

Leçon 181 - Convexité dans \mathbb{R}^n . Applications en algèbre et en géométrie.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, la notion de convexité doit être abordée d'un point de vue géométrique : les barycentres sont incontournables, et on peut à ce titre parler de coordonnées barycentriques. Les exemples géométriques sont importants et on espère que les notions introduites soient illustrées par des figures. Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan ; le théorème de Gauss-Lucas trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes. L'étude de certains ensembles convexes de matrices et de leurs propriétés rentre tout à fait dans le cadre de la leçon : on peut penser au cône des matrices symétriques (définies) positives, sur lequel le déterminant est log-convexe. Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de Farkas, le théorème de séparation de Hahn-Banach, les théorèmes de Helly et de Caratheodory, ou parler des sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 181 intitulée : "Convexité dans \mathbb{R}^n . Applications en algèbre et en géométrie.". L'objectif de cette leçon sera de dégager les principales notions et propriétés de la convexité et d'en donner quelques applications.

Dans une première partie on introduit la notion de barycentre d'un ensemble de points : on introduit cette notion en premier lieu car on verra qu'un ensemble convexe est un ensemble stable par barycentrisation. On commence par énoncer quelques généralités sur les barycentres : on parle ainsi de points pondérés et l'on définit ensuite le barycentre de deux manières différentes et on montre également l'associativité du barycentre. On termine cette première sous-partie en donnant des exemples de barycentres particuliers et on étudie le comportement de barycentres vis-à-vis des applications affines et des sous-espaces affines. Dans une deuxième sous-partie on introduit la notion de matrice circulante et on donne un exemple de convergence d'une suite de polygones un l'isobarycentre. Enfin dans une dernière sous-partie on s'intéresse à la notion de coordonnées barycentrique qui a l'avantage par rapport aux coordonnées cartésiennes de ne privilégier aucun point en particulier. On commence alors par introduire la notion de famille affinement libre, liée et génératrice avant de parler de repère affine et de faire le lien avec les bases des espaces vectoriels.

On s'intéresse ensuite dans une deuxième partie à la notion de convexité. On commence par parler dans une première partie de partie convexe en donnant la définition d'un segment puis de partie convexe et étoilée. On donne ensuite quelques exemples de convexes ainsi que des propriétés fondamentales notamment au niveau de l'intersection, de la somme ou par image (réciproque) d'applications affines. Puisque tous les ensembles ne sont pas convexes, on peut les plonger dans un ensemble qui lui l'est et est minimal pour cette propriété : l'enveloppe convexe. On donne donc la définition de l'enveloppe convexe ainsi qu'une propriété et des exemples dans des cas particuliers. On parle rapidement dans une deuxième sous-partie du lien qui existe avec les fonctions convexes : on rappelle la définition d'une fonction convexe et concave et on donne ensuite ce lien en question grâce à l'épigraphe. Dans une troisième sous-partie on introduit la notion de point extrémal qui nous sera très utile pour la dernière sous-partie. On donne donc le lemme 36 ainsi que la définition d'un point extrémal et la proposition 38 qui sera utilisée pour déterminer des groupes d'isométries préservant des polyèdre réguliers convexes de l'espace. Finalement, on termine cette leçon avec une dernière sous-partie consacrée à ces fameux polyèdres. L'objectif ici est de déterminer l'ensemble des isométries de l'espace laissant globalement invariants un polyèdre donnée. On montre tout d'abord que l'on peut se restreindre aux isométries préservant globalement les sommets avant de montrer qu'il n'y a que 5 solides de Platon et de donner le groupe des isométries dans chaque cas.

Finalement, on trouvera en annexe l'illustration de la convergence d'une suite de polygones une illustration de la convexité, les 5 solides de Platon et enfin une correspondance entre différents groupes symétriques et différents groupes d'isométries.

Plan général

I - Barycentre d'un ensemble de points et coordonnées barycentriques

- 1 - Généralités sur les barycentres
- 2 - Application aux suites de polygones
- 3 - Coordonnées barycentriques

II - Convexité

- 1 - Partie convexe et enveloppe convexe
- 2 - Lien avec les fonctions convexes
- 3 - Points extrémaux
- 4 - Application aux polyèdres réguliers convexes de l'espace

III - Annexe

- 1 - Suite de polygones
- 2 - Illustration de la convexité
- 3 - Les 5 solides de Platon
- 4 - Correspondances entre isométries et éléments du groupe symétrique

Cours détaillé

I Barycentre d'un ensemble de points et coordonnées barycentriques

Dans toute cette partie, on considère E un espace vectoriel réel de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{E} un espace affine réel sur E et d'origine notée O .

