Leçon 204 - Connexité. Exemples d'applications.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, une fois les propriétés élémentaires présentées, il convient de mettre en évidence à travers un choix judicieux, non nécessairement exhaustif, d'applications le fait que la connexité formalise l'idée d'espace "d'un seul tenant", que la connexité par arcs permet d'illustrer géométriquement. Du point de vue opérationnel, les deux idées maîtresses sont la préservation de la connexité par image continue, et l'utilisation de la connexité pour passer du local au global.
La seconde sera abondamment illustrée dans le domaine du calcul différentiel, des équations différentielles non linéaires (passage d'une unicité locale à une unicité globale), des fonctions holomorphes (principe du prolongement analytique ou du maximum).
En cas de non-connexité, la notion pertinente est celle de composante connexe, dont une première application est la structure des ouverts de $\mathbb{R}$, et leur mesure. Les exemples issus de l'algèbre linéaire sont bien entendu les bienvenus, à condition de ne pas trop détourner la leçon...
Pour les candidates et candidats solides, de bons prolongements sont le théorème de Runge, l'ensemble triadique de Cantor comme prototype d'espace métrique compact, parfait et totalement discontinu, la notion de simple connexité.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 204 intitulée : "Connexité. Exemples d'applications.". La connexité traduit une certaine homogénéité de l'espace, dans le sens où des propriétés locales sont nécessairement globales. C'est pourquoi il s'agit d'une notion omniprésente en analyse dont on dégage rapidement l'intérêt pour l'extension de propriétés à tout l'espace.
Dans une première partie, on s'intéresse à la connexité. On commence avec les généralités en donnant la définition d'un espace connexe ainsi qu'une caractérisation très utile en pratique de la connexité ainsi que quelques exemples. On étudie ensuite le comportement de la connexité par rapport à l'union, par rapport à l'image d'une application continue et enfin par rapport à un homéomorphisme. On termine ce premier point en caractérisant les connexes de $\mathbb{R}$ comme étant exactement les intervalles. Dans un deuxième point, on s'intéresse cette fois-ci aux composantes connexes d'un ensemble (cette notion possède un intérêt lorsque l'espace n'est pas connexe). On énonce pour commencer la relation d'équivalence qui nous mène à la définition d'une composante connexe ainsi que des résultats remarquables sur celle-ci via le théorème 19. On donne ensuite des exemples de composantes connexes et on termine en évoquant le cas des ensembles totalement discontinus. On termine cette première partie avec un dernier point où l'on traite de la notion de connexité par arcs qui est un raffinement de la notion de connexité et qui a l'avantage d'être plus "visuelle" que la connexité. Cette notion est souvent plus utilisée en pratique pour montrer qu'un espace est connexe grâce à la proposition 27. Cependant, la réciproque est fausse comme le montre la remarque 28 sauf dans certains cas comme en proposition 29 par exemple.
Dans une deuxième partie, on s'intéresse à des applications de la connexité dans divers domaines. Tout d'abord on commence avec le théorème des valeurs intermédiaires qui a un intérêt théorique pour justifier l'existence de racine, le bien-fondé de la méthode par recherche dichotomique ainsi que le fait que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine sur $\mathbb{R}$. Dans un deuxième point, on regarde la connexité d'un point de vue des équations différentielles. L'intérêt principal de la connexité résidant dans le théorème de Cauchy-Lipschitz global, qui permet de passer de la version locale à globale et qui permet de donner l'existence et l'unicité d'une solution maximale à un problème de Cauchy donné. Dans un dernier point, on s'intéresse à l'analyse complexe où la connexité est omniprésente dans la plupart des théorèmes fondamentaux. C'est notamment le cas par exemple du théorème de Cauchy, du prolongement analytique ainsi que le principe des zéros isolés ou encore le théorème des résidus qui permet le calcul d'intégrales.
Pour finir, on s'intéresse dans une dernière partie aux espaces de matrices. On commence par un lien avec la réduction en s'intéressant aux matrices diagonalisables et trigonalisables. On s'intéresse ensuite dans un deuxième point à la connexité dans le cas du groupe linéaire et de ses sous-groupes : on donne tout d'abord des générateurs de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ avant de donner les corollaires 53 et 54 qui montrent la connexité par arcs de certains sous-groupes et la non-connexité d'autres. Enfin, on termine cette

