v.hanecart@orange.fr

I Restitution du cours

1- Donner la définition de la trace d'une matrice et énoncer le théorème d'interpolation de Lagrange.

2 - Donner la définition d'un polynôme d'endomorphismes et des polynômes interpolateurs de Lagrange (ainsi que leurs expressions).

3 - Donner la définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme u ainsi que l'expression de la formule du déterminant de Vandermonde.

II Questions de cours

1 - Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I_3 et A.

2 - Énoncer et démontrer le théorème d'interpolation de Lagrange.

3 - On étudie l'interpolation de Lagrange aux points $(a_0, a_1, a_2) = (-1, 1, 3)$.
a) Expliciter les polynômes interpolateurs de Lagrange associés et vérifier que leur somme vaut 1.
b) Décomposer le polynôme $P = X^2 - X + 3$ sur la base de $\mathbb{R}_2[X]$ constituées de ces polynômes interpolateurs.
c) Déterminer l'équation d'une parabole passant par les points du plan $A = (-1; 0)$, $B = (1; 3)$ et $C = (3; -1)$. Cette parabole est-elle unique ?

III Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 :
Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
1 - Vérifier que le polynôme $P = (X-1)\left(X - \dfrac{1}{3}\right)$ annule A.
2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de A et I_3.
3 - Préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$.

Exercice 2 :
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
1 - Montrer que A n'a pas de polynôme annulateur (non nul) de degré inférieur ou égal à 2.
2 - Trouver un polynôme annulateur de A.
3 - Montrer que A est inversible et préciser A^{-1}.

Exercice 3 :
Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1.
Déterminer un polynôme annulateur pour J et en déduire la valeur de J^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 :
À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer la divergence de la série $\sum\limits_{n \geq 2} \dfrac{1}{n \ln(n)}$ et donner un équivalent de ses sommes partielles.

IV Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5 :
Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$, une ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et une colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle.
On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $A = CL$.
Montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

Exercice 6 :
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
1 - Soit X une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Préciser la trace de la matrice $X + \mathrm{Tr}(X)A$.
2 - Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$X + \mathrm{Tr}(X)A = B$$

On envisagera plusieurs cas selon la valeur de la trace de A.

Exercice 7 :
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes généraux positifs.
Montrer que la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ est convergente.

v.hanecart@orange.fr

V Exercices d'approfondissement

Exercice 8 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Trouver toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $X + X^\top = \mathrm{Tr}(X)A$.

Exercice 9 :
Montrer que toutes familles finies $(x \longmapsto e^{c_1 x}, ..., x \longmapsto e^{c_n x})$ (où les $(c_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sont des nombres complexes deux à deux distincts) est libre.

Exercice 10 :
Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ injective.
Démontrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^2}$ est divergente.