 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer les propriétés d'une probabilité.

2 - Énoncer et démontrer le procédé de construction d'une probabilité.

3 - Démontrer que toute matrice d'une application linéaire de rang r entre deux espaces vectoriels de dimension finie respectivement égale à p et n est équivalente à la matrice $J_{r,n,p}$.

II Exercices sur la représentation matricielle des applications linéaires

Exercice 1 :

On considère g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on pose :

$$\begin{cases} u = & e_1 - e_2 + e_3 \\ v = & 2e_1 - e_2 + e_3 \\ w = & 2e_1 - 2e_2 + e_3 \end{cases}$$

1 - Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2 - Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1}.
3 - Déterminer la matrice R de g dans la base $\mathcal{B}$.
4 - Calculer R^4 et en déduire A^4.

Exercice 2 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on pose :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

1 - Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2 - Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$. Que remarque-t-on ?
3 - Préciser $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ puis rappeler quelle relation on a entre M et M'.
4 - En déduire la matrice M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

1 - Déterminer le noyau de f.
2 - Donner une équation cartésienne de l'image de f.
3 - Déterminer les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\text{Ker}(g) = \text{Im}(f),\ \text{Im}(g) = \text{Ker}(f) \text{ et } \text{Tr}(g) = \text{Tr}(f)$$

III Exercices sur les espaces probabilisés finis

Exercice 4 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires et l'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 et sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au n-ième tirage est blanche" et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.
1 - Calculer p_1.
2 - Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3 - En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 5 :

Un feu tricolore est alternativement vert, orange ou rouge. Au début (à l'instant 0), le vert est allumé. Puis à chacun des instants suivants, il change de couleur au hasard (il prend l'une des deux autres couleurs de façon équiprobable).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note α_n (respectivement β_n et γ_n) la probabilité que ce soit le vert (respectivement orange et rouge) qui soit allumé à l'instant n.
1 - Déterminer les valeurs de α_n, β_n et γ_n aux instants $n = 1$ et $n = 2$.
2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer α_{n+1} (respectivement β_{n+1} et γ_{n+1}) en fonction de α_n, β_n et γ_n.
3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer α_{n+1}, β_{n+1} et γ_{n+1} en fonction de n.
4 - Préciser les limites des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.