I Questions de cours : programme de base

1 - Montrer que les normes usuelles $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$ et que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2 - Montrer que l'ensemble des suites bornées à valeurs dans un espace vectoriel normé est un espace vectoriel.

3 - Démontrer que dans un espace vectoriel normé toute boule fermée est une partie convexe.

4 - Démontrer que dans un espace vectoriel normé toute boule fermée est une partie fermée.

5 - Démontrer que toute fonction lipschitzienne sur une partie d'un espace vectoriel normé y est continue.

II Questions de cours : programme renforcé

1 - Démontrer que dans un espace vectoriel normé tout boule ouverte est une partie convexe.

2 - Énoncer et démontrer le théorème d'encadrement pour les suites de vecteurs.

3 - Énoncer et démontrer les inégalités entre les normes usuelles de $\mathbb{K}^n$.

III Questions de cours : programme ultime

1 - Démontrer que la norme usuelle $\|\cdot\|_2$ est bien une norme sur $\mathbb{C}^n$.

2 - Démontrer que le produit de deux suites convergentes dans un espace vectoriel normé est une suite convergente.

3 - Donner les parties ouvertes induites par une fonction continue puis démontrer ce résultat.

4 - Donner les parties fermées induites par une fonction continue puis démontrer ce résultat.

IV Exercices sur la topologie et la continuité

Exercice 1 :
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et g définie sur E par $g(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|}$.
1 - Démontrer que g est une bijection de E dans $\mathcal{B}_o(0,1)$.
2 - Montrer que g et g^{-1} sont continues.

Exercice 2 :
1 - Démontrer que si x et y sont deux réels, alors $2|xy| \leq x^2+y^2$.
2 - On considère la fonction f définie sur $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Montrer que, pour tout $(x,y) \in A$ on a $|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2$ et en déduire que f admet une limite finie en $(0,0)$.

Exercice 3 :
Soit E un espace vectoriel normé.
1 - Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est encore un espace vectoriel.
2 - Soit H un hyperplan de E.
Montrer que H est soit fermé soit dense dans E.

Exercice 4 :
On munit $\mathbb{R}^2$ de l'une de ses normes usuelles et on considère $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ la première bissectrice ainsi que l'application f définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ par $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.
1 - Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right\}$, l'application :

$$f_\theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

possède une limite en 0.
2 - Montrer que, néanmoins, f ne possède pas de limite en $(0,0)$.
Indication : On pourra considérer les couples $\left(t+t^2, t\right)$ avec $t \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 5 :
Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}$.
1 - Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_f(0,R),\ |g(x,y)| > a$$

2 - Montrer que g possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 :

1 - Justifier la continuité de l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tAA \end{array} \right.$$

2 - Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.