I Questions de cours

1 - Donner et démontrer la nature des intégrales de Riemann sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

2 - Exercice 29 banque CCINP :
On pose : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \forall t \in]0;+\infty[,\ f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$.
a) Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.
On pose alors :

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

b) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$ et en déduire une expression de $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel non nul n.

3 - Exercice 26 banque CCINP :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.
a) Montrer que I_n est bien définie.
b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire qu'elle converge.

II Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 :
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 2 :
1 - Montrer que $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{(1+x)^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.
2 - Pour $b > 0$, calculer $\displaystyle\int_1^b \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ en fonction de b.
3 - En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 3 :
1 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto x^n e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$.
2 - Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$.
3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\mathrm{d}x$ en fonction de n.

Exercice 4 :
On étudie ici, en fonction de $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, la nature de l'intégrale de Bertrand :

$$B_{\alpha,\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$$

1 - Établir la convergence de $B_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha > 1$.
2 - Établir la divergence de $B_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha < 1$.
3 - Faire l'étude de $B_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha = 1$.

III Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5 :
1 - Étudier le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)t^x}\mathrm{d}t$$

2 - Calculer $f(1)$.
3 - Préciser la monotonie de la fonction f.
4 - Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x}$.
5 - Donner la limite, puis un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 6 :
1 - Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{t-1}{t\ln(t)}$ est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$.
2 - Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t = 0$.
3 - En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t = \ln(2)$.

v.hanecart@orange.fr

IV Exercice d'approfondissement

Exercice 7 :

Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

1 - Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t-x) - f(t+x)|\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$.

2 - Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $F(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-a) - f(t)|\mathrm{d}t$.

a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f\left(t - \frac{a}{2}\right) - f\left(t + \frac{a}{2}\right) \right| \mathrm{d}t$$

b) En déduire que :

$$F(a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 2\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$$