

Groupe des isométries du cube :

I Le développement

Le but de ce développement est de déterminer le groupe des isométries qui laissent globalement invariant le cube.

Dans tout ce développement, on considère un espace affine \mathcal{E} de dimension 3 et un cube \mathcal{C} de côté $c > 0$ comme étant l'ensemble de ses sommets (cf. deuxième partie).

Théorème 1 : [Combes, p.175]

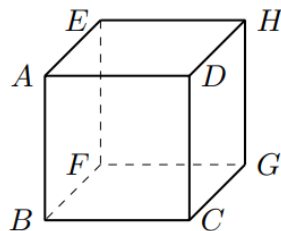
On a $\text{Isom}^+(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Isom}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Preuve :

* Commençons par déterminer le cardinal de $\text{Isom}(\mathcal{C})$ et $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$:

En utilisant les réflexions par rapport au plan médiateur d'une des arêtes du cube, on remarque que l'action de $\text{Isom}(\mathcal{C})$ sur \mathcal{C} est transitive. Comme le groupe $\text{Stab}(A)$ agit sur l'ensemble des sommets voisins de A :

$$X = \{M \in \mathcal{C} \text{ tq } AM = c\} = \{B, D, E\}$$



on en déduit qu'il existe un morphisme de groupes $\eta : \text{Stab}(A) \rightarrow \text{Bij}(X)$. Ce morphisme est injectif, car si $\sigma \in \text{Ker}(\eta)$, alors σ fixe les 4 points A, B, D et E qui forment un repère affine de \mathcal{E} et donc $\sigma = \text{Id}$.

De plus, l'image par η des réflexions par rapport aux plans (ABH) , (AFD) et (ACE) sont respectivement dans $\text{Bij}(X)$ les transpositions (ED) , (BE) et (BD) et puisque ces dernières engendrent $\text{Bij}(X)$ on en déduit que η est un isomorphisme. Finalement :

$$\text{Card}(\text{Isom}(\mathcal{C})) = \text{Card}(\text{Orb}(A)) \text{Card}(\text{Stab}(A)) = 8 \times 6 = 48$$

De plus, si on note O le centre du cube et qu'on désigne par s_M la symétrie centrale par rapport à $M \in \mathcal{E}$, alors l'application $\sigma \mapsto \sigma \circ s_O$ est une bijection de $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$ sur $\text{Isom}^-(\mathcal{C})$ et donc $\text{Isom}^+(\mathcal{C}) = 24$.

* On considère l'ensemble des grandes diagonales du cube :

$$D = \{[AG], [EC], [BH], [DF]\} = \{[MN] \text{ tq } M, N \in \mathcal{C} \text{ et } MN = c\sqrt{3}\}$$

Comme chaque élément $\sigma \in \text{Isom}(\mathcal{C})$ préserve globalement les sommets de \mathcal{C} et les longueurs, on en déduit que $\sigma(D) \subseteq D$. En particulier, le groupe $\text{Isom}(\mathcal{C})$ agit sur D et cette action induit un morphisme de groupes $\lambda : \text{Isom}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Bij}(D)$.

Si on note r la réflexion par rapport au plan (ADG) , alors :

$$r([AG]) = AG, \quad r([EC]) = [BH], \quad r([BH]) = [EC] \text{ et } r([DF]) = [DF]$$

donc $\lambda(r)$ est une transposition de $\text{Bij}(D)$. De même, on en déduit que toutes les transpositions de $\text{Bij}(D)$ sont dans $\text{Im}(\lambda)$ et ainsi $\text{Im}(\lambda) = \text{Bij}(D)$.

* Comme $\text{Card}(\text{Ker}(\lambda)) = 2$ (par le premier théorème d'isomorphisme), on en déduit que $\text{Ker}(\lambda) = \{\text{Id}, s_O\}$. Et puisque $s_O \notin \text{Isom}^+(\mathcal{C})$ on obtient par restriction de λ à $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$ un morphisme de groupes injectif de $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$ dans $\text{Bij}(D)$. Ces deux ensembles ayant le même cardinal, on en déduit que $\text{Isom}^+(\mathcal{C}) \cong \text{Bij}(D) \cong \mathfrak{S}_4$.

* Finalement, on a :

- $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$ est distingué dans $\text{Isom}(\mathcal{C})$ (car d'indice 2).
- $\langle s_O \rangle = \{\text{Id}, s_O\}$ est distingué dans $\text{Isom}(\mathcal{C})$ (car noyau du morphisme de groupe λ).
- $\text{Card}(\text{Isom}(\mathcal{C})) = \text{Card}(\text{Isom}^+(\mathcal{C})) \text{Card}(\langle s_O \rangle) = 48$.
- $\text{Isom}^+(\mathcal{C}) \cap \{\text{Id}, s_O\} = \{\text{Id}\}$.

Donc par la caractérisation du produit direct, on a que $\text{Isom}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ■

II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans ce développement, on a utilisé de façon cruciale le fait que les transpositions engendrent \mathfrak{S}_n et dont la démonstration repose sur le fait que toute transposition se décompose en produit de cycles à supports disjoints et pour $x_1, \dots, x_r \in \llbracket 1; n \rrbracket$ distincts, on a $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r) = (x_1 \ x_2) \dots (x_{r-1} \ x_r)$.

