Leçon 206 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

Extrait du rapport de jury

Cette leçon d'exemples est l'occasion d'une réflexion sur de nombreuses parties du programme.
En topologie, il s'agit bien sûr des propriétés spécifiques aux espaces normés de dimension finie, notamment l'utilisation des valeurs d'adhérence, l'équivalence des normes ou encore l'identité entre parties compactes et parties fermées et bornées. D'autres champs d'application sont : la théorie de la mesure (mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$), le calcul différentiel (utilisation de matrices jacobiennes, espaces tangents, extrema liés, etc.), les équations différentielles linéaires, les séries de Fourier et plus généralement l'approximation dans un espace préhilbertien séparable par projection sur des sous-espaces de dimension finie.
Les candidates et candidats solides peuvent aborder la question de l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, ou les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles. D'autres pistes possibles sont l'étude des propriétés spectrales des opérateurs compacts, ou le théorème de Grothendieck sur les sous-espaces fermés de L^p contenus dans L^∞.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 206 intitulée : "Leçon 206 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse." Le but de cette leçon sera d'étudier la dimension finie dans différents cadres en regardant ce qu'elle peut nous apporter : soit des simplifications de résultats vrais en dimension finie, soit de nouveaux résultats qui sont propres à la dimension finie.
On commence toute d'abord par s'intéresser aux espaces vectoriels normés de dimension finie et on regarde en premier lieu les résultats topologiques. On commence par rappeler la définition de normes équivalentes et on montre que les normes usuelles sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$. En réalité ce résultat est bien plus général que cela puisqu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes ! C'est ce résultat qui est central dans cette partie et donne beaucoup de corollaires très utiles : par exemple au niveau de la complétude et de la fermeture. Dans un deuxième temps on s'intéresse aux applications linéaires en commençant par donner des caractérisations de la continuité puis en montrant que toutes les applications linéaires sont continues. Enfin dans un dernier point on s'intéresse à la compacité en commençant par le théorème de Bolzano-Weierstrass puis en montrant que les compacts sont exactement les fermés bornés en dimension finie et on finit en donnant une caractérisation de la dimension finie via le théorème de Riesz.
Dans une deuxième partie on s'intéresse aux espaces hilbertiens et à la projection. On commence par quelques généralités en parlant de la projection sur un convexe fermé non vide puis sur un sous-espace vectoriel fermé avant de donner une application avec la notion d'adjoint qui peut s'obtenir assez facilement dans le cadre de la dimension finie via la transposée d'une matrice. Dans une deuxième sous-partie on s'intéresse aux séries de Fourier où l'objectif sera de projeter sur des sous-espaces vectoriels de dimension finie et en traduisant les résultats obtenus précédemment. On introduit ainsi l'espace D et on le munit d'une norme hilbertienne et on exhibe une famille orthonormale. Tout ceci nous permet de projeter sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_n$ en proposition 33 et d'aboutir à l'inégalité de Bessel. On termine finalement cette partie avec une dernière application aux polynômes où l'objectif est encore une fois d'approximer une fonction via des polynômes de degré n donné avec l'interpolation de Lagrange.
On termine cette leçon avec une dernière partie consacrée au calcul différentiel. On commence par rappeler des généralités sur la différentiabilité et on remarque que cette notion dépend de la norme choisie et qu'elle doit être continue mais en dimension finie cela ne pose pas de soucis puisque toutes les normes sont équivalentes. On donne ensuite quelques résultats sur la dérivée selon un vecteur et la dérivée partielle en un point ainsi que la matrice jacobienne. Enfin, on termine par quelques résultats d'optimisation avec la recherche d'extrema qui peut se faire en dimension finie via des résultats qui lui sont propres avec la matrice hessienne ainsi que le théorème des extrema liés (utilisation de la notion de dimension et de rang).

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans toute cette partie, on considère $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n > 0$.

I.1 Résultats topologiques

Définition 1 : Normes équivalentes [Gourdon, p.47] :
On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont des **normes équivalentes** lorsqu'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$.

