UNIVERSITÉ PARIS 8 VINCENNES-SAINT-DENIS

Licence informatique & vidéoludisme
Semestre 4

Histoire de l'informatique

Chapitre 1
Histoire du calcul

Pablo Rauzy <pr@up8.edu>
pablo.rauzy.name/teaching/hi

Histoire du calcul

Introduction

- L'histoire du calcul, c'est l'histoire de l'*arithmétique*, qui est l'étude des nombres.
- L'étude des nombres commence il y a bien longtemps.
- Déjà chez les grecs, on sépare l'arithmétique pratique de l'arithmétique théorique.
- Aristote remarque déjà que la plupart des peuples comptent en base 10.
  - On retrouve aussi des traces des bases 5, 12, 20, 60, et plus rarement d'autres encore.

Systèmes de numération écrite

- Les débuts de l'écriture des nombres remontent à la pré-histoire.
- On a retrouvé des os vieux de 35 000 ans qui semblent avoir servi à compter.
  - Cependant, on est sûr de rien : ça pourrait aussi être un genre de calendrier lunaire, d'autres y voient un calcul, et même une utilisation de nombres premiers…
- Quoi qu'il en soit, tous les os et *bâtons de comptage* que l'on a pu retrouver fonctionnent en base 1.

Os d'Ishango

Apparition des systèmes d'écriture de nombres

- Il semble qu'assez vite, nos ancêtres se soient rendu compte que compter en base 1 mène rapidement à des erreurs.
  - Quelles valeurs sont représentées ?
    - ||
    - |||
    - ||||
    - ||||||||||||||
  - On constate que très vite nous ne sommes plus capable de “voir” le nombre.
- En fait, il semble que notre cerveau soit capable de “voir” jusqu'à 3 ou 4 seulement.
- Après, il décompose en sous groupe, et rapidement, on est obligé de compter.

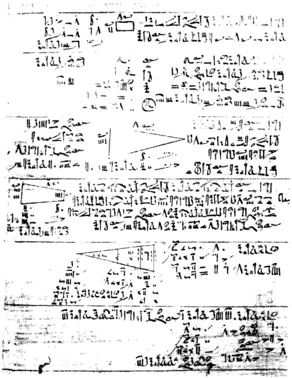
En Égypte

- Les égyptiens utilisent déjà la base 10.
- Chaque puissance de 10 a son symbole :
  - 1, le bâton
  - 10, la anse de panier 
  - 100, le papyrus 
  - 1 000, le lotus 
  - 10 000, le doigt 
  - 100 000, le têtard 
  - 1 000 000 ou 10 000 000, le dieu de l'éternité / de l'infini 
- Les nombres s'écrivent en composant ces hiéroglyphes dans un ordre précis.

Des fractions

- Les égyptiens utilisent aussi des fractions.
- Elles sont toutes unitaires, c’est à dire que le numérateur est toujours 1.
  - On le note avec le hiéroglyphe de la bouche ouverte 
  - C’est le hiéroglyphe qui signifie “partie”.
- Le dénominateur est écrit avec le système vu précédemment.
- Les fractions unitaires rendent les opérations un peu compliquées…

- Le papyrus Rhind est un document daté de -1650 environ.
- Il est écrit en *hiératique* (càd des hiéroglyphes simplifiés).
- C'est le plus important parmi ceux qui renseignent sur les connaissances mathématiques des temps anciens.
- Il comporte 84 problèmes résolus de géométrie, d'arpentage, et d'arithmétique.
- Avant ça, il donne des tables précalculées de fractions, notamment l'écriture de fractions doubles en fractions unitaires.
  - $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
  - $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$
  - $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$
  - jusqu'à $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$
- Ces résultats ont été obtenu grâce à leur technique de division.



Papyrus Rhind

La multiplication dans l'Égypte antique

- Avant de voir la division, regardons la multiplication.
- Le principe est de décomposer les nombres en puissance de 2, de manière à n'avoir qu'à faire des additions, des soustractions, et des multiplications par deux.

1. On décompose la première opérande (la plus grande) en puissance de 2.
   - Généralement, on utilise une table des multiples de 2 et on regarde le plus grand inférieur ou égale à l'opérande, on le garde, on le soustrait à l'opérande et on recommence jusqu'à n'avoir plus rien (rien et pas “zéro”, que les égyptiens n'utilisent pas).
2. On construit la table des puissances de 2 de la seconde opérande (la plus petite).
   - On commence avec 1 et l'opérande, puis 2 et le double de l'opérande, puis 4 et le quadruple de l'opérande… jusqu'à la plus grande puissance de 2 trouvée à l'étape 1.
3. On additionne les nombres de la seconde colonne de la table pour les lignes pour lesquelles la puissance de 2 dans la première colonne est présente dans la décomposition de la première opérande.

