Leçon 235 - Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

Extrait du rapport de jury

Le nouvel intitulé de cette leçon de synthèse doit permettre d'aborder explicitement des problèmes variés de permutations de symboles, qu'il s'agisse de limites, d'intégrales, de dérivées, d'espérances ou d'autres opérations.
Les candidates et candidats pourront également inclure dans leur leçon des exemples de permutations de quantificateurs, obtenus par des arguments de compacité ou (pour les candidats aguerris) utilisant le théorème de Baire.
La présentation des thématiques abordées doit être ordonnée rationnellement et illustrée systématiquement d'exemples significatifs.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 235 intitulée "Problèmes d'interversion de symboles en analyse.". Les problèmes d'analyse peuvent être de nature très variée et leur résolution nécessitent parfois de pouvoir effectuer des "opérations" sur des symboles tel que l'interversion par exemple. Ces "opérations" sont des outils très polyvalents et importants en analyse car ils ont un rôle crucial pour résoudre certains problèmes posés. Le but de cette leçon sera de donner des critères qui permettent d'intervertir des symboles donnés.
Dans un premier temps on s'intéresse à l'interversion limite/limite avec tout d'abord l'étude de la notion de convergence uniforme. On rappelle dans un premier temps ce qu'est la convergence uniforme à la fois d'une suite de fonctions, mais également d'une série de fonctions et donne également le critère de Cauchy-uniforme pour monter qu'une suite de fonctions converge uniformément. On rappelle également ce qu'est la convergence absolue et normale et un lien avec la convergence uniforme avant de finir cette première sous-partie par le théorème de la double limite. Dans une deuxième sous-partie on s'intéresse à la notion de continuité avec comme résultat principal le théorème 11 ainsi que des réciproques partielles connues sous le nom de "théorèmes de Dini" qui permettent de montrer dans énormément de cas la convergence uniforme ou que la limite d'une suite de fonctions continues est continue. Dans une dernière sous-partie on parle de dérivabilité dont l'intérêt principal est motivé par le théorème 17 ainsi que le corollaire 20 car ces deux résultats très puissants permettent de montrer la continuité d'une série de fonctions sur un domaine donné.
Dans une deuxième partie, on s'intéresse d'avantage à l'intégrale de Lebesgue avec l'interversion limite/intégrale. Tout d'abord on étudie la convergence sous intégrale. Ces théorèmes ont l'avantage de se passer de la notion de convergence uniforme comme dans le cas de l'intégrale de Riemann et ils sont donc plus simples à mettre en pratique. Les théorèmes de Beppo Levi ainsi que le théorème de convergence dominée sont des exemples qui montrent la puissance de ce genre de résultat puisqu'ils permettent de démontrer respectivement le lemme de Fatou ainsi que l'exemple 26. Dans une deuxième sous-partie, on étudie les intégrales à paramètres et notamment la continuité et la dérivabilité sous le signe intégrale. Ces deux théorèmes permettent par exemple de montrer que la fonction Γ d'Euler est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$. Il est également possible d'aller un peu plus loin avec le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale qui donne que cette même fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan complexe.
Dans une troisième partie on s'intéresse à l'interversion intégrale/intégrale (toujours dans le cas de l'intégrale de Lebesgue). L'intérêt de cette étude est motivé par le calcul d'intégrales sur $\mathbb{R}^n$ qui peut se ramener au calcul d'intégrales successives sur $\mathbb{R}$. C'est ce qu'énoncent les théorèmes de Fubini-Tonnelli et de Fubini. Ces théorèmes permettent de calculer des intégrales comme dans les exemples 37 et 38 par exemple. Ces deux théorèmes ont également un intérêt majeur dans l'étude du produit de convolution comme par exemple pour montrer qu'il est bien défini et appartient à tel ou tel espace en fonction des hypothèses de départ. Un autre intérêt des interversions

intégrale/intégrale réside dans la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ avec la proposition 47 ainsi que le théorème 51.
Enfin dans une dernière partie, on étudie l'interversion de quantificateurs avec tout d'abord la continuité uniforme. On rappelle la définition de la continuité uniforme et on montre qu'elle implique la continuité mais que la réciproque est fausse de manière générale. Cependant, sous une hypothèse de compacité, on obtient la réciproque connue sous le nom de théorème de Heine. On s'intéresse ensuite au lemme de Baire : on commence par rappeler son énoncé avant de donner deux applications et de conclure par le théorème de Banach-Steinhaus ainsi qu'une application. Enfin, on termine cette leçon en abordant la convergence en loi : on commence par rappeler la définition de la convergence en loi ainsi que de la fonction caractéristique avant de parler du théorème de Lévy qui ramène un problème de convergence en loi à un problème de convergence simple ainsi que du théorème central limite qui en est une application.