I.1 Généralités sur les barycentres

Définition 1 : Point pondéré [Combes, p.133] :

On appelle **point pondéré** tout couple $(A, \lambda) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}$.

Proposition 2 : [Combes, p.133]

Soient $(A_1, \lambda_1), \dots, (A_m, \lambda_m)$ des points pondérés tels que $\sum_{k=1}^m \lambda_k \neq 0$.

Il existe un unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{k=1}^m \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$. Le point G est alors appelé **barycentre des** (A_k, λ_k) et on note $G = \text{Bar}((A_k, \lambda_k)_{k \in \llbracket 1; m \rrbracket})$.

Remarque 3 : [Combes, p.133]

* La condition de la proposition précédente est équivalente à la condition $(\sum_{k=1}^m \lambda_k) \overrightarrow{OG} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \overrightarrow{OA_k}$.

* Le point G ne dépend pas de l'origine O car O n'intervient pas dans la première condition.

* Lorsque les λ_k sont tous égaux G est appelé **isobarycentre des points** A_1, \dots, A_m .

* Le barycentre des (A_k, λ_k) est inchangé si l'on multiplie tous les λ_k par un réel non nul. On peut donc supposer si on le souhaite, que $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$.

Proposition 4 : [Combes, p.134]

Soient $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille finie de points pondérés de \mathcal{E} telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ et $(I_p)_{p \in \llbracket 1; s \rrbracket}$ une partition de I .

Si les $\mu_p = \sum_{i \in I_p} \lambda_i$ sont non nuls, alors en notant $G_p = \text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in I_p})$ on a que le barycentre de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ est celui de la famille $(G_p, \mu_p)_{p \in \llbracket 1; s \rrbracket}$.

Exemple 5 : [Combes, p.134]

On considère $A, B \in \mathcal{E}$ deux points distincts.

* La droite affine (AB) est définie par $\{\lambda A + (1 - \lambda)B, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

* Pour $\lambda \in [0; 1]$, l'ensemble de ces barycentres est appelé **segment** $[AB]$ et l'isobarycentre pour $\lambda = 0, 5$ est appelé **milieu de** $[AB]$.

* L'isobarycentre G de trois points distincts de \mathcal{E} est appelé **centre de gravité du triangle**.

Proposition 6 : [Combes, p.135]

Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux espaces affines sur \mathbb{R} de dimension finie.

Pour qu'une application $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ soit une application affine, il faut et il suffit que pour toute famille finie $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ de points pondérés de \mathcal{F} telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, on ait $f(\text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in I})) = \text{Bar}((f(A_i), \lambda_i)_{i \in I})$.

Proposition 7 : [Combes, p.135]

Soit \mathcal{F} une partie non vide de \mathcal{E} .

Pour que \mathcal{F} soit un sous-espace affine de \mathcal{E} , il faut et il suffit que tout barycentre de points de \mathcal{F} soit un élément de \mathcal{F} .

Corollaire 8 : [Combes, p.135]

Soit X une partie non vide de \mathcal{E} .

Le sous-espace affine \mathcal{F} de \mathcal{E} engendré par X est l'ensemble des barycentres des familles finies de points pondérés de X .

I.2 Application aux suites de polygones

Définition 9 : Matrice circulante [Gourdon, p.190] :

On appelle **matrice circulante** toute matrice carrée telle que l'on passe d'une ligne à la suivante par décalage à droite des coefficients de façon circulaire. Une matrice circulante C de taille n s'écrit donc :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont des nombres complexes.

Développement 1 : [cf. GOURDON + CALDERO]

Proposition 10 : [Gourdon, p.153]

Si l'on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\det(C) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$.

Proposition 11 : [Caldero, p.45]

Soient P un polygone du plan complexe dont les sommets sont notés z_1, \dots, z_n et $a, b \in]0; 1[$ tels que $a + b = 1$.

Si l'on définit par récurrence la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = \mathcal{B}_{a,b}(P)$ le polygone $(z'_i)_{i \in [1;n]}$ avec $z'_i = az_i + bz_{i+1}$, alors la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P .

