I Questions de cours

1 - Énoncer puis démontrer l'approximation de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment par celle d'une fonction en escalier ainsi que la linéarité de l'intégrale pour des fonctions continues par morceaux.

2 - Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

3 - Énoncer et démontrer la convergence des sommes de Riemann.

II Exercices

Exercice 1 :

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad f_n(x) = e^{-x} S_n(x)$$

1 - Pour $n \geq 1$, calculer $f_n'(x)$ en fonction de x puis vérifier que l'on a :

$$f_n''(x) = e^{-x} \frac{x^{n-1}}{n!}(x-n)$$

2 - À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 appliquée à f_n, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(n) - f_{n-1}(n-1) = -\int_{n-1}^{n} (n-t)e^{-t}\frac{t^n}{n!}\mathrm{d}t$$

3 - Montrer que la suite $(f_n(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à $\left[0; \frac{2}{e}\right]$.

Exercice 2 :

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t$.

1 - Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2 - Pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, calculer $F(x)$ en posant $t = \mathrm{Arctan}(u)$.

3 - Déterminer les valeurs de $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $F(\pi)$.

Exercice 3 :

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x,\ J = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x \text{ et } K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$$

1 - Donner des valeurs exactes de J et de K.

2 - Représenter sur un même dessin les courbes représentatives des fonctions suivantes sur $[0;1]$:

$$x \mapsto x,\ x \mapsto \sqrt{x},\ x \mapsto x + \frac{1}{4},\ \text{et } x \mapsto \frac{1}{2}(x+1)$$

3 - Proposer un encadrement de I.

Exercice 4 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

2 - À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$nu_n = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{2n}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

3 - Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n$ et en déduire un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 5 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}\mathrm{d}t$.

1 - Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2 - Calculer $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ en fonction de n.

3 - Montrer que pour $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n+1} \leq 3I_n \leq \dfrac{1}{n-1}$.

4 - En déduire la limite de nI_n quand n tend vers ∞ et en déduire un équivalent de I_n quand n tend vers l'infini.

 v.hanecart@orange.fr

Exercice 6 :

Pour $x \in]0;1[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ et $F(1) = \ln(2)$.
1 - Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$.
Pour $x \in]0;1[$, préciser le signe de $F'(x)$ et celui de $F(x)$.
2 - Montrer que :

$$\forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right[,\ 0 \leq \frac{t-1}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{t}$$

En déduire que $\lim_{x\to 1^-} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t = 0$.
3 - Calculer pour $x \in]0;1[$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t$.
4 - Montrer que F est continue en 1.
5 - La fonction F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$?