 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 69 banque CCINP :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

a) Quel est le rang de la matrice A ?

b) Suivant les valeurs de a, déterminer les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres de A.

2 - Exercice 71 banque CCINP :

Soient P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

b) Soient p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D et $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

3 - Exercice 73 banque CCINP :

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

b) En déduire une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonale.

c) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

II Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 :

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2 :

Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1 - Déterminer les valeurs propres de A.

2 - Préciser une matrice P telle que $D = PAP^{-1}$ soit diagonale.

3 - Préciser la limite de la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1 - Calculer le polynôme caractéristique de A.

2 - En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de I_2 et d'une matrice nilpotente B que l'on précisera.

3 - Déterminer la matrice $\exp(A)$ (on rappelle que $\exp(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$).

Exercice 4 :

On définit φ sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\varphi : P \longmapsto (X-1)(X-2)P' - 2XP$$

1 - Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2 - Soit P un vecteur propre de φ. Déterminer le degré de P.

3 - Écrire dans la base $\left(1, X-1, (X-1)^2\right)$ la matrice M de la restriction de φ à $\mathbb{R}_2[X]$.

4 - Déterminer les éléments propres de φ.

III Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5 :

1 - Montrer qu'une matrice nilpotente est de trace nulle.

2 - Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer, sans calculer le polynôme caractéristique, qu'il existe un réel λ tel que $A - \lambda I_3$ soit nilpotente.

Exercice 6 :

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1 - Montrer que -1 est valeur propre de A et préciser le sous-espace propre associé.

2 - Montrer que A et T sont semblables.

3 - En déduire le polynôme caractéristique de A.

IV Exercice avec questions ouvertes

Exercice 7 :

1 - Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible est-elle limite d'une suite de matrices non inversibles ?

2 - Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible est-elle limite d'une suite de matrices inversibles ?