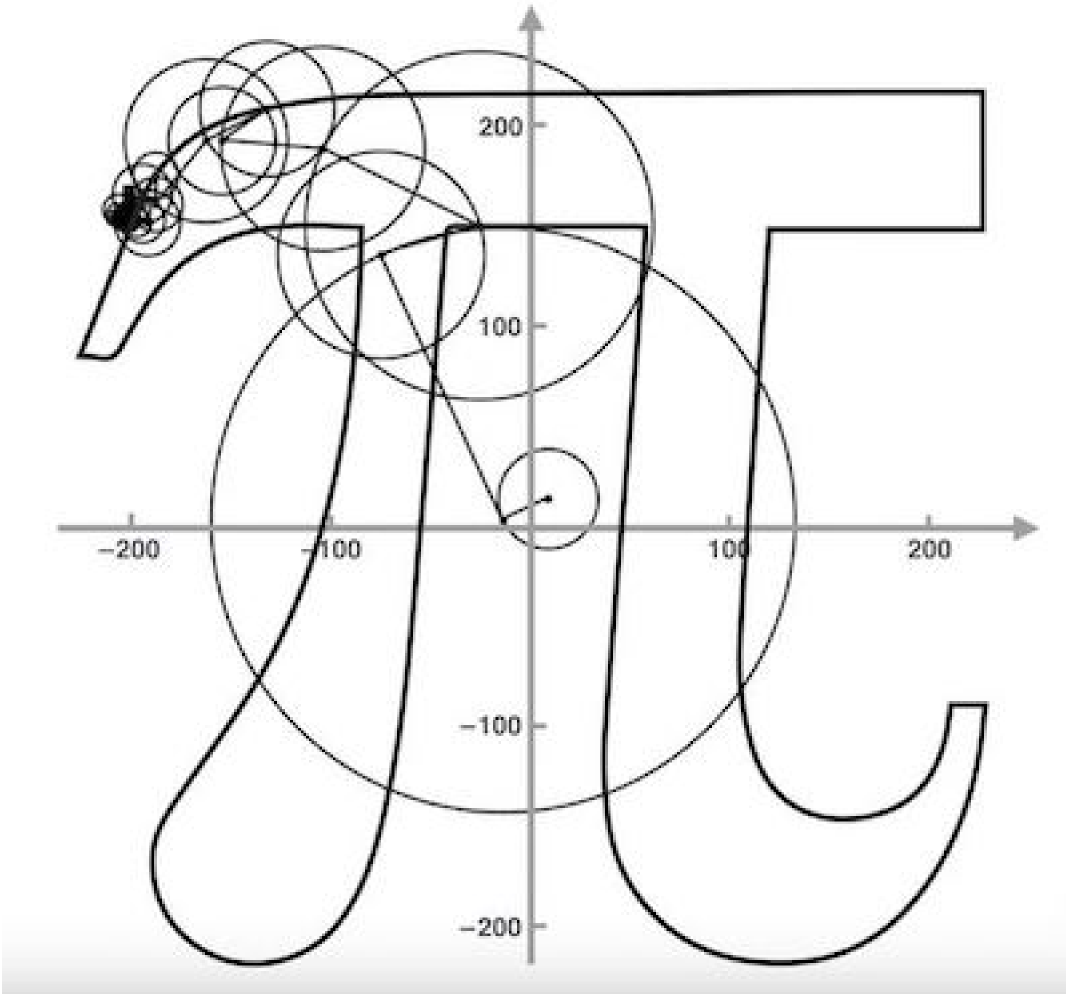
Analyse, Transformée et Intégrale de Fourier

Valentin COLIN



Analyse de Fourier

1 Série de Fourier

1.1 Représentation réelle

Toute fonction f : T_0-périodique ne présentant qu'un nombre fini de discontinuité (dénombrable sur une période) peut être décomposée en série de Fourier, sous la forme :

$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \Big)} \tag{*}$$

Ou

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \Big)} \tag{**}$$

Rappel : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
Où les a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier

$$avec \begin{cases} \qquad\qquad a_0 = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \tag{*}$$

Ou

$$avec \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \tag{**}$$

Remarque :

- Pour (**) $b_0 = 0$
- Si la fonction f est paire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = 0$
- Si la fonction f est impaire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 0$
- ω_0 s'appelle la fondamentale
- Pour $n > 1 \quad \omega_n = n\omega_0$ s'appelle l'harmonique de rang n

1.2 Représentation complexe

En représentation complexe :
Puisque $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$, on écrira :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

