Devoir Maison n°5
Autour du laplacien

Première partie
Mise en bouche

(partie rédigée par Maxime)

Deuxième partie
Fonctions radiales harmoniques

1. (a) (partie rédigée par Maxime)
   (b) (partie rédigée par Maxime)
2. (a) Puisque la norme euclidienne ($\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_k^2 + ... + x_n^2}$ où x_k est la k-ième coordonnée de x) est de classe $\mathscr{C}^2$ par rapport à chaque variable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que f est de classe $\mathscr{C}^2$ alors φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$
   (b) Notons N la norme euclidienne. On a alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \frac{\partial N}{\partial x_k}(x) = 2x_k.\frac{1}{2}(x_1^2 + ... + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}} = \frac{x_k}{\|x\|}$$
   Ainsi
   $$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial(\varphi \circ N)}{\partial x_k} = (\varphi' \circ N).\frac{\partial N}{\partial x_k}$$
   (c) En dérivant le produit ci-dessus, on obtient :
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = (\varphi' \circ N).\frac{\partial^2 N}{\partial x_k^2} + \left((\varphi'' \circ N).\frac{\partial N}{\partial x_k}\right).\frac{\partial N}{\partial x_k}$$
   D'où
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = (\varphi' \circ N).\frac{\partial^2 N}{\partial x_k^2} + (\varphi'' \circ N).\left(\frac{\partial N}{\partial x_k}\right)^2$$
   Puisque le Laplacien s'écrit :
   $$\Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$
   Alors
   $$\Delta f = (\varphi' \circ N).\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 N}{\partial x_k^2} + (\varphi'' \circ N).\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial N}{\partial x_k}\right)^2$$
   On remarque bien évidemment la forme obtenue dans la première partie
   $$\Delta(\varphi \circ N) = (\varphi' \circ N).\Delta N + (\varphi'' \circ N).\|\nabla N\|^2$$

Calculons à présent $\|\nabla N\|^2$ et ΔN.
On a vu que

$$\frac{\partial N}{\partial x_k}(x) = \frac{x_k}{\|x\|}$$

D'où

$$\nabla N(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\|x\|} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{\|x\|} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\nabla N(x)\|^2 &= \langle \nabla N(x) | \nabla N(x) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\|x\|^2} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \\ &= \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ensuite calculons ΔN
On obtient déjà que (dériver d'un quotient) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \frac{\partial^2 N}{\partial x_k^2}(x) = \frac{1.N(x) - x_k \cdot \frac{x_k}{N(x)}}{N(x)^2} = \frac{N(x)^2 - x_k^2}{N(x)^3}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Delta N(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 N}{\partial x_k^2}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\|x\|^2 - x_k^2}{\|x\|^3} \\ &= \frac{1}{\|x\|^3} \left(n\|x\|^2 - \|x\|^2 \right) \\ &= \frac{n-1}{\|x\|} \end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \Delta f(x) = \varphi''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} \varphi'(\|x\|)$$

3. Soit f un fonction radiale harmonique et x un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On a donc $\Delta f = 0$.
   Or d'après la première partie on connait la forme du laplacien d'une composée.

$$\Delta f(x) = \varphi''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|}\varphi'(\|x\|)$$

On a donc, en posant $r = \|x\|$

$$\varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = 0$$

On remarque l'écriture d'un équation différentielle du second ordre sans terme non-dérivé. On peut donc poser $\omega = \varphi'$. Ainsi on a

$$\omega' + \frac{n-1}{r}\omega = 0$$

$\omega(r) = \dfrac{1}{r^{n-1}}$ est une solution particulière de l'équation différentielle.
Ainsi

$$\varphi'(r) = \frac{\lambda}{r^{n-1}} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

En primitivant φ' on obtient :
Par cas :

- Si n = 2 :
  Alors
  $$\varphi' = \frac{\lambda}{r}$$
  Donc
  $$f(x) = \varphi(r) = \lambda.ln(r) + \mu \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ des réels}$$
- Si n > 2 :
  Alors
  $$\varphi' = \frac{\lambda}{r^{n-1}}$$
  Donc
  $$f(x) = \varphi(r) = \frac{\lambda}{(2-n).r^{n-2}} + \mu \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ des réels}$$

Conclusion :
Les fonctions radiales harmoniques sont :

$$\boxed{f(x) = \lambda.ln(r) + \mu} \qquad \text{(n = 2)}$$

Ou

$$\boxed{f(x) = \frac{\lambda}{(2-n).r^{n-2}} + \mu} \qquad \text{(n > 2)}$$

Troisième partie
Laplacien et isométries

(partie rédigée par Marc)