 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 62 banque CCINP :
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0$.
a) Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
b) Prouver que $E = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}_E)$ de deux manières différentes (avec puis sans le lemme des noyaux).
c) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que $\mathrm{Im}\,(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}_E)$.

2 - Exercice 93 banque CCINP :
Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
b) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes et en déduire que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}\left(u^2 + u + \mathrm{Id}_E\right)$.
c) On suppose dans cette question que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u en justifiant la réponse.

3 - Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Donner la dimension ainsi qu'une base de $\mathbb{K}[u]$.

II Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 :
Donner le polynôme minimal des matrices suivantes et préciser si elles sont, ou non, diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :
Soit A la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 - Montrer que A n'a pas de polynôme annulateur (non nul) de degré inférieur ou égal à 2.
2 - Trouver le polynôme minimal de A.
3 - Montrer que A est inversible et préciser A^{-1}.

Exercice 3 :
Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1.
Déterminer un polynôme annulateur pour J et en déduire une expression de J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

III Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 :
Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels telle que $A^2 + A + I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
1 - La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2 - Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 :
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ définie par $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.
1 - Justifier que B n'est pas inversible.
2 - Préciser la matrice B^2.
3 - Pour $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(0) = 0$, exprimer $Q(B)$ en fonction de $Q(A)$.
4 - Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 6 :
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1 - Montrer que la matrice AB est inversible si, et seulement si, A et B le sont.
2 - En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

IV Exercices avec questions ouvertes

Exercice 7 :
Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1 - Montrer que si la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge de limite la matrice nulle, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| < 1$.
2 - La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?
3 - Montrer que si la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| < 1$. La réciproque est-elle vraie ?