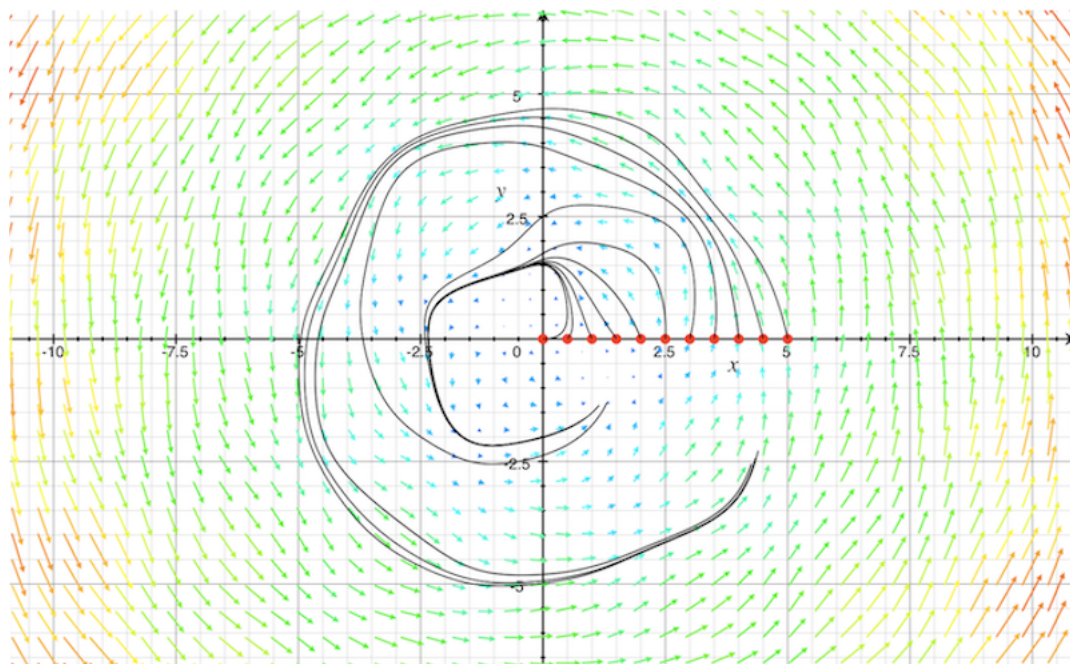


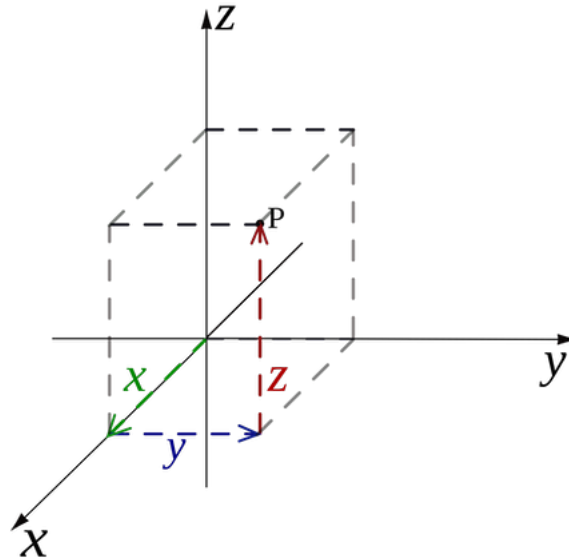
Formulaire d'analyse vectorielle et d'Électromagnétisme

Valentin COLIN



1 Coordonnées orthogonales

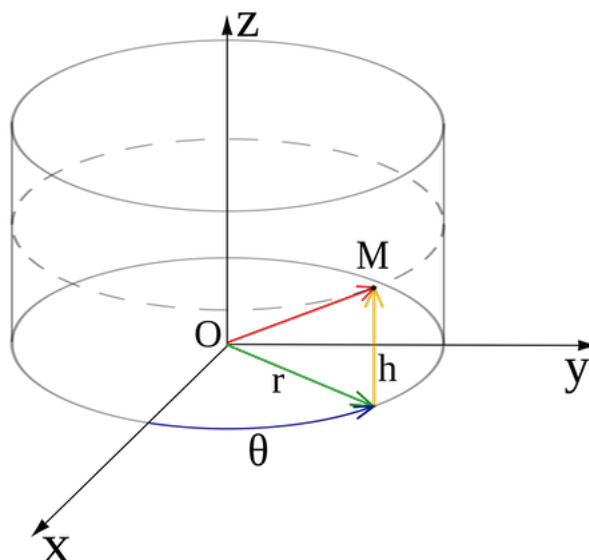
1.1 Coordonnées cartésiennes



- base : $\widehat{e}_x, \widehat{e}_y, \widehat{e}_z$
- coordonnées : x, y, z
- déplacement élémentaire :

