I Restitution du cours

1 - Énoncer le théorème fondamental de l'analyse et donner la définition de l'intégrale généralisée sur un intervalle $[a;b[$ de $\mathbb{R}$.

2 - Donner la définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ et donner une primitive de $x \longmapsto \tan(x)$.

3 - Énoncer la relation de Chasles, la positivité de l'intégrale, la croissance de l'intégrale et l'inégalité triangulaire sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

II Questions de cours

1 - Donner la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

2 - Donner la nature et la valeur éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$.

3 - Donner la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

III Exercices

Exercice 1 :

1 - Pour $x \geq 0$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

2 - Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 2 :

1 - Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t$.

2 - Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 3 :

1 - Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\cos(u)\mathrm{d}u$.

2 - Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sqrt{\sin(u)}}\mathrm{d}u$.

Exercice 4 :

1 - Calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$.

2 - En déduire la limite de $\displaystyle\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

3 - Retrouver ce résultat à l'aide de la formule de Stirling.

Exercice 5 :

1 - Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur.

2 - En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 6 :

1 - Pour $b > 0$, calculer $\displaystyle\int_1^b \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ en fonction de b.

2 - En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 7 :

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t$$

1 - Montrer l'existence de I et de J et montrer que $J = I$.

2 - Calculer $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2-u+1}\mathrm{d}u$.

3 - En considérant $I + J$, donner la valeur de I.