Leçon 208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Extrait du rapport de jury

Cette leçon est particulièrement vaste, et il convient de faire des choix. Il est inutile de commencer systématiquement le plan de cette leçon par de longs rappels sur les normes : comme toutes les autres, cette leçon ne doit pas tomber dans le formalisme, mais bien proposer des résultats significatifs illustrés par des exemples bien choisis, en particulier de normes équivalentes ou non, ou de calculs de normes subordonnées. En ce qui concerne le contenu, le programme offre de nombreuses possibilités qui permettent aussi de faire un développement conséquent d'un résultat central ou d'un enchaînement de résultats centraux de cette leçon : cas de la dimension finie, intervention de la complétude (en particulier le cas hilbertien), étude de la compacité de la boule unité fermée, lien entre continuité d'une forme linéaire (ou plus généralement, d'une application linéaire de rang fini) et fermeture du noyau...
Pour les candidates et candidats solides, des prolongements possibles sont : les conséquences du théorème de Baire dans le cadre des espaces de Banach (tout particulièrement le théorème de Banach-Steinhaus et son utilisation pour construire des objets pathologiques), le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences, la théorie de algèbres de Banach, la détermination de duals topologiques.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 208 intitulée : "Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.". L'objectif de cette leçon est de généraliser les notions d'analyse (notamment celle de continuité) dans le cadre d'espaces vectoriels normés.
On commence tout d'abord par des rappels sur des généralités et exemples usuels concernant les espaces vectoriels normés tels que la définition d'une norme, d'un espace vectoriel normé ainsi que des exemples usuels. On poursuit en énonçant l'inégalité de Minkowski qui permet de munir l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ d'une norme et de retrouver les normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$. On termine cette première sous-partie en énonçant la définition de normes équivalentes qui est très importante notamment dans le cas de la dimension finie comme on le verra plus loin. Dans une deuxième sous-partie on se concentre sur les applications linéaires continues en énonçant une caractérisation très importante et très utile de la continuité et l'on enchaîne en donnant la définition d'une norme subordonnée et l'on montre que l'espace $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de cette norme est un espace vectoriel normé (et même une algèbre normée !). Enfin on termine cette partie en se consacrant au cas de la dimension finie. Le premier résultat fort est que toutes les normes sont équivalentes et cela a énormément de conséquences : toute application linéaire est continue, la complétude de l'espace ou encore que les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées. Le deuxième résultat très important est le théorème de Riesz qui est une caractérisation de la dimension finie.
Dans une deuxième partie, on s'intéresse aux espaces de Banach dont on commence par en donner la définition ainsi que quelques propriétés. On montre ensuite que l'on peut définir une exponentielle dans une algèbre de Banach et on donne un exemple avec le calcul de l'exponentielle d'une matrice. On poursuit dans un deuxième temps avec le lemme de Baire ainsi que quelques conséquences très pratiques, notamment le théorème de Banach-Steinhaus. Finalement, on termine cette partie par quelques propriétés hilbertiennes et de dualité (qui est un cadre plus restrictif mais très intéressant). On commence par rappeler la définition d'un espace de Hilbert puis on donne une première relation dans les espaces de Hilbert (qui est en fait une caractérisation !) avant d'enchaîner sur deux résultats très importants que sont le théorème de projection sur un convexe fermé et le théorème de représentation des formes linéaires de Riesz.
On termine cette leçon par une dernière partie qui se concentre sur quelques applications. Tout d'abord on s'attarde sur le cas des espaces L^p mentionnés en début de leçon. On montre que ceux-ci sont des espaces de Banach avec le théorème de Riesz-Fisher, puis que l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ peut être muni d'une structure d'espace de Hilbert et on s'intéresse enfin à leurs duals topologiques. Pour finir, on étudie les polynômes orthogonaux en commençant par énoncer la définition d'une fonction poids avant de s'intéresser à l'espace $L^2(I, \rho)$ qui est un espace de Hilbert et on conclut en donnant des exemples de fonctions poids ainsi que des polynômes unitaires orthogonaux et une condition suffisante pour que ces polynômes forment une base hilbertienne de l'espace $L^2(I, \rho)$.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels normés

I.1 Définitions

Définition 1 : Norme [Deschamps, p.1291] :
On appelle **norme** sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
$*$ $\forall x \in E,\ N(x) \geq 0$. $*$ $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
$*$ $\forall x \in E,\ (N(x) = 0) \implies (x = 0_E)$. $*$ $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Définition 2 : Espace vectoriel normé [Gourdon, p.47] :
Lorsque E est muni d'une norme N, on dit que (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

Exemple 3 : [Gourdon, p.48]
$*$ $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue est un espace vectoriel normé.
$*$ $\mathbb{C}$ muni du module est un espace vectoriel normé.
$*$ $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty : f \longmapsto \sup_{x \in [a;b]} |f(x)|$ est un espace vectoriel normé.