leçon avec un dernier point similaire au précédent en étudiant la connexité dans le cas du groupe orthogonal : on montre que certains sous-groupes sont connexes par arcs et que d'autres ne le sont pas et on termine par une application avec la simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.
Enfin, on trouvera en annexe une illustration de la remarque 9 ainsi qu'un contre-exemple à la proposition 27 avec la courbe sinus du topologue.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère (X, d) un espace métrique non vide.

I Connexité

I.1 Généralités

Définition 1 : Espace connexe [Hassan, p.233] :
On dit que (X, d) est un **espace connexe** lorsqu'il n'est pas la réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints.
Autrement dit, pour tous ouverts disjoints U et V de X tels que $X = U \cup V$ alors on a $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

Proposition 2 : Caractérisation de la connexité [Hassan, p.233] :
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ L'espace (X, d) est connexe.
$*$ L'espace X n'est pas la réunion de deux parties fermées non vides disjointes.
$*$ Il n'existe pas dans X d'autres parties qui soient à la fois ouvertes et fermées que $\emptyset$ et X.
$*$ Toute application continue de X dans l'espace discret $\mathbb{Z}$ est constante.
$*$ Toute application continue de X dans l'espace discret $\{0; 1\}$ est constante.

Remarque 3 : [Hassan, p.234]
Un espace qui n'est pas connexe est dit **discontinu**.

Exemple 4 : [Hassan, p.234 + Ramis, p.522]
$*$ Dans un espace métrique, tout ensemble réduit à un point est connexe.
$*$ $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe car $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^*$.
$*$ $\mathbb{Z}$ n'est pas connexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 5 : [Hassan, p.234]
Soit A une partie connexe de X (au sens de la distance induite).
$*$ Si U et V sont des ouverts (respectivement des fermés) disjoints de X tels que $X = U \cup V$, alors $A \subseteq U$ ou $A \subseteq V$.
$*$ Si U est une partie à la fois ouverte est fermée de X et $A \cap U \neq \emptyset$, alors $A \subseteq U$.

Proposition 6 : [Hassan, p.234]
Soient A et B deux parties de X.
Si (X, d) est un espace métrique, A est une partie connexe et $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, alors B est connexe.

Théorème 7 : [Hassan, p.235]
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X.
Si pour tous éléments $i, j \in I$ distincts on a $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Exemple 8 : [Ramis, p.522]
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ n'est pas connexe car les intervalles ouverts $]n; n+1[$, pour $n \in \mathbb{Z}$, en forment une partition.

Remarque 9 :
En général, l'union ou l'intersection de deux espaces connexes n'est pas connexe (cf. annexe 1).

Théorème 10 : [Hassan, p.236]
Soient (Y, d') un espace métrique non vide et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue.
Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.

Exemple 11 : [Ramis, p.523]
$*$ Le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ est connexe en tant qu'image de $[0; 2\pi]$ (qui est connexe) par l'application continue $t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$.
$*$ Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors le graphe de f est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$ (en tant qu'image de I par l'application $x \longmapsto (x, f(x))$ qui est continue).

Corollaire 12 : [Hassan, p.236]
Soit (Y, d') un espace métrique non vide homéomorphe à (X, d).
X est connexe si, et seulement si, Y est connexe.

Corollaire 13 : [Hassan, p.250]
Pour tout entier $n \geq 2$, les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.

Théorème 14 : [Hassan, p.236]
Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques non vides.
L'espace $\prod_{i=1}^n X_i$ est connexe si, et seulement si, chaque X_i est connexe.

Théorème 15 : [Hassan, p.238]
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
A est connexe si, et seulement si, A est un intervalle.
En particulier, $\mathbb{R}$ est connexe.

Corollaire 16 : [Hassan, p.238]
Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont connexes.

I.2 Composantes connexes

On considère la relation binaire : Pour tous $x, y \in X$, on a $x \sim y$ lorsqu'il existe un ensemble connexe non vide A tel que $\{x, y\} \subseteq A$.

