respuesta impulsiva de $h_{C2}[n]$ se completa con $2(M_1 - M_2)$ ceros desde la muestra $2M_1 + 1$ hasta la muestra $2M_2$, como se aprecia en la Fig. 3.A.38(b). La respuesta en frecuencia del filtro pasabanda se grafica en la Fig. 3.A.39, y es evidente que no se satisfacen las especificaciones de diseño, en especial en la primera banda de rechazo.

El error de este enfoque radica en que la primera banda de rechazo del filtro pasabanda resulta de cancelar las salidas de los dos filtros pasabajos. En este rango de frecuencias el módulo de la respuesta en frecuencia es aproximadamente unitaria, lo que indica que la amplitud de la tensión de salida es aproximadamente igual a la amplitud de la señal de entrada. Pero lo que es diferente es el *retardo* que sufre la señal al atravesar los filtros $H_{C1}(e^{j\omega})$ y $H_{C2}(e^{j\omega})$. Tal como se estudió en la Sección 3.A.1.4, estos retardos son de M_1 y M_2 muestras, respectivamente. En la banda de frecuencias comprendidas entre 0 y ω_{p1} , las respuestas de estos filtros se pueden aproximar por

$$H_{C1}(e^{j\omega}) \approx e^{-jM_1\omega}, \quad H_{C2}(e^{j\omega}) \approx e^{-jM_2\omega},$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} H_C(e^{j\omega}) &\approx e^{-jM_1\omega} - e^{-jM_2\omega} \\ &= e^{-j\frac{M_1+M_2}{2}\omega} \left(e^{-j\frac{M_1-M_2}{2}\omega} - e^{j\frac{M_1-M_2}{2}\omega} \right) \\ &= 2e^{-j[\frac{M_1+M_2}{2}\omega + \frac{\pi}{2}]} \operatorname{sen} \left[\left(\frac{M_1 - M_2}{2} \right) \omega \right] \end{aligned}$$

para $0 \leq \omega \leq \omega_{p1}$. El módulo de esta aproximación está indicado con línea de trazos en la Fig. 3.A.39, lo que muestra que este análisis aproximado es correcto.

Para corregir este problema, se deben *ecualizar* los retardos de ambos filtros pasabajos. En este caso, se debe retrasar la respuesta impulsiva $h_{C2}[n]$ en $M_1 - M_2$ muestras adicionales, de manera que la señal se demore la misma cantidad de muestras en atravesar ambos filtros. Las respuestas impulsivas de cada uno de los filtros ecualizados de esta forma se muestran en la Fig. 3.A.41(a) y (b), y la respuesta del filtro pasabanda $h_C[n] = h_{C1}[n] - h_{C2}[n]$ en la Fig. 3.A.41(c). La respuesta en frecuencia correspondiente se representa en la 3.A.42, observándose que el comportamiento del filtro en la primera banda de rechazo es apropiado. El inconveniente de este filtro es que no se satisfacen las especificaciones en la segunda banda de rechazo. Como se explicó más arriba, esto sucede porque la respuesta en frecuencia del filtro $H_{C1}(e^{j\omega})$ no alcanza la atenuación requerida en el rango de frecuencia $\omega_{p2} \leq \omega \leq \pi$, como se observa en la Fig. 3.A.40(a): los lóbulos laterales del

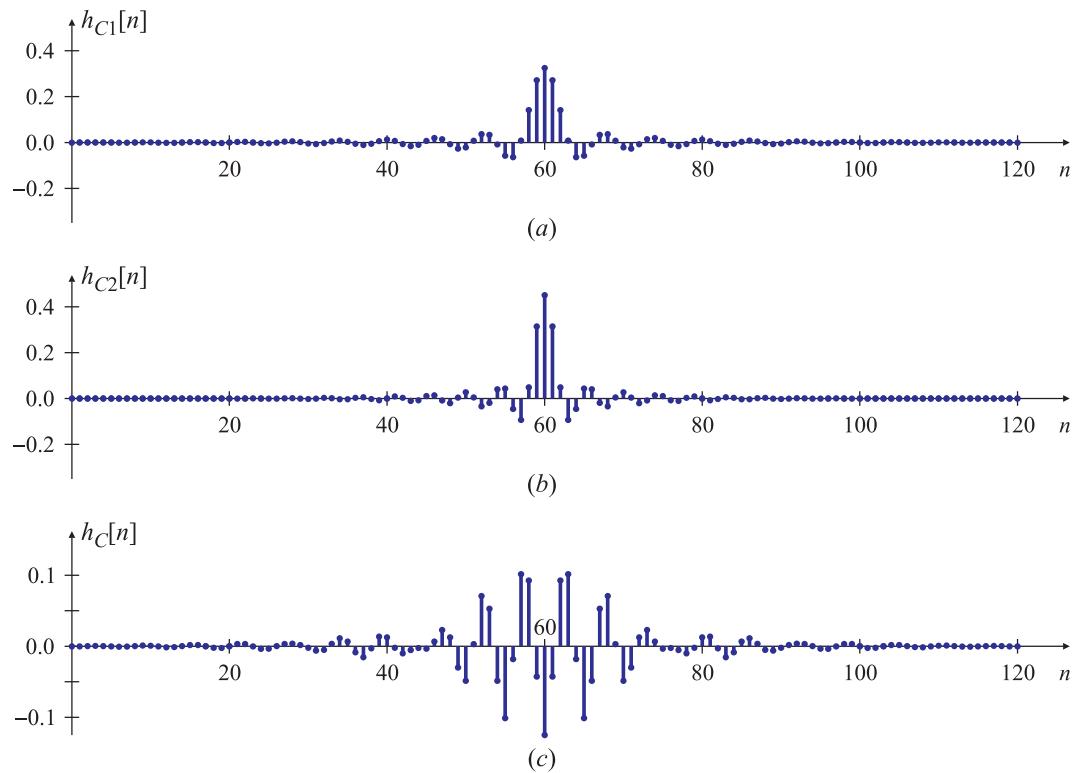


Fig. 3.A.41. Respuesta impulsiva de los filtros pasabajos causales: $h_{C1}[n]$ (a), $h_{C2}[n]$ (b) y del filtro pasabanda causal $h_C[n] = h_{C1}[n] - h_{C2}[n]$ (c). La respuesta impulsiva $h_{C1}[n]$ se ha retrasado ($M_1 - M_2$ muestras para ecualizar los retardos).

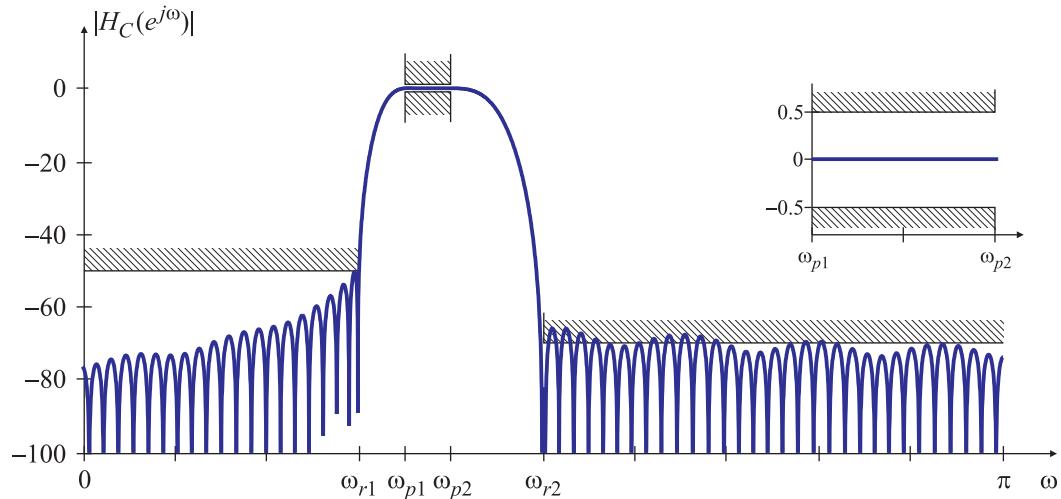


Fig. 3.A.42. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabanda del Ejemplo 3.A.7 construido como diferencia de los dos filtros cuyo módulo se grafica en la Fig. 3.A.40, y cuyas respuestas impulsivas se han ecualizado para que ambos tengan el mismo retardo de grupo.

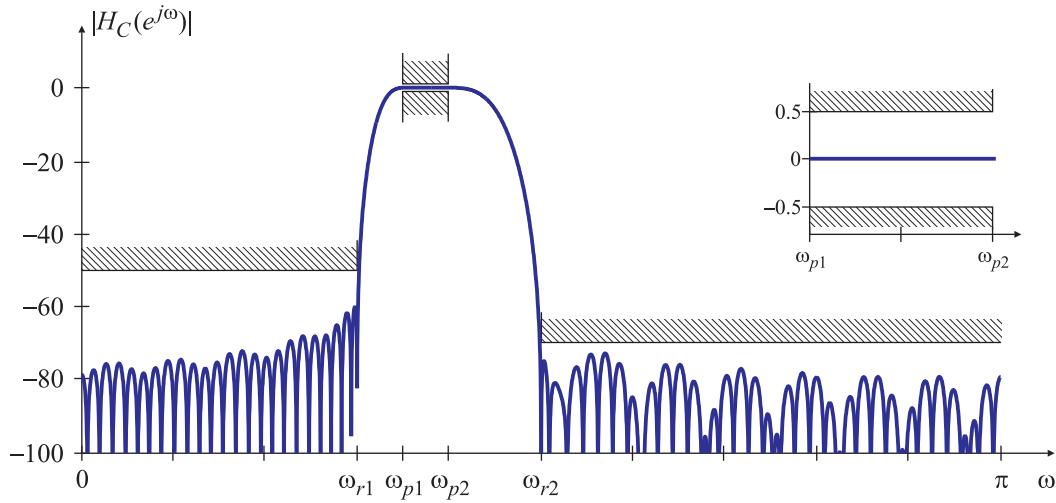


Fig. 3.A.43. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabanda del Ejemplo 3.A.7 construido como diferencia de los dos filtros cuyo módulo se grafica en la Fig. 3.A.40. Las respuestas impulsivas se han ecualizado para que ambos tengan el mismo retraso de grupo, y se ha aumentado la atenuación de la banda de rechazo del filtro $H_{C1}(e^{j\omega})$ para satisfacer las especificaciones de diseño.

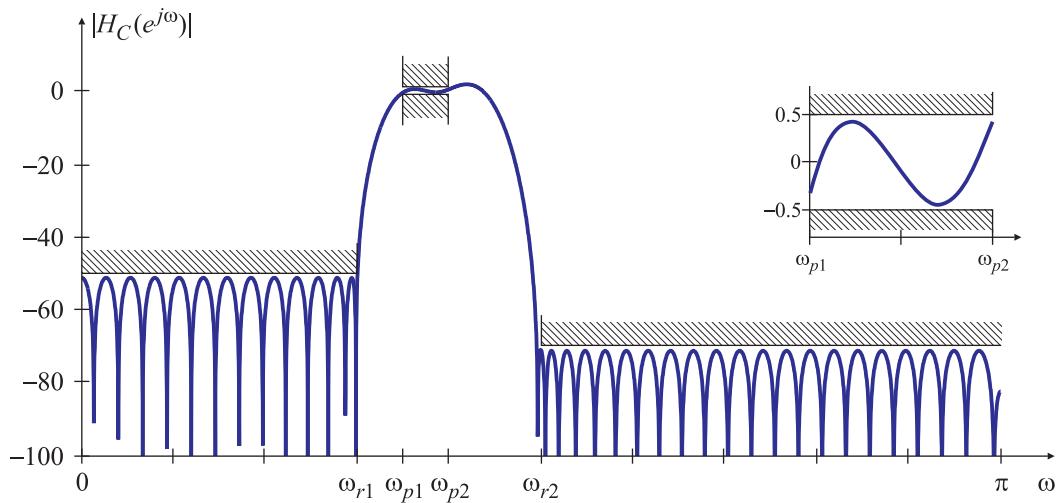


Fig. 3.A.44. Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabanda del Ejemplo 3.A.7 diseñado por métodos óptimos de largo $N = 75$ ($M = 37$).

filtro $H_{C1}(e^{j\omega})$ no decaen lo suficientemente rápido. Este inconveniente puede corregirse cambiando el valor de β_1 de la ventana de Kaiser para el filtro $H_{C1}(e^{j\omega})$, o, lo que es más sencillo para el diseño, aumentando la atenuación en la banda de rechazo de este filtro. Si A_{r1} se lleva de 50 dB a 60 dB, se encuentra que $\beta_1 = 5,65$, $M_1 = 74$, y la respuesta en frecuencia del pasabanda se representa en la Fig. 3.A.43, encontrándose que ahora se satisfacen completamente los requisitos de diseño. \square

Este último ejemplo muestra que cuando se desean obtener filtros de la menor longitud posible, aún el procedimiento de diseño con la ventana de Kaiser necesita varias iteraciones.

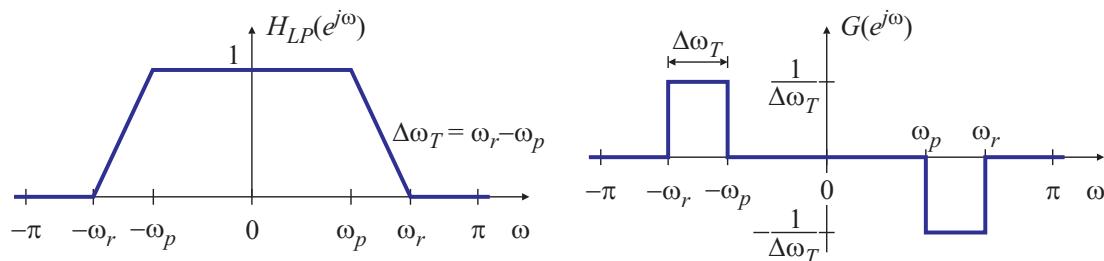


Fig. 3.A.45. Especificaciones de un filtro pasabajos con banda de transición suave (a). Especificaciones del filtro derivado (b).

nes para satisfacer los requisitos de diseño. A esta altura podría pensarse que el diseño de filtro FIR del Ejemplo 3.A.8 es el “mejor” diseño posible. Sin embargo, en la Fig. 3.A.44 se muestra la respuesta en frecuencia de un filtro FIR diseñado con métodos óptimos que satisface los requisitos de diseño pero con una longitud mucho menor ($N = 75$, $M = 37$), que el largo $N = 175$ ($M = 87$) del filtro del Ejemplo 3.A.7, y que el largo $N = 151$, ($M = 75$) del filtro del Ejemplo 3.A.8, ambos diseñados con la ventana de Kaiser. Este resultado muestra que existen otras técnicas de diseño de filtros FIR que permiten mejorar estos diseños, como se estudiarán oportunamente en el Capítulo 10.

3.A.6. Reducción de las ondulaciones suavizando la banda de transición

Como se estudió en la Sección 3.A.1.2, los filtros FIR obtenidos por truncación de la respuesta impulsiva de un filtro ideal con una ventana rectangular tienen una respuesta en frecuencia con ondulaciones. Una manera de reducir la ondulación a valores aceptables es pesando la respuesta impulsiva de longitud infinita con una ventana temporal apropiada, cuya respuesta impulsiva tienda suavemente a cero, como se estudió en la Sección 3.A.2. Otra forma es modificando la especificación de la respuesta en frecuencia del filtro discreto dejando una banda de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo, y permitiendo una transición suave entre ellas.

Para el caso de un filtro pasabajos, la modificación más sencilla es unir el borde de la banda de paso ω_p y el borde de la banda de rechazo ω_r , con una recta (*spline* de primer orden) como se observa en la Fig. 3.A.45(a). Aplicando la TFTD inversa a la respuesta en frecuencia $H_{PB}(e^{j\omega})$ se pueden calcular los coeficientes $h_{PB}[n]$ de la respuesta impulsiva,

$$h_{PB}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_{PB}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

Aunque no es una integral difícil de evaluar, el cálculo se complica porque en los tramos $(-\omega_r, -\omega_p)$ y (ω_p, ω_r) la respuesta $H_{PB}(e^{j\omega})$ varía linealmente con ω . Una manera más sencilla de obtener la respuesta impulsiva es aplicando la propiedad de derivación frecuencial (3.201) de la TFTD para calcular la transformada inversa de la *derivada* $G(e^{j\omega})$ de la especificación de la respuesta en frecuencia $H_{PB}(e^{j\omega})$, Fig. 3.A.45(b).

La propiedad de derivación frecuencial de la TFTD establece que si $H_{PB}(e^{j\omega})$ es la TFTD de la sucesión $h_{PB}[n]$ y si $G(e^{j\omega}) = \frac{d}{d\omega} H_{PB}(e^{j\omega})$, la relación entre $h_{PB}[n]$ y la sucesión

$g[n]$, la TFTD inversa de $G(e^{j\omega})$ está dada por el par transformado

$$g[n] = -jnh_{PB}[n] \iff G(e^{j\omega}) = \frac{d}{d\omega}H_{PB}(e^{j\omega}).$$

La respuesta $G(e^{j\omega})$ es fácil de calcular, porque es nula salvo en la banda de transición $(-\omega_r, -\omega_p)$ y (ω_p, ω_r) de ancho $\Delta\omega_T = \omega_r - \omega_p$, como se muestra en la Fig. 3.A.45(b). A su vez, esta respuesta puede pensarse como un par de pasabajos

$$H_A(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1/\Delta\omega_T, & -\Delta\omega_T/2 < \omega < \Delta\omega_T/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

desplazados en frecuencia una cantidad $\pm\omega_c$ donde

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_r}{2}.$$

Como la respuesta impulsiva de los pasabajos es conocida, y la propiedad de desplazamiento frecuencial (3.182) es fácil de aplicar, se sencillo calcular $g[n]$ a partir de $G(e^{j\omega})$, y después computar $h_{PB}[n]$ como

$$h_{PB}[n] = \frac{j}{n}g[n]. \quad (3.A.16)$$

Como

$$G(e^{j\omega}) = H_A(e^{j(\omega+\omega_c)}) - H_A(e^{j(\omega-\omega_c)}),$$

la propiedad de desplazamiento frecuencial (3.182) establece que las respuestas impulsivas de $H_A(e^{j(\omega+\omega_c)})$ y $H_A(e^{j(\omega-\omega_c)})$ están relacionadas con $h_A[n]$ según

$$\begin{aligned} h_A[n] &\iff H_A(e^{j\omega}), \\ h_A[n]e^{-j\omega_c n} &\iff H_A(e^{j(\omega+\omega_c)}), \\ h_A[n]e^{j\omega_c n} &\iff H_A(e^{j(\omega-\omega_c)}), \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} g[n] &= h_A[n]e^{-j\omega_c n} - h_A[n]e^{j\omega_c n} \\ &= -2j \operatorname{sen}(\omega_c n) h_A[n]. \end{aligned} \quad (3.A.17)$$

Como la respuesta impulsiva del pasabajar auxiliar es

$$h_A[n] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega_T}{2\pi}n\right), \quad (3.A.18)$$

reemplazando (3.A.17) y (3.A.18) en (3.A.16) se encuentra que

$$\begin{aligned} h_{PB}[n] &= \frac{j}{n}g[n] \\ &= \frac{2}{n} \operatorname{sen}(\omega_c n) h_A[n] \\ &= \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}(\omega_c n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega_T}{2\pi}n\right) \end{aligned}$$

y en consecuencia, la respuesta impulsiva del filtro pasabajos con banda de transición suavizada puede escribirse como

$$h_{PB}[n] = \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega_T}{2\pi} n\right) \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right). \quad (3.A.19)$$

Esta expresión muestra que la respuesta impulsiva del filtro pasabajos con banda de transición suavizada puede escribirse como la respuesta impulsiva $h_{PBI}[n] = \omega_c/\pi \text{sinc}(\omega_c n/\pi)$ de un filtro pasabajos ideal con frecuencia de corte ω_c , pesada por una ventana temporal $w[n] = \text{sinc}[\Delta\omega n/(2\pi)]$. En definitiva, el filtro con banda de transición suavizada es similar al diseño utilizando ventanas; lo único que cambia es que la ventana utilizada en este caso es de longitud infinita, y tiene una forma tal que hace que la variación de la respuesta en frecuencia desde la banda de paso a la banda de rechazo varíe en forma lineal.

Este diseño resulta en un filtro que no es causal, y además su respuesta impulsiva es doblemente infinita. Para implementarlo, se requiere truncarlo y causalizarlo. La truncación nuevamente se hace con una ventana rectangular como (3.A.2). En este caso, es de esperar que la truncación resulte en una respuesta en frecuencia con menos ondulaciones, porque en lugar de convolucionar la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular con la respuesta en frecuencia de un filtro ideal, como se muestra en la Fig. 3.A.3, se la convoluciona con la respuesta en frecuencia de un filtro con banda de transición suavizada como el de la Fig. 3.A.45. La variación continua de la respuesta en frecuencia desde $\omega = \omega_p$ hasta $\omega = \omega_r$ hace que la contribución de los lóbulos principal y laterales de la ventana rectangular varíe gradualmente, y no de manera abrupta como en el caso que se ilustra en la Fig. 3.A.4.

Luego de truncar el filtro a $\pm M$ muestras, y de causalizarlo desplazando la respuesta truncada M muestras a la derecha, la respuesta impulsiva del filtro causalizado es

$$h_{PBC}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\Delta\omega_T}{2\pi} (n - M)\right] \text{sinc}\left[\frac{\omega_c}{\pi} (n - M)\right].$$

Se pueden obtener transiciones más suaves si se utilizan polinomios interpoladores (*splines*) de mayor orden para unir las bandas de paso y de rechazo. La respuesta impulsiva de un filtro diseñado de manera tal que las frecuencias esquina de las bandas de paso y de rechazo se unen con un polinomio de orden P es

$$h_{PBC}^{(P)}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega_T}{2\pi P} (n - M)\right) \right]^P \text{sinc}\left[\frac{\omega_c}{\pi} (n - M)\right], \quad (3.A.20)$$

con $0 \leq n \leq 2M = N - 1$. En general, el efecto de P en la respuesta en frecuencia no es obvio. Para un filtro de longitud $N = 2M + 1$ y banda de transición $\Delta\omega_T$ el valor óptimo de P que minimiza la integral cuadrática del error (Burrus, Soewito y Gopinath, 1992) es

$$P = \left\lceil \frac{\Delta\omega_T}{2\pi} M \right\rceil, \quad (3.A.21)$$

donde $\lceil \cdot \rceil$ es la función techo: $\lceil x \rceil$ es el menor de los enteros mayores que x . Esta expresión muestra que para una banda de transición de ancho $\Delta\omega$ prefijado, el aumento de la “suavidad” de la transición (un P mayor) implica un incremento de la longitud $N = 2M + 1$ del FIR. Para un filtro de longitud N dada, un mayor orden de interpolación P resulta en una respuesta en frecuencia con una banda de transición más amplia.

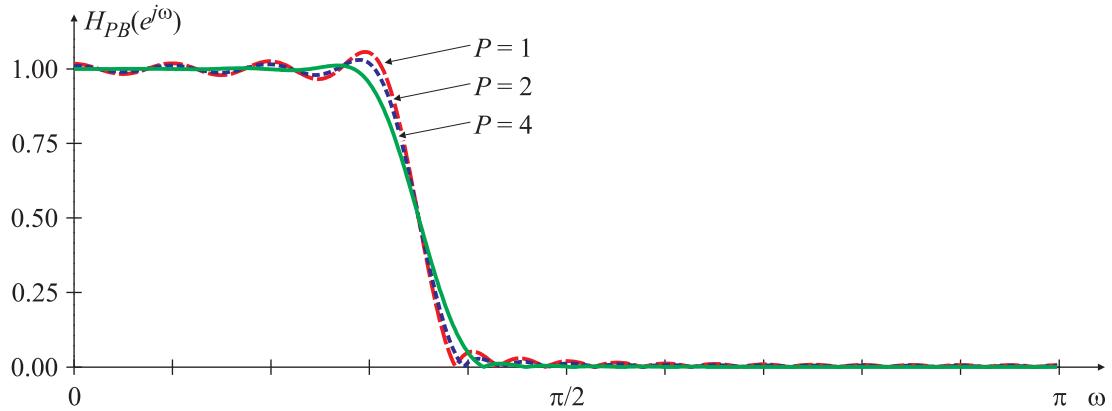


Fig. 3.A.46. Respuesta en frecuencia de un filtro con banda de transición suavizada para $N = 41$, y $P = 1, 2, 4..$

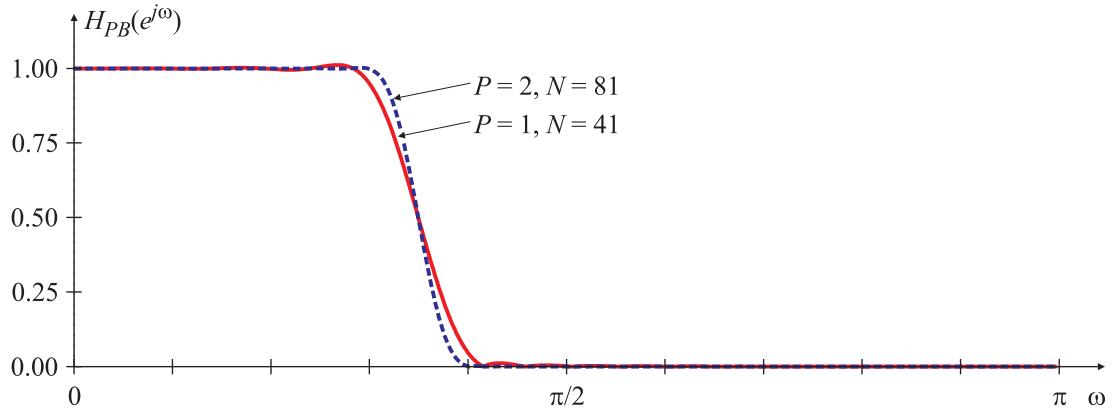


Fig. 3.A.47. Comparación de la respuesta en frecuencia para $N = 41, P = 1$ y $N = 81, P = 2$.

