I Questions de cours

1 - Montrer que deux permutations à supports disjoints commutent.

2 - Montrer l'équivalence entre forme antisymétrique et forme alternée.

3 - Donner la formule du déterminant d'une composée puis énoncer et démontrer la caractérisation des automorphismes par le déterminant.

II Exercices sur le groupe symétrique

Exercice 1 :
On considère la permutation suivante de $\mathfrak{S}_{10}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 7 & 6 & 1 & 10 & 5 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1 - Calculer σ^{-1}.
2 - Décomposer σ en produit de cycles disjoints puis en produit de transpositions.
3 - Calculer $\varepsilon(\sigma)$ puis trouver un entier naturel non nul p tel que $\sigma^p = \mathrm{Id}_{[\![1;10]\!]}$.

Exercice 2 :
On considère la permutation suivante de $\mathfrak{S}_{10}$:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 2 & 5 & 1 & 3 & 10 & 4 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

1 - Calculer τ^{-1}.
2 - Décomposer τ en produit de cycles disjoints puis en produit de transpositions.
3 - Calculer $\varepsilon(\tau)$ puis trouver un entier naturel non nul p tel que $\tau^p = \mathrm{Id}_{[\![1;10]\!]}$.

Exercice 3 :
On considère la permutation suivante de $\mathfrak{S}_{10}$:

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 5 & 7 & 9 & 8 & 10 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

1 - Calculer μ^{-1}.
2 - Décomposer μ en produit de cycles disjoints puis en produit de transpositions.
3 - Calculer $\varepsilon(\mu)$ puis trouver un entier naturel non nul p tel que $\mu^p = \mathrm{Id}_{[\![1;10]\!]}$.

III Exercices sur le déterminant

Exercice 4 :
Pour $\theta \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le déterminant carré d'ordre n suivant :

$$\Delta_n(\theta) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & x & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \quad \text{où } x = 2\cos(\theta).$$

1 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre $\Delta_{n+2}(\theta)$, $\Delta_{n+1}(\theta)$ et $\Delta_n(\theta)$. Comment peut-on choisir la valeur de $\Delta_0(\theta)$ de sorte que la relation précédente soit vraie pour $n = 0$?
2 - Déterminer $\Delta_n(0)$ en fonction de n.
3 - Déterminer $\Delta_n(\pi)$ en fonction de n.
4 - Pour $\theta \in]0; \pi[$, déterminer $\Delta_n(\theta)$ en fonction de n.

Exercice 5 :
Soit a un réel. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1 - Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.
2 - Démontrer que : $\forall n \geq 2,\ \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$.

Exercice 6 :
On considère u défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = P + P'$.
1 - Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2 - Calculer $\det(u)$. Que peut-on en déduire ?
3 - Retrouver ce résultat "à la main".