

I Questions de cours

1 - Démontrer la densité dans \mathbb{R} de \mathbb{D} , \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2 - Démontrer que toute suite réelle convergente est bornée.

3 - Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

Montrer que $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

II Exercices d'arithmétique

Exercice 1 :

1 - Déterminer le PGCD de $15n^2 + 8n + 6$ et $30n^2 + 21n + 13$.

2 - Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.

Exercice 2 :

Résoudre dans \mathbb{Z}^2 les équations suivantes :

$$323x - 391y = 612 \text{ et } 221x + 247y = 15$$

Exercice 3 :

1 - Montrer que l'équation $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solutions dans \mathbb{Q} .

2 - Résoudre le système

$$\begin{cases} x \wedge y = 18 \\ x \vee y = 540 \end{cases}$$

avec $x, y \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 :

Démontrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice 5 :

1 - Déterminer, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.

2 - Quel est le reste de la division euclidienne de 5 par 1357^{2013} ?

III Exercices sur les nombres réels

Exercice 6 :

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

1 - Montrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x + y|}{2} \text{ et } \min(x, y) = \frac{x + y - |x + y|}{2}$$

2 - En déduire une formule pour $\max(x, y, z)$ et $\min(x, y, z)$.

Exercice 7 :

Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0; 1] \cap \mathbb{Q},]0; 1[\cap \mathbb{Q}, \mathbb{N} \text{ et } \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$