Remarque 4 : [Gourdon, p.47]
L'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ peut toujours être vu comme un espace métrique (E, d) avec $d : (x, y) \longmapsto \|x - y\|_E$ la distance associée à $\|\cdot\|_E$.

Théorème 5 : Inégalité de Minkowski [Faraut, p.42] :
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1; +\infty[$.
Pour toutes fonctions $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on a :

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec cas d'égalité lorsque $p = 1$ et f et g presque-partout positivement liées.

Corollaire 6 : [Faraut, p.44]
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1; +\infty[$.
L'espace $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ muni de :

$$\|\cdot\|_p : \left| \begin{array}{ccc} L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \left(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right.$$

est un espace vectoriel normé.

De même pour $p = +\infty$ avec :

$$\|\cdot\|_\infty : \left| \begin{array}{ccc} L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \operatorname{supess}|f| \end{array} \right.$$

Exemple 7 :
En prenant $\Omega = [\![1; n]\!]$ avec la mesure de comptage on retrouve alors les normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ données par :

$$\forall p \in [1; +\infty[, \ \forall x \in \mathbb{K}^n, \ \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i|$$

Définition 8 : Normes équivalentes [Gourdon, p.47] :
On considère deux normes N_1 et N_2 sur E.
On dit que N_1 et N_2 sont deux **normes équivalentes** lorsqu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_2$.

Exemple 9 : [Gourdon, p.48]
Dans $\mathbb{R}^n$, les normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Proposition 10 : [Gourdon, p.48]
Deux normes sont équivalentes si, et seulement si, leurs distances associées sont topologiquement équivalentes.

Remarque 11 :
Autrement dit, deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si, et seulement si, $\mathrm{Id} : (E, N_1) \longrightarrow (E, N_2)$ est un homéomorphisme.

I.2 Applications linéaires continues

Théorème 12 : [Gourdon, p.48]
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ f est continue sur E. $*$ f est continue en 0_E.
$*$ f est bornée sur la boule unité fermée de E.
$*$ f est bornée sur la sphère unité de E.
$*$ Il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.
$*$ f est lipschitzienne sur E. $*$ f est uniformément continue sur E.

Définition 13 : Norme subordonnée [Gourdon, p.48] :
L'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ des fonctions linéaires continues de E dans F peut être muni d'une norme appelée **norme subordonnée** définie par :

$$|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{E,F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_c(E, F) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \sup\limits_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F \end{array} \right.$$

Remarque 14 : [Gourdon, p.48]
Le réel $|\!|\!|f|\!|\!|_{E,F}$ est le plus petit réel M strictement positif tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

Exemple 15 : [Gourdon, p.48]
La norme subordonnée de la convolution de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est égale à 1.

Proposition 16 : [Gourdon, p.48]
Soient $(G, \|\cdot\|_G)$ un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$.
On a $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $|\!|\!|g \circ f|\!|\!|_{E,G} \leq |\!|\!|g|\!|\!|_{F,G} |\!|\!|f|\!|\!|_{E,F}$.

Remarque 17 : [Gourdon, p.48]
En particulier, la norme $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_E$ sur $\mathcal{L}_c(E)$ en fait une algèbre normée.

I.3 Le cas de la dimension finie

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $(E, \|\cdot\|_E)$ est de dimension finie.

Théorème 18 : [Deschamps, p.299]
Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Remarque 19 :
Le résultat n'est plus vrai en dimension infinie.
En effet, si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $E=\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, alors les normes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$$

sont non équivalentes sur E.

Corollaire 20 : [Gourdon, p.50]
Toute application linéaire de $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ dans $\left(F,\|\cdot\|_F\right)$ est continue.

Remarque 21 : [Gourdon, p.50]
L'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}[X],\|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}[X],\|\cdot\|_\infty) \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

n'est pas continue car $f(X^n)=n$ et $\|X\|^n=1$

Corollaire 22 : [Gourdon, p.50]
$\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ est un espace vectoriel normé complet.

Remarque 23 : [Gourdon, p.50]
$\mathbb{R}[X]$ n'est jamais complet pour aucune norme (cf. proposition 38).

Développement 1 : [A] [cf. DESCHAMPS + HASSAN]

Théorème 24 : [Deschamps, p.301]
Si E est de dimension finie, alors les parties compactes de E sont exactement ses parties fermées bornées.

Remarque 25 : [Deschamps, p.292]
Le résultat est faux en dimension infinie !
En effet, dans $(\mathbb{R}[X],\|\cdot\|_\infty)$, on peut considérer la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est incluse dans la boule unité fermée mais qui est 1-écartée, donc ne peut pas admettre de sous-suite convergente.

