v.hanecart@orange.fr

I Restitution du cours

1 - Énoncer la proposition sur le rayon de convergence et la somme du produit de Cauchy de deux séries entières et donner les développements en série entière ainsi que le rayon de convergence des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \longmapsto \cos(x)$.

2 - Énoncer le théorème sur le caractère $\mathcal{C}^1$ de la somme d'une série entière et donner les développements en série entière ainsi que le rayon de convergence des fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$.

3 - Énoncer la proposition sur la somme de deux séries entières et donner les développements en série entière ainsi que le rayon de convergence des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $x \longmapsto \sin(x)$.

II Questions de cours

1 - À l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

2 - Énoncer et démontrer le théorème de continuité de la somme d'une série entière.

3 - Donner le développement en série entière de Arctan ainsi que son rayon de convergence et le prouver.

III Exercices

Exercice 1 :
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$ dans les cas suivants :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \ln(n) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 2 :
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$ dans les cas suivants :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = e^n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$$

Exercice 3 :
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$ d'une variable réelle et préciser l'intervalle de convergence dans chacun des cas suivants :

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathrm{Arctan}(n)$.

3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 4 :
En utilisant le développement en série entière de la fonction Arctan en 0, montrer que l'on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 5 :
Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{ch}(n) x^{3n+1}$ et calculer sa somme.

Exercice 6 :
1 - Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{1;\dfrac{1}{2}\right\}$:

$$\frac{1}{2x^2-3x+1} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x}$$

2 - En déduire que $x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2-3x+1}$ est développable en série entière au voisinage de l'origine, préciser les coefficients et le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 7 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

1 - Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et déterminer, selon la valeur du réel x, la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.

2 - En cas de convergence, on note $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Calculer $(1-x)f(x)$ et en déduire $f(x)$.