Résolution d'une EDO par DSE :

I Le développement

Le but de ce développement est de trouver des solutions d'une équation différentielle par développement en série entière. Cette méthode consiste à résoudre formellement avec une série entière une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux vérifiée par une fonction donnée.

Exemple 1 : [Berthelin, p.147]
Une solution de l'équation différentielle $(E) : (t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0$ est la fonction f définie sur $]-1; 1[$ par $f(t) = \frac{a_0}{1+t}$ (avec $a_0 \in \mathbb{R}$).

Preuve :
On considère l'équation différentielle $(E) : \left(t^2 + t\right) y'' + (3t + 1)y' + y = 0$.
$*$ Structure de l'ensemble des solutions :
Sur les intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$ ou $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}(E) &\iff y'' + \frac{3t+1}{t(t+1)}y' + \frac{1}{t(t+1)}y = 0 \\ &\iff Y' = A(t)Y\end{aligned}$$

avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A : t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t(t+1)} & -\frac{3t+1}{t(t+1)} \end{pmatrix}$.

Or, A est continue sur chacun des intervalles, donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'espace des solutions sur chacun des intervalles est de dimension égale à 2.

$*$ Cherchons des solutions sous forme de série entière :
Soit f une solution de E développable en série entière et de rayon de convergence $R > 0$.
On a alors :

$$\forall t \in]-R; R[,\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

En tant que série entière, f est deux fois dérivable formellement terme à terme et on a :

$$\forall t \in]-R; R[,\ f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

Donc puisque f est solution de (E), on a alors pour tout $t \in]-R; R[$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 3n a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

Soit :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 3n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_1 + 2a_2 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ a_n + (n+1)a_{n+1} + 3n a_n + n(n+1)a_{n+1} + n(n-1)a_n = 0 \end{cases}$$

On obtient après réécriture de l'accolade que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + a_{n+1} = 0$ et par récurrence, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n a_0$.

Ainsi, on a :

$$\forall t \in]-R; R[,\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_0 t^n = \frac{a_0}{1+t} \text{ (ce qui nous donne au passage que } R = 1)$$

Réciproquement, on considère f_0 définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par $f_0(t) = \frac{a_0}{1+t}$.
La fonction f_0 est alors deux fois dérivable sur son domaine de définition et on vérifie que f_0 est solution de (E) sur $]-\infty; -1[$ ou $]-1; +\infty[$.

Finalement, on a $\mathbb{R} f_0 \subseteq \mathcal{S}_{(E)}$ sur $]-\infty; -1[$ ou $]-1; +\infty[$.

$*$ Recherchons une solution indépendante de f_0 :
On considère une fonction z telle que $y = f_0 z$.
On a alors $y' = f_0' z + f_0 z'$ et $y'' = f_0'' z + 2f_0' z' + f_0 z''$ et ainsi :

$$\begin{aligned}(E) &\iff \left(t^2 + t\right)\left(f_0'' z + 2f_0' z' + f_0 z''\right) + (3t+1)\left(f_0' z + f_0 z'\right) + f_0 z = 0 \\ &\iff 2\left(t^2 + t\right) f_0' z' + \left(t^2 + t\right) f_0 z'' + (3t+1) f_0 z' = 0 \text{ (car } f_0 \text{ solution de } (E)) \\ &\iff \frac{-2t}{1+t} z' + t z'' + \frac{3t+1}{1+t} z' = 0 \text{ (en reprenant l'expression de } f_0) \\ &\iff z'' + \frac{1}{t} z' = 0\end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que sur chacun des 3 intervalles précédents on ait $z'(t) = \frac{C_1}{t}$. Ainsi, il existe également $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que $z(t) = C_1 \ln(|t|) + C_2$ sur chacun des 3 intervalles précédents.

Finalement, en posant $g_0 : t \longmapsto \frac{\ln(|t|)}{1+t}$, on trouve que g_0 est une solution de (E) sur chacun des 3 intervalles et on a alors $\mathcal{S}_{(E)} = \mathbb{R}f_0 \oplus \mathbb{R}g_0$.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Pour aller plus loin...

Le développement en série entière au voisinage de 0 est très utilisé lorsque les équations différentielles sont linéaires mais non résolubles de manière directe. On peut alors espérer trouver des solutions mais pas forcément toutes les solutions !

Le cas échéant, on peut alors développer une éventuelle solution sous une autre forme, comme par exemple $\sum t^{n+\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ ou encore $\sum t^n \ln(t)$. On peut ensuite regarder si on peut les prolonger et faire des prolongements par raccordements (ce qui n'est pas le cas ici).

II.2 Recasages

Recasages : 220 - 221 - 228 - 243.

III Bibliographie

— Florent Berthelin, *Équations différentielles*.