$$\vec{dl} = dx \widehat{e}_x + dy \widehat{e}_y + dz \widehat{e}_z$$

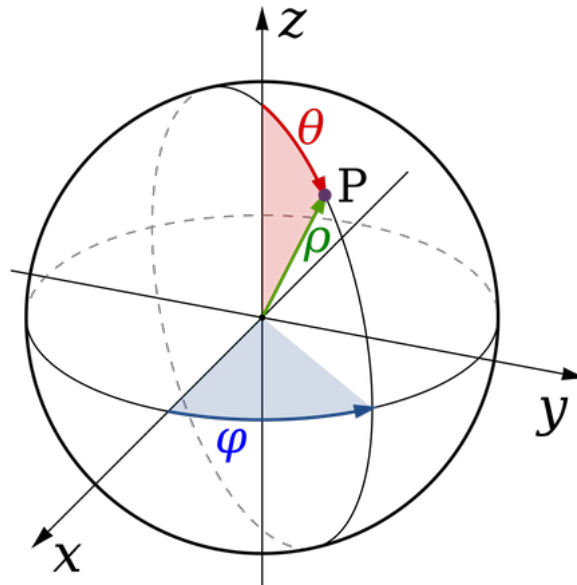
1.2 Coordonnées cylindriques



- base : $\widehat{e}_\rho, \widehat{e}_\varphi, \widehat{e}_z$
- coordonnées : ρ, φ, z
- déplacement élémentaire :

$$\vec{dl} = d\rho \widehat{e}_\rho + \rho d\varphi \widehat{e}_\varphi + dz \widehat{e}_z$$

1.3 Coordonnées sphériques



- base : $\widehat{e}_r, \widehat{e}_\theta, \widehat{e}_\varphi$
- coordonnées : r, θ, φ
- déplacement élémentaire :

$$\vec{dl} = dr \widehat{e}_r + r d\theta \widehat{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \widehat{e}_\varphi$$

1.4 Notation générale

- base : $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_3$
- coordonnées : s_1, s_2, s_3
- déplacement élémentaire :

$$\vec{dl} = \sum_{i=1}^3 \mu_i ds_i \widehat{e}_i$$

où μ_i est le multiplicateur de la coordonnée s_i .

multiplicateurs		μ_1	μ_2	μ_3
repérage				
cartésien : $s_1 = x, s_2 = y, s_3 = z$		1	1	1
cylindrique : $s_1 = \rho, s_2 = \varphi, s_3 = z$		1	ρ	1
sphérique : $s_1 = r, s_2 = \theta, s_3 = \varphi$		1	r	$r \sin \theta$

2 Expressions des opérateurs en coordonnées orthogonales

2.1 Gradient

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad}} f = \sum_i \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial f}{\partial s_i} \hat{e}_i = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \\ \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial f}{\partial s_2} \\ \frac{1}{\mu_3} \frac{\partial f}{\partial s_3} \end{vmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

Coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

Coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

2.2 Divergence

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A} = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \sum_{PC} \frac{\partial}{\partial s_i} (\mu_2 \mu_3 A_i)$$

Coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

2.3 Rotationnel

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{e}_1}{\mu_2 \mu_3} & \frac{\partial}{\partial s_1} & \mu_1 A_1 \\ \frac{\hat{e}_2}{\mu_1 \mu_3} & \frac{\partial}{\partial s_2} & \mu_2 A_2 \\ \frac{\hat{e}_3}{\mu_1 \mu_2} & \frac{\partial}{\partial s_3} & \mu_3 A_3 \end{vmatrix} \wedge = \begin{vmatrix} \frac{\hat{e}_1}{\mu_2 \mu_3} \left[\frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_3} \right] \\ \frac{\hat{e}_2}{\mu_1 \mu_3} \left[\frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_1} \right] \\ \frac{\hat{e}_3}{\mu_1 \mu_2} \left[\frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_2} \right] \end{vmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \\ \hat{e}_y \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \\ \hat{e}_z \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \end{vmatrix}$$

Coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \\ \hat{e}_\varphi \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \\ \hat{e}_z \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \end{vmatrix}$$

Coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \hat{e}_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \\ \hat{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{vmatrix}$$

2.4 Laplacien d'un champ scalaire

Notations de l'opérateur Laplacien : Δ , Lap , $\vec{\nabla}^2$.