EJEMPLO 3.A.9. Diseño de un filtro pasabajos con banda de transición suavizada

Se desea diseñar un filtro FIR pasabajos con $\omega_p = 3\pi/10$ y $\omega_r = 4\pi/10 = 2\pi/5$, y $N = 41$ ($M = 20$). Entonces $\Delta\omega_T = \omega_r - \omega_p = \pi/10$, y $\omega_c = 35\pi/100 = 7\pi/20$. Aplicando (3.A.21), se encuentra que el P óptimo es $P = 1$, y de (3.A.20) se tiene que

$$h_{LP}^{(1)}[n] = \frac{7}{20} \operatorname{sinc}\left(\frac{n-20}{10}\right) \operatorname{sinc}\left[\frac{7(n-20)}{20}\right].$$

Para comparar, se calculan filtros utilizando polinomios interpoladores de segundo orden ($P = 2$) y de cuarto orden ($P = 4$), obteniéndose

$$\begin{aligned} h_{LP}^{(2)}[n] &= \frac{7}{20} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{n-20}{20}\right) \right]^2 \operatorname{sinc}\left[\frac{7(n-20)}{20}\right], \\ h_{LP}^{(4)}[n] &= \frac{7}{20} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{n-20}{40}\right) \right]^4 \operatorname{sinc}\left[\frac{7(n-20)}{20}\right], \end{aligned}$$

con $0 \leq n \leq 40$. En la Fig. 3.A.46 se comparan las respuestas en frecuencia de los filtros, observándose que la respuesta con $P = 2$ tiene menor ondulación que la de $P = 1$, pero mayor que la de $P = 4$. Además, como la longitud es la misma en los tres casos, la banda de transición es más amplia

a medida que crece P . Aumentando la longitud del FIR se puede obtener una menor ondulación en la banda de paso, pues de acuerdo con (3.A.21) el P óptimo es mayor. En la Fig. 3.A.47 se comparan la respuesta en frecuencia del filtro de longitud $N = 41$ ($M = 20$) y $P = 1$ con la respuesta del filtro de longitud $N = 81$ ($M = 20$), $P = 2$, y puede apreciarse que efectivamente la ondulación es menor. \square

3.A.7. Respuestas en frecuencia de filtros FIR reales

Una vez que se han calculado los coeficientes de la respuesta impulsiva, ya se truncando la respuesta impulsiva del filtro ideal con una ventana de truncación, o calculando la respuesta que resulta de suavizar las bandas de transición, la *implementación* del filtro FIR en un procesador digital de señales es más o menos directa. Si bien es necesario tener en cuenta algunos recaudos, que se tratan en detalle en los apuntes de laboratorio, en el caso de filtros FIR no suele haber grandes diferencias entre las respuestas calculadas en el proceso de diseño con las medidas experimentalmente en el laboratorio.

Se muestran a continuación los resultados de cuatro implementaciones. Las dos primeras son los filtros pasabajas sencillos, con frecuencia de corte en $\omega_c = \pi/2$, que se estudiaron en el Ejemplo 3.A.1. Estos filtros se implementaron en un procesador digital de señales DSP56303 de Freescale Semiconductors, de punto fijo, ancho de palabra de 25 bits, y frecuencia de muestreo de 8 kHz.

La respuesta en frecuencia del filtro pasabajas simple con frecuencia de corte en $\omega_c = \pi/2$ de longitud $N = 2M + 1 = 15$ términos obtenido por truncación de la respuesta impulsiva del filtro ideal con una ventana rectangular se muestra en la Fig. 3.A.48(a) en una escala lineal de amplitud, y en la Fig. 3.A.48(b) con escala en dB, representada por un trazo continuo. La respuesta para el filtro de longitud $N = 2M + 1 = 31$ se representan en las Fig. 3.A.48(c), en escala lineal y Fig. 3.A.48(d) en escala logarítmica. Para ambos filtros, la respuesta en frecuencia medida es prácticamente idéntica a la respuesta calculada en el Ejemplo 3.A.1, representada por línea de trazos. Existe una pequeña diferencia en baja y alta frecuencia, que es causada por la respuesta en frecuencia del conversor analógico/digital, que bloquea las componentes de continua, y filtra las señales que están por encima de los 4 kHz.

Las respuestas en frecuencia que se obtienen al truncar la respuesta impulsiva del filtro ideal utilizando una ventana de von Hann se muestran en las Fig. 3.A.49(a) y (b), en escala lineal y en dB, respectivamente, para un filtro de largo $N = 2M + 1 = 15$, en las Fig. 3.A.49(c) y (d), en escala lineal y en dB, para el filtro de largo $N = 2M + 1 = 31$. Con línea continua se representan las respuesta medidas, y con línea de trazos las respuestas calculadas en el Ejemplo 3.A.2. Nuevamente se nota una pequeña diferencia entre las respuestas en alta y en baja frecuencia, causadas por el conversor analógido/digital; en el resto del ancho de banda las respuestas medidas y las calculadas son indistinguibles.

Estas figuras ratifican las ventajas que se obtienen al aplicar ventanas de truncación distintas de la rectangular. Mientras que con la ventana rectangular sólo se obtiene una atenuación de aproximadamente 25 dB en la banda de rechazo, esta crece a más de 40 dB cuando se utiliza la ventana de von Hann. El inconveniente es que se incrementa bastante la banda de transición, y para tener una transición más abrupta entre la banda de paso y la banda de rechazo es necesario aumentar mucho el largo (orden) del filtro.

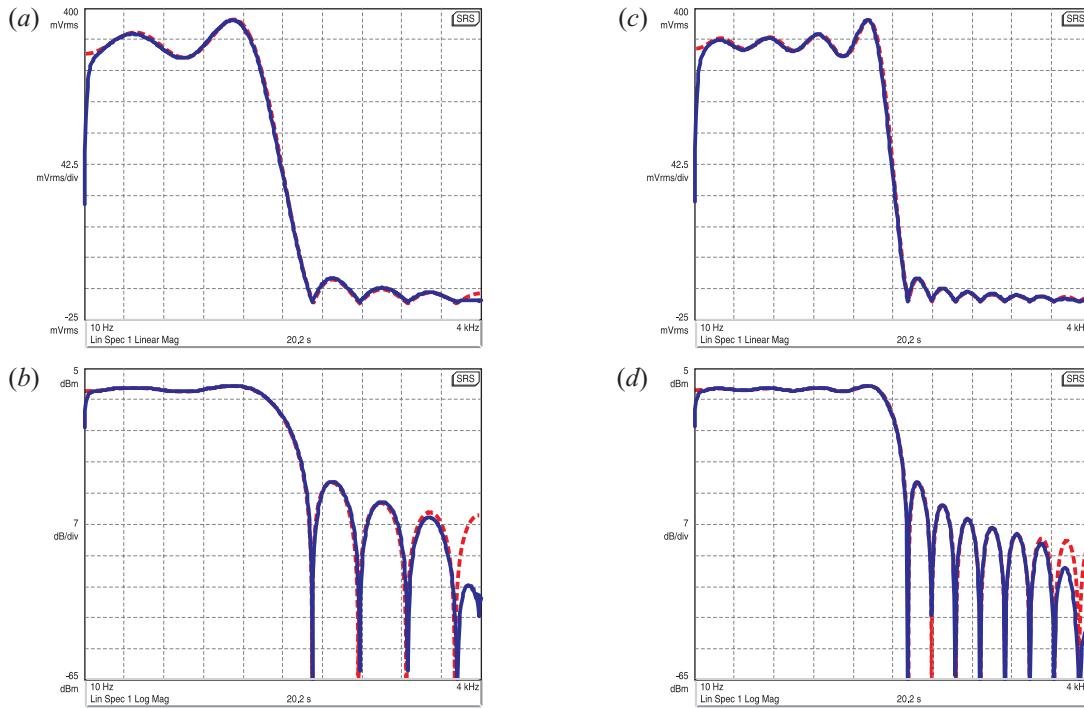


Fig. 3.A.48. Comparación del módulo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado medido (—) y calculado (···) para $M = 7$ en escala lineal (a) y en dB (b), y para $M = 15$ en escala lineal (c) y en dB (d).

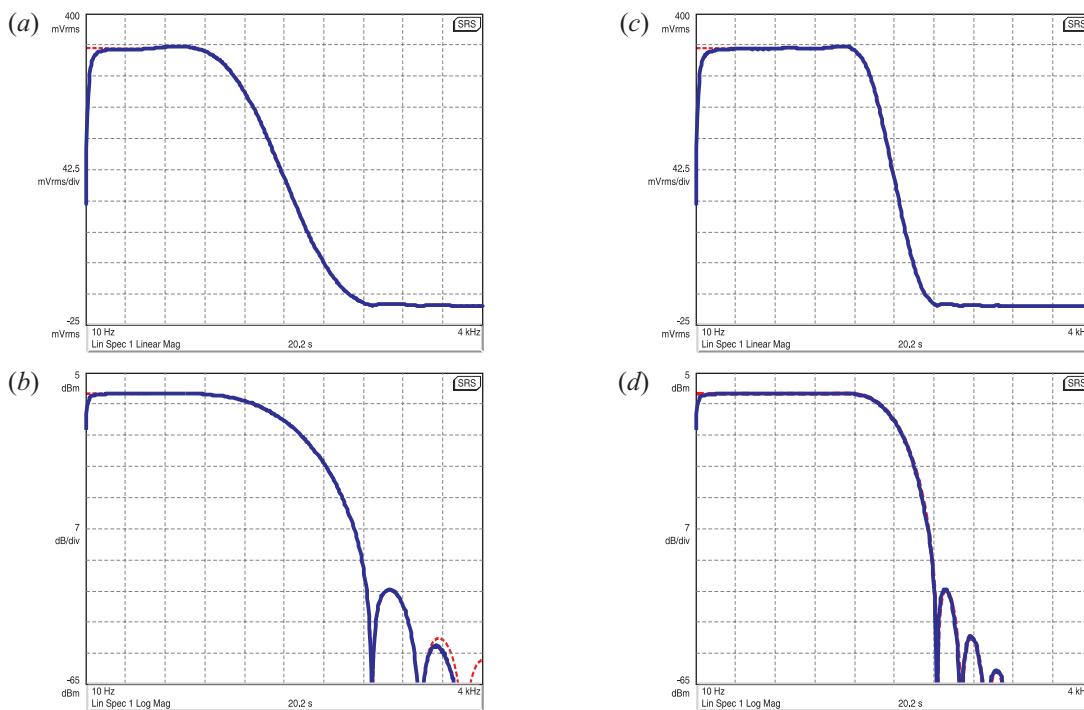


Fig. 3.A.49. Comparación del módulo de la respuesta en frecuencia del filtro truncado con ventana de von Hann medido (—) y calculado (···) para $M = 7$ en escala lineal (a) y en dB (b), y para $M = 15$ en escala lineal (c) y en dB (d).

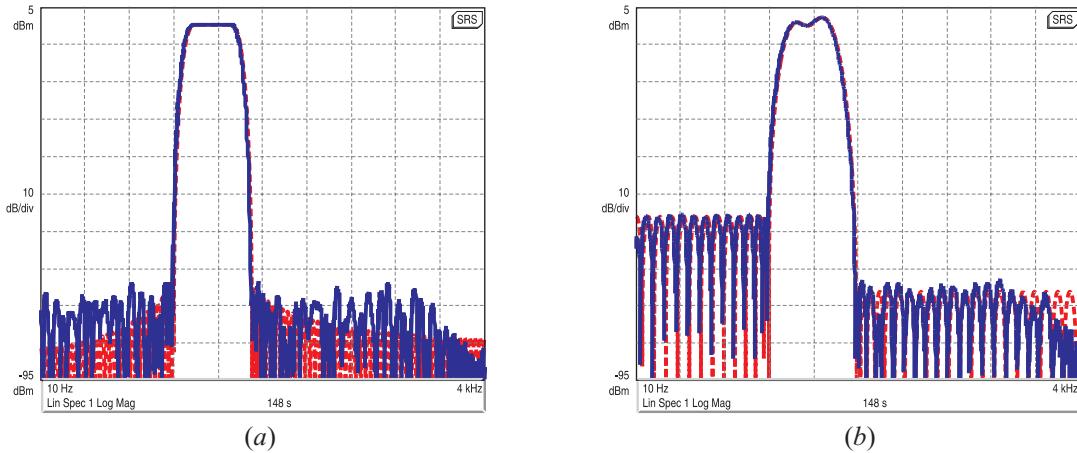


Fig. 3.A.50. Comparación del módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasabanda del Ejemplo 3.A.7 truncado con ventana de Kaiser de largo $N = 175$ (a) y el filtro óptimo de la Fig. 3.A.44 de largo $N = 75$ (b) medido (—) y calculado (···).

La tercera y cuarta implementación tratan sobre filtros más interesantes: se refieren al filtro pasabanda diseñado con ventana de Kaiser del Ejemplo 3.A.7, y el filtro óptimo diseñado para satisfacer las mismas especificaciones cuya respuesta en frecuencia se muestra en la Fig. 3.A.44. Estos filtros, de longitud mucho mayor a los anteriores, se implementaron en un DSP TMS320C5515 de Texas Instruments, de punto fijo y 16 bis de ancho de palabra, con una frecuencia de muestreo de 8 kHz. Las atenuaciones exigidas en la banda de rechazo son más grandes (50 dB y 70 dB) y empiezan a observarse algunos inconvenientes que no se había manifestado con los filtros anteriores.

Para la implementación del filtro diseñado con la ventana de Kaiser el comportamiento medido en la banda de paso es idéntico al calculado, como se observa en la Fig. 3.A.50(a). Sin embargo, en las bandas de rechazo la atenuación medida no es tan uniforme como la calculada. Aún así, sigue cumpliendo con los requisitos de diseño. Este comportamiento se debe a problemas numéricos que resultan de utilizar aritmética de precisión finita, tanto por la cuantización de los coeficientes, como por la precisión finita de las operaciones (sumas y productos) que deben ejecutarse para calcular la salida del filtro.

En la respuesta medida para el filtro diseñado por métodos óptimos que se muestra en la Fig. 3.A.50(b) el comportamiento en la banda de paso es el mismo que el representado en la Fig. 3.A.44. El comportamiento en la banda de rechazo es bastante parecido, y las diferencias entre las mediciones y los cálculos son menores que para el filtro truncado con la ventana de von Hann. Esto se debe a que el filtro óptimo tiene menos longitud (75 muestras frente a 175), y por lo tanto la propagación de errores es menor.

En resumen, el diseño de filtros FIR es relativamente sencillo, y las implementaciones en un procesador funcionan “razonablemente bien” sin necesidad de preocuparse demasiado por cuestiones numéricas tales como truncación de coeficientes o los errores causados por la aritmética de precisión finita. Por este motivo, y también por la posibilidad de diseñar filtros con distorsión de fase nula, en los principios del procesamiento digital de señales los algoritmos de diseño y las técnicas de implementación de este tipo de filtros tuvieron un gran desarrollo.

3. B

Tipos de convergencia

Determinar la clase de sucesiones que se pueden representar como

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

es equivalente a considerar la convergencia de la suma infinita en

$$\sum_n x[n] e^{-j\omega}.$$

En otras palabras, interesa conocer qué condiciones deben satisfacer los términos de la sumatoria de manera que

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \quad \text{para todo } \omega,$$

donde $X(e^{j\omega})$ es el límite para $M \rightarrow \infty$ de la suma finita $X_M(e^{j\omega})$ definida como

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} x[n] e^{-j\omega n}.$$

Una condición suficiente para la convergencia puede encontrarse teniendo en cuenta que

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_n x[n] e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_n |x[n]| |e^{-j\omega n}| = \sum_n |x[n]|$$

Si la sucesión $x[n]$ es *absolutamente sumable*, es decir si $\sum_n |x[n]| < \infty$, entonces $X(e^{j\omega})$ existe. Ya que por definición una sucesión es absolutamente sumable si y sólo si es estable, como se estudió en la Sección 3.5.3.2, todas las sucesiones estables tienen transformada de Fourier. Se desprende entonces que cualquier *sistema* estable tiene una respuesta en frecuencia continua y finita para todo valor de ω . En particular, como los sistemas tipo FIR son estables, *todo sistema FIR tiene representación en series de Fourier*. En los Ejemplos 3.42, 3.45, 3.46, 3.88 se calcularon las transformadas de Fourier (entonces llamadas respuestas en frecuencia) de las sucesiones $h[n] = \delta[n - n_d]$ (retardador ideal), $h[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$ (diferencias hacia atrás), $h[n] = \delta[n + 1] - \delta[n]$ (diferencias hacia

adelante) y $h[n] = (u[n + M_1] - u[n - M_2 - 1]) / (M_1 + M_2 + 1)$ (promediador) y en todos los casos, las trasnformadas son funciones continuas y suaves de ω .

Si la sucesión $x[n]$ es absolutamente sumable, se puede mostrar que la serie de sumas parciales $X_M(e^{j\omega})$ converge *uniformemente* a una función continua de ω . Por *convergencia uniforme* se entiende que, dado un número real $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeño, existe un número entero N , usualmente grande, tal que

$$|X_L(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})| < \varepsilon, \quad \text{para todo } \omega, \text{ y para todo } L \text{ y } M \text{ mayores que } N.$$

Esto es, dadas dos aproximaciones que suman $\pm L$ y $\pm M$ términos de la TFTD, la diferencia ε entre ambas se puede hacer tan pequeña como se desee para todo valor de ω , siempre que L y M sean mayores que un determinado número N , que depende sólo del valor que se elija para ε . Si este valor de N depende no sólo de ε , sino también del valor de la frecuencia ω para la que se realiza la comparación, se dice que la convergencia es *no uniforme*.

En el Ejemplo 3.48 se calculó la transformada de Fourier de $h[n] = a^n u[n]$, que es una sucesión de longitud infinita, y se encontró que la transformada de Fourier existe y es una función suave y continua de ω siempre que $|a| < 1$. El siguiente ejemplo muestra que las sumas parciales de la TFTD de esta sucesión son uniformemente convergentes.

EJEMPLO 3.B.1. Convergencia uniforme de la transformada de $x[n] = a^n u[n]$

Para la sucesión $x[n] = a^n u[n]$, las sumas parciales de su TFTD son

$$\begin{aligned} X_L(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-L}^L x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^L a^n e^{-j\omega n} = \frac{1 - (ae^{-j\omega})^{L+1}}{1 - ae^{-j\omega}}, \\ X_M(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^M a^n e^{-j\omega n} = \frac{1 - (ae^{-j\omega})^{M+1}}{1 - ae^{-j\omega}}. \end{aligned}$$

Con un poco de álgebra se puede mostrar que

$$X_L(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega}) = \frac{-(ae^{-j\omega})^{L+1} + (ae^{-j\omega})^{M+1}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

y si se supone, sin pérdida de generalidad que $L < M$, entonces

$$|X_L(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})| \leq \frac{a^{L+1}}{1 - |a|}.$$

Por lo tanto, si se desea que

$$|X_L(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})| \leq \varepsilon$$

basta con elegir

$$\left\lceil \frac{\ln[\varepsilon(|a|^{-1} - 1)]}{\ln a} \right\rceil = N(\varepsilon) < L < M.$$

Como N depende de ε pero no de ω , la convergencia es uniforme. Haciendo tender $M \rightarrow \infty$, se puede escribir

$$|X_L(e^{j\omega}) - X(e^{j\omega})| \leq \varepsilon \quad \text{para } L > N(\varepsilon).$$

En la Fig. 3.B.1(a) se grafica el módulo de la respuesta en frecuencia de $X(e^{j\omega})$ y de $X_L(e^{j\omega})$ para $L = 2, 4, 10$. Para $L = 20$ es casi imposible distinguir $X_L(e^{j\omega})$ de $X(e^{j\omega})$. Esta figura permite apreciar que a medida que L crece, la diferencia entre $X_L(e^{j\omega})$ y $X(e^{j\omega})$ se puede hacer arbitrariamente pequeña para cualquier valor de ω . En la Fig. 3.B.1(b) se muestra cómo varía ε en función de N , poniendo en evidencia que elegida cualquier cota ε tan pequeña como se deseé, siempre existe un $N(\varepsilon)$ que asegura que $|X_L(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})| \leq \varepsilon$ para todo ω y para $M > L > N(\varepsilon)$. \square

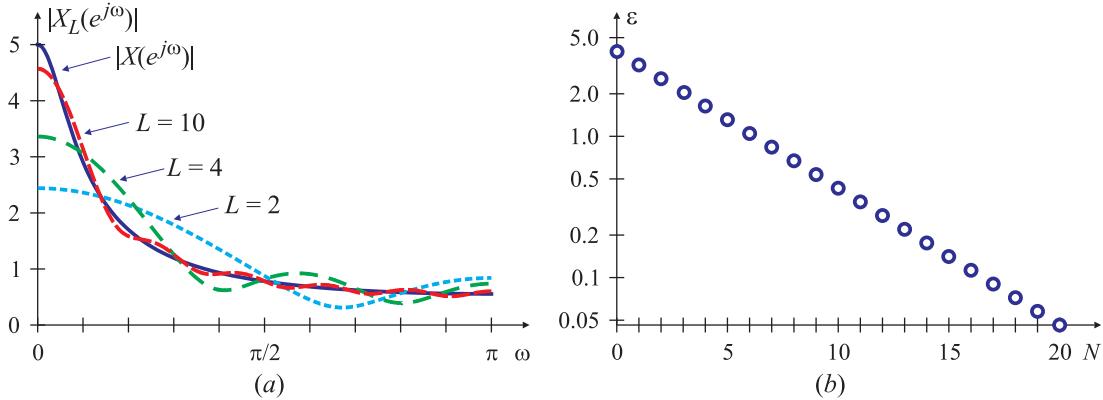


Fig. 3.B.1. Sucesión de transformadas $|X_L(e^{j\omega})|$ (a) y variación de la cota ϵ en función de N (b).

Que la sucesión sea absolutamente sumable es una condición *suficiente* para la existencia de la transformada de Fourier, y también para garantizar la convergencia uniforme. Sin embargo, hay muchas sucesiones que no son absolutamente sumables (y por lo tanto no tienen transformadas de Fourier suaves y continuas en ω) pero sí son de *cuadrado* sumables, es decir que

$$\sum_n |x[n]| \rightarrow \infty, \quad \text{pero} \quad \sum_n |x[n]|^2 < \infty.$$

Estas sucesiones pueden representarse por transformadas de Fourier, y en este caso la sumatoria (3.154) que define $X(e^{j\omega})$ converge *en media cuadrática* en lugar de uniformemente. Esto es: si

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]e^{-j\omega n},$$

y

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n},$$

se encuentra que

$$\int_{2\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega < \epsilon \text{ para todo } M < N(\epsilon)$$

Esta expresión indica que la diferencia entre las áreas tiende a cero cuando $M \rightarrow \infty$, pero no asegura que $X_M(e^{j\omega}) \rightarrow X(e^{j\omega})$ con la misma “velocidad” para cada valor de ω .

Este es el caso de los filtros FIR diseñados por truncación de la respuesta impulsiva del filtro ideal. En particular la expresión anterior permite mostrar que la respuesta en frecuencia $H_T(e^{j\omega})$ del filtro obtenido por truncación de la respuesta impulsiva del filtro ideal $h_i[n]$ usando una ventana rectangular es la que minimiza el error cuadrático medio respecto de la respuesta en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ del filtro ideal.

Si $H_i(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia del filtro ideal con respuesta impulsiva $h_i[n]$, y $H_T(e^{j\omega})$ la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva truncada $h_T[n]$,

donde $h_T[n]$ y $h[n]$ están relacionadas por (3.A.1), es decir

$$h_T[n] = \begin{cases} h_i[n], & -M \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (3.B.1)$$

el error medio cuadrático \mathcal{E} entre $H_i(e^{j\omega})$ y $H_T(e^{j\omega})$ es

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_T(e^{j\omega}) - H_i(e^{j\omega})|^2 d\omega,$$

donde

$$H_T(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} h[n] e^{-j\omega n}.$$

Aplicando el teorema de convolución frecuencial o ventaneo, $H_T(e^{j\omega})$ también puede expresarse como

$$H_T(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\operatorname{sen}[(2M+1)(\sigma - \omega)/2]}{\operatorname{sen}[(\sigma - \omega)/2]} d\sigma.$$

Ninguna de estas dos expresiones es conveniente para calcular el error medio cuadrático. Sin embargo, aplicando la relación de Parseval el cálculo es trivial:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_T(e^{j\omega}) - H_i(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_T[n] - h_i[n]|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-M-1} |h_i[n]|^2 + \sum_{n=-M}^{M} |h_T[n] - h_i[n]|^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty} |h_i[n]|^2 \\ &= \sum_{n=-M}^{M} |h_T[n] - h_i[n]|^2 + 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} |h_i[n]|^2. \end{aligned} \quad (3.B.2)$$

La expresión (3.B.2) muestra que, fijado $N = 2M + 1$, para que la integral \mathcal{E} del error cuadrático sea mínima la única elección posible es hacer $h_T[n] = h_i[n]$ para $-M \leq n \leq M$. Esta elección de $h_T[n]$ hace que se cancele el primer término de la suma en (3.B.2); el segundo término es la suma de las muestras desde $M + 1$ hasta infinito de la “cola” del sinc. En otras palabras, para un orden de filtro $N = 2M + 1$ dado, la mejor aproximación a la respuesta en frecuencia del filtro con respuesta impulsiva no causal e infinitamente larga *en el sentido de minimizar la integral del error cuadrático* es la *truncación* de los coeficientes de la respuesta impulsiva ideal con una ventana rectangular. Cualquier otra elección de los coeficientes del filtro truncado hará que la primera sumatoria de (3.B.2) no se anule, y por lo tanto la integral del error medio cuadrático de la respuesta en frecuencia de esa elección será mayor que si se hubiese usado una ventana rectangular.

Si se desea expresar el error medio cuadrático \mathcal{E} en función del largo del filtro truncado con ventana rectangular, la ecuación (3.B.2) establece que

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_T(e^{j\omega}) - H_i(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} |h_i[n]|^2$$

pero esta expresión no es muy conveniente porque es una suma infinita de muestras de un sinc al cuadrado. En el caso de los filtros ideales, en que la respuesta en frecuencia

es unitaria en una banda, y nula en el resto, es conveniente encontrar una expresión alternativa. Notando que

$$\mathcal{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_T[n] - h_i[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_i^2[n] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2h_i[n]h_T[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_T^2[n],$$

y teniendo en cuenta (3.B.1) la ecuación anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_i^2[n] - \sum_{n=-M}^M 2h_i[n]h_T[n] + \sum_{n=-M}^M h_T^2[n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_i^2[n] - \sum_{n=-M}^M h_T^2[n]. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando Parseval se encuentra que

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |H_i(e^{j\omega})|^2 d\omega - \sum_{n=-M}^M h_T^2[n]. \quad (3.B.3)$$

Esta expresión es conveniente porque el área (al cuadrado) de un filtro ideal es fácil de calcular, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.B.2. Error medio cuadrático de un filtro FIR truncado con ventana rectangular

En el Ejemplo 3.67 se encontró que un filtro pasabajos ideal con respuesta en frecuencia

$$H_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi, \end{cases}$$

tiene respuesta impulsiva

$$h_i[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right).$$

Esta respuesta impulsiva no es absolutamente sumable para ningún valor de ω_c (salvo $\omega_c = 0$ o $\omega_c = \pi$, que corresponden a filtros poco interesantes) y por lo tanto la respuesta en frecuencia $H_T(e^{j\omega})$ del filtro truncado no converge uniformemente a la respuesta en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ del filtro ideal. Sin embargo, sí converge en media cuadrática. El error medio cuadrático entre la respuesta ideal y la respuesta del filtro con respuesta impulsiva truncada a $\pm M$ muestras está dado por (3.B.3). En este caso es sencillo verificar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |H_i(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{\omega_c}{\pi},$$

y por lo tanto

$$\mathcal{E} = \frac{\omega_c}{\pi} - 2 \sum_{n=1}^M \left[\frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right) \right]^2.$$

La variación del error medio cuadrático \mathcal{E} para ω_c variando entre 0 y π y para distintos valores de M se muestra en la Fig. 3.B.2(a). \square

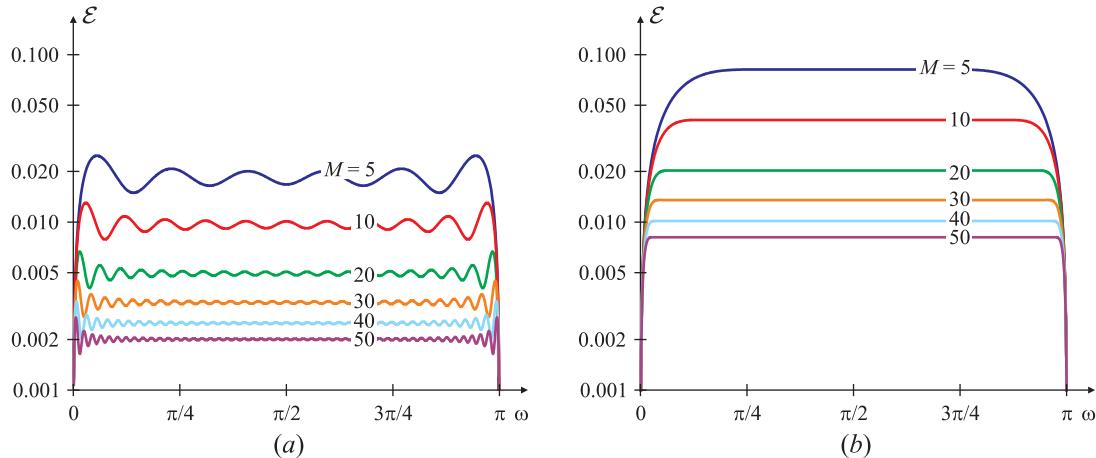


Fig. 3.B.2. Error medio cuadrático para distintos valores de M en función de la frecuencia de corte ω_c para un filtro diseñado con una respuesta impulsiva truncada a $\pm M$ con una ventana rectangular (a) y una ventana de Hamming (b).