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1			
2			
4			
8			
16			
32			
64			
128			
256			

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1			
2			
4			
8			
16			
32			
64			
128			
256	256		

357 - 256 = 101

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1			
2			
4			
8			
16			
32			
64	64		
128			
256	256		

101 - 64 = 37

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1			
2			
4			
8			
16			
32	32		
64	64		
128			
256	256		

37 - 32 = 5

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1			
2			
4	4		
8			
16			
32	32		
64	64		
128			
256	256		

5 - 4 = 1

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1		
2			
4	4		
8			
16			
32	32		
64	64		
128			
256	256		

1 - 1 = rien

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	
2			
4	4		
8			
16			
32	32		
64	64		
128			
256	256		

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	
2		14	
4	4		
8			
16			
32	32		
64	64		
128			
256	256		

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	
2		14	
4	4	28	
8			
16			
32	32		
64	64		
128			
256	256		

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	
2		14	
4	4	28	
8		56	
16			
32	32		
64	64		
128			
256	256		

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	
2		14	
4	4	28	
8		56	
16		112	
32	32		
64	64		
128			
256	256		

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	
2		14	
4	4	28	
8		56	
16		112	
32	32	224	
64	64		
128			
256	256		

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	
2		14	
4	4	28	
8		56	
16		112	
32	32	224	
64	64	448	
128			
256	256		

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	
2		14	
4	4	28	
8		56	
16		112	
32	32	224	
64	64	448	
128		896	
256	256		

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	
2		14	
4	4	28	
8		56	
16		112	
32	32	224	
64	64	448	
128		896	
256	256	1792	

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	7
2		14	
4	4	28	
8		56	
16		112	
32	32	224	
64	64	448	
128		896	
256	256	1792	

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	7
2		14	
4	4	28	+ 28 = 35
8		56	
16		112	
32	32	224	
64	64	448	
128		896	
256	256	1792	

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	7
2		14	
4	4	28	+ 28 = 35
8		56	
16		112	
32	32	224	+ 224 = 259
64	64	448	
128		896	
256	256	1792	

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	7
2		14	
4	4	28	+ 28 = 35
8		56	
16		112	
32	32	224	+ 224 = 259
64	64	448	+ 448 = 707
128		896	
256	256	1792	

Exemple de multiplication

- Pour simplifier, on écrit les chiffres à l'occidental.
- Prenons 357×7 :

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	1	7	7
2		14	
4	4	28	+ 28 = 35
8		56	
16		112	
32	32	224	+ 224 = 259
64	64	448	+ 448 = 707
128		896	
256	256	1792	+ 1792 = **2499**

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1			
2			
4			
8			
16			
32			

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1		7	
2			
4			
8			
16			
32			

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1		7	
2		14	
4			
8			
16			
32			

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1		7	
2		14	
4		28	
8			
16			
32			

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1		7	
2		14	
4		28	
8		56	
16			
32			

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1		7	
2		14	
4		28	
8		56	
16		112	
32			

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1		7	
2		14	
4		28	
8		56	
16		112	
32		224	

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1		7	
2		14	
4		28	
8		56	
16		112	
32	224	224	

357 - 224 = 133

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1		7	
2		14	
4		28	
8		56	
16	112	112	
32	224	224	

133 - 112 = 21

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1		7	
2	14	14	
4		28	
8		56	
16	112	112	
32	224	224	

21 - 14 = 7

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	7	7	
2	14	14	
4		28	
8		56	
16	112	112	
32	224	224	

7 - 7 = rien

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	7	7	1
2	14	14	
4		28	
8		56	
16	112	112	
32	224	224	

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	7	7	1
2	14	14	+ 2 = 3
4		28	
8		56	
16	112	112	
32	224	224	

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	7	7	1
2	14	14	+ 2 = 3
4		28	
8		56	
16	112	112	+ 16 = 19
32	224	224	

La division dans l'Égypte antique

- La division fonctionne de la même manière, mais cette fois-ci on recompose le dividende à partir des puissances de 2 du diviseur.
- On a ensuite plus qu'à additionner les 2^n.
- Prenons $357 \div 7$

