Leçon 161 - Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

Extrait du rapport de jury

Les généralités sur les espaces euclidiens et affines sont supposées connues. La leçon reste contenue dans le cadre des espaces de dimension finie.
La notion de distance est abordée dans le cadre de la norme euclidienne : les projections orthogonales doivent être mentionnées. Les déterminants de Gram et des inégalités du type des inégalités d'Hadamard ont toute leur place dans cette leçon.
La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3.
Il faut savoir justifier qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines. Les groupes de similitudes peuvent également être abordés.
Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de Gram permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 161 intitulée : "Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.". Le but de cette leçon sera d'étudier les notions de distances et d'isométries dans un cadre général puis ensuite dans le cas particulier de la dimension 2 et 3 afin d'en déduire une classification ainsi que l'étude d'isométries qui laissent globalement des figures invariantes.
Dans une première partie on s'intéresse à la notion de distance dans le cadre euclidien en commençant par en donner la définition ainsi qu'un premier calcul dans l'espace des matrices. On fait ensuite le lien dans un deuxième point avec la projection orthogonale. On donne ainsi la définition de la projection orthogonale et on en donne son expression ainsi que sa valeur. On termine ce premier point par les matrices de Gram qui nous permettent également de calculer la distance d'un point à un sous-espace vectoriel de dimension finie grâce à la notion de déterminant.
Dans une deuxième partie on s'intéresse désormais aux isométries dans un espace vectoriel euclidien en commençant par parler du groupe des isométries vectorielles. On commence par introduire les notions d'isométrie vectorielle puis de réflexion et de rotation avant de donner la définition du groupe orthogonal et du groupe spécial orthogonal. Enfin, on termine cette partie avec le théorème de Cartan-Dieudonné qui nous donne une famille génératrice de ce groupe et qui est à la base de la classification des isométries vectorielles en dimension 2 et 3. On s'intéresse ensuite plus spécifiquement au cas de la dimension 2 en montrant que les seules isométries vectorielles sont l'identité, les rotations et les symétries orthogonales et on montre que $\mathrm{SO}(E)$ est commutatif (cas exceptionnel). On passe ensuite au cas de la dimension 3 où l'on rajoute à notre classification les anti-rotations ainsi qu'un corollaire avec la simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et enfin au cas général avec une réduction par blocs des isométries vectorielles.
Dans une troisième partie on s'intéresse désormais aux isométries affines où l'on va effectuer le même travail que dans le cas vectoriel en commençant par s'intéresser au groupe des isométries affines. On donne ainsi la définition d'une isométrie affine ainsi que d'un déplacement et enfin du groupe des isométries affines ainsi que la décomposition canonique. Ensuite dans une deuxième partie on classifie les isométries affines en dimension 2 et 3 grâce à la décomposition canonique.
Enfin dans une dernière partie on s'intéresse désormais aux isométries qui laissent globalement invariantes une partie. On commence tout d'abord par parler du groupe diédral en donnant sa définition ainsi que son interprétation géométrique. On passe ensuite au cas de la dimension 3 avec les isométries laissant invariant un solide de Platon en commençant par parler de point extremaux ce qui nous sera utile lorsque l'on déterminera les isométries laissant invariant un tétraèdre et un cube par exemple.
On trouvera également en annexe une classification des isométries vectorielles en dimension 2 et 3, ainsi qu'une illustration géométrique de D_{10}, les 5 solides de Platon et une correspondance entre les éléments de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C})$ et $\mathfrak{S}_4$.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $(E, <\cdot;\cdot>)$ un espace euclidien de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.

I Distance dans un espace euclidien

I.1 Notion de distance

Définition 1 : Distance euclidienne [Deschamps (1), p.1290] :
On appelle **distance euclidienne associée à un produit scalaire** $<\cdot;\cdot>$ l'application d définie de E^2 sur $\mathbb{R}^+$ par $d(x,y) = \|x-y\|$.

