 v.hanecart@orange.fr

I Exercices sur les familles sommables

Exercice 1 :

1 - Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable.

2 - Calculer $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Exercice 2 :

1 - Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{k!}\right)_{(n,k)\in I}$ (avec $I=\{(n,k)\in\mathbb{N}^2 \mid k\geq n\}$) est sommable.

2 - Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.

Exercice 3 :

Soit $x\in]-1;1[$.
1 - Démontrer que la famille $\left(x^{k\ell}\right)_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2 - En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)x^n$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

II Exercices sur la réduction

Exercice 4 :

Soient $n\in\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de rang 1.
1 - Justifier que 0 est valeur propre de f et préciser la dimension de $E_0(f)$.
En déduire que f est trigonalisable.
2 - En déduire que f est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{tr}(f)\neq 0$.
3 - Montrer que $f^2=\operatorname{tr}(f)f$ (on discutera selon $\operatorname{tr}(f)$).

Exercice 5 :

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_0,a_1,...,a_{n-1}\in\mathbb{K}$.
On considère le polynôme $P_n=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$ et la matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1 - Montrer que les sous-espaces propres de A sont des droites.
2 - Montrer que pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$:

$$\det(\lambda I_n - A)=P_n(\lambda)$$

3 - En déduire que A est diagonalisable si, et seulement si, P_n admet n racines distinctes dans $\mathbb{K}$.

Exercice 6 :

À toute polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on associe le polynôme $Q=f(P)$ défini par :

$$Q=(X-1)(X-2)P'-2XP$$

1 - Préciser $f(1)$, $f(X)$ et $f\left(X^2\right)$.
2 - Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3 - Montrer que si P est un vecteur propre de f, alors $\deg(P)=2$.
4 - Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

III Exercices avec questions ouvertes

Exercice 7 :

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables.
La matrice $A+B$ est-elle toujours diagonalisable ? La matrice AB est-elle toujours diagonalisable ?

Exercice 8 :

1 - Une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible est-elle limite d'une suite de matrices non inversibles ?
2 - Une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible est-elle limite d'une suite de matrices inversibles ?