Leçon 243 - Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de définitions, règles et propriétés accompagnées de quelques exemples triviaux. Le problème du domaine et les modes de convergence doivent être abordés.
Les liens entre l'holomorphie et l'analyticité doivent être maîtrisés. L'existence de nombreux développements en série entière peut être établie de manière immédiate par cet argument, avec en prime une information sur le rayon de convergence, voire sur l'ordre de grandeur des coefficients.
Le théorème radial (ou non-tangentiel) d'Abel est souvent proposé comme développement, en pensant qu'il s'agit d'un théorème de prolongement, alors qu'il s'agit d'un résultat de continuité. En réalité, ce théorème débouche naturellement sur la question plus générale des procédés de sommation des séries divergentes.
Les séries entières ont également des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques très intéressantes. Les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ont également toute leur place dans cette leçon.
Les candidats solides pourront s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs aux séries entières, au problème du prolongement analytique de la somme d'une série entière, aux séries entières aléatoires ou encore aux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ nulle part analytiques.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 243 intitulée : "Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.". Les séries entières représentent un type particulier de séries de fonctions et qui possèdent énormément de propriétés remarquables et sont nées de l'idée de généraliser la notion de développement limité.
Dans la première partie on s'intéresse principalement au rayon de convergence. On commence tout d'abord par parler des généralités en donnant la définition d'une série entière. On se demande ensuite quand est-ce que cet objet est bien défini ? Cela nous pousse à introduire le lemme d'Abel et la notion de rayon de convergence. Ce rayon de convergence représente une information capitale qu'il faut déterminer. C'est en ce sens que se construit la suite de cette leçon. On donne ainsi des premières propriétés faisant intervenir le rayon de convergence et on remarque le délicat problème du comportement sur le bord du disque de convergence. Une deuxième sous-partie est consacrée à la détermination du rayon de convergence. Le premier outil à notre disposition est la règle de D'Alembert qui est efficace mais pas assez générale. Il nous faut donc nous tourner vers des outils plus forts tels que la règle d'Hadamard ou les comparaisons. Dans une dernière sous-partie, on s'intéresse à l'évolution du rayon de convergence suivant certaines opérations. On constate qu'il est modifié par somme et produit de Cauchy de deux séries entières mais reste inchangée par dérivation terme à terme ou encore primitivation par exemple.
Dans une deuxième partie, on s'intéresse aux propriétés de la somme qui est un objet très important également. Tout d'abord en ce qui concerne le disque de convergence, on constate que la série entière converge normalement sur tout disque fermé inclus dedans et donc que la restriction de la somme sur le disque ouvert de convergence est continue. Cela nous permet de retrouver la formule de Cauchy très utile en analyse complexe mais également le théorème de primitivation terme à terme et le théorème de dérivation terme à terme qui permettent de produire de nouveaux développements en séries entières à partir de ceux connus. On s'intéresse ensuite dans une deuxième sous-partie au comportement au bord qui est plus délicat. Sous certaines hypothèses, il est possible de prolonger la continuité de la somme en un point du bord du disque de convergence.
Dans une troisième partie on s'intéresse au lien entre analyticité et holomorphie. On commence par parler de fonctions développables en séries entières. Le développement en série entière est un outil central en mathématiques comme on le verra dans la dernière partie. On commence d'abord par donner la définition d'une fonction développable en série entière avant de donner un exemple et un contre-exemple (bien que la fonction soit $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$). Ainsi, une fonction développable en série entière est $\mathcal{C}^\infty$, mais la réciproque est fausse... Il existe cependant une réciproque sous certaines hypothèses en plus qui est le théorème de Bernstein. On s'intéresse dans un deuxième point aux fonctions analytiques en donnant la définition ainsi que des théorèmes importants d'analyse complexe tels que le principe du prolongement analytique et des zéros isolés. On montre aussi que les séries entières sont analytiques et que les fonctions analytiques sont