2^n	357	$2^n \cdot 7$	addition
1	7	7	1
2	14	14	+ 2 = 3
4		28	
8		56	
16	112	112	+ 16 = 19
32	224	224	+ 32 = **51**

En Mésopotamie

- La numération babylonienne date d'à peu près la même période que l'égyptienne.
- Son influence perdure aujourd'hui dans les mesures du temps, d'angles...
- Elle utilise la base 10 pour les nombres inférieur à 60, et la base 60 au delà.
- Pour les nombres de 1 à 59 :
  - l'unité se note ∇, et
  - la dizaine se note $\prec$.
- Au delà, l'écriture devient *de position* en base 60 :
  - 60 s'écrit ∇ (60^0),
  - 61 s'écrit $\nabla\nabla$ $(60^1 + 60^0)$,
  - 3601 s'écrit... $\nabla\ \nabla$ $(60^2 + 60^0)$.
- Le manque du zéro se fait cruellement sentir.

Des fractions

- Sur une tablette on a retrouvé ceci :

$$\nabla\prec\prec\genfrac{}{}{0pt}{}{\nabla\nabla\nabla}{\nabla}\genfrac{}{}{0pt}{}{\prec\prec\prec}{\prec\prec}\nabla\prec$$

- C'est à dire 1, 24, 51, et 10.
- Cela peut s'interpréter de différente manière :
  - $1 \cdot 60^3 + 24 \cdot 60^2 + 51 \cdot 60^1 + 10 \cdot 60^0 = 305470$
  - $1 \cdot 60^2 + 24 \cdot 60^1 + 51 \cdot 60^0 + 10 \cdot 60^{-1} = \frac{303010}{60}$
  - etc. mais qui est en fait
  - $1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3}$
    c'est à dire une très bonne approximation de $\sqrt{2}$!

- En fait, il existe à Babylone plusieurs bases, utilisées pour différentes choses.
- Une bonne partie de l'activité des scribes est de convertir les notations numériques en base savante (sexagésimale) pour pouvoir faire des calculs.
- La multiplication nécessite l'utilisation de tables.
- On a retrouvé des tablettes de ∼2000 AEC :
  - des carrés d'entiers jusqu'à 59 et de cubes jusqu'à 32,
  - les 10 premières puissances de certains entiers,
  - des tables de multiplication, etc.
- Cependant la nécessité de calculs intermédiaires laisse penser qu'il existait un instrument de calcul auxiliaire.
- Il n'y a pas de division : $a \div b$ est posé comme $a \times \frac{1}{b}$.

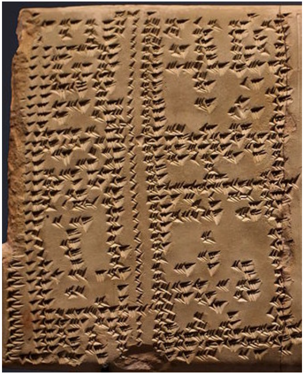


Table de division et de conversion des fractions

En Grèce

- La numération dans la Grèce antique s'inspire des systèmes mésopotamiens.
- Il existe plusieurs systèmes d'écriture numérique :
  - la numération acrophonique,
  - la numération alphabétique,
  - la numération “scientifique”.

La numération acrophonique

- Son apparition remonte au moins au 5ème siècle AEC.
- Les chiffres sont notés avec la première lettre du nom du nombre (sauf 1, qui reste un bâton).
  - | pour 1,
  - Γ pour 5 (à l'époque, Π se notait Γ à Athènes),
  - Δ pour 10,
  - H pour 100,
  - X pour 1 000,
  - M pour 10 000.
- La notation est additive, avec des raccourcis pour les valeurs intermédiaires comme 𐅄

Les numérations alphabétique et scientifique

- La numération alphabétique utilise 27 symboles (l'alphabet grec + 3 lettres archaïques).
- Elle est introduite en Grèce en -403, mais son existence date au moins de -700.
- Elle est purement additive, ne nécessite donc pas le zéro, mais ne permet pas de faire des calculs, qui sont donc fait au moyen de jetons sur des d'*abaques*.

