 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 10 banque CCINP :

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

a) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

2 - Exercice 12 banque CCINP :

a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a;b]$.
Démontrer que f est continue en x_0.

b) On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0;1],\ g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

3 - Exercice 14 banque CCINP :

Soient a,b deux réels donnés avec $a<b$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a;b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

II Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 :

Soient $\alpha>0$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_n : x\longmapsto xn^\alpha e^{-nx}$$

1 - Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.
2 - Pour quelle(s) valeur(s) de α la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 2 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{n^3x}{n^4+x^4}$$

1 - Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à préciser.
2 - Que dire de $f_n(n)$? Que peut-on en conclure ?
3 - Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout intervalle du type $[-a;a]$.

Exercice 3 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0;+\infty[$, on pose :

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

1 - Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0;+\infty[$.
2 - Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0;+\infty[$, on a $0\leq f_n(x)\leq e^x$.
3 - Soit $a>0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0;a]$.
4 - Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x$ de deux manières différentes.
5 - La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$?

III Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f.
1 - Montrer que si les fonctions f_n sont convexes, alors f est convexe.
2 - Montrer que si les fonctions f_n sont bornées et que la convergence précédente est uniforme, alors f est bornée.

Exercice 5 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{nx^2e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$$

1 - Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0;+\infty[$.
2 - Préciser $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f_n(x)$. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]0;+\infty[$.
3 - Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a;b]$ de $]0;+\infty[$.
4 - Montrer que pour $a>0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$.

IV Exercices avec questions ouvertes

Exercice 6 :

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers ℓ.
La suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers $f(\ell)$?

Exercice 7 :

Existe-t-il une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers exp ?