holomorphes sur leur disque de convergence. Enfin dans une dernière sous-partie on fait le lien avec l'holomorphie grâce au théorème de Morera qui donne une équivalence entre analyticité et holomorphie et on donne des conséquences remarquables comme par exemple les inégalités de Cauchy ainsi que les théorèmes de Liouville et de d'Alembert. Finalement, dans une dernière partie, on donne différents exemples et applications. Tout d'abord, on donne un exemple de détermination d'un développement en série entière à partir de la résolution d'une équation différentielle linéaire puis d'une résolution d'équation différentielle par développement en série entière. Ensuite, on donne une application en probabilités où l'on s'intéresse à la série génératrice qui permet de caractériser la loi ainsi que de donner une expression des moments d'ordre 1 et 2 d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Enfin, on donne une dernière application dans le cadre du dénombrement avec tout d'abord les nombres de Bell et de Catalan puis enfin le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$.
On trouvera enfin en annexe une liste de développements en série entière usuels ainsi que leurs rayons de convergence respectifs.

Plan général

Cours détaillé

I Rayon de convergence

I.1 Généralités

Dans toute cette sous-partie, on considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Définition 1 : Série entière [Deschamps, p.601] :
On appelle **série entière associée à** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum f_n$ où chaque $f_n : z \longmapsto a_n z^n$ est définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Remarque 2 : [Deschamps, p.601]
$*$ La somme de la série entière est définie comme la somme de la série $\sum f_n$, c'est-à-dire la fonction $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
$*$ De manière analogue, on définit les séries entières de la variable réelle, comme étant les séries de fonctions $\sum u_n$, où $u_n : t \longmapsto a_n t^n$ est une fonction de la variable réelle et à valeurs réelles.

Lemme 3 : Lemme d'Abel [Deschamps, p.602] :
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 4 : Rayon de convergence [Deschamps, p.602] :
On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ de l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ et on la note R.

Définition 5 : Disque ouvert de convergence [Deschamps, p.602] :
On appelle **disque ouvert de convergence** de la série $\sum a_n z^n$ le disque $D_o(0, R)$.

Exemple 6 : [Deschamps, p.602]
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série $\sum a^n z^n$ est égal à $\frac{1}{|\alpha|}$.
En effet, la suite $((az)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $|az| \leq 1$.

Remarque 7 : [Deschamps, p.603]
On ne peut rien dire à priori sur le comportement de la suite $(|a_n| R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque le rayon de convergence R est strictement positif.

Proposition 8 : [Deschamps, p.603]
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.
$*$ Si $|z| < R$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
$*$ Si $|z| > R$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Corollaire 9 : [Deschamps, p.603]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul.
Le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ vérifie :

$$\mathcal{D}_o(0,R) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_f(0,R)$$

I.2 Calcul du rayon de convergence

Dans toute cette sous-partie, on considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et l'on pose $\frac{1}{R} = 0$ si $R = +\infty$ et $\frac{1}{R} = +\infty$ si $R = 0$.

Proposition 10 : Règle de d'Alembert [Deschamps, p.606] :
Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain n_0 assez grand et que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \geq n_0}$ possède une limite ℓ, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

Exemple 11 : [Deschamps, p.604]
La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Remarque 12 : [Ramis, p.575]
Le critère précédent ne s'applique pas aux séries entières dites "lacunaires" (en ce sens que beaucoup de coefficients sont nuls).

Proposition 13 : Règle d'Hadamard [Ramis, p.577] :
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est donné par $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

Exemple 14 : [Ramis, p.577]
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 + (-1)^n$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$, donc par la règle d'Hadamard, on a $R = 1$.

Proposition 15 : [Deschamps, p.605]
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
* Si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geq R_b$.
* si $a_n \underset{n \to +\infty}{=} O(b_n)$ ou $a_n \underset{n \to +\infty}{=} o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
* Si $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.

Exemple 16 : [Deschamps, p.606]
La série entière $\sum \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$ a pour rayon de convergence $R = 2$.

I.3 Rayon de convergence et opérations

Dans toute cette sous-partie, on considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Définition 17 : Série entière somme/produit de Cauchy/produit :
On appelle :
* **série somme** la série $\sum (a_n + b_n) z^n$.
* **série produit de Cauchy** la série $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.
* **série produit par** $\lambda \in \mathbb{C}$ la série $\sum (\lambda a_n) z^n$.

Proposition 18 : [Deschamps, p.608]
Le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ et on a de plus égalité si $R_a \neq R_b$.

Proposition 19 : [Deschamps, p.609]
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i z^i\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

Donc en particulier le rayon de convergence R de la série produit de Cauchy vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.

Exemple 20 : [Ramis, p.582]
Le produit de Cauchy des séries $\sum z^n$ et $\sum a_n z^n$ où $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $a_n = 0$ pour $n \geq 2$ est égal à 1 et ainsi $R > \min(R_1, R_2)$ et $R_1 \neq R_2$.

Définition 21 : Série entière dérivée/primitive [Deschamps, p.611] :
On appelle :
* **série entière dérivée** la série $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$.
* **série entière primitive** la série $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.

Proposition 22 : [Deschamps, p.611]
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
La série entière $\sum a_n z^n$ a le même rayon de convergence que les séries entières $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$, $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, $\sum n^p a_n z^n$ et $\sum (\lambda a_n) z^n$.

II Propriétés de la somme

II.1 Régularité sur le disque de convergence

Dans toute cette partie, on considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Théorème 23 : [Deschamps, p.610]
La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\mathcal{D}_f(0,\rho)$ où $\rho \in [0; R[$.

Remarque 24 : [Deschamps, p.610]
Comme le montre la série $\sum z^n$, la convergence normale n'a pas lieu en général sur $\mathcal{D}_o(0,R)$.

Corollaire 25 : [Deschamps, p.610]
La restriction de la somme au disque ouvert de convergence est continue.

Exemple 26 : Formule de Cauchy [Deschamps, p.610] :
On considère $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f et on pose pour tout $r \in]0; R[$, $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.
On a alors pour tout $r \in]0; r[$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} \mathrm{d}t$$

En particulier, on en déduit que $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$

Théorème 27 : Théorème de primitivation terme à terme :
Si f est la somme de $\sum a_n z^n$ et F une primitive de f sur $]-R; R[$, alors pour tout $t \in]-R; R[$, on a :

$$F(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$

Exemple 28 : [Deschamps, p.612]

$$\forall x \in]-1; 1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \text{ et } \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Théorème 29 : Théorème de dérivation terme à terme [Deschamps (2), p.611] :
Si f est la somme de $\sum a_n z^n$, alors $f \in \mathcal{C}^1(]-R; R[)$, alors pour tout $t \in]-R; R[$, on a :

$$f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

Exemple 30 : [Deschamps, p.612]

$$\forall x \in]-1; 1[,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

Remarque 31 : [Deschamps, p.612]
On a en particulier $f \in \mathcal{C}^\infty(]-R; R[)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

II.2 Comportement au bord

Développement 1 : [cf. GOURDON]

Théorème 32 : Théorème d'Abel angulaire [Gourdon, p.263 + 264] :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge et de somme notée f sur le disque unité.
Si on fixe $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et que l'on pose :

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta_0; \theta_0] \text{ tq } z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$

alors on a : $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exemple 33 : [Gourdon, p.264]

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ et } \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Théorème 34 : Théorème taubérien faible [Gourdon, p.264] :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité.
Si $a_n \underset{n \to +\infty}{=} o(\frac{1}{n})$ et s'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = S$, alors $\sum a_n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

III Fonctions analytiques et holomorphes

III.1 Fonction développable en série entière

Définition 35 : Fonction développable en série entière [Deschamps, p.613] :
On considère f définie sur un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$.
On dit que f est **développable en série entière en** z_0 lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de z_0 et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul tels que :

$$\forall z \in \mathcal{V},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Exemple 36 : [Deschamps, p.614]
Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $f : z \longmapsto \frac{1}{a-z}$ définie sur $\mathbb{C}\backslash\{a\}$.
f est développable en série entière sur $\mathcal{D}_o(0, |a|)$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$.

