

# Décomposition de Dunford :

## I Le développement

Le but de ce développement est de démontrer la décomposition de Dunford qui sera très utile en pratique pour calculer les puissances ainsi que l'exponentielle d'une matrice.

Dans tout ce développement, on considère  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

### Théorème 1 : Décomposition de Dunford [Rombaldi, p.613]

Si le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors il existe un unique couple  $(d, n)$  d'endomorphismes de  $E$  tel que  $d$  est diagonalisable,  $n$  est nilpotente,  $d$  et  $n$  commutent et  $u = d + n$ .

De plus,  $d$  et  $n$  sont des polynômes en  $u$ .

#### Preuve :

\* Existence de la décomposition de Dunford :

Puisque  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , on peut alors écrire  $\chi_u = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  et on pose

pour tout  $j \in \llbracket 1; s \rrbracket$ ,  $N_j = \text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id})^{\alpha_j}$ .

Puisque  $\chi_u$  est un polynôme annulateur de  $u$ , on va appliquer le lemme des noyaux (car les  $(X - \lambda_j)^{\alpha_j}$  sont deux à deux premiers entre eux). On note alors  $p_i = P_i(u)$

le projecteur sur  $N_i$  parallèlement à  $\bigoplus_{\substack{j \in \llbracket 1; s \rrbracket \\ j \neq i}} N_j$ .

Posons alors  $d = \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i$  diagonalisable (car  $E = \bigoplus_{j=1}^s N_j$  et chaque  $N_j$  est stable

par  $u$  et induit une homothétie) et  $n = u - d = \sum_{i=1}^s (u - \lambda_i \text{Id}) p_i$ . Les  $p_i$  sont donc

des projecteurs qui commutent avec  $u$  et pour tous  $i, j \in \llbracket 1; s \rrbracket$  distincts, on a  $p_i \circ p_j = 0$ . On obtient alors par récurrence que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, n^q = \sum_{i=1}^s (u - \lambda_i \text{Id})^q p_i$$

Or, pour  $q = \max_{i \in \llbracket 1; s \rrbracket} \alpha_i$ , alors on a  $(u - \lambda_i \text{Id})^q p_i = ((X - \lambda_i)^q P_i)(u) = 0$  (car  $\chi_u$  divise  $(X - \lambda_i)^q P_i$ ). On a alors  $n^q = 0$  et donc  $n$  est nilpotente.

Ainsi construits,  $d$  et  $n$  sont respectivement diagonalisable et nilpotent et  $dn = nd$  (polynômes en  $u$ ).

\* Unicité de la décomposition de Dunford :

Soit  $(d', n')$  une autre décomposition de Dunford.

On a alors  $d'$  et  $n'$  qui commutent entre eux mais également avec  $u = d' + n'$ . Or, puisque  $d$  et  $n$  sont des polynômes en  $u$ ,  $d'$  et  $n'$  commutent aussi avec  $d$  et  $n$ .

On a alors  $d - d' = n' - n$  avec  $n' - n$  nilpotente (car  $n$  et  $n'$  commutent) et  $d - d'$  diagonalisable (car  $d$  et  $d'$  commutent donc sont co-diagonalisables). Ainsi,  $n' - n$  est à la fois nilpotente et diagonalisable, donc  $n' - n = 0$ .

Finalement, on obtient  $n' = n$  et par conséquent  $d = d'$ .

Ainsi, on a donc montré l'existence et l'unicité de la décomposition de Dunford. ■

### Corollaire 2 : [Rombaldi, p.766]

Si le polynôme caractéristique de  $M$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors on a l'équivalence :

$$(M \text{ est diagonalisable}) \iff (e^M \text{ est diagonalisable})$$

#### Preuve :

\* Si  $M$  est diagonalisable, alors il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tels que  $M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$  et on a alors (par continuité de la conjugaison)  $e^M = P e^D P^{-1} = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1}$ .

Donc  $e^M$  est diagonalisable.

\* Réciproquement, si  $e^M$  est diagonalisable, alors on considère  $(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  la décomposition de Dunford de  $M$ .

Comme  $D$  et  $N$  commutent, on a :

$$e^M = e^{D+N} = e^D e^N = \underbrace{e^D}_{=D_e} + \underbrace{e^D(e^N - I_n)}_{=N_e}$$

On a alors  $D_e$  diagonalisable et  $N_e$  nilpotente. En effet,  $D_e$  est diagonalisable par le premier point et comme  $D$  et  $N$  commutent, les matrices  $e^D$  et  $N$  commutent également et on a :

$$N_e = N e^D P(N), \text{ où } P(X) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X^{k-1}}{k!}$$

on remarque alors que  $N_e^n = 0$  (car  $e^D$  et  $N$  commutent), donc  $N_e$  est nilpotente.