Définition 2 : Distance à un sous-ensemble [Deschamps (1), p.1302] :
On considère $\mathcal{X}$ une partie non vide de E et A un point de E.
On appelle **distance de** A **à** $\mathcal{X}$ **la quantité** $d(A,\mathcal{X}) = \inf_{M\in\mathcal{X}} d(A,M)$.

Développement 1 : [cf. GOURDON (1)]

Lemme 3 : [Gourdon (1), p.330]
Soient E,F et G trois espace vectoriels de dimension finie et $\varphi : E\times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire.
L'application φ est différentiable sur $E \times F$ et :

$$\forall (x,y) \in E\times F,\ \forall (h,k)\in E\times F,\ d\varphi_{(x,y)}(h,k) = \varphi(x,k) + \varphi(h,y)$$

Proposition 4 : [Gourdon (1), p.332]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(\det)_M(H) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(M)^\intercal H)$$

Proposition 5 : [Gourdon (1), p.341]
Si l'on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2 : M \longrightarrow \left(\sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, alors le groupe des matrices orthogonales directes de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

I.2 Projection orthogonale et distance

Définition 6 : Projection orthogonale [Deschamps (1), p.1300] :
On considère F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle **projection orthogonale sur** F la projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonal $F^{\perp}$. L'image d'un vecteur x par cette projection est appelée **projeté orthogonal de** x **sur** F.

Proposition 7 : [Deschamps (1), p.1300] :
Soient F un sous-espace vectoriel de E et $(e_1, ..., e_p)$ une base orthonormale de F.
Le projeté orthogonal sur F d'un vecteur x est $\pi(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i; x > e_i$.

Proposition 8 : [Deschamps (1), p.1301]
Soient F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E.
Si $(e_1, ..., e_p)$ engendre F, alors :

$$\forall y \in F,\ (y = p_F(x)) \iff (\forall i \in [\![1; p]\!],\ < x - y; e_i >= 0)$$

Proposition 9 : [Deschamps (1), p.1302]
Soit F un sous-espace vectoriel de E, p_F la projection orthogonale sur F et x un vecteur de E.
La distance de x à F est atteinte en un unique point de F (à savoir $p_F(x)$).
Autrement dit :
$*$ $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$. $*$ $\forall y \in F,\ d(x, F) = \|x - y\| \iff y = p_F(x)$.

Exemple 10 : [Deschamps (1), p.1302]
On a $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos(x) - b\sin(x))^2 \mathrm{d}x = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi$.

Proposition 11 : [Deschamps (1), p.1357]
Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + h = 0$ dans un repère orthonormal, alors la distance d'un point M de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ à $\mathcal{H}$ est donnée par : $d(M, \mathcal{H}) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + h\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$.

I.3 Matrice et déterminant de Gram

Définition 12 : Matrice de Gram [Gourdon (2), p.274] :
On considère $x_1, ..., x_n$ des vecteurs de E.
On appelle **matrice de Gram** la matrice $(< x_i; x_j >)^2_{(i,j)\in[\![1;n]\!]}$ et on note $G(x_1, ..., x_n)$ son déterminant.

Théorème 13 : [Gourdon (2), p.275]
Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p muni d'une base $(e_1, ..., e_p)$, alors pour tout $x \in E$, on a : $d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, ..., e_p, x)}{G(e_1, ..., e_p)}$.

Corollaire 14 : Inégalité d'Hadamard [Gourdon (2), p.273] :
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
$*$ Si $x_1, ..., x_p \in E$, alors $G(x_1, ..., x_p) \leq \prod_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$.
$*$ Si $v_1, ..., v_p \in \mathbb{C}$, alors $|\det(v_1, ..., v_p)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|$.

Remarque 15 :
De plus, on a égalité si, et seulement si, la famille de vecteurs contient un vecteur nul ou est orthogonale. Ainsi, dans le cas d'un espace euclidien E, le volume d'un parallélotope P de E est égal au produit des longueurs de ses côtés si, et seulement si, P est un parallélotope droit.

