v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la caractérisation d'une partie bornée à l'aide de la valeur absolue.

2 - Énoncer et démontrer la formule donnant $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de n.

3 - Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j$.

II Exercices sur le calcul algébrique

Exercice 1 :
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \text{ et } T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

1 - Rappeler les valeurs de $S_n(1)$ et $T_n(1)$.
2 - Pour $x \neq 1$, rappeler la valeur de $S_n(x)$, calculer $(1-x)T_n(x)$ et en déduire $T_n(x)$.
3 - Pour $x \neq 1$, retrouver $T_n(x)$ en remarquant que $T_n(x) = S'_n(x)$.

Exercice 2 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}(i+j)\right),\ B_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} ij\right) \text{ et } C_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\max(i,j)\right)$$

Exercice 3 :
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.
On définit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ et } b_n = B_{n+1} - B_n$$

1 - Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.

2 - En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} 2^k k$.

III Minoration et majorations

Exercice 4 :
Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$m = \frac{x+y}{2},\ g = \sqrt{xy} \text{ et } h = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

Montrer que $\min(x,y) \leq h \leq g \leq m \leq \max(x,y)$.

Exercice 5 :
Soient m et n deux entiers naturels non nuls.
1 - Montrer que $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+2n}{m+n}$ encadrent $\sqrt{2}$.
2 - Montrer que $\frac{m+2n}{m+n}$ est plus proche de $\sqrt{2}$ que $\frac{m}{n}$.
3 - Donner un encadrement de $\sqrt{2}$ entre deux rationnels d'amplitude inférieure à 10^{-2}.

Exercice 6 :
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides. On note $AB = \{ab, a \in A \text{ et } b \in B\}$.
1 - On suppose que A et B sont des parties de $\mathbb{R}^+$.
Si A et B sont majorées, AB est-elle aussi majorée ? La réciproque est-elle vraie ?
2 - Mêmes questions en supposant que A et B sont des parties de $\mathbb{R}_+^*$.

IV Autres

Exercice 7 :
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j}\right) = \frac{n^2}{2}$$

Indication : On pourra remarquer que $\frac{i}{i+j} = \frac{i+j-j}{i+j}$.

Exercice 8 :
Combien de solutions l'équation $x^2 - \lfloor x \rfloor = 3$ admet-elle de solution ?
Indication : On pourra représenter les fonctions $x \longmapsto x^2 - 3$ et $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

v.hanecart@orange.fr

Exercice 9 :
Pour toutes parties A et B de $\mathbb{R}$, on définit $A \preceq B$ par :

$$A \preceq B \iff (A \cap \mathbb{R}^+ \subseteq B \cap \mathbb{R}^+) \text{ et } (B \cap \mathbb{R}^*_- \subseteq A \cap \mathbb{R}^*_-)$$

1 - Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
2 - Pour toute partie de $\mathbb{R}$, montrer que :

$$\emptyset \preceq B \iff B \subseteq \mathbb{R}^+$$

3 - Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $A \preceq \mathbb{R}$.
4 - Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, montrer que $A \preceq \mathbb{R}_+$.
5 - Existe-t-il un plus petit élément au sens de $\preceq$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?