 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 33 banque CCINP :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) Démontrer que f admet des dérivées partielle en tout point de $\mathbb{R}^2$.
c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

2 - Exercice 52 banque CCINP :
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geq \dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.
b) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$ puis déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
c) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et déterminer leur valeur puis faire de même avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

3 - Exercice 58 banque CCINP :
a) Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \longrightarrow F$ une application.
Donner la définition de "f est différentiable en a".
b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension n et $e = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
On pose :

$$\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i| \text{ où } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ et } \forall (x,y) \in E^2,\ \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty ; \|y\|_\infty)$$

On admet que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ sont respectivement une norme sur E et E^2.
On considère $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.
Montrer que :

$$\exists C > 0 \mid \forall (x,y) \in E^2,\ |B(x,y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$$

En déduire que B est différentiable sur E^2 et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E^2$.

II Exercices

Exercice 1 :
1 - Montrer la différentiabilité de l'application det définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2 - Montrer que sa différentielle en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $H \longmapsto \mathrm{Tr}\left({}^t\,\mathrm{Com}(A)H\right)$.
3 - Donner l'expression de la différentielle dans le cas particulier où A est inversible.

Exercice 2 :
1 - Rappeler pourquoi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2 - Montrer que l'application définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $M \longmapsto M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle.

Exercice 3 :
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ est muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ et la norme euclidienne est notée $\|\cdot\|$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on pose $f(x) = \|x\|^2$ et $g(x) = \|x\|$.
1 - Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$ et donner sa différentielle de deux manières différentes : par les dérivées partielles puis par calcul direct de la différentielle.
2 - Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p \backslash \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ et donner sa différentielle. Est-elle différentiable en $0_{\mathbb{R}^p}$?

Exercice 4 :
Soient $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et F la fonction définie sur U par $F(x,y) = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
1 - Exprimer $\Delta F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ en fonction de f''.
2 - Déterminer les fonctions f telles que $\Delta F = 0$.
3 - Déterminer les fonctions f telles que $\Delta F = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 5 :
On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^n$ est un cône positif lorsque pour tout $x \in C$ et $t > 0$ on a $tx \in C$.
Soit C un cône positif non vide de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ est homogène de degré α lorsque :

$$\forall (x,t) \in C \times \mathbb{R}_+^*,\ f(tx) = t^\alpha f(x)$$

On suppose dans la suite que C est également un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et on considère $f \in \mathcal{C}^1(C, \mathbb{R})$.
1 - Démontrer que si la fonction f est homogène de degré α, alors les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $\alpha - 1$.
2 - Démontrer que la fonction f est homogène de degré α si, et seulement si :

$$\forall x \in C,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x) \quad \text{(Relation d'Euler)}$$

v.hanecart@orange.fr

Exercice 6 :

Soient $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}$ et f la fonction définie sur U par $f(x, y) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) - \text{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.

1 - Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

2 - Montrer que pour tout $(x, y) \in U$ on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$.

3 - Préciser en tout point (x, y) de U la valeur de $\nabla f(x, y)$.

4 - En déduire les valeurs de $f(x, y)$.