Les numérations alphabétique et scientifique

- La numération alphabétique utilise 27 symboles (l'alphabet grec + 3 lettres archaïques).
- Elle est introduite en Grèce en -403, mais son existence date au moins de -700.
- Elle est purement additive, ne nécessite donc pas le zéro, mais ne permet pas de faire des calculs, qui sont donc fait au moyen de jetons sur des d'*abaques*.
- La numération scientifique est inspirée des mathématiques babyloniennes.
- Les grecs se posent cependant la question de l'écriture des grands nombres (par exemple le nombre de grain de sable sur la plage, pour Archimède).
  - Une *myriade*, noté $\mathrm{M'}$ vaut 10^4.
  - On peut noté des myriades de myriades avec $\mathrm{MM'}$ (10^8).
  - Dans *L'Arénaire*, Archimède propose un système d'écriture permettant d'écrire des nombres atteignant $10^{8 \cdot 10^{16}}$

- Le calcul avec la numération scientifique est similaire à celui des babyloniens.
- Cependant c'est de la Grèce antique que nous proviennent les plus vieux calculateurs analogiques.
- Notamment la machine d'Anticythère, d'une remarquable complexité.
- Il semble que la machine soit trop sophistiquée pour être une pièce unique, ou même la première de son genre (c'est pourtant le plus vieux mécanisme d'engrenage qui soit parvenu jusqu'à nous).

La machine d'Anticythère

À Rome

- Les nombres romains sont similaires à la numération acrophonique des grecs.
- Les chiffres sont
  - I pour 1 (une marque verticale),
  - V pour 5 (une marque avec une autre, comme $\vdash$, puis déformée),
  - X pour 10 (une marque barrée),
  - L pour 50 (un V barré puis aplati puis confondu avec L),
  - C pour 100 (un X barré puis simplifié puis confondu avec le C de *centum* en latin),
  - D pour 500 (un $\vdash$ entouré devenu Đ puis confondu avec D),
  - M pour 1 000 (un X entouré, puis déformé et confondu avec M de *mille* en latin).
- La notation est additive, et ne permet pas le calcul directement.
- Ces nombres sont encore utilisés de nos jours, ils ont persistés par conservatismes en Europe jusqu'à très tard ($\sim$1000 EC).

En Chine

- La numération chinoise remonte probablement à 3 millénaires AEC.
- Elle utilise la base 10, avec les idéogrammes suivants :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

- L'écriture se fait suivant un système mixte (additif / position) qui ressemble fortement au notre.
  - *chiffre* mille *chiffre* cent *chiffre* dix *chiffre*.
- Cela permet d'écrire de manière assez simple, et d'avoir un système de calcul effectif.

- Les calculs se posent se des “tables à jonchet” ou “échiquiers”.
- Pour le calcul, étaient utilisés des symboles à base de bâtonnets :

Série	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
A		𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
B		𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

- En fait, de véritables jonchets (petits bâtonnets) étaient utilisés pour construire ces symboles sur un échiquier.

La multiplication chinoise

- La multiplication se fait sur l'échiquier.
- Les deux opérandes sont posées en laissant une ligne pour le résultat entre les deux, et de sorte à ce que le dernier chiffre de l'une soit sur la même colonne que je premier chiffre de l'autre.
- Ensuite, on fait l'opération un peu comme on l'apprend encore de nos jours en primaire.

La multiplication chinoise

- La multiplication se fait sur l'échiquier.
- Les deux opérandes sont posées en laissant une ligne pour le résultat entre les deux, et de sorte à ce que le dernier chiffre de l'une soit sur la même colonne que je premier chiffre de l'autre.
- Ensuite, on fait l'opération un peu comme on l'apprend encore de nos jours en primaire.
- Pour simplifier on écrit les chiffres à l'occidentale :

multiplicateur		1	3
résultat			
multiplicande	4	2	

La multiplication chinoise

- La multiplication se fait sur l'échiquier.
- Les deux opérandes sont posées en laissant une ligne pour le résultat entre les deux, et de sorte à ce que le dernier chiffre de l'une soit sur la même colonne que je premier chiffre de l'autre.
- Ensuite, on fait l'opération un peu comme on l'apprend encore de nos jours en primaire.
- Pour simplifier on écrit les chiffres à l'occidentale :

multiplicateur		1	3
résultat	4		
multiplicande	4	2	

$$40 \times 10 = 400$$

La multiplication chinoise

- La multiplication se fait sur l'échiquier.
- Les deux opérandes sont posées en laissant une ligne pour le résultat entre les deux, et de sorte à ce que le dernier chiffre de l'une soit sur la même colonne que je premier chiffre de l'autre.
- Ensuite, on fait l'opération un peu comme on l'apprend encore de nos jours en primaire.
- Pour simplifier on écrit les chiffres à l'occidentale :

multiplicateur		1	3
résultat	5	2	
multiplicande	4	2	

$$40 \times 3 = 120$$

La multiplication chinoise

- La multiplication se fait sur l'échiquier.
- Les deux opérandes sont posées en laissant une ligne pour le résultat entre les deux, et de sorte à ce que le dernier chiffre de l'une soit sur la même colonne que je premier chiffre de l'autre.
- Ensuite, on fait l'opération un peu comme on l'apprend encore de nos jours en primaire.
- Pour simplifier on écrit les chiffres à l'occidentale :

multiplicateur		1	3
résultat	5	4	
multiplicande	4	2	

$$2 \times 10 = 20$$

La multiplication chinoise

- La multiplication se fait sur l'échiquier.
- Les deux opérandes sont posées en laissant une ligne pour le résultat entre les deux, et de sorte à ce que le dernier chiffre de l'une soit sur la même colonne que je premier chiffre de l'autre.
- Ensuite, on fait l'opération un peu comme on l'apprend encore de nos jours en primaire.
- Pour simplifier on écrit les chiffres à l'occidentale :

multiplicateur		1	3
résultat	5	4	6
multiplicande	4	2	

$$2 \times 3 = 6$$

La division chinoise

- La division se fait de la même manière.
- Le diviseur de pose en bas, et dividende sur la ligne intermédiaire.
- On retrouve le quotient sur la ligne du haut en enlevant les jonchets équivalents aux produits intermédiaires.

Des systèmes d'équations

- En fait, les échiquiers pouvaient servir à des calculs bien plus complexe.
- En particulier, il existait des méthodes de résolutions de systèmes d'équations à plusieurs inconnues.

En Inde

- L'écriture *brahmi* apparaît en Inde au 3ème siècle AEC.
- À cette époque les chiffres sont utilisés en notation additive.
- On a retrouvé un traité de cosmologie de 458 en sanskrit où les nombres sont écrits en positionnel, mais en toutes lettres, avec un mot signifiant "vide" (*sunya*) indiquant l'absence de valeur à une position.
- D'autres documents attestent plus tard de l'utilisation des chiffres de 1 à 9 en positionnel dès 595.
- Un ouvrage en sanskrit de 628 décrit "sunya" comme un nombre.

L'apparition du zéro

- Les premières traces écrites du zéro, sous forme de rond ou de point, ont été retrouvées dans l'actuel Cambodge (datées de 683) et à Sumatra (datées de 684).
- Ces régions étaient sous influence chinoise.
- En Inde, la première inscription comportant distinctement le chiffre zéro date de 876.

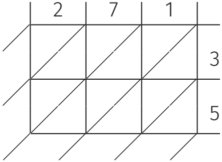
Dans la civilisation Arabe

- Pour favoriser l'essor des sciences, les Arabes développent un mécénat scientifique à partir de la seconde moitié du 7ème siècle.
- Ils invitent des savants étrangers, construisent des bibliothèques, traduisent des textes anciens, ...
- À cette époque, une numération alphabétique additive est d'usage.

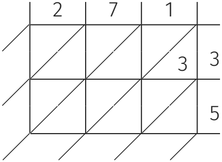
- La visite d'un astronome indien à la cour du calife Al-Mansûr, à Bagdad, fait réaliser à ce dernier l'importance des sciences indiennes.
- Il charge alors Al-Fazari, en 772, de traduire en arabe des tables astronomiques indiennes.
- Celui-ci traduit entre autre les documents dont on a parlé, où le zéro est utilisé.
- Vers 820, le calife Al-Ma'mûn fonde à Bagdad la "Maison de la Sagesse", qui permet aux savants de travailler autour d'une grande bibliothèque, libérés des contraintes matérielles.
- Au début du 9ème siècle, Al-Khwârizmî décrit les notations indiennes, et fait usage du zéro positionnel, mais ne considère pas le zéro comme un nombre.
- Au milieu du 10ème siècle, Abu l-Hasan al-Uqlidisi vante les mérites du nouveau système de numération.

