 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la caractérisation de l'injectivité puis de la surjectivité pour un morphisme de groupes puis montrer que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.

2 - Énoncer et démontrer les règles de calcul dans un anneau.

3 - Énoncer et démontrer les opérations sur les équivalents.

II Exercices sur l'analyse asymptotique

Exercice 1 :
1 - Donner un équivalent de $\dfrac{3x+4}{5x^2-2x+1}$ au voisinage de $+\infty$.
2 - Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x))(1+2x)}{x^2-x^4}$.

Exercice 2 :
1 - Donner un équivalent de $1+x+\ln(x)$ au voisinage de 0.
2 - Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{6\tan(x)}$.

Exercice 3 :
1 - Donner un équivalent de $\cosh(\sqrt{x})$ au voisinage de $+\infty$.
2 - Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$.

III Exercices sur les structures algébriques

Exercice 4 :
On note $i\mathbb{Q} = \{ir,\ r \in \mathbb{Q}\}$ et $\mathbb{Q}[i] = \left\{a+ib,\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$.
1 - Montrer que $i\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[i]$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$.
2 - $\mathbb{Q} \cup i\mathbb{Q}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$?
3 - Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
4 - Muni des lois induites, $(\mathbb{Q}[i], +, \times)$ est-il un corps ?

Exercice 5 :
Soient G un groupe noté multiplicativement et A un sous-groupe de G.
Pour $x \in G$, on note :

$$Ax = \{ax, a \in A\} \text{ et } xA = \{xa,\ a \in A\}$$

On considère l'ensemble B des éléments $x \in G$ tels que $Ax = xA$.
1 - Montrer que $A \subseteq B$.
2 - Montrer que pour tout $x \in B$ et tout $a \in A$, on a $xax^{-1} \in A$.
3 - Montrer que pour tout $x \in B$, on a $x^{-1} \in B$.
4 - L'ensemble B est-il un sous-groupe de G ?

Exercice 6 :
Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
On envisage la propriété suivante :

$$\forall x, y \in A,\ (xy)^2 = x^2y^2 \quad (\bowtie)$$

1 - Montrer que si $\times$ est commutative, alors $(\bowtie)$ est vraie.
2 - On se propose de montrer la réciproque.
On suppose que $(\bowtie)$ est vraie.
Montrer que :

$$\forall x, y \in A,\ y^2x = yxy = xy^2$$

Indication : Calculer $(y+xy)^2$ de deux manières différentes.
En déduire que $\times$ est commutative.

Exercice 7 :
Soit G un groupe noté multiplicativement.
On définit un relation binaire $\mathcal{R}$ sur G par :

$$\forall x, y \in G,\ (x\mathcal{R}y) \iff \exists a \in G \mid y = axa^{-1}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G.

Exercice 8 :
Soient $(G, *)$ un groupe de cardinal fini et H un sous-groupe de $(G, *)$.
1 - Montrer que pour tout $a \in G$, H et $aH = \{ah,\ h \in H\}$ ont le même nombre d'éléments.
2 - Soient $a, b \in G$.
Démontrer que $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \emptyset$.
3 - En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G.

Exercice 9 :
Soit f un morphisme non constant d'un groupe fini $(G, *)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
Calculer $\displaystyle\sum_{g\in G} f(g)$.