Leçon 209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

Extrait du rapport de jury

Le programme offre aux candidates et candidats plusieurs pistes très riches pour nourrir cette leçon d'applications significatives : l'approximation uniforme par des polynômes algébriques ou trigonométriques, la régularisation par convolution. Mais on peut également penser à l'approximation des fonctions intégrables sur la droite réelle par des fonctions continues ou plus régulières à support compact.
Les séries de Fourier s'intègrent parfaitement à cette leçon, avec le théorème de Fejér (dans ses versions $L^p(\mathbb{T})$, ou $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$) et ses applications, par exemple à la construction de bases hilbertiennes d'exponentielles complexes dans $L^2(\mathbb{T})$ et ses conséquences.
Voici enfin quelques pistes à réserver aux candidates et candidats solides : le théorème de Runge en analyse complexe, le théorème taubérien de Littlewood, l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles, l'approximation uniforme par des fonctions lipschitziennes.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 209 intitulée : "Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.". L'approximation d'une fonction par des fonctions régulières joue un rôle important dans divers domaines des mathématiques : résultats par densité en analyse fonctionnelle (théorie de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$) ou encore en analyse numérique avec des calculs d'intégrales par divers méthodes.
Dans une première partie on s'intéresse à l'approximation par des polynômes. En effet, les polynômes sont des fonctions très régulières et très simples à étudiées, il est donc naturel d'essayer de ramener l'étude d'une fonction quelconque à une fonction polynomiale. On commence par le cas d'une approximation locale avec les théorème de Taylor-Laplace/-Lagrange/-Young qui servent à prouver des inégalités ou encore obtenir des développements limités. On traite ensuite du cas des fonctions continues sur un compact en rappelant le théorème de Heine qui nous sera utile pour démontrer le théorème de Weierstrass. On termine cette partie avec un premier résultat de densité dans $L^2(\mathbb{R})$: on introduit l'espace $L^2(I, \rho)$ puis les polynômes orthogonaux et on montre sous certaines conditions qu'ils forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.
Dans une deuxième partie on parle de l'interpolation polynomiale en commençant par le cas de l'interpolation de Lagrange qui approxime une fonction. On commence par montrer son existence puis l'on discute de l'erreur d'interpolation commise. On se rend alors compte que des phénomènes "bizarres" peuvent apparaître (phénomène de Runge) lorsque les points d'interpolation sont équirépartis. On introduit alors les polynômes de Tchebychev et les points d'interpolation de Tchebychev qui fond disparaître ce phénomène. On donne en deuxième point une application aux méthodes de quadrature où l'objectif est d'approximer un calcul d'intégral avec des méthodes de plus en plus précises (méthode des rectangles, point milieu, Simpson, etc.).
Dans une troisième partie on s'attaque au cas des fonctions intégrables en commençant par rappeler deux résultats de densité qui sont très utiles dans le cadre de la théorie de l'intégration. On s'intéresse dans un deuxième temps au produit de convolution qui résout le problème qui est que la multiplication usuelle des (classes de) fonctions n'opère pas dans les espaces L^p. On donne ainsi la définition du produit de convolution ainsi que des propriétés fondamentales et on donne ensuite un résultat sur la dérivabilité. Un inconvénient de la convolution est que L^1 n'est pas une algèbre avec un élément neutre...
Il nous faut donc remédier à ce problème en introduisant dans une dernière sous-partie la notion d'approximation de l'unité. On donne alors la définition d'une approximation de l'unité ainsi que quelques exemples avant de passer au théorème d'approximation dans $L^1(\mathbb{R})$ ainsi qu'aux suites régularisantes qui permettent de construire des fonctions plateaux et d'avoir des résultats de densité. On donne dans un dernier temps une application de l'approximation de fonctions Lebesgue-intégrables en probabilités via le théorème de Lévy qui permet de ramener un problème de convergence en loi à un problème de convergence simple des fonctions caractéristiques ainsi qu'une application avec le théorème central limite.
On s'intéresse dans une dernière partie aux approximations de fonctions périodiques en

