Leçon 151 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.
L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.
Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des propriétés des endomorphismes commutants entre eux.
La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.
La décomposition de Frobenius constitue également une application intéressante de cette leçon. Pour aller plus loin, on peut envisager de développer l'utilisation de sous-espaces stables en théorie des représentations.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 151 intitulée : "Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.". Le but de cette leçon est d'illustrer le rôle des sous espaces stables dans la théorie des endomorphismes. En effet, trouver des sous-espaces stables permet par exemple de simplifier l'étude en se restreignant à un sous-espace stable, cela va nous amener vers la réduction des endomorphismes.
Dans une première partie on traite du cadre théorique général des sous-espaces stables par un endomorphismes. Dans un premier point on donne les premières définitions et propriétés. On commence par donner la définition d'un sous-espace stable ainsi qu'une liste de premiers exemples de sous-espaces stables. On passe ensuite au cas d'endomorphismes qui commutent avec les propositions 6 et 7 qui nous serons utiles lorsque l'on traitera du cas des endomorphismes diagonalisables. Dans un deuxième point on introduit la notion d'endomorphisme induit ainsi que l'interprétation matricielle avec l'écriture par blocs qui permet de voir immédiatement si, dans une base donnée, il y a des sous-espaces stables ou non. On termine cette partie avec un dernier point sur le lien entre la dualité et les sous-espaces stables. On commence alors par définir des éléments orthogonaux ainsi que l'orthogonal qui nous permettent de définir la transposée d'une application linéaire et d'énoncer une caractérisation de la stabilité par la transposée.
Dans une deuxième partie on s'intéresse à la réduction des endomorphismes en y appliquant les résultats théoriques de la partie précédente. On commence par le cas des éléments propres avec tout d'abord les sous-espaces propres, puis le cas des polynômes caractéristiques qui permettront un transfert de diagonalisabilité ou de trigonalisabilité (cf. II.2 et II.3) avant de finir par les polynômes minimaux ainsi que le lemme des noyaux.
Dans un deuxième point on traite de la diagonalisabilité où l'on commence par plusieurs caractérisations avant de finir par le transfert de la diagonalisabilité à un sous-espace stable, la décomposition de Dunford puis les endomorphismes co-diagonalisables. On donne un dernier point où l'on suit la même construction mais dans le cas des endomorphismes trigonalisables (c'est-à-dire qu'on en rappelle des caractérisations, le transfert à un sous-espace stable et enfin le cas des endomorphismes co-trigonalisables).
On termine cette leçon avec une dernière partie consacrée à l'étude de quelques endomorphismes remarquables. On commence par le cas des endomorphismes cycliques où l'on énonce les résultats préliminaires utiles pour le théorème de réduction de Frobenius qui nous permet de caractériser le fait que deux matrices soient semblables via leurs invariants de similitude. Dans un deuxième point on s'intéresse à l'étude des endomorphismes nilpotents où l'on commence par introduire les noyaux itérés avant de donner la définition d'un endomorphisme nilpotent ainsi que quelques caractérisations et quelques résultats sur le cône nilpotent avant de conclure par la décomposition de Fitting et le dénombrement des endomorphismes nilpotent sur un corps fini. Enfin dans un dernier point on parle des endomorphismes normaux où l'on commence par rappeler la définition avant de finir par la réduction des endomorphismes normaux.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non vide et u un endomorphisme de E.

I Stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme

I.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Sous-espace stable [Deschamps, p.64] :
Un sous-espace vectoriel F de E est **stable par** u lorsque $u(F) \subseteq F$.

Exemple 2 : [Deschamps, p.64]
$*$ Les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme (et il existe des endomorphismes pour lesquels il n'y en a pas d'autre, notamment les rotations vectorielles par exemple).
$*$ Une homothétie stabilise tous les sous-espaces vectoriels de E.
$*$ Tout sous-espace vectoriel inclus dans le noyau de u ou contenant l'image de u est stable par u (en particulier $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u).
$*$ L'intersection et la somme de sous-espaces vectoriels stables par u sont stables par u.