I.3 Coordonnées barycentriques

Définition 12 : Famille affinement libre [Combes, p.137] :

On dit que $X = \{A_1, \dots, A_m\}$ est une **famille affinement libre** lorsque pour tout point M du sous-espace affine engendré par X , il existe un unique système $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ de scalaires tels que $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$ et $M = \text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in [1;m]})$.

Remarque 13 : [Combes, p.137]

Lorsqu'une famille n'est pas affinement libre, on dit qu'elle est **affinement liée**.

Définition 14 : Famille affinement génératrice [Combes, p.137] :

On dit que $X = \{A_1, \dots, A_m\}$ est une **famille affinement génératrice** lorsque le sous-espace affine de \mathcal{E} engendré par X est égal à \mathcal{E} .

Définition 15 : Repère affine [Combes, p.137] :

On dit que $(A_0, \dots, A_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ forme un **repère affine** de \mathcal{E} lorsque pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe d'uniques $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, appelés **coordonnées barycentriques** de M dans (A_0, \dots, A_n) tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k = 1$ et $M = \text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in [0;n]})$.

Proposition 16 : [Combes, p.137]

$(A_0, \dots, A_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ forme un repère affine de \mathcal{E} si, et seulement si, $(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})$ forme une base de l'espace vectoriel E .

Proposition 17 : [Combes, p.141]

Soit (A_0, \dots, A_n) un repère affine de \mathcal{E} .

Des points $P_0, \dots, P_n \in \mathcal{E}$ sont affinement liés si, et seulement si, le déterminant de leurs coordonnées barycentriques est nul.

II Convexité

II.1 Partie convexe et enveloppe convexe

Dans toute cette sous-partie, on considère E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

Définition 18 : Segment [Hassan, p.313] :

On considère $x, y \in E$.

On appelle **segment** de E d'extrémités les points x et y l'ensemble défini par $[x; y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0; 1]\}$.

Définition 19 : Partie convexe [Hassan, p.314] :

On dit qu'une partie A de E est une **partie convexe** lorsque pour tous $x, y \in E$ le segment $[x; y]$ appartient à A .

Définition 20 : Parte étoilée [Hassan, p.314] :

On dit qu'une partie A de E est une **partie étoilée** lorsqu'il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$ le segment $[a; x]$ appartient à A .

Remarque 21 : [Hassan, p.314]

Dans un espace vectoriel normé, on a :

$$A \text{ convexe} \implies A \text{ étoilé} \implies A \text{ connexe par arcs}$$

Cependant, la réciproque est fausse en général.

Remarque 22 :

Une illustration de la convexité est donnée en annexe.

Exemple 23 : [Hassan, p.314]

Les sous-ensembles convexes de l'espace vectoriel \mathbb{R} sont exactement les intervalles.

Proposition 24 : [Hassan, p.314]

Soient A et B des sous-ensembles convexes de E .

- * Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λA et $A + B$ sont des ensembles convexes.
- * Une intersection de sous-ensembles convexes de E est convexe.

Proposition 25 : [Combes, p.142]

Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux espaces affines réels.

- * L'image de toute partie convexe de \mathcal{F} par une application affine $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ est une partie convexe de \mathcal{F}' .
- * L'image réciproque de toute partie convexe de \mathcal{F}' par une application affine $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ est une partie convexe de \mathcal{F} .

Proposition 26 : [Hassan, p.315]

Si E est muni d'une structure d'espace vectoriel normé, alors pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, les boules $\mathcal{B}(a, r)$ sont convexes.

Proposition 27 : [Hassan, p.316]

Soit A un sous-ensemble convexe de E .

Si E est muni d'une structure d'espace vectoriel normé, alors :

- * \hat{A} et \bar{A} sont des sous-ensembles convexes de E .
- * Si $\hat{A} \neq \emptyset$, alors $\bar{A} = \hat{A}$ et $\hat{A} = \bar{A}$.

Définition 28 : Enveloppe convexe [Combes, p.143] :

On considère A un sous-ensemble de E .

On appelle **enveloppe convexe** de A l'intersection de tous les convexes de E contenant A et on la note $\text{Conv}(A)$.

Proposition 29 : [Combes, p.143]

Soit A un sous-ensemble de E .

$\text{Conv}(A)$ est le plus petit convexe de E contenant A .

