I Questions de cours : programme de base

1 - Donner l'espérance de X lorsque X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ puis démontrer ce résultat.

2 - Donner l'espérance de X lorsque X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ puis démontrer ce résultat en utilisant la somme des $\mathbb{P}(X > n)$.

3 - Donner la covariance de deux variables aléatoires indépendantes et démontrer ce résultat.

4 - Donner la variance d'une somme de n variables aléatoires dans le cas général puis dans le cas de variables aléatoires indépendantes puis démontrer ce résultat.

5 - Donner la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ et en déduire son espérance et sa variance.

6 - Donner la fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes puis démontrer ce résultat.

7 - Donner l'espérance et la variance de la moyenne $\overline{X_n}$ de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

II Questions de cours : programme renforcé

1 - Montrer que toute variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 est d'espérance finie.

2 - Énoncer et démontrer les propriétés générales de la variance (positivité, formule de König-Huygens et expression de $\text{Var}(aX + b)$).

3 - Démontrer que la covariance est une forme bilinéaire symétrique et positive.

4 - Donner la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et en déduire son espérance et sa variance.

5 - Énoncer et démontrer la loi faible des grands nombres.

III Questions de cours : programme ultime

1 - Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.

2 - Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

IV Exercices d'application du cours

Exercice 1 :
Calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ lorsque X suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 0; n-1 \rrbracket)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Exercice 2 :
Calculer la fonction génératrice d'une variable X dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \{0;1;4;5\},\ \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(X=4) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(X=5) = \frac{1}{6}$$

Exercice 3 :
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.
Retrouver l'espérance et la variance de X via sa fonction génératrice.

V Exercices d'approfondissement

Exercice 4 :
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $p \in]0;1[$.
On considère $X : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = p^2 k (1-p)^{k-1}$$

1 - Montrer que X suit une loi de probabilité.
2 - Montrer l'existence et calculer l'espérance de $X - 1$.
3 - Montrer l'existence et calculer l'espérance de $(X-1)(X-2)$.
4 - En déduire l'existence de l'espérance et de la variance de X.

Exercice 5 :
Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0;1[$ et $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.
1 - Soient $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$, puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2 - On considère $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{i \in \llbracket 1;N \rrbracket} X_i$.
Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$ puis en déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$.
3 - Reconnaître la loi de Y et en déduire que $\mathbb{E}(Y)$ existe et donner sa valeur.

 v.hanecart@orange.fr

Exercice 6 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}$$

1 - Déterminer les lois de X et de Y.
2 - Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance ainsi que la variance de X.
3 - Déterminer l'espérance et la variance de Y.
4 - Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5 - Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.