Proposition 3 : [Deschamps, p.65]
Si pour tout $x \in E$ la famille $(x, u(x))$ est liée, alors u est une homothétie.
En particulier, les seuls endomorphismes stabilisant tous les sous-espaces vectoriels de E sont les homothéties.

Proposition 4 : [Deschamps, p.65]
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
L'ensemble $\mathcal{L}_F(E)$ des endomorphismes stabilisant F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 5 : [Deschamps, p.65]
On considère D la dérivation sur $\mathbb{K}[X]$.
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par D sont exactement $\left\{0_{\mathbb{K}[X]}\right\}$, $\mathbb{K}[X]$ et les $\mathbb{K}_d[X]$ pour $d \in \mathbb{N}$.

Proposition 6 : [Deschamps, p.65]
Soit v un endomorphisme de E.
Si u et v commutent, alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

Proposition 7 : [Deschamps, p.76]
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
Les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.
En particulier, $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(P(u))$ sont des sous-espaces stables par u.

Proposition 8 : [Deschamps, p.65]
Si F est un sous-espace vectoriel de E engendré par une famille $(e_i)_{i\in I}$, alors F est stable par u si, et seulement si, pour tout $i \in I$, $f(e_i) \in F$.

Exemple 9 : [Deschamps, p.65]
$*$ On considère $x \in E \backslash \{0_E\}$.
La droite $\mathbb{K}x$ est stable par u si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
$*$ On considère $x \in E$.
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left(u^k(x),\ k \in \mathbb{N}\right)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par u.

I.2 Notion d'endomorphisme induit

Définition 10 : Endomorphismes induit [Deschamps, p.66] :
On considère F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
On appelle **endomorphisme induit par** u **sur** F l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ définie par : $\forall x \in F,\ u_F(x) = u(x)$.

Remarque 11 : [Deschamps, p.66]
$*$ On ne peut pas parler d'endomorphisme induit par u sur un sous-espace vectoriel F de E qui n'est pas stable par u ! Dans ce cas, il faut donc distinguer l'endomorphisme induit u_F et la restriction $u|_F$.
$*$ On a $\mathrm{Im}(u_F) = u(F)$ et $\mathrm{Ker}(u_F) = F \cap \mathrm{Ker}(u)$.

Proposition 12 : [Deschamps, p.66]
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E adaptée à F.
L'endomorphisme u stabilise F si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Dans ce cas, A est la matrice dans la base $(e_1, ..., e_p)$ de l'endomorphisme induit u_F.

Remarque 13 : [Deschamps, p.66]
Avec les notations de la proposition précédente, notons $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, ..., e-n)$.
$*$ Le sous-espace vectoriel G est stable par u si, et seulement si, $C = 0$. Dans ce cas, B s'interprète comme la matrice de l'endomorphisme induit par u sur G dans la base $(e_{p+1}, ..., e_n)$.
$*$ Lorsque G n'est pas stable par u, l'interprétation de B est plus délicate. En notant $q \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur G parallèlement à F, on peut interpréter B comme la matrice dans la base $(e_{p+1}, ..., e_n)$ de l'endomorphisme induit par $q \circ u$ sur G.

Proposition 14 : [Deschamps, p.66]
On suppose que E est de dimension finie et on note $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
$*$ Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on pose $E_i = \mathrm{Vect}(e_i)$.
Les endomorphismes de E qui stabilisent chaque E_i sont exactement les endomorphismes dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.
$*$ Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on pose $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_i)$.
Les endomorphismes de E qui stabilisent chaque F_i sont exactement les endomorphismes dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.