La multiplication par jalousies

- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :

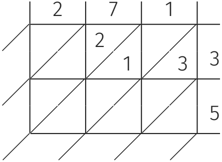


- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :



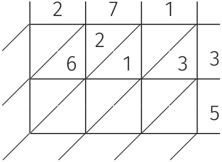
La multiplication par jalousies

- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :



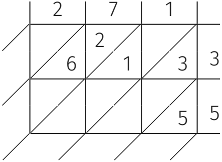
La multiplication par jalousies

- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :



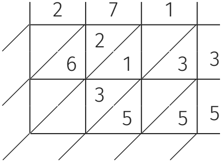
La multiplication par jalousies

- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :



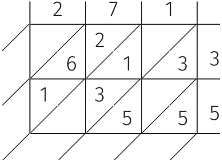
La multiplication par jalousies

- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :



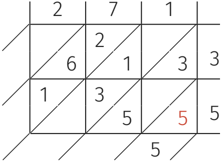
La multiplication par jalousies

- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :



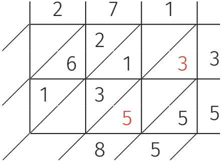
La multiplication par jalousies

- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :



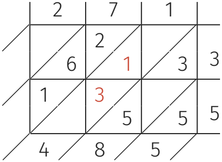
La multiplication par jalousies

- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :



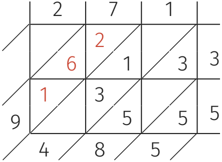
La multiplication par jalousies

- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :



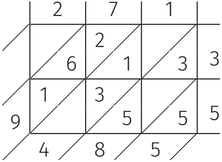
La multiplication par jalousies

- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :



La multiplication par jalousies

- La multiplication par jalousies se pratiquait au Moyen Âge en Chine, en Inde, chez les Arabes aussi bien qu'en Occident.
- Elle tire son nom des jalousies, sorte de volets à travers lesquelles la lumière passe en diagonale et qui permettent de voir sans être vu.
- Cela fonctionne comme suit :



$$271 \times 35 = 9485$$

Adoption en Europe

- L'adoption de ces chiffres en Europe prend beaucoup de temps.
- Le conservatisme d'une majorité de l'église chrétienne, qui estime être héritière de la civilisation romaine, est un frein majeur à l'adoption d'un nouveau système de numération.

Arrivée par l'Espagne

- Le système de numération arabe s'est pendant longtemps confiné à la partie arabe de l'actuelle Espagne.
- Sa première apparition dans le monde chrétien, sans le zéro, se trouve dans un manuscrit, le *Codex Vigilanus* écrit en 976 dans un monastère du nord de l'Espagne.
- Entre 967 et 969, Gerbert d'Aurillac, le futur pape Sylvestre II, découvre la science arabe dans les abbayes catalanes.
- À la fin du siècle, il propose une simplification de l'abaque en adoptant des jetons comportant les chiffres arabes de un à neuf.
- Devenu pape en 999, il essaie d'introduire son outil de calcul, mais son entreprise est mise à mal par l'opposition des clercs.

- Vers la fin du 11ème siècle, avec les territoires pris aux Arabes, les Chrétiens découvrent des manuscrits scientifiques.
- Beaucoup d'œuvres sont traduites vers le latin, en particulier, le livre d'Al-Khwârizmî sur les chiffres indiens.

Les croisades

- Vers la fin du 11ème siècle, avec les territoires pris aux Arabes, les Chrétiens découvrent des manuscrits scientifiques.
- Beaucoup d'œuvres sont traduites vers le latin, en particulier, le livre d'Al-Khwârizmî sur les chiffres indiens.
- Le nouveau système ne tarde pas à être appelé « algorisme » (du nom latinisé d'Al-Khwârizmî, Algorizmi, et modifié plus tard en algorithme).
- En 1202, Léonard de Pise, dit Fibonacci, publie le *Liber Abaci* (Livre de l'abaque), un traité de calcul et comptabilité dans lequel il expose les chiffres arabes.

- Après la guerre de Cent Ans et l'épidémie de peste noire qui se répand en Europe au milieu du 15ème siècle, l'économie reprend.
- L'apparition de l'imprimerie permet la diffusion dans plusieurs villes d'Europe de traités arithmétiques à l'usage des marchants qui s'inspirent du *Liber abaci* de Fibonacci.
- Les derniers vétos ecclésiastiques concernant l'utilisation du nouveau système sont levés au 15ème siècle.
- En France le système s'impose définitivement à la fin du 18ème siècle avec la Révolution.
- Enfin, en 1889, avec la définition axiomatique des entiers naturels de Giuseppe Peano, le zéro acquiert définitivement le statut de nombre.

