I Restitution du cours

1 - Énoncer le théorème de convergence dominée ainsi que le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.

2 - Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées ainsi que le théorème d'intégration terme à terme.

3 - Énoncer les théorèmes de comparaison pour les fonctions intégrables ainsi que la définition de l'intégrale généralisée sur un intervalle $[a;b[$ de $\mathbb{R}$.

II Questions de cours

1 - Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\lambda t}\mathrm{d}t$, où $\lambda > 0$, est convergente, et déterminer sa valeur.

2 - Prouver la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ puis calculer sa valeur à l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$.

3 - Justifier l'existence et calculer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\mathrm{d}t$.

III Exercices

Exercice 1 :

1 - Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$ converge.
2 - Déterminer sa valeur en utilisant le changement de variable $t = \tan(\theta)$.
3 - On se propose de retrouver cette valeur sans changement de variable.
a) Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur.
b) En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

1 - Étudier le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)t^x}\mathrm{d}t$$

2 - Calculer $f(1)$.
3 - Préciser la monotonie de la fonction f.
4 - Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$$

5 - Donner la limite, puis un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 3 :

1 - Montrer que $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{(1+x)^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.
2 - Pour $b > 0$, calculer $\displaystyle\int_1^b \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ en fonction de b.
3 - En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 4 :

Soient $0 < a < b$.
1 - Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$.
2 - Soient $0 < x < y$. Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

3 - Démontrer que, pour tout réel $z > 0$, on a :

$$e^{-bz}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \leq e^{-az}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

4 - En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Exercice 5 :

Soit b un réel strictement positif.

1 - Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^b}\mathrm{d}t$ est convergente.

2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^{nb}\mathrm{d}t$ existe et calculer sa valeur.

3 - On souhaite prouver que :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^b}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nb+1}$$

a) Est-il possible d'obtenir ce résultat avec un théorème d'intégration terme à terme ?

b) Est-il possible d'obtenir ce résultat avec le théorème de convergence dominé ?

c) Est-il possible d'obtenir ce résultat autrement ?

Exercice 6 :

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t$$

1 - Montrer l'existence de I et de J et montrer que $J = I$.

2 - Calculer $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2-u+1}\mathrm{d}u$.

3 - En considérant $I + J$, donner la valeur de I.