Corollaire 26 : [Gourdon, p.50]
Tout sous-espace vectoriel de $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ est fermé.

Remarque 27 :
Le sous-espace des fonctions polynomiales sur $[0;1]$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty\right)$ mais n'est pas fermé d'après le théorème de Weierstrass.

Développement 2 : [B] cf. DESCHAMPS + HASSAN]

Lemme 28 : Lemme de Riesz [Hassan, p.343] :
Soit M un sous-espace vectoriel fermé strict de E.
On a la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists u\in E \text{ tq } \|u\|_E=1 \text{ et } d(u,M)\geq 1-\varepsilon$$

Théorème 29 : Théorème de Riesz : [Hassan, p.343]
Les assertions suivantes sont équivalentes :
∗ E est de dimension finie.
∗ La boule unité fermée $\mathcal{B}_f(0,1)$ de $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ est compacte.

II Espaces de Banach

II.1 Quelques propriétés

Définition 30 : Espace de Banach [Gourdon, p.20] :
On dit que $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ est un **espace de Banach** lorsqu'il est complet.

Théorème 31 : [Gourdon, p.48]
Si $\left(F,\|\cdot\|_F\right)$ est un espace de Banach, alors $\left(\mathcal{L}_c(E,F),|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{E,F}\right)$ l'est aussi.

Corollaire 32 : [Gourdon, p.49]
Le dual topologique de E (noté $E'=\mathcal{L}_c(E,\mathbb{K})$) est un espace de Banach.

Corollaire 33 : [Gourdon, p.49]
Si $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ est un espace de Banach, alors toute série $\sum u_n$ de $\mathcal{L}_c(E)$ absolument convergente est convergente.

Proposition 34 : [Gourdon, p.49]
Soit $u\in\mathcal{L}_c(E)$.
Si $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ est un espace de Banach et que $|\!|\!|u|\!|\!|_E<1$, alors Id_E-u est inversible et d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty}u^n\in\mathcal{L}_c(E)$.

Définition 35 : Exponentielle dans une algèbre de Banach [Gourdon, p.50] :
On considère $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x\in A$.
On appelle **exponentielle de** x la série convergente $\exp(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$.

Exemple 36 :

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $A = aI_3 + bN + cN^2$ et donc :

$$e^A = e^{aI_3}e^{bN+cN^2} = e^a \begin{pmatrix} 1 & b & c+\frac{b^2}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II.2 Le lemme de Baire et ses conséquences

Lemme 37 : Lemme de Baire [Gourdon, p.417] :
Si (E,d) est un espace métrique complet, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

Proposition 38 : [Gourdon, p.419]
Tout espace vectoriel normé à base dénombrable n'est pas complet.

Théorème 39 : Théorème de l'application ouverte [Gourdon, p.423] :
Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire, continue et surjective.
Si $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ sont deux espaces de Banach, alors il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(0,r) \subseteq T\left(\mathcal{B}_o(0,1)\right)$.

Corollaire 40 : [Gourdon, p.423]
Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire, continue et bijective.
Si $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ sont deux espaces de Banach, alors $T^{-1} \in \mathcal{L}_c(F,E)$.

Théorème 41 : Théorème du graphe fermé [Hassan, p.416] :
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
Si $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ sont deux espaces de Banach, alors :

$$(f \text{ est continue}) \iff (\{(x, f(x)),\ x \in E\} \text{ est un fermé dans l'espace de Banach } E \times F)$$

Théorème 42 : Théorème de Banach-Steinhaus [Gourdon, p.424] :
Si $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ est un espace de Banach, alors pour toute famille d'applications $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}_c(E,F)$ telles que pour tout $x \in E$ on ait l'inégalité $\sup\{\|T(x)\|,\ T \in \mathcal{F}\} < +\infty$ on a $\sup\{\|T\|_{E,F},\ T \in \mathcal{F}\} < +\infty$.
En d'autres termes :

$$\exists C > 0 \text{ tq } \forall T \in \mathcal{F},\ \forall x \in E,\ \|T(x)\|_F \leq C\,\|x\|_E$$

Corollaire 43 : [Gourdon, p.425]
Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0.

II.3 Quelques propriétés hilbertiennes

Dans toute cette sous-partie, on considère $(H, <\cdot;\cdot>_H)$ un espace de préhilbertien.

Définition 44 : Espace hilbertien [Hassan, p.480] :
On dit que $\left(H, \|\cdot\|_H\right)$ est un **espace hilbertien** lorsqu'il est complet pour la norme associée au produit scalaire.

