 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 14 banque CCINP :

a) Soient a et b deux réels donnés avec $a < b$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a;b]$ à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

2 - Exercice 15 banque CCINP :
Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme $\sum f_n$ sur X.

b) Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

3 - Exercice 49 banque CCINP :

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;+\infty[,\ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!}e^{-t}$.

a) Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0;+\infty[$.

c) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \longmapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t$.

d) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n t^n}{n!}e^{-t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

II Exercices

Exercice 1 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x - 1}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

Exercice 2 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 3 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;+\infty[$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$$

En cas de convergence, on notera $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1 - Montrer que S est continue sur $[0;1]$.

2 - Montrer que pour $x \geq 1$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge et donner une relation entre $S\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $S(x)$ et $S(1)$.

3 - Montrer que S est continue sur $[0;+\infty[$ et déterminer la limite de S en $+\infty$.

4 - Pouvait-on retrouver les résultats de la question précédente autrement ?

Exercice 4 :

Sur $I =]-1;+\infty[$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

1 - Montrer que S est définie et continue sur I.

2 - Étudier la monotonie de S.

3 - Calculer $S(x+1) - S(x)$.

4 - Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.

5 - Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

6 - En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

v.hanecart@orange.fr

Exercice 5 :

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;+\infty[$, on pose : $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$. En cas de convergence, on notera $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1 - Montrer que f est définie et continue sur $[0;+\infty[$ et préciser $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2 - Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

3 - Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall x > 0,\ f''(x) + f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

Exercice 6 :

Pour un réel x, on notera sous réserve de convergence : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1 - Déterminer le domaine $\mathcal{D}$ de définition de f.

2 - f est-elle continue sur $\mathcal{D}$?

3 - Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4 - Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Indication : On utilisera une comparaison série-intégrale.