II Isométries dans un espace vectoriel euclidien

II.1 Le groupe des isométries vectorielles

Définition 16 : Isométrie vectorielle [Deschamps (1), p.1318] :
On appelle **isométrie vectorielle de** E (ou **automorphisme orthogonal de** E) tout endomorphisme f de E conservant la norme.

Proposition 17 : [Deschamps (1), p.1318]
Un endomorphisme f de E est une isométrie si, et seulement si, elle conserve le produit scalaire.

Définition 18 : Symétrie orthogonale/réflexion [Deschamps (1), p.1319] :
On appelle :
$*$ On appelle **symétrie orthogonale** toute symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F parallèlement à son orthogonal $F^{\perp}$.
$*$ On appelle **réflexion** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition 19 : [Deschamps (1), p.1319]
Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Proposition 20 : [Deschamps (1), p.1320]
L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ des isométries vectorielles de E de muni de la composition est un groupe. En particulier, c'est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.

Définition 21 : Rotation [Deschamps (1), p.1322] :
On appelle **rotation** (ou encore **isométrie positive**) toute isométrie de déterminant égal à 1.

Définition 22 : Groupe spécial orthogonal [Deschamps (1), p.1322] :
L'ensemble des rotations de $\mathrm{O}(E)$ est appelé **groupe spécial orthogonal** et on le note $\mathrm{SO}(E)$.

Proposition 23 :
L'ensemble $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{O}(E)$ d'indice 2.

Théorème 24 : Théorème de Cartan-Dieudonné [Audin, p.56] :
Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions.
Plus précisément, pour $f \in \mathrm{O}(E)$ et $p = \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E))$, f s'écrit comme composée de $n - p$ réflexions (donc d'au plus n réflexions).

Remarque 25 :
* La décomposition de f n'est pas unique, cependant la parité du nombre de réflexions est donnée par la déterminant de f.
* Pour $n \geq 3$, les renversements sont également des générateurs de $\mathrm{SO}(E)$ et tout élément de $\mathrm{SO}(E)$ est produit d'au plus n renversements.

II.2 Classification et réduction des isométries vectorielles en dimension 2

On suppose dans toute cette sous-partie que E est de dimension 2.

Théorème 26 :
Tout élément $f \in \mathrm{O}(E)$ est une rotation lorsque $\det(f) = 1$ et une réflexion lorsque $\det(f) = -1$.

Remarque 27 :
Dans le plan toute rotation est composée de deux réflexions, dont l'une peut être choisie arbitrairement.

Proposition 28 : [Deschamps (1), p.1326]
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.
* Si $\det(f) = 1$, alors pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E il existe $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

* Si $\det(f) = -1$, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Corollaire 29 : [Audin, p.62]
Le groupe $\mathrm{SO}(E)$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. En particulier, le groupe $\mathrm{SO}(E)$ est commutatif.

Remarque 30 :
On trouvera en annexe 1 un tableau récapitulatif.

II.3 Classification et réduction des isométries vectorielles en dimension 3

On suppose dans toute cette sous-partie que E est de dimension 3.

Théorème 31 : [Audin, p.143]
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.
* Si $\det(f) = 1$, alors f est une rotation.
Si de plus $f \neq \mathrm{Id}_E$, alors l'ensemble $D = \{x \in E \text{ tq } f(x) = x\}$ est une droite de E (appelée **axe de la rotation** f) et $f|_{D^\perp}$ est une rotation du plan vectoriel $D^\perp$.
* Si $\det(f) = -1$, alors :
Soit f est une réflexion par rapport à un plan, soit il existe une rotation $r \in \mathrm{SO}(E)$ d'axe D telle qu'en notant s la réflexion par rapport au plan $D^\perp$, on a la relation $f = r \circ s = s \circ r$ (on dit que f est une **antirotation d'axe** D).

Remarque 32 :
On trouvera en annexe 2 un tableau récapitulatif.

Théorème 33 : [Francinou, p.67]
Le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.

II.4 Réduction des isométries vectorielles en dimension n

Lemme 34 : [Deschamps (2), p.840]
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.
Il existe une droite ou un plan stable par f.

