I Questions de cours

1 - Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X,Y)=(j,k)) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}$$

a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
b) Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles indépendantes ?

2 - Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0;1[$ et $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.
a) Soient $i \in [\![1;N]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq N)$, puis $\mathbb{P}(X_i > N)$.
b) On considère $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{i \in [\![1;N]\!]} X_i$.
Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$ puis en déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$. Reconnaître la loi de Y.

3 - Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}$$

a) Déterminer les lois de X et de Y.
b) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique.
c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
d) Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.

II Exercices

Exercice 1 :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$.
1 - Rappeler la loi de $X+Y$.
2 - En exprimant $\mathbb{P}(X+Y=n)$ sous la forme d'une somme, déterminer la valeur de la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
3 - Deux joueurs tirent chacun n fois une pièce équilibrée. Le gagnant est celui qui obtient le plus *pile*. Déterminer la probabilité p_n qu'il y ait un gagnant.
4 - Trouver la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 :
Soit $T \in \mathbb{N}^*$.
Un élément chimique émet des électrons toutes les T secondes. On pose N la variable aléatoire réelle donnant le nombre d'électrons émis et on suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Certains des électrons ont une propriété voulue, on dira dans ce cas qu'ils sont *efficaces*.
Chaque électron a une probabilité $p \in]0;1[$ d'être efficace. On note X le nombre d'électrons efficaces et Y celui des électrons qui ne le sont pas.
1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer la loi de X conditionnée par $(N=n)$.
2 - Déterminer la loi du couple (N,X).
3 - Déterminer la loi de X.
4 - Montrer que X et Y sont indépendantes.
5 - *Bonus : Calculer* $\mathrm{Cov}(N,X)$.

Exercice 3 :
Soient $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = (n+1)p^2(1-p)^n$$

1 - Vérifier que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$.
Indication : On admettra que l'on peut dériver la série terme à terme.
On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu et $Z = X - Y$.
2 - Déterminer la loi de Y.
3 - Déterminer la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 4 :
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose qu'il existe $p \in]0;1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = p\mathbb{P}(X \geq n)$.
Déterminer la loi de X.

Exercice 5 :
On suppose que le nombre N d'enfants dans une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in]0;1[$ et celle que ce soit un garçon est $q = 1-p$. On suppose aussi que les sexes des naissances successives sont indépendants.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles par familles, et Y celle du nombre de garçons.
1 - Déterminer la loi conjointe du couple (N,X).
2 - En déduire la loi de X et celle de Y.

v.hanecart@orange.fr

Exercice 6 :

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On opère des tirages successifs avec remise et à chaque tirage on ajoute une boule de la même couleur que celle obtenue.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui prend comme valeur le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1 - Déterminer la loi de X_2.

2 - Déterminer la loi de X_n pour $n > 0$.