Proposition 15 : [Deschamps, p.67]
Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_p)$ une base adaptée à une décomposition $E = \bigoplus_{i\in[\![1;p]\!]} E_i$.
L'endomorphisme u stabilise chaque E_i si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs (c'est-à-dire de la forme $\mathrm{diag}(A_1, ..., A_p)$ où pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, la matrice A_i est carrée d'ordre $\dim_{\mathbb{K}}(E_i)$). Dans ce cas, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, A_i est la matrice dans la base $\mathcal{B}_i$ de l'endomorphisme induit par u sur E_i.

I.3 Dualité et sous-espaces stables

Définition 16 : Éléments orthogonaux et orthogonal [Gourdon, p.134] :
Des éléments $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dit **orthogonaux** lorsque $\varphi(x) =< \varphi, x >= 0$.
$*$ Si $A \subseteq E$, on note $A^\perp = \{\varphi \in E^* \text{ tq } \forall x \in A,\ \varphi(x) = 0\}$ et on l'appelle **orthogonal de** A.
$*$ Si $B \subseteq E^*$, on note $B^\circ = \{x \in E \text{ tq } \forall \varphi \in B,\ \varphi(x) = 0\}$ et on l'appelle **orthogonal de** B.

Proposition 17 : [Gourdon, p.134]
Si E est de dimension finie notée n, alors :
$*$ Si $\varphi_1, ..., \varphi_p$ sont p formes linéaires de E^* telles que $\mathrm{rg}(\varphi_1, ..., \varphi_p) = r$, alors le sous-espace vectoriel $F = \{x \in E \text{ tq } \forall i \in [\![1;p]\!],\ \varphi_i(x) = 0\}$ est de dimension $n-r$.
$*$ Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-r$, alors il existe r formes linéairement indépendantes $\varphi_1, ..., \varphi_r$ de E^* telles que l'on ait $F = \{x \in E \text{ tq } \forall i \in [\![1;p]\!],\ \varphi_i(x) = 0\}$

Définition 18 : Transposée d'une application linéaire [Gourdon, p.135] :
On considère $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Pour tout $f \in F^*$, on a $f \circ u \in E^*$ et l'application linéaire définie de F^* sur E^* par $f \longmapsto f \circ u$ est appelée **application transposée de** u et notée $u^\intercal$.

Proposition 19 : [Gourdon, p.136]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si E est de dimension finie, alors un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par $u^\intercal$.

II Application à la réduction des endomorphismes

II.1 Éléments propres et lemme des noyaux

Proposition 20 : [Deschamps, p.69]
Soit v un endomorphisme de E.
Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre (ainsi que leurs noyaux et images).

Proposition 21 : [Deschamps, p.83]
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors le polynôme caractéristique χ_{u_F} de l'endomorphisme induit par u sur F divise χ_u.
En particulier, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u_F) \subseteq \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$

Proposition 22 : [Deschamps, p.83]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E stables par u.
Si $E = F \oplus G$, alors $\chi_u = \chi_{u_F}\chi_{u_G}$.

Proposition 23 : [Deschamps, p.83]
Soit F est un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Si χ_u est scindé (resp. scindé à racines simples), alors χ_{u_F} l'est aussi.

Proposition 24 :
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors π_{u_F} divise π_u.

Proposition 25 :
Si $E = E_1 \oplus ... \oplus E_r$ est une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u, alors $\pi_u = \mathrm{PPCM}(\pi_{u_{E_1}}, ..., \pi_{u_{E_r}})$.

Lemme 26 : [Rombaldi, p.608]
Soient r un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et $Q_1, ..., Q_p$ les polynômes définis par $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r P_j$.
Si les polynômes P_k sont deux à deux premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$, alors les polynômes Q_k sont premiers entre eux dans leur ensemble et pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, P_k et Q_k sont premiers entre eux.

Lemme 27 : Lemme des noyaux [Rombaldi, p.609] :
Soient r un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{i=1}^r P_k$.
On a alors la décomposition $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(P_i(u))$ et les différents projecteurs $\pi_k : \mathrm{Ker}(P(u)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(P_k(u))$ sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$.