On a montré que  $(D_e, N_e)$  est la décomposition de Dunford de  $e^M$  qui est diagonalisable, donc on a  $N_e = 0$ . En trigonalisant la matrice  $N$ , on remarque que  $P(N)$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc  $P(N)$  est inversible. Comme  $e^D$  est aussi inversible, on conclut que  $N = 0$  et que  $M$  est diagonalisable. ■

## II Remarques sur le développement

### II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans ce développement, on a utilisé de manière centrale le lemme des noyaux :

**Lemme 3 : Lemme des noyaux [Rombaldi, p.609] :**

Soient  $r$  un entier naturel supérieur ou égal à 2,  $P_1, \dots, P_r$  des polynômes non nuls de  $\mathbb{K}[X]$  deux à deux premiers entre eux et  $P = \prod_{i=1}^r P_i$ .

On a alors la décomposition en somme directe  $\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u))$  et les projecteurs  $\pi_k : \text{Ker}(P(u)) \rightarrow \text{Ker}(P_k(u))$  sont des éléments de  $\mathbb{K}[u]$ .

**Preuve :**

D'après le théorème de Bézout ( $\mathbb{K}[X]$  est euclidien et les  $Q_k = \prod_{j=1, j \neq k}^r P_j$  sont premiers entre eux), il existe des polynômes  $R_1, \dots, R_r$  tels que  $\sum_{k=1}^r R_k Q_k = 1$ . Ainsi, cette égalité donne :

$$\forall x \in E, \sum_{k=1}^r (R_k(u) \circ Q_k(u))(x) = x$$

Soit  $x \in \text{Ker}(P(u))$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$ , on a (par commutativité de l'algèbre  $\mathbb{K}[u]$ ) :

$$P_k(u) ((R_k(u) \circ Q_k(u))(x)) = (R_k(u) \circ P(u))(x) = 0$$

On a alors  $\text{Ker}(P(u)) \subseteq \sum_{k=1}^r \text{Ker}(P_k(u))$  et comme pour tout  $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$  on a  $\text{Ker}(P_k(u)) \subseteq \text{Ker}(P(u))$  on a alors l'égalité  $\text{Ker}(P(u)) = \sum_{k=1}^r \text{Ker}(P_k(u))$ .

Montrons à présent que la somme est directe :

Soit  $(x_1, \dots, x_r) \in \prod_{k=1}^r \text{Ker}(P_k(u))$  tel que  $\sum_{j=1}^r x_j = 0$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$ , on a  $P_k(u)(x_k) = 0$  et :

$$0 = Q_k(u) \left( \sum_{j=1}^r x_j \right) = \sum_{j=1}^r Q_k(u)(x_j) = Q_k(u)(x_k)$$

Or,  $P_k$  et  $Q_k$  sont premiers entre eux, donc il existe deux polynômes  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $AP_k + BQ_k = 1$  et l'égalité dans  $\mathcal{L}(E)$  donne :

$$A(u) \circ P_k(u) + B(u) \circ Q_k(u) = \text{Id}$$

En particulier :

$$x_k = (A(u) \circ P_k(u))(x_k) + (B(u) \circ Q_k(u))(x_k) = 0$$

On a donc  $\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u))$  et les projecteurs de  $\text{Ker}(P(u))$  sur  $\text{Ker}(P_k(u))$  sont les  $\pi_k = R_k(u) \circ Q_k(u) \in \mathbb{K}[u]$ . ■

### II.2 Exemple de calcul de décomposition de Dunford

#### II.2.1 Par les sous-espaces caractéristiques

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme  $A$  est triangulaire supérieure, on a  $\chi_A = (X - 1)^2(X - 2)$  et on pose  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 2$ . La valeur propre 1 est de multiplicité algébrique  $M_1 = 2$  et la valeur propre 2 est de multiplicité algébrique  $m_2 = 1$ .

On note  $N_1 = \text{Ker}((A - I_3)^2)$  et  $N_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)$ . Par le lemme des noyaux, l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  se décompose comme suit :

$$\mathbb{R}^3 = N_1 \oplus N_2 = \text{Ker}((A - I_3)^2) \oplus \text{Ker}(A - 2I_3)$$

Déterminons ces sous-espaces caractéristiques :

\* Calcul de  $N_1 = \text{Ker}((A - I_3)^2)$  :

On sait que c'est un espace vectoriel de dimension  $m_1 = 2$ . On calcule :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,  $N_1 = \text{Ker}((A - I_3)^2)$  est le plan vectoriel engendré par les vecteurs  $v_1 = (1, 0, 0)$  et  $v_2 = (0, 1, 0)$ . On a alors :

$$N_1 = \text{Ker}((A - I_3)^2) = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$$

\* Calcul de  $N_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)$  :

On sait que c'est un espace vectoriel de dimension  $m_2 = 1$ . Pour déterminer le noyau  $\text{Ker}(A - I_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } Av = 2v\}$ , on résout :

$$\begin{cases} x + y + z = 2x \\ y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

Le sous-espace caractéristique  $N_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)$  est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $v_3 = (2, 1, 1)$  et ainsi  $N_2 = \mathbb{R}v_3$ .