Remarque 37 : [Deschamps, p.614]
S'il existe, le développement en série entière est unique.

Exemple 38 : [Deschamps, p.617]
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais non développable en série entière en 0.

Proposition 39 : [Deschamps, p.628]
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle de la forme $I =]-a; a[$.
S'il existe $\rho > 0$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$$

alors f est développable en série entière en 0 sur $]-R; R[$ où $R = \min(a, \rho)$.

Théorème 40 : Théorème de Bernstein [Deschamps, p.628] :
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0.
Si f et toutes ses dérivées sont positives sur ce voisinage, alors f est développable en série entière.

III.2 Propriétés des fonctions analytiques

Dans toute cette sous-partie, on considère Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

Définition 41 : Fonction analytique [Tauvel, p.50] :
On dit qu'une fonction définie sur Ω est une **fonction analytique sur** Ω lorsqu'elle est développable en série entière en tout point de Ω.

Théorème 42 : [Tauvel, p.50]
Si une série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme f est analytique sur $\mathcal{D}_o(0, R)$.

On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytique sur Ω ($\mathcal{A}(\Omega)$ est alors une $\mathbb{C}$-algèbre contenant celle des polynômes)

Théorème 43 : Principe du prolongement analytique [Tauvel, p.52] :
Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.
Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
* f est identiquement nulle sur Ω.
* f est identiquement nulle sur un voisinage de a.
* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$.

Théorème 44 : Principe des zéros isolés [Tauvel, p.53] :
Soit $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.
Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et que f est non identiquement nulle, alors l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de Ω.

Définition 45 : $\mathbb{C}$-dérivabilité [Tauvel, p.39] :
On dit qu'une fonction f est **$\mathbb{C}$-dérivable en** $z_0 \in \Omega$ lorsque la fonction :

$$\tau : \left| \begin{array}{ccc} \Omega\backslash\{z_0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \end{array} \right.$$

admet une limite lorsque z tend vers z_0.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'(z_0)$ et est appelée **dérivée de** f **en** z_0.

Définition 46 : Fonction holomorphe [Tauvel, p.39] :
On dit qu'une fonction f est une **fonction holomorphe sur** Ω lorsque f est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.

On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Exemple 47 : [Tauvel, p.39]
Toute fonction analytique est holomorphe sur son disque de convergence.

III.3 Lien avec les fonctions holomorphes et conséquences

Dans toute cette sous-partie, on considère Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

Théorème 48 : [Tauvel, p.77]
Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
* On a $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ et le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a est au moins égal à $d(a, \mathbb{C}\backslash\Omega)$.
* Si Ω est convexe et si γ est un chemin fermé dans Ω tel que $a \notin \mathrm{Im}(\gamma)$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(a)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

Corollaire 49 : [Tauvel, p.78]
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
La fonction f est indéfiniment dérivable sur Ω.

Théorème 50 : Théorème de Morera [Tauvel, p.78] :
Soit f une fonction continue sur Ω.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* f est holomorphe sur Ω. * f est analytique sur Ω.
* f possède localement une primitive sur Ω.
* Pour tout triangle $\Delta \subseteq \Omega$, on a $\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Corollaire 51 : [Tauvel, p.78]
Soient $w \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{w\})$.
Si f est continue sur Ω, alors f est holomorphe sur Ω.

Théorème 52 : Inégalités de Cauchy [Tauvel, p.84] :
Soient $R > 0$ et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{D}(0,R))$.
On a alors pour tout $z \in \mathcal{D}(0,R)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et pour tout $r \in]0;R[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|a_n| = \frac{1}{n!}\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{\sup\limits_{|z|=r}|f(z)|}{r^n}$$

Théorème 53 : Théorème de Liouville [Tauvel, p.84] :
Toute fonction entière et bornée est constante.

