

[BER] Berthelin  
[GOU] Gaudon

## LEÇON 22.1

### I. Equations différentielles linéaires - théorie

#### 1) Définitions et propriétés

- def 1 : équation d'ordre  $n$  linéaire
- ex 2 :  $y' = y$  et exp
- unq 3 : l'ordre  $n$  se ramène à l'ordre 1
- def 4 : p.s de Cauchy
- prop 5 : formulation intégrale du p.s de Cauchy
- prop 6 : lemme de Grönwall différentiel
- prop 7 : lemme de Grönwall intégral
- def 8 : locallement Lipschitzienne p.r. var état
- th 13 : Cauchy-Lip local
- th 14 : Cauchy-Lip global
- cor 15 : Cauchy-Lip lin
- con 16 : structure de  $\mathcal{U}_h$  et  $\mathcal{Y}$

#### 2) Résolution théorique

- def 17 : système, matrice fondamentale
- prop 18 : forme des solutions, par Cauchy
- def 19 : résolvante
- prop 20 : résolvante  $\varphi^2$
- prop 21 : formule de Duhamel

#### 3) Résolution dans le cas constant homogène

- def 22 : exp de matrice
- prop 23 :  $t \mapsto e^{At}$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\phi'(t) = Ae^{At}$
- prop 24 : prop de exp
- th 25 : résolution dans le cas constant
- ex 26 :  $\begin{cases} x' = A + 2tA \\ y' = 2x + y \end{cases}$  avec  $\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ex 27 : EOL scalaire d'ordre 1
- unq 28 : par calculer  $\exp(At) \rightarrow$  diagonalisation

### II. Méthodes de résolution

#### 1) Variation des constantes

- principe 29 : application
- ex 30 : ex 2.8

#### 2) Approximation de l'ordre

- principe 31 : explication

#### 3) Recherche de solution développable en série entière

- principe 32 : explication
- ex 33 : permet de vérifier l'équivalence entre les 2 elys de exp

#### 4) Séparation des variables

- ex 34 : résolution de  $(x^2 + t)y'' + (2x + 1)y' + y = 0$
- ex 35 : équations de Bernoulli
- principe 36 : application
- ex 37 : exercice 4.1

### III. Etude qualitative des systèmes autonomes

#### 1) Définitions et propriétés

- def 32 : équation autonome
- def 33 : trajectoire
- def 40 : ensemble de niveau
- ex 41 :  $\begin{cases} x' = y + x - 1 \\ y' = 2x - y \end{cases} \rightarrow$  dessiner en annexe les champs de vecteurs

#### 2) Stationnaire

- prop 43 : solution max par translation
- prop 44 : idem mais plus fort
- def 45 : courbes intégrales

#### 3) Etude du cas $V' = AV, A \in M_2(\mathbb{R})$

- Forme des solutions dans les cas :
  - 46 :  $\lambda \in \mathbb{R}$  distincts
  - 47 :  $\lambda$  double
  - 48 :  $\lambda \in \mathbb{C}$  conjugués
- dessiner en annexe
- choisir des cas

### 3) Localisation des zéros des solutions

- def 43 : zéro simple
- prop 46 : NE d'un zéro simple
- ex 51 : zéro réel
- ex 52 : zéros simples d'une EOL scalaire d'ordre 2
- th 53 : séparation de Sturm
- ex 54 :  $y'' + y = 0$  avec  $y = \cos, \sin$

### 4) Stabilité autour de la fonction $y=0$

- def 55 : stabilité
  - attractivité
  - stabilité asymptotique
- prop 56 : toutes les sol ont le même comportement dans le cas linéaire homogène
- th 57 : stabilité dans le cas linéaire homogène constant
- th 58 : cas semi-linéaire
- th 59 : stabilité par linéarisation