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \sum_{PC} \frac{\partial}{\partial s_1} \left[\frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \right]$$

Coordonnées cartésiennes

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées cylindriques

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

2.5 Laplacien d'un champ vectoriel

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})$$

2.6 D'Alembertien

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

3 Formulaire relatif aux opérateurs

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) &= 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) &= \vec{0} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) &= \Delta f \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f) &= \Delta f \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(fg) &= f(\overrightarrow{\operatorname{grad}} g) + g(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \\ \vec{\nabla}(fg) &= f(\vec{\nabla} g) + g(\vec{\nabla} f) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(f \vec{A}) &= f(\operatorname{div} \vec{A}) + \vec{A}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \\ \vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) &= f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla} f) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(f \vec{A}) &= (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \wedge \vec{A} + f(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) \\ \vec{\nabla} \wedge (f \vec{A}) &= (\vec{\nabla} f) \wedge \vec{A} + f(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{B}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) - \vec{A}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{B}(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= (\operatorname{div} \vec{B}) \vec{A} - (\operatorname{div} \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{B} \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \vec{\nabla}) \vec{B} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \wedge (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) + \vec{B} \wedge (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) + (\vec{A} \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{B} + (\vec{B} \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{A} \\ \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) + \vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + (\vec{A} \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \vec{\nabla}) \vec{A} \end{cases} \quad (10)$$

4 Théorèmes intégraux

4.1 Théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

4.2 Théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{enlacés}$$

4.3 Théorème de Stokes

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot} [\vec{E}(M)] d\vec{s}$$

4.4 Théorème de Kelvin

Equivalent du théorème de Stokes pour les fonctions scalaires

$$\oint_C f(M) d\vec{l} = \iint_S d\vec{s} \wedge \overrightarrow{grad} f(M)$$

4.5 Théorème d'Ostrogradski

$$\iiint_V div [\vec{E}(M)] dV = \oiint_S \vec{E}(M) d\vec{s}$$

4.6 Théorème du gradient

Equivalent du théorème d'Ostrogradski pour les fonctions scalaires

$$\iiint_V \overrightarrow{grad} [f(M)] dV = \oiint_S f(M) d\vec{s}$$

4.7 Théorème du rotationnel

$$\oiint_S \vec{E}(M) \wedge d\vec{s} = - \iiint_S \overrightarrow{rot} [\vec{E}(M)] dV$$

5 Rappel : double produit vectoriel

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

6 Équations

6.1 Loi d'Ohm local

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Où σ est la conductivité électrique du matériau

6.2 Équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0$$

6.3 Équations de Maxwell (dans le vide)

$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Maxwell-Gauss)	$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Maxwell-Faraday)
$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$ (Maxwell-Flux)	$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Maxwell-Ampère)

6.4 Expression des champs Électrique et Magnétique

Expression du champ au point M selon la distribution de source \mathcal{D} .

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau(P)$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} d\tau(P)$$

6.5 Lien entre champ et potentiel

Soit \vec{E} (resp. \vec{B}) un champ électrique (resp. magnétique) et V (resp. \vec{A}) un potentiel électrique (resp. magnétique) associé à \vec{E} (resp. à \vec{B}).

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A})$$

6.6 Équations de Poisson pour le potentiel scalaire/vecteur

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

7 Équation de Maxwell en régime lentement variable : Induction

7.1 Rappels

$$— \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ (car } \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \text{)}$$

$$— \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$— \text{Biot et Savart : } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau(P)$$

7.2 Force de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

7.3 Force de Laplace

La force de Laplace est la résultante de toutes les forces de Lorentz sur les charges mobiles.

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Cette force agit directement sur les charges fixes du matériaux (ex. protons)

7.4 Loi de Lenz

Loi 1 (Loi de Lenz)

Les conséquences de l'induction s'opposent aux causes qui lui donne naissance.

7.5 Force électromotrice

Loi 2 (Loi de Faraday)

Soit ϕ un flux magnétique alors la force électromotrice (induite) e est égale à l'opposé de la variation temporelle du flux magnétique.

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

(Cette loi n'est pas toujours valide notamment lors de circuit à contact glissant)

On peut aussi écrire cette f.e.m (écriture toujours valide) :

$$e = \int_{\text{Circuit}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

$$\text{tel que } \vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Où \vec{E}_m est le champ électromoteur (induit) le long du circuit

7.6 Potentiels et choix de jauge

7.6.1 Choix de jauge

Proposition 1 (Jauge de Lorentz)

Soit V et \vec{A} un potentiel scalaire et vecteur. On impose donc :

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Proposition 2 (Jauge de Coulomb)

Soit \vec{A} un potentiel vecteur. On impose donc :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

7.6.2 D'Alembertiens des Potentiels

En Jauge de Lorentz on retrouve les équation de Poisson.

$$\begin{aligned}\square V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

7.6.3 D'Alembertiens des Champs Électriques et Magnétiques

Équation de D'Alembert du champ Électrique et Magnétique.

$$\begin{aligned}\square \vec{E} &= \vec{0} \\ \square \vec{B} &= \vec{0}\end{aligned}$$