se tournant du côté des séries de Fourier. On donne dans un premier point une définition des séries trigonométriques en commençant par parler de la famille des exponentielles puis des polynômes trigonométriques et finalement des séries trigonométriques. On commence ensuite à rentrer dans la théorie de Fourier en donnant la définition des coefficients de Fourier et on donne des résultats sur les coefficients de Fourier notamment via la proposition 59 et le lemme de Riemann-Lebesgue. On termine cette sous-partie en donnant la définition d'une série de Fourier ainsi que d'un exemple de calcul. Dans la suite on s'intéresse à des questions cruciales concernant les séries de Fourier : Pour quelles fonctions f y-a-t-il convergence de $S_N(f)$? Y-a-t-il convergence vers f ? Convergence en quel sens : norme $\|\cdot\|_2$, simple, uniforme, au sens de Cesàro ? C'est toutes ces questions qui font à la fois la complexité et la richesse des séries de Fourier ! On commence tout d'abord par le cas de la convergence au sens de Cesàro : on introduit dans un premier temps les noyaux de Dirichlet et de Féjer ainsi que quelques propriétés car se sont des "bons noyaux" au sens où l'on peut en exploiter de bonnes propriétés. En effet, un résultat important est le théorème de Féjer qui possède plusieurs corollaires très intéressants. Dans un dernier point on s'intéresse à la convergence en moyenne quadratique et ponctuelle avec la formule de Parceval qui nous sera utile dans la suite de cette leçon pour calculer des sommes et on termine par le théorème de Dirichlet (qui est à l'origine de nombreux contre-exemples dont le phénomène de Gibbs) ainsi que des calculs de sommes grâce à la théorie des séries de Fourier.

Plan général

Cours détaillé

I Approximation par des polynômes

I.1 Approximation locale de fonctions régulières

Dans toute cette sous-partie, on considère I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

Théorème 1 : Formule de Taylor-Laplace à l'ordre n [Deschamps (1), p.657] :
Soient $a \in I$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Pour tout $x \in I$, on a $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$.

Remarque 2 : [Deschamps (1), p.658]
$*$ La formule de Taylor-Laplace permet de donner l'erreur commise en approchant $f(x)$ par la fonction polynomiale de Taylor d'ordre n en a associée à f en x.
$*$ Pour utiliser la formule de Taylor-Laplace à l'ordre n, la fonction f doit être de classe $\mathcal{C}^{n+1}$!

Exemple 3 : [Deschamps (1), p.658]
$*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
$*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Théorème 4 : Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n [Deschamps (1), p.658] :
Soient $a \in I$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si la fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ est majorée par une constante M_{n+1}, alors pour tout $x \in I$, on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Exemple 5 : [Deschamps (1), p.658]
On note f l'application définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln(1+x)$.
Pour tout $x \in [0;1]$, on a $\ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

Théorème 6 : Formule de Taylor-Young à l'ordre n [Deschamps (1), p.659] :
Soient $a \in I$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Il existe une fonction α définie sur I telle que :

$$\forall x \in [a;b],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \alpha(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$$

La formule de Taylor-Young nous permet d'obtenir certains développements limités usuels :

Exemple 7 : [Deschamps (1), p.711]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, on peut alors appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 et on obtient l'égalité : $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

I.2 Densité dans l'espace des fonctions continues sur un compact

Théorème 8 : Théorème de Heine [Deschamps (1), p.518]
Toute fonction continue définie sur un segment est uniformément continue.

