Leçon 150 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Extrait du rapport de jury

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbb{K}[u]$, en particulier connaître la dimension, et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $\mathbb{K}[u]$. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.
Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques.
On attend que la candidate ou le candidat soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal).
L'aspect applications est trop souvent négligé. Il est par exemple possible d'envisager des applications au calcul de A^k à l'aide d'un polynôme annulateur, aux calculs d'exponentielles de matrices ou de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques.
Pour aller plus loin, la candidate ou le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

Présentation de la leçon

L'idée fondamentale de la réduction des endomorphismes est la recherche de sous-espaces stables sur lesquels l'endomorphisme est plus simple. Les sous-espaces u-stables engendrés font naturellement intervenir les itérés et donc les polynômes en l'endomorphisme. Puis le lemme des noyaux justifie la fécondité de ce choix.
Dans un premier temps, on s'intéresse aux polynômes d'endomorphisme de manière générale. On introduit tout d'abord le vocabulaire général relatifs aux éléments propres d'un endomorphisme qui sera utile dans toute la suite de cette leçon avec la définition de valeur propre et de vecteur propre, de sous-espace propre, de spectre d'endomorphisme ainsi que de sous-espace stable. On poursuit ensuite avec l'algèbre $\mathbb{K}[u]$ avec la définition d'un polynôme d'endomorphisme ainsi qu'un résultat important sur l'algèbre $\mathbb{K}[u]$. Le lemme 10 est central car il permet d'introduire la notion d'idéal annulateur et de polynôme annulateur, qui auront un rôle majeur lorsque nous parlerons de la réduction d'endomorphisme (ou de matrices). On termine ce point en énonçant le lemme des noyaux qui nous sera utile lorsque nous parlerons de la décomposition de Dunford. On consacre un dernier point dans cette partie à la notion de polynôme caractéristique où l'on commence avec la définition du polynôme caractéristique ainsi qu'un exemple puis ensuite deux résultats théoriques très utiles en pratique avec les théorèmes 29 et 32.
Dans une deuxième partie, on donne une application des polynômes d'endomorphisme à la réduction avec tout d'abord la diagonalisation. On commence par rappeler la définition d'une matrice diagonalisable ainsi qu'une caractérisation de la diagonalisabilité puis un corollaire qui permet de faire passer la diagonalisabilité aux sous-espaces stables avant de donner un exemple de diagonalisation avec les matrices circulantes. On conclut ensuite ce point avec la définition de co-diagonalisabilité et un critère de co-diagonalisabilité. Dans un deuxième temps on s'intéresse aux endomorphismes trigonalisables en commençant par rappeler la définition puis en donnant une caractérisation de la trigonalisation très utile dans la pratique et en terminant par parler d'endomorphismes co-trigonalisables. On termine enfin par la décomposition de Dunford qui permet de simplifier les calculs de puissances de matrices ou d'exponentielles de matrices.
Enfin, on s'intéresse dans une dernière partie à des applications pratiques de ce qui précède. Tout d'abord, on applique les résultats précédents pour calculer l'inverse d'une matrice. On donne pour cela un exemple où l'on trouve l'inverse d'une matrice grâce à un polynôme annulateur et on généralise ce résultat dans la remarque 56. Dans un deuxième temps on s'intéresse au calcul de puissance d'une matrice grâce encore une fois au polynôme annulateur. On donne un exemple de calcul de puissances d'une matrice ainsi qu'un résultat théorique analogue pour calculer les puissances d'une matrice diagonalisable. On termine enfin cette leçon avec l'exponentielle d'une matrice. On commence tout d'abord par justifier que l'exponentielle matricielle est bien définie et continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avant de donner quelques résultats généraux et de conclure par la surjectivité de l'exponentielle matricielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ainsi que quelques corollaires.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I Polynômes d'endomorphisme

I.1 Éléments propres

Définition 1 : Valeur propre et vecteur propre [Deschamps, p.67] :
On considère $\lambda \in \mathbb{K}$.
On dit que λ est une **valeur propre de** u lorsqu'il existe $x \in E \backslash \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. De plus, un tel vecteur x est alors appelé **vecteur propre associé à la valeur propre** λ.

Remarque 2 : [Deschamps, p.67]
Autrement dit, λ est valeur propre de u si, et seulement si, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective.

Définition 3 : Sous-espace propre [Deschamps, p.67] :
On considère $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u.
On appelle **sous-espace propre de** u **associé à la valeur propre** λ le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(u) = \{x \in \mathbb{K} \text{ tq } u(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

Remarque 4 : [Deschamps, p.67]
L'endomorphisme u admet 0 pour valeur propre si, et seulement si, u n'est pas injectif. Dans ce cas, on a $E_0(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

Définition 5 : Multiplicité géométrique :
On considère λ une valeur propre de u.
On appelle **multiplicité géométrique de** λ la dimension de $E_\lambda(u)$ (notée $m_g(\lambda)$).