Aunque las respuestas en frecuencia de los filtros obtenidas por truncación son bastante diferentes de las de los filtros ideales, esta forma de diseño de filtros es muy utilizada en la práctica. Como las ondulaciones en la banda de paso y de rechazo dependen exclusivamente de la forma de la respuesta en frecuencia $W(e^{j\omega})$ de la ventana temporal $w[n]$ que se usa para truncar la respuesta impulsiva de longitud infinita $h_i[n]$ del filtro ideal, el desempeño del filtro puede mejorarse cambiando la forma en que se truncan los coeficientes $h_i[n]$.

EJEMPLO 3.B.3. Error medio cuadrático de un filtro FIR truncado con ventana de von Hann

Si la respuesta impulsiva $h_T[n]$ del filtro truncado se elige de otra manera, por ejemplo truncando la respuesta impulsiva del filtro ideal con una ventana de von Hann,

$$h_T[n] = \begin{cases} w[n]h_i[n], & -M \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde

$$w[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{2M+1}n\right),$$

el error medio cuadrático no puede calcularse con (3.B.3) porque esta expresión se obtuvo asumiendo que $h_T[n] = h_i[n]$ para $-M \leq n \leq M$. El error medio cuadrático se calcula entonces con (3.B.2), y su valor para para distintos valores de ω_c y M se muestra en la Fig. 3.B.2(b). Es evidente que para una longitud M dada, el error medio cuadrático del filtro truncado con la ventana de von Hann es mayor que el del filtro truncado con la ventana rectangular. \square

La minimización de la integral del error medio cuadrático usualmente resulta en respuestas en frecuencia con ondulaciones, como se ha visto en los ejemplos anteriores. En general esta no es la respuesta en frecuencia deseada para los filtros: se prefiere que la respuesta sea plana, o que tenga una ondulación de amplitud reducida en la banda de paso o en la

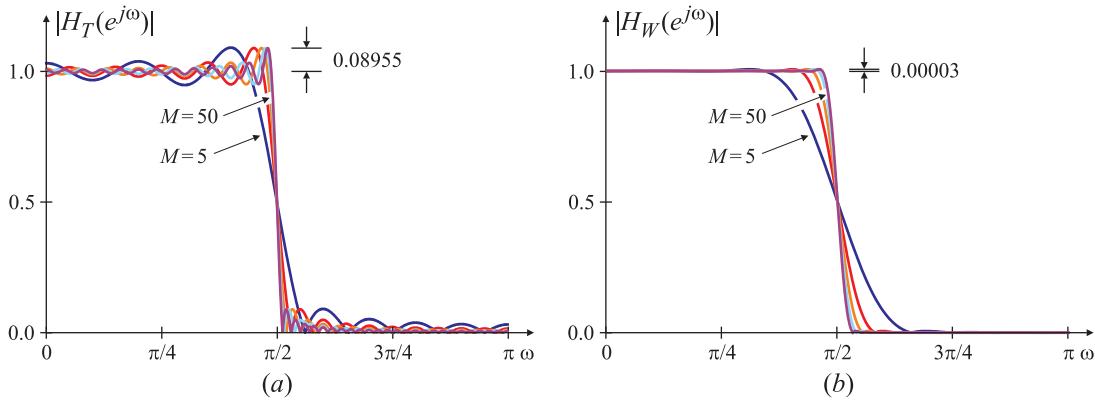


Fig. 3.B.3. Módulo de la respuesta en frecuencia para distintos valores de M para una frecuencia de corte $\omega_c = \pi/2$ para un filtro diseñado con una respuesta impulsiva truncada a $\pm M$ con una ventana rectangular (a) y una ventana de Hamming (b).

banda de rechazo. En otras palabras, se busca minimizar el máximo de la diferencia, que en ecuaciones podría escribirse como

$$\mathcal{E}_\infty = \max_{\omega \in W} |H_T(e^{j\omega}) - H_i(e^{j\omega})|.$$

En este caso, es mucho más complicado vincular este error con la respuesta impulsiva, y las herramientas matemáticas para diseñar la respuesta impulsiva que permita minimizar este error son mucho más complejas. Sin embargo, el método de diseño de filtros FIR utilizando ventanas permite obtener sobrepicos más pequeños que los de la ventana rectangular a cambio de algunas iteraciones de diseño hasta alcanzar el resultado final.

EJEMPLO 3.B.4. Error máximo en la respuesta en frecuencia de filtros FIR

En la Fig. 3.B.3 se muestra el módulo de la respuesta en frecuencia para un filtro con frecuencia de corte en $\omega_c = \pi/2$. La respuesta $|H_T(e^{j\omega})|$ del filtro truncado con una ventana rectangular se muestra en la Fig. 3.B.3(a) para distintos valores de M , y se observa que el sobreímpetu \mathcal{E}_∞ es de alrededor de un 9% para cualquier valor de M . En la Fig. 3.B.3(b) se muestra la respuesta del filtro con la misma frecuencia de corte, pero truncado con una ventana de von Hann. En este caso el valor del sobreímpetu \mathcal{E}_∞ es mucho menor, de sólo 0,03 %. \square

La Fig. 3.B.3 muestra que los filtros diseñados por truncación de la respuesta impulsiva no convergen uniformemente a la respuesta en frecuencia del filtro ideal: como el valor del sobreímpetu es el mismo independientemente del valor de M , como se estudió en el Apéndice A, el valor de $N(\varepsilon)$ para que $|H_i(e^{j\omega}) - H_T(e^{j\omega})| < \varepsilon$ es distinto para cada ω . La ventaja de truncar la respuesta con una ventana distinta de la rectangular es que se puede disminuir el error máximo de la aproximación. En el Capítulo 9 se verán técnicas óptimas para diseñar filtros cuyos sobrepicos queden limitados al rango deseado por el diseñador, minimizando la longitud del filtro.

Apéndice 3.C

Retardo de grupo y retardo de fase

Una medida conveniente de la linealidad de la fase es el *retardo de grupo*, que describe el efecto de la fase de la respuesta en frecuencia de un sistema sobre una señal de banda angosta. Esta señal está caracterizada como

$$x[n] = s[n] \cos(\omega_0 n), \quad (3.C.1)$$

donde $s[n]$ es una señal tipo pasabajo y con ancho de banda pequeño, es decir, $S(e^{j\omega}) = 0$ para $|\omega| > \Delta$, donde Δ es muy pequeño, y $\Delta \ll \omega_0$, como se representa en la Fig. 3.C.1(a). Es habitual denominar a $s[n]$ como señal *moduladora*, y a la señal $p[n] = \cos \omega_0 n$ como *portadora*. La forma de onda temporal y el espectro de esta señal se grafican en la Fig. 3.C.1(b). Como $x[n] = s[n] \times p[n]$, el espectro $X(e^{j\omega})$ es la convolución entre $S(e^{j\omega})$ y $P(e^{j\omega})$, y resulta en una señal de ancho de banda angosta, centrada en $\pm \omega_0$, como se ilustra en la Fig. 3.C.1(c).

Como

$$P(e^{j\omega}) = \sum_k \pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k),$$

la transformada de Fourier de la sucesión discreta (3.C.1) es

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta}) P(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta}) [\pi \delta(\omega - \theta - \omega_0) + \pi \delta(\omega - \theta + \omega_0)] d\theta \\ &= \frac{1}{2} S(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{1}{2} S(e^{j(\omega+\omega_0)}) \end{aligned}$$

Si esta señal excita un filtro discreto con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, representada en la Fig. 3.C.1(d), la transformada de Fourier de la salida $y[n]$ del sistema es

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2} H(e^{j\omega}) S(e^{j(\omega-\omega_0+2\pi k)}) + \frac{1}{2} H(e^{j\omega}) S(e^{j(\omega+\omega_0+2\pi k)}) \end{aligned} \quad (3.C.2)$$

como se muestra en la Fig. 3.C.1(d). La salida $y[n]$ del filtro está dada por

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

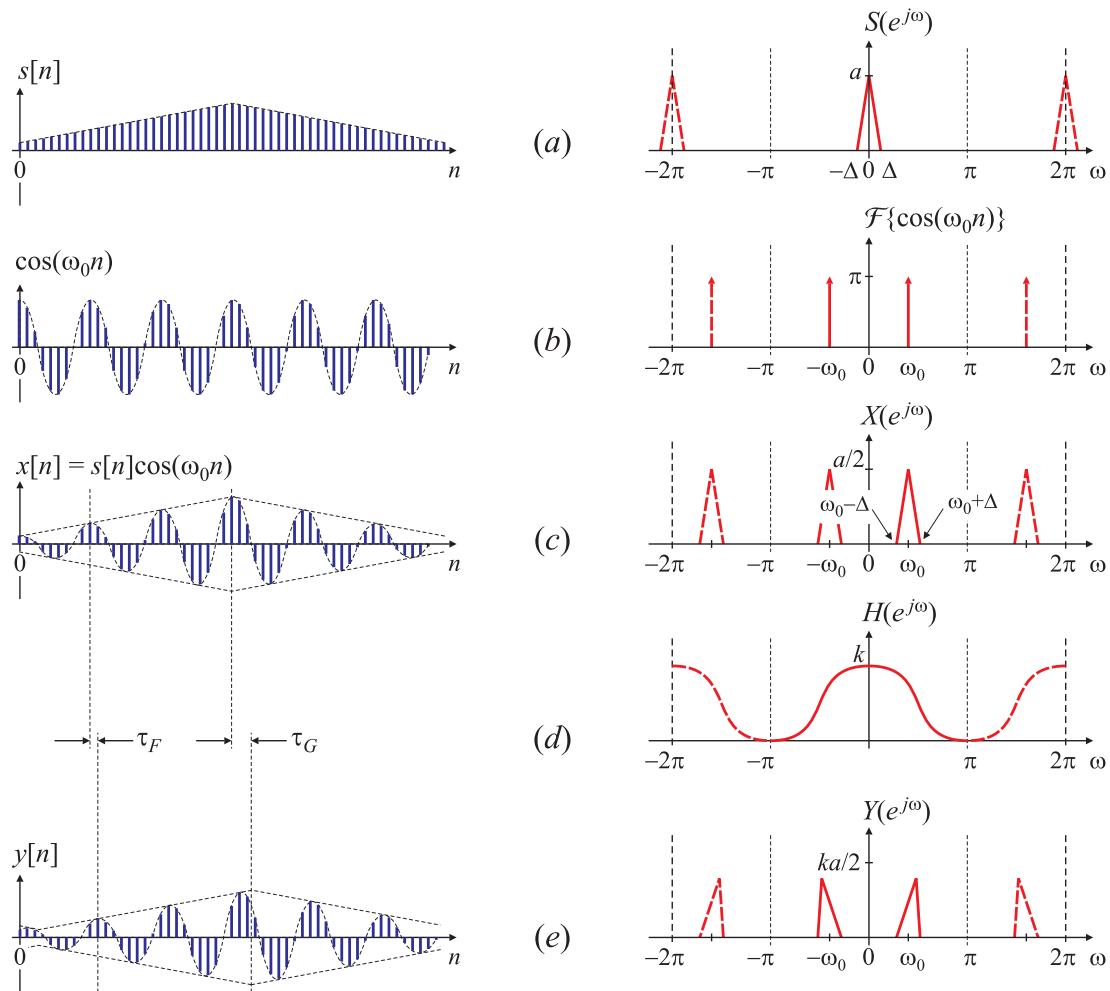


Fig. 3.C.1. Retardo de grupo y retardo de fase en una señal tipo pasabanda.

Como el intervalo de integración es $(-\pi, \pi]$, de las infinitas réplicas presentes en (3.C.2) sólo deben considerarse las correspondientes a $k = 0$. Además, ya que la señal $x[n]$ es de banda angosta, su espectro $X(e^{j\omega})$ es nulo en todo el intervalo $(-\pi, \pi]$ con excepción de las bandas $[-\omega_0 - \Delta, -\omega_0 + \Delta]$ y $[\omega_0 - \Delta, \omega_0 + \Delta]$, como se muestra en la Fig. 3.C.1(c), de manera que

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] \quad (3.C.3)$$

donde

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta}^{\omega_0 + \Delta} \frac{1}{2} H(e^{j\omega}) S(e^{j(\omega - \omega_0)}) e^{j\omega n} d\omega, \\ y_2[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0 - \Delta}^{-\omega_0 + \Delta} \frac{1}{2} H(e^{j\omega}) S(e^{j(\omega + \omega_0)}) e^{j\omega n} d\omega, \end{aligned}$$

Para calcular de manera explícita la salida deben estudiarse estas dos integrales. Se analiza en detalle la primera integral, ya que la segunda se puede derivar de manera similar. En primer lugar, conviene introducir un cambio de variables $\omega = \sigma + \omega_0$, de modo que

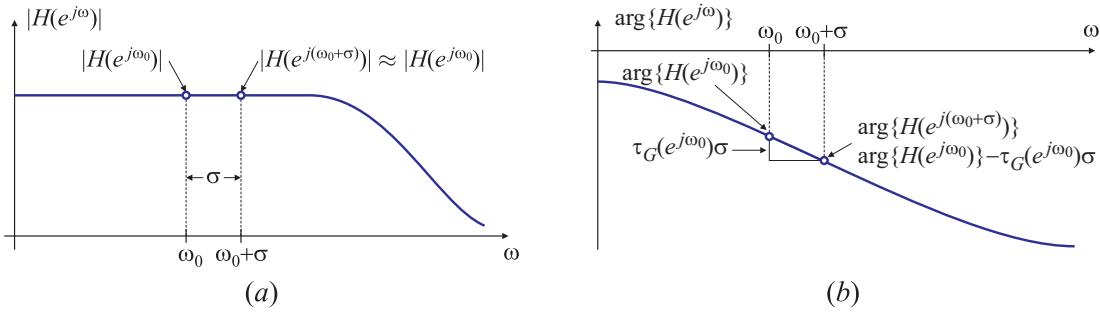


Fig. 3.C.2. Aproximación de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ en $H(e^{j(\omega_0+\sigma)})$.

$d\omega = d\sigma$, y entonces

$$y_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{2} H(e^{j(\omega_0+\sigma)}) S(e^{j\sigma}) e^{j\omega_0 n} e^{j\sigma n} d\sigma. \quad (3.C.4)$$

Como $\Delta \ll \omega_0$, $H(e^{j(\omega_0+\sigma)}) = |H(e^{j\omega_0+\sigma})| e^{j\arg[H(e^{j(\omega_0+\sigma)})]}$ se puede aproximar utilizando series de Taylor como

$$|H(e^{j\omega_0+\sigma})| \approx |H(e^{j\omega_0})| + \left. \frac{\partial}{\partial \omega} |H(e^{j\omega})| \right|_{\omega=\omega_0} \sigma, \quad (3.C.5)$$

$$\arg\{H(e^{j(\omega_0+\sigma)})\} \approx \arg\{H(e^{j\omega_0})\} + \left. \frac{\partial}{\partial \omega} \arg\{H(e^{j\omega})\} \right|_{\omega=\omega_0} \sigma, \quad (3.C.6)$$

como se muestra en la Fig. 3.C.2(a) y Fig. 3.C.2(b), respectivamente. Nuevamente, como el ancho de banda de $S(e^{j\omega})$ o de $X(e^{j\omega})$ es mucho más estrecho que el de $H(e^{j\omega})$, es razonable suponer que

$$\left. \frac{\partial}{\partial \omega} |H(e^{j\omega})| \right|_{\omega=\omega_0} \approx 0.$$

Sin embargo, esto no es necesariamente cierto para la variación de la fase, que puede ser significativa. Se define el *retardo de grupo* como la variación negativa de la fase de $H(e^{j\omega})$ en función de la frecuencia ω ,

$$\tau_G(e^{j\omega}) = -\left. \frac{\partial}{\partial \omega} \arg\{H(e^{j\omega})\} \right|_{\omega=\omega_0},$$

lo que permite expresar (3.C.6) como

$$\arg\{H(e^{j(\omega_0+\sigma)})\} \approx \arg\{H(e^{j\omega_0})\} - \tau_G(e^{j\omega_0})\sigma, \quad (3.C.7)$$

y entonces, de (3.C.5) y (3.C.7) se tiene que

$$H(e^{j(\omega_0+\sigma)}) \approx |H(e^{j\omega_0})| e^{j[\arg\{H(e^{j\omega_0})\} - \tau_G(e^{j\omega_0})\sigma]}. \quad (3.C.8)$$

En consecuencia, la salida $y_1[n]$ dada por la ecuación (3.C.4) se puede escribir como

$$y_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{2} |H(e^{j\omega_0})| e^{j\arg\{H(e^{j\omega_0})\}} e^{-j\tau_G(e^{j\omega_0})\sigma} S(e^{j\sigma}) e^{j\omega_0 n} e^{j\sigma n} d\sigma,$$

y reordenando los términos, resulta

$$y_1[n] = \frac{1}{2} |H(e^{j\omega_0})| e^{j \arg\{H(e^{j\omega_0})\}} e^{j\omega_0 n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} S(e^{j\sigma}) e^{j[n - \tau_G(e^{j\omega_0})]\sigma} d\sigma. \quad (3.C.9)$$

De acuerdo a las propiedades de la TDFT,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} S(e^{j\sigma}) e^{j[n - \tau_G(e^{j\omega_0})]\sigma} d\sigma = s[n - \tau_G(e^{j\omega_0})].$$

Por lo tanto (3.C.9) se puede poner como

$$y_1[n] = \frac{1}{2} H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} s[n - \tau_G(e^{j\omega_0})], \quad (3.C.10)$$

y de manera análoga, suponiendo que la respuesta impulsiva $h[n]$ de $H(e^{j\omega})$ es real,

$$y_2[n] = \frac{1}{2} H^*(e^{j\omega_0}) e^{-j\omega_0 n} s[n - \tau_G(e^{j\omega_0})], \quad (3.C.11)$$

Finalmente, de (3.C.10) y (3.C.11) resulta

$$\begin{aligned} y[n] &= |H(e^{j\omega_0})| s[n - \tau_G(e^{j\omega_0})] \cos\{\omega_0 n + \arg[H(e^{j\omega_0})]\} \\ &= |H(e^{j\omega_0})| s[n - \tau_G(e^{j\omega_0})] \cos\{[\omega_0 - \tau_F(e^{j\omega_0})]n\}, \end{aligned}$$

donde $\tau_F(e^{j\omega}) = -\arg\{H(e^{j\omega})\}/\omega$ es el *retardo de fase* del sistema $H(e^{j\omega})$.

En síntesis, definiendo el

$$\textbf{retardo de grupo} \quad \text{como} \quad \tau_G(e^{j\omega}) = -\frac{\partial}{\partial \omega} \arg\{H(e^{j\omega})\},$$

$$\textbf{retardo de fase} \quad \text{como} \quad \tau_F(e^{j\omega}) = -\frac{1}{\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\},$$

la salida del sistema con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ ante una excitación de banda angosta $x[n] = s[n] \cos(\omega_0 n)$, donde $s[n]$ es una señal tipo pasabajo, con $S(e^{j\omega}) = 0$ para $|\omega| > \Delta$, y $\Delta \ll \omega_0$ es

$$y[n] = |H(e^{j\omega_0})| s[n - \tau_G(e^{j\omega_0})] \cos\{[\omega_0 - \tau_F(e^{j\omega_0})]n\}.$$

Esta ecuación muestra que para una señal $x[n]$ de banda angosta, la fase de $H(e^{j\omega})$ aplica un retardo τ_G (retardo de grupo) a la envolvente $s[n]$ de la señal $x[n]$, y un retardo de τ_F (retardo de fase) a la portadora $\cos(\omega_0 n)$.

EJEMPLO 3.C.1. Retardo de grupo y retardo de fase en un filtro IIR

En la Fig. 3.C.3 se muestra la respuesta en frecuencia de un filtro elíptico de cuarto orden con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/4$, con ondulación de 1 dB en la banda de paso, y 40 dB en la banda de rechazo. El filtro se implementa como una cascada de dos secciones de segundo orden

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_{1,0} + b_{1,1}e^{-j\omega} + b_{1,2}e^{-j2\omega}}{a_{1,0} + a_{1,1}e^{-j\omega} + a_{1,2}e^{-j2\omega}} \times \frac{b_{2,0} + b_{2,1}e^{-j\omega} + b_{2,2}e^{-j2\omega}}{a_{2,0} + a_{2,1}e^{-j\omega} + a_{2,2}e^{-j2\omega}},$$

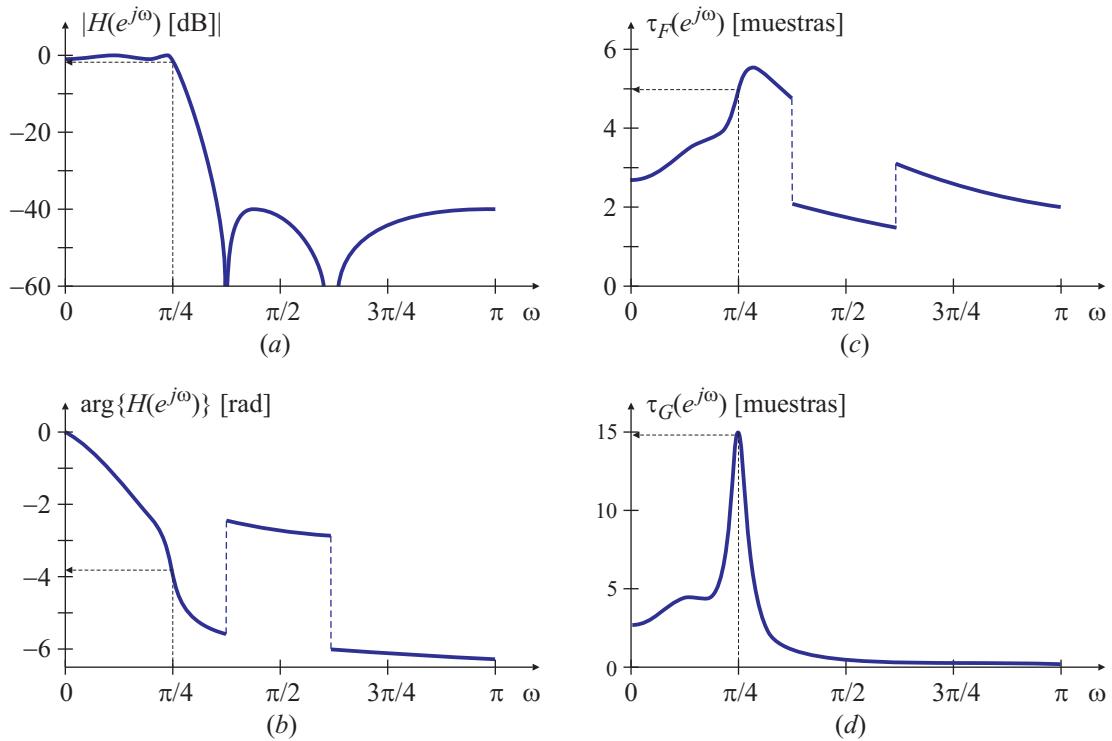


Fig. 3.C.3. Respuesta en frecuencia de un filtro elíptico de cuarto orden: módulo (a), fase (b), retardo de fase (c) y retardo de grupo (d).

donde

Sección	b_i	a_i
1	$b_{1,0} = +0,02636248173504$	$a_{1,0} = +1,0000000000000000$
	$b_{1,1} = +0,01905630958554$	$a_{1,1} = -1,37540781597787$
	$b_{1,2} = +0,02636248173504$	$a_{1,2} = +0,55745202060406$
2	$b_{2,0} = +1,0000000000000000$	$a_{2,0} = +1,0000000000000000$
	$b_{2,1} = -0,76923432315460$	$a_{2,1} = -1,31689024623849$
	$b_{2,2} = +1,0000000000000000$	$a_{2,2} = +0,86140502929003$

A continuación se estudia la respuesta del sistema ante dos excitaciones distintas.

