I Questions de cours : programme de base

1 - Énoncer et démontrer les identités remarquables et identités de polarisation.

2 - Montrer que toute famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre.

3 - Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore.

4 - Énoncer et démontrer la caractérisation des isométries par la conservation du produit scalaire.

5 - Quelles sont les valeurs propres possibles pour une isométrie ? Démontrer ce résultat ?

6 - Montrer que les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

7 - Énoncer et démontrer la caractérisation spectrale des endomorphismes autoadjoints positifs/définis positifs.

II Questions de cours : programme renforcé

1 - Énoncer et démontrer le théorème du supplémentaire orthogonal.

2 - Énoncer et démontrer le théorème de meilleure approximation d'un vecteur dans un s.e.v. de dimension finie.

3 - Énoncer et démontrer la caractérisation des projections orthogonales.

III Questions de cours : programme ultime

1 - Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2 - Montrer que si u est une isométrie de E et F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est également stable par u.

3 - Donner la zoologie des matrices orthogonales de taille 2 puis démontrer ce résultat.

IV Exercices d'application du cours

Exercice 1 :

Montrer que l'application $\varphi : (P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 t^2 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 :

Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $F^\perp$ lorsque F est la droite vectorielle engendrée par la matrice I_n.

Exercice 3 :

Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ à l'aide d'une matrice orthogonale.

Exercice 4 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1 - Montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique positive.
2 - Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = {}^t AA$.

V Exercices d'approfondissement

Exercice 5 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.
On rappelle que pour tous $A, B \in E$ on a $\langle A; B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$.
1 - On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques réelles.
Montrer que l'on a $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2 - Calculer la distance (au sens du produit scalaire $\langle\cdot;\cdot\rangle$) de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6 :

Soit B l'ensemble des suites bornées.
1 - Montrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de B, alors la série de terme générale $\dfrac{u_n v_n}{2^n}$ est convergente.

Dans toute la suite de l'exercice, on notera $\langle u; v\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$.

2 - Montrer que $(u, v) \longmapsto \langle u; v\rangle$ est un produit scalaire sur B.
3 - Soit F le sous-espace vectoriel de B formé des suites nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que l'orthogonal de F est réduit à la suite nulle.
Indication : On pourra, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, introduire la suite dont tous les termes sont

nuls sauf celui de rang k qui vaut 1.
4 - A-t-on $\left(F^\perp\right)^\perp = F$?
5 - Soient u la suite constante égale à 1 et $G = \mathrm{Vect}(u)$.
A-t-on $(F \cap G)^\perp = \left(\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp\right)^\perp = F^\perp + G^\perp$?

Exercice 7 :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$.
1 - Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A, alors $\lambda = 0$.
2 - En déduire que $A + I_n$ et $A - I_n$ sont inversibles.
3 - Montrer que $M = (A + I_n)(A - I_n)^{-1}$ est orthogonale.

Exercice 8 :
Montrer qu'une matrice A carré d'ordre 2 à coefficients réels vérifiant ${}^tA = A^2$ est orthogonalement semblable à l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Indication : On pourra commencer par trouver les valeurs éventuelles de $\det(A)$ puis une relation entre $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(A^2)$ avant de trouver une équation reliant la trace et le déterminant de A.