Théorème 54 : Théorème de d'Alembert [Tauvel, p.84] :
Tout polynôme d'une variable à coefficient complexe et non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Proposition 55 : [Tauvel, p.85]
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
La fonction f possède la propriété de la moyenne sur Ω

Proposition 56 : [Tauvel, p.86]
Soit f une fonction continue sur Ω.
Si f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω, alors f vérifie le principe du maximum sur Ω.

IV Exemples et applications

IV.1 Résolution d'équations différentielles

Exemple 57 : [Deschamps, p.627]

$$\forall t \in]-1;1[,\ \mathrm{Arcsin}^2(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!}t^{2n}$$

Développement 2 : [cf. BERTHELIN]

Exemple 58 : [Berthelin, p.147]
Une solution de l'équation différentielle $(E) : (t^2+t)y'' + (3t+1)y' + y = 0$ est la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(t) = \frac{a_0}{1+t}$ (avec $a_0 \in \mathbb{R}$).

IV.2 Application en probabilités

Dans toute cette sous-partie, on considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 59 : Série génératrice [Deschamps, p.949] :
On appelle **série génératrice de** X la fonction G_X définie par $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

Remarque 60 : [Deschamps, p.949]
* Par le théorème du transfert, $G_X(t)$ est défini si, et seulement si, $\sum \mathbb{P}(X=n)t^n$ converge absolument et on a alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=x)t^n$.
* La série entière $\sum \mathbb{P}(X=n)t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, elle est définie, converge normalement sur $\mathcal{D}_f(0,1)$ et est continue sur $[-1;1]$.

Proposition 61 : [Deschamps, p.949]
La loi de X est entièrement déterminée par G_X.
Plus précisément, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = n!G_X^{(n)}(0)$.

Théorème 62 : [Deschamps, p.950]
X est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et on a alors $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

Théorème 63 : [Deschamps, p.950]
X possède un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et on a alors $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$.

Corollaire 64 : [Deschamps, p.950]
Si G_X est deux fois dérivable en 1, alors X possède un moment d'ordre 2 et on a alors $\mathbb{E}\left(X^2\right) = G''_X(1) + G'_X(1)$.

Exemple 65 : [Deschamps, p.950]
Si X est une variable aléatoire réelle de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$. On retrouve bien le fait que $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

IV.3 Application au dénombrement

Exemple 66 : [Gourdon, p.314 + Berhuy, p.719]
* Le nombre B_n de partitions de $[\![1;n]\!]$ est $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$ (nombres de Bell).
* Le nombre C_n de bons parenthésages du mot $a_0...a_n$ est $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (nombres de Catalan).

Théorème 67 : [Berhuy, p.714]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ (c'est-à-dire de permutations sans points fixes).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k}$ et $D_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Proposition 68 : [Caldero, p.239]
Soit $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n))$.
Si F_n est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de points fixe de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors pour tout $r \in [\![0;n]\!]$ on a $\mathbb{P}(F_n = r) = \frac{\binom{n}{r}D_{n-r}}{\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n)} = \frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}$.
De plus, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson de paramètre 1 et on a $\mathbb{E}(F_n) = \mathrm{Var}(F_n) = 1$.

V Annexe

V.1 Développements en série entière usuels

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},\ R = +\infty$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ R = +\infty$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ R = +\infty$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n},\ R = +\infty$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ R = +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\ R = 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n,\ R = 1$$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{x^n}{n},\ R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n,\ R = 1$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n},\ R = 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n},\ R = 1$$

$$\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ R = 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\ R = 1$$

Remarques sur la leçon

— Il est également possible de parler de l'exponentielle complexe ou encore de l'espace de Bergman.

Liste des développements possibles

— Théorème d'Abel angulaire.

— Résolution d'une EDO par DSE.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Jean-Pierre Ramis, *Mathématiques, Tout-en-un pour la licence 2*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Patrice Tauvel, *Analyse complexe pour la licence 3*.

— Florent Berthelin, *Équations différentielles*.

— Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Analystan*.