# I Restitution du cours

1 - Donner la définition de deux variables aléatoires discrètes indépendantes et énoncer le lemme des coalitions.

2 - Donner la définition de la loi conjointe d'un couple et énoncer la formule des probabilités totales.

3 - Donner la définition des lois marginales d'un couple et énoncer la formule de Bayes.

# II Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

2 - Énoncer et démontrer la formule de Bayes.

3 - Énoncer et démontrer la probabilité d'attente infructueuse avec une loi géométrique.

# III Exercices

*Exercice 1 :*
Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple $(X, Y)$ est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}$$

1 - Déterminer les lois de $X$ et de $Y$.
2 - Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique.
3 - Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
4 - Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.

*Exercice 2 :*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi binomiale de paramètres $n$ et $p = \dfrac{1}{2}$.
1 - Rappeler la loi de $X+Y$.
2 - En exprimant $\mathbb{P}(X+Y=n)$ sous la forme d'une somme, déterminer la valeur de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
3 - Deux joueurs tirent chacun $n$ fois une pièce équilibrée. Le gagnant est celui qui obtient le plus *pile*. Déterminer la probabilité $p_n$ qu'il y ait un gagnant.
4 - Trouver la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

*Exercice 3 :*
Soit $T \in \mathbb{N}^*$.
Un élément chimique émet des électrons toutes les $T$ secondes. On pose $N$ la variable aléatoire réelle donnant le nombre d'électrons émis et on suppose que $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Certains des électrons ont une propriété voulue, on dira dans ce cas qu'ils sont *efficaces*. Chaque électron a une probabilité $p \in ]0;1[$ d'être efficace. On note $X$ le nombre d'électrons efficaces et $Y$ celui des électrons qui ne le sont pas.
1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer la loi de $X$ conditionnée par $(N=n)$.
2 - Déterminer la loi du couple $(N, X)$.
3 - Déterminer la loi de $X$.
4 - Montrer que $X$ et $Y$ sont indépendantes.
5 - *Bonus : Calculer* $\mathrm{Cov}(N, X)$.

*Exercice 4 :*
Soient $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $Y$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in ]0;1[$ qui sont indépendantes.
On considère la matrice aléatoire $A = \begin{pmatrix} X & X+Y-1 \\ 0 & Y-1 \end{pmatrix}$.
1 - Calculer la probabilité que $A$ soit inversible.
2 - Déterminer la loi de la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.
3 - Calculer la probabilité que $A$ soit diagonalisable.

*Exercice 5 :*
Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in ]0;1[$ et $q = 1-p$.
On considère $N$ variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p$.
1 - Soient $i \in [\![1;N]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$, puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2 - On considère $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que la variable aléatoire $Y$ définie par $Y = \displaystyle\min_{i\in[\![1;N]\!]} X_i$.
Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$ puis en déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$. Reconnaître la loi de $Y$.

v.hanecart@orange.fr

*Exercice 6 :*

Soient $p \in ]0;1[$ et $X$ une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = (n+1)p^2(1-p)^n$$

1 - Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

On procède à l'expérience suivante : si $X$ prend la valeur $n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à $n$ dans une urne et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors $Y$ le numéro obtenu et $Z = X - Y$.

2 - Déterminer la loi de $Y$.

3 - Déterminer la loi de $Z$ et vérifier que $Z$ et $Y$ sont indépendantes.