I Restitution du cours

1- Donner la définition de la somme de sous-espaces vectoriels et énoncer la formule de Grassmann.

2 - Donner la définition de la somme directe de sous-espaces vectoriels et énoncer la caractérisation de deux sous-espaces vectoriels en somme directe.

3 - Donner la définition d'être semblable à une matrice et énoncer le théorème de conditions nécessaires de similitude.

II Questions de cours

1 - Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

2 - On se donne les deux matrices suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Comparer le rang, le déterminant et la trace de ces deux matrices. Que peut-on en conclure ?

b) Soit $P = (X-1)(X-2)$. Calculer $P(M)$ et $P(N)$. Qu'en déduit-on ?

3 - Montrer que les matrices symétriques et antisymétriques forment des sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

III Exercices

Exercice 1 :

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1 - Résoudre l'équation $AX = -X$.

2 - Montrer que A et T sont semblables.

Exercice 2 :

Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.

1 - Démontrer qu'il existe $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. De même, démontrer qu'il existe $u_2, u_{-4} \in \mathbb{R}^3$ tels que l'on ait $\mathrm{Vect}(u_2) = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Vect}(u_{-4}) = \mathrm{Ker}\,(f + 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

2 - Démontrer que (u_1, u_2, u_{-4}) est une base de $\mathbb{R}^3$.

3 - Conclure.

Exercice 3 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

On pose $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } MA = BM\}$.

1 - Montrer que Ω est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 - À quelle condition, nécessaire et suffisante, Ω contient-il une matrice inversible ?

Exercice 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Montrer que E est la somme directe de plans vectoriels si, et seulement si, sa dimension est paire.

Exercice 5 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f_1, ..., f_n$ des endomorphismes de E.

On suppose que $f_1 + f_2 + ... + f_n = \mathrm{Id}_E$ et :

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!],\ (i \neq j) \implies (f_i \circ f_j = 0)$$

1 - Montrer que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, f_i est une projection vectorielle.

2 - Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(f_i)$.

Exercice 6 :

Soit D la dérivation de $\mathbb{K}[X]$.

1 - Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par D et contenant un polynôme P non nul de degré d. Montrer que $\mathbb{K}_d[X] \subseteq F$.

2 - Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par D.

Indication : Si F est stable par D, on pourra distinguer deux cas, selon que l'ensemble des degrés des polynômes de F est majoré ou non.