Exemple 2 : [Gourdon, p.48]
Dans $\mathbb{R}^n$, les normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Théorème 3 : [Deschamps, p.299]
Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Remarque 4 :
Le résultat n'est plus vrai en dimension infinie.
En effet, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$, alors les normes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x$$

sont non équivalentes sur E.

Corollaire 5 : [Gourdon, p.50]
$(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé complet.

Remarque 6 : [Gourdon, p.50]
$\mathbb{R}[X]$ n'est jamais complet pour aucune norme. En effet, on a même que tout espace vectoriel normé à base dénombrable n'est pas complet.

Corollaire 7 : [Gourdon, p.50]
Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

Remarque 8 :
Le sous-espace des fonctions polynomiales sur $[0;1]$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ mais n'est pas fermé d'après le théorème de Weierstrass.

I.2 Applications linéaires

Théorème 9 : [Gourdon, p.48]
Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(F, G)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
∗ Il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_G \leq M \|x\|_F$.
∗ f est bornée sur la sphère unité de F.
∗ f est lipschitzienne sur F. ∗ f est uniformément continue sur F.
∗ f est continue sur F. ∗ f est continue en 0_F.
∗ f est bornée sur la boule unité fermée de F.

Corollaire 10 : [Gourdon, p.50]
Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé quelconque.
Toute application linéaire de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ est continue.

Remarque 11 : [Gourdon, p.50]
L'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

n'est pas continue car $f(X^n) = n$ et $\|X^n\|_\infty = 1$

I.3 Compacité

Théorème 12 : Théorème de Bolzano-Weierstrass [Gourdon, p.28] :
De toute suite bornée à valeurs dans E on peut en extraire une sous-suite convergente.

Développement 1 : [A] [cf. DESCHAMPS + HASSAN]

Théorème 13 : [Deschamps, p.301]
Si E est de dimension finie, alors les parties compactes de E sont exactement ses parties fermées bornées.

Remarque 14 : [Gourdon, p.50]
Le résultat est faux en dimension infinie !
En effet, dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$, on peut considérer la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est incluse dans la boule unité fermée mais qui est 1-écartée, donc ne peut pas admettre de sous-suite convergente.

Exemple 15 :
∗ Les segments sont des compacts de $\mathbb{R}$. ∗ $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Développement 2 : [B] [cf. DESCHAMPS + HASSAN]

Lemme 16 : Lemme de Riesz [Hassan, p.343] :
Soient $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel fermé strict de F.
On a la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists u \in F \text{ tq } \|u\| = 1 \text{ et } d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

Théorème 17 : Théorème de Riesz : [Hassan, p.343]
Soit $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
∗ F est de dimension finie.
∗ La boule unité fermée $\mathcal{B}_f(0, 1)$ de $(F, \|\cdot\|)$ est compacte.

Proposition 18 : [Gourdon, p.30]
Une suite bornée dans $(E, \|\cdot\|)$ converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Théorème 19 : [Rombaldi, p.771 + 780]
L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Exemple 20 :
La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ mais admet deux valeurs d'adhérence, donc elle ne converge pas.

II Espaces hilbertiens et projection

II.1 Généralités

Dans toute cette sous-partie, on considère $(E, < \cdot ; \cdot >)$ est un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert.

Puisque tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie est complet, tous les résultats de cette sous-partie sont vrais dans le cadre de la dimension finie.

Théorème 21 : [Hassan, p.489]
Soit C un convexe fermé et non vide de $(E, < \cdot ; \cdot >)$.
Pour tout $x \in E$, il existe un unique $c \in C$ (appelé **projection de x sur C**) tel que $d(x, C) = \|x - c\|$ avec pour tout $z \in C$, $\mathrm{Re}(< z - c ; x - c >) \leq 0$.
De plus, en notant P_C la projection sur C, on a P_C 1-lipschitzienne (donc continue).

