Chapitre 3 : Suites numériques et domination.

On cherche des moyens pour décrire une suite infinie de nombres.

Exemple de suite : 1,2,4,8,16,32 ...

Formellement : Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

On peut (entre autres) définir une suite ...

- ... par une expression directe : $U_n = 2^n$,
- ou par une définition récursive : $U_0 = 1 \qquad U_{n+1} = 2 \cdot U_n$

On préfère, quand c'est possible, des expressions directes.

Exemple de suites (habituellement n est le nom la variable):

- suite constante : $V_n = 4$ V : 4 4 4 4 4 ...
- suite quadratique : $H_n = n^2 = n \times n$
  H : 0 1 4 9 16 25 36 ...
- suite cubique : $N_n = n^3 = n \times n \times n$
  N : 0 1 8 27 64 125 ...
- suite géométrique : $U_n = 2^n = 2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2$
  U : 1 2 4 8 16 32 ...
- suite logarithmique : $K_n = \log_2(n)$
  K : Nan 0 1 1,58... 2 2.32... 2.58... 2.80... 3 ...
- suite racine carrée : $L_n = \sqrt{n}$
  L : 0 1 1,41... 1,73... 2 2.23... 2.64... 2.82... 3 ...

Rappels

Si a, b, c sont des nombres positifs non nuls.

- $a \times a = a^2 \quad a \times a \times a = a^3 \ \ldots$
- $a^b a^c = a^{b+c}$
- $\left(a^b\right)^c = a^{b \times c}$
- $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- $\ldots$ d'où $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a = \sqrt{a^2}$
- De façon générale $\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}$
- $b^{\log_b(a)} = a = \log_b(b^a)$
- $a^b = e^{b \ln(a)}$

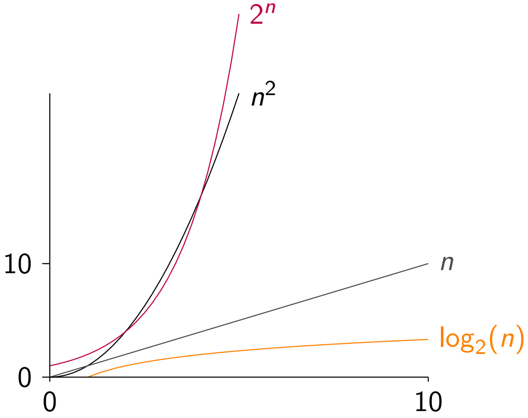
Exemple de suites plus complexes

1. $n^6 + n^2 + 1$
2. $e^{\sqrt{n} \cdot n^2}$
3. $\sqrt[5]{n + n^3 + 1}$
4. $\frac{n^2+3}{n+1}$
5. $\frac{n \cdot 4^{n+3}}{\sqrt{2+\log_3 n}}$

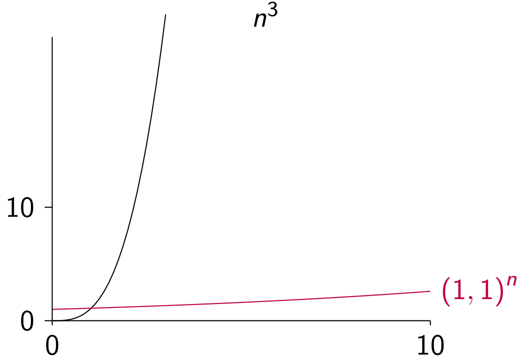
On peut utiliser un graphique pour comparer différentes suites.

$\boxed{\text{Dessin et tableau à faire } \#\#\#}$

Les algorithmes les plus interessants sont ceux dont la complexité croît le plus lentement.



Regarder les premières valeurs ne suffisent pas pour déterminer la suite qui croît le plus vite.



Contrairement à ce que le graphique semble suggèrer la fonction $(1,1)^n$ dépassera n^3.

Définition (domination)

Soient $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On dit que D domine V si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n > N_0, |V_n| \leq M|D_n|$$

où$|x|$ représente la valeur absolue de x.

Remarques :

- Si la suite D ne s'annule plus au bout d'un certain terme, on a : D domine V si et seulement la suite $n \mapsto \frac{V_n}{D_n}$ est bornée.
- Pour deux suites quelconques, on a pas forcément que l'une domine l'autre.

Notations

- Si D est une suite on note $O(D)$ l'ensemble des suites dominées par D.
- Si U est une suite on note $\Omega(U)$ l'ensemble des suites qui dominent U. (Attention Ω signifie autre chose en théorie des nombres)
- Par convention on écrit $U = O(D)$ plutôt que $U \in O(D)$
- Pour indiquer que U est dominée par D on peut écrire $U \ll D$, ou $U = O(D)$ ou $D = \Omega(U)$ (ou $D \gg U$).

Propriétés :

Soient U, V, W des suites (quelconques) et m, w des nombres réels (quelconques) alors :

- si $U \ll V$ et $V \ll W$ alors $U \ll W$,
- si $U, V \ll W$ alors $mU + V \ll W$,
- si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|V_n| \leq |m||W_n|$ alors $V \ll W$,
- l'ensemble $O(1)$ est l'ensemble des suites bornées,
- l'ensemble $O(V)$ est égale à l'ensemble $|V|.O(1)$ $(= \{(V_n.U_n)_{n \in N} / U$ suite bornée $\})$.

Remarque : Si U, F, W sont des suites alors

- $U \ll U$
- $O(U)O(F) = O(F.U)$
- si $U \ll W$ alors $U.V \ll W.V$.

Notation :
Si U et V sont des suites et que on a $U \ll V$ et $V \ll U$ on note $U = \Theta(V)$ (ou $V = \Theta(U)$ c'est une relation d'équivalence).

Illustration :

(dans la suite la variable est n et a, b, c sont des nombres positifs non nuls avec $c > 1$)

- $\log_a(n) \ll n^b \ll c^n \ll n^n$ (et pas d'égalité de classe)
- si $a < b$ alors $\quad n^a \ll n^b$ (et $n^b \neq O(n^a)$)
- si $a < b$ alors $\quad a^n \ll b^n$ (et $b^n \neq O(a^n)$)
- $1 = O(n)$ mais $n \neq O(1)$
- $4n^5 + 3n^4 + 10n + 20 = \Theta(n^5)$
- $\log_a n = \Theta(\log_b n)$ (si a et b différents de 1)
- $n \log_a n \neq O(\log n)$ mais $\log_a n = O(n \log_a n)$ (si $a \neq 1$)