I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la caractérisation de l'injectivité et la surjectivité par l'image d'une base.

2 - Énoncer et démontrer les propriétés d'un projecteur ainsi que la caractérisation algébrique.

3 - Énoncer et démontrer les propriétés d'une symétrie ainsi que la caractérisation algébrique.

II Exercices

Exercice 1 :
Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $u(P) = (P(1), P(-1))$.
1 - Vérifier que u est une application linéaire.
2 - Donner une base du noyau de u.
3 - Préciser l'image de u.

Exercice 2 :
Soient n un entier supérieur ou égal à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $P \in E$, on note $f(P)$ le polynôme $(X^2+1)P'' - 2XP'$.
1 - Préciser $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$ et $f(X^3)$.
2 - Montrer que f est un endomorphisme de E.
3 - Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathbb{R}_3[X]$ puis donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4 - Donner une base de l'image de f.

Exercice 3 :
On note $E = \mathbb{R}_4[X]$ et pour $P \in E$, on note $\Psi(P)$ le polynôme $\dfrac{1}{2}(P + P(2-X))$ (où conformément à l'usage $P(2-X)$ désigne $P \circ (2-X)$ par abus de notation).
1 - Vérifier que $\Psi(X+1) = 2$.
2 - Vérifier que Ψ est un projecteur de E.
3 - Montrer que $\left(1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4\right)$ est une base de E et préciser l'image par Ψ des vecteurs de cette base.
4 - En déduire une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$ et une base de $\mathrm{Ker}(\Psi)$.

Exercice 4 :
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $K_n = \mathrm{Ker}(u^n)$ et $L_n = \mathrm{Im}(u^n)$.
1 - Soit $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que $K_n \subseteq K_{n+1}$ et montrer que si $K_n = K_{n+1}$, alors $K_{n+1} = K_{n+2}$.
2 - Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n = K_{n+1}$.
Indication : Utiliser la suite $(\dim_{\mathbb{K}}(K_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
3 - Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_{n_0} = K_{n_0+1}$.
Montrer que $L_{n_0} = L_{n_0+1}$ puis que $L_{n_0} \cap K_{n_0} = \{0_E\}$ et enfin que ces sous-espaces sont supplémentaires dans E.

Exercice 5 :
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ non nul vérifiant $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
Déterminer les dimensions du noyau et de l'image de f.

Exercice 6 :
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de même image.
1 - Montrer que $q \circ p = p$ et $p \circ q = q$.
2 - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f = \lambda p + (1-\lambda)q$.
Montrer que f est un projecteur. Quelle est son image ?