Remarque 22 : [Hassan, p.489]
La conclusion du théorème précédent reste vraie si l'on suppose que $(E, <\cdot;\cdot>)$ est un espace préhilbertien et que C est un convexe fermé non vide contenu dans un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Proposition 23 : [Hassan, p.489]
Soient F un sous-espace vectoriel de E, $x_0 \in E$ et $x \in F$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ $\|x - x_0\| = d(x, F)$.
$*$ $x - x_0 \in F^\perp$ (autrement dit, pour tout $y \in F$, on a $< x - x_0, y >= 0$).

Théorème 24 : [Hassan, p.490]
Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $(E, <\cdot;\cdot>)$.
L'application $P_F : E \longrightarrow F$ est linéaire continue et telle que :
$*$ P_F est une projection telle que $P_F \circ P_F = P_F$. $*$ $\mathrm{Ker}(P_F) = F^\perp$ et $\mathrm{Im}(P_F) = F$.

Corollaire 25 : [Hassan, p.491]
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
$*$ On a $\overline{F}^\perp = F^\perp$, $\left(F^\perp\right)^\perp = \overline{F}$ et $E = \overline{F} \underset{\text{top.}}{\oplus} F^\perp$.
$*$ F est dense dans E si, et seulement si, $F^\perp = \{0_H\}$.

Définition 26 : Adjoint d'un opérateur [Hassan, p.493] :
On considère $T \in \mathcal{L}_c(E)$.
Il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ appelé **adjoint de** T tel que :

$$\forall x, y \in E, < T(x); y >=< x; T^*(y) >$$

Proposition 27 : [Hassan, p.493 + 494]
Pour tout $T \in \mathcal{L}_c(E)$, on a :

$$(T^*)^* = T, \ \ |||T^*||| = |||T||| \text{ et } |||T^* \circ T||| = |||T \circ T^*||| = |||T|||^2$$

Exemple 28 : [Hassan, p.494 + 495]
$*$ On considère F un sous-espace vectoriel fermé de E.
L'adjoint de l'opérateur d'injection canonique $\iota : E \longrightarrow F$ est l'opérateur de projection orthogonale $p : E \longrightarrow F$.
$*$ Dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, $\mathcal{L}(E)$ s'identifie à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T^* = T^\top$.
$*$ Dans $E = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire canonique, $\mathcal{L}(E)$ s'identifie à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $T^* = \left(\overline{T}\right)^\top$.

Proposition 29 : [Hassan, p.495]
Soit $T \in \mathcal{L}_c(E)$.
On a $\mathrm{Ker}\,(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$ et $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}\,(T^*)^\perp$.

Proposition 30 : [Hassan, p.495]
Soit $T \in \mathcal{L}_c(E)$.
$*$ $T(E)$ est dense dans E si, et seulement si, T^* est injectif.
$*$ $T^*(E)$ est dense dans E si, et seulement si, T est injectif.

II.2 Application aux séries de Fourier

Dans toute cette sous-partie, on considère f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ (et on note D l'espace vectoriel composé de ces fonctions).

Proposition 31 : [Gourdon, p.269]
L'espace D muni du produit scalaire :

$$<\cdot;\cdot>: \left| \begin{array}{ccc} D \times D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & < f; g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est un espace préhilbertien muni de la norme hilbertienne $\|f\|_2 = \sqrt{< f; f >}$.

Théorème 32 : [Gourdon, p.270]
La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de D

Proposition 33 : [Gourdon, p.270]
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}(e_{-n}, ..., e_n)$ vérifie $D = \mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}_n^\perp$ et la projection orthogonale p_n sur $\mathcal{P}_n$ vérifie : $p_n(f) = s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$.
De plus, on a :

$$\inf_{g\in\mathcal{P}_n} \|f - g\|_2^2 = \|f - s_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t - \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \quad (*)$$

Remarque 34 : [Gourdon, p.270]
La formule $(*)$ s'interprète en disant que parmi les polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n, s_n est celui qui approche le plus f en moyenne quadratique.

Corollaire 35 : Inégalité de Bessel [Gourdon, p.270] :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t$$

Remarque 36 : [Gourdon, p.270]
En fait, cette inégalité est une égalité et on parle alors d'**égalité de Parseval**.

