Leçon 153 - Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Extrait du rapport de jury

Cette leçon doit aborder le bagage théorique propre aux vecteurs propres et aux valeurs propres et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini, matrices stochastiques...) et donne des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme et introduire sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. On peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. On peut aussi s'intéresser à la localisation des valeurs propres.
Pour aller plus loin, on peut aborder la problématique du conditionnement en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes, s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide, ainsi qu' au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matrices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 153 intitulée : "Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.". La recherche de valeurs propres et de vecteurs propres est d'une importance capitale en algèbre avec la réduction et tout ce qui en découle (calcul de puissances, d'exponentielles, résolution de systèmes, etc.). Déterminer de manière approchée les valeurs propres (en les situant dans un domaine ou en les calculant de manière approchée) permet donc de connaître certaines propriétés que les matrices ont ou n'ont pas.
Dans une première partie on s'intéresse aux notions de valeurs propres et de vecteurs propres en commençant par les définitions et les premières propriétés. On donne ainsi la définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre ainsi que d'un sous-espace propre et du spectre d'un endomorphisme. On s'intéresse dans un deuxième point aux notions de polynômes minimaux et caractéristiques. On commence par le polynôme minimal en introduisant la notion de polynôme d'endomorphisme et d'idéal annulateur qui nous permet ensuite d'introduire le polynôme minimal ainsi qu'un premier résultat de localisation des valeurs propres avec les propositions 14 et 15. On poursuit ensuite en parlant du polynôme caractéristique avec notamment les théorèmes 18 et 20 qui sont très importants en pratique. On termine cette partie avec une application à la réduction : on commence par définir ce qu'est un endomorphisme diagonalisable et on donne deux caractérisations et de diagonalisabilité et on fait de même avec la trigonalisation.
Dans une deuxième partie on s'intéresse à la localisation de valeurs propres. On commence par parler du théorème de Gerschgorin en introduisant les disques de Gerschgorin qui nous permettent d'énoncer le théorème 33 puis on donne le lemme d'Hadamard. Ce théorème nous donne donc une première localisation plus ou moins vague des valeurs propres d'une matrice ou d'un polynôme. Dans un deuxième point on s'intéresse plus particulièrement au cas des matrices symétriques en commençant par énoncer la définition ainsi qu'une caractérisation puis le théorème spectral qui est le résultat central concernant les endomorphismes symétriques réels. On continue ensuite en donnant plusieurs corollaires au théorème spectral et on introduit la notion de rayon spectral ainsi que les théorèmes 52 et 53 qui donnent une autre approximation de la valeur propre de plus grand module.
Dans une troisième partie on s'intéresse à quelques cas particuliers de matrices en commençant par les matrices compagnons (très utiles dans la réduction de Frobenius) en donnant leur polynôme caractéristique et minimal ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation. On donne ensuite un autre type de matrices avec les matrices circulantes et une application à la convergence d'une suite de polygones.
Finalement, on s'intéresse dans une dernière partie au calcul approché de valeurs propres par des algorithmes. Dans un premier point on introduit la méthode de la puissance et de la puissance inverse et on donne leur vitesse de convergence. Dans un deuxième point on s'intéresse à la résolution de systèmes d'équations via la méthode de Splitting où l'on donne la définition et une condition nécessaire et suffisante de convergence avant de conclure par quelques méthodes itératives classiques.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I Valeurs propres et vecteurs propres

I.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Valeur propre et vecteur propre [Deschamps, p.67] :
On considère $\lambda \in \mathbb{K}$.
On dit que λ est une **valeur propre de** u lorsqu'il existe $x \in E \backslash \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. De plus, un tel vecteur x est alors appelé **vecteur propre associé à la valeur propre** λ.

Remarque 2 : [Deschamps, p.67]
Autrement dit, λ est valeur propre de u si, et seulement si, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective.

Définition 3 : Spectre d'un endomorphisme [Deschamps, p.67] :
On appelle **spectre de** u **sur** $\mathbb{K}$ (noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$) l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme u.

