 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Démontrer qu'un fermé relatif d'un compact est compact.

2 - Démontrer qu'un produit fini de compacts est compact.

3 - Démontrer que l'image d'un compact par une application continue est compact.

II Exercices sur la compacité et la connexité par arcs

Exercice 1 :
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ de dimension finie qui converge de limite notée ℓ.
Montrer que $\Gamma = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

Exercice 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1 - Montrer que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé. Est-il compact ?
2 - Le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs ?
3 - Montrer que le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact.
4 - Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice 3 :
On considère $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
1 - On suppose que E est de dimension finie.
Montrer que les parties compactes de E sont exactement les parties fermées bornées.
2 - Montrer que le résultat est faux en dimension infinie.
3 - Soit M un sous-espace vectoriel fermé strict de E.
Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists u \in E \text{ tq } \|u\| = 1 \text{ et } d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

4 - Démontrer que E est de dimension finie si, et seulement si, la boule unité fermée $\mathcal{B}_f(0,1)$ de $(E,\|\cdot\|)$ est compacte.
Indication : Pour le sens réciproque, on raisonnera par contraposée et on itérera la question précédente à une suite d'espaces vectoriels inclus les uns dans les autres strictement.

Exercice 4 :
On dit que deux parties A et B de deux espaces vectoriels normés E et F sont homéomorphes lorsqu'il existe une bijection $f : A \longrightarrow B$ telle que f et f^{-1} soient continues.
1 - Démontrer que $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ est connexe par arcs.
2 - Démontrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
3 - Démontrer que le cercle trigonométrique n'est homéomorphe à aucun segment de $\mathbb{R}$.

III Exercices sur les endomorphismes auto-adjoints

Exercice 5 :
On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$.
1 - Montrer que l'application $< \cdot ; \cdot >: (P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2 - Montrer que la relation :

$$u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\mathrm{d}t$$

définit un endomorphisme u de l'espace E.
3 - Vérifier que l'endomorphisme u est autoadjoint.
Indication : On admettra que l'on peut permuter les deux intégrales.
4 - Calculer la trace de u.

Exercice 6 :
Justifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et trouver $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ tel que $P^\intercal AP$ soit diagonale.