 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'un morphisme de groupes puis montrer que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.

2 - Démontrer que l'intersection de sous-groupes de $(G, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

3 - Énoncer et démontrer les propriétés sur le symétrique d'un élément.

II Exercices

Exercice 1 :
On note $i\mathbb{Q} = \{ir,\ r \in \mathbb{Q}\}$ et $\mathbb{Q}[i] = \left\{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$.
1 - Montrer que $i\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[i]$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$.
2 - $\mathbb{Q} \cup i\mathbb{Q}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$?

Exercice 2 :
Soient G un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est associative et qu'elle admet un élément neutre e.
1 - On suppose que $(G, *)$ est un groupe.
Montrer que pour tout $a \in G$, l'application $f_a : x \longmapsto x * a$ est bijective et préciser sa bijection réciproque.
2 - Réciproquement, on suppose que pour tout $a \in G$, l'application $f_a : x \longmapsto x * a$ est bijective.
Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 3 :
Soit G un groupe noté multiplicativement.
On définit un relation binaire $\mathcal{R}$ sur G par :

$$\forall x, y \in G,\ (x\mathcal{R}y) \iff \exists a \in G \mid y = axa^{-1}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G.

Exercice 4 :
Soient G un groupe noté multiplicativement et A un sous-groupe de G.
Pour $x \in G$, on note :

$$Ax = \{ax, a \in A\} \text{ et } xA = \{xa,\ a \in A\}$$

On considère l'ensemble B des éléments $x \in G$ tels que $Ax = xA$.
1 - Montrer que $A \subseteq B$.
2 - Montrer que pour tout $x \in B$ et tout $a \in A$, on a $xax^{-1} \in A$.
3 - Montrer que pour tout $x \in B$, on a $x^{-1} \in B$.
4 - L'ensemble B est-il un sous-groupe de G ?

Exercice 5 :
Soient $(G, *)$ un groupe de cardinal fini et H un sous-groupe de $(G, *)$.
1 - Montrer que pour tout $a \in G$, H et $aH = \{ah,\ h \in H\}$ ont le même nombre d'éléments.
2 - Soient $a, b \in G$.
Démontrer que $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \emptyset$.
3 - En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G.

Exercice 6 :
On note $G =]-1; 1[$ et pour $x, y \in G$, on note $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$.
Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur G et que $(G, *)$ est un groupe abélien.

Exercice 7 :
Soit f un morphisme non constant d'un groupe fini $(G, *)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
Calculer $\displaystyle\sum_{g \in G} f(g)$.