I Restitution du cours

1- Donner la définition de la convergence simple (phrase + quantificateurs) et énoncer le théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment pour une suite de fonctions.

2 - Donner la définition de la convergence uniforme (phrase + quantificateurs) et énoncer le théorème de dérivabilité de la fonction limite.

3 - Donner la définition de la convergence normale et énoncer le théorème de continuité de la somme.

II Questions de cours

1 - Démontrer le théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment pour une suite de fonctions.

2 - Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$, où $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

3 - Étudier les modes de convergence des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $f_n : x \longmapsto \dfrac{nx^2+1}{nx+1}$

III Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 :
Soient $\alpha > 0$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \longmapsto x n^{\alpha} e^{-nx}$$

1 - Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.
2 - Pour quelle(s) valeur(s) de α la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 2 :
Pour $x \in]0;+\infty[$, on pose sous réserve d'existence :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$$

Montrer que S est continue sur $[0;+\infty[$ et préciser $\lim_{x\to 0} S(x)$.

Exercice 3 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;+\infty[$, on pose :

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

1 - Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0;+\infty[$.
2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;+\infty[$, on a $0 \leq f_n(x) \leq e^x$.
3 - Soit $a > 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0;a]$.
4 - Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ de deux manières différentes.
5 - La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$?

IV Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{F}(I,\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f.
1 - Montrer que si les fonctions f_n sont convexes, alors f est convexe.
2 - Montrer que si les fonctions f_n sont bornées et que la convergence précédente est uniforme, alors f est bornée.

Exercice 5 :
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;+\infty[$, on pose : $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$. En cas de convergence, on notera $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
1 - Montrer que f est définie et continue sur $[0;+\infty[$ et préciser $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2 - Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
3 - Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall x > 0,\ f''(x) + f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

Exercice 6 :

Pour un réel x, on notera sous réserve de convergence : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.
1 - Déterminer le domaine $\mathcal{D}$ de définition de f.
2 - f est-elle continue sur $\mathcal{D}$?
3 - Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4 - Déterminer un équivalent de f en 0^+.
Indication : On utilisera une comparaison série-intégrale.