La famille  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  est alors une base de  $\mathbb{R}^3$  et :

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2}_{=N_1} \oplus \underbrace{\mathbb{R}v_3}_{=N_2}$$

On définit l'endomorphisme  $d$  par  $d(v_1) = v_1$ ,  $d(v_2) = v_2$  (car  $v_1, v_2 \in N_1$ ) et  $d(v_3) = 2v_3$  (car  $v_3 \in N_2$ ). Dans la base  $\mathcal{B}$ , la matrice de  $d$  est donc la matrice  $D = \text{diag}(1, 1, 2)$ .

Or, nous voulons la matrice de  $d$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ , ainsi :

$$d(e_1) = d(v_1) = (1, 0, 0) = e_1 \text{ et } d(e_2) = d(v_2) = (0, 1, 0) = e_2$$

De plus, on a  $v_3 = (2, 1, 1) = 2e_1 + e_2 + e_3$  et on a aussi  $e_3 = (0, 0, 1) = -2v_1 - v_2 + v_3$ , d'où :

$$\begin{aligned} d(e_3) &= d(-2v_1 - v_2 + v_3) = -2d(v_1) - d(v_2) + d(v_3) = -2v_1 - v_2 + 2v_3 \\ &= -2e_1 - e_2 + 2(2e_1 + e_2 + e_3) = 2e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\Delta = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Enfin, on a également :

$$N = A - \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## II.2.2 Par la décomposition en éléments simples

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme  $A$  est triangulaire supérieure, on a  $\chi_A = \underbrace{(X+1)}_{=Q_2(X)} \underbrace{(X-1)^2}_{=Q_1(X)}$  et on pose  $\lambda_1 = -1$

et  $\lambda_2 = 1$ .

La décomposition de  $\frac{1}{\chi_A}$  est :

$$\frac{1}{(X+1)(X-1)^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{X+1} + \frac{2}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{X+1} + \frac{3-X}{(X-1)^2} \right)$$

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{4}Q_1(X) + \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{4}X \right) Q_2(X) = 1$$

Ainsi, en posant  $R_1 = \frac{1}{4}$  et  $R_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}X$  on a alors les matrices spectrales :

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Pi_2 = \frac{1}{4}(A + I_3)(3I_3 - A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$D = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que :

$$N = A - D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## II.3 Les antécédents de l'identité par l'exponentielle matricielle

### Théorème 4 : [Rombaldi, p.779]

On a l'équivalence :

$$(e^A = I_n) \iff (A \text{ diagonalisable et } \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq 2i\pi\mathbb{Z})$$

### Preuve :

\* Si  $e^A = I_n$ , alors d'après le corollaire, la matrice  $A$  est diagonalisable et donc il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  tels que  $A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ . On a alors  $e^A = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1}$  et ainsi les valeurs propres de  $e^A$  sont les  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ . Comme on a la relation  $e^A = I_n$ , on en déduit pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  que  $e^{\lambda_k} = 1$ , ce qui équivaut à  $\lambda_k \in 2i\pi\mathbb{Z}$ , d'où le résultat.

\* Réciproquement, si  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq 2i\pi\mathbb{Z}$ , alors il existe des entiers relatifs  $k_1, \dots, k_n$  et une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  tels que l'on ait la relation  $A = P \text{diag}(2i\pi k_1, \dots, 2i\pi k_n) P^{-1}$ .

On a alors directement que  $e^A = P \text{diag}(e^{2i\pi k_1}, \dots, e^{2i\pi k_n}) P^{-1} = I_n$ . ■

Les résultats dans le développement ne se transpose pas si l'on remplace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Par exemple, on vérifie par un calcul direct que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exp \left( \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^a \cos(b) & e^a \sin(b) \\ -e^a \sin(b) & e^a \cos(b) \end{pmatrix}$$

En particulier, en prenant  $a = 0$  et  $b = \frac{\pi}{2}$ , on trouve un antécédent  $M$  dans l'espace  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de  $I_2$  par l'exponentielle. Or le polynôme caractéristique de  $M$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , donc  $M$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

## II.4 Recasages

Recasages : 150 - 151 - 152 - 154 - 156.

## III Bibliographie

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie.*