v.hanecart@orange.fr

I Restitution du cours

1 - Énoncer la proposition sur le rayon de convergence et la somme du produit de Cauchy de deux séries entières et donner les développements en série entière ainsi que le rayon de convergence des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $x \longmapsto \cos(x)$.

2 - Énoncer le théorème sur le caractère $\mathcal{C}^1$ de la somme d'une série entière et donner les développements en série entière ainsi que le rayon de convergence des fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$.

3 - Énoncer la proposition sur la somme de deux séries entières et donner les développements en série entière ainsi que le rayon de convergence des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $x \longmapsto \sin(x)$.

II Questions de cours

1 - À l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

2 - Calculer le développement en série entière de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ et préciser son domaine de validité.

3 - Donner le développement en série entière de Arctan (en partant de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$) ainsi que son rayon de convergence et le prouver.

III Exercices

Exercice 1 :
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note sous réserve de convergence :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$$

1 - Préciser le rayon de convergence de f puis son domaine de définition $\mathcal{D}$.
2 - Pour $x \in \mathcal{D}$, exprimer $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 2 :
1 - Donner le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ et exprimer sa somme en termes de fonctions usuelles.
2 - En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$ et exprimer sa somme en termes de fonctions usuelles.

Exercice 3 :
On considère la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.
1 - Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R ? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition ?
2 - Sur quel intervalle la fonction f est-elle a priori continue ? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R; R]$.
3 - Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R; R[$. En déduire une expression de f sur $[-R; R]$.
4 - Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Exercice 4 :
On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$ et on cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
1 - Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2 - Calculer explicitement a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
3 - Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 5 :
Soient $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0; R[$.
1 - Montrer que, pour tout entier naturel k, la série de fonctions $\theta \longmapsto \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0; 2\pi]$.
2 - En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-ik\theta} \mathrm{d}\theta.$$

3 - On suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.