Plan général

Cours détaillé

I Interversion limite/limite

Dans toute cette partie, on considère X un ensemble non vide quelconque, $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E et enfin $f : X \longrightarrow E$.

I.1 La convergence uniforme

Définition 1 : Convergence uniforme [Deschamps, p.504] :
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément (CVU) vers** f sur X lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall x \in X,\ (n \geq N) \implies (\|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \varepsilon)$$

Exemple 2 : [Deschamps, p.503 + 550]
Prenons $X = [0;1]$, $E = \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (CVS) vers la fonction $\mathbb{1}_{\{1\}}$ sur X.

La convergence de cette suite n'est malheureusement pas uniforme car $\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x\in X} x^n = 1$.

Cependant, si on considère un réel $a \in [0;1[$ et que l'on note $X_a = [0;a]$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in X_a} x^n = a^n$.
En conclusion, la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 est uniforme sur X_a pour tout a, mais pas uniforme sur X.

Définition 3 : Convergence uniforme d'une série de fonctions [Ramis, p.561] :
On dit que la série $\sum f_n$ **CVU** sur X lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur X.

Proposition 4 : [Deschamps, p.505]
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f sur X, alors elle CVS vers f sur X.

Remarque 5 :
La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple 2.

Proposition 6 : Critère de Cauchy-uniforme [Ramis, p.551] :
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } (p, q \geq N) \implies (\forall x \in X,\ \|f_p(x) - f_q(x)\|_E \leq \varepsilon)$$

Définition 7 : Convergence absolue et normale [Deschamps, p.517] :
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$:
$*$ **converge absolument** (CVA) sur X lorsque pour tout $x \in X$, la série $\sum \|f_n(x)\|_E$ est convergente.
$*$ **converge normalement** (CVN) sur X lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite f_n est bornée et la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Exemple 8 : [Deschamps, p.517]
La série $\sum (x(1-x))^n$ CVN sur $[0;1]$.

Théorème 9 : [Deschamps, p.518 + 519]
Si $\sum f_n$ CVN sur X, alors elle CVA et CVU sur X.

Théorème 10 : Théorème de la double limite [Deschamps, p.512] :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite ℓ_n finie en $a \in \overline{I}$, alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la fonction f admet une limite en a et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

I.2 Continuité

Théorème 11 : [Ramis, p.553]
Toute limite uniforme d'applications continues sur X est continue sur X.

Exemple 12 :
Avec la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exemple 2, on remarque que chaque f_n est continue sur $[0;1]$ mais que la limite ne l'est pas. Donc la convergence ne peut être uniforme.

Corollaire 13 : [Deschamps, p.521]
Si la série de fonctions $\sum f_n$ CVU sur X et que chaque f_n est continue, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur X.

Le théorème précédent admet une réciproque partielle sous des hypothèses de monotonie, connue sous le nom de théorèmes de Dini :

Théorème 14 : Premier théorème de Dini [Ramis, p.553] :
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui CVS vers f qui est continue et que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f sur X.

Théorème 15 : Deuxième théorème de Dini [Ramis, p.553] :
Soit $I : [a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ $(a < b)$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions croissantes de I dans $\mathbb{R}$ et qui CVS vers f qui est continue, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f sur I.

Exemple 16 : [Ramis, p.554]
On considère $I = [0;1]$ et la suite de fonctions :

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ \forall x \in I,\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - f_n(x)^2\right) \end{cases}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N},\ f_n(I) \subseteq I$ et $f_n' \geq 0$.
Donc par le deuxième théorème de Dini, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur I.

I.3 Dérivabilité

Dans toute cette sous-partie, on suppose que les f_n sont des fonctions définies sur I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et continues sur I.

