I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer les propriétés sur la composition et le lien avec injectivité/surjectivité.

2 - Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E non vide.
Montrer que l'ensemble des classes d'équivalences forme une partition de E.

3 - Montrer que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

II Exercices sur les relations binaires

Exercice 1 :
Pour toutes parties A et B de $\mathbb{R}$, on définit $A \preceq B$ par :

$$A \preceq B \iff (A \cap \mathbb{R}^+ \subseteq B \cap \mathbb{R}^+) \text{ et } (B \cap \mathbb{R}^*_- \subseteq A \cap \mathbb{R}^*_-)$$

1 - Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
2 - Pour toute partie de $\mathbb{R}$, montrer que :

$$\emptyset \preceq B \iff B \subseteq \mathbb{R}^+$$

3 - Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $A \preceq \mathbb{R}$.
4 - Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, montrer que $A \preceq \mathbb{R}_+$.
5 - Existe-t-il un plus petit élément au sens de $\preceq$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

Exercice 2 :
Une relation binaire sur un ensemble non vide E peut-elle être symétrique et antisymétrique, tout en n'étant pas réflexive ?

Exercice 3 :
Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff x^3 - y^3 = 3(x-y).$$

1 - Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2 - Pour $a \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre d'éléments de la classe de a.

III Exercices sur les applications

Exercice 4 :
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
1 - f est-elle injective ? Surjective ?
2 - Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$.
3 - Montrer que la restriction de f à $[-1;1]$ est une bijection de $[-1;1]$ sur lui-même.

Exercice 5 :
Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.
On considère les deux propositions suivantes :
P_1 : Pour toutes parties A et B de E, on a $(A \cap B = \emptyset) \implies (f(A) \cap f(B) = \emptyset)$.
P_2 : f est injective.
1 - Écrire la négation de P_1 et P_2.
2 - Montrer que P_1 et P_2 sont équivalentes.

Exercice 6 :
On considère l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$$

1 - L'application f est-elle injective ? Surjective ?
2 - Déterminer l'image par f de $\mathbb{R}^*$ et de $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Exercice 7 :
1 - Montrer que l'application $\varphi : z \longmapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ définit une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ et préciser φ^{-1}.
2 - Déterminer $\varphi^{-1}(\mathbb{R})$, $\varphi(\mathbb{R})$ et $\varphi(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$.