Leçon 239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Le programme fournit aux candidates et candidats de multiples pistes pour élaborer leur plan à commencer par les théorèmes de régularité usuels (allant jusqu'à inclure pour les plus solides celui d'holomorphie sous le signe somme). Ces résultats doivent être présentés dans un ordre rationnel et illustrés par des exemples et contre-exemples significatifs. Convolutions et transformées de Fourier font naturellement partie de ces exemples, les candidates et candidats peuvent également s'intéresser aux fonctions caractéristiques en théorie des probabilités, à la transformée de Laplace ou à certaines fonctions "spéciales" définies par une intégrale. Les techniques d'études asymptotiques de fonctions définies par des intégrales font partie intégrante de cette leçon.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 239 intitulée : "Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.". De nombreuses fonctions ne sont pas définissables explicitement à l'aide des fonctions classiques, mais nous en connaissons des expressions intégrales, ce qui pousse à étudier de manière générale les propriétés des fonctions définies à l'aide d'intégrales, dont on pourra espérer de bonnes propriétés compte tenu de la bonne connaissance que l'on a de l'intégrale.
On regarde dans une première partie s'il y a un possible transfert de régularité de l'intégrande à l'intégrale. La réponse à cette question est en générale positive avec les bonnes hypothèses. On remarque tout d'abord que la continuité est préservée avec le théorème de continuité sous le signe intégral puis de manière plus générale avec le théorème de dérivation et même de classe $\mathcal{C}^k$ sous le signe intégral. On continue dans un troisième point où l'on montre que l'holomorphie est également préservée et l'on peut alors montrer par exemple que la fonction Γ d'Euler est analytique sur le demi-plan complexe H. Enfin dans un dernier point on montre que les propriétés asymptotiques des fonctions se transfèrent aux intégrales en résumant les résultats dans un tableau et permettent de retrouver des comparaisons usuelles.
Dans une deuxième partie, on s'intéresse dans un premier temps au produit de convolution qui est une intégrale à paramètre et qui résout le problème qui est que la multiplication usuelle des (classes de) fonctions n'opère pas dans les espaces L^p. On donne ainsi la définition du produit de convolution ainsi que des propriétés fondamentales. On donne ensuite une application en probabilité et un résultat sur la dérivabilité. Un inconvénient de la convolution est que L^1 n'est pas une algèbre avec un élément neutre... Il nous faut donc remédier à ce problème en introduisant une approximation de l'unité. On donne alors la définition d'une approximation de l'unité ainsi que quelques exemples avant de passer au théorème d'approximation dans $L^1(\mathbb{R})$ ainsi qu'aux suites régularisantes qui permettent de construire des fonctions plateaux et d'avoir des résultats de densité. Dans une troisième sous-partie, on s'intéresse à la transformée de Fourier d'une fonction dans le cadre $L^1(\mathbb{R})$. On rappelle la définition de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ainsi que quelques propriétés de base. On donne ensuite deux exemples de transformée de Fourier avant de démontrer la formule d'échange, l'injectivité de la transformée de Fourier et la formule d'inversion. Dans un dernier point on traite de la transformée de Fourier dans le cadre plus large de $L^2(\mathbb{R})$. En effet, comme $L^2(\mathbb{R}) \subsetneq L^1(\mathbb{R})$, nous ne pouvons pas, en général, utiliser les formules intégrales pour définir les transformées de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$. Pourtant la nécessité de sortir du cadre des fonctions intégrables est apparue très tôt. Ainsi, Plancherel a étendu en 1910 la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$, espace présentant l'avantage par rapport à $L^1(\mathbb{R})$ d'être un espace de Hilbert, avec tous les avantages géométriques que cela représente. Cela aboutit, notamment grâce au théorème de Plancherel-Parseval, à une théorie plus complète et plus symétrique puisque dans $L^2(\mathbb{R})$ les fonctions f et $\widehat{f}$ jouent le même rôle. On commence donc par étendre la définition de la transformée de Fourier avant d'énoncer d'autres résultats tels que la formule de dualité et d'inversion.