Où les C_n sont les coefficients de Fourier complexes

$$avec \begin{cases} C_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$remarque \begin{cases} C_0 = a_0 \\ \underset{n\geq 1}{C_n} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \\ \underset{n\leq -1}{C_n} = \frac{1}{2}(a_{-n} + b_{-n}) \end{cases}$$

Tranformée ou Intégrale de Fourier

2 Intégrale de Fourier

Soit f une fonction non périodique
À partir de f on construit une fonction f_{T_0} (T_0-périodique) ayant pour image la fonction f sur une période T_0
On peut donc developper f_{T_0} en série de Fourier
"On va considérer qu'une fonction non périodique "est" une fonction périodique de période ∞"
Puis on ferra tendre T_0 vers ∞

$$\text{On developpe } f_{T_0} \begin{cases} f_{T_0}(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_0 t} \\ C_n = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} f_{T_0}(t) e^{in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_{T_0}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f_{T_0}(t')e^{in\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t'\right)e^{in\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_{T_0}(t')e^{in\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t'\right)e^{in\omega_0 t} \end{aligned}$$

Posons $\omega_n = n\omega_0$
et calculons $\omega_{n+1} - \omega_n = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Si $T_0 \longrightarrow \infty$ alors $\omega_{n+1} - \omega_n \longrightarrow 0$
On va remplacer l'écriture discrète ω_n par une variable continue ω telle que $\omega_{n+1} - \omega_n = \mathrm{d}\omega$

$$\mathrm{d}\omega = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \frac{1}{T_0} = \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\right)$$

Donc

$$f_{T_0} \underset{T_0 \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} f$$

Ainsi

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{-i\omega t'}\,\mathrm{d}t'\right)e^{i\omega t}$$

On pose alors la transformée (ou l'intégrale) de Fourier (notation : $\widetilde{f}(\omega) = TF(f) = \mathcal{F}(f)$) :

$$\boxed{\widetilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t}$$

Et la transformée de Fourier inverse (notation : $TF^{-1}(f) = \mathcal{F}^{-1}(f)$) :

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega}$$

— Attention aux signes dans l'exponentielle (qui sont d'ailleurs intervertible)
— $\widetilde{f}(\omega)$ correspond aux coefficients de Fourier
— L'exponentielle de la TF^{-1} correspond à une somme de fonctions sinusoïdales
— ATTENTION : dans le formalisme de la TF^{-1} il y a des <u>pulsations négatives</u>

3 Propriétés importantes

3.1 Série de Fourier

Soit f un fonction T-périodique

$$\text{Égalité de Bessel-Parceval : } \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

3.2 Transformée de Fourier

Soit f une fonction (non périodique)

$$\text{Égalité de Parceval-Placherel : } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{f}(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega$$

3.3 produit de convolution

1) La TF d'un produit de convolution est égal au produit des TF des fonctions

$$TF(f \circledast g) = TF(f) \cdot TF(g)$$

2) La TF d'un produit de fonctions est égal au produit de convolution des TF

$$TF(f \cdot g) = TF(f) \circledast TF(g)$$

4 Quelques exemples

4.1 Distribution de Dirac

4.1.1 Définition de la distribution de Dirac

Soit f_k à valeur réelle définie par

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2k} & \text{si } |x| < k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{tel que : } \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

La distribution δ de Dirac dans ce cas correspond à la limite de f_k quand $k \longrightarrow 0$:

$$\delta(x) = \lim_{k\to 0} f_k(x)$$

δ n'as de valeur qu'au voisinage de 0, d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x \approx f(0)$$

En généralisant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x \approx f(a)$$

4.1.2 Calcul de la TF d'un Dirac

$$\begin{aligned} TF(\delta(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &\approx e^0 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t}_{=1} \\ &\approx 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TF(\delta(t-t_a)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_a)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &\approx e^{-i\omega t_a} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_a)\,\mathrm{d}t}_{=1} \\ &\approx e^{-i\omega t_a} \end{aligned}$$

4.2 Peigne de Dirac

4.2.1 Définition

Une peigne de Dirac de période T (noté $Ш_T$) est défini par :

$$Ш_T(t) \overset{def}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{kT}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

4.2.2 Calcul de la TF d'un peigne de Dirac

$$\begin{aligned} TF(Ш_{T_0}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Ш(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{T_0}\right) \\ &= \frac{1}{T_0} Ш_{\frac{1}{T_0}}(\nu) \quad \text{avec } \nu = \frac{1}{T} \text{ et } T = \frac{1}{2\pi\omega} \end{aligned}$$