Définition 6 : Spectre d'un endomorphisme [Deschamps, p.67] :
On appelle **spectre de** u **sur** $\mathbb{K}$ (noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$) l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme u sur $\mathbb{K}$.

Proposition 7 : [Deschamps, p.69]
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes.
Les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), ..., E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

Définition 8 : Sous-espace stable [Deschamps, p.64] :
On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable** par u lorsque $u(F) \subseteq F$.

I.2 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Si l'on considère $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit alors $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ (où la puissance est à comprendre au sens de la composition).

Définition 9 : Polynôme d'endomorphisme [Berhuy, p.941] :
On appelle **polynôme d'endomorphisme en** u tout endomorphisme de E de la forme $P(u)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et on note $\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Lemme 10 : [Berhuy, p.942]
L'application :

$$\mathrm{ev}_u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres associatives unitaires et $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
De plus, pour tout sous-espace F de E stable par u, on a :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P\left(u|_F\right) = P(u)|_F$$

Remarque 11 :
On a alors en particulier que $\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n^2$. En fait on verra par la suite qu'on a même mieux !

Remarque 12 :
On peut définir de manière analogue la sous-algèbre $\mathbb{K}[A]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendrée par une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et obtenir des résultats analogues. Dans la suite, on les énoncera donc uniquement pour des endomorphismes.

I.3 Polynôme minimal

Définition 13 : Idéal/polynôme annulateur [Berhuy, p.944 + 945] :
On appelle **idéal annulateur de** u, le noyau du morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres ev_u et on le note $\mathrm{Ann}(u)$. Tout élément de $\mathrm{Ann}(u)$ est alors appelé **polynôme annulateur de** u.

Proposition 14 : [Berhuy, p.945]
Puisque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathrm{Ann}(u)$ est non nul et il existe un unique polynôme unitaire $\pi_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\mathrm{Ann}(u) = \pi_u \mathbb{K}[X] = \{\pi_u Q,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

Remarque 15 : [Berhuy, p.945]
En dimension infinie, il est possible que $\mathrm{Ann}(u)$ soit nul !

Définition 16 : Polynôme minimal [Berhuy, p.945] :
Le polynôme π_u est appelé **polynôme minimal de** u. De plus, c'est l'unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$(\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0) \iff (\pi_u | P)$$

Exemple 17 : [Deschamps, p.97]
$*$ Le polynôme minimal d'un projecteur p de E est :

$$\mu_p = \begin{cases} X & \text{si } p = 0 \\ X - 1 & \text{si } p = \mathrm{Id}_E \\ X^2 - X & \text{sinon} \end{cases}$$

$*$ Le polynôme minimal d'une symétrie s de E est :

$$\mu_s = \begin{cases} X - 1 & \text{si } s = \mathrm{Id}_E \\ X + 1 & \text{si } s = -\mathrm{Id}_E \\ X^2 - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 18 : [Deschamps, p.97]
Si $d = \deg(\pi_u)$, alors la famille $\left(u^k\right)_{k \in [\![0;n-1]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ et l'on a $\dim(\mathbb{K}[u]) = n$.

Proposition 19 :
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $\pi_{u|_F}$ divise π_u.

Proposition 20 :
Si $E = E_1 \oplus ... \oplus E_r$ est une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u, alors $\pi_u = \mathrm{PPCM}(\pi_u|_{E_1}, ..., \pi_u|_{E_r})$.

Lemme 21 : [Rombaldi, p.608]
Soient r un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et $Q_1, ..., Q_p$ les polynômes définis par $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} P_j$.
Si les polynômes P_k sont deux à deux premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$, alors les polynômes Q_k sont premiers entre eux dans leur ensemble et pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, P_k et Q_k sont premiers entre eux.

Lemme 22 : Lemme des noyaux [Rombaldi, p.609] :
Soient r un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{i=1}^{r} P_k$.
On a alors la décomposition $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))$ et les différents projecteurs $\pi_k : \mathrm{Ker}(P(u)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(P_k(u))$ sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$.

I.4 Polynôme caractéristique

Définition 23 : Polynôme caractéristique [Berhuy, p.946] :
On appelle **polynôme caractéristique de** M le polynôme $\chi_M \in \mathbb{K}[X]$ définit par $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

Proposition 24 : [Berhuy, p.946]
Si l'on écrit $\chi_M = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors on a :

$$\mathrm{Tr}(M) = -a_{n-1} \text{ et } \det(M) = (-1)^n a_0$$

Proposition 25 : [Deschamps, p.81]
Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Proposition 26 : [Deschamps, p.83]
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors le polynôme caractéristique χ_{u_F} de l'endomorphisme induit par u sur F divise χ_u.