II.2 Diagonalisation

Proposition 28 : [Deschamps, p.88 + 102]
Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ où les $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont distincts deux à deux, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
* u est diagonalisable * $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ * $\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(u)) = n$.
* u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.
* π_u est scindé à racines simples.

Corollaire 29 : [Deschamps, p.91]
L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont remplies :
* Son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
* Pour toute valeur propre λ de u, on a $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

Corollaire 30 : [Deschamps, p.104]
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par u sur F est également diagonalisable.

Développement 1 : [cf. ROMBALDI]

Théorème 31 : Décomposition de Dunford [Rombaldi, p.613]
Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que d est diagonalisable, n est nilpotente, d et n commutent et $u = d + n$.
De plus, d et n sont des polynômes en u.

Corollaire 32 : [Rombaldi, p.766]
Si le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{K}$, alors M est diagonalisable si, et seulement si, e^M est diagonalisable.

Théorème 33 : [Rombaldi, p.779]
On a l'équivalence :

$$\left(e^A = I_n\right) \iff (A \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq 2i\pi\mathbb{Z})$$

Définition 34 : Endomorphismes co-diagonalisables [Deschamps, p.104] :
On considère v et w deux endomorphismes de E.
Les endomorphismes v et w sont dits **co-diagonalisables** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de v et w sont diagonales.

Théorème 35 : [Deschamps, p.104]
Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'endomorphismes de E.
La famille $(v_i)_{i\in I}$ est co-diagonalisable si, et seulement si, elle est composée d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux.

II.3 Trigonalisation

Théorème 36 : [Deschamps, p.93 + 103]
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* u est trigonalisable. * u possède un polynôme annulateur scindé.
* Le polynôme minimal de u est scindé.

Exemple 37 : [Deschamps, p.95]
La matrice $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable et semblable à la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Corollaire 38 : [Deschamps, p.93]
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Si u est trigonalisable, alors l'endomorphisme induit par u sur F est également trigonalisable.

Définition 39 : Endomorphismes co-trigonalisables [Deschamps, p.104] :
On considère v et w deux endomorphismes de E.
Les endomorphismes v et w sont dits **co-trigonalisables** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de v et w sont simultanément trigonalisable.

Théorème 40 : [Deschamps, p.104]
Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'endomorphismes de E.
Si les v_i sont tous trigonalisables et commutent deux à deux, alors la famille $(v_i)_{i\in I}$ est co-trigonalisable.

Remarque 41 :
Attention, la réciproque n'est pas vraie en toute généralité !

III Endomorphismes remarquables

III.1 Endomorphismes cycliques

Définition 42 : Sous-espace stable engendré par un vecteur [Berhuy, p.1013] :
On considère $v \in E$.
On appelle **sous-espace vectoriel stable engendré par** v le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant v.

Lemme 43 : [Berhuy, p.1014]
Pour tout $v \in E$, on a $E_v = \{P(u)(v) | P \in \mathbb{K}[X]\}$.
De plus une base de E_v est donnée par $\left(v, u(v), ..., u^{d-1}(v)\right)$ (avec d le plus petit entier tel que la famille soit liée). D'autre part, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a l'égalité $P(u|_{E_v}) = 0$ si, et seulement si, $P(u)(v) = 0$.
Et enfin, si $a_0, ..., a_{d-1} \in \mathbb{K}^n$ vérifient $u^d(v) = -a_0 v - a_1 u(v) - ... - a_{d-1}u^{d-1}(v)$, alors on a $\pi_{u|_{E_v}} = a_0 + a_1 X + ... + a_{d-1}X^{d-1} + X^d$ et donc $\deg\left(\pi_{u|_{E_v}}\right) = \dim(E_v)$.

Proposition 44 : [Berhuy, p.1015]
Il existe un vecteur $v \in E\backslash\{0\}$ tel que $\pi_{u_{E_v}} = \pi_u$.