Développement 1 : [cf. DESCHAMPS (2)]

Lemme 9 : [Deschamps (2), p.994]
Soient f une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \in [0;1]$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(x)$ et $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall (t,u) \in [0;1]^2,\ |f(t) - f(u)| \leq M(t-u)^2 + \varepsilon$$

En particulier, on a $|\mathbb{E}(f(Y_n)) - f(x)| \leq M\,\mathrm{Var}(Y_n) + \varepsilon \leq \frac{M}{4n} + \varepsilon$

Théorème 10 : Théorème de Weierstrass [Deschamps (2), p.994] :
Si l'on considère les polynômes de Bernstein définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

alors la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

Corollaire 11 : [Deschamps (2), p.530]
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle sur $[0;1]$.

I.3 Densité dans $L^2(I,\rho)$

Dans toute cette sous-partie, on considère un intervalle $I =]a;b[$ borné ou non de $\mathbb{R}$.

Définition 12 : Fonction poids [El Amrani, p.40] :
On appelle **poids sur** I une application $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

Définition 13 : L'espace $L^2(I,\rho)$:
On appelle **espace** $L^2(I,\rho)$ l'ensemble $\left\{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tq } \int_I |f(x)|^2 \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty\right\}$.

Proposition 14 : [El Amrani, p.41]
L'espace $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert et tout polynôme appartient à $L^2(I,\rho)$.

Théorème 15 : [El Amrani, p.41]
Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(L^2(I,\rho)\right)^{\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux et tels que $\deg(P_n) = n$ (cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée au poids ρ).

Exemple 16 : [El Amrani, p.41]
* Si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\rho(x) = e^{-x}$, on obtient alors les polynômes de Laguerre.
* Si $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on obtient alors les polynômes de Hermite.
* Si $I =]-1;1[$ et $\rho(x) = 1$, on obtient alors les polynômes de Legendre.
* Si $I =]-1;1[$ et $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient alors les polynômes de Tchebychev.

Théorème 17 : [El Amrani, p.47]
Soit ρ une fonction poids sur I.
S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux normalisés associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Remarque 18 : [El Amrani, p.46]
L'hypothèse faite sur ρ n'est pas superflue. En effet, en considérant $I =]0;+\infty[$, $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$ et $f(x) = \sin(2\pi\ln(x))$, on a $\int_I f(x)x^n\rho(x)\mathrm{d}x = 0$.

II Interpolation polynomiale

II.1 Interpolation de Lagrange et erreur d'interpolation

Dans toute cette sous-partie, on considère $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et on se donne $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ des points deux à deux distincts de $[a;b]$.

Théorème 19 : [Demailly, p.22]
Il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on ait $P_n(x_i) = f(x_i)$. P_n est alors appelé **polynôme d'interpolation de Lagrange associé à** f et on a $P_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ell_i$, avec $\ell_i = \prod_{j\neq i} \frac{X-x_j}{x_i-x_j}$.

Théorème 20 : [Demailly, p.23]
Si f est $n+1$ fois dérivable, alors pour tout $x \in [a;b]$, il existe $\xi_x \in [a;b]$ tel que $f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\xi_x)$, avec $\pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(X-x_j)$.
En particulier, $\|f-P_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}\|\pi_{n+1}\|_\infty \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$.

Remarque 21 : [Demailly, p.28]
La précision des polynômes interpolateurs provient alors du contrôle de $\|\pi_{n+1}\|_\infty$, c'est-à-dire de la répartition des points. Dans le cas de points équidistants (c'est-à-dire $x_i = x_0 + ih$), on a :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq h^{n+1}\frac{\max_{i\in[\![1;n]\!]}\left|f^{(n+1)}(x_i)\right|}{n+1} \quad \text{et} \quad \|\pi_{n+1}\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}\right)$$

Remarque 22 :
Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[-1;1]$. C'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ mais dont les dérivées augmentent rapidement en norme infinie vers 0. Il s'en suit dans le cas de points équidistants que $\frac{1}{(n+1)}\|\pi_{n+1}\|_\infty \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On observe alors que les polynômes d'interpolation ne convergent pas uniformément vers f.

