 v.hanecart@orange.fr

I Restitution du cours

1 - Décrire la loi de Poisson et énoncer la formule des probabilités composées.

2 - Décrire la loi géométrique et énoncer la caractérisation d'une loi par une fonction de probabilité.

3 - Décrire la loi de Bernoulli et donner la définition d'un système complet d'événements.

II Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

2 - Énoncer et démontrer la formule de Bayes.

3 - Énoncer et démontrer la probabilité d'attente infructueuse avec une loi géométrique.

III Exercices

Exercice 1 :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On désigne par A l'événement "X est un nombre pair" et par B l'événement "X est un nombre impair".
Déterminer et comparer les valeurs de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 2 :
Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X \geq n)$$

1 - Calculer $\mathbb{P}(X = n + 1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X = n)$, puis déterminer la loi de X.
2 - Étudier la réciproque.

Exercice 3 :
On extrait 13 cartes d'un jeu de 52 cartes classiques.
1 - Les deux évènements "On tire un seul as" et "On tire l'as de pique" sont-ils indépendants ?
2 - Le résultat demeure-t-il si on ajoute un joker aux 52 cartes avant d'extraire les 13 cartes ?

Exercice 4 :
Soient $p \in]0; 1[$ et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = (n + 1)p^2(1 - p)^n$$

1 - Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.
On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu et $Z = X - Y$.
2 - Déterminer la loi de Y.
3 - Déterminer la loi de Z.

Exercice 5 :
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose qu'il existe $p \in]0; 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = p\mathbb{P}(X \geq n)$.
Déterminer la loi de X.

Exercice 6 :
On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires et l'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 et sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au n-ième tirage est blanche" et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.
1 - Calculer p_1.
2 - Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3 - En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

v.hanecart@orange.fr

Exercice 7 :

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau et l'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement "l'animal est en A après son n-ième trajet".
On note B_n l'événement "l'animal est en B après son n-ième trajet".
On note C_n l'événement "l'animal est en C après son n-ième trajet".

On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.
1 - Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2 - Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
3 - Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
4 - Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
5 - Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$ (le calcul de P^{-1} n'est pas demandé).
6 - Montrer comment les résultats des questions c), d) et e) peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n (aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée).