I Questions de cours : programme de base

1 - Énoncer et démontrer les identités remarquables et identités de polarisation.

2 - Montrer que toute famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre.

3 - Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore.

4 - Énoncer et démontrer les propriétés générales de l'orthogonal d'une partie/d'un sous-espace vectoriel.

5 - Énoncer et démontrer la caractérisation des isométries par la conservation du produit scalaire.

6 - Quelles sont les valeurs propres possibles pour une isométrie ? Démontrer ce résultat ?

7 - Montrer que les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

8 - Énoncer et démontrer la caractérisation spectrale des endomorphismes autoadjoints positifs/définis positifs.

9 - Donner les éléments propres d'une rotation plane puis démontrer ce résultat.

II Questions de cours : programme renforcé

1 - Énoncer et démontrer le théorème du supplémentaire orthogonal.

2 - Énoncer et démontrer le théorème de meilleure approximation d'un vecteur dans un s.e.v. de dimension finie.

3 - Énoncer et démontrer la caractérisation des projections orthogonales.

III Questions de cours : programme ultime

1 - Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2 - Montrer que si u est une isométrie de E et F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est également stable par u.

3 - Montrer que les matrices orthogonales de taille 2 sont les matrices de la forme $R(\theta)$ ou $S(\theta)$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$).

IV Exercices d'application du cours

Exercice 1 :
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = & -7x - 8y - 4z \\ y' = & 9x + 10y + 6z \\ z' = & -6x - 6y - 5z \end{cases}$$

Exercice 2 :
On cherche à résoudre :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left(1+t^2\right) y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 1 \quad (E)$$

1 - Rechercher les solutions développables en série entière de l'équation homogène (H) associée à (E). Y en a-t-il d'autres ?
2 - Trouver une solution particulière simple de (E).
3 - Conclure.

Exercice 3 :
1 - Résoudre l'équation différentielle : $ty'(t) = -y(t) \quad (E)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis sur $]-\infty;0[$.
2) En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
3) Tracer l'allure des courbes intégrales. Quels théorèmes généraux, valables pour les équations différentielles sans singularité, sont mis en défaut ?

Exercice 4 :
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\forall t > -\frac{1}{2},\ (2t+1)y''(t) + (4t-2)y'(t) - 8y(t) = 0 \quad (E)$$

en cherchant une solution développable en série entière et une solution exponentielle.

V Exercices d'approfondissement

Exercice 5 :
On cherche les fonctions $x : t \longmapsto x(t)$ solutions de l'équation différentielle :

$$4tx'' + 2x' - x = 0 \quad (*)$$

1 - Vérifier que $s : t \longmapsto \operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right)$ est solution sur $]0;+\infty[$ de $(*)$.
2 - Déterminer les éventuelles solutions de $(*)$ qui sont développables en série entière au voisinage de 0.
3 - En déduire les solutions sur $]0;+\infty[$ de $(*)$.

Exercice 6 :
1 - À l'aide des fonctions ch et sh, déterminer les fonctions $y : t \longmapsto y(t)$ à valeurs réelles solutions de $y''(t) = y(t)$.
2 - En posant $y(t) = z(t)\operatorname{ch}(t)$, donner la forme générale d'une solution de l'équation $y''(t) - y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$.

Exercice 7 :
En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}\,\mathrm{d}t.$$

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 8 :
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note sous réserve de convergence :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

1 - Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2 - Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f''(x) + f'(x) + f(x)$.
3 - En déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.