Enfin, dans une dernière partie, on s'intéresse à divers exemples d'utilisation d'intégrales à paramètres. Tout d'abord, on se place dans le cadre de l'analyse complexe où l'on s'intéresse à l'indice d'un chemin fermé qui peut être vue de manière informelle comme le nombre de tour que l'on effectue autour d'un point donné. La notion d'indice est très importante car elle revient dans de grands théorèmes d'analyse complexe comme par exemple le théorème de Jordan, la formule de Cauchy ou encore le théorème des résidus (qui est un outil très puissant dans le calcul d'intégrales). On consacre une deuxième sous-partie aux probabilités où l'on rappelle la définition de la convergence en loi et de la fonction caractéristique qui peut être vue comme une transformée de Fourier avant de finir par quelques exemples ainsi que le théorème de Lévy qui ramène l'étude d'une convergence en loi à la convergence simple d'une suite de fonctions et le théorème central-limite. On termine finalement cette leçon avec l'étude de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$ en en donnant quelques propriétés fondamentales ainsi que la formule d'Euler-Gauss (qui est le début du prolongement de la fonction Γ au plan complexe).

Plan général

Cours détaillé

I Généralités sur les intégrales à paramètre

Dans toute cette partie, on considère $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

I.1 Sur la continuité

Théorème 1 : Théorème de continuité sous le signe $\int$ [El Amrani, p.410] :

Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
* Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-intégrable.
* Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
* Il existe une fonction μ-intégrable positive g sur X telle que pour presque tout couple $(x,t) \in X \times I$, $|f(x,t)| \leq g(x)$.

alors la fonction $F : t \longmapsto \int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ est continue sur I.

Exemple 2 : [Deschamps, p.756]

La fonction $g : t \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple 3 : [Deschamps, p.757]

On considère $H = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que, pour tout $p \in H$, la fonction $t \longmapsto e^{-pt}f(t)$ soit intégrable sur $[0; +\infty[$.
La transformée de Laplace $Lf : H \longrightarrow \mathbb{C}$ de f définie pour tout $p \in H$ par $Lf(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$ est continue sur H.

I.2 Sur la dérivabilité

Théorème 4 : Théorème de dérivation sous le signe $\int$ [El Amrani, p.411] :

On suppose que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
* Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-mesurable.
* Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable sur I.
* Il existe une fonction μ-intégrable positive g sur X telle que pour presque tout couple $(x,t) \in X \times I$ pour lequel $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$.

alors la fonction $F : t \longmapsto \int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable sur I, de dérivée la fonction $F' : t \longmapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$.

Remarque 5 :

Ce théorème se généralise pour montrer qu'une fonction F est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Exemple 6 : [El Amrani, p.411]
La fonction gamma d'Euler donnée par : $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}\mathrm{d}x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma^{(k)}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}(\ln(x))^k\mathrm{d}x$$

Exemple 7 : [Chabanol, p.46]
On considère X une variable aléatoire réelle qui suit la loi normale $\mathcal{N}_1\left(\mu, \sigma^2\right)$.
Sa fonction caractéristique est alors la fonction $t \longmapsto e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

I.3 Sur l'holomorphie

Théorème 8 : Théorème d'holomorphie sous le signe $\int$ [El Amrani, p.411] :
Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $g : X \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
* Pour presque tout $z \in \Omega$, la fonction $x \longmapsto g(x,z)$ est intégrable.
* Pour presque tout $x \in X$, la fonction $z \longmapsto g(x,z)$ est holomorphe dans Ω.
* Il existe une fonction intégrable positive g telle que pour presque tout couple $(x,z) \in X \times \Omega$, on a $|g(x,z)| \leq g(x)$.

alors la fonction $G : z \longmapsto \int_X g(x,z)\mathrm{d}x$ est analytique dans Ω, et de plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $G^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n g}{\partial z^n}(x,z)\mathrm{d}\mu(x)$.

Exemple 9 : [El Amrani, p.412]
En reprenant les notations de l'exemple 5, on a que la fonction Γ est analytique dans le demi-plan complexe H.

I.4 Comportement asymptotique

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $I = [a;b[$ est un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ et on considère $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ deux applications mesurables et intégrables sur I.

Lorsque x tend vers b par valeurs inférieures, on a le tableau :

	$g = o(h)$	$g = O(h)$	$g \sim h$
$\int_a^b h < +\infty$	$\int_x^b g = o\left(\int_x^b h\right)$	$\int_x^b g = O\left(\int_x^b h\right)$	$\int_x^b g \sim \int_x^b h$
$\int_a^b h = +\infty$	$\int_a^x g = o\left(\int_a^x h\right)$	$\int_a^x g = O\left(\int_a^x h\right)$	$\int_a^x g \sim \int_a^x h$

Exemple 10 : [Gourdon, p.164]
Au voisinage de $+\infty$, on a pour tout $\alpha > 0$:

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right) \text{ donc } \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = o\left(\int_1^x t^{\alpha-1}\mathrm{d}t\right) = o(x^\alpha)$$

Remarque 11 : [Deschamps, p.700]
La positivité de φ n'est pas superflue ! En effet, si l'on pose $f(x) = |\sin(x)|$ et $\varphi(x) = \sin(x)$, alors $f \underset{+\infty}{=} O(\varphi)$, alors que la fonction $x \longmapsto \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ est bornée mais pas $x \longmapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

II Convolution et transformation de Fourier

II.1 Convolution

Définition 12 : Produit de convolution [El Amrani, p.75] :
On dit que deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont **convolables** lorsque, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable.
On définit alors le **produit de convolution de f et de g** par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (f * g)(x) = \int_\mathbb{R} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 13 : [El Amrani, p.77]
Soient f et g deux fonctions convolables.
On a alors l'inclusion : $\mathrm{supp}(f * g) \subseteq \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$.

Théorème 14 : [El Amrani, p.78 + 80 + 81]
Soit $p \in [1;+\infty[$ et q sont exposant conjugué.
* Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
* Pour tous $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
* Pour tous $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, $f * g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

De plus, $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et si $p \neq 1$, alors $f * g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque 15 : [El Amrani, p.78 + 85]
La convolution est commutative, associative et bilinéaire sur $L^1(\mathbb{R})$. Autrement dit, $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p, +, \cdot, *)$ est une algèbre de Banach commutative (elle est cependant sans unité !).

Remarque 16 : [Chabanol, p.29]
La somme de deux variables aléatoires indépendantes définies sur $\mathbb{R}$ et de densités respectives f et g par rapport à la mesure de Lebesgue a pour densité $f * g$.

Exemple 17 :
Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{N}_1(0,\sigma)$ et $\mathcal{N}_1(0,\sigma')$, alors la variable aléatoire réelle $X+Y$ suit la loi $\mathcal{N}_1(0, \sigma+\sigma')$.

Théorème 18 : [El Amrani, p.90]

Soient $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$.
On a $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout $\ell \in [\![0; k]\!]$, $\frac{\partial^\ell (f*g)}{\partial x^\ell}(x) = \left(\frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell} * g\right)(x)$.

II.2 Approximation de l'unité

Définition 19 : Approximation de l'unité [El Amrani, p.86] :

On appelle **approximation de l'unité** dans $L^1(\mathbb{R})$ toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$*$ $\forall j \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 1$. $(*)$ $*$ $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{j\to+\infty} \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 0$.

Remarque 20 : [El Amrani, p.86]

Une fonction mesurable φ_j vérifiant $(*)$ est appelée une **densité de probabilité**.

Exemple 21 : [El Amrani, p.86]

$*$ $\varphi_j(x) = \frac{j}{2}e^{-j|x|}$ (approximation de Laplace).
$*$ $\varphi_j(x) = \frac{j}{\pi}\frac{1}{1+j^2x^2}$ (approximation de Cauchy).
$*$ $\varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{j^2x^2}{2}}$ (approximation de Gauss).

Théorème 22 : Théorème d'approximation dans $L^1(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.87] :

Soient $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité, $p \in [1; +\infty[$ et f une application de la variable réelle.
$*$ Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, alors $(f * \varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
$*$ Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $(f * \varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Définition 23 : Suite régularisante [El Amrani, p.94] :

On appelle **suite régularisante de** $\mathbb{R}$ toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $(*)$ de la définition 19 et telle qu'il existe une autre suite $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0 telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subseteq \mathcal{B}_o(0, \varepsilon_j)$.

Théorème 24 : [El Amrani, p.95]

Soient $p \in [1; +\infty[$ et $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante.
$*$ Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ et tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$f * \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \ f * \varphi_j \in L^p(\mathbb{R}) \text{ et } \lim_{j\to+\infty} \|f * \varphi_j - f\|_p = 0$$

$*$ Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on a $f * \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et la suite $(f * \varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Corollaire 25 : [El Amrani, p.96]

Soit $p \in [1; +\infty[$.
L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

II.3 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 26 : Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.109 + 110] :

On considère $f \in L^1(\mathbb{R})$.
On appelle **transformée de Fourier de** f l'application :

$$\widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Puis **transformation de Fourier** l'application :

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Lemme 27 : Lemme de Riemann-Lebesgue [El Amrani, p.109] :

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ existe et on a $\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Théorème 28 : [El Amrani, p.110]

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$.

