I Restitution du cours

1 - Donner la définition d'une série absolument convergente et énoncer le théorème de comparaison par domination/négligeabilité.

2 - Énoncer la règle de d'Alembert et donner la définition d'une série alternée.

3 - Donner la définition du produit de Cauchy de deux séries numériques et énoncer la formule de Stirling.

II Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la condition nécessaire de convergence d'une série numérique.

2 - Montrer que si une série est convergente, alors ses sommes partielles vérifient : $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)=0$. Dans le cas de la série harmonique, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)\geq\frac{1}{2}$ et conclure.

3 - Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ par le critère de d'Alembert.

III Exercices d'entraînement

Exercice 1 :
Soit $x\in\mathbb{R}^+$.
Montrer que le reste d'ordre n de la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est le terme général d'une série convergente.

Exercice 2 :
Pour $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on pose $u_n=\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.
Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 2}u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 3 :
Déterminer la nature, selon $x\in\mathbb{C}$, de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 4 :
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes généraux positifs.
Montrer que la série de terme général $\sqrt{u_nv_n}$ est convergente.

Exercice 5 :
À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer la divergence de la série $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{n\ln(n)}$ et donner un équivalent de ses sommes partielles.

IV Exercices d'approfondissement

Exercice 6 :
Soit $p\in]-1;1[$.
Montrer que l'on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)p^n=\dfrac{1}{(1-p)^2}$.

Exercice 7 :
Soit $f:\mathbb{N}^*\longrightarrow\mathbb{N}^*$ injective.
Démontrer que $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{f(n)}{n^2}$ est divergente.