Proposition 27 : [Deschamps, p.83]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E stables par u.
Si $E = F \oplus G$, alors $\chi_u = \chi_{u|_F}\chi_{u|_G}$.

Exemple 28 : [Deschamps, p.78]
Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ est le polynôme $\chi_A = (X-2)(X^2 - X + 1)$.

Théorème 29 : [Deschamps, p.78]
Un scalaire λ est une valeur propre de M si, et seulement si, c'est une racine du polynôme caractéristique de M.

Remarque 30 : [Deschamps, p.76]
Plus généralement, si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

Définition 31 : Multiplicité algébrique :
On considère λ une valeur propre de M.
On appelle **multiplicité algébrique de** λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_M.

Théorème 32 : Théorème de Cayley-Hamilton [Deschamps, p.99] :
Le polynôme caractéristique de u annule u, c'est-à-dire $\chi_u(u) = 0$.

Corollaire 33 : [Rombaldi, p.607]
On a π_u qui divise χ_u.

Remarque 34 : [Rombaldi, p.608]
Si on écrit $\chi_u = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ avec $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ et les λ_k deux à deux distincts, alors $\pi_u = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$ avec $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$.

Exemple 35 : [Rombaldi, p.608]
On en déduit qu'un endomorphisme est nilpotent si, et seulement si, $\chi_u = X^n$.

II Application à la réduction

II.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 36 : Endomorphisme diagonalisable [Deschamps, p.92]
L'endomorphisme u est un **endomorphisme diagonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Proposition 37 : [Deschamps, p.84]
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine du polynôme χ_u de multiplicité algébrique notée k, alors $\dim(E_\lambda(u)) \leq k$.

Proposition 38 : [Deschamps, p.88 + 102]
Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ où les $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont distincts deux à deux, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ u est diagonalisable. $*$ $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$. $*$ $\sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = n$.
$*$ u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.
$*$ π_u est scindé à racines simples.

Corollaire 39 : [Deschamps, p.104]
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par u sur F est également diagonalisable.

Définition 40 : Matrice circulante [Gourdon, p.190] :
On appelle **matrice circulante** toute matrice carrée telle que l'on passe d'une ligne à la suivante par décalage à droite des coefficients de façon circulaire. Une matrice circulante C de taille n s'écrit donc :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

où $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des nombres complexes.

Développement 1 : [cf. GOURDON + CALDERO]

Proposition 41 : [Gourdon, p.153]

Si l'on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\det(C) = \prod_{i=0}^{n-1} P\left(\omega^i\right)$.

Proposition 42 : [Caldero, p.45]

Soient P un polygone du plan complexe dont les sommets sont notés $z_1, ..., z_n$ et $a, b \in]0;1[$ tels que $a+b=1$.
Si l'on définit par récurrence la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = \mathcal{B}_{a,b}(P)$ le polygone $(z_i')_{i\in[\![1;n]\!]}$ avec $z_i' = az_i + bz_{i+1}$, alors la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P.

Définition 43 : Endomorphismes co-diagonalisables [Deschamps, p.104] :

On considère v et w deux endomorphismes de E.
Les endomorphismes v et w sont dits **co-diagonalisables** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de v et w sont diagonales.

Théorème 44 : [Deschamps, p.104]

Soient v et w deux endomorphismes de E.
v et w commutent si, et seulement si, v et w sont co-diagonalisables.

II.2 Endomorphisme trigonalisable

Définition 45 : Endomorphisme trigonalisable [Deschamps, p.92]

L'endomorphisme u est un **endomorphisme trigonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Théorème 46 : [Deschamps, p.93 + 103]

Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ u est trigonalisable. $*$ u possède un polynôme annulateur scindé.
$*$ Le polynôme minimal de u est scindé.

Corollaire 47 : [Rombaldi, p.676]

Si u est trigonalisable, alors la trace de u est égale à la somme des valeurs propres de u et le déterminant de u est égal au produit des valeurs propres de u (comptées avec multiplicité).

Remarque 48 : [Rombaldi, p.676]

Si u n'est pas trigonalisable, le corollaire précédent devient faux. En effet, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos(\theta) & -2\sin(\theta) \\ 0 & 2\sin(\theta) & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}, \ \theta \in]0;\pi[$$

ne possède que $\lambda = 1$ comme valeur propre réelle mais $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 4\cos(\theta) \neq \lambda$ et $\det(u) = 4 \neq \lambda$.

Définition 49 : Endomorphismes co-trigonalisables [Deschamps, p.104] :

On considère v et w deux endomorphismes de E.
Les endomorphismes v et w sont dits **co-trigonalisables** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de v et w sont simultanément trigonalisable.