Définition 4 : Sous-espace propre [Deschamps, p.67] :
On considère $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u.
On appelle **sous-espace propre de** u **associé à la valeur propre** λ le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(u) = \{x \in \mathbb{K} \text{ tq } u(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

Proposition 5 : [Deschamps, p.69]
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes.
Les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), ..., E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

Exemple 6 : [Deschamps, p.68]
Si $E = F \oplus G$, la projection p sur F parallèlement à G admet 0 et 1 comme valeurs propres.

Définition 7 : Sous-espace stable [Deschamps, p.64] :
On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable par** u lorsque $u(F) \subseteq F$.

I.2 Polynôme minimal et polynôme caractéristique

I.2.1 Polynôme minimal

Si l'on considère $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit alors $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ (où la puissance est à comprendre au sens de la composition).

Définition 8 : Polynôme d'endomorphisme [Berhuy, p.941] :
On appelle **polynôme d'endomorphisme en** u tout endomorphisme de E de la forme $P(u)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et on note $\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Lemme 9 : [Berhuy, p.942]
L'application :

$$\mathrm{ev}_u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres associatives unitaires et $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
De plus, pour tout sous-espace F de E stable par u, on a :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P\left(u|_F\right) = P(u)|_F$$

Définition 10 : Idéal/polynôme annulateur [Berhuy, p.944 + 945] :
On appelle **idéal annulateur de** u le noyau du morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres ev_u et on le note $\mathrm{Ann}(u)$. De plus, tout élément de $\mathrm{Ann}(u)$ est appelé **polynôme annulateur de** u.

Proposition 11 : [Berhuy, p.945]
Puisque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathrm{Ann}(u)$ est non nul et il existe un unique polynôme unitaire $\pi_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\mathrm{Ann}(u) = \pi_u \mathbb{K}[X] = \{\pi_u Q,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

Définition 12 : Polynôme minimal [Berhuy, p.945] :
Le polynôme π_u est appelé **polynôme minimal de** u. De plus, c'est l'unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$(\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0) \iff (\pi_u | P)$$

Exemple 13 : [Deschamps, p.97]
$*$ Le polynôme minimal d'un projecteur p de E est :

$$\mu_p = \begin{cases} X & \text{si } p = 0 \\ X - 1 & \text{si } p = \mathrm{Id}_E \\ X^2 - X & \text{sinon} \end{cases}$$

$*$ Le polynôme minimal d'une symétrie s de E est :

$$\mu_s = \begin{cases} X - 1 & \text{si } s = \mathrm{Id}_E \\ X + 1 & \text{si } s = -\mathrm{Id}_E \\ X^2 - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 14 : [Deschamps, p.76]
Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

Proposition 15 : [Deschamps, p.97]
L'ensemble des racines du polynôme minimal π_u de u est égal au spectre de u.

I.2.2 Polynôme caractéristique

Définition 16 : Polynôme caractéristique [Berhuy, p.946] :
On appelle **polynôme caractéristique de** M le polynôme $\chi_M \in \mathbb{K}[X]$ définit par $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

Exemple 17 : [Deschamps, p.78]
Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ est le polynôme $\chi_A = (X-2)(X^2 - X + 1)$.

Théorème 18 : [Deschamps, p.78]
Un scalaire λ est une valeur propre de M si, et seulement si, c'est une racine du polynôme caractéristique de M.

Proposition 19 : [Deschamps, p.83]
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors le polynôme caractéristique χ_{u_F} de l'endomorphisme induit par u sur F divise χ_u.

Théorème 20 : Théorème de Cayley-Hamilton [Deschamps, p.99] :
Le polynôme caractéristique de u annule u, c'est-à-dire $\chi_u(u) = 0$.

Définition 21 : Multiplicité algébrique :
On considère λ une valeur propre de M.
On appelle **multiplicité algébrique de** λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_M (et on la note m_λ).

Proposition 22 : [Deschamps, p.84]
Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, on a $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda \leq n$.

I.3 Application à la réduction

Définition 23 : Endomorphisme diagonalisable [Deschamps, p.92]
L'endomorphisme u est un **endomorphisme diagonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exemple 24 : [Deschamps, p.88]
Les homothéties de rapport $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ sont diagonalisables.

Proposition 25 : [Deschamps, p.88 + 102]
Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ où les $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont distincts deux à deux, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ u est diagonalisable. $*$ $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$. $*$ $\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(