II.3 Application aux polynômes

Dans toute cette sous-partie, on considère $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et on se donne $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ des points deux à deux distincts de $[a;b]$.

Théorème 37 : [Demailly, p.22]
Il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on ait $P_n(x_i) = f(x_i)$. P_n est alors appelé **polynôme d'interpolation de Lagrange associé à** f et on a $P_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\ell_i$, avec $\ell_i = \prod_{j\neq i} \frac{X-x_j}{x_i-x_j}$.

Théorème 38 : [Demailly, p.23]
Si f est $n+1$ fois dérivable, alors pour tout $x \in [a;b]$, il existe $\xi_x \in [a;b]$ tel que $f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\xi_x)$, avec $\pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (X-x_j)$.
En particulier, $\|f-P_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}\|\pi_{n+1}\|_\infty \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$.

Remarque 39 : [Demailly, p.28]
La précision des polynômes interpolateurs provient alors du contrôle de $\|\pi_{n+1}\|_\infty$, c'est-à-dire de la répartition des points. Dans le cas de points équidistants (c'est-à-dire $x_i = x_0 + ih$), on a :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq h^{n+1}\frac{\max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}\left|f^{(n+1)}(x_i)\right|}{n+1} \quad \text{et} \quad \|\pi_{n+1}\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}\right)$$

Remarque 40 :
On considère $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[-1;1]$.
C'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ mais dont les dérivées augmentent rapidement en norme infinie vers 0. Il s'en suit dans le cas de points équidistants que $\frac{1}{(n+1)!}\|\pi_{n+1}\|_\infty \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On observe alors que les polynômes d'interpolation ne convergent pas uniformément vers f.

Théorème 41 : [ADMIS] [Demailly, p.41]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ qui réalise le minimum de la distance $\|f-q_n\|_\infty = d(f, \mathbb{R}_n[X])$. Ce polynôme est appelé **polynôme de meilleure approximation uniforme de** f **à l'ordre** n.

Remarque 42 : [Demailly, p.43 + 46]
Malheureusement le polynôme de meilleure approximation d'une fonction à l'ordre n est très difficile à obtenir en général... On utilise alors plutôt les polynômes de Jackson.

III Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette partie, on considère E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert non vide de E, $f : U \longrightarrow F$ ainsi qu'un point $a \in U$.

III.1 Généralités sur la différentiabilité

Définition 43 : Fonction différentiable en un point [Gourdon, p.323] :
On dit que f est **différentiable en** a lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que :

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - \varphi(h)\|_F}{\|h\|} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad (*)$$

Remarque 44 : [Gourdon, p.323]
$*$ En dimension quelconque, df_a dépend a priori des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_F$ choisies sur E et F. Cependant, en dimension finie, les normes sont toutes équivalentes et l'existence et la valeur de df_a ne dépend ainsi pas des normes choisies.
$*$ La différentielle df_a doit être continue ! En dimension finie cela ne pose pas de soucis car les applications linéaires sont automatiquement continues.
$*$ Malgré tout, les grands théorèmes de calcul différentiel (cf. III.2) restent vrais lorsque E et F sont de dimension infinie mais de Banach.

Définition 45 : Dérivée selon un vecteur [Gourdon, p.324] :
On considère $v \in E$.
On dit que f est **dérivable en** a **selon le vecteur** v lorsque la fonction à variable réelle $\varphi : t \longmapsto f(a+tv)$ est dérivable en $t = 0$.
On note alors $f'_v(a) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a))$.

Proposition 46 : [Gourdon, p.324]
Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a suivant tout vecteur et pour tout $v \in E$, $f'_v(a) = df_a(v)$.

On considère désormais $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, avec $n = \dim(E) > 0$.

Définition 47 : Dérivée partielle en un point [Gourdon, p.325] :
On considère $i \in [\![1;n]\!]$.
On dit que f admet une **dérivée partielle en** a **d'indice** i lorsque f est dérivable en a selon le vecteur e_i (et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a)$).

Proposition 48 : [Gourdon, p.325]
Si f est différentiable en a, alors $df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_i$.