Lemme 17 : [Hassan, p.241]
La relation $\sim$ définie ci-dessus est une relation d'équivalence sur X.

Définition 18 : Composante connexe [Hassan, p.241] :
On considère $x \in X$.
On appelle **composante connexe de** x la classe d'équivalence de x pour la relation $\sim$ précédente et on la note C_x.

Théorème 19 : [Hassan, p.241]
$*$ La composante connexe de $x \in X$ est la réunion des ensembles connexes contenant x. C'est donc la plus grande (au sens de l'inclusion) partie connexe de X contenant x.
$*$ Les composantes connexes de X sont connexes et fermées.
$*$ Si X possède un nombre fini de composantes connexes, alors chacune de ces composantes est ouverte dans X.
$*$ Si U est un ensemble à la fois ouvert et fermé dans X, alors pour tout $x \in U$, on a $C_x \subseteq U$.
$*$ Tout ensemble connexe de X est contenu dans une composante connexe de X.
$*$ Tout ensemble connexe non vide qui est à la fois ouvert et fermé dans X est une composante connexe.
$*$ Si $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ avec les X_i des ouverts non vides connexes dans X, alors les X_i sont exactement les composantes connexes de X.

Exemple 20 : [Ramis, p.524]
$*$ $\mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes ($]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$) et en particulier $\mathbb{R}^*$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$ (qui lui est connexe).
$*$ Les composantes connexes de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ sont exactement les intervalles de la forme $]n; n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
$*$ L'espace $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille n non nulle admet deux composantes connexes, données par le signe du déterminant.
$*$ Dans $\mathbb{N}$ (et plus généralement dans tout espace discret), les composantes connexes sont les singletons.

Remarque 21 : [Hassan, p.242]
Les composantes connexes d'un espace métrique ne sont pas toujours ouvertes. Par exemple si l'on considère $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$, alors les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont exactement les singletons et ceux-ci sont fermés mais pas ouverts.

Définition 22 : Ensemble totalement discontinu [Hassan, p.242] :
On dit qu'un ensemble est un **ensemble totalement discontinu** lorsque la composante connexe de chacun de ses points est réduite à ce point.

Exemple 23 : [Hassan, p.242]
$*$ Tout ensemble discret est totalement discontinu.
$*$ $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu mais pas discret.

I.3 Connexité par arcs

Définition 24 : Chemin [Hassan, p.247] :
On considère $x, y \in X$.
On appelle **chemin dans** X **reliant** x **à** y toute application continue $\varphi : [0;1] \longrightarrow X$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$. Le point x est alors appelé **origine du chemin** et y **l'extrémité du chemin**.

Lemme 25 : [Hassan, p.247]
Si l'on définit sur X la relation binaire suivante :

$$(x \sim y) \iff (\text{Il existe un chemin dans } X \text{ joignant } x \text{ à } y)$$

alors $\sim$ est une relation d'équivalence sur X.

Définition 26 : Espace connexe par arcs [Hassan, p.248]
On dit que X est **connexe par arcs** lorsqu'il ne contient qu'une seule composante connexe pour la relation d'équivalence précédente.

Proposition 27 : [Hassan, p.248]
Si X est connexe par arcs, alors il est connexe.

Remarque 28 : [Hassan, p.248]
La réciproque de la proposition précédente est fausse en général. On peut par exemple considérer l'ensemble $\Gamma = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right),\ x \in]0;1]\right\}$ (cf. annexe 2).
En effet, Γ est connexe (en tant que graphe d'une fonction continue sur un intervalle réel), donc son adhérence $C = \Gamma \cup (\{0\} \times [-1;1])$ aussi. Cependant, C n'est pas connexe par arcs (c'est parce que l'ensemble contient le point $(0,0)$ mais qu'il n'est pas possible de relier la fonction à l'origine ni de tracer un chemin).

Proposition 29 : [Hassan, p.315]
Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.
$*$ U est connexe si, et seulement si, U est connexe par arcs.
$*$ Les composantes connexes de U sont ouvertes et fermées dans U et connexes par arcs.

