I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la formule du produit de deux matrices élémentaires.

2 - Montrer que si A et B sont deux matrices diagonales, alors AB est aussi une matrice diagonale.

3 - Montrer que si A est une matrice inversible, alors A^{-1} est aussi inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. Montrer également que si A et B sont deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

II Exercices

Exercice 1 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1 - Montrer que M^2 est une combinaison linéaire de M et I_3.
2 - En déduire que si $(-a^2 - a + 2) \neq 0$, alors M est inversible et préciser M^{-1}.
3 - En discutant selon la valeur de a, résoudre le système $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

Soient $m \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ m^{-1} & 0 & m \\ m^{-2} & m^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

1 - Calculer A^2 et en déduire $(A + I_3)(A - 2I_3)$.
2 - On pose $B = \dfrac{1}{3}(A + I_3)$ et $C = \dfrac{1}{3}(A - 2I_3)$.
Préciser B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3 - En déduire A^n en fonction de B et C pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat est-il encore vrai pour $n = 0$ et $n = -1$?

Exercice 3 :

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 8v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1 - Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire un expression de X_n en fonction de A et de X_0.

2 - On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer P^{-1} puis vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale notée D.
b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
c) Calculer A^n puis X_n. En déduire l'expression générale de u_n et v_n.

Exercice 4 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1 - Calculer A^2 puis montrer qu'on peut l'exprimer en fonction de A et de I_2.
2 - En déduire un polynôme annulateur P de A que l'on donnera explicitement.
3 - En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_2.
4 - Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on déterminera, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n = a_nA + b_nI_2$$

5 - Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants puis donner son expression ainsi que celle de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6 - En déduire l'expression de A^n en fonction de A et de I_2. Vérifiez si cette expression est aussi vraie pour $n = -1$.
7 - Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$. Retrouvez alors l'expression de A^n donnée à la question 6.
8 - **Application :** On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = -1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}$$

Déterminer l'expression générale de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 :

Pour tout réel t, on pose :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de cette forme.

1 - Donner $A(1)$ et montrer que $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.

2 - Soient s et t deux réels.
Démontrez que $A(s)A(t) \in \mathcal{E}$. Déterminer le réel u tel que $A(s)A(t) = A(u)$ et en déduire que $A(s)$ et $A(t)$ commutent.
3 - a) Trouver une matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $QX = 0$ et en déduire que Q n'est pas inversible.
b) Montrer que si $t \neq \dfrac{1}{2}$, alors $A(t) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

v.hanecart@orange.fr

4 - Déterminer les matrices S de $\mathcal{E}$ solutions de $S^2 = A\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.

5 - On pose $J = A(-1)$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J^n = A(t_n)$$

b) Déterminer alors une relation de récurrence entre t_{n+1} et t_n.

c) En déduire J^n en donnant ses coefficients.