v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la formule de Taylor-Young.
Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.

2 - Quel est le cardinal d'une union disjointe ? Démontrer ce résultat.
Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$.

3 - Énoncer et démontrer la proposition sur les applications entre ensembles finis de même cardinal.
Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$.

II Exercices axés sur les développements limités

Exercice 1 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1 - Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
2 - Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et préciser $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3 - La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

1 - Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2 - Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3 - Montrer que f' admet une limite réelle en 0. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3 :
1 - Déterminer le développement limité de la fonction Arctan à l'ordre 4 en 1.
2 - En déduire l'allure de sa courbe représentative au voisinage du point d'abscisse 1.

Exercice 4 :
On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.
1 - Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.
2 - Déterminer un développement asymptotique à trois termes de f.
3 - Le graphe de la fonction f admet-il une asymptote oblique en $+\infty$?

III Exercices sur le dénombrement et les polynômes

Exercice 5 :
Soient $(G, *)$ un groupe et H une partie finie non vide de G stable par $*$.
1 - On fixe x dans H.
Montrer que l'application $f_x : H \longrightarrow H$ définie par $f_x(y) = x * y$ réalise une bijection de H sur H.
2 - En déduire que l'élément neutre e_G appartient à H, puis que H est un sous-groupe de G.

Exercice 6 :
Soient $k \in \mathbb{R}$ et $P = X^3 - X^2 + k$.
1 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que P ait une racine multiple.
2 - Donner le tableau de variations de la fonction polynôme $x \longmapsto P(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que P ait trois racines réelles distinctes.
4 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que P soit scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 :
Que dire d'un polynôme P tel que l'image par P de tout rationnel soit un rationnel ?