Exemple 30 : [Combes, p.143]

- * Si $Y = \{x\}$, alors $\text{Conv}(Y) = Y$.
- * Y est une partie convexe si, et seulement si, $Y = \text{Conv}(Y)$.
- * Si $Y = \{x; y\}$, alors $\text{Conv}(Y)$ est le segment $[x; y]$.
- * Si $Y = \{x, y, z\}$, alors $\text{Conv}(Y)$ est le triangle plein dont les sommets sont x, y et z .

II.2 Lien avec les fonctions convexes

Dans toute cette sous-partie, on considère $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, C une partie convexe de E et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Définition 31 : Fonction (strictement) convexe [Deschamps, p.158] :

f est dite **(strictement) convexe** sur C lorsque pour tout $(x, y) \in C$ et tout $\lambda \in [0; 1]$ on a $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq (<) \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Définition 32 : Fonction (strictement) concave [Deschamps, p.158] :

f est dite **(strictement) concave** sur C lorsque la fonction $-f$ est (strictement) convexe sur C .

Exemple 33 : [Deschamps, p.159]

- * Toute fonction affine est convexe sur \mathbb{R} .
- * La fonction valeur absolue est convexe sur \mathbb{R} .

Définition 34 : Épigraphe [Deschamps, p.160] :

On appelle **épigraphe** de f l'ensemble $\{(x, y) \in E^2 \text{ tq } x \in C \text{ et } f(x) \leq y\}$ et on le note $\mathcal{E}(f)$.

Dans toute la suite de cette sous-partie, on suppose que I est un intervalle de \mathbb{R} et on considère une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 35 : [Deschamps, p.160]

f est convexe sur I si, et seulement si, son épigraphe l'est aussi.

II.3 Points extrémaux

Dans toute cette sous-partie, on fixe un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3.

Lemme 36 : [Combes, p.143]

Soient C une partie convexe de \mathcal{E} et $P \in C$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- * $(\forall M, N \in C, P = \text{Bar}((M, 0, 5), (N, 0, 5))) \implies (M = P = N)$.
- * $(\forall M, N \in C, \forall \lambda \in]0; 1[, P = \text{Bar}((M, \lambda), (N, 1 - \lambda))) \implies (M = P = N)$.
- * Le complémentaire de $\{P\}$ dans C est convexe.

Définition 37 : Point extrémal [Combes, p.144] :

Un point P du lemme précédent (qui ne peut être barycentre de deux points distincts de C) est appelé **point extrémal** de C .

Proposition 38 : [Combes, p.145]

Soit X une partie convexe de \mathcal{E} .

- * Si $x \in X$ est un point extrémal de X et $f \in \text{Isom}(X)$, alors $f(x)$ est un point extrémal de X .
- * Les points extrémaux d'un polyèdre convexe fermé de \mathcal{E} sont ses sommets.

II.4 Application aux polyèdres réguliers convexes de l'espace

Dans toute cette sous-partie, on fixe un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3.

Proposition 39 :

Soit \mathcal{P} un polyèdre convexe de \mathcal{E} .

Si l'on note \mathcal{P}_s l'ensemble des sommets de \mathcal{P} , alors on a $\text{Isom}(\mathcal{P}) = \text{Isom}(\mathcal{P}_s)$ et $\text{Isom}^+(\mathcal{P}) = \text{Isom}^+(\mathcal{P}_s)$.

Remarque 40 :

- * Plus généralement, une isométrie d'un polyèdre convexe non aplati de l'espace préserve les sommets, les arêtes et les faces du polyèdre.
- * Si \mathcal{P} est un polyèdre convexe non aplati de l'espace, on en déduit qu'il existe un morphisme de groupes injectif $\lambda : \text{Isom}(\mathcal{P}) \longrightarrow \text{Bij}(X)$, avec X l'ensemble des sommets de \mathcal{P} .

Théorème 41 : [Combes, p.147]

L'ensemble des polyèdres réguliers de \mathcal{E} sont à similitude près le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier.

Développement 2 : [cf. COMBES]

Théorème 42 : [Combes, p.175]

On a $\text{Isom}^+(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Isom}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque 43 :

On donne en annexe 4 une correspondance entre les éléments de \mathfrak{S}_4 et de $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$.