- Si el filtro se excita con una señal *senoidal* del tipo $x[n] = A \cos \omega_0 n$, la salida $y[n]$ será

$$\begin{aligned} y[n] &= A |H(e^{j\omega_0})| \cos[\omega_0 n + \arg H(e^{j\omega_0})] \\ &= A |H(e^{j\omega_0})| \cos\{\omega_0 [n + \arg H(e^{j\omega_0})/\omega_0]\} \\ &= A |H(e^{j\omega_0})| \cos\{\omega_0 [n - \tau_F(e^{j\omega_0})]\}. \end{aligned}$$

A la frecuencia $\omega_0 = \pi/4$, se encuentra que

$$|H(e^{j\omega_0})| = 0,89125 \quad \text{y} \quad \arg\{H(e^{j\omega_0})\} = -3,86790 \text{ rad}$$

(Fig. 3.C.3), y por lo tanto

$$\tau_F(e^{j\omega_0}) = -\arg\{H(e^{j\omega_0})\}/\omega_0 = 4,9247 \text{ muestras.}$$

En consecuencia, la señal de salida $y[n]$ está dada por

$$y[n] = 0,89125A \cos[(\pi/4)(n - 4,9247)],$$

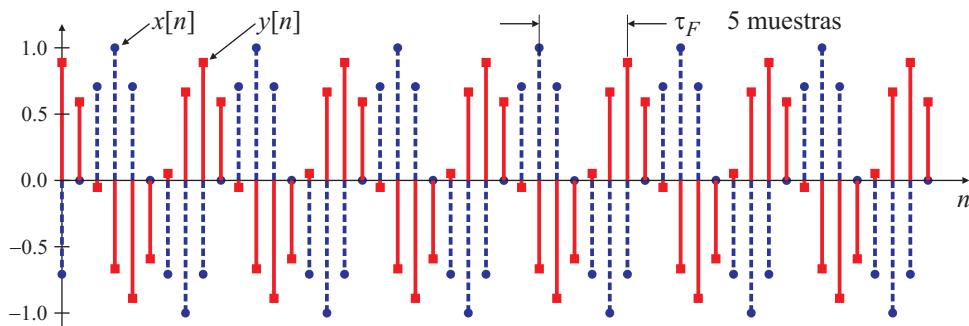


Fig. 3.C.4. Señales de entrada y de salida sinusoidales de frecuencia $\omega_0 = \pi/4$ para el filtro elíptico de cuarto orden.

que muestra que hay un retraso de fase $\tau_F(e^{j\omega_0})$ de casi 5 muestras (en realidad 4,9247 muestras) entre la señal de entrada y la señal de salida. Las entradas y salidas del sistema para esta excitación se muestran en la Fig. 3.C.4, donde se observa que el retraso de fase es idéntico al calculado.

- Si la excitación se cambia a una señal *modulada* $x[n] = s[n] \cos \omega_0 n$, donde $s[n]$ es una onda triangular, con frecuencia fundamental $\omega_m = 5\pi/400$, la forma de onda de salida será

$$y[n] = s[n - \tau_G(e^{j\omega_0})] |H(e^{j\omega_0})| \cos\{\omega_0[n - \tau_F(e^{j\omega_0})]\}.$$

De la Fig. 3.C.3 se observa que el retraso de grupo $\tau_G(e^{j\omega})$ a la frecuencia $\omega_0 = \pi/4$ es

$$\tau_G(e^{j\omega_0}) = 14,91859 \text{ muestras},$$

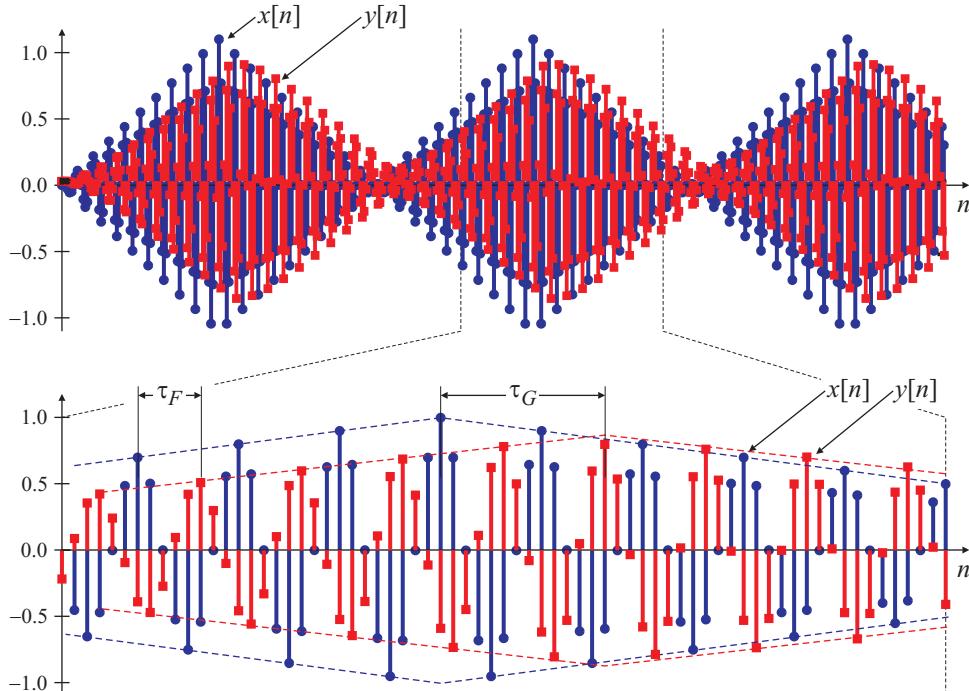


Fig. 3.C.5. Señales de entrada y de salida (sinusoidal de frecuencia $\omega_0 = \pi/4$ modulada por un triángulo de frecuencia $\omega_m = 5\pi/400$) para el filtro elíptico de cuarto orden.

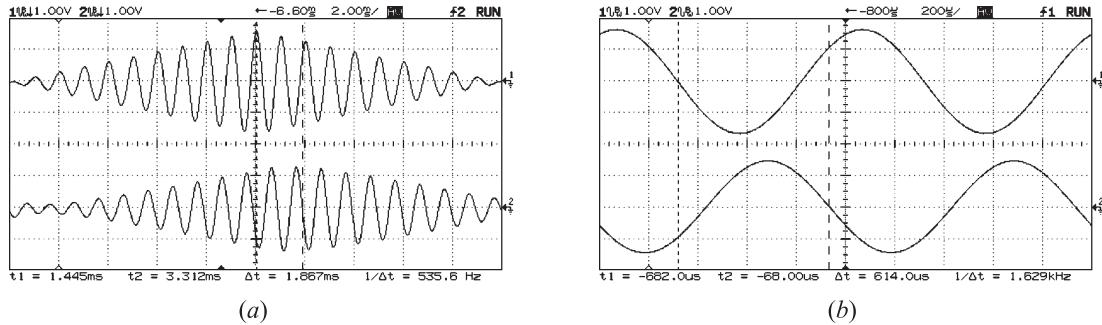


Fig. 3.C.6. Retardo de grupo (a) y retardo de fase (b) del filtro elíptico de la Fig. 3.C.3. Frecuencia de la portadora $\omega_0 = \pi/4$ (1 kHz); frecuencia fundamental de la moduladora $\omega_m = 5\pi/400$ (50 Hz).

y por lo tanto,

$$y[n] = 0,89125 s[n - 14,9186] \cos[(\pi/4)(n - 4,9247)].$$

En otras palabras, mientras que la portadora $\cos \omega_0 n$ se retarda 5 muestras aproximadamente, la envolvente $s[n]$ de la señal $x[n]$ se demora casi 15 muestras. Las señales de entrada y de salida del sistema para esta excitación se grafican en la Fig. 3.C.5, donde se puede apreciar que los retardos de la portadora y de la envolvente coinciden prácticamente con los calculados (retardo de fase τ_F y de grupo τ_G , respectivamente). \square

3.C.1. Medición del retardo de grupo

La medición del retardo de grupo puede ser difícil. Para medir con precisión, se necesita que el ancho de banda de la señal moduladora sea mucho menor que la frecuencia de la portadora, de modo que sean válidas las aproximaciones del módulo y la fase de la respuesta en frecuencia dadas por la ecuación (3.C.8). Pero esto dificulta la observación de las señales en el osciloscopio, precisamente por la gran diferencia entre ambas frecuencias que puede confundir al sistema de disparo, e impedir la obtención de una imagen estable.

EJEMPLO 3.C.2. Medición del retardo de grupo

En la Fig. 3.C.6 se observan las formas de onda de entrada y de salida *experimentales*, obtenidas de implementar el filtro en un sistema de desarrollo basado en el DSP56303 de Motorola. Las señales de entrada y de salida se muestran a $f_s = 8$ kHz, y por lo tanto los retardos de fase y de grupo expresados en unidades de tiempo, calculados como

$$\tau[\text{unidades de tiempo}] = \tau[\text{muestras}] / f_s$$

donde f_s es la frecuencia de muestreo, serán

$$\begin{aligned} \tau_F(e^{j\omega_0}) &= 4,9247 \text{ muestras} \equiv 0,615 \text{ ms}, \\ \tau_G(e^{j\omega_0}) &= 14,9186 \text{ muestras} \equiv 1,864 \text{ ms}. \end{aligned}$$

En la Fig. 3.C.6(a) se mide el retardo de grupo τ_G , es decir, la demora que sufre la envolvente de la señal al pasar por el filtro, y se aprecia que es muy cercano al valor calculado. En la Fig. 3.C.6(b) se amplía la zona central de la Fig. 3.C.6(a), observándose que el retardo de fase τ_F de la portadora, es también similar al valor calculado analíticamente. \square

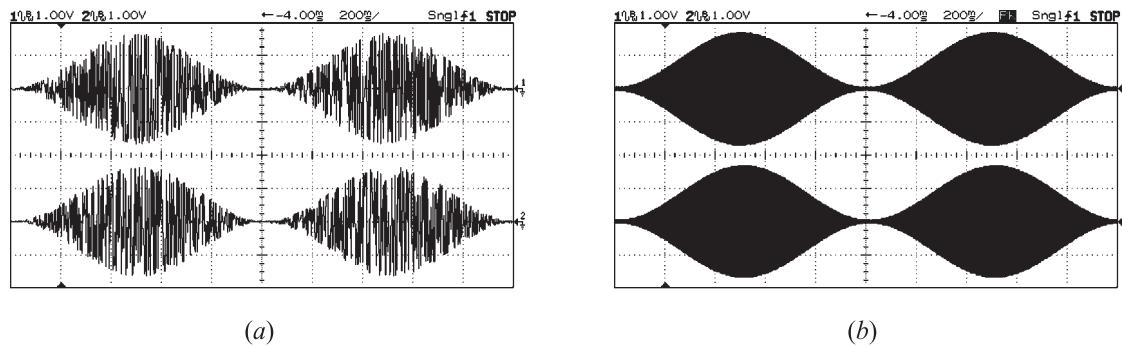


Fig. 3.C.7. Medición del retardo de grupo. Señales de entrada y salida graficada en modo normal (a), y en modo “pico a pico” (b).

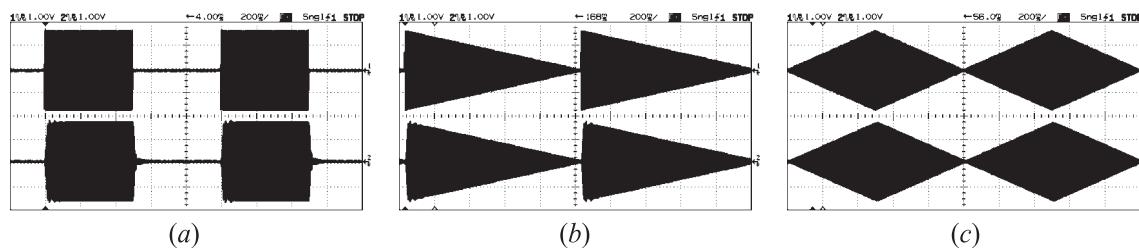


Fig. 3.C.8. Diferentes tipos de señales moduladoras para medir el retardo de grupo: onda cuadrada (a); rampa (b); onda triangular (c).

Sin embargo, aún cuando logre estabilizarse la imagen, la medición puede ser difícil, como ilustra la Fig. 3.C.7(a) donde se muestran las señales de entrada y salida del filtro tal como se observan normalmente en el osciloscopio. Debido a la diferencia de frecuencias entre la moduladora y la portadora, es difícil elegir un punto de referencia para medir el retardo entre ambas señales. En la Fig. 3.C.7(b) se muestra la misma señal pero graficada en modo “pico a pico”; esta representación facilita la elección de un punto de referencia.

La Fig. 3.C.7 indica que para medir el retardo con precisión, también es relevante la forma de onda de la señal moduladora. En la Fig. 3.C.8 se observan otros tipos de modulaciones: una onda cuadrada [Fig. 3.C.8(a)], una rampa [Fig. 3.C.8(b)], y una onda triangular [Fig. 3.C.8(c)]. Se aprecia que tanto con la onda sinusoidal, con la señal cuadrada o con la rampa es difícil determinar la diferencia de tiempo entre la entrada y la salida, pues la suavidad de la variación de la primera y el transitorio que se observa en la salida de las dos últimas (que, además, no son de ancho de banda limitada) impide elegir una referencia apropiada. Sin embargo, la modulación triangular [Fig. 3.C.8(c)] parece adecuada para efectuar la medición. Por ello se utilizó este tipo de modulación en el Ejemplo 3.C.1.

En los siguientes ejemplos se compara el retardo de grupo calculado analíticamente con el retardo medido para un filtro pasabanda angosto cuyas especificaciones son

Banda de paso:	950 Hz a 1050 Hz
Banda de rechazo:	0 Hz a 900 Hz y 1100 Hz a 4000Hz
Atenuación máxima en la banda de paso (A_p):	1 dB
Atenuación mínima en la banda de rechazo (A_r):	40 dB
Frecuencia de muestreo (F_s)	8000 Hz

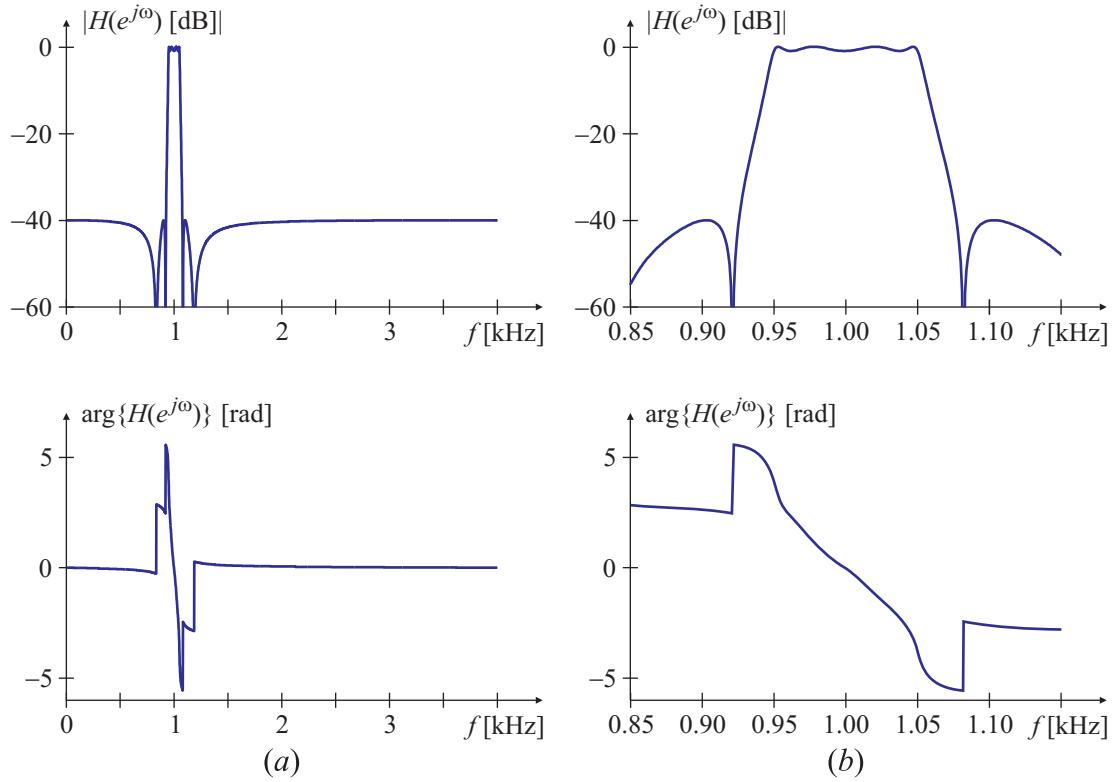


Fig. 3.C.9. Respuesta en frecuencia del filtro IIR del Ejemplo 3.C.3: en la banda de Nyquist (a); detalle de la banda de paso (b).

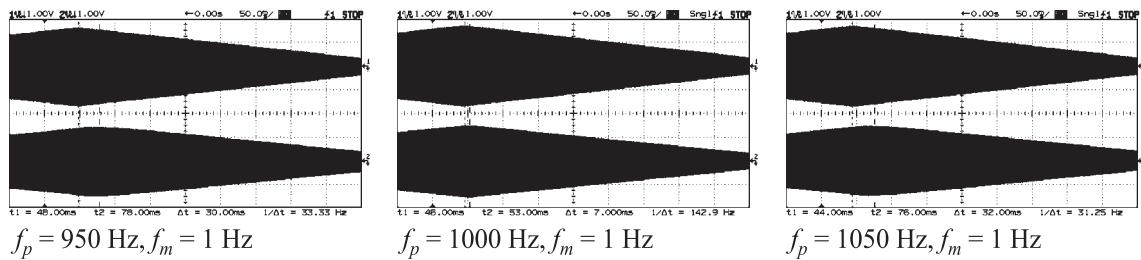


Fig. 3.C.10. Medidas del retardo de grupo del filtro IIR del Ejemplo 3.C.3.

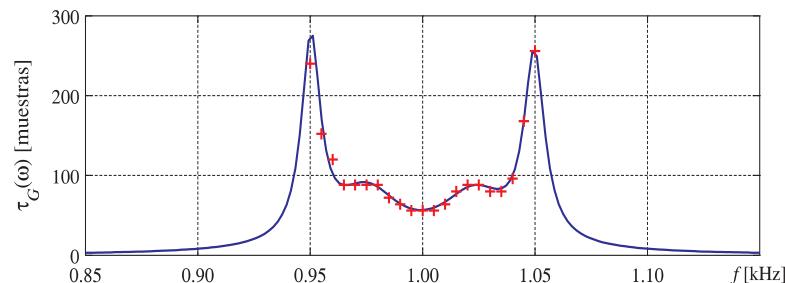


Fig. 3.C.11. Retardo de grupo calculado (—) y medido (+) para el filtro IIR del Ejemplo 3.C.3.

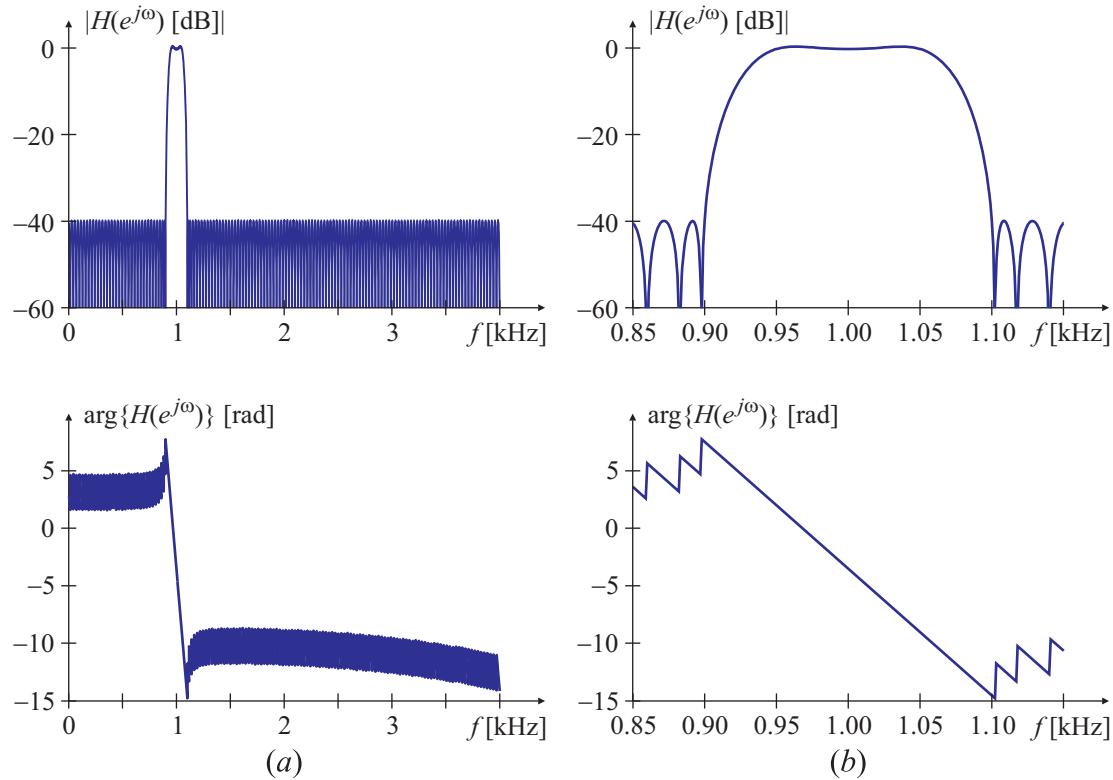


Fig. 3.C.12. Respuesta en frecuencia del filtro FIR del Ejemplo 3.C.4: en la banda de Nyquist (a); detalle de la banda de paso (b).

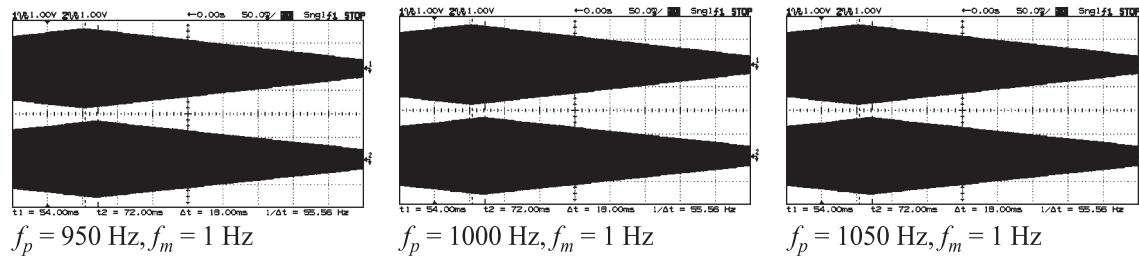


Fig. 3.C.13. Medidas del retardo de grupo del filtro FIR del Ejemplo 3.C.4.

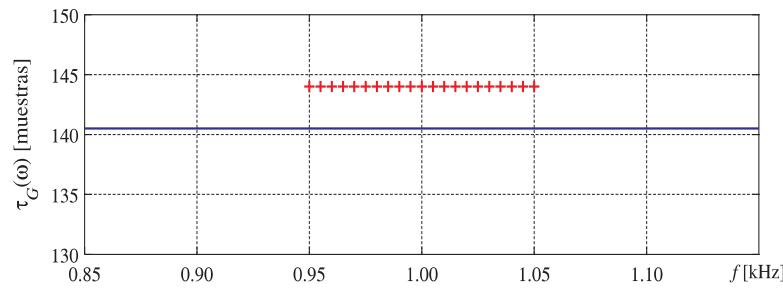


Fig. 3.C.14. Retardo de grupo calculado (—) y medido (+) para el filtro FIR del Ejemplo 3.C.4.

En el Ejemplo 3.C.3 se analiza una implementación tipo IIR, y en el Ejemplo 3.C.4 una realización tipo FIR.

EJEMPLO 3.C.3. Medición del retardo de grupo de un filtro IIR

El filtro se implementa con una aproximación elíptica, que resulta en una función transferencia de orden $N = 8$,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0,010 - 0,055e^{-j\omega} + 0,154e^{-j2\omega} - 0,272e^{-j3\omega} + 0,326e^{-j4\omega} - 0,272e^{-j5\omega} + 0,155e^{-j6\omega} - 0,055e^{-j7\omega} + 0,010e^{-j8\omega}}{1 - 5,604e^{-j\omega} + 15,702e^{-j2\omega} - 27,498e^{-j3\omega} + 32,749e^{-j4\omega} - 26,995e^{-j5\omega} + 15,133e^{-j6\omega} - 5,303e^{-j7\omega} + 0,929e^{-j8\omega}}$$

La respuesta en frecuencia en módulo y fase se grafica en la Fig. 3.C.9(a); la Fig. 3.C.9(b) muestra un detalle de la banda de paso.

El retardo de grupo se midió utilizando una señal moduladora con forma de onda triangular, y frecuencia fundamental de 1 Hz, variando la frecuencia de la portadora se varió en pasos de 5 Hz entre 950 y 1050 Hz, como se resume en la tabla siguiente.

		retardo de grupo					retardo de grupo		
frecuencia		calculado		medido	frecuencia		calculado		medido
Hz	rad	muestras	ms	ms	Hz	rad	muestras	ms	ms
950	0.2375π	279.9	34.98	30	1005	0.2512π	59.6	7.46	7
955	0.2387π	171.7	21.46	19	1010	0.2525π	66.9	8.36	8
960	0.2400π	101.5	12.68	15	1015	0.2537π	76.9	9.61	10
965	0.2412π	87.8	10.97	11	1020	0.2550π	85.5	10.69	11
970	0.2425π	89.9	11.23	11	1025	0.2563π	88.0	11.01	11
975	0.2437π	91.5	11.44	11	1030	0.2575π	84.8	10.59	10
980	0.2450π	85.7	10.71	11	1035	0.2587π	83.7	10.45	10
985	0.2463π	74.8	9.35	9	1040	0.2600π	99.7	12.46	12
990	0.2475π	64.6	8.07	8	1045	0.2612π	168.5	21.07	21
995	0.2488π	58.3	7.28	7	1050	0.2625π	258.7	32.34	32
1000	0.2500π	56.7	7.08	7	—	—	—	—	—

En la Fig. 3.C.10 se muestran las mediciones correspondientes a las frecuencias de portadora $f_p = 950$ Hz, 1000 Hz y 1050 Hz, mientras que en la Fig. 3.C.11 se grafica el retardo de grupo calculado con MATLAB a partir de la función de sistema, junto con los valores medidos (indicados con "+") observándose que no es constante en función de la frecuencia. \square

EJEMPLO 3.C.4. Medición del retardo de grupo de un filtro FIR

El filtro se implementa utilizando un algoritmo óptimo, que resulta en una función transferencia de orden $N = 282$. La respuesta en frecuencia en módulo y fase se grafica en la Fig. 3.C.12(a); un detalle de la banda de paso se muestra en la Fig. 3.C.12(b). La frecuencia de la portadora se varió en pasos de 5 Hz entre 950 y 1050 Hz; la medida del retardo de grupo a tres frecuencias diferentes se muestra en la Fig. 3.C.13, utilizando una onda moduladora triangular, y período de 1 s. Como la respuesta en fase es lineal, el retardo de grupo resulta constante en función de la frecuencia, y es $\tau_G = 141$ muestras, como se observa en la Fig. 3.C.14. En la misma figura se muestra el valor del retardo medido en distintas frecuencias. Se aprecia una ligera diferencia con el valor calculado, que se atribuye a la poca precisión que tiene la medida efectuada con el osciloscopio. \square

Apéndice 3.D

Análisis y diseño de sistemas discretos con Matlab

En este Apéndice se comentan algunas utilidades disponibles en Matlab para el análisis de sistemas discretos, el cálculo de la respuesta en frecuencia, el cálculo de la salida de un sistema a partir de una entrada dada, etc. Desde el punto de vista del diseño, se muestran algunas herramientas para el análisis de las distintas ventanas de truncación y el diseño de filtros. También se ejemplifica el diseño de algunos de los ejemplos desarrollados en el Apéndice A.

Como se verá en los ejemplos que siguen, muchas veces los comandos para graficar los resultados o modificar la presentación usual demandan varias líneas de código. Para facilitar la lectura es conveniente separar la parte de cálculo de la parte de presentación de resultados. En los ejemplos de esta sección se enfatizó una forma posible de utilizar los comandos disponibles más que mostrar códigos que sean computacionalmente eficientes.