Définition 45 : Vecteur u-maximal [Berhuy, p.1016] :
Un vecteur $v \in E\backslash\{0\}$ tel que $\pi_{u_{E_v}} = \pi_u$ est appelé **vecteur u-maximal**.

Définition 46 : Endomorphisme cyclique [Berhuy, p.1016] :
On dit que u est un **endomorphisme cyclique** lorsqu'il existe $v \in E$ tel que la famille $(v, u(v), ..., u^{n-1}(v))$ soit une base de E.
Un tel vecteur v est alors appelé **u-cyclique**.

Proposition 47 : [Berhuy, p.1018]
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* L'endomorphisme u est cyclique.
* Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon.
* Il existe $v \in E\backslash\{0\}$ tel que $E = E_v$. * On a $\deg(\pi_u) = n$. * On a $\chi_u = \pi_u$.

Lemme 48 : [Berhuy, p.1019]
Soit $v \in E$ un vecteur u-maximal.
Le sous-espace E_v admet un supplémentaire stable par u.

Théorème 49 : Décomposition de Frobenius [Berhuy, p.1021] :
Il existe un entier $r \geq 1$, des sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_r$ et des polynômes unitaires non constants $\chi_{u,1}, ..., \chi_{u,r} \in \mathbb{K}[X]$ tels que :
$*$ $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.
$*$ Pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, F_i est stable par u et $u|_{F_i}$ est cyclique et de polynômes minimal $\chi_{u,i}$.
$*$ On a $\chi_{u,1}|\chi_{u,2}|...|\chi_{u,r}$.

Remarque 50 : [Berhuy, p.1021]
Une telle décomposition est appelée **décomposition de Frobenius** de u et l'entier r ainsi que es polynômes $\chi_{u,1}, ..., \chi_{u,r}$ sont unique et appelés invariants de similitude de u.

Corollaire 51 : [Berhuy, p.1021]
Avec les notations du théorème précédent, on a les relations suivantes : $\chi_{u,r} = \pi_u$ et $\chi_u = \prod_{i=1}^r \chi_{u,i}$.
De plus, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par bloc avec le i-ième bloc correspondant à la matrice compagnon de $\chi_{u,i}$.

Exemple 52 : [Berhuy, p.1034]
Les invariants de similitude de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont $\chi_{M,1} = 1$, $\chi_{M,2} = X - 1$ et $\chi_{M,3} = (X-1)(X+1)$.

Corollaire 53 : [Berhuy, p.1021]
Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles ont les mêmes invariants de similitude.

Exemple 54 :
En reprenant l'exemple précédent, on a que la matrice M est semblable à la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III.2 Étude des endomorphismes nilpotents

Lemme 55 : [Caldero, p.74]
Les suites $\left(\mathrm{Ker}\left(u^k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ et $\left(\mathrm{Im}\left(u^k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante au sens de l'inclusion.
De plus, ces deux suites sont stationnaires à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Lemme 56 : [Caldero, p.74]
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\dim\left(\mathrm{Ker}(u^{k+1})\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^k\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\left(u^k\right) \cap \mathrm{Ker}(u)\right)$.

Lemme 57 : [Caldero, p.74]
La suite $\left(\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^{k+1}\right)\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^k\right)\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

Définition 58 : Endomorphisme nilpotent [Berhuy, p.966] :
L'endomorphisme u est appelé **endomorphisme nilpotent** lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Le plus petit entier vérifiant cette propriété est alors appelé **indice de nilpotence** de u.

Exemple 59 : [Beck, p.168]
La dérivation $P \longmapsto P'$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ est nilpotente mais pas dans $\mathbb{K}[X]$ car il est nécessaire d'utiliser un argument de degré.

Proposition 60 : [Beck, p.168]
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ L'endomorphisme u est nilpotent. $*$ $\chi_u = X^n$.
$*$ Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\pi_u = X^p$.
$*$ u est trigonalisable avec uniquement des zéros sur sa diagonale.
$*$ u est trigonalisable et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{0\}$.