Axiomes de Peano

- Petit détour par la logique…
- La définition axiomatique des entiers naturels de Peano est usuellement décrite informellement par cinq axiomes :
  1. L'élément appelé zéro et noté 0, est un entier naturel.
  2. Tout entier naturel n a un unique successeur, noté $s(n)$.
  3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
  4. Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
  5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

Les abaques

- Avant d'avoir des machines, même mécaniques, on disposait d'outils d'aide au calcul.
- On appelle ces instruments des *abaques* (du grec *abax*, signifiant "table à poussière").
- Il en existe plusieurs familles :
  - l'abaque couvert de sable sur lequel on dessine,
  - l'abaque-compteur utilisant des galets ou des jetons,
  - l'abaque avec des boules coulissant sur des tiges (bouliers),
  - l'abaque formé d'un plateau et de réglettes mobiles, connu sous le nom de bâtons de Napier.

- Comme on l’a vu, pendant longtemps l’écriture des nombres ne facilitait pas les calculs, et donc les comptables avaient besoin d’instruments d’aide au calcul.
- Le moyen le plus simple consiste à utiliser des cailloux disposés sur le sol.
  - En Abyssinie (ancien nom de l’Éthiopie), il était d’usage pour les guerriers partant au combat de déposer un caillou sur un tas, caillou qu’il retirait en revenant du combat.
  - Le nombre de cailloux non retirés permettait de déterminer le nombre de morts au combat.
- Cependant ce système a des limites et il fallut rapidement compléter le dispositif.
- On voit donc se développer successivement ou simultanément plusieurs tables ou abaques.
- On retrouve des abaques partout : chez les Étrusques, les Grecs, les Égyptiens, les Indiens, les Chinois, les Mexicains...
- En conséquence, la datation des découvertes reste aléatoire.

Les premiers abaques

- On a en fait déjà vu plusieurs types d'abaques en même temps que les méthodes de calcul des différentes civilisations :
  - les tablettes recouvertes de sables, et
  - les tables à jonchets / échiquiers.

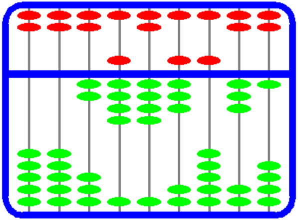
- On a en fait déjà vu plusieurs types d'abaques en même temps que les méthodes de calcul des différentes civilisations :
  - les tablettes recouvertes de sables, et
  - les tables à jonchets / échiquiers.
- L'influence de ces outils perdure jusqu'à nos jours :
  - pour les scores au babyfoot,
  - Le ministre des finances anglais a le titre de *Chancelier de l'Échiquier*.

- Les bouliers sont probablement les plus vieilles machine à calculer.
- Le boulier chinois (*suanpan*) semble dater du 13ème siècle au plus tard.
- Mais sa véritable diffusion a lieu lors du 16ème siècle.
- Sur chaque tige, on trouve 5 boules représentant une unité et 2 boules représentant cinq unités, séparées par une barre centrale.

- Le boulier japonais (*soroban*) est similaire mais dispose d'une boucle de chaque type en moins.

La lecture d'un nombre

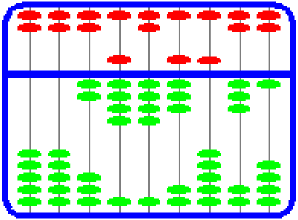
- Chaque tige représente une puissance de 10.
- Les boules qui comptent sont collées à la barre centrale.



2 948 531

Addition

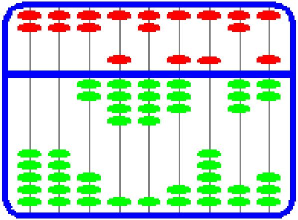
- Pour faire une addition :
  - on écrit le plus grand chiffre sur le boulier,
  - puis on y ajoute le plus petit.
- Prenons l'exemple de 2 948 531 + 2 566 :



On a 2 948 531

Addition

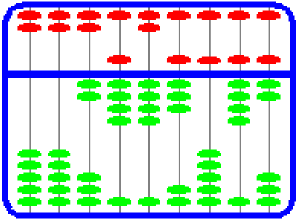
- Pour faire une addition :
  - on écrit le plus grand chiffre sur le boulier,
  - puis on y ajoute le plus petit.
- Prenons l'exemple de 2 948 531 + 2 566 :