El propósito de este Apéndice es ilustrar el uso de algunas funciones o comandos, y no es un tutorial que cubra en detalle todas las alternativas posibles. Para obtener información más detallada y en profundidad sobre alguna de estas herramientas se puede consultar la ayuda ya sea desde el menú o tipeando

```
doc conv
```

en este caso, para conseguir información adicional sobre el comando `conv`. En estas páginas de ayuda frecuentemente se pueden encontrar fragmentos de código que permiten comprender mejor el funcionamiento o las formas de invocar un determinado comando o función.

3.D.1. Utilidades para el análisis de sistemas discretos

En esta sección se comentan los comandos `conv`, y `filter`, que sirven para calcular la salida de un sistema discreto especificando los coeficientes de su función transferencia y la sucesión de entrada, y `freqz`, que permite graficar la respuesta en frecuencia. El utilitario `fvttool`, comentado en la Sección 3.D.1.5 es más general que `freqz` ya que permite visualizar distintas respuestas del sistema discreto y variar distintos parámetros

interactuando desde la línea de menú de la ventana, en lugar de utilizar comandos.

3.D.1.1. Convolución de sucesiones: conv

Se dispone del comando `conv` para calcular la convolución de dos sucesiones:

```
x = [ 1 2 3 4 3 2];
h = [-3 -2 0 4];
y = conv(h,x);
```

Si n_x, n_h son las longitudes de los vectores $x[n]$ y $h[n]$, respectivamente, el resultado $y = \text{conv}(h, x)$ resulta en un vector de longitud $n_y = n_h + n_x - 1$.

El inconveniente de esta función es que supone que todas las sucesiones comienzan en la muestra $n = 1$. El Problema 43 propone una manera de solucionar este problema. Otra forma que supone que todas las sucesiones comienzan en $n = 0$ se muestra a continuación.

Para graficar el resultado se puede usar el comando `stem`. Un fragmento de código que grafica las sucesiones $x[n]$ y $h[n]$ y el resultado de su convolución es el siguiente.

```
x = [ 1 2 3 4 3 2];
h = [-3 -2 0 4];
y = conv(h,x);

nx = 0:length(x)-1;
nh = 0:length(h)-1;
ny = 0:length(y)-1;

subplot(311); stem(nx,x); xlabel('n'); ylabel('x[n]');
subplot(312); stem(nh,h); xlabel('n'); ylabel('x[n]');
subplot(313); stem(ny,y); xlabel('n'); ylabel('y[n]');
```

La pantalla generada se muestra en la Fig. 3.D.1. En esta pantalla cada uno de los gráficos tienen ejes diferentes. Para facilitar la comparación de los resultados es conveniente que cada una de las señales se grafique sobre el mismo intervalo de tiempo. Esto puede conseguirse con el comando `axis`, o alterando las propiedades de los gráficos con el comando `set`, como se muestra en el siguiente fragmento de código:

```
subplot(311); stem(nx,x); xlabel('n'); ylabel('x[n]');
axis([-2 10 -1 1]); axis 'auto y'

subplot(312); stem(nh,h); xlabel('n'); ylabel('x[n]');
axis([-2 10 -1 1]); axis 'auto y'

subplot(313); stem(ny,y); xlabel('n'); ylabel('y[n]');
set(gca,'XLim',[-2 10]);
```

El comando `set` es útil para cambiar otras características de los gráficos. Por ejemplo, para cambiar el grosor de las líneas, el formato del símbolo del marcador, y sus colores, como se detalla en el siguiente código y en la Fig. 3.D.2.

```
x = [ 1 2 3 4 3 2];
h = [-3 -2 0 4];
y = conv(h,x);

nx = 0:length(x)-1;
nh = 0:length(h)-1;
ny = 0:length(y)-1;
```

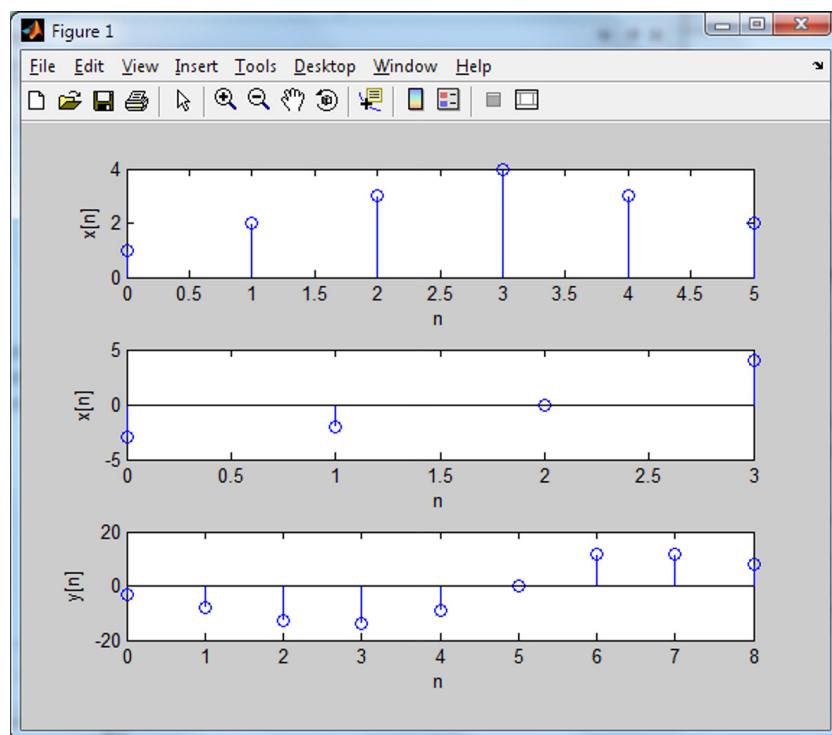


Fig. 3.D.1. Gráfico de la convolución de las sucesiones $h[n]$ y $x[n]$.

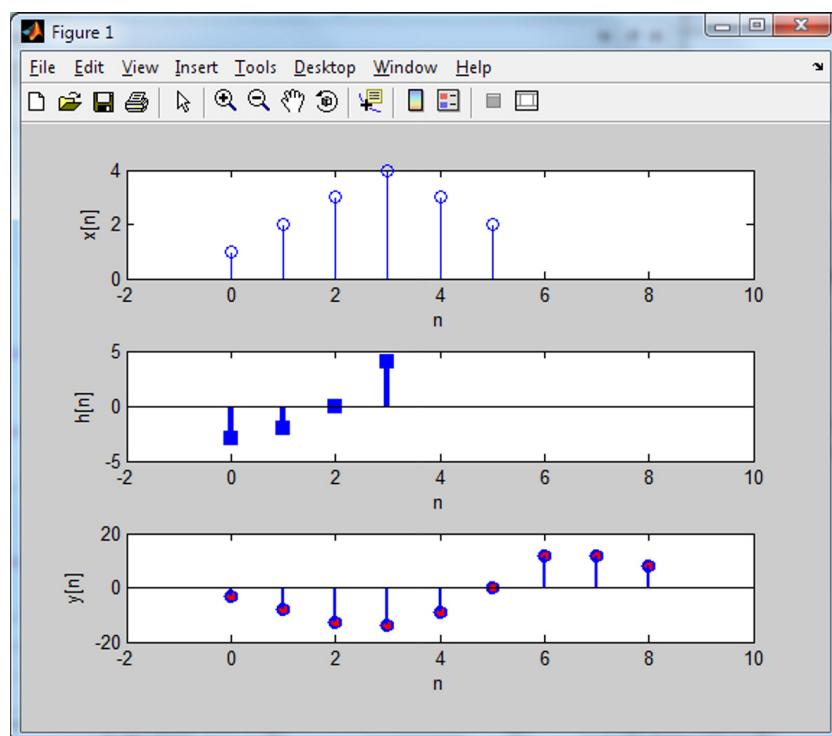


Fig. 3.D.2. Gráfico de la convolución de las sucesiones $h[n]$ y $x[n]$ cambiando algunas opciones de los gráficos.

```

subplot(311); h1 = stem(nx,x); xlabel('n'); ylabel('x[n]');
axis([-2 10 -1 1]); axis 'auto y'

subplot(312); h2 = stem(nh,h); xlabel('n'); ylabel('h[n]');
axis([-2 10 -1 1]); axis 'auto y'
set(h2,'MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','b','Marker','square',...
'LineWidth',3);

subplot(313); h3 = stem(ny,y); xlabel('n'); ylabel('y[n]');
set(gca,'XLim',[-2 10]);
set(h3,'MarkerSize',7,'MarkerFaceColor','r','LineWidth',1.5);

```

3.D.1.2. Cálculo de la salida de un sistema FIR o IIR ante una entrada arbitraria: **filter**

El comando `conv` es adecuado para calcular la salida de un sistema discreto con respuesta impulsiva $h[n]$ ante una entrada arbitraria $x[n]$, sólo si el sistema es FIR, es decir, $h[n]$ es de longitud finita. Para calcular la salida de un sistema IIR se dispone del comando `filter`, que en lugar de requerir los valores de la respuesta impulsiva del sistema, necesita la especificación de los coeficientes de la función transferencia.

Dada la ecuación a diferencias

$$a_0y[n] + a_1y[n - 1] + a_2y[n - 2] + \dots + a_Ny[n - N] = b_0x[n] + b_1x[n - 1] + b_2x[n - 2] + \dots + b_Mx[n - M].$$

o la función transferencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1e^{-j\omega} + b_2e^{-j2\omega} + \dots + b_Me^{-jM\omega}}{a_0 + a_1e^{-j\omega} + a_2e^{-j2\omega} + \dots + a_Ne^{-jN\omega}}$$

los argumentos de entrada del comando `filter` son los vectores **a** y **b** formados por los coeficientes de la parte recursiva y no recursiva

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_M] \quad \mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_N]$$

y el vector con las muestras de entrada. Por ejemplo, para la ecuación a diferencias

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n]$$

que tiene la respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

los vectores **a** y **b** son

$$\mathbf{a} = [1 \ -a], \quad \mathbf{b} = 1.$$

El resultado de filtrar un vector $x[n]$ con el filtro $H(e^{j\omega})$ se calcula como

```
y = filter(b,a,x)
```

El comando `filter` también se puede utilizar para calcular la salida de un filtro FIR, eligiendo como denominador el vector (número) 1. Por ejemplo, el cálculo de la convolución comentado en la Sección 3.D.1.1 puede calcularse como:

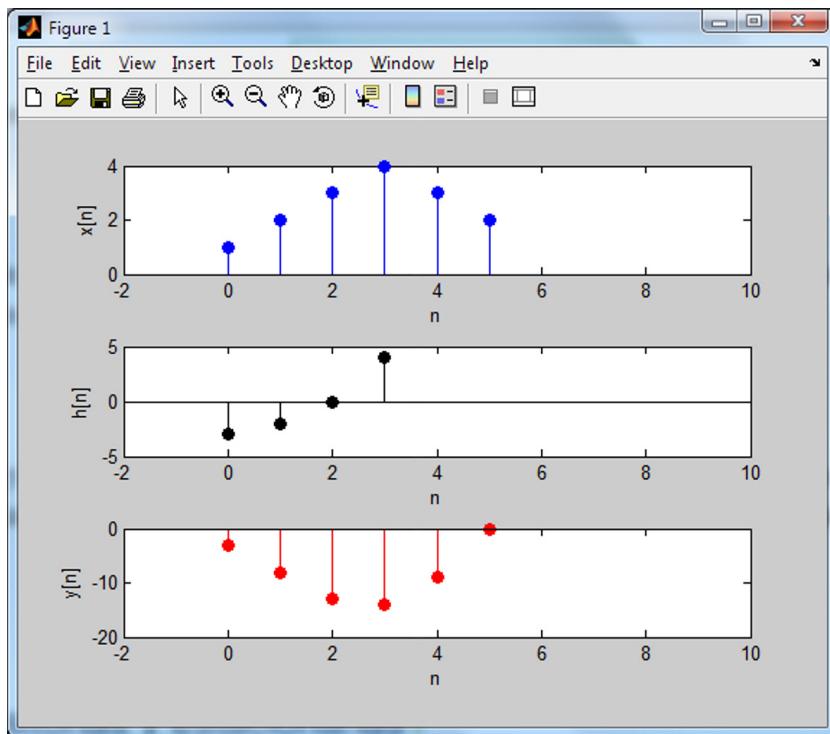


Fig. 3.D.3. Gráfico de la convolución de las sucesiones $h[n]$ y $x[n]$ usando el comando filter.
El largo del vector $y[n]$ es el mismo que el del vector $x[n]$.

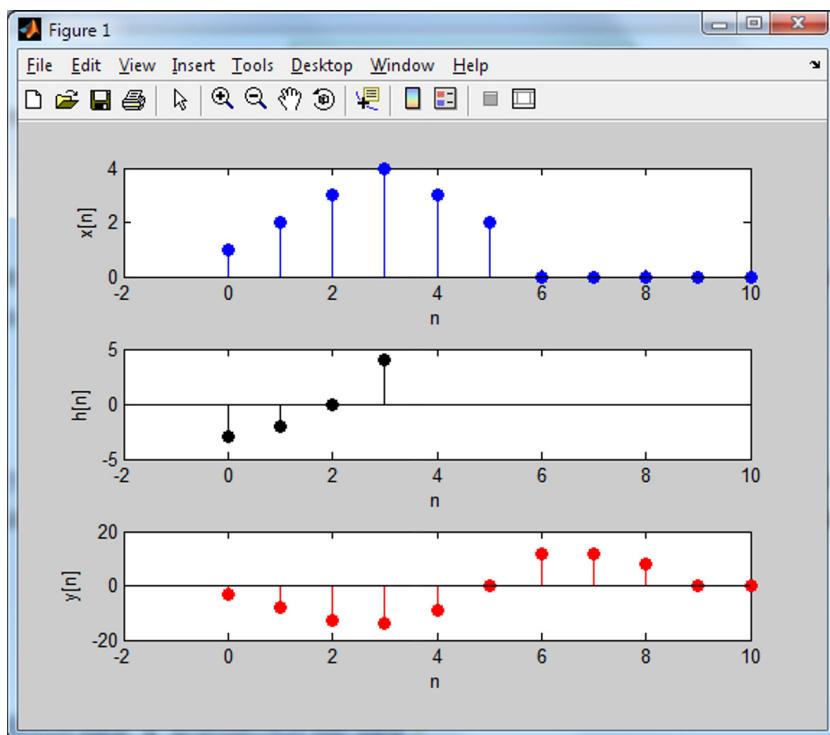


Fig. 3.D.4. Gráfico de la convolución de las sucesiones $h[n]$ y $x[n]$ usando el comando filter.
Se ha modificado el largo de la sucesión $x[n]$ para que el resultado coincida con el que se obtiene usando conv.

```
x = [ 1 2 3 4 3 2];
h = [-3 -2 0 4];
y = filter(h,1,x);
```

En este caso, la diferencia entre `conv` y `filter` es que en el primero la longitud del vector resultado es la suma de las longitudes de los vectores que se convolucionan menos 1, mientras que con `filter` el resultado está truncado a la longitud del vector de entrada, que es el tercer argumento de la función ($x[n]$ en este caso), como se observa en la Fig. 3.D.3.

Para evitar este inconveniente, se pude “hacer más larga” la señal de entrada $x[n]$ agregándole ceros, como se muestra en la primera línea del siguiente listado.

```
x = [[ 1 2 3 4 3 2] zeros(1,5)];
h = [-3 -2 0 4];
y = filter(h,1,x);

nx = 0:length(x)-1;
nh = 0:length(h)-1;
ny = 0:length(y)-1;

subplot(311); h1 = stem(nx,x,'b','filled'); xlabel('n'); ylabel('x[n]');
axis([-2 10 -1 1]); axis 'auto y'

subplot(312); h2 = stem(nh,h,'k','filled'); xlabel('n'); ylabel('h[n]');
axis([-2 10 -1 1]); axis 'auto y'

subplot(313); h3 = stem(ny,y,'r','filled'); xlabel('n'); ylabel('y[n]');
set(gca,'XLim',[-2 10]);
```

El resultado de esta operación se muestra en la Fig. 3.D.4, que coincide con el calculado usando la función `conv`, ilustrado en la Fig. 3.D.2.

3.D.1.3. Cálculo de la respuesta en frecuencia: `freqz`

La respuesta en frecuencia de un sistema se puede calcular y graficar utilizando el comando `freqz`. Los parámetros que requieren son el numerador `b` y el denominador `a` de la función transferencia:

```
freqz(b,a);
```

Si se desea conocer la respuesta en frecuencia de un filtro FIR, se puede omitir el denominador `a` o hacerlo igual a 1:

```
freqz(h);
```

donde `h` es el vector de coeficientes de la respuesta impulsiva del FIR. En este caso, se asume que el primer elemento de `h` corresponde al valor de la respuesta impulsiva en $n = 0$, es decir, $h[0]$. En otras palabras, no se puede calcular directamente la respuesta en frecuencia de un filtro no causal.

El siguiente listado grafica la respuesta en frecuencia de un promediador causal de 10 muestras,

```
h = ones(1,10)/10;
freqz(h);
```

y el resultado se muestra en la Fig. 3.D.5.

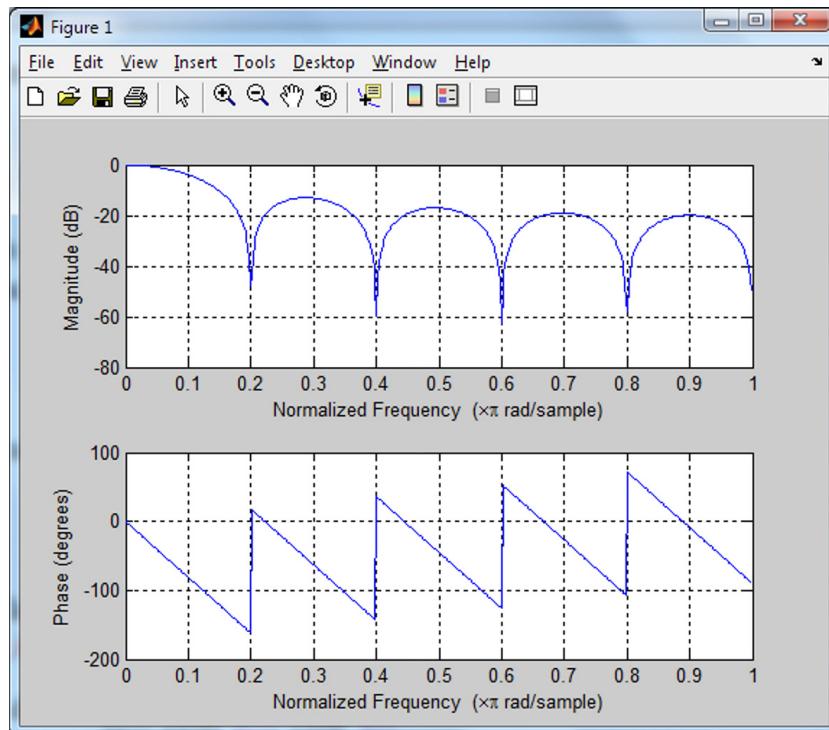


Fig. 3.D.5. Respuesta en frecuencia de un promediador de 10 muestras utilizando el comando freqz.

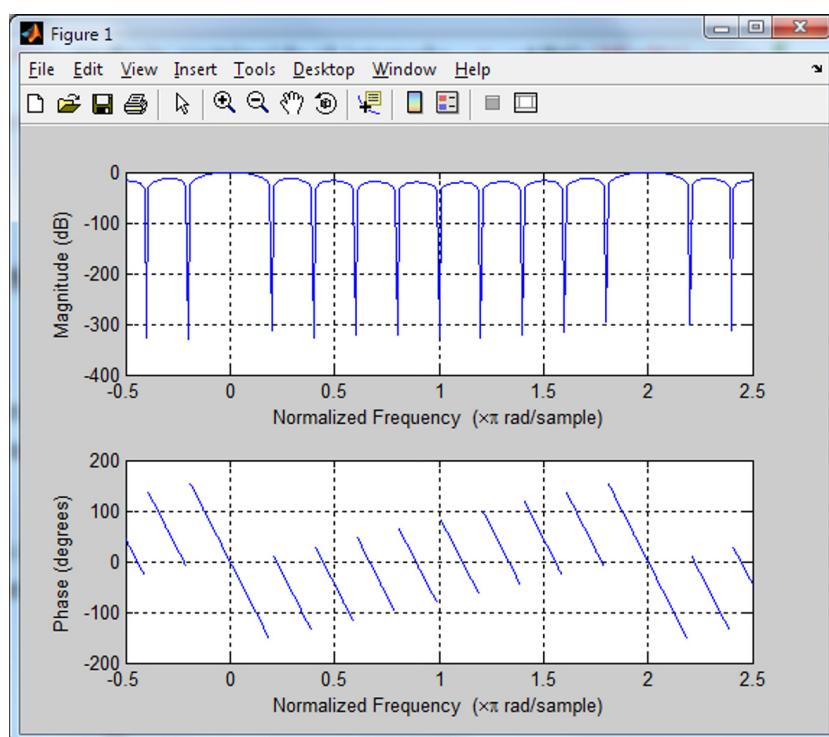


Fig. 3.D.6. Respuesta en frecuencia de un promediador de 10 muestras cambiando el eje de frecuencias entre $-\pi/2 \leq \omega < 5\pi/2$.

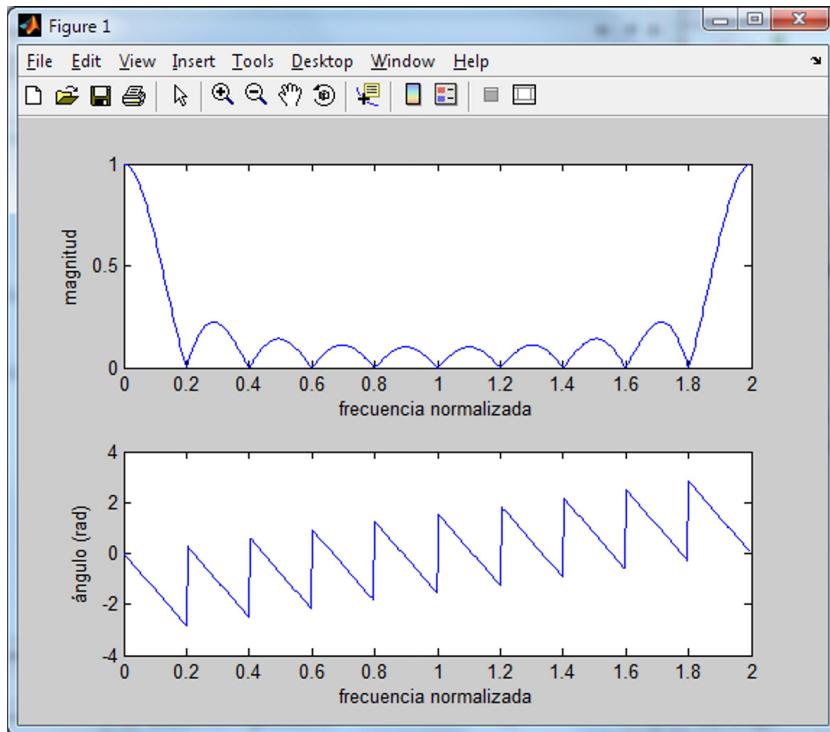


Fig. 3.D.7. Respuesta en frecuencia de un promediador de 10 muestras graficando la magnitud en valores absolutos (y no en dB) y la fase en radianes, para $0 \leq \omega < 2\pi$.

Si la función se invoca sin argumentos de salida, se grafica automáticamente el módulo (en dB) de la respuesta impulsiva, y la fase en grados. En el caso de la fase, la función intenta graficar $\arg\{H(e^{j\omega})\}$, como se muestra en la Fig. 3.D.14. Pero en el caso que los saltos de fase son del orden de $\pm\pi$, como en el caso del promediador, se grafica la función $\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\}$, que está limitada en el rango $\pm\pi$, como en la Fig. 3.D.5.

El rango de frecuencias que se grafica es $0 \leq \omega < \pi$. El eje de frecuencias se normaliza a π , por ello en las gráficas está rotulado entre 0 y 1. Se puede especificar como tercer parámetro un vector de frecuencias que cubra el rango deseado. En el siguiente listado se muestra la forma de graficar la respuesta entre $-\pi/2$ y $5\pi/2$. La gráfica obtenida se muestra en la Fig. 3.D.6.

```
h = ones(1,10)/10;
w = (-0.5:0.01:2.5)*pi;
freqz(h,1,w);
```

También se puede especificar como tercer parámetro el string '`'whole'`', y en este caso la función devuelve el gráfico de la respuesta en frecuencia para $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Si la función se invoca con argumentos de salida, devuelve dos argumentos: el valor complejo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, y el vector de frecuencias ω donde se evaluó la respuesta. Esto es útil cuando se desea graficar el módulo de la respuesta en frecuencia en valores absolutos (y no en dB) como se muestra en el siguiente listado. El gráfico obtenido se muestra en la Fig. 3.D.7.

```
% respuesta en frecuencia de un promediador de N = 10 muestras.
N      = 10;
```

```

h      = ones(1,N)/N;
[H,w] = freqz(h,1,'whole');

subplot(211); plot(w/pi,abs(H));
xlabel('frecuencia normalizada'); ylabel('magnitud')

subplot(212); plot(w/pi,angle(H));
xlabel('frecuencia normalizada'); ylabel('ángulo (rad)')

```

La función `freqz` admite como tercer parámetro un número, que es la longitud del vector de frecuencias. Si no se especifica, la longitud del vector de frecuencias (y la de la respuesta en frecuencia) es 512. En general, es un valor adecuado para la mayoría de los casos. Sin embargo, para filtros con bandas de paso muy angostas, o filtros FIR de gran longitud, puede ser conveniente incrementar este número. Por el método de cálculo utilizado en `freqz`, si este número es muy grande conviene elegirlo potencia de 2.

3.D.1.4. Cálculo de las salidas transitorias y estacionarias

Las herramientas presentadas hasta ahora pueden utilizarse para calcular la respuesta $y[n]$ de un sistema ante una entrada arbitraria (usando los comandos `conv` o `filter`), la salida $y_e[n]$ de estado estacionario (usando Matlab como una calculadora) y la respuesta transitoria $y_t[n]$ como la diferencia entre las dos anteriores, $y_t[n] = y[n] - y_e[n]$.

