I Questions de cours

1 - Donner les solutions d'une équation du second degré à coefficients complexes et démontrer ce résultat.

2 - Donner les racines n-ième de l'unité ainsi que la valeur de leur somme et démontrer ces résultats.

II Exercices sur les nombres complexes

Exercice 1 :
Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$.
Montrer que $\mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}_m$ si, et seulement si, n divise m.

Exercice 2 :
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z + e^{-z} = 2i$.

Exercice 3 :
Résoudre de deux façons différentes l'équation : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$ et en déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 4 :
Caractériser la similitude directe s dont l'expression complexe est $z \longmapsto \left(-\sqrt{3}+i\right)z+i$.

III Exercices sur les intégrales et primitives

Exercice 5 :
1 - Donner une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.
2 - Donner une primitive de la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ sur $]1;+\infty[$.

Exercice 6 :
Déterminer les primitives sur $]-1;1[$ de la fonction $x \longmapsto \text{Arcsin}(x)$.

Exercice 7 :
Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+x^4}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.
1 - Trouver une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n.
2 - En déduire une expression de I_n.
3 - En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+3}\binom{n}{k} = 2^{2n+2}\frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}$$