Définition 23 : Polynôme de Tchebychev [Demailly, p.29] :
On définit par récurrence la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.
Les polynômes T_n sont alors appelés **polynômes de Tchebychev** et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Proposition 24 : [Demailly, p.30]
Le racines de T_{n+1} sont les $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ pour $k \in [\![0;n]\!]$ et sont appelés les **points d'interpolation de Tchebychev**.

Remarque 25 : [Demailly, p.31]
En prenant les points d'interpolation de Tchebychev (avec $[a;b] = [0;1]$), on a : $\|\pi_{n+1}\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}\right)$.
L'interpolation aux points de Tchebychev est alors en général considérablement plus précise que l'interpolation en des points équidistants, d'où son intérêt pratique. En particulier, le phénomène de Runge n'est plus observé avec les polynômes d'interpolation de Tchebychev.

II.2 Application aux méthodes de quadrature

Dans toute cette sous-partie, on considère $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et on cherche des formules pour approcher $I(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Fixons $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ une subdivision de $[a;b]$ et on pose $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Définition 26 : Méthode de quadrature [Demailly, p.61] :
Une **méthode de quadrature** consiste, pour $i \in [\![0;n-1]\!]$, à approcher l'intégrale $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t$ par $A_i(f) = h_i\sum_{j=0}^{\ell_i}\omega_{i,j}f(\zeta_{i,j})$ où les $(\zeta_{i,j})_{j\in[\![0;n]\!]}$ sont dans $[x_i : x_{i+1}]$ et les $(\omega_{i,j})_{j\in[\![0;n]\!]}$ sont des réels fixés tels que $\sum_{j=0}^{n}\omega_{i,j} = 1$.
On note alors $E(f) = I(f) - \sum_{i=0}^{n-1} A_i(f)$.

Définition 27 : Ordre d'une méthode [Demailly, p.62] :
On dit qu'une méthode de quadrature est **d'ordre** N lorsqu'elle est exacte (c'est-à-dire $E(f) = 0$) pour tout $f \in \mathbb{R}_N[X]$ et s'il existe $f \in \mathbb{R}_{N+1}[X]$ telle qu'elle soit inexacte.

Exemple 28 : [Demailly, p.63 + 71 + 72]
On fixe $(\zeta_j)_{j\in[\![0;n]\!]}$ associés à une subdivision de $[x_i;x_{i+1}]$, on peut prendre pour fonction de poids $\omega_j = \frac{1}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\ell_j(x)\mathrm{d}x$ avec $\ell_j = \prod_{j\neq j}\frac{X-\zeta_j}{\zeta_k-\zeta_j}$: ce sont les méthodes par interpolation de Lagrange.
* Méthode des rectangles :
On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{n-1} h_i f(z_i)$ où $z_i = x_i$ ou x_{i+1} : méthode d'ordre 0.
* Méthode du point milieu :
De même avec $z_i = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}$: méthode d'ordre 1 et $|E(f)| \leq \frac{1}{3}\|f''\|_\infty$ pour $f \in \mathcal{C}^2$.
* Méthode des trapèzes :
On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{n-1} h_i\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$: méthode d'ordre 1 et $|E(f)| \leq \frac{2}{3}\|f''\|_\infty$ pour $f \in \mathcal{C}^2$.
* Méthode de Simpson :
On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{n-1} h_i\frac{f(x_i)+4f\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)+f(x_{i+1})}{6}$: méthode d'ordre 3 et $E(f) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\left\|f^{(4)}\right\|_\infty\right)$ pour $f \in \mathcal{C}^4$.

III Approximation de fonctions Lebesgue-intégrables

III.1 Quelques résultats de densité

Dans toute cette sous-partie, on considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Théorème 29 :
Pour tout réel $p \in [1; +\infty]$, l'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Remarque 30 :
Ce résultat est très utile en théorie de l'intégration lorsque l'on veut montrer une propriété : on la montre pour les indicatrices, puis les fonctions étagées et enfin par densité la propriété est vraie pour les fonctions dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Théorème 31 :
L'ensemble des fonctions continues à support compact sur un ouvert de $\mathbb{R}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p \in [1; +\infty[$.