El siguiente listado se utilizó para calcular las respuestas del Ejemplo 3.60. El sistema está representado por una ecuación a diferencias de la forma

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n],$$

cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

La señal de entrada es

$$x[n] = [A \operatorname{sen}(\omega_1 n) + B \cos(\omega_2 n + \theta) + C] u[n],$$

con $A = -B = C = 1$, $\theta = \pi/6$. El código calcula y grafica la respuesta en frecuencia (Fig. 3.D.8), las entradas y las salidas correspondientes a cada uno de los términos de la entrada (Fig. 3.D.9) y la salida $y_i[n]$, la salida de estado estacionaria $y_{e_i}[n]$ y la transitoria $y_{t_i}[n] = y_i[n] - y_{e_i}[n]$ para cada una de las componentes de la entrada, $i = 0, 1, 2$, como se muestra en la Fig. 3.D.10. También se grafican la salida $y[n]$, la salida de estado estacionario $y_{ee}[n]$ y la salida transitoria.

```

function rtafil
% respuesta temporal del sistema discreto
%
%   y[n] = a*y[n-1] + x[n]
%
% cuando x[n] = (A*sen(w0*n) + B*cos(w1*n+fi) + C)u[n]

close all;                                % cierra todas las ventanas
clear all;                                 % limpieza de variables

```

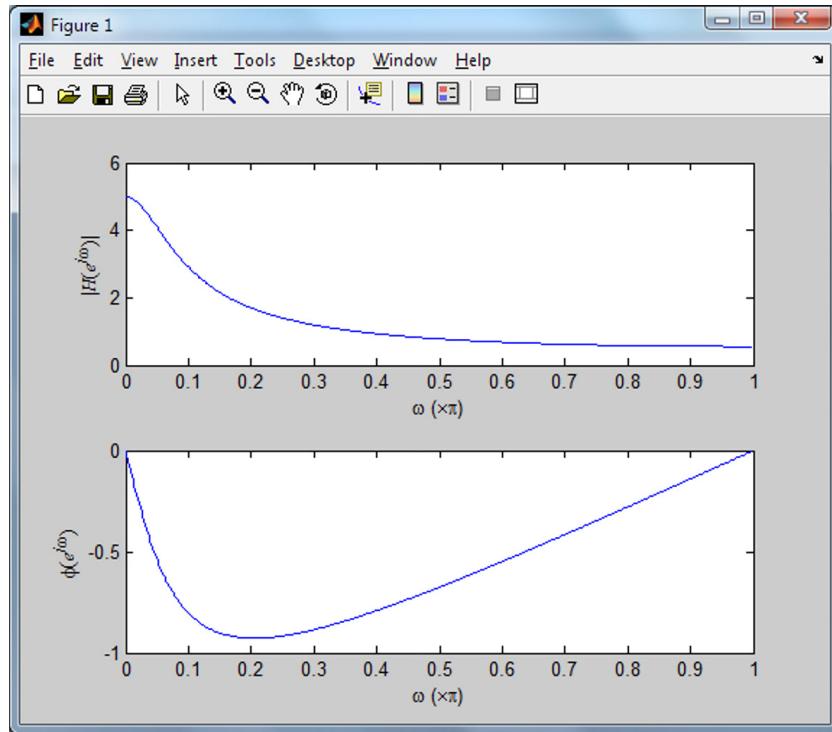


Fig. 3.D.8. Modulo y fase de la respuesta en frecuencia.

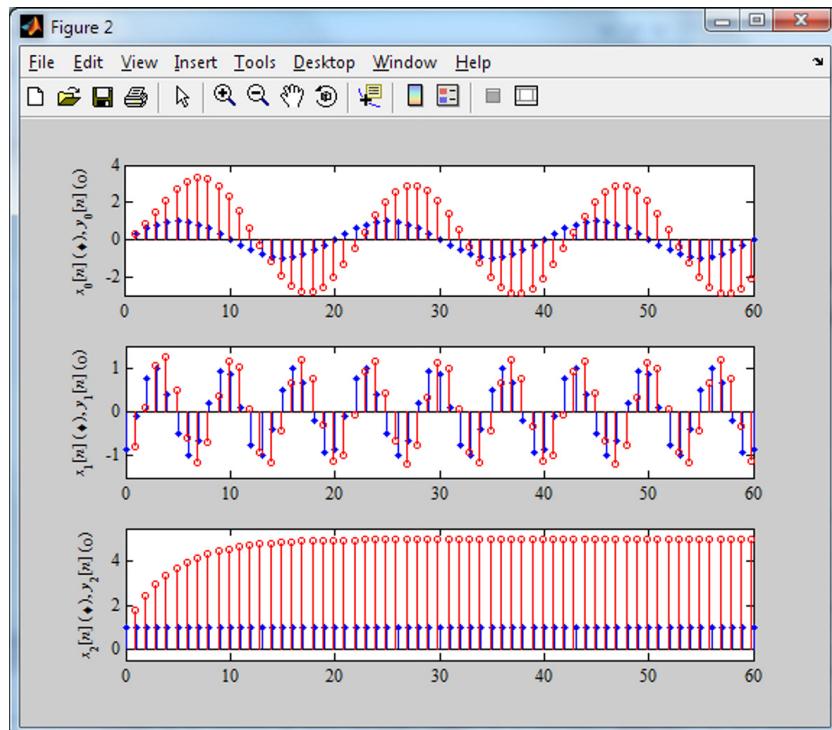


Fig. 3.D.9. Entradas y salidas de estado estacionario.

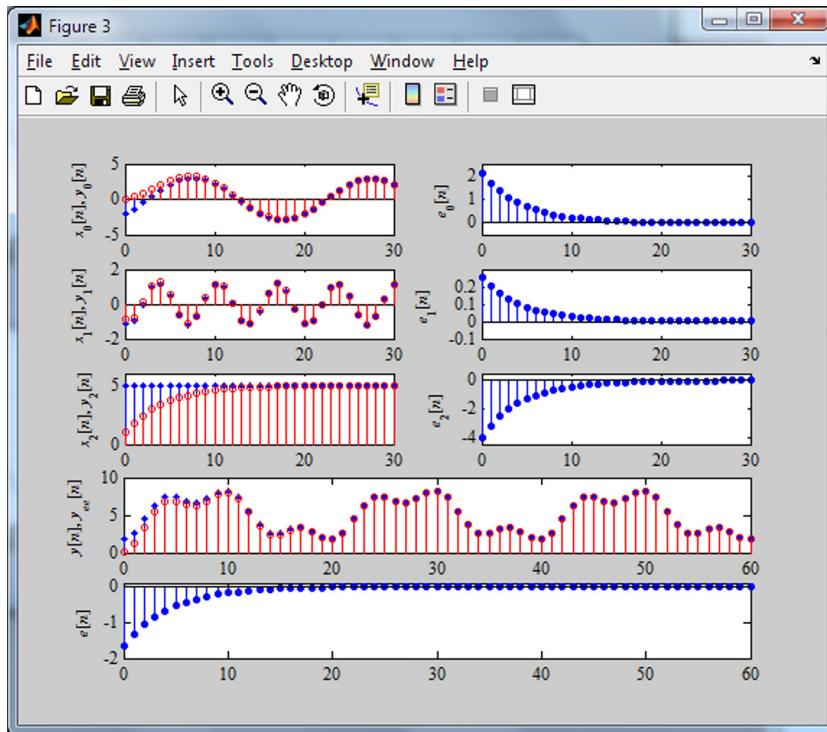


Fig. 3.D.10. Entradas y salidas transitorias y estacionarias.

```

a = 0.8; % valores numericos:
A = 1.0; w0 = 0.1*pi; fi0 = 0;
B = -1.0; w1 = 0.3*pi; fil = pi/6;
C = 1.0; w2 = 0; fi2 = 0;
I = sqrt(-1);

n = 0:60; % vector de indices (tiempo)

x0 = A*sin(w0*n+fi0); % las tres componentes de la entrada
x1 = B*cos(w1*n+fil);
x2 = C*cos(w2*n+fi2); % opción: x2 = C*ones(size(n));

H0 = 1/(1-a*exp(-I*w0)); % La función transferencia en las frecuencias
H1 = 1/(1-a*exp(-I*w1)); % de las distintas señales
H2 = 1/(1-a*exp(-I*0));

% Las componentes de la salida de estado estacionario
y0ee = abs(H0)*A*sin(w0*n+fi0+angle(H0));
y1ee = abs(H1)*B*cos(w1*n+fil+angle(H1));
y2ee = abs(H2)*C*cos(w2*n+fi2+angle(H2));

% las respuestas "reales" (transitorio + estacionario)
NumH = 1;
DenH = [1 -a];
y0 = filter(NumH, DenH, x0);
y1 = filter(NumH, DenH, x1);
y2 = filter(NumH, DenH, x2);

% las respuestas transitorias:

```

```

y0t = y0-y0ee;
y1t = y1-y1ee;
y2t = y2-y2ee;

% las salidas completas
yee = y0ee+y1ee+y2ee;
y   = y0+y1+y2;
yt  = y-yee;

% %Presentación de resultados

disp(sprintf('H0 = %2.5f + j %2.5f, |H0| = %2.5f, Ang(H0) = %2.5f, D=%2.5f',...
    real(H0),imag(H0),abs(H0),angle(H0),angle(H0)/w0));
disp(sprintf('H1 = %2.5f + j %2.5f, |H1| = %2.5f, Ang(H1) = %2.5f, D=%2.5f',...
    real(H1),imag(H1),abs(H1),angle(H1),angle(H1)/w1));
disp(sprintf('H2 = %2.5f + j %2.5f, |H2| = %2.5f, Ang(H2) = %2.5f, D=%2.5f',...
    real(H2),imag(H2),abs(H2),angle(H2),angle(H2)/w2));

% Grafico de la respuesta en frecuencia
[H,w]=freqz(NumH,DenH);
figure
subplot(211);plot(w/pi,abs(H))
xlabel('omega (\times\pi)');ylabel('|\{it{H}\}(\{it{\omega}\})|',...
    'FontSize',10,'FontName','Times')
subplot(212);plot(w/pi,unwrap(angle(H)))
xlabel('omega (\times\pi)');ylabel('phi(\{it{\omega}\})',...
    'FontSize',10,'FontName','Times')

% Comparacion de entradas y salidas
figure;
subplot(311)
h1 = stem(n,x0,'b'); hold on
h2 = stem(n-.15,y0,'r'); hold off;
setplt(h1,h2); axis([0 60 -3 4]);
ylabel('{\it{x}}_0[\{it{n}\}] (\diamondsuit), {\it{y}}_0[\{it{n}\}] (\circ)',...
    'FontSize',8,'FontName','Times');

subplot(312)
h1 = stem(n,x1,'b'); hold on;
h2 = stem(n-.15,y1,'r');hold off;
setplt(h1,h2);axis([0 60 -1.5 1.5]);
ylabel('{\it{x}}_1[\{it{n}\}] (\diamondsuit), {\it{y}}_1[\{it{n}\}] (\circ)',...
    'FontSize',8,'FontName','Times');

subplot(313)
h1 = stem(n,x2,'b'); hold on;
h2 = stem(n-.15,y2,'r'); hold off;
setplt(h1,h2);axis([0 60 -.5 5.5]);
ylabel('{\it{x}}_2[\{it{n}\}] (\diamondsuit), {\it{y}}_2[\{it{n}\}] (\circ)',...
    'FontSize',8,'FontName','Times');

% Comparacion de las respuestas
figure
subplot(521)
h1=stem(n,y0ee,'b');hold on;
h2=stem(n,y0,'r');hold off;
setplt2(h1,h2);axis([0 30 -5 5])
ylabel('{\it{x}}_0[\{it{n}\}], {\it{y}}_0[\{it{n}\}]','FontSize',8,'FontName','Times');

```

```

subplot(522)
h1=stem(n,y0t,'b');set(h1,'MarkerSize',2,'MarkerFaceColor','b');
set(gca,'FontSize',9,'Xlim',[0 30],'FontName','Times');axis([0 30 -0.5 2.5])
ylabel('{\ite}_0[{\itn}]','FontSize',8,'FontName','Times');

subplot(523)
h1=stem(n,y1ee,'b');hold on;
h2=stem(n,y1,'r');hold off;
setplt2(h1,h2);axis([0 30 -2 2])
ylabel('{\itx}_1[{\itn}], {\ity}_1[{\itn}]','FontSize',8,'FontName','Times');

subplot(524)
h1=stem(n,y1t,'b');set(h1,'MarkerSize',2,'MarkerFaceColor','b');
set(gca,'FontSize',9,'Xlim',[0 30],'FontName','Times');axis([0 30 -0.1 0.3])
ylabel('{\ite}_1[{\itn}]','FontSize',8,'FontName','Times');

subplot(525)
h1 = stem(n,y2ee,'b');hold on;
h2 = stem(n,y2,'r');hold off;
setplt2(h1,h2);axis([0 30 0 6])
ylabel('{\itx}_2[{\itn}], {\ity}_2[{\itn}]','FontSize',8,'FontName','Times');

subplot(526)
h1 = stem(n,y2t,'b');
set(h1,'MarkerSize',2,'MarkerFaceColor','b');
set(gca,'FontSize',9,'Xlim',[0 30],'FontName','Times');axis([0 30 -4.5 0.5])
ylabel('{\ite}_2[{\itn}]','FontSize',8,'FontName','Times');

subplot(514)
h1=stem(n,yee,'b');hold on;
h2=stem(n,y,'r');hold off;
setplt2(h1,h2);axis([0 60 0 10])
ylabel('{\ity}[{\itn}], {\ity}_{ee}[{\itn}]','FontSize',8,'FontName','Times');

subplot(515)
h1=stem(n,yt,'b');set(h1,'MarkerSize',2,'MarkerFaceColor','b');
set(gca,'FontSize',9,'FontName','Times');axis([0 60 -2 0.1])
ylabel('{\ite}[{\itn}]','FontSize',8,'FontName','Times');

% =====
% Funciones auxiliares

function setplt(h1,h2)
set(h1(1),'Marker','d','MarkerSize',3,'MarkerFaceColor','b');
set(gca,'FontSize',9,'FontName','Times')
set(h2,'MarkerSize',3);

function setplt2(h1,h2)
set(h1(1),'Marker','d','MarkerSize',3,'MarkerFaceColor','b');
set(h2,'MarkerSize',3);
set(gca,'FontSize',9,'Xlim',[0 30],'FontName','Times')

```

Las líneas de código dedicadas a graficar los resultados y darle el formato deseado son muchas más que las necesarias para calcular las respuestas. Por ello es conveniente separar la parte de cálculo de la de visualización para facilitar la lectura del código.

Las instrucciones referidas a la tipografía pueden establecerse de antemano para evitar repetir comandos similares en cada una de las funciones de graficación.

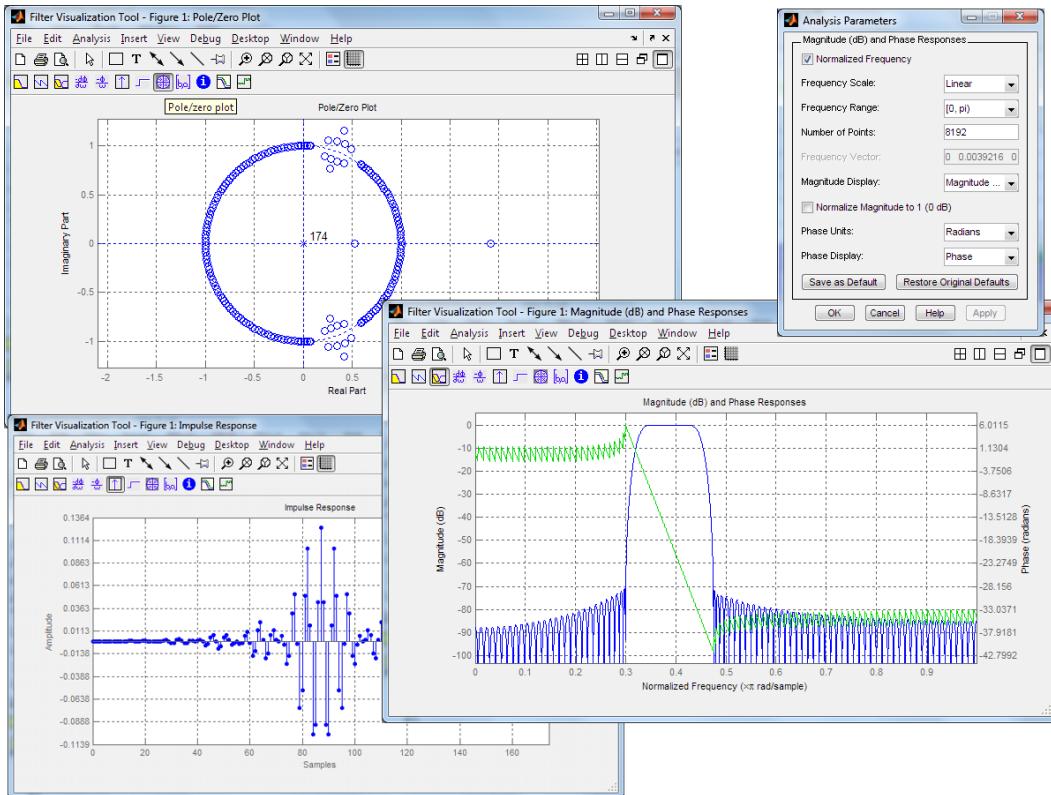


Fig. 3.D.11. La herramienta `fvtool` de Matlab mostrando el diagrama de polos y ceros, la respuesta impulsiva y el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia del filtro FIR pasabanda del Ejemplo 3.A.7.

3.D.1.5. Visualización de características temporales y frecuenciales de filtros: `fvtool`

Una herramienta muy útil para visualizar los resultados después de diseñar un filtro es `fvtool` (por *filter visualization tool*), que se muestra en la Fig. 3.D.11. En lugar de partir la ventana gráfica en varias subventanas, una serie de botones permiten visualizar el módulo de la respuesta en frecuencia, la fase en función de la frecuencia, el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia en un mismo gráfico, el retardo de grupo, el retardo de fase, la respuesta impulsiva, la respuesta al escalón, el diagrama de polos y ceros, los coeficientes del filtro e información sobre la estructura.

La herramienta se activa con el comando

```
fvtool(hc);
```

donde `hc` es el vector que contiene la respuesta impulsiva del filtro causal. También se puede utilizar para filtros IIR, en cuyo caso los argumentos que se deben pasar son los vectores que representan el numerador `b` y el denominador `a` de la función transferencia:

```
fvtool(b,a);
```

El menú `Analysis/Analysis parameters` permite cambiar el eje de frecuencias (normalizado o en Hz), graficar el módulo en escala lineal o logarítmica, la fase en grados o radianes, etc.

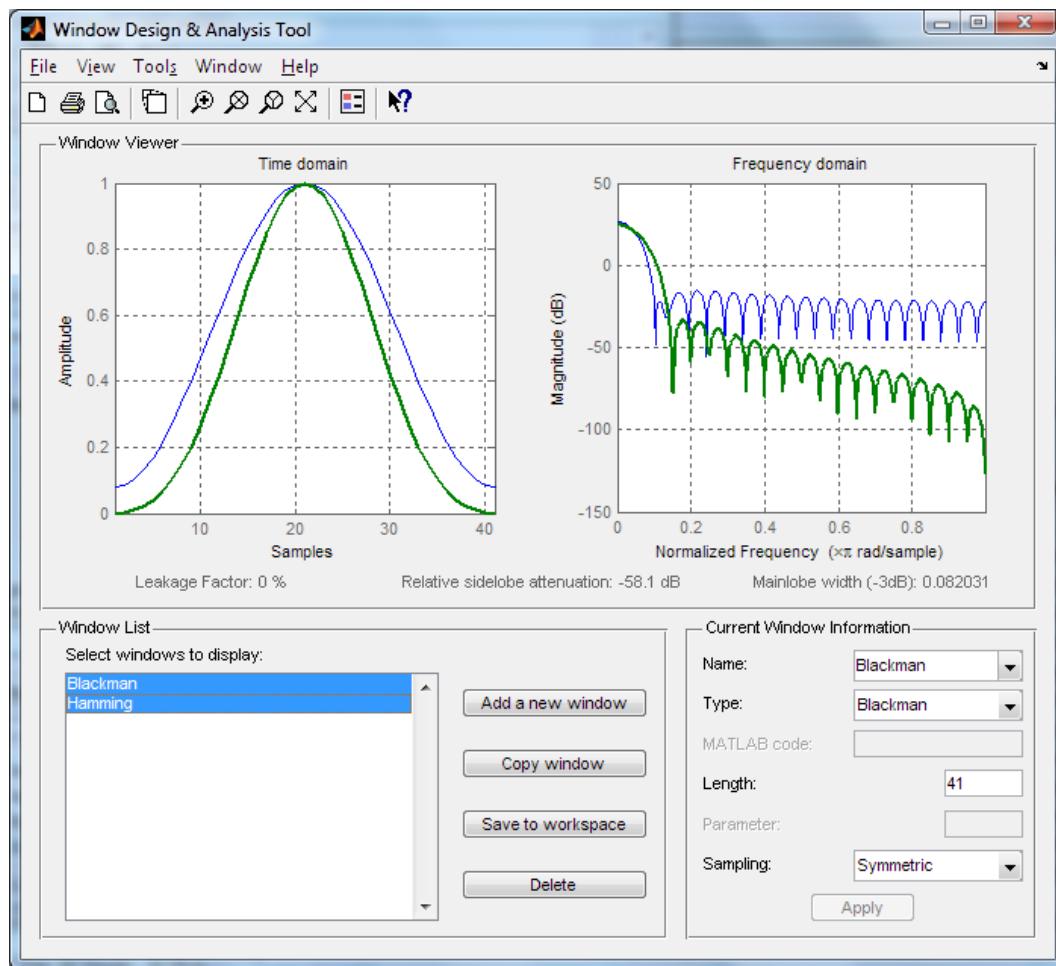


Fig. 3.D.12. Pantalla interactiva de la herramienta `wintool` de Matlab.

3.D.2. Análisis de ventanas temporales: `wintool`

Una herramienta muy práctica para comparar distintas ventanas temporales y su respuesta en frecuencia es el utilitario `wintool` de Matlab, que se invoca directamente desde la línea de comando. Una pantalla interactiva (Fig. 3.D.12) permite mostrar varias ventanas de manera independiente o simultánea, y variar sus parámetros. Se puede seleccionar una ventana y salvar sus muestras al ambiente de trabajo.

La pantalla informa además sobre:

- Factor de fuga (*leakage factor*): relación entre la potencia de los lóbulos laterales y el lóbulo principal de la ventana;
- Atenuación relativa de los lóbulos laterales (*relative sidelobe attenuation*): diferencia entre la amplitud del lóbulo principal y la altura del mayor lóbulo lateral.
- Ancho del lóbulo principal (-3 dB) (*mainlobe width*) que es distinto del ancho entre los ceros de la respuesta en frecuencia reportado en la Tabla 3.A.5.

En el sector *Current window information* se puede especificar la longitud de la ventana y otros parámetros que dependen del tipo de ventana que se haya elegido:

- Parámetro (*parameter*): algunas ventanas dependen de un parámetro adicional, como el β de la ventana de Kaiser, o la atenuación de los lóbulos laterales en la ventana de Chebyshev. El título “Parametro” cambia al nombre adecuado para la ventana elegida.
- Muestreo (*sampling*) el tipo de muestreo utilizada para las ventanas tipo coseno generalizado (Hamming, Hann, and Blackman). Puede ser periódico o simétrico. El primero calcula una ventana de largo $N + 1$ y devuelve las primeras N muestras; la extensión periódica de esta ventana resulta en una sucesión periódica de largo $N+1$, y por lo tanto la primera y última muestra *no* son iguales. Si se elige simétrica, la función calcula y devuelve una ventana de largo N , que es simétrica respecto a $N/2$, donde la primera muestra es idéntica a la última.

Las funciones que se pueden visualizar son: Bartlett, Barlett-Haning, Blackman, Blackman-Harris, Bohman, Chebychev, Flat-top, Gauss, Hamming, Hann, Kaiser, Nuttal, Parzen, Rectangular, Triangular, Tuckey, o una ventana definida por el usuario.

3.D.3. Diseño de filtros FIR usando ventanas

El diseño de filtros utilizando ventanas es muy simple con Matlab. Aunque se dispone de una amplia selección de ventanas, en estos códigos se han usado las expresiones indicadas en la Tabla 3.A.5. El procedimiento de diseño es:

- Especificar la(s) frecuencia(s) de corte del filtro prototipo;
- Calcular una estimación de la longitud del filtro de acuerdo a la ventana elegida y el ancho de la zona de transición;
- Calcular la respuesta impulsiva del filtro ideal (no causal) correspondiente;
- Pesar la respuesta impulsiva por la ventana elegida
- Calcular la respuesta en frecuencia y compararla con las especificaciones.

En el siguiente listado se muestran los pasos necesarios para el diseño de un filtro pasabajos con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/5$, estudiado en el Ejemplo 3.A.3.

```
% filtro FIR pasabajos

wp = pi/5;          % frecuencia esquina de la banda de paso
wr = 2*pi/5;         % frecuencia esquina de la banda de rechazo
wc = (wp+wr)/2;     % frecuencia de corte del filtro ideal prototipo

% ventana de Hamming
M = 15;
n = -M:M;
wn = 27/50+23/50*cos(2*pi/(2*M+1)*n);

% el filtro ideal
hn = wc/pi*sinc(wc/pi*n);
```

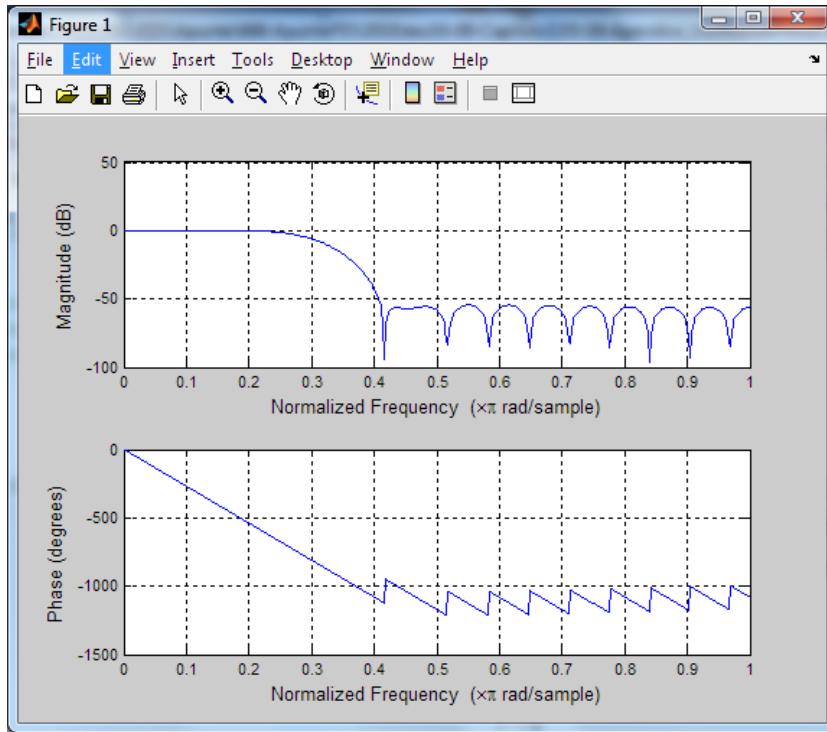


Fig. 3.D.13. Pantalla creada con el comando `freqz` de Matlab mostrando la respuesta en frecuencia del filtro FIR pasabajos del Ejemplo 3.A.3 usando ventana de Hamming.

```
% filtro ideal ventaneado
hc = hn.*wn;

% la respuesta en frecuencia
freqz(hc);
```

En la Fig. 3.D.13 se muestra la ventana generada por `freqz`.