Théorème 17 : [Deschamps, p.514]
Supposons que les f_n soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers f et si la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I, alors :
$*$ La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

$*$ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I.

L'hypothèse de convergence uniforme des dérivée est essentielle :

Exemple 18 : [Deschamps, p.514]
On considère pour tout $n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valeur absolue. Cependant, cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Remarque 19 : [Deschamps, p.514]
En appliquant le théorème 17 par récurrence, on en déduit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur I telle que pour tout $k \in [\![0;p-1]\!]$, $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ CVS et la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I, alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et pour tout $k \in [\![0;p]\!]$:

$$\forall x \in I,\ f^{(k)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x)$$

Corollaire 20 : [Deschamps, p.525]
Supposons que les f_n soient de classe $\mathcal{C}^p$ sur I avec $p \in \mathbb{N}^*$.
Si :
* Pour tout $k \in [\![0; p-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(k)}$ CVS sur I.
* La série $\sum f_n^{(p)}$ CVU sur tout segment de I.

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et pour tout $k \in [\![0; p]\!]$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

Exemple 21 : [Deschamps, p.525]
La fonction zêta $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ définie sur $]1; +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1; +\infty[$.

II Interversion limite/intégrale

Dans toute cette partie, on considère $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

II.1 Convergence sous l'intégrale

Théorème 22 : Théorème de Beppo Levi [El Amrani, p.405] :
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de fonctions mesurables positives.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers une fonction f, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

Théorème 23 : Lemme de Fatou [El Amrani, p.407] :
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0; +\infty]$, alors :

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Exemple 24 : [Faraut, p.11]
L'inégalité du lemme de Fatou peut être stricte comme le montre l'exemple suivant :
On considère $X =]0; +\infty[$ et $f_n : x \longmapsto ne^{-nx}$.
On a $\int_X f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ mais pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Théorème 25 : Théorème de convergence dominée [El Amrani, p.408] :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables sur X convergeant simplement vers une fonction f.
S'il existe une fonction g μ-intégrable telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \underset{\mu-p.p.}{\leq} g$, alors f est μ-intégrable et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

Exemple 26 :
Par le théorème de convergence dominée, on a pour $\alpha > 1$:

$$\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha - 1}$$

Corollaire 27 : [El Amrani, p.410]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions intégrables sur X telle que la série $\sum f_n$ converge μ-presque partout, sa somme étant égale μ-presque partout à une fonction f mesurable.
S'il existe une fonction g μ-intégrable telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^k f_n\right| \leq g$, alors la fonction f est μ-intégrable et on a : $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_X f_n \mathrm{d}\mu\right)$.

II.2 Intégrales à paramètres

Dans toute cette sous-partie, on considère I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et une application $f : X \times I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 28 : Théorème de continuité sous le signe $\int$ [El Amrani, p.410] :
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
* Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-intégrable.
* Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
* Il existe une fonction μ-intégrable positive g sur X telle que pour presque tout couple $(x,t) \in X \times I$, $|f(x,t)| \leq g(x)$.

alors la fonction $F : t \longmapsto \int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ est continue sur I.

Théorème 29 : Théorème de dérivation sous le signe $\int$ [El Amrani, p.411] :
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
* Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-mesurable.
* Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable sur I.
* Il existe une fonction μ-intégrable positive g sur X telle que pour presque tout couple $(x,t) \in X \times I$ pour lequel $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$.

alors la fonction $F : t \longmapsto \int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable sur I, de dérivée la fonction $F' : t \longmapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$.

Exemple 30 : [El Amrani, p.411]
La fonction gamma d'Euler donnée par : $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}\mathrm{d}x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma^{(k)}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}(\ln(x))^k\mathrm{d}x$$

Théorème 31 : Formule sommatoire de Poisson [Gourdon, p.284] :
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} x^2|f(x)| < +\infty \text{ et } \sup_{x\in\mathbb{R}} x^2|f'(x)| < +\infty$$

alors on a la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t\right)e^{2i\pi nx}$$

Exemple 32 : [Gourdon, p.284]
La formule sommatoire de Poisson donne une équation fonctionnelle pour la fonction thêta de Jacobi :
Pour tout $x > 0$, la fonction $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n x^2}$ vérifie $\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right)$