II Applications

II.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 30 : Théorème des valeurs intermédiaires [Hassan, p.238] :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
$*$ $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
$*$ Si $I = [a;b]$ est un intervalle fermé borné, alors $f(I) = [c;d]$ est aussi un intervalle fermé borné.

Remarque 31 : [Hassan, p.239]
$*$ Un ensemble dense dans un espace connexe peut ne pas être connexe. Il suffit de considérer $\mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas connexe.
$*$ Le complémentaire d'un ensemble dense peut être connexe. Il suffit de considérer $\mathbb{Q}^2$ qui est dense dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2$ est connexe.

Corollaire 32 : Méthode de dichotomie :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
Si $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = 0$.

Corollaire 33 :
Tout polynôme de degré impair sur $\mathbb{R}$ a une racine.

II.2 Équations différentielles

Proposition 34 :
Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies et U un ouvert connexe de E.
Si $f : U \longrightarrow F$ est une application différentiable et de différentielle nulle, alors f est constante.

Théorème 35 : Théorème de Cauchy-Lipschitz local [Demailly, p.153] :
Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
Pour tout $(t_0, y_0) \in U$, il existe $\alpha > 0$ tel que le problème de Cauchy $PC_{(t_0,y_0)}$ ait une unique solution définie sur $[t_0 - \alpha; t_0 + \alpha]$.

Corollaire 36 : [Demailly, p.154]
Sous les hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz local, si (u, I) et (v, J) sont deux solutions de $u' = f(t,u)$ telles qu'il existe $t_0 \in I \cap J$ tel que $u(t_0) = v(t_0)$, alors $u = v$ sur $I \cap J$.

Théorème 37 : Théorème de Cauchy-Lipschitz global [Demailly, p.154] :
Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue qui satisfait le théorème de Cauchy-Lipschitz local.
Pour tout $(t_0, y_0) \in U$, $PC_{(t_0,y_0)}$ admet une unique solution maximale.

Exemple 38 :
Le problème de Cauchy $y' = \frac{1}{t}y^2$ et $y(1) = 1$ admet une unique solution maximale sur $]0; e[$ donnée par $\widetilde{y}(t) = \frac{1}{1-\ln(t)}$.

II.3 Analyse complexe

Théorème 39 : Théorème de Cauchy pour un chemin [Tauvel, p.136] :
Soient U un ouvert simplement connexe (ou étoilé) de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$ et γ un chemin dans U.
Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ on a :

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

Corollaire 40 : Formule de Cauchy pour un disque :
Soient D un disque ouvert de centre a et de rayon $R > 0$, $f \in \mathcal{H}(D)$ et $r \in]0; R[$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module différent de r, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(a,r)^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

Théorème 41 : Principe du prolongement analytique [Tauvel, p.52] :
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* f est identiquement nulle dans U.
* f est identiquement nulle dans un voisinage de a.
* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$.

Corollaire 42 : [Tauvel, p.52]
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{H}(U)$.
Si f et g coïncident sur un voisinage de U, alors $f = g$ sur U.

Exemple 43 :
Il n'existe pas de fonction analytique $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Théorème 44 : Principe des zéros isolés [Tauvel, p.53] :
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$ non identiquement nulle.
L'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de U.

Exemple 45 : [Tauvel, p.54]
On suppose que Ω contient 0.
Il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ telle que $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand.

Corollaire 46 : [Tauvel, p.53]
Si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors $\mathcal{H}(U)$ est un anneau intègre.

Théorème 47 : Théorème des résidus [Tauvel, p.103]
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a_1, ..., a_n$ des points deux à deux distincts de U qui sont des pôles de f et $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{a_1, .., a_n\})$.
Si γ est un chemin fermé sur U dont l'image ne contient aucun des a_k, alors on a :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\,\mathrm{Res}(f, a_k)$$

Exemple 48 : [Tauvel, p.104]
Pour $a > 1$ fixé, on a $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin(t)}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Exemple 49 : [Tauvel, p.193]
On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et α un réel tel que $n > \alpha + 1 > 0$.
On a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^n}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{n}\right)}$$

III Espaces de matrices

Dans toute cette partie, on considère n un entier naturel non nul.

