I Restitution du cours

1- Donner la définition de la trace d'un endomorphisme en dimension finie et énoncer le théorème du rang.

2 - Donner la définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme et énoncer le théorème d'interpolation de Lagrange.

3 - Donner la définition d'être semblable à une matrice et énoncer le théorème de conditions nécessaires de similitude.

II Questions de cours

1 - Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

2 - Montrer que la relation de similitude est une relation d'équivalence.

3 - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) On suppose que D est inversible et que C et D commutent.
Trouver deux matrices T et T', triangulaires par blocs, telles que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times T = T'$.
b) En déduire que $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC)$.
c) Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose plus que C et D commutent ?

III Exercices

Exercice 1 :
Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
1 - Vérifier que le polynôme $P = (X-1)\left(X - \frac{1}{3}\right)$ annule A.
2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de A et I_3.
3 - Préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$.

Exercice 2 :
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
1 - Montrer que A n'a pas de polynôme annulateur (non nul) de degré inférieur ou égal à 2.
2 - Trouver un polynôme annulateur de A.
3 - Montrer que A est inversible et préciser A^{-1}.

Exercice 3 :
Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1.
Déterminer un polynôme annulateur pour J et en déduire la valeur de J^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.
On pose $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } MA = BM\}$.
1 - Montrer que Ω est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2 - À quelle condition, nécessaire et suffisante, Ω contient-il une matrice inversible ?

Exercice 5 :
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on pose :

$$e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e_3 + e_1,\ e_3' = e_1 + e_2 \text{ et } f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

1 - Montrer que la famille (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ et que (f_1', f_2') en est une de $\mathbb{R}^2$.
2 - Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Exercice 6 :
Prouver qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

Exercice 7 :
Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.
1 - Démontrer qu'il existe $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. De même, démontrer qu'il existe $u_2, u_{-4} \in \mathbb{R}^3$ tels que l'on ait $\mathrm{Vect}(u_2) = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Vect}(u_{-4}) = \mathrm{Ker}\,(f + 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
2 - Démontrer que (u_1, u_2, u_{-4}) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3 - Conclure.