Proposition 45 : Identité du parallélogramme [Hassan, p.482] :
Si $(H, <\cdot;\cdot>_H)$ est un espace hilbertien, alors :

$$\forall x,y \in H,\ \|x+y\|_H^2 + \|x-y\|_H^2 = 2\left(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2\right)$$

Développement 3 : [cf. HASSAN]

Théorème 46 : [Hassan, p.489]
Soit C un convexe fermé non vide de $(H, <\cdot;\cdot>)$.
Pour tout $x \in H$, il existe un unique $c \in C$ (appelé **projection de x sur C**) tel que $d(x,C) = \|x-c\|$ avec pour tout $z \in C$, $\mathrm{Re}(<z-c; x-c>) \leq 0$.
De plus, en notant P_C la projection sur C, on a P_C 1-lipschitzienne (donc continue).

Corollaire 47 : [Hassan, p.490]
Si F est un sous-espace vectoriel fermé de $(H, <\cdot;\cdot>_H)$ et que $(H, <\cdot;\cdot>_H)$ est un espace hilbertien, alors P_F est linéaire et continue de H sur F.

Corollaire 48 : [Hassan, p.491]
Si F est un sous-espace vectoriel fermée de $(H, <\cdot;\cdot>_H)$ et que $(H, <\cdot;\cdot>_H)$ est un espace hilbertien, alors $H = F \underset{\text{top.}}{\oplus} F^\perp$.

Remarque 49 :
L'hypothèse de fermeture dans le corollaire précédent n'est pas superflue. En effet, pour $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et F l'ensemble des suites de H nulles à partir d'un certain rang, on a $F^\perp = \{0_H\}$ mais $E \neq F$.

Théorème 50 : Théorème de représentation de Riesz [Hassan, p.492] :
Soit $\varphi \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$.
Si $(H, <\cdot;\cdot>_H)$ est un espace hilbertien, alors il existe un unique $y_\varphi \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $\varphi(x) = <x, y_\varphi>_H$.

III Quelques exemples

III.1 Les espaces L^p

Dans toute cette sous-partie, on considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Théorème 51 : Théorème de Riesz-Fischer : [Faraut, p.46 + 47]
Pour $p \in [1; +\infty]$, l'espace $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace de Banach pour $\|\cdot\|_p$.

Corollaire 52 : [Faraut, p.49]
L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$<\cdot;\cdot>: \left| \begin{array}{ccc} \left(L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)\right)^2 & \longrightarrow & L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \\ (f, g) & \longmapsto & \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x) \end{array} \right.$$

Théorème 53 : [El Amrani, p.428]
Soit $p \in]1; +\infty[$.
Si l'on note q l'exposant conjugué de p, alors le dual topologique de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ s'identifie à $L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

III.2 Les polynômes orthogonaux

Dans toute cette sous-partie, on considère un intervalle $I =]a; b[$ borné ou non de $\mathbb{R}$.

Définition 54 : Fonction poids [El Amrani, p.40] :
On appelle **poids sur** I une application $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

Définition 55 : L'espace $L^2(I, \rho)$:
On appelle **espace** $L^2(I, \rho)$ l'ensemble $\left\{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tq } \int_I |f(x)|^2 \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty\right\}$.

Proposition 56 : [El Amrani, p.41]
L'espace $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert et tout polynôme appartient à $L^2(I, \rho)$.

Théorème 57 : [El Amrani, p.41]
Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(L^2(I, \rho)\right)^{\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux et tels que $\deg(P_n) = n$ (cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée au poids ρ).

Exemple 58 : [El Amrani, p.41]
* Si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\rho(x) = e^{-x}$, on obtient alors les polynômes de Laguerre.
* Si $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on obtient alors les polynômes de Hermite.
* Si $I =]-1; 1[$ et $\rho(x) = 1$, on obtient alors les polynômes de Legendre.
* Si $I =]-1; 1[$ et $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient alors les polynômes de Tchebychev.

Théorème 59 : [El Amrani, p.47]
Soit ρ une fonction poids sur I.
S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux normalisés associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Remarque 60 : [El Amrani, p.46]
L'hypothèse faite sur ρ n'est pas superflue. En effet, en considérant $I =]0; +\infty[$, $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$ et $f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$, on a $\int_I f(x)x^n\rho(x)\mathrm{d}x = 0$.

Remarques sur la leçon

— Il est possible de parler de la séparation des convexes en dimension finie et dans le cas d'un espace de Hilbert ainsi que du théorème de Hahn-Banach ou encore du dual topologique ou de l'espace de Bergman.

Liste des développements possibles

— Théorème de Riesz.

— Théorème de Banach-Steinhaus + application aux séries de Fourier.

— Théorème de projection sur un convexe fermé.

— Polynômes orthogonaux.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Jacques Faraut, *Calcul intégral*.

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.