Théorème 35 : [Deschamps (2), p.840]
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.
Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est égale à une matrice diagonale par blocs :
* de taille 1 de la forme (γ) avec $\gamma \in \{-1; 1\}$.
* de taille 2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \in]-\pi\ 0[\cup]0;\pi[$$

III Isométries dans un espace affine euclidien

Dans toute cette partie, on considère $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction E.

III.1 Le groupe des isométries affines

Définition 36 : Isométrie affine [Audin, p.52] :
On appelle **isométrie affine** toute application $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ telle que pour tous $A, B \in \mathcal{E}$ on ait $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$.

Remarque 37 : [Audin, p.53]
Une isométrie est affine si, et seulement si, l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle.

Proposition 38 : [Audin, p.53]
L'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe.

Exemple 39 : [Audin, p.53]
Les translations, les symétries orthogonales affines et les réflexions sont des isométries affines.

Définition 40 : Déplacement [Audin, p.58]
On appelle **déplacement** toute isométrie affine dont le déterminant (celui de son application linéaire associée) est positif. Dans le cas contraire, on parle d'**anti-déplacement**.

Proposition 41 : [Audin, p.59]
$\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ (donc en particulier distingué dans $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$).

Théorème 42 : [Audin, p.57]
Toute isométrie affine de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme composée d'au plus $n+1$ réflexions orthogonales affines.

Proposition 43 : [Audin, p.59]
Une isométrie affine est un déplacement si, et seulement si, le nombre de réflexions qui intervient dans la décomposition de cette isométrie est pair.

Proposition 44 : Décomposition canonique [Audin, p.59] :
Soit φ une isométrie affine de $\mathcal{E}$.
Il existe une isométrie ψ et une translation t_v de $\mathcal{E}$ telles que :
* L'espace $\mathcal{F}$ des points fixes de ψ n'est pas vide.
* Le vecteur v de la translation est dans la direction F du sous-espace $\mathcal{F}$.
* On a $\varphi = t_v \circ \psi$.

De plus, le couple (ψ, t_v) est unique, les isométries t_v et ψ commutent et on a la relation $F = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$.

III.2 Classification des isométries affines en dimension 2 et 3

On suppose dans le premier théorème que $\mathcal{E}$ est de dimension 2 puis de dimension 3 dans le deuxième théorème.

Théorème 45 : [Audin, p.86]
Soit $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.
* Soit f est une translation de vecteur quelconque $u \in E$ (si $u = 0_E$ alors $f = \mathrm{Id}_E$).
* Soit f est de la forme $t_u \circ s_D = s_D \circ t_u$ (avec s_D une réflexion orthogonale affine par rapport à une droite D et $u \in D$). f est alors appelée **réflexion glissée d'axe D et de vecteur u** (si $u = 0_E$ alors on a une réflexion orthogonale affine).
* Soit une rotation affine distincte de Id_E, elle a alors un unique point fixe (appelé **centre**).

Théorème 46 : [Audin, p.145]
Soit $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.
* Soit f est une translation de vecteur quelconque $u \in E$ (si $u = 0_E$ alors $f = \mathrm{Id}_E$).
* Soit f est de la forme $t_u \circ s_P = s_P \circ t_u$ (avec s_P une réflexion orthogonale affine par rapport à un plan P et $u \in P$). f est alors appelée **réflexion glissée par rapport à P et de vecteur u** (si $u = 0_E$ alors on a une réflexion orthogonale affine).
* Soit f est de la forme $t_u \circ r = r \circ t_u$ (avec r une rotation affine ayant pour ensemble de points fixe une droite D et $u \in D$). f alors est appelée **vissage d'axe D et de vecteur u** (si $u = 0_E$ alors on a une rotation affine d'axe D).
* Soit f est de la forme $r \circ s_P = s_P \circ r$ (avec r une rotation affine d'axe D et s_P la réflexion affine par rapport à un plan P et orthogonal à D). f est alors appelée **antirotation affine d'axe D et par rapport à P** et elle a un unique point fixe qui est le point d'intersection de D et P et appelé **centre de l'antirotation affine**.

