I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de la limite.

2 - Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

3 - Énoncer et démontrer l'égalité et l'inégalité des accroissements finis.

II Exercices

Exercice 1 :

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
1 - Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J à préciser.
2 - On note g l'application réciproque de f.
a) Représenter f et g sur le même dessin.
b) Montrer que g est dérivable sur J.
c) On note A le point de la courbe de g d'abscisse 0.
Préciser l'ordonnée de A et une équation de la tangente en A à la courbe de g.

Exercice 2 :

Soit $f : x \longmapsto \ln\left(1+x^2\right) - \text{Arctan}(x)$.
1 - Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(x) = f^{(n)}(x)\left(1+x^2\right)^n$$

2 - Préciser P_1 et P_2 et donner leurs racines.
3 - Donner une relation entre $P_{n+1}(x)$ et x, n, $P_n(x)$ et $P_n'(x)$.
4 - Montrer que P_n est une fonction polynomiale de degré au plus n.

Exercice 3 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(x^{2^{-n}}\right)$$

1 - Vérifier que f est paire.
2 - Soit $x > 0$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = f\left(x^{2^{-n}}\right)$.
3 - En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Soient f et g des fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$.
1 - Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$.
2 - On suppose de plus que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$.
Montrer que si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell$.
3 - En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)+x\sin(x)-1}{e^x-x-1}$.

Exercice 5 :

Dans cet exercice, on cherche à déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x)+f(y))$$

Soit f une telle fonction.
1 - Que faut $f(0)$? Démontrer que f est paire.
2 - Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = n^2 f(x)$.
3 - Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{f(1)}{p^2}$.
4 - Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{n}{p}\right) = \dfrac{n^2}{p^2} f(1)$.
5 - Conclure.

Exercice 6 :

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$.
L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il existe $c \in]0;1]$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.
1 - Soient $c \in]0;1]$ et M le point de coordonnées $(c, f(c))$.
Rappeler une équation de la tangente à la courbe représentative de f en M ainsi qu'une équation de la corde reliant $(0, f(0))$ à M. Donner une interprétation géométrique du résultat que l'on veut démontrer, et illustrer le sur un dessin.
2 - On définit $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
Vérifier que g est continue sur $[0;1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$.
3 - Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0;1]$.
4 - Démontrer le résultat dans le cas $f(1) = 0$.
5 - Dans cette question, on suppose que $f(1) > 0$.
a) Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g'(1)$.
b) En déduire que g' s'annule sur $]0;1[$ et conclure.
6 - Comment procéder si $f(1) < 0$.

v.hanecart@orange.fr

Exercice 7 :

On considère l'équation (E_a), d'inconnue $x > 0$,

$$\ln(x) = ax$$

1 - Démontrer que si $a \leq 0$, l'équation (E_a) admet une unique solution et que cette solution appartient à $]0;1]$.
2 - Démontrer que si $a \in \left]0; e^{-1}\right[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions.
3 - Démontrer que si $a = e^{-1}$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on précisera la valeur.
4 - Démontrer que si $a > e^{-1}$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.