3.D.4. Diseño de filtros FIR usando ventana de Kaiser

El siguiente listado muestra los comandos requeridos para diseñar el filtro FIR del Ejemplo 3.A.7. Los parámetros β y M de la ventana se calculan utilizando las expresiones (3.A.14) y (3.A.15). Otra opción es utilizar el comando `kaiserord`.

```
% filtro pasabanda usando ventana de Kaiser

wrl = 0.30*pi; % frecuencia esquina de la 1ra banda de rechazo
wp1 = 0.35*pi; % 1ra frecuencia esquina de la banda de paso
wp2 = 0.40*pi; % 2da frecuencia esquina de la banda de paso
wr2 = 0.50*pi; % frecuencia esquina de la 2da banda de rechazo

Ar1 = 50;        % dB atenuación en la 1ra banda de rechazo
Ar2 = 70;        % dB atenuación en la 2da banda de rechazo
Ap = 1;          % dB atenuación en la banda de paso (+/- 0.5 dB)
```

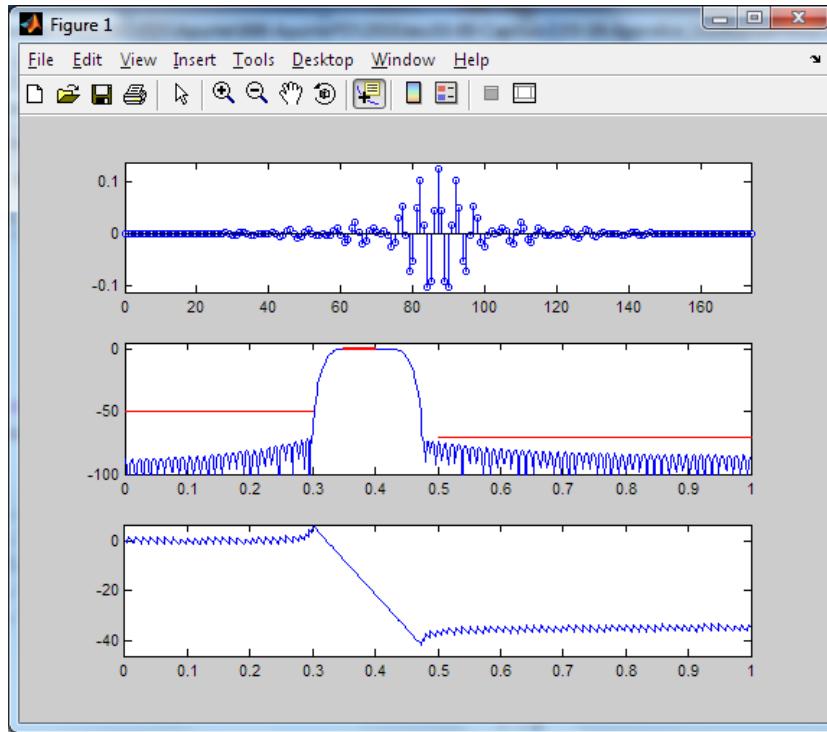


Fig. 3.D.14. Pantalla creada con el comando `freqz` de Matlab mostrando la respuesta en frecuencia del filtro FIR del Ejemplo 3.A.7 usando ventana de Kaiser.

```
% frecuencia de corte del filtro ideal
wc1 = (wr1+wp1)/2;
wc2 = (wr2+wp2)/2;

% bandas de transición
Dw1 = abs(wp1-wr1);
Dw2 = abs(wp2-wr2);

% Parametros para la ventana de Kaiser
Dw = min([Dw1 Dw2]);
Ar = max([Ar1 Ar2]);
B = 0.1102*(Ar-8.7);
M = ceil((Ar-7.95)/(2*2.285*Dw));

% diseño del filtro
n = -M:M;
wn = kaiser(2*M+1,B)';
hn = wc2/pi*sinc(wc2/pi*n)-wc1/pi*sinc(wc1/pi*n);
hc = hn.*wn;

% graficas varias
[H,w] = freqz(hc); % calcula la respuesta en frecuencia, pero no la grafica
Hdb = 20*log10(H); % convierte el módulo a dB
argH = unwrap(angle(H)); % "desenrosca" la fase

subplot(311); % grafica la respuesta impulsiva
stem(0:length(hc)-1,hc,...
```

```

'MarkerSize',3,'LineWidth',1);
axis([0 length(hc)-1,1.1*min(hc),1.1*max(hc)]);

subplot(312); % grafica el módulo de la respuesta en frecuencia
plot(w/pi,20*log10(abs(H)),...
[wp1,wp2]/pi,[0.5 0.5],'r',...
[wp1,wp2]/pi,-[0.5 0.5],'r',...
[0,wr1]/pi, -[Ar1 Ar1],'r',...
[wr2,pi]/pi,-[Ar2 Ar2],'r');
axis([0 1 -100 5]);

subplot(313); % grafica la fase de la respuesta en frecuencia
plot(w/pi,argH);
axis([0 1 1.1*min(argH) 1.1*max(argH)]);

```

En este ejemplo, el comando `[H, w] = freqz(hc)` no se utilizó para graficar directamente la respuesta en frecuencia, sino para calcular un par de vectores `H` y `w` que contienen el valor complejo de la respuesta en frecuencia `H` en las frecuencias indicadas en el vector `w`. La pantalla de resultados se divide en tres secciones utilizando el comando `subplot` para agregar la gráfica de la respuesta impulsiva utilizando el comando `stem`. El resultado se muestra en la Fig. 3.D.14.

3.D.5. Diseño de filtros genéricos: **fdatool**

La herramienta `fdatool` de Matlab es la más completa para el diseño, análisis y visualización del filtros. Tiene una interfaz sencilla que permite diseñar y analizar filtros IIR o FIR rápidamente, introduciendo directamente las especificaciones de diseño, importando filtros desde el ambiente de Matlab, o gráficamente agregando polos y ceros. Provee herramientas para análisis, tales como respuesta en frecuencia en magnitud y fase, respuestas al impulso y al escalón, diagramas de polos y ceros, etc. Posee facilidades para:

- Diseñar filtros
- Analizar filtros
- Modificar el diseño de filtros preexistentes
- Efectuar transformaciones de frecuencia
- Crear filtros que trabajan con múltiples frecuencias de muestreo (*multirate*)
- Analizar los efectos de truncación de coeficientes
- Realizar modelos para Simulink de filtro FIR en forma directa I con coeficientes cuantizados
- Cambiar el tipo de realización
- Exportar el diseño a distintos tipos de código (C, XILINX, HDL)

Otras opciones en la barra de menú permiten convertir el tipo de estructuras, cambiar el orden de las secciones de segundo orden de un filtro, cambiar el escalado, etc. Soporta una enorme variedad de métodos de diseño: Butterworth, Chebyshev tipo I y II, elípticos

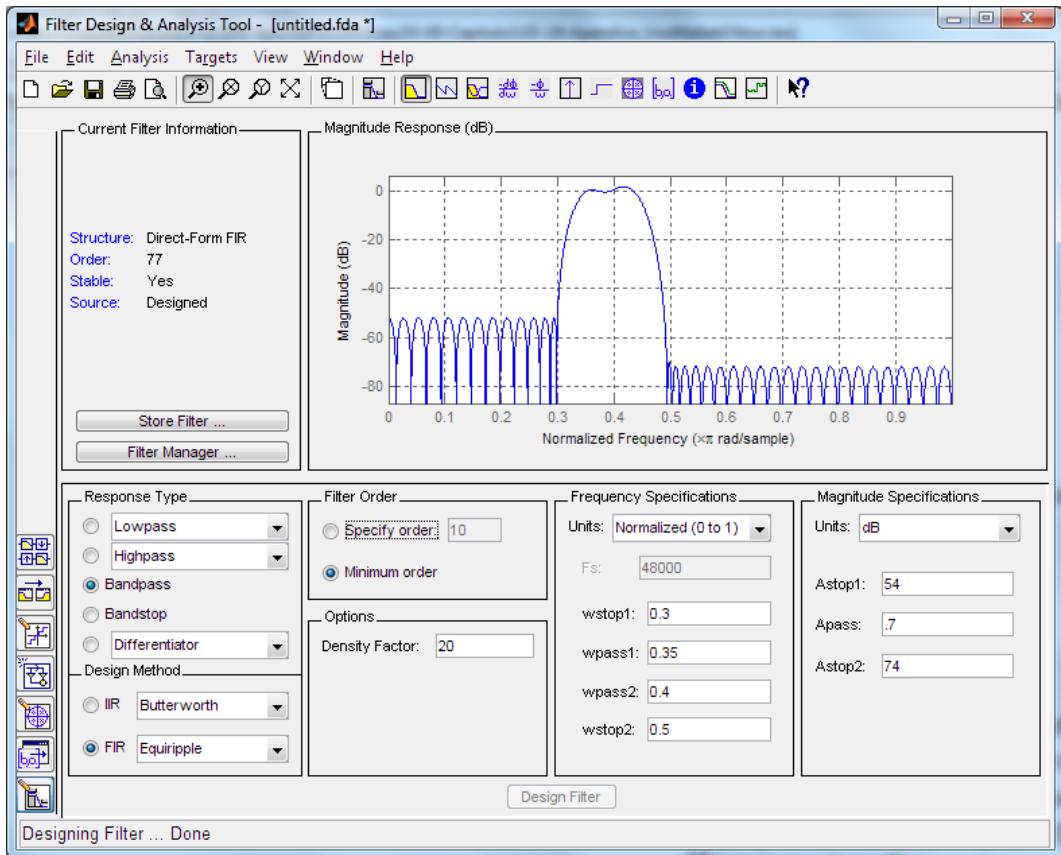


Fig. 3.D.15. La herramienta fdatool de Matlab mostrando el diseño del filtro FIR pasabanda óptimo que satisface las especificaciones del Ejemplo 3.A.8.

(de Cahuer), máximamente planos, equiripple, mínimos cuadrados y mínimos cuadrados con restricciones, equiripples complejos y diseño utilizando ventanas (las disponibles en Matlab u otra suministrada por el usuario). También provee métodos más avanzados, como FIR equiripple con restricciones, filtros de media banda, filtros para minimizar el error en norma p , FIR interpolados, filtros peine tipo ranura (notch) o resonadores, pasatodos para cumplir con un determinado retardo de grupo, IIR óptimos, etc.

Hay distintas maneras de diseñar filtros utilizando esta herramienta. Por ejemplo, se puede elegir un tipo de respuesta, tal como pasabanda, y después elegir entre los métodos de diseño disponibles para filtros FIR o IIR, o elegir el tipo de filtro junto con algunas especificaciones en el dominio frecuencial o temporal. La variedad y cantidad de opciones supera los métodos de diseño que se estudiarán en este curso. En la Fig. 3.D.15 se muestra el diseño del filtro óptimo que cumple con las especificaciones de diseño del Ejemplo 3.A.8.

Apéndice 3.E

Método directo para la solución de las ecuaciones a diferencia

Dada una ecuación a diferencias lineal con coeficientes constantes que representa la relación entrada-salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo, el objetivo de este Apéndice es encontrar una expresión explícita para la salida $y[n]$. El método que se desarrolla se denomina *método directo*. Un método alternativo, y usualmente más sencillo basado en la transformada \mathcal{Z} se presenta en el Capítulo 6. Por razones que serán evidentes entonces esa técnica de solución se denomina *método indirecto*.

Dada una ecuación a diferencias,

$$\sum_{k=0}^n a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^n b_k x[n-k], \quad (3.E.1)$$

una entrada $x[n]$ y un conjunto de condiciones iniciales: $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$, se pretende determinar la salida $y[n]$ para todo $n \geq 0$. El método directo supone que la solución total es la suma de dos partes:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

donde $y_h[n]$ se conoce como solución *homogénea* o *complementaria*, e $y_p[n]$ es la solución *particular*.

3.E.1. La solución homogénea

Para encontrar la solución de la ecuación a diferencias (3.E.1) se comienza por resolver la ecuación a diferencias que resulta cuando se hace $x[n] \equiv 0$. Esta ecuación a diferencias homogénea es

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0. \quad (3.E.2)$$

La solución de esta ecuación se indicará $y_h[n]$. Las soluciones homogéneas cumplen un papel muy importante en la teoría de sistemas. Al igual que para las ecuaciones diferenciales en sistemas lineales continuos, la descripción de sistemas discretos mediante una

ecuación a diferencias con coeficientes constantes no determina la salida del sistema para una señal de entrada dada, a no ser que se especifiquen restricciones o se brinde algún tipo de información adicional. Si de alguna manera se ha podido determinar que ante una entrada $x[n] = x_1[n]$ el sistema responde con una salida $y[n] = y_1[n]$, la ecuación a diferencias (3.E.1) también será satisfecha por la salida $y[n] = y_1[n] + y_h[n]$: basta reemplazar $x_1[n]$, $y[n]$ en (3.E.1) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k (y_1[n-k] + y_h[n-k]) &= \sum_{k=0}^M b_k (x_1[n-k] + 0) \\ \sum_{k=0}^N a_k y_1[n-k] + \underbrace{\sum_{k=0}^N a_k y_h[n-k]}_{=0} &= \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \end{aligned}$$

Este desarrollo muestra también que existen infinitas soluciones homogéneas, ya que:

- si $y_h[n]$ es una solución homogénea, $c y_h[n]$, con $c \in \mathbb{C}$, también es una solución homogénea;
- si $y_h^{(1)}[n]$ e $y_h^{(2)}[n]$ son dos soluciones homogéneas distintas, $c_1 y_h^{(1)}[n] + c_2 y_h^{(2)}[n]$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ también es una solución de la ecuación homogénea.

De manera análoga al caso de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes, para calcular la solución se supone que la respuesta homogénea está formada por una suma de exponentiales:

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^P A_m (z_m)^n, \quad (3.E.3)$$

donde $z_m \in \mathbb{C}$ es el “modo” de la exponencial, y $A_m \in \mathbb{C}$ es un coeficiente de peso. En esta “propuesta” para la solución de la ecuación homogénea existen $2P$ incógnitas: los P modos z_m , y los P coeficientes A_m . Como se mostrará a continuación, los modos z_m dependen solamente de la parte recursiva de la ecuación a diferencias, y por lo tanto son característicos del sistema. En cambio, los coeficientes A_m se calculan en base a las condiciones iniciales $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$, y a la entrada $x[n]$, que en este caso es nula. Cuando se reemplazan los valores de A_m calculados en función de las condiciones iniciales considerando que $x[n] \equiv 0$ en (3.E.3), se encuentra la solución de entrada nula, libre o natural del sistema, que se nota $y_n[n]$.

A continuación se detalla la manera de calcular los modos z_m y los coeficientes A_m .

- Para computar los modos z_m basta reemplazar la solución propuesta (3.E.3) en la ecuación homogénea (3.E.2):

$$0 = \sum_{k=0}^N a_k y_h[n-k] = \sum_{k=0}^N a_k \left(\sum_{m=1}^P A_m (z_m)^{n-k} \right),$$

e intercambiando el orden de suma, resulta

$$0 = \sum_{m=1}^P A_m \left(\sum_{k=0}^N a_k (z_m)^{n-k} \right) = \sum_{m=1}^P A_m z^{n-N} \left(\sum_{k=0}^N a_k (z_m)^{N-k} \right). \quad (3.E.4)$$

Como esta ecuación debe verificarse para *cualquier* conjunto de valores A_m , es necesario que se anule el término entre llaves,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^N a_k (z_m)^{N-k} \\ &= a_0 z_m^N + a_1 z_m^{N-1} + a_2 z_m^{N-2} + \cdots + a_{N-1} z_m + a_N = p(z). \end{aligned} \quad (3.E.5)$$

Esta ecuación, el *polinomio característico* $p(z)$, es un polinomio de grado N en la variable z_m , y sus coeficientes a_k son conocidos: son los coeficientes de la parte recursiva de la ecuación a diferencias (3.E.1). Específicamente, a_k es el coeficiente que multiplica la muestra pasada de la salida $y[n - k]$. En general los coeficientes a_k son reales, por lo que las raíces z_m son reales o complejas conjugadas. Algunas de las raíces pueden ser idénticas, en cuyo caso se dice que existen raíces múltiples. Por convención, en este apéndice se supondrá que las N raíces son distintas y se notarán z_1, z_2, \dots, z_N . Por lo tanto, a lo sumo existen N modos z_m diferentes, y entonces no tiene sentido suponer que $P > N$ en (3.E.3). En consecuencia, de aquí en adelante se supone que $P = N$. Resumiendo, la forma más general de la solución homogénea es entonces

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m (z_m)^n. \quad (3.E.6)$$

- Los coeficientes A_m se determinan a partir de las condiciones iniciales especificadas para el sistema: basta con conocer $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$, y resolver un sistema de N ecuaciones lineales para los N coeficientes indeterminados A_m . Explicitando N muestras consecutivas de la salida, se encuentra que

$$\begin{aligned} y_h[n] &= \sum_{m=1}^N A_m (z_m)^n = A_1 z_1^n + A_2 z_2^n + \cdots + A_N z_N^n, \\ y_h[n-1] &= \sum_{m=1}^N A_m (z_m)^{n-1} = A_1 z_1^{n-1} + A_2 z_2^{n-1} + \cdots + A_N z_N^{n-1}, \\ &\vdots \\ y_h[n-N+1] &= \sum_{m=1}^N A_m (z_m)^{n-N+1} = A_1 z_1^{n-N+1} + A_2 z_2^{n-N+1} + \cdots + A_N z_N^{n-N+1}. \end{aligned} \quad (3.E.7)$$

Como los z_m , $1 \leq m \leq N$ son conocidos, los coeficientes A_1, \dots, A_N se pueden calcular resolviendo el sistema de ecuaciones (3.E.7). Adoptando la notación matricial, y eligiendo (arbitrariamente) $n = -1$, resulta

$$\begin{bmatrix} y[-1] \\ y[-2] \\ \vdots \\ y[-N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^{-1} & z_2^{-1} & \cdots & z_N^{-1} \\ z_1^{-2} & z_2^{-2} & \cdots & z_N^{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ z_1^{-N} & z_2^{-N} & \cdots & z_N^{-N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ZA},$$

con

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y[-1] \\ y[-2] \\ \vdots \\ y[-N] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1^{-1} & z_2^{-1} & \cdots & z_N^{-1} \\ z_1^{-2} & z_2^{-2} & \cdots & z_N^{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ z_1^{-N} & z_2^{-N} & \cdots & z_N^{-N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}. \quad (3.E.8)$$

donde \mathbf{Y} es el vector de condiciones iniciales, \mathbf{A} es el vector de los coeficientes a determinar, y \mathbf{Z} es la matriz formada por las potencias de la raíces del polinomio característico (3.E.5). Esta matriz tiene una estructura muy particular (matriz de Vandermonde) y existen métodos específicos para calcular su inversa. De modo que los N coeficientes desconocidos A_m se calculan resolviendo la ecuación matricial

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Y}. \quad (3.E.9)$$

Esta técnica de cálculo de los A_m supone que $x[n] \equiv 0$. Por lo tanto, cuando los coeficientes calculados con (3.E.9) se reemplazan en (3.E.6), se obtiene la respuesta de entada nula, libre o natural $y_n[n]$ del sistema.

En síntesis, el cálculo de la solución homogénea involucra los siguientes pasos:

1. Se calculan las N raíces z_m del polinomio característico $p(z)$ de la solución homogénea (3.E.5):

$$p(z_m) = \sum_{k=0}^N a_k (z_m)^{-k} = 0.$$

2. Dadas las N condiciones iniciales $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$, se calculan los A_1, \dots, A_N resolviendo (3.E.9).
3. A partir de la solución homogénea dada por (3.E.6),

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m (z_m)^n.$$

se calcula la *respuesta de entrada nula o libre o natural* $y_n[n]$ del sistema. El procedimiento se muestra con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.E.1. Cálculo de la respuesta natural para un sistema de primer orden

Para la ecuación a diferencias descripta por el sistema de primer orden

$$y[n] - ay[n - 1] = x[n], \quad (3.E.10)$$

la ecuación homogénea se obtiene haciendo $x[n] = 0$, y llamando $y_h[n]$ a $y[n]$:

$$y_h[n] - ay_h[n - 1] = 0.$$

Reemplazando $y[n - k]$ por z^{N-k} ($N = 1$ en este caso) se obtiene el polinomio característico $p(z)$ [ecuación (3.E.5)]

$$p(z) = z - a = 0.$$

La raíz de este polinomio es

$$z_1 = a$$

y entonces, de acuerdo con (3.E.6), la solución homogénea es

$$y_h[n] = A_1 z_1^n = A_1 a^n. \quad (3.E.11)$$

El valor de A_1 se calcula con (3.E.9). En este caso, $\mathbf{Y} = y[-1]$, $\mathbf{Z} = a^{-1}$ y $\mathbf{A} = A_1$, de modo que

$$A_1 = ay[-1].$$

El valor de A_1 también puede determinarse a partir de (3.E.10) y (3.E.11). Este procedimiento es más general, ya que se puede aplicar también en el caso en que $x[n]$ sea no nula. Con $x[n] = 0$, de (3.E.10) se tiene que

$$y[0] = ay[-1].$$

Por otro lado, de (3.E.11) se encuentra que

$$y_h[0] = A_1,$$

de donde

$$A_1 = ay[-1],$$

y por lo tanto la *respuesta de entrada nula, libre o natural* del sistema es

$$y_n[n] = A_1 a^n = a^{n+1} y[-1] \quad (3.E.12)$$

que, si $x[n] \equiv 0$, coincide con la salida (3.74) calculada por el método de recursión en el Ejemplo 3.38. \square

EJEMPLO 3.E.2. Cálculo de la respuesta natural de un sistema de segundo orden

Se desea determinar la solución homogénea del sistema

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1], \quad (3.E.13)$$

y la respuesta de entrada nula, libre o natural $y_n[n]$ suponiendo condiciones iniciales $y[-1]$, $y[-2]$ no necesariamente nulas.

Para hallar la solución de la solución homogénea se construye el polinomio auxiliar $p(z)$ [ecuación (3.E.5)] reemplazando $y[n-k]$ por z^{N-k} con $N = 2$ y tomando $x[n] = 0$. Resulta entonces

$$p(z) = z^2 - 3z - 4 = 0.$$

Este polinomio tiene dos raíces,

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 4,$$

de modo que la forma general de la solución homogénea (3.E.6) es

$$\begin{aligned} y_h[n] &= A_1 (z_1)^n + A_2 (z_2)^n \\ &= A_1 (-1)^n + A_2 (4)^n. \end{aligned} \quad (3.E.14)$$

La respuesta de entrada nula, libre o natural requiere calcular el valor de los coeficientes A_1 y A_2 en función de las condiciones iniciales dadas, asumiendo que la entrada es nula. En este caso, las matrices (3.E.8) son

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y[-1] \\ y[-2] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1^{-1} & z_2^{-1} \\ z_1^{-2} & z_2^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},$$

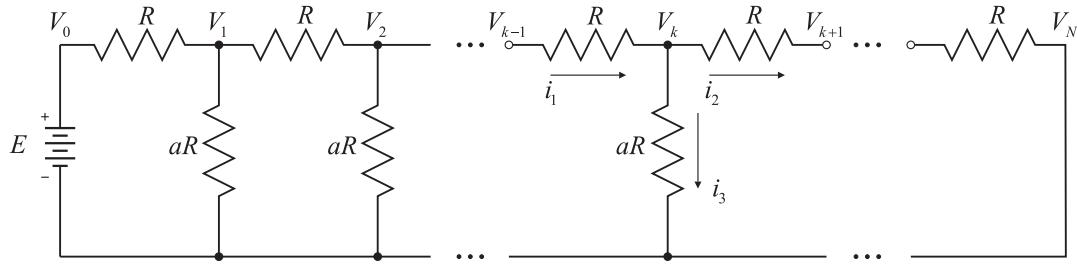


Fig. 3.E.1. Red resistiva.

y resolviendo (3.E.9) se encuentra que

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{5}y[-1] + \frac{4}{5}y[-2], \\ A_2 &= \frac{16}{5}y[-1] + \frac{16}{5}y[-2]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la respuesta de entrada nula, libre o natural del sistema es

$$y_n[n] = \left(-\frac{1}{5}y[-1] + \frac{4}{5}y[-2] \right) (-1)^n + \left(\frac{16}{5}y[-1] + \frac{16}{5}y[-2] \right) (4)^n, \quad (3.E.15)$$

válida para $n \geq 0$. \square

Este enfoque en la solución de ecuaciones a diferencias también es útil para otros problemas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.E.3. Solución de las tensiones en una red resistiva

Se desea calcular la tensión V_1, V_2, \dots, V_N en el circuito resistivo que se muestra en la Fig. 3.E.1. Aplicando la ley de Kirchoff de corriente $i_1 = i_2 + i_3$ en el nodo k -ésimo, se obtiene la ecuación a diferencias

$$\frac{V_{k-1} - V_k}{R} = \frac{V_k - V_{k+1}}{R} + \frac{V_k}{aR},$$

que puede escribirse como

$$aV_{k+1} - (2a + 1)V_k + aV_{k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (3.E.16)$$

con condiciones de borde

$$V_0 = E, \quad V_N = 0. \quad (3.E.17)$$

La ecuación (3.E.16) puede pensarse como una ecuación homogénea para cada valor de k , y las ecuaciones (3.E.17) como las condiciones iniciales para la ecuación que corresponde a $k = 1$ y la que corresponde a $k = N - 1$, respectivamente. Todas las ecuaciones tienen la misma "estructura" de la ecuación (3.E.16), y por lo tanto tienen el mismo polinomio característico, que está dado por

$$p(z) = az - (2a + 1) + az^{-1},$$

cuyas raíces son

$$z_1 = \frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2a}, \quad z_2 = \frac{2a + 1 - \sqrt{4a + 1}}{2a}.$$

La solución homogénea es entonces

$$V_k = A_1 (z_1)^k + A_2 (z_2)^k.$$

Las constantes A_1 y A_2 se calculan a partir de las condiciones de borde

$$\begin{aligned} V_0 &= E = A_1 + A_2, \\ V_N &= 0 = A_1 (z_1)^N + A_2 (z_2)^N, \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-(2a+1-\sqrt{4a+1})^N E}{(2a+1+\sqrt{4a+1})^N - (2a+1-\sqrt{4a+1})^N}, \\ A_2 &= \frac{(2a+1+\sqrt{4a+1})^N E}{(2a+1+\sqrt{4a+1})^N - (2a+1-\sqrt{4a+1})^N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución homogénea (es decir, la tensión en el k -ésimo nodo) satisface la expresión

$$V_k = \frac{\left[-(2a+1-\sqrt{4a+1})^N (2a+1+\sqrt{4a+1})^k + (2a+1+\sqrt{4a+1})^N (2a+1-\sqrt{4a+1})^k \right] E}{(2a+1+\sqrt{4a+1})^N - (2a+1-\sqrt{4a+1})^N} \frac{E}{(2a)^k},$$

para $k = 1, 2, \dots, N-1$. \square

Estos ejemplos muestran el método para obtener la solución homogénea y la respuesta de entrada nula, libre o natural del sistema cuando el polinomio característico tiene raíces distintas. En cambio, si existen raíces múltiples, la forma de la solución dada en (3.E.6) debe cambiarse. Por ejemplo, si z_1 es una raíz de multiplicidad r , la forma general de la solución homogénea es

$$y_h[n] = A_1 z_1^n + A_2 n z_1^n + A_3 n^2 z_1^n + \cdots + A_r n^r z_1^n + A_{r+1} n^{r+1} z_{m+1}^n + \cdots + A_N z_N^n.$$

3.E.2. La solución particular

La solución particular $y_p[n]$ de una ecuación a diferencias debe satisfacer la ecuación (3.E.1) para la señal de entrada $x[n]$, $n \geq 0$ que se aplica al sistema. Es decir, $y_p[n]$ es cualquier solución que verifique

$$\sum_{k=0}^n a_k y_p[n-k] = \sum_{k=0}^n b_k x[n-k]. \quad (3.E.18)$$

Para resolver la ecuación (3.E.18) se supone que $y_p[n]$ tiene una forma similar a la de la entrada $x[n]$. Por ejemplo, si $x[n]$ es una constante, se asume que la solución particular también es una constante. Si $x[n]$ fuese una exponencial, se supone que la solución particular también será una exponencial, etc. En la Tabla 3.E.1 se muestra la expresión de la solución particular para distintos tipos de señales de excitación. En el caso en que la entrada fuese un impulso ($x[n] = \delta[n]$), puede resultar más conveniente hallar la respuesta del sistema aplicando el método de recursión.