Théorème 33 : Théorème d'holomorphie sous le signe $\int$ [El Amrani, p.411] :
Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $g : X \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
* Pour presque tout $z \in \Omega$, la fonction $x \longmapsto g(x,z)$ est intégrable.
* Pour presque tout $x \in X$, la fonction $z \longmapsto g(x,z)$ est holomorphe dans Ω.
* Il existe une fonction intégrable positive g telle que pour presque tout couple $(x,z) \in X \times \Omega$, on a $|g(x,z)| \leq g(x)$.

alors la fonction $G : z \longmapsto \int_X g(x,z)\mathrm{d}x$ est analytique dans Ω, et de plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $G^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n g}{\partial z^n}(x,z)\mathrm{d}\mu(x)$.

Exemple 34 : [El Amrani, p.412]
La fonction Γ donnée, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\mathrm{d}x$ est analytique dans le demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

III Interversion intégrale/intégrale et applications

III.1 Intégrales multiples

Dans toute cette sous-partie, on considère deux espaces mesurés $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ avec ν et μ supposées σ-finies.

Théorème 35 : Théorème de Fubini-Tonelli [El Amrani, p.422] :
Soit $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction mesurable.
Les fonctions partout définies par $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ sont mesurables (pour les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement) et on a :

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

Théorème 36 : Théorème de Fubini [El Amrani, p.422] :
Soit $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure $\mu \otimes \nu$.
* Pour presque-tout $x \in X$, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est ν-intégrable.
* La fonction définie presque-partout par $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ est μ-intégrable.

De plus, on a :

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

Exemple 37 : [El Amrani, p.423]
* À l'aide de ce théorème ainsi que d'un changement de variables, on obtient la formule fondamentale suivante : $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\lambda^{(2)}(x,y) = \pi$.
* Cependant le théorème de Fubini ne s'applique pas à l'intégrale suivante (car la fonction considérée n'est pas intégrable) : $\int_{[0;1]^2} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}\lambda^{(2)}(x,y)$.

Exemple 38 : Intégrale de Fresnel [Gourdon, p.362] :
On a l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x = e^{\frac{i\pi}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

III.2 Convolution

Définition 39 : Produit de convolution [El Amrani, p.75] :
On dit que deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont **convolables** lorsque, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable.
On définit alors le **produit de convolution de** f **et de** g par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 40 : [El Amrani, p.78 + 80 + 81]
Soit $p \in [1; +\infty[$ et q sont exposant conjugué.
$*$ Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
$*$ Pour tous $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
$*$ Pour tous $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, $f * g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
De plus, $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et si $p \neq 1$, alors $f * g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque 41 : [El Amrani, p.78 + 85]
La convolution est commutative, associative et bilinéaire sur $L^1(\mathbb{R})$. Autrement dit, $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p, +, \cdot, *)$ est une algèbre de Banach commutative (elle est cependant sans unité !).

Théorème 42 : [El Amrani, p.90]
Soient $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$.
On a $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout $\ell \in [\![0; k]\!]$, $\frac{\partial^\ell (f*g)}{\partial x^\ell}(x) = \left(\frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell} * g\right)(x)$.

III.3 Application à la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 43 : Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.109] :
On considère $f \in L^1(\mathbb{R})$.
On appelle **transformée de Fourier de** f l'application :

$$\widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Lemme 44 : Lemme de Riemann-Lebesgue [El Amrani, p.109] :
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ existe et on a $\lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Théorème 45 : [El Amrani, p.110]
Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$.

Corollaire 46 : [El Amrani, p.111]
La transformation de Fourier $\mathcal{F} : f \longmapsto \widehat{f}$ est une application linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposition 47 : [El Amrani, p.114]
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Définition 48 : Noyau de Gauss [El Amrani, p.86]
On appelle **noyau de Gauss**, l'application :

$$\varphi_t : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t^2}} \end{array} \right.$$

Développement 1 : [cf. EL AMRANI]

Proposition 49 : [El Amrani, p.112]
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.
On a $\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right) : \xi \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$.

Lemme 50 : Formule de dualité [El Amrani, p.115] :
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)g(v)\mathrm{d}v$$

Théorème 51 : [El Amrani, p.115]
La transformation de Fourier :

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array} \right.$$

est une application injective.