III.2 Convolution

Dans toute cette sous-partie, on se place dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Définition 32 : Produit de convolution [El Amrani, p.75] :
On dit que deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont **convolables** lorsque, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable.
On définit alors le **produit de convolution de f et de g** par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 33 : [El Amrani, p.77]
Soient f et g deux fonctions convolables.
On a alors l'inclusion : $\mathrm{supp}(f * g) \subseteq \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$.

Théorème 34 : [El Amrani, p.78 + 80 + 81]
Soit $p \in [1; +\infty[$ et q sont exposant conjugué.
* Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
* Pour tous $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
* Pour tous $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, $f * g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

De plus, $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et si $p \neq 1$, alors $f * g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque 35 : [El Amrani, p.78 + 85]
La convolution est commutative, associative et bilinéaire sur $L^1(\mathbb{R})$. Autrement dit, $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p, +, \cdot, *)$ est une algèbre de Banach commutative (elle est cependant sans unité !).

Théorème 36 : [El Amrani, p.90]
Soient $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$.
On a $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout $\ell \in [\![0; k]\!]$, $\frac{\partial^\ell (f*g)}{\partial x^\ell}(x) = \left(\frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell} * g\right)(x)$.

III.3 Régularisation

Dans toute cette sous-partie, on se place dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Définition 37 : Approximation de l'unité [El Amrani, p.86] :
On appelle **approximation de l'unité** dans $L^1(\mathbb{R})$ toute suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ telles que :
* $\forall j \in \mathbb{N}, \ \varphi_j \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 1$. $(*)$
* $\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{j \to +\infty} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exemple 38 : [El Amrani, p.86]
* $\varphi_j(x) = \frac{j}{2} e^{-j|x|}$ (approximation de Laplace).
* $\varphi_j(x) = \frac{j}{\pi} \frac{1}{1+j^2x^2}$ (approximation de Cauchy).
* $\varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{j^2x^2}{2}}$ (approximation de Gauss).

Théorème 39 : Théorème d'approximation dans $L^1(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.87] :
Soient $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité, $p \in [1; +\infty[$ et f une application de la variable réelle.
* Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, alors $(f * \varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
* Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $(f * \varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Définition 40 : Suite régularisante [El Amrani, p.94] :
On appelle **suite régularisante de** $\mathbb{R}$ toute suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de fonctions qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $(*)$ de la définition 19 et telle qu'il existe une autre suite $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0 telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subseteq \mathcal{B}_o(0, \varepsilon_j)$.

Théorème 41 : [El Amrani, p.95]

Soient $p \in [1;+\infty[$ et $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante.
$*$ Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ et tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$f * \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ f * \varphi_j \in L^p(\mathbb{R}) \text{ et } \lim_{j\to+\infty} \|f * \varphi_j - f\|_p = 0$$

$*$ Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on a $f * \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et la suite $(f * \varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Corollaire 42 : [El Amrani, p.96]

Soit $p \in [1;+\infty[$.
L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Remarque 43 :

Ce résultat est particulièrement important dans le cadre de l'étude de la transformée de Fourier puisque l'on peut montrer un certain nombre de résultats par densité grâce au corollaire précédent.

III.4 Application en probabilités

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X également une variable aléatoire réelle.

Définition 44 : Convergence en loi [Queffélec, p.542] :

On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Définition 45 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :

On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\Phi_X : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \end{array} \right.$$

Lemme 46 : [Queffélec, p.542]

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Théorème 47 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :

On a équivalence entre :
$*$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
$*$ La suite $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.