IV Isométries laissant invariant un polygone/polyèdre régulier

IV.1 Le groupe diédral

Définition 47 : Groupe diédral [Berhuy, p.274] :
On appelle **groupe diédral d'ordre** $2n$ le groupe défini par la présentation suivante : $D_{2n} \cong \langle a, b \mid a^n = 1,\ b^2 = 1,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.

Proposition 48 : [Delcourt, p.98]
Le groupe diédral d'ordre $2n$ est un groupe non abélien de cardinal $2n$.

Remarque 49 : [Perrin, p.23]
Le groupe diédral d'ordre $2n$ possède une interprétation géométrique : il s'agit du groupe des isométries du plan euclidien conservant globalement un polygone régulier à n côtés. Il est engendré par la rotation τ de mesure d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et la symétrie orthogonale σ par rapport à l'axe (Ox) (cf. annexe 3).

Remarque 50 : [Perrin, p.23]
Le sous-groupe des rotations est distingué et isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et comme $\mathrm{Card}(D_{2n}) = 2n$, on a donc une suite exacte :

$$\{\mathrm{Id}\} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow D_{2n} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \{\mathrm{Id}\}$$

et un isomorphisme $D_{2n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exemple 51 : [Perrin, p.23]
Le groupe D_6 des isométries laissant globalement invariant la triangle équilatéral est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ (ce qui s'observe lorsque l'on numérote les sommets).

IV.2 Isométries laissant invariant un solide de Platon

Dans toute cette sous-partie, on fixe un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3.

Proposition 52 : [Combes, p.145]
Soit X une partie convexe de $\mathcal{E}$.
* Si $x \in X$ est un point extrémal de X et $f \in \mathrm{Isom}(X)$, alors $f(x)$ est un point extrémal de X.
* Les points extrémaux d'un polyèdre convexe fermé de $\mathcal{E}$ sont ses sommets.

Proposition 53 :
Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre convexe de $\mathcal{E}$.
Si l'on note $\mathcal{P}_s$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}$, alors on a $\mathrm{Isom}(\mathcal{P}) = \mathrm{Isom}(\mathcal{P}_s)$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{P}) = \mathrm{Isom}^+(\mathcal{P}_s)$.

Remarque 54 :
* Plus généralement, une isométrie d'un polyèdre convexe non aplati de l'espace préserve les sommets, les arêtes et les faces du polyèdre.
* Si $\mathcal{P}$ est un polyèdre convexe non aplati de l'espace, on en déduit qu'il existe un morphisme de groupes injectif $\lambda : \mathrm{Isom}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{Bij}(X)$, avec X l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}$.

Théorème 55 : [Combes, p.147]
L'ensemble des polyèdres réguliers de $\mathcal{E}$ sont à similitude près le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier.

Développement 2 : [cf. COMBES]

Théorème 56 : [Combes, p.175]
On a $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Isom}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque 57 :
On donne en annexe 5 une correspondance entre les éléments de $\mathfrak{S}_4$ et de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C})$.

Théorème 58 : [Caldero, p.222 + 227]
* On a $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{A}_4$ et $\mathrm{Isom}(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{S}_4$.
* On a $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Isom}(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
* On a $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{D}) \cong \mathrm{Isom}^+(\mathcal{I}) \cong \mathfrak{A}_5$ et $\mathrm{Isom}(\mathcal{D}) \cong \mathrm{Isom}(\mathcal{I}) \cong \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Théorème 59 : [Combes, p.171]
Les sous-groupes finis de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ sont exactement à isomorphismes près :
* Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. * Le groupe diédral D_{2n}.
* Les groupes $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_5$.

