 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer l'existence et unicité d'un polynôme d'interpolation.

2 - Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$? Démontrer ce résultat.

3 - Énoncer et démontrer les caractérisations de l'ordre de multiplicité d'une racine.

II Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n le polynôme $(1+X)\left(1+X^2\right)\ldots\left(1+X^{2^n}\right)$.
1 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k$.
2 - Préciser les racines de P_n.

Exercice 2 :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.
1 - Déterminer le coefficient dominant et le degré de P.
2 - Montrer que les racines complexes de P sont des racines simples.
3 - Préciser le produit et la somme des racines de P.
4 - Déterminer explicitement les racines de P.

III Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3 :
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définie par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.
1 - Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
2 - Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

3 - Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2\cos(\theta))$ en fonction de n et θ.
4 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de P_n.

Exercice 4 :
Soient $k \in \mathbb{R}$ et $P = X^3 - X^2 + k$.
1 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que P ait une racine multiple.
2 - Donner le tableau de variations de la fonction polynôme $x \longmapsto P(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que P ait trois racines réelles distinctes.
4 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que P soit scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 :
On appelle polynômes de Legendre les polynômes $P_n(X) = \left(\left(X^2-1\right)^n\right)^{(n)}$.
1 - Calculer le degré de P_n et son coefficient dominant.
2 - Pour $p \in [\![0;n]\!]$, on pose $Q_p(X) = \left(\left(X^2-1\right)^n\right)^{(p)}$.
Quel est le degré de Q_p ? Démontrer que Q_p admet deux racines d'ordre $n-p$ et p racines d'ordre 1.
3 - En déduire que P_n s'annule exactement en n points deux à deux distincts de $]-1;1[$.

Exercice 6 :
Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$ avec $a \neq 0$.
1 - Exprimer les relations entre les coefficients a, b, c et d et les racines λ_1, λ_2 et λ_3 de ce polynôme.
2 - Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, vérifier l'identité suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + xz + yz)$$

3 - Déterminer la valeur de la somme des carrés des racines de $P = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$.
4 - Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z & = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 30 \\ xyz & = -10 \end{cases}$$

IV Exercices avec questions ouvertes

Exercice 7 :
Que dire d'un polynôme P tel que l'image par P de tout rationnel soit un rationnel ?

Exercice 8 :
Existe-il un polynôme P tel que $P(x) = e^x$ pour une infinité de valeurs du réel x ?