Développement 2 : [cf. QUEFFELEC + CHABANOL]

Lemme 48 : [Queffélec, p.549]

Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes de limite $z \in \mathbb{C}$, alors on a $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n$ qui converge vers e^z quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 49 : [Chabanol, p.44]

$*$ On a $\Phi_X(0) = 1$.
$*$ De plus, si X^k est intégrable pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors les dérivées à l'origine existent jusqu'à l'ordre k et $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left(X^k\right)$.
En particulier, $\Phi_X'(0) = i\mathbb{E}(X)$ et $\Phi_X''(0) = -\mathbb{E}\left(X^2\right)$.

Théorème 50 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}_1(0,1)$$

IV Approximation de fonctions périodiques

IV.1 Polynômes trigonométriques et séries de Fourier

Définition 51 : Exponentielle modèle [El Amrani, p.172] :

On considère $n \in \mathbb{Z}$.
On définit par e_n **l'élément de** $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ **tel que** $e_n(x) = e^{inx}$.

Proposition 52 : [El Amrani, p.172]

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée.

Définition 53 : Polynôme trigonométrique [Gourdon, p.267] :

On appelle **polynôme trigonométrique** (de degré $N \in \mathbb{N}$ et noté P_N) toute fonction de la forme $x \longmapsto \sum_{n=-N}^N c_n e_n(x)$ avec $c_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 54 : [Gourdon, p.267]

Une telle fonction est équivalente à la donnée d'une fonction de la forme suivante : $x \longmapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ où $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

Définition 55 : Série trigonométrique [Gourdon, p.267] :

On appelle **série trigonométrique** toute série de fonctions qui s'écrit sous la forme $x \longmapsto c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e_n + c_{-n} e_{-n})(x)$. On la note alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$.

Proposition 56 : [Gourdon, p.268]
Si $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_{-n}| < +\infty$, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et définit une fonction de l'espace $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Définition 57 : n-ième coefficient de Fourier [El Amrani, p.173] :
On considère $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
On appelle **n-ième coefficient de Fourier de** f (et noté $c_n(f)$) le nombre complexe $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$.

Définition 58 : Translatée d'une fonction [El Amrani, p.174] :
On considère $f \in L^1_{2\pi}$.
On appelle **translatée de** f **de** t la fonction τ_t définie par $\tau_t(f) : x \longmapsto f(x+t)$.

Proposition 59 : [El Amrani, p.174]
Soient $f \in L^1_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$, $(k,n) \in \mathbb{Z}^2$ et $g \in L^\infty_{2\pi}$.
$*$ $c_n(f_\sigma) = c_{-n}(f)$ (où $f_\sigma : x \longmapsto f(-x)$). $*$ $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.
$*$ $c_n(\tau_a(f)) = e^{-ina}c_n(f)$. $*$ $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)e_n$. $*$ $f * e_n = c_n(f)e_n$.
$*$ $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. $*$ Si de plus $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{pm}$, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.

Lemme 60 : Lemme de Riemann-Lebesgue [El Amrani, p.175] :
Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a $\lim_{|\lambda|\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x = 0$.

Corollaire 61 : [El Amrani, p.175]
Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$.

Définition 62 : Série de Fourier [El Amrani, p.178]
On considère $f \in L^1_{2\pi}$.
On appelle **série de Fourier de** f la série trigonométrique (formelle) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$, où les $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.

Exemple 63 :
On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(0) = 0$ et pour tout $x \in]0; 2\pi[$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.
On a $c_0(f) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = -\frac{i}{2n}$.

IV.2 Convergence au sens de Cesàro

Définition 64 : N-ième somme de Cesàro [El Amrani, p.181] :
Pour $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on note $\sigma_N(f)$ la **N-ième somme de Cesàro de la série de Fourier de** f définie par $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$.

Définition 65 : Convergence au sens de Cesàro [El Amrani, p.181] :
On dit que la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ **converge au sens de Cesàro au point** x_0 lorsque $\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f)(x_0)$ existe.