On a également défini un cube comme l'ensemble de ses sommets pour éviter de devoir justifier qu'une isométrie préservant un cube plein préserve ses sommets. Voici une justification de cette affirmation :

Si X est une partie convexe de \mathcal{E} , on rappelle qu'un point $x \in X$ est un **point extrémal** lorsqu'il n'existe pas de couple $(A, B) \in X^2$ tel que $C \in]A; B[$. On a alors les résultats suivants :

Proposition 2 : [Combes, p.145]

Soit X une partie convexe de \mathcal{E} .

- * Si $x \in X$ est un point extrémal de X et $f \in \text{Isom}(X)$, alors $f(x)$ est un point extrémal de X .
- * Les points extrémaux d'un polyèdre convexe fermé de \mathcal{E} sont ses sommets.

Proposition 3 :

Soit \mathcal{P} un polyèdre convexe de \mathcal{E} .

Si l'on note \mathcal{P}_s l'ensemble des sommets de \mathcal{P} , alors on a les égalités :

$$\text{Isom}(\mathcal{P}) = \text{Isom}(\mathcal{P}_s) \text{ et } \text{Isom}^+(\mathcal{P}) = \text{Isom}^+(\mathcal{P}_s)$$

Remarque 4 :

- * Plus généralement, une isométrie d'un polyèdre convexe non aplati de l'espace préserve les sommets, les arêtes et les faces du polyèdre.
- * Si \mathcal{P} est un polyèdre convexe non aplati de l'espace, on en déduit qu'il existe un morphisme de groupes injectif $\lambda : \text{Isom}(\mathcal{P}) \longrightarrow \text{Bij}(X)$, avec X l'ensemble des sommets de \mathcal{P} .

II.1.1 Correspondance entre les éléments de \mathfrak{S}_4 et $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$

Il est possible d'expliciter la correspondance entre les éléments de $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$ et de \mathfrak{S}_4 et c'est ce que l'on fait dans le tableau ci-dessous :

\mathfrak{S}_4	$\text{Isom}^+(\mathcal{C})$	Cardinal
$\text{Id}_{\llbracket 1;4 \rrbracket}$	Identité	1
$(1 \ 2)$	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm\pi$	6
$(1 \ 2 \ 3)$	Rotation d'axe une grande diagonale et d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$	8
$(1 \ 2 \ 3 \ 4)$	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$	6
$(1 \ 2)(3 \ 4)$	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm\pi$	3

II.2 Les autres polyèdres réguliers

On commence par rappeler le résultat suivant :

Théorème 5 : [Combes, p.147]

L'ensemble des polyèdres réguliers de \mathcal{E} sont à similitude près le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier.

II.2.1 Le tétraèdre régulier

Théorème 6 : [Combes, p.175]

On a $\text{Isom}^+(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{A}_4$ et $\text{Isom}(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{S}_4$.

Preuve :

* Comme dans le développement, le groupe $\text{Isom}(\mathcal{T})$ agit sur l'ensemble X des sommets du tétraèdre. On en déduit alors l'existence d'un morphisme de groupes $\lambda : \text{Isom}(\mathcal{T}) \longrightarrow \text{Bij}(X)$ qui est injectif (car une isométrie fixant les 4 points fixe alors un repère affine).

De plus, en considérant une réflexion par rapport au plan médiateur d'une des arêtes, on remarque que les transpositions appartiennent à $\text{Im}(\lambda)$. Ainsi λ est surjective et on a par le premier théorème d'isomorphisme que $\text{Isom}(\mathcal{T}) \cong \text{Bij}(X) \cong \mathfrak{S}_4$.

* De plus, si $r \in \text{Isom}(\mathcal{T})$ est une réflexion, alors l'application $\sigma \longmapsto \sigma \circ r$ est une bijection (car c'est une involution) de $\text{Isom}^+(\mathcal{T})$ sur $\text{Isom}^-(\mathcal{T})$ et ainsi $\text{Card}(\text{Isom}^+(\mathcal{T})) = 12$.

Ainsi l'image de $\text{Isom}^+(\mathcal{T})$ dans \mathfrak{S}_4 est d'indice 2, donc $\text{Isom}^+(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{A}_4$.

■

Correspondance entre les éléments de \mathfrak{S}_4 et $\text{Isom}(\mathcal{T})$:

\mathfrak{S}_4	$\text{Isom}(\mathcal{T})$	Cardinal
$\text{Id}_{[1;4]}$	Identité	1
$(1\ 2)$	Réflexion par rapport au plan médiateur d'une arête	6
$(1\ 2\ 3)$	Rotation d'axe une hauteur du tétraèdre et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$	8
$(1\ 2\ 3\ 4)$	Anti-rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$	6
$(1\ 2)(3\ 4)$	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	3

II.2.2 L'octaèdre régulier

Théorème 7 : [Caldero, p.222]

On a $\text{Isom}^+(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Isom}(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Preuve :

Avec un raisonnement analogue à celui du développement, on obtient :

$$\text{Card}(\text{Isom}(\mathcal{O})) = 48 \text{ et } \text{Card}(\text{Isom}^+(\mathcal{O})) = 24$$

De plus, un élément de $\text{Isom}(\mathcal{O})$ préserve les faces de \mathcal{O} . Or, l'ensemble de ces points forme un cube \mathcal{O}^* et on a alors l'inclusion $\text{Isom}(\mathcal{O}) \subseteq \text{Isom}(\mathcal{O}^*) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\text{Isom}(\mathcal{O}) \subseteq \text{Isom}(\mathcal{O}^*) \cong \mathfrak{S}_4$.

Finalement, on a par cardinalité que $\text{Isom}^+(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Isom}(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ■

Correspondance entre les éléments de \mathfrak{S}_4 et $\text{Isom}^+(\mathcal{O})$:

\mathfrak{S}_4	$\text{Isom}^+(\mathcal{O})$	Cardinal
$\text{Id}_{[1;4]}$	Identité	1
$(1\ 2)$	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	6
$(1\ 2\ 3)$	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$	8
$(1\ 2\ 3\ 4)$	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$	6
$(1\ 2)(3\ 4)$	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm \pi$	3

Remarque 8 :

On constate donc qu'il est possible d'inscrire un cube dans l'octaèdre en prenant le milieu de ses faces (et réciproquement). Le cube et le tétraèdre partagent une propriété forte : le nombre de faces de l'un est égal au nombre de sommets de l'autre et réciproquement. Ces deux figures sont alors appelées des **polyèdres duaux**. On remarque donc en particulier que le tétraèdre est son propre dual.

II.2.3 Le dodécaèdre régulier et l'isocaèdre régulier

Dans le cas du dodécaèdre régulier et de l'isocaèdre régulier, on a le résultat suivant dont la démonstration suit le même principe que dans le cadre du cube et de l'octaèdre (en particulier, le dodécaèdre régulier et l'isocaèdre régulier sont des polyèdres duaux l'un de l'autre) :

Théorème 9 : [Caldero, p.227]

On a $\text{Isom}^+(\mathcal{D}) \cong \text{Isom}^+(\mathcal{I}) \cong \mathfrak{A}_5$ et $\text{Isom}(\mathcal{D}) \cong \text{Isom}(\mathcal{I}) \cong \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On peut alors établir un correspondance entre les isométries et les permutations :

Correspondance entre les éléments de \mathfrak{A}_5 et $\text{Isom}^+(\mathcal{D})$:

\mathfrak{A}_5	$\text{Isom}^+(\mathcal{D})$	Cardinal
$\text{Id}_{[1;5]}$	Identité	1
$(1\ 2\ 3)$	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$	20
$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm \frac{2\pi}{5}$ ou $\pm \frac{4\pi}{5}$	24
$(1\ 2)(3\ 4)$	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	15

Correspondance entre les éléments de \mathfrak{A}_5 et $\text{Isom}^+(\mathcal{I})$:

\mathfrak{A}_5	$\text{Isom}^+(\mathcal{I})$	Cardinal
$\text{Id}_{[1;5]}$	Identité	1
$(1\ 2\ 3)$	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$	20
$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm \frac{2\pi}{5}$ ou $\pm \frac{4\pi}{5}$	24
$(1\ 2)(3\ 4)$	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	15

II.3 Pour aller plus loin : les sous-groupes finis de $\text{Isom}(\mathcal{E})$

Dans le cas du plan euclidien, on a le résultat suivant :

Théorème 10 :

Les sous-groupes finis de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ sont exactement à isomorphismes près les groupes cycliques.

Remarque 11 :

Un sous-groupe de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ des déplacements du plan euclidien est le groupe des déplacements d'un polygone régulier à n côtés. On note D_{2n} le groupe des isométries laissant globalement invariant le polygone régulier à n côtés et on l'appelle **groupe diédral**.

Dans le cas de l'espace on a le résultat suivant :

Théorème 12 : [Combes, p.171]

Les sous-groupes finis de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ sont exactement à isomorphismes près :

- * Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. * Le groupe diédral D_{2n} .
- * Les groupes \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 et \mathfrak{A}_5 .

Remarque 13 :

* Ce théorème s'applique aussi aux sous-groupes finis de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ car on peut le considérer comme un sous-groupe de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$.

* Chacun des groupes ci-dessus est le groupe des déplacements d'un polyèdre de l'espace affine euclidien \mathcal{E} (respectivement le groupe des déplacements d'un polygone régulier à n côtés, le groupe des déplacements d'un "épaississement" d'un polygone régulier à n côtés et enfin le groupe des déplacements d'un tétraèdre régulier, d'un cube et d'un dodécaèdre régulier).

II.4 Recasages

Recasages : 101 - 104 - 105 - 108 - 161 - 181 - 190 - 191.

III Bibliographie

— François Combes, Algèbre et géométrie.

— Philippe Caldero, Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 2.