III.1 Lien avec la réduction

Dans toute cette sous-partie, on note $D_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq M diagonalisable$\}$, puis $T_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq M trigonalisable$\}$ et finalement on note également $B_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\mathrm{Card}\left(\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M)\right) = n\}$.

Remarque 50 :
Puisque $n \geq 2$, on a les inclusions strictes : $B_n(\mathbb{K}) \subsetneq D_n(\mathbb{K}) \subsetneq T_n(\mathbb{K})$.

Proposition 51 :
Les ensembles $B_n(\mathbb{K})$, $D_n(\mathbb{K})$ et $T_n(\mathbb{K})$ sont connexes par arcs et ils ne sont pas bornés.

III.2 Connexité et groupe linéaire

Développement 1 : [cf. ROMBALDI]

Théorème 52 : [Rombaldi, p.688]
Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ s'écrit $A = \prod_{k=1}^r P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^s Q_j$, où les P_k et Q_j sont des matrices de transvections et $\lambda = \det(A)$.

Corollaire 53 : [Rombaldi, p.689]
Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Corollaire 54 : [Rombaldi, p.689]
Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe et ses deux composantes connexes sont $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

III.3 Connexité et groupe orthogonal

Proposition 55 : [Hassan, p.713 + 714]
Les groupes $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

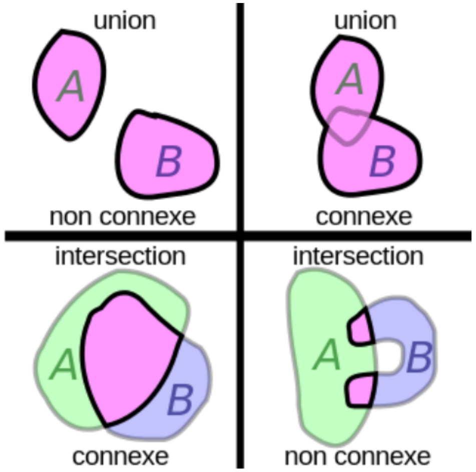
Proposition 56 : [Hassan, p.714]
Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe et ses composantes connexes sont exactement $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$.

Développement 2 : [cf. FRANCINOU]

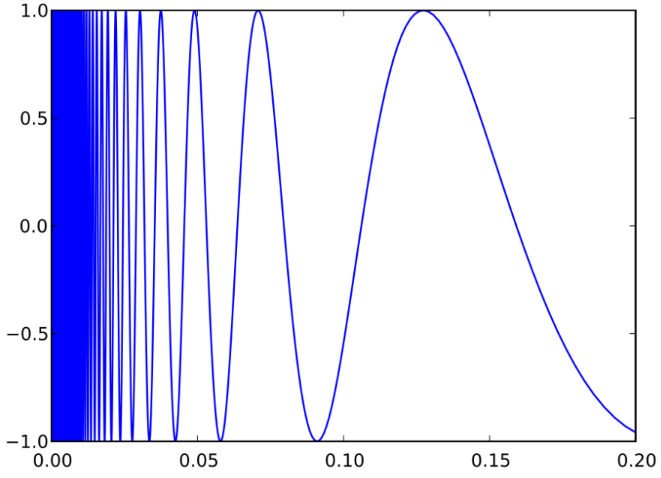
Théorème 57 : [Francinou, p.67]
Le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.

IV Annexe

IV.1 Illustration de la remarque 9



IV.2 Contre-exemple à la proposition 27



Remarques sur la leçon

— Il est également possible de parler de connexité locale ou de simple connexité.

— On peut aussi parler de l'ensemble triadique de Cantor ainsi que de ses propriétés et faire le lien avec d'autres propriétés en rapport avec la connexité comme les espaces totalement discontinus par exemple.

Liste des développements possibles

— Générateurs de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

— Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Bibliographie

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.

— Jean-Pierre Ramis, *Mathématiques, Tout-en-un pour la licence 2*.

— Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*.

— Patrice Tauvel, *Analyse complexe pour la licence 3*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Serge Francinou, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 3*.