Théorème 44 : [Caldero, p.222 + 227]

- * On a $\text{Isom}^+(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{A}_4$ et $\text{Isom}(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{S}_4$.
- * On a $\text{Isom}^+(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Isom}(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- * On a $\text{Isom}^+(\mathcal{D}) \cong \text{Isom}^+(\mathcal{I}) \cong \mathfrak{A}_5$ et $\text{Isom}(\mathcal{D}) \cong \text{Isom}(\mathcal{I}) \cong \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Théorème 45 : [Combes, p.171]

Les sous-groupes finis de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ sont exactement à isomorphismes près :

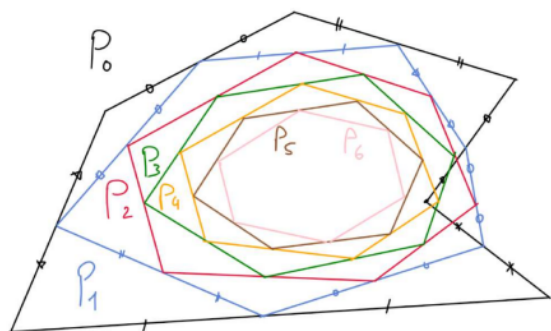
- * Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- * Le groupe diédral D_{2n} .
- * Les groupes \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 et \mathfrak{A}_5 .

Remarque 46 :

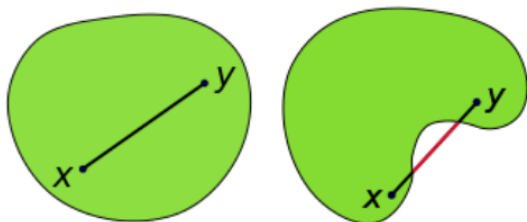
- * Ce théorème s'applique aussi aux sous-groupes finis de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ car on peut le considérer comme un sous-groupe de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$.
- * Chacun des groupes ci-dessus est le groupe des déplacements d'un polyèdre de l'espace affine euclidien \mathcal{E} (respectivement le groupe des déplacements d'un polygone régulier à n côtés, le groupe des déplacements d'un "épaississement" d'un polygone régulier à n côtés et enfin le groupe des déplacements d'un tétraèdre régulier, d'un cube et d'un dodécaèdre régulier).

III Annexe

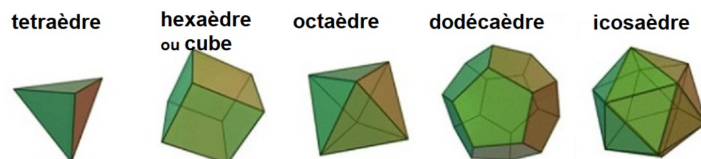
III.1 Suite de polygones



III.2 Illustration de la convexité



III.3 Les 5 solides de Platon



III.4 Correspondances entre isométries et éléments du groupe symétrique

Correspondance entre les éléments de \mathfrak{S}_4 et $\text{Isom}(\mathcal{T})$:

\mathfrak{S}_4	$\text{Isom}(\mathcal{T})$	Cardinal
$\text{Id}_{[1;n]}$	Identité	1
(1 2)	Réflexion par rapport au plan médiateur d'une arête	6
(1 2 3)	Rotation d'axe une hauteur du tétraèdre et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$	8
(1 2 3 4)	Anti-rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$	6
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	3

Correspondance entre les éléments de \mathfrak{S}_4 et $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$:

\mathfrak{S}_4	$\text{Isom}^+(\mathcal{C})$	Cardinal
$\text{Id}_{[1;n]}$	Identité	1
(1 2)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	6
(1 2 3)	Rotation d'axe une grande diagonale et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$	8
(1 2 3 4)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$	6
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm \pi$	3

Correspondance entre les éléments de \mathfrak{S}_4 et $\text{Isom}^+(\mathcal{O})$:

\mathfrak{S}_4	$\text{Isom}^+(\mathcal{O})$	Cardinal
$\text{Id}_{[1;n]}$	Identité	1
(1 2)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	6
(1 2 3)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$	8
(1 2 3 4)	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$	6
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm \pi$	3

Remarques sur le plan

- On peut également s'intéresser à la séparation des convexes avec le théorème de Hahn-Banach.
- Il faut savoir passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées barycentriques et réciproquement.

Liste des développements possibles

- Matrices circulantes.
- Groupe des isométries du cube.

Bibliographie

- François Combes, *Algèbre et géométrie*.
- Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.
- Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algèbre*.
- Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.
- Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.
- Philippe Caldero, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 2*.