IV Interversion de quantificateurs

IV.1 Continuité uniforme

Dans toute cette sous-partie, on considère (E,d) et (F,d') deux espaces métriques.

Définition 52 : Continuité uniforme [Gourdon, p.12] :
On considère une application $f:(E,d)\longrightarrow(F,d')$.
On dit que f est **uniformément continue** lorsque :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\ \text{tq}\ \forall x,y\in E,\ (d(x,y)\leq\eta)\implies(d'(f(x),f(y))\leq\varepsilon)$$

Remarque 53 :
Toute fonction uniformément continue est donc continue. Cependant la réciproque est fausse comme le montre la fonction $f:]0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Théorème 54 : Théorème de Heine [Gourdon, p.31] :
Soit $f:(E,d)\longrightarrow(F,d')$ une application continue.
Si (E,d) est un espace métrique compact, alors f est uniformément continue.

IV.2 Lemme de Baire

Dans toute cette sous-partie, on considère deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F,\|\cdot\|_F\right)$.

Lemme 55 : Lemme de Baire [Gourdon, p.417] :
Si (E,d) est un espace métrique complet, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

Proposition 56 :
Soient $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ est un espace de Banach et $u:E\longrightarrow E$ un endomorphisme continu.
L'endomorphisme u est nilpotent si, et seulement si,

$$\forall x\in E,\ \exists n\in\mathbb{N}\ \text{tq}\ u^n(x)=0_E$$

Proposition 57 :
Soit $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction holomorphe.
Si pour tout $z\in\mathbb{C}$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z)=0$, alors f est une fonction polynomiale.

Développement 2 : [cf. GOURDON]

Théorème 58 : Théorème de Banach-Steinhaus [Gourdon, p.424] :
Si $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ est un espace de Banach, alors pour toute famille d'applications $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{L}_c(E,F)$ telles que pour tout $x\in E$ on ait l'inégalité $\sup\{\|T(x)\|,\ T\in\mathcal{F}\}<+\infty$ on a $\sup\{|||T|||_{E,F},\ T\in\mathcal{F}\}<+\infty$.
En d'autres termes :

$$\exists C>0\ \text{tq}\ \forall T\in\mathcal{F},\ \forall x\in E,\ \|T(x)\|_F\leq C\|x\|_E$$

Corollaire 59 : [Gourdon, p.425]
Il existe une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ continue et 2π-périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0.

IV.3 Convergence en loi

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X également une variable aléatoire réelle.

Définition 60 : Convergence en loi [Queffélec, p.542] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f\in\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(f(X_n))=\mathbb{E}(f(X))$.

Définition 61 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\Phi_X:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{C}\\ t&\longmapsto&\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)\end{array}\right.$$

Exemple 62 :
* Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\Phi_X:t\longmapsto1-p+pe^{it}$.
* Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\Phi_X:t\longmapsto\frac{\lambda}{\lambda-it}$.
* Si X suit une loi de Poisson de paramètre μ, alors $\Phi_X:t\longmapsto e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}$.

Développement 3 : [cf. QUEFFELEC]

Lemme 63 : [Queffélec, p.542]
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f(X_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right)$.

Théorème 64 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :
On a équivalence entre :
* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
* La suite $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.

Théorème 65 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}_1(0,1)$$

Remarques sur la leçon

— Il s'agit d'une leçon où il faut illustrer vastement ces problèmes d'interversion à travers de nombreuses thématiques différentes, naturellement associées à des exemples différents et à des méthodes adaptées. C'est une leçon d'exemples et de contre-exemples, il faut donc illustrer chaque résultat et en souligner les limites avec des exemples.

— On peut également parler de séries doubles avec le théorème de sommation par paquets ou encore de probabilité avec les résultats classiques concernant l'indépendance de deux variables aléatoires réelles.

Liste des développements possibles

— Injectivité de la transformée de Fourier.

— Théorème de Banach-Steinhaus + application aux séries de Fourier.

— Théorème de Lévy + TCL.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Jean-Pierre Ramis, *Mathématiques, Tout-en-un pour la licence 2*.

— Jacques Faraut, *Calcul intégral*.

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.

— Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.