I Restitution du cours

1- Donner la définition d'une série entière de la variable réelle et énoncer le lemme d'Abel.

2 - Donner la définition d'une série entière de la variable complexe et énoncer la règle de D'Alembert.

3 - Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière et énoncer la proposition d'exploitation d'un rayon de convergence

II Questions de cours

1 - Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1} z^n \text{ et } \sum_{n\geq 0} n z^n$$

2 - Énoncer et démontrer le lemme d'Abel.

3 - Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n \text{ et } \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^{3n+1}$$

III Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1 - Monter que A est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres.

2 - Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commutant avec A.

En utilisant les sous-espaces propres de A, montrer que M est diagonalisable dans une même base que A.

3 - Montrer que si $B^2 = A$, alors B commute avec A et en déduire le nombre de matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

Exercice 2 :

1 - La matrice $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

2 - Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et expliciter une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.

IV Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3 :

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1 - Montrer que -1 est valeur propre de A et préciser le sous-espace propre associé.

2 - Montrer que A et T sont semblables.

3 - En déduire le polynôme caractéristique de A.

Exercice 4 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On définit par blocs les matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ suivantes :

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$$

1 - Calculer P^2. En déduire que P est inversible et préciser P^{-1}.

2 - Préciser $B' = P^{-1}BP$.

3 - Montrer que $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(A) \cup \{0\}$.

4 - Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, préciser $\dim(\mathrm{Ker}(B' - \lambda I_{2n}))$ en fonction de $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n))$.

5 - En déduire que B est diagonalisable si, et seulement si, A l'est.

Exercice 5 :

Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de rang 1.

1 - Justifier que 0 est valeur propre de f et préciser la dimension de $E_0(f)$. En déduire que f est trigonalisable.

2 - En déduire que f est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(f) \neq 0$.

3 - Montrer que $f^2 = \mathrm{Tr}(f)f$ (on discutera les cas suivant la valeur de $\mathrm{Tr}(f)$).