Corollaire 29 : [El Amrani, p.111]

La transformation de Fourier est une application qui est linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exemple 30 : [El Amrani, p.111]

On considère l'application $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.
On a $p \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout réel $A > 0$ fixé, on a :

$$\int_{-A}^{A} e^{-|x|}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{1 - e^{-A(1-i\xi)}}{1 - i\xi} + \frac{1 - e^{-A(1+i\xi)}}{1 + i\xi}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient : $\mathcal{F}(p)(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$.

Exemple 31 : [El Amrani, p.111]

On considère $[a; b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f = \mathbb{1}_{[a;b]}$ (avec $a < b$).
La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{e^{\frac{i(b-a)\xi}{2}} - e^{-\frac{i(b-a)\xi}{2}}}{i\xi}e^{-\frac{i(a+b)\xi}{2}}$$

Et comme $\widehat{f}(0) = b - a$, on a finalement :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2\frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)}{\xi} e^{-\frac{i(a+b)\xi}{2}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b - a & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Proposition 32 : [El Amrani, p.114]

Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Remarque 33 : [El Amrani, p.114]

On peut montrer grâce à ce résultat qu'il n'y a pas d'élément neutre pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Développement 1 : [cf. EL AMRANI]

Proposition 34 : [El Amrani, p.112]

Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.

On a $\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right) : \xi \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$.

Lemme 35 : Formule de dualité [El Amrani, p.115] :

Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)g(v)\mathrm{d}v$$

Théorème 36 : [El Amrani, p.115]

La transformation de Fourier :

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array} \right.$$

est une application injective.

Théorème 37 : Formule d'inversion [El Amrani, p.116] :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$

II.4 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 38 : Formule de Plancherel-Parseval [El Amrani, p.123] :

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\left\|\widehat{f}\right\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$.

Théorème 39 : Théorème de Fourier-Plancherel [El Amrani, p.124]

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.

* Il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

* Pour une telle suite, la suite $(\mathcal{F}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une limite $\widetilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

Définition 40 : Transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.125] :

On considère $f \in L^2(\mathbb{R})$.

La limite $\widetilde{f}$ définie dans le théorème ci-dessus est appelée **transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R})$**.

Corollaire 41 : [El Amrani, p.125]

$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

Proposition 42 : [El Amrani, p.125]

La définition ci-dessus étend la définition de la transformée de Fourier classique dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (autrement dit, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\widehat{f} = \widetilde{f}$).

Théorème 43 : Formule de dualité [El Amrani, p.127]

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

On a $\widetilde{f}g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f\widetilde{g} \in L^1(\mathbb{R})$ et on a : $\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(u)g(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} f(v)\widetilde{g}(v)\mathrm{d}v$.

Théorème 44 : [El Amrani, p.127]

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

On a $f * g = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}\left(\widehat{f}\widehat{g}\right)$ et $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}$.

Proposition 45 : [El Amrani, p.128]

Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$.

On a $\widehat{f}\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ et $f * g = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}\left(\widehat{f}\widehat{g}\right)$.

Définition 46 : Opérateur de Fourier-Plancherel [El Amrani, p.129] :

On appelle **opérateur de Fourier-Plancherel**, l'opérateur :

$$\mathcal{P} : \left| \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{array} \right.$$

Théorème 47 : Formule d'inversion [El Amrani, p.130]

L'opérateur de Fourier-Plancherel est un automorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ et d'inverse $\mathcal{P}^{-1} = \overline{\mathcal{P}}$.

III Divers exemples

III.1 Application à l'analyse complexe

Définition 48 : Indice d'un chemin fermé [Tauvel, p.71] :
On considère γ chemin fermé et $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$.
On appelle **indice de λ par rapport à** γ le nombre $\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\lambda}$.

Proposition 49 : [Tauvel, p.71]
Soient γ et chemin fermé et $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$.
L'application $\lambda \longmapsto \mathrm{Ind}_\gamma(\lambda)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$.

Exemple 50 : [Tauvel, p.73]
On considère $r > 0$ et $\gamma = \mathcal{C}(a,r)^+$.
$\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ a alors deux composantes connexes et pour tout $\lambda \in \mathcal{D}(a,r)$ on a $\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda) = 1$ et 0 sinon.

Théorème 51 : Théorème de Jordan [ADMIS] :
Soit γ un chemin fermé simple.
$\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ possède exactement deux composantes connexes, une non bornée notée $\mathcal{U}$ et une bornée notée $\mathcal{V}$.
De plus, pour tout $\lambda \in \mathcal{U}$, $\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda) = 0$ et pour tout $\lambda \in \mathcal{V}$, $\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda) = \pm 1$.

Théorème 52 : Formule de Cauchy [Tauvel, p.136] :
Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et Γ un cycle dans Ω.
Si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, $\mathrm{Ind}_\Gamma(\lambda) = 0$, alors pour tout $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ on a :
$f(\lambda)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\lambda}\mathrm{d}z$

Théorème 53 : Théorème des résidus [Tauvel, p.103] :
Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $Z \subseteq \Omega$ un fermé discret, $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash Z)$ et Γ un cycle dans Ω.
Si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ on a $\mathrm{Ind}_\Gamma(\lambda) = 0$ et $\Gamma^* \cap Z = \emptyset$, alors l'ensemble $\{a \in Z \text{ tq } \mathrm{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$ est fini et :
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{a\in Z}\mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f,a)$$

Exemple 54 : [Tauvel, p.104]
Pour $a > 1$ fixé, on a $I = \int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\sin(t)}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Exemple 55 : [Tauvel, p.193]
On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et α un réel tel que $n > \alpha+1 > 0$.
On a :
$$I = \int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^n}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{n}\right)}$$

III.2 Application aux probabilités

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X également une variable aléatoire réelle.

Définition 56 : Convergence en loi [Queffélec, p.542] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Définition 57 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :
$$\Phi_X : \left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_\mathbb{R} e^{itx}\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)\end{array}\right.$$

Remarque 58 : [Chabanol, p.43]
Ceci permet de voir la fonction caractéristique comme la transformée de Fourier de la loi de X (elle existe toujours car $\left|e^{itX}\right| = 1$ et $\mathbb{P}_X$ est une mesure bornée).
On en déduit de plus que Φ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 59 :
* Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\Phi_X : t \longmapsto 1-p+pe^{it}$.
* Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\Phi_X : t \longmapsto \frac{\lambda}{\lambda-it}$.
* Si X suit une loi de Poisson de paramètre μ, alors $\Phi_X : t \longmapsto e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}$.

Développement 2 : [cf. QUEFFELEC]

Lemme 60 : [Queffélec, p.542]
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Théorème 61 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :
On a équivalence entre :
* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
* La suite $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.

Théorème 62 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}_1(0,1)$$

III.3 Étude de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

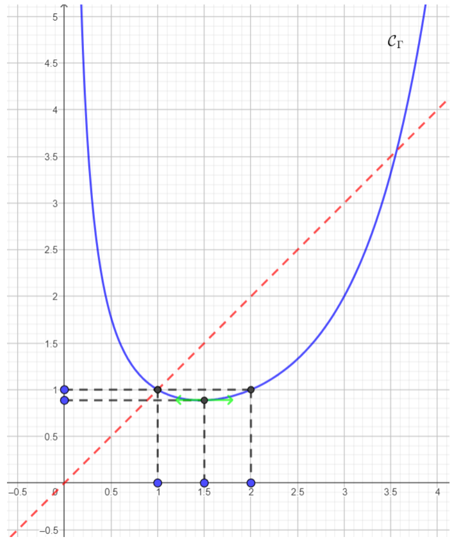
Proposition 63 : [Gourdon, p.315]
$*$ Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.
$*$ La fonction Γ est log-convexe sur $]0;+\infty[$.
$*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
$*$ On a $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

Lemme 64 : Formule d'Euler-Gauss [Gourdon, p.315] :
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Théorème 65 : Théorème de Bohr-Mollerup [Rombaldi, p.366] :
Si une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifie :
$*$ f est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. $*$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) = xf(x)$.
$*$ $f(1) = 1$
Alors f coïncide sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction Γ.

IV Annexe

IV.1 Allure du graphe de Γ



Remarques sur le plan

- Il est possible de s'intéresser à la méthode de Laplace ainsi que quelques applications.
- On peut parler de la fonction Gamma (plus particulièrement de sa régularité) ainsi que d'un prolongement.
- On peut s'intéresser à la transformation de Laplace d'un point de vue de l'analyse (théorème de la valeur initiale et de la valeur finale) mais aussi d'un point de vue probabiliste (caractérisation de la loi, etc.).

Liste des développements possibles

- Injectivité de la transformée de Fourier.
- Théorème de Lévy + TCL.
- Étude de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$.

Bibliographie

- Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.
- Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.
- Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.
- Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.
- Patrice Tauvel, *Analyse complexe pour la Licence 3*.
- Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.
- Jean-Étienne Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*.