Exemple 61 : [Beck, p.169]
La matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $\chi_N = X^2$, donc N est nilpotente.
De plus, $\pi_N = X^2$, donc son indice de nilpotence est égal à 2.

Proposition 62 : [Beck, p.171]
Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, alors on a l'équivalence :

$$(u \text{ est nilpotent}) \iff \left(\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}\left(u^k\right) = 0\right)$$

Proposition 63 : [Beck, p.168]
L'ensemble $\mathcal{N}(E)$ des endomorphismes nilpotents de E est un cône (car stable par multiplication par un scalaire).

Remarque 64 : [Beck, p.168]
$\mathcal{N}(E)$ n'est ni un idéal de $\mathcal{L}(E)$, ni un sous-espace vectoriel. En effet, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, mais pas la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 65 : [Beck, p.169]
Si $n = 2$, alors on a :
$*$ $u \in \mathcal{N}(E)$ si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(u) = 0$ et $\det(u) = 0$.
$*$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_2(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $a = -d$ et $ad - bc = 0$.

Proposition 66 : [Beck, p.168]
Soient $(v,w) \in \mathcal{N}(E)^2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
$*$ Si $v \circ w = w \circ v$, alors $v + w \in \mathcal{N}(E)$.
$*$ Si $v \circ f = f \circ v$, alors $v \circ f \in \mathcal{N}(E)$.

Lemme 67 : Lemme de Fitting [Caldero, p.74] :
Avec les notations du lemme 55, on a $E = \mathrm{Ker}\,(u^{n_0}) \oplus \mathrm{Im}\,(u^{n_0})$.
De plus, u induit un endomorphisme nilpotent sur $\mathrm{Ker}\,(u^{n_0})$ et un automorphisme sur $\mathrm{Im}\,(u^{n_0})$.

Définition 68 : Décomposition de Fitting [Caldero, p.74] :
La donnée de $((F,G),v,w)$ où $F = \mathrm{Ker}\,(u^{n_0})$, $G = \mathrm{Im}\,(u^{n_0})$, $v = u|_F$ et $w = u|_G$ avec $E = F \oplus G$, v nilpotent et w un automorphisme est appelée **décomposition de Fitting**.

Développement 2 : [cf. CALDERO]

Théorème 69 : [Caldero, p.74]
Si $\mathbb{K}$ est un corps fini commutatif de cardinal q, alors il y a $n_d = q^{d(d-1)}$ matrices nilpotentes de taille $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

III.3 Endomorphismes normaux

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que E est un espace euclidien.

Définition 70 : Endomorphisme normal [Berhuy, p.95] :
On dit que u est un **endomorphisme normal** lorsque $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Lemme 71 : [Berhuy, p.98]
Soient u un endomorphisme normal de E et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Lemme 72 : [Berhuy, p.107]
Soit u un endomorphisme normal de E.
Si E est le plan euclidien, alors il existe une base orthonormée (e_1, e_2) de E dans laquelle la matrice représentative de u dans cette base est, soit diagonale, soit de la forme : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$.

Théorème 73 : Réduction des endomorphismes normaux [Berhuy, p.108] :
Soit u un endomorphisme normal de E.
Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est égale à une matrice diagonale par blocs :
$*$ de taille 1 de la forme (γ) avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
$*$ de taille 2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Remarques sur le plan

— Il faut connaître des caractérisations du fait d'être une homothétie ainsi que le passage par la transposée (les hyperplans sont stables par u si, et seulement si, les droites sont stable par $u^{\intercal}$).

— Bien retenir le lien entre l'orthogonal et les endomorphismes induits.

— Savoir trouver des sous-espaces stables en dimension 3.

— On peut également parler d'endomorphismes semi-simples et également d'autres types d'endomorphismes (symétriques, orthogonaux, etc.).

Liste des développements possibles

— Décomposition de Dunford.

— Dénombrement des endomorphismes nilpotents sur un corps fini.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.

— Vincent Beck, *Objectif agrégation*.