Proposition 66 : [El Amrani, p.182]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{C}}$ une suite d'éléments d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{C}}$ converge au sens usuel, alors elle converge au sens de Cesàro.

Remarque 67 : [El Amrani, p.182]
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 68 : Noyau de Dirichlet [El Amrani, p.184] :
On appelle **noyau de Dirichlet d'ordre** N la fonction $D_N : x \longmapsto \sum_{n=-N}^{N} e_n(x)$.

Proposition 69 : [El Amrani, p.184]
$*$ La fonction D_N est une fonction paire, 2π-périodique.
$*$ D_N est le prolongement par continuité de $\mathbb{R}$ de la fonction définie de $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
$*$ Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$ on a $S_N(f) = f * D_N$.

Définition 70 : Noyau de Féjer [El Amrani, p.185] :
On appelle **noyau de Féjer d'ordre** N la fonction $K_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k$.

Proposition 71 : [El Amrani, p.185]
$*$ Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a :
$$K_N = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)e_n \text{ et } \sigma_N(f) = f * \left(\sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)c_n(f)e_n\right)$$
En particulier, K_N est le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par $x \longmapsto \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$.
$*$ La suite $(K_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$.

Remarque 72 : [El Amrani, p.188]
Lors de calculs explicites de séries de Fourier, il peut être avantageux d'utiliser la parité ou l'imparité de la fonction f (notamment au niveau du calcul de $c_n(f), S_N(f)(x)$ ou de $\sigma_N(f)(x)$).

Théorème 73 : Théorème de Féjer [El Amrani, p.190] :
Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue (resp. dans L^p pour $p \in [1; +\infty[$) et 2π-périodique :

$$\lim_{n \to +\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0 \quad \text{(respectivement } \lim_{n \to +\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0)$$

Corollaire 74 : [El Amrani, p.194]
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si la suite $(S_N(f)(x_0))_{N \in \mathbb{N}}$ converge de limite notée ℓ, alors on a $\ell = f(x_0)$.
De plus, si la suite $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(x)$.

Théorème 75 : [El Amrani, p.172]
Pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$.

Corollaire 76 : [El Amrani, p.173]
La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Corollaire 77 : [El Amrani, p.192]
Les polynômes trigonométriques sont denses dans $(\mathcal{C}^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ et $\left(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p\right)$ pour tout $p \in [1; +\infty[$.

Corollaire 78 : [El Amrani, p.196]
La fonction $\gamma : \left| \begin{array}{ccc} L^1_{2\pi} & \longrightarrow & c_0\mathbb{Z} \\ f & \longmapsto & (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{array} \right.$ est injective.

IV.3 Convergence de la série de Fourier

Théorème 79 : Formule de Parceval [El Amrani, p.193] :
Soit $f \in L^2_{2\pi}$.
* $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers f en moyenne quadratique.
* On a : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ (formule de Parseval).

Corollaire 80 :
L'application γ (cf. cor. 71) est un isomorphisme isométrique de $\left(L^2_{2\pi}, \|\cdot\|_2\right)$ dans $\left(\ell^2(\mathbb{Z}, \|\cdot\|_2\right)$.

Théorème 81 :
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{pm}$.
$(S_n(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$.

Théorème 82 : Théorème de Dirichlet [El Amrani, p.196] :
Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent et que $f'(x_0^-)$ et $f'(x_0^+)$ existent également, alors $\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$.

Exemple 83 : [El Amrani, p.210]
En considérant la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi; \pi]$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Remarques sur le plan

— Il faut connaître les limites de certains résultats dans les espaces L^p en sachant s'ils sont encore vrais dans L^∞ ou non.

Liste des développements possibles

— Théorème de Weierstrass.

— Polynômes orthogonaux.

— Théorème de Lévy + TCL.

— Théorème de Féjer.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.

— Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*.

— Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.

— Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.