On ajoute 6 à 1, on obtient 2 948 531 + 6 = 2 948 537

Addition

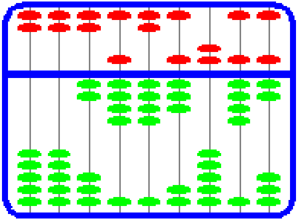
- Pour faire une addition :
  - on écrit le plus grand chiffre sur le boulier,
  - puis on y ajoute le plus petit.
- Prenons l'exemple de 2 948 531 + 2 566 :



On ajoute 6 à 3, on obtient 2 948 537 + 60 = 2 948 597

Addition

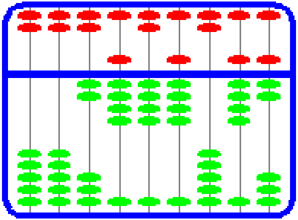
- Pour faire une addition :
  - on écrit le plus grand chiffre sur le boulier,
  - puis on y ajoute le plus petit.
- Prenons l'exemple de 2 948 531 + 2 566 :



On ajoute 5 à 5, on doit renormaliser en transférant la retenue

Addition

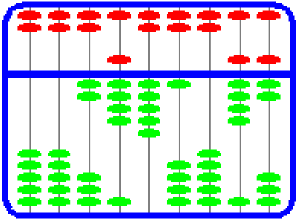
- Pour faire une addition :
  - on écrit le plus grand chiffre sur le boulier,
  - puis on y ajoute le plus petit.
- Prenons l'exemple de 2 948 531 + 2 566 :



On obtient 2 948 597 + 500 = 2 949 097

Addition

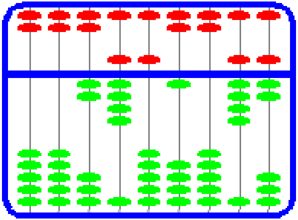
- Pour faire une addition :
  - on écrit le plus grand chiffre sur le boulier,
  - puis on y ajoute le plus petit.
- Prenons l'exemple de 2 948 531 + 2 566 :



On ajoute 2 à 9, on doit renormaliser en transférant la retenue

Addition

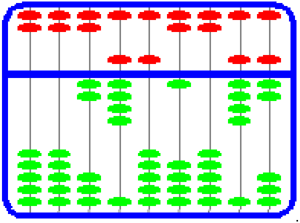
- Pour faire une addition :
  - on écrit le plus grand chiffre sur le boulier,
  - puis on y ajoute le plus petit.
- Prenons l'exemple de 2 948 531 + 2 566 :



On obtient 2 949 097 + 2 000 = 2 951 097

Addition

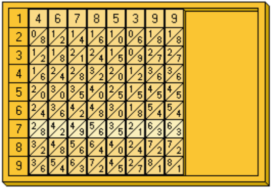
- Pour faire une addition :
  - on écrit le plus grand chiffre sur le boulier,
  - puis on y ajoute le plus petit.
- Prenons l'exemple de 2 948 531 + 2 566 :



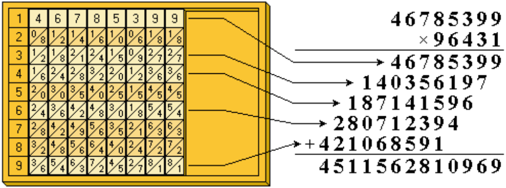
2 948 531 + 2 566 = 2 951 097

Les bâtons de Napier

- Le mathématicien écossais John Napier (en français Neper) inventa en 1617 un abaque facilitant le calcul des produits, quotients, puissances et racines, qui est connu en français sous le nom de *bâtons de Napier*.
- C'est en fait une genre d'amélioration / automatisation de la méthode de multiplication par jalousies.
- L'idée est d'avoir une série de bâton avec les tables de multiplications de 0 à 9 avec la notation "en jalousies".
- Cela permet d'automatiser les multiplications intermédiaires, et il ne reste plus à faire que des additions.



- Le mathématicien écossais John Napier (en français Neper) inventa en 1617 un abaque facilitant le calcul des produits, quotients, puissances et racines, qui est connu en français sous le nom de *bâtons de Napier*.
- C'est en fait une genre d'amélioration / automatisation de la méthode de multiplication par jalousies.
- L'idée est d'avoir une série de bâton avec les tables de multiplications de 0 à 9 avec la notation "en jalousies".
- Cela permet d'automatiser les multiplications intermédiaires, et il ne reste plus à faire que des additions.



Crédits

- Une bonne partie de ce cours est tirée principalement de Wikipédia, du travail de F. Guillier sur le principe du boulier, et du travail de F. Laroche intitulé “Promenades mathématiques”.