I Restitution du cours

1 - Énoncer le théorème de convergence dominée ainsi que le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.

2 - Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées ainsi que le théorème d'intégration terme à terme.

3 - Énoncer les théorèmes de comparaison pour les fonctions intégrables ainsi que la définition de l'intégrale généralisée sur un intervalle $[a;b[$ de $\mathbb{R}$.

II Questions de cours

1 - Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\lambda t}\mathrm{d}t$, où $\lambda > 0$, est convergente, et déterminer sa valeur.

2 - Prouver la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ puis calculer sa valeur à l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$.

3 - Justifier l'existence et calculer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t$.

III Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 :
Soit F la fonction d'une variable réelle définie par :

$$F : y \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}\mathrm{d}x$$

1 - Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2 - Montrer que F est paire et calculer $F(0)$.
3 - Vérifier que pour $y \in]0;+\infty[\setminus\{1\}$, on a pour $x \geq 0$:

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} = \frac{1}{1-y^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+x^2y^2}\right)$$

En déduire $F(y)$ pour $y \in]0;+\infty[\setminus\{1\}$.
4 - En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :
Soit g la fonction d'une variable réelle définie par :

$$g : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t$$

1 - Montrer que pour tout $x > 0$, $g(x)$ existe.
2 - Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour $x > 0$.
3 - En déduire $g(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 3 :
Soit K la fonction d'une variable réelle définie par :

$$K : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-2i\pi xt}\mathrm{d}t$$

1 - Montrer que K est continue sur $\mathbb{R}$.
2 - Montrer que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x on a :

$$K'(x) + 2\pi^2 xK(x) = 0$$

3 - En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer $K(0)$.
4 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, expliciter $K(x)$ en fonction de x.

IV Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 :
Soit F la fonction d'une variable réelle définie par :

$$F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}\mathrm{d}t$$

1 - Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2 - Soit $a > 0$.
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a;a]$.
3 - Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
4 - Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $F''(x)$ et en déduire $F(x)$.

v.hanecart@orange.fr

Exercice 5 :

Soit b un réel strictement positif.

1 - Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^b}\mathrm{d}t$ est convergente.

2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^{nb}\mathrm{d}t$ existe et calculer sa valeur.

3 - On souhaite prouver que :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^b}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nb+1}$$

a) Est-il possible d'obtenir ce résultat avec un théorème d'intégration terme à terme ?

b) Est-il possible d'obtenir ce résultat avec le théorème de convergence dominé ?

c) Est-il possible d'obtenir ce résultat autrement ?

Exercice 6 :

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1 - Trouver le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.

2 - Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.

3 - Calculer $f(0)$.

4 - Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

5 - Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

6 - Pour $x > 0$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} t\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 e^{-xt}\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{x^2+u^2}\mathrm{d}u$$

et que :

$$|f'(x)| \leq \frac{1-e^{-x}}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$$

7 - Déterminer la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.