# I Restitution du cours

1- Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice et donner ses propriétés élémentaires en tant que polynôme.

2 - Donner la définition d'une valeur propre puis d'un vecteur propre d'une matrice $A$ et énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

3 - Donner la définition d'un sous-espace propre d'un endomorphisme et énoncer des caractérisations d'être une valeur propre en dimension finie (5 caractérisations attendues).

# II Questions de cours

1 - Montrer que toute matrice carrée à coefficients complexes admet toujours au moins une valeur propre complexe puis qu'une matrice carrée de taille impaire admet au moins une valeur propre réelle.

2 - Soit $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.
Calculer $M^3 + 2M^2 - 3M$ et en déduire les valeurs propres de $M$.

3 - Soient $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ non nul et $P$ un polynôme annulateur de $u$.
Montrer que toute valeur propre de $u$ est une racine de $P$.

# III Exercices axés sur le calcul

*Exercice 1 :*
Pour chacune des matrices suivantes, indiquez les valeurs propres, les dimensions des sous-espaces propres associés ainsi que le polynôme caractéristique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Exercice 2 :*
Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
1 - Montrer que $-1$ est valeur propre de $A$ et préciser le sous-espace propre associé.
2 - Montrer que $A$ est semblable à $T$.
3 - Préciser le polynôme caractéristique de $A$.

*Exercice 3 :*
À tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}[X]$, on associe le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q = (X-1)(X-2)P' - 2XP$$

1 - Préciser $f(1)$, $f(X)$ et $f\left(X^2\right)$.
2 - Justifier que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3 - Montrer que si $P$ est vecteur propre de $f$, alors $\deg(P) = 2$.
4 - Donner les valeurs propres et vecteurs propres de $f$.

# IV Exercices axés sur le raisonnement

*Exercice 4 :*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
1 - Préciser le rang de $A - 2I_6$ et celui de $A$.
2 - En déduire le spectre de $A$.

*Exercice 5 :*
On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de $f$ est $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

*Exercice 6 :*
Soient $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites à coefficients complexes, et l'endomorphisme

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} v_0 = u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{cases} \end{array} \right.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\Psi$.

v.hanecart@orange.fr

*Exercice 7 :*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On définit par blocs les matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ suivantes :

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$$

1 - Calculer $P^2$. En déduire que $P$ est inversible et préciser $P^{-1}$.

2 - Préciser $B' = P^{-1}BP$.

3 - Montrer que $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(A) \cup \{0\}$.

4 - Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, préciser $\dim(\mathrm{Ker}(B' - \lambda I_{2n}))$ en fonction de $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n))$.

5 - **Bonus :** En déduire que $B$ est diagonalisable si, et seulement si, $A$ l'est.