 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 25 banque CCINP :

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2 - Exercice 26 banque CCINP :

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

a) Justifier que I_n est bien définie.
b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
d) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

3 - Exercice 27 banque CCINP :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0;1]$.
b) Soit $a \in]0;1[$.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;1]$?
c) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?
d) Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

II Exercices

Exercice 1 :
Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(\sqrt{x}-t)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

1 - Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2 - Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
3 - Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}^+$.
4 - Montrer que f admet une limite réelle en $+\infty$ et calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 2 :
Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f : x \longmapsto \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)t^x}\mathrm{d}t.$$

1 - Montrer que f est continue sur $]0;+\infty[$.
2 - Pour $x>0$, calculer $f(x+1)+f(x)$ et en déduire :

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Exercice 3 :
Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f : a \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{-\frac{a^2}{x^2}}\mathrm{d}x.$$

On admettra que $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
1 - Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est paire.
2 - Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3 - Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
4 - Soit $a>0$. En utilisant le changement de variable $x = \dfrac{a}{t}$, montrer que :

$$f'(a) = -2f(a).$$

5 - Pour tout $a \in \mathbb{R}$, préciser $f(a)$ en fonction de a.

Exercice 4 :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note sous réserve d'existence :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}^n(x)}\mathrm{d}x.$$

1 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe.
2 - Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 5 :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note sous réserve d'existence :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

1 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe.
2 - Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.