EJEMPLO 3.E.4. Solución particular del sistema del Ejemplo 3.E.1

Se desea calcular la solución particular del sistema (3.E.10)

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

ante una entrada escalón unitario ($x[n] = u[n]$).

Como la sucesión de entrada es constante para $n \geq 0$, la forma supuesta para la solución también es una constante, tal como sugiere la Tabla 3.E.1. Por lo tanto la solución propuesta para la ecuación a diferencias forzada por la excitación $x[n]$, denominada la *solución particular* de la ecuación a diferencias, es

$$y_p[n] = Ku[n], \quad (3.E.19)$$

donde K es un factor de escala que se determina de modo de satisfacer la ecuación a diferencias (3.E.10). Reemplazando en esta ecuación la solución (3.E.19) propuesta, se tiene

$$Ku[n] = aKu[n - 1] + u[n]. \quad (3.E.20)$$

Para determinar K se debe evaluar esta ecuación para cualquier valor de $n \geq 1$, donde no se anula ninguno de los términos. Por ejemplo, para $n = 1$, de (3.E.20) resulta $K = aK + 1$, de modo que

$$K = \frac{1}{1-a}.$$

Por lo tanto, la solución particular de la ecuación a diferencias es

$$y_p[n] = \frac{1}{1-a}u[n]. \quad (3.E.21)$$

para $n \geq 0$. □

En el ejemplo siguiente la señal de excitación $x[n]$ tiene una forma más interesante.

EJEMPLO 3.E.5. Solución particular del sistema de un sistema de segundo orden

Se debe determinar la solución particular de la ecuación a diferencias

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n - 1] + \frac{1}{6}y[n - 2] = x[n],$$

cuando la excitación es $x[n] = 2^n$ para $n \geq 0$.

La forma propuesta para la solución particular es, de acuerdo a la Tabla 3.E.1,

$$y_p[n] = K(2)^n, \quad n \geq 0.$$

Tabla 3.E.1. Forma de la solución particular para distintos tipos de señales de entrada.

Señal de entrada $x[n]$	Solución particular $y_p[n]$
A (constante)	K (constante)
Aa^n	Ka^n
An^M	$K_0n^M + K_1n^{M-1} + \dots + K_M$
$a^n n^M$	$a^n (K_0n^M + K_1n^{M-1} + \dots + K_M)$
$\begin{cases} A \cos \omega_0 n \\ A \sin \omega_0 n \end{cases}$	$K_1 \cos \omega_0 n + K_2 \sin \omega_0 n$

Después de sustituir $y_p[n]$ en la ecuación a diferencias se obtiene

$$K(2)^n u[n] - \frac{5}{6}K(2)^{n-1}u[n-1] + \frac{1}{6}K(2)^{n-2}u[n-2] = (2)^n u[n].$$

Para encontrar el valor de K se puede evaluar esta ecuación para cualquier $n \geq 2$, para que no se anule ninguno de los términos. En particular, para $n = 2$ se obtiene

$$K(2)^2 - \frac{5}{6}K(2) + \frac{1}{6}K = 4,$$

de donde resulta que

$$K = \frac{8}{5}.$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$y_p[n] = \frac{8}{5}(2)^n, \quad n \geq 0.$$

□

Hasta ahora se ha mostrado cómo determinar las dos componentes de la solución de una ecuación a diferencias con coeficientes constantes: estas dos componentes son la solución homogénea y la solución particular. A partir de estas dos componentes, se puede calcular la solución total, de la que se puede obtener la *respuesta de estado nulo, de reposo o forzada* por la entrada del sistema ante una entrada cualquiera.

3.E.3. La solución total

La propiedad de linealidad de las ecuaciones a diferencias lineales con coeficientes constantes permite sumar las solución homogénea y la solución particular para obtener la *solución total* $y[n]$. Por lo tanto,

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n].$$

Como ahora la entrada no es idénticamente nula, los coeficientes indeterminados A_m que aparecen en la solución homogénea deben determinarse a partir de las condiciones iniciales, y de la propia ecuación del sistema teniendo en cuenta la entrada aplicada. Aunque estos coeficientes pueden calcularse con un enfoque matricial similar al de la Sección 3.E.1, las variantes en este caso son mucho mayores por la contribución de la entrada en la ecuación a diferencias. Tal desarrollo excede el propósito de este apunte, y por lo tanto la solución total se calculará a partir del análisis de la solución homogénea y la solución particular, evaluadas en instantes de tiempo tales que no se anulen ninguno de los términos de la solución. Los siguientes ejemplos muestran el procedimiento.

EJEMPLO 3.E.6. Respuesta forzada del sistema del Ejemplo 3.E.1

Se debe determinar la solución total para $n \geq 0$ de la ecuación a diferencias

$$y[n] - ay[n-1] = x[n],$$

cuando la entrada es un escalón unitario $x[n] = u[n]$, y la condición inicial es $y[-1]$.

De la ecuación (3.E.11) del Ejemplo 3.E.1, la solución homogénea es

$$y_h[n] = A_1 a^n, \quad (3.E.22)$$

y de (3.E.21) del Ejemplo 3.E.4, la solución particular es

$$y_p[n] = \frac{1}{1-a} \quad (3.E.23)$$

En consecuencia, la solución total del sistema (3.E.10) para una excitación $x[n] = u[n]$ está dada por

$$\begin{aligned} y[n] &= y_h[n] + y_p[n] \\ &= A_1 a^n + \frac{1}{1-a} u[n]. \end{aligned} \quad (3.E.24)$$

Para conocer la *respuesta de estado nulo, de reposo o forzada*, se debe determinar A_1 haciendo nulas las condiciones iniciales y considerando la entrada aplicada al sistema. Reemplazando para $n = 0$ en la (3.E.10), resulta

$$y[0] = a y[-1] + 1$$

y haciendo $y[-1] = 0$ se tiene que

$$y[0] = 1. \quad (3.E.25)$$

Por otro lado, evaluando (3.E.24) en $n = 0$, se tiene

$$y[0] = A_1 + \frac{1}{1-a}. \quad (3.E.26)$$

Igualando (3.E.25) con (3.E.26) resulta en que la constante A_1 está dada por

$$A_1 = \frac{-a}{1-a}.$$

y reemplazando A_1 en (3.E.24) se tiene la *respuesta de estado nulo, de reposo o forzada* del sistema

$$\begin{aligned} y_f[n] &= \frac{-a}{1-a} a^n + \frac{1}{1-a} u[n], \\ &= \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (3.E.27)$$

que coincide con la solución hallada en el Ejemplo 3.38 por el método de recursión haciendo $y[-1] = 0$. En efecto, la solución (3.74) para $y[-1] = 0$ y una entrada $x[n] = u[n]$ es

$$y[n] = y[-1] a^{n+1} + \sum_{k=0}^n a^k x[n-k] = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}, \quad n \geq 0. \quad \square$$

EJEMPLO 3.E.7. Respuesta total del sistema del Ejemplo 3.E.1 con condiciones iniciales no nulas

Para determinar la respuesta del sistema (3.E.10) del Ejemplo 3.E.1 con una condición inicial $y[-1] \neq 0$, se repite el desarrollo utilizado en el Ejemplo anterior para calcular A_1 teniendo en cuenta la nueva condición inicial. En este caso, reemplazando para $n = 0$ en (3.E.10), resulta

$$y[0] = a y[-1] + 1. \quad (3.E.28)$$

Evaluando (3.E.24) en $n = 0$, se tiene

$$y[0] = A_1 + \frac{1}{1-a}. \quad (3.E.29)$$

Igualando (3.E.28) con (3.E.29) se encuentra que

$$A_1 = \frac{-1}{1-a} + ay[-1] + 1 = \frac{-a}{1-a} + ay[-1].$$

El valor de este coeficiente es distinto del calculado en el Ejemplo 3.E.1, aún cuando en ambos casos las condiciones iniciales son no nulas: la diferencia radica en que en el Ejemplo 3.E.1 se supone que $x[n] \equiv 0$, mientras que en este caso $x[n] \neq 0$. Esto muestra que la entrada también contribuye en la forma de la solución homogénea. Sustituyendo el valor hallado para A_1 en (3.E.22) se encuentra que la solución homogénea es

$$y_h[n] = A_1 a^n = \frac{-a^{n+1}}{1-a} - a^{n+1} y[-1] \quad (3.E.30)$$

Con el valor de la solución particular $y_p[n]$ dado por (3.E.23) calculado en el Ejemplo anterior se encuentra que la respuesta total del sistema con condiciones iniciales no nulas ($y[-1] \neq 0$) ante una entrada escalón es

$$\begin{aligned} y[n] &= y_h[n] + y_p[n] \\ &= \left(\frac{-a}{1-a} + ay[-1] \right) a^n + \frac{1}{1-a} u[n] \\ &= a^{n+1} y[-1] + \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}. \end{aligned} \quad (3.E.31)$$

Nuevamente, esta solución coincide con la solución (3.74) hallada en el Ejemplo 3.38 por el método de recursión. \square

Del ejemplo anterior se desprende que las constantes A_m de la solución homogénea dependen no sólo de la condición inicial $y[-1]$, sino también de la entrada $x[n]$ que excita al sistema. En consecuencia, el valor de esta constante influye tanto en la respuesta de entrada, libre o natural $y_n[n]$ como en la respuesta de estado nulo, de reposo o forzada del sistema $y_f[n]$. Si se desea calcular solamente la solución forzada del sistema, basta calcular los A_m a partir de condiciones iniciales nulas $y[-1] = 0$, como en el Ejemplo 3.E.6.

Comparando la respuesta (3.E.31) con la respuesta (3.E.12) de entrada nula, libre o natural $y_n[n]$ calculada en el Ejemplo 3.E.1 y la respuesta (3.E.27) de estado nulo, de reposo o forzada $y_f[n]$ encontrada en el Ejemplo 3.E.6, es evidente que la solución total $y[n]$ de la ecuación (3.E.31) puede escribirse como

$$y[n] = y_n[n] + y_f[n].$$

Como en el planteo del cálculo de las soluciones de la ecuación a diferencia también se ha supuesto que la solución total puede escribirse como la suma de la solución homogénea y la solución particular,

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

uno estaría tentado a vincular de alguna manera estas cuatro respuestas:

1. homogénea (con condiciones iniciales y entrada no nulas),

2. particular (con entrada no nula);
3. de entrada nula, libre o natural (con entrada $x[n] = 0$, y condiciones iniciales distintas de cero) , y
4. de estado nulo, de reposo o forzada (con entrada $x[n] \neq 0$, pero condiciones iniciales nulas).

Pero son todas distintas: para este ejemplo,

$$\begin{aligned}y_h[n] &= \frac{-a^{n+1}}{1-a} - a^{n+1}y[-1], \\y_p[n] &= \frac{1}{1-a}, \\y_n[n] &= a^{n+1}y[-1], \\y_f[n] &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.\end{aligned}$$

Es evidente, sin embargo, que $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = y_n[n] + y_f[n]$.

La solución particular del sistema (3.E.21) también puede calcularse a partir de la respuesta del sistema de entrada nula, de reposo o forzada. En efecto, si $|a| < 1$ (que es la condición de estabilidad para este sistema) el valor límite de $y_f[n]$ a medida que $n \rightarrow \infty$ es la solución particular, es decir

$$y_p[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} y_f[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

Como esta respuesta en general no se anula cuando $n \rightarrow \infty$, se la suele llamar la respuesta de *estado estacionario* del sistema. Esta respuesta persiste en el tiempo tanto como la señal de entrada. La componente de la salida que se extingue a medida que n crece se denomina *respuesta transitoria* del sistema

EJEMPLO 3.E.8. Solución total de la ecuación a diferencias del Ejemplo 3.E.2

Se desea calcular la respuesta del sistema (3.E.13) del Ejemplo 3.E.2 ante una señal de entrada $x[n] = 4^n u[n]$.

La solución homogénea de este sistema está dada por la ecuación (3.E.14),

$$y_h[n] = A_1 (-1)^n + A_2 (4)^n.$$

La solución particular $y_p[n]$ se supone exponencial, de la misma forma que $x[n]$ de acuerdo con la Tabla (3.E.1),

$$y_p[n] = K (4)^n u[n].$$

Sin embargo, como esta solución ya está contenida en la solución homogénea (3.E.14), la solución propuesta es redundante. Por este motivo se elige una solución particular que sea linealmente independiente de los términos contenidos en la solución homogénea. Este tratamiento es el mismo que se usa cuando el polinomio característico (3.E.5) tiene raíces múltiples. Se supone entonces

$$y_p[n] = Kn (4)^n u[n]. \quad (3.E.32)$$

Reemplazando (3.E.32) en (3.E.13) se obtiene

$$Kn (4)^n u[n] - 3K (n-1) (4)^{n-1} u[n-1] - 4K (n-2) (4)^{n-2} u[n-2] = (4)^n u[n] + 2 (4)^{n-1} u[n-1].$$

Para determinar K se evalúa esta ecuación para cualquier $n \geq 2$, donde no se anula ninguno de los escalones unitarios. Para simplificar las cuentas, se adopta $n = 2$, de donde se obtiene $K = 6/5$. Entonces la solución particular es

$$y_p[n] = \frac{6}{5}n(4)^n u[n]. \quad (3.E.33)$$

La solución total $y[n]$ se calcula sumando la solución particular encontrada recientemente con la solución homogénea (3.E.14) que se calculó en el Ejemplo 3.E.2:

$$\begin{aligned} y[n] &= y_h[n] + y_p[n] \\ &= A_1(-1)^n + A_2(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (3.E.34)$$

donde las constantes A_1 y A_2 se determinan para satisfacer las condiciones iniciales. De la ecuación del sistema (3.E.13) se obtiene

$$\begin{aligned} y[0] &= 3y[-1] + 4y[-2] + 1, \\ y[1] &= 3y[0] + 4y[-1] + 6 \\ &= 13y[-1] + 12y[-2] + 9. \end{aligned}$$

Por otra parte, de la solución general (3.E.34) evaluada en $n = 0$ y en $n = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} y[0] &= A_1 + A_2, \\ y[1] &= -A_1 + 4A_2 + \frac{24}{5}. \end{aligned}$$

Igualando los dos conjuntos de ecuaciones, se pueden calcular los valores de A_1 y A_2 en función de $y[-1]$ e $y[-2]$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{25} - \frac{1}{5}y[-1] + \frac{4}{5}y[-2], \\ A_2 &= \frac{26}{25} + \frac{16}{5}y[-1] + \frac{16}{5}y[-2], \end{aligned}$$

y por lo tanto la solución homogénea es

$$\begin{aligned} y_h[n] &= A_1(-1)^n + A_2(4)^n \\ &= \left(-\frac{1}{25} - \frac{1}{5}y[-1] + \frac{4}{5}y[-2]\right)(-1)^n + \left(\frac{26}{25} + \frac{16}{5}y[-1] + \frac{16}{5}y[-2]\right)(4)^n. \end{aligned} \quad (3.E.35)$$

La solución total del sistema para *cualquier* condición inicial para una entrada $x[n] = (4)^n u[n]$ está dada entonces por

$$y[n] = \left(-\frac{1}{25} - \frac{1}{5}y[-1] + \frac{4}{5}y[-2]\right)(-1)^n + \left(\frac{26}{25} + \frac{16}{5}y[-1] + \frac{16}{5}y[-2]\right)(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n \quad (3.E.36)$$

para $n \geq 0$.

Si se desea conocer la respuesta de estado nulo, de reposo o forzada $y_f[n]$ del sistema (que es la respuesta con condiciones iniciales nulas) se hace $y[-1] = y[-2] = 0$, de donde

$$A_1 = -\frac{1}{25}, \quad A_2 = \frac{26}{25},$$

y entonces la respuesta de estado nulo, de reposo o forzada $y_f[n]$ correspondiente a una entrada $x[n] = (4)^n u[n]$ es

$$y_f[n] = -\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n, \quad (3.E.37)$$

válida para $n \geq 0$. □

Es interesante comparar las respuestas obtenidas para el sistema (3.E.13):

- la solución total $y[n]$ para *cualquier* condición inicial y una entrada específica ($x[n] \neq 0$) dada por (3.E.36),

$$y[n] = \left(-\frac{1}{25} - \frac{1}{5}y[-1] + \frac{4}{5}y[-2] \right) (-1)^n + \left(\frac{26}{25} + \frac{16}{5}y[-1] + \frac{16}{5}y[-2] \right) (4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n;$$

- la respuesta homogénea $y_h[n]$ calculada con entrada y condiciones iniciales no nulas, dada por (3.E.35),

$$y_h[n] = \left(-\frac{1}{25} - \frac{1}{5}y[-1] + \frac{4}{5}y[-2] \right) (-1)^n + \left(\frac{26}{25} + \frac{16}{5}y[-1] + \frac{16}{5}y[-2] \right) (4)^n;$$

- la respuesta particular $y_p[n]$ calculada para una entrada $x[n] \neq 0$, dada por (3.E.33)

$$y_p[n] = \frac{6}{5}n(4)^n u[n];$$

- la respuesta de entrada nula, libre o natural $y_n[n]$ calculada con entrada $x[n] \equiv 0$ y condiciones iniciales no nulas, dada por (3.E.15)

$$y_n[n] = \left(-\frac{1}{5}y[-1] + \frac{4}{5}y[-2] \right) (-1)^n + \left(\frac{16}{5}y[-1] + \frac{16}{5}y[-2] \right) (4)^n;$$

- la respuesta de estado nulo, de reposo o forzada $y_f[n]$ calculada con condiciones iniciales nulas y entrada $x[n] \neq 0$, dada por (3.E.37)

$$y_f[n] = -\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n.$$

Estudiando estas expresiones, es claro que

$$y[n] = y_n[n] + y_f[n],$$

pero también es cierto que la solución total $y[n]$ del sistema es la suma de la solución homogénea $y_h[n]$ con la solución particular $y_p[n]$

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n].$$

Evidentemente, esto no establece ningún tipo de igualdad entre la respuesta natural $y_n[n]$, la respuesta homogénea $y_h[n]$, la solución particular $y_p[n]$ o la respuesta forzada $y_f[n]$ del sistema.

En resumen, el método directo para el cálculo de la solución de una ecuación a diferencias con coeficientes constantes requiere de tres pasos:

1. Estudiar la solución *homogénea* $y_h[n]$, en función de las condiciones iniciales, considerando que la entrada del sistema es nula: $x[n] \equiv 0$.
2. Calcular una solución *particular* $y_p[n]$ para una entrada $x[n]$ dada, proponiendo una solución de acuerdo a la Tabla 3.E.1 y considerando las condiciones iniciales.

3. Determinar la solución *total* de la ecuación a diferencias a partir de la solución homogénea $y_h[n]$ y de la solución particular $y_p[n]$ correspondiente a una entrada $x[n]$,

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n].$$

En las aplicaciones, usualmente sólo es necesario conocer la respuesta de entrada nula, libre o natural $y_n[n]$, y la respuesta de estado nulo, de reposo o forzada $y_f[n]$. Teniendo en cuenta que la solución total $y[n]$ también se puede escribir como la suma de estas dos respuestas, otra manera de encontrar la solución de la ecuación a diferencias se basa en:

1. Calcular la respuesta de *entrada nula, libre o natural* $y_n[n]$ del sistema, haciendo $x[n] \equiv 0$ y en función de las condiciones iniciales.
2. Encontrar la respuesta de *estado nulo, de reposo o forzada* $y_f[n]$ considerando la entrada $x[n]$ dada y haciendo nulas las condiciones iniciales.
3. Determinar la solución *total* de la ecuación a diferencias a partir de la solución de entrada nula, libre o natural $y_n[n]$ y de la solución de estado nulo, de reposo o forzada $y_f[n]$ correspondiente a una entrada $x[n]$ dada,

$$y[n] = y_n[n] + y_f[n].$$

Además, si el sistema es *estable*, se verifica que

$$y_p[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} y_f[n].$$

En este caso, $y_p[n]$ se convierte en la respuesta de estado estacionario $y_{ee}[n]$, y la respuesta transitoria es $y_t[n] = y[n] - y_{ee}[n]$, verificándose que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_t[n] = 0.$$

3.E.4. La respuesta impulsiva de un sistema recursivo lineal e invariante en el tiempo

La respuesta impulsiva $h[n]$ de un sistema lineal en invariante en el tiempo es la respuesta de un sistema cuando se lo excita con un impulso unitario, es decir $x[n] = \delta[n]$. En el caso de un sistema recursivo, la respuesta impulsiva $h[n]$ es la salida de estado nulo, o de reposo o forzada de un sistema (es decir, con condiciones iniciales nulas) cuando $x[n] = \delta[n]$.

En la sección anterior se ha mostrado que la respuesta total de un sistema está formada por la suma de dos soluciones de la ecuación a diferencias: la solución a la ecuación homogénea $y_h[n]$ y la solución particular $y_p[n]$ debida a la función de excitación $x[n]$. En el caso en que la excitación es un impulso, la solución particular es nula porque $x[n] = 0$ para $n > 0$, es decir

$$y_p[n] = 0.$$

Por lo tanto, la respuesta de un sistema representado por una ecuación a diferencias cuando se lo excita con un impulso está formada solamente por la solución de la ecuación homogénea, donde los coeficientes A_m se determinan considerando que el sistema se encuentra inicialmente en reposo (es decir, con condiciones iniciales nulas) y que la entrada es un impulso. El siguiente ejemplo muestra el procedimiento para obtener $h[n]$ a partir de la ecuación a diferencias del sistema.

EJEMPLO 3.E.9. Determinación de la respuesta impulsiva para un sistema de segundo orden
Para el sistema de segundo orden del Ejemplo 3.E.2, repetido aquí por conveniencia,

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1], \quad (3.E.38)$$

se ha encontrado que la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h[n] = A_1(-1)^n + A_2(4)^n, \quad n \geq 0. \quad (3.E.39)$$

Si la entrada es $x[n] = \delta[n]$, la solución particular $y_p[n]$ es nula porque $x[n] = 0$ para $n > 0$, y entonces la respuesta impulsiva está dada por la solución a la ecuación homogénea donde A_1 y A_2 se calculan considerando condiciones iniciales nulas de manera de satisfacer (3.E.38) cuando $x[n]$ se reemplaza por $\delta[n]$ e $y[n]$ por $y_h[n]$. Para $n = 0$ y $n = 1$, la ecuación (3.E.38) resulta

$$y[0] = 1, \quad y[1] = 3y[0] + 2 = 5. \quad (3.E.40)$$

Por otro lado, la evaluación de (3.E.39) para $n = 0$ y $n = 1$ resulta en

$$y[0] = A_1 + A_2, \quad y[1] = -A_1 + 4A_2. \quad (3.E.41)$$

Resolviendo (3.E.40) y (3.E.41) para A_1 y A_2 en función de $y[0]$ e $y[1]$ se encuentra que

$$A_1 = -\frac{1}{5}, \quad A_2 = \frac{6}{5}.$$

Por lo tanto, la respuesta impulsiva del sistema es

$$h[n] = \left[-\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{6}{5}(4)^n \right] u[n]. \quad \square$$

En este ejemplo, la respuesta impulsiva tiene duración infinita y por lo tanto el sistema (3.E.38) es IIR. En realidad, debido a la naturaleza recursiva del sistema, “casi” cualquier sistema recursivo descripto por una ecuación a diferencias es un sistema IIR (pueden existir sistemas “trámosos”, como el que se estudia en el Ejercicio 25). La recíproca no es cierta: no todo sistema IIR lineal e invariante en el tiempo puede ser descripto por una ecuación a diferencias lineal con coeficientes constantes. En otras palabras, los sistemas recursivos descriptos por ecuaciones a diferencias lineales con coeficientes constantes son una subclase de los sistemas IIR lineales e invariantes en el tiempo.

La técnica utilizada en el Ejemplo 3.E.9 para determinar la respuesta impulsiva del sistema se puede generalizar para sistemas de mayor orden. Si el sistema está caracterizado por una ecuación a diferencias lineal del tipo (3.E.1) de orden N , la solución de la solución homogénea es

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m z_m^n,$$

donde se supone que las raíces z_m del polinomio característico (3.E.5) son todas distintas. La respuesta impulsiva del sistema tiene la misma forma

$$h[n] = \sum_{m=1}^N A_m z_m^n,$$

donde los coeficientes A_m se determinan haciendo las condiciones iniciales $y[-1] = y[-2] = \dots = y[-N] = 0$, de manera de cumplir también con la restricción impuesta por $x[n] = \delta[n]$.

Esta forma de la respuesta impulsiva permite relacionar la estabilidad entrada-salida del sistema con las raíces del polinomio característico. La estabilidad entrada-salida para un sistema causal implica que la respuesta impulsiva es absolutamente sumable. Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^N A_m z_m^n \right| \leq \sum_{m=1}^N |A_m| \sum_{n=0}^{\infty} |z_m|^n.$$

Si $|z_m| < 1$ para $0 \leq n \leq N$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_m|^n < \infty$$

y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty.$$

Por otra parte, si alguna de las raíces z_m tiene módulo mayor o igual que 1, $|z_m| \geq 1$, $h[n]$ no es absolutamente sumable, y por lo tanto el sistema es inestable. Por lo tanto, una condición necesaria y suficiente de estabilidad entrada-salida para un sistema IIR es que todas las raíces del polinomio característico tengan módulo menor que 1. No es complicado demostrar que esta condición se mantiene para el caso en que el sistema tenga raíces con multiplicidad r .

