v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 1 banque CCINP :
On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

a) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.

b) Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soient $u : \begin{array}{|lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$ et $F = \{f \in E \text{ tq } f(0) = 0\}$.

Prouver que u est une application linéaire continue sur E et que F est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

c) Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. On pose $c : \begin{array}{|lcl} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in \left[0; \dfrac{1}{n}\right[\\ 1 & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}; 1\right] \end{cases}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\|f_n - c\|_1$.

On pose enfin $F = \{f \in E \text{ tq } f(0) = 0\}$.
Montrer que $c \in \overline{F}$. F est-il un fermé de $(E, \|\cdot\|_1)$?

2 - Exercice 37 banque CCINP :
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose :

$$\forall f \in E,\ N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \text{ et } N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

a) Démontrer que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.
b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
d) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

3 - Exercice 36 banque CCINP :
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$. On note $\|\cdot\|_E$ (respectivement $\|\cdot\|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

a) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est continue sur E. (ii) f est continue en 0_E.
(iii) $\exists k > 0$ tq $\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\,\|x\|_E$.

b) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|$.

On considère l'application Ψ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\Psi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que Ψ est linéaire et continue.

II Exercices

Exercice 1 :
On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme uniforme sur $[0;1]$:

$$\forall P \in E,\ \|P\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|$$

Soient f et g les endomorphismes de E suivants :

$$f : P \longmapsto (X-2)P \text{ et } g : P \longmapsto P(X-2)$$

Pour chacun d'eux, préciser s'il est ou non continu sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et, le cas échéant, préciser sa norme subordonnée

Exercice 2 :
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Montrer de deux manières différentes que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

Exercice 3 :
Soient (E, N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
1 - On suppose qu'il existe $a \in F$ et $r > 0$ tels que $\mathcal{B}_f(a, r)$ soit contenue dans F.
Montrer que $F = E$.
2 - Que peut-on dire de l'intérieur d'un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 4 :
Soient (E, N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
1 - Montrer que $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.
2 - En déduire qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense dans E.

Exercice 5 :
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
On munit E^2 de la norme N définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ N(x,y) = \max(\|x\|, \|y\|)$$

Montrer que l'ensemble $\big\{(x,y) \in E^2 \text{ tq } (x,y) \text{ est libre}\big\}$ est un ouvert de E^2.

v.hanecart@orange.fr

Exercice 6 :
On considère $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, on considère les deux normes définies définies par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

1 - Soit $F = \left\{ f \in E \text{ tq } \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leq 0 \right\}$. Montrer que F est fermé pour $\|\cdot\|_1$. Est-il fermé pour $\|\cdot\|_\infty$?
2 - Soit $O = \{f \in E \text{ tq } f(0) > 0\}$. Montrer que O est un ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$. Est-il fermé pour $\|\cdot\|_1$?
Indication : On pourra introduire les fonctions $f_n : \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 1 - e^{-nt} \end{array} \right.$ et la fonction constante égale à 1.

Exercice 7 :
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Montrer que le noyau d'une forme linéaire est fermé si, et seulement si, cette forme linéaire est continue sur E