 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 97 banque CCINP :
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X,Y) = (j,k)) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}$$

a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
b) Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles indépendantes ?
c) Montrer que $\mathbb{E}\left(2^{X+Y}\right)$ existe et la calculer.

2 - Exercice 102 banque CCINP :
Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0;1[$ et $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.
a) Soient $i \in [\![1; N]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$, puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
b) On considère $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{i \in [\![1;N]\!]} X_i$.
Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$ puis en déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$.
c) Reconnaître la loi de Y et en déduire que $\mathbb{E}(Y)$ existe et donner sa valeur.

3 - Exercice 108 banque CCINP :
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}$$

a) Déterminer les lois de X et de Y.
b) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance ainsi que la variance de X.
c) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
e) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

II Exercices

Exercice 1 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle.
On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$ (la fonction Φ_X est appelée fonction caractéristique de la variable aléatoire X).
1 - Déterminer Φ_X lorsque X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ puis lorsque X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
2 - Montrer que Φ_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3 - On suppose que X est dans L^2.
Montrer que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$ à l'aide de Φ_X.
4 - On suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_X(t)e^{-itk}\mathrm{d}t$$

En déduire que la fonction Φ_X caractérise la loi de X.

Exercice 2 :
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes, indépendantes, appartenant à L^2, centrées, ainsi que $a \in \mathbb{R}_+^*$.
On pose, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$:

$$S_i = \sum_{k=1}^{i} X_k \text{ et } B_i = \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} \{|S_k| < a\}\right) \cap \{|S_i| \geq a\}$$

1 - Montrer que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, les variables $S_i \mathbb{1}_{B_i}$ et $S_n - S_i$ sont indépendantes.
En déduire que :

$$\mathbb{E}\left(S_n^2 \mathbb{1}_{B_i}\right) = \mathbb{E}\left(S_i^2 \mathbb{1}_{B_i}\right) + \mathbb{E}\left((S_n - S_i)^2 \mathbb{1}_{B_i}\right) \geq a^2 \mathbb{P}(B_i)$$

Indication : On pourra commencer par s'intéresser à $\mathbb{E}\left(S_n^2 \mathbb{1}_{B_i}\right) - \mathbb{E}\left(S_i^2 \mathbb{1}_{B_i}\right)$ et utiliser la troisième identité remarquable.
2 - On pose $C = \left\{\sup\limits_{i \in [\![1;n]\!]} |S_i| \geq a\right\}$.
a) Montrer que $\mathbb{P}(C) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)$.
b) En déduire l'inégalité de Kolmogorov :

$$\mathbb{P}(C) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{a^2}$$

v.hanecart@orange.fr

Exercice 3 :

On dispose de n urnes et de $N = na$ boules, où n et a sont des entiers naturels non nuls. Ces boules sont réparties de façon indépendantes et équiprobable entre les urnes.
On note Y_n la variable aléatoire donnant le nombre d'urnes vides et $S_n = \dfrac{Y_n}{n}$.
1 - Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
Indication : On pourra commencer par écrire Y_n comme une somme.
2 - Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|S_n - e^{-a}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Exercice 4 :

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\alpha}{k!}$.
1 - Déterminer α.
2 - Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X(X-1))$. En déduire la variance ainsi que l'écart-type de X.

Exercice 5 :

Soient X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$ et $Y = X^2$.
1 - Donner la loi de Y.
2 - X et Y sont-elles indépendantes.
3 - Calculer la covariance de X et de Y.

Exercice 6 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k$$

où $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$.
1 - Préciser G_{X+Y} la fonction génératrice de $X + Y$ et en déduire la loi de $X + Y$.
2 - Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser la loi conditionnelle de X sachant que $(X + Y = n)$.