Théorème 50 : [Deschamps, p.104]

Soient v et w deux endomorphismes de E.
Si v et w commutent, alors v et w sont co-trigonalisables.

Théorème 51 : Décomposition de Dunford [Rombaldi, p.613]

Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (d,n) d'endomorphismes de E tel que d est diagonalisable, n est nilpotente, d et n commutent et $u = d+n$.
De plus, d et n sont des polynômes en u.

Corollaire 52 : [Rombaldi, p.766]

Si le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{K}$, alors M est diagonalisable si, et seulement si, e^M est diagonalisable.

Exemple 53 :

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $A = aI_3 + bN + cN^2$ et donc :

$$e^A = e^{aI_3} e^{bN+cN^2} = e^a \begin{pmatrix} 1 & b & c + \frac{b^2}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III Applications

III.1 Calcul de l'inverse d'une matrice

Proposition 54 : [Deschamps, p.77]
Soit P un polynôme annulateur de u.
Si 0 n'est pas racine de P, alors u est inversible.

Exemple 55 : [Deschamps, p.77]
Si u vérifie $u^4 + u + \mathrm{Id} = 0$, alors l'application u est inversible et $u^{-1} = -u^3 - \mathrm{Id}$ car $u \circ \left(-u^3 - \mathrm{Id}\right) = \mathrm{Id}$.

Remarque 56 : [Deschamps, p.77]
Plus généralement, si P est un polynôme annulateur de u, alors il existe un polynôme Q tel que $P - P(0) = XQ$. On a donc $u \circ Q(u) = Q(u) \circ u = -P(0)\mathrm{Id}$. Ainsi, si $P(0) \neq 0$, alors $u^{-1} = \frac{-1}{P(0)}Q(u)$.

III.2 Calcul de puissance d'une matrice

Remarque 57 : [Deschamps, p.77]
La connaissance d'un polynôme annulateur de u permet aussi le calcul rapide des puissances de u. En effet, si P annule u et si R est le reste de la division euclidienne de X^p par P, alors $u^p = R(u)$.

Exemple 58 : [Deschamps, p.78]
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 10 & -4 \\ -8 & 16 & -6 \end{pmatrix}$.
Le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ est annulateur de A, on en déduit donc que A est inversible et d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(3I_3 - A\right)$.

De plus, on obtient $X^n = PQ + R$ avec $R = \left(2^n - 1\right)X + \left(2 - 2^n\right)$ et on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2(2^n-1) & 1-2^n \\ 4(1-2^n) & 9 \times 2^n - 8 & 4(1-2^n) \\ 8(1-2^n) & 16(2^n-1) & -7 \times 2^n + 8 \end{pmatrix}$$

Proposition 59 :
Si $M = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale de taille $n \times n$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^n = P^{-1}D^nP$.

III.3 Exponentielle d'une matrice

Théorème 60 : [Rombaldi, p.761]
La fonction exp : $A \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est définie et continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 61 : [Rombaldi, p.762]
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$ et e^A est inversible.

Proposition 62 : [Rombaldi, p.764]
Soient $M, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si M et N commutent, alors $e^{M+N} = e^M e^N$.

Théorème 63 : [Rombaldi, p.765]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$.
On a $e^M = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} N^k$ et la décomposition de Dunford de e^M est donnée par $e^M = e^D + e^D\left(e^N - I_n\right)$ avec e^D diagonalisable et $e^D\left(e^N - I_n\right)$ nilpotente.

Théorème 64 : [Rombaldi, p.779]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On a l'équivalence :

$$\left(e^A = I_n\right) \iff \left(A \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq 2i\pi\mathbb{Z}\right)$$

Développement 2 : [cf. ROMBALDI]

Lemme 65 : [Rombaldi, p.767]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si $\rho(A) < 1$, alors $e^{\mathrm{Ln}(I_n + A)} = I_n + A$.

Lemme 66 : [Rombaldi, p.769]
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.
Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $Q(A)$ soit diagonalisable et $e^{Q(A)} = A$.

Théorème 67 : [Rombaldi, p.769]
Pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que l'on ait $e^{Q(A)} = A$ (autrement dit : l'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

Corollaire 68 : [Rombaldi, p.770]
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Corollaire 69 : [Rombaldi, p.770]
Soit p un entier naturel non nul.
Pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ polynomiale en A telle que $X^p = A$.

Remarques sur la leçon

— Il est possible de parler de la réduction de Frobenius (et de Jordan !) ainsi que des matrices compagnons, des commutants, bicommutants, invariants de similitude, etc.

— On peut aussi s'intéresser aux endomorphismes semi-simples et cycliques.

Liste des développements possibles

— Matrices circulantes.

— Décomposition de Dunford.

— Surjectivité de l'exponentielle matricielle.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.