Définition 49 : Matrice jacobienne en un point [Gourdon, p.327] :
On suppose que f admet une dérivée partielle en a pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.
On appelle **matrice jacobienne de f en a** la matrice (notée Jf_a) définie par :

$$Jf_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{(i,j)\in[\![1;m]\!]\times[\![1;n]\!]} \quad \text{avec } m = \dim(F) \text{ et } f = (f_1, ..., f_m)$$

Proposition 50 :
Si E et F sont de même dimension, alors df_a est une application inversible si, et seulement si, $\det(Jf_a) \neq 0$.

III.2 Quelques résultats d'optimisation

Définition 51 : Application k fois différentiable [Gourdon, p.326]
On suppose que f est différentiable sur U.
$*$ On dit que f est **deux fois différentiable** en a lorsque $df : E \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est différentiable en a. Dans ce cas, on note $d^2f_a = d(df)_a$.
$*$ Par récurrence, on dit que f est k **fois différentiable** en a ($k \in \mathbb{N}^*$) lorsque df est $k-1$ fois différentiable en a et on note $d^kf_a = d\left(d^{k-1}f\right)_a$.

Théorème 52 : Théorème de Schwarz [Gourdon, p.326] :
Si f est deux fois différentiable en a, alors on a :

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!], \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

On suppose jusqu'à la fin de cette sous-partie que $F = \mathbb{R}$.

Définition 53 : Matrice hessienne en un point [Gourdon, p.336] :
On suppose que f est deux fois différentiable en a.
On appelle **matrice hessienne de f en a** la matrice définie par :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Remarque 54 :
Par le théorème de Schwarz, la matrice $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

Proposition 55 : [Gourdon, p.335]
Si f admet un extremum relatif en a et est différentiable en a, alors $df_a = 0$.

Remarque 56 :
La réciproque de la proposition précédente est fausse en général. En effet, la fonction $x \longmapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ admet une dérivée nulle en 0 mais il ne s'agit pas d'un extremum relatif.

Définition 57 : Point critique [Gourdon, p.336] :
On dit que a est un **point critique de f** lorsque f est différentiable en a et que $df_a = 0$.

Théorème 58 : [Gourdon, p.336]
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et que $df_a = 0$, alors :
$*$ Si f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a, alors $H_f(a)$ est positive (resp. négative).
$*$ Si $H_f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a.

Exemple 59 : [Gourdon, p.337]
La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ admet un point col en $(0, 0)$ et deux minimums absolus en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Théorème 60 : Théorème des extrema liés [Gourdon, p.337] :
Soient $f, g_1, ..., g_r$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'ouvert U de E et $\Gamma = \{x \in U \text{ tq } g_1(x) = ... = g_r(x) = 0\}$.
Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $c \in \Gamma$ et si $dg_{1,c}, ..., dg_{r,c}$ sont linéairement indépendants, alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ (uniques et appelés **multiplicateurs de Lagrange**) tels que $df_c = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_{i,c}$.

Exemple 61 : [Gourdon, p.339]
Il est possible de retrouver l'inégalité arithmético-géométrique à partir du théorème des extrema liés.

Développement 3 : [cf. GOURDON]

Lemme 62 : [Gourdon, p.330]
Soient E,F et G trois espace vectoriels de dimension finie et $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire.
L'application φ est différentiable sur $E \times F$ et :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \ \forall (h, k) \in E \times F, \ d\varphi_{(x,y)}(h, k) = \varphi(x, k) + \varphi(h, y)$$

Proposition 63 : [Gourdon, p.332]
Le déterminant est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ d(\det)_M(H) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Com}(M)^\intercal H\right)$$

Proposition 64 : [Gourdon, p.341]

Si l'on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2 : M \longrightarrow \left(\sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, alors le groupe des matrices orthogonales directes de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Remarques sur le plan

— On peut également parler d'équations différentielles ou d'opérateur compact.

Liste des développements possibles

— Théorème de Riesz.

— Matrices minimisant la norme sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Bibliographie

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.

— Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*.