v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 31 banque CCINP :
a) Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4(x)$.
b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3(x)$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

2 - Exercice 42 banque CCINP :
On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0; +\infty[$?

3 - Exercice 75 banque CCINP :
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
a) Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
b) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
c) En déduire la résolution du système différentiel

$$\begin{cases} x' = & -x - 4y \\ y' = & x + 3y \end{cases}$$

II Exercices

Exercice 1 :
On cherche les fonctions $x : t \longmapsto x(t)$ solutions de l'équation différentielle :

$$4tx'' + 2x' - x = 0 \quad (*)$$

1 - Vérifier que $s : t \longmapsto \operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right)$ est solution sur $]0; +\infty[$ de $(*)$.
2 - Déterminer les éventuelles solutions de $(*)$ qui sont développables en série entière au voisinage de 0.
3 - En déduire les solutions sur $]0; +\infty[$ de $(*)$.

Exercice 2 :
En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} \mathrm{d}t.$$

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3 :
On considère l'équation différentielle :

$$(t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0 \quad (E)$$

1 - Déterminer la dimension de l'ensemble des solutions.
2 - Chercher des solutions sous forme de série entière et donner la dimension de cet espace.
On considère la fonction f_0 définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par $f_0(t) = \dfrac{a_0}{1+t}$.
3 - On considère une fonction z et on pose $y = f_0 z$.
Montrer que z vérifie une équation différentielle d'ordre 2 et en déduire une expression.
4 - En déduire la structure de l'ensemble des solutions de E.

Exercice 4 :
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
On s'intéresse au système différentielle $(\mathcal{S}) : X' = AX$.
1 - Montrer que $A - I_3$ est nilpotente.
2 - Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$.
3 - Résoudre $(\mathcal{S})$ avec la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 :
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note sous réserve de convergence :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

1 - Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2 - Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f''(x) + f'(x) + f(x)$.
3 - En déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.