Remarque 60 :
* Ce théorème s'applique aussi aux sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ car on peut le considérer comme un sous-groupe de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$.
* Chacun des groupes ci-dessus est le groupe des déplacements d'un polyèdre de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ (respectivement le groupe des déplacements d'un polygone régulier à n côtés, le groupe des déplacements d'un "épaississement" d'un polygone régulier à n côtés et enfin le groupe des déplacements d'un tétraèdre régulier, d'un cube et d'un dodécaèdre régulier).

V Annexe

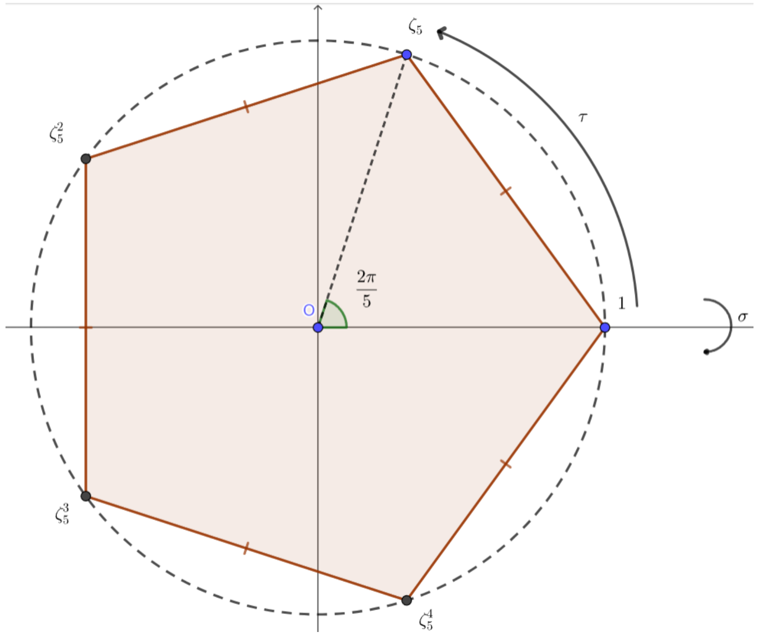
V.1 Classification des isométries vectorielles en dimension 2

$\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E))$	Isom. vect. f en dim. 2	$\det(f)$	Réduction matricielle
0	Rotation (différente de Id_E)	+1	$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans toute B.O.N.
1	Réflexion par rapport à une droite	-1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une B.O.N. bien choisie
2	Id_E	+1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une B.O.N. bien choisie

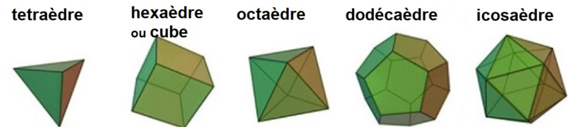
V.2 Classification des isométries vectorielles en dimension 3

$\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E))$	Isom. vect. f en dim. 3	$\det(f)$	Réduction matricielle
0	Antirotation d'axe une droite	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans une B.O.N. bien choisie
1	Rotation d'axe une droite	+1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans une B.O.N. bien choisie
2	Réflexion par rapport à un plan	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans une B.O.N. bien choisie
3	Id_E	+1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans toute B.O.N.

V.3 Illustration géométrique de D_{10}



V.4 Les 5 solides de Platon



V.5 Correspondance entre $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C})$ et $\mathfrak{S}_4$

$\mathfrak{S}_4$	$\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C})$	Cardinal
$\mathrm{Id}_{[\![1;n]\!]}$	Identité	1
(1 2)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm\pi$	6
(1 2 3)	Rotation d'axe une grande diagonale et d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$	8
(1 2 3 4)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$	6
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm\pi$	3

Remarques sur la leçon

— Il faut savoir déterminer la nature géométrique d'une isométrie (centre, point(s) fixe(s), partie linéaire, etc.).

Liste des développements possibles

— Matrices minimisant la norme sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

— Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

— Groupe des isométries du cube.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Michèle Audin, *Géométrie*.

— Serge Francinou, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 3*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.

— Jean Delcourt, *Théorie des groupes*.

— Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*.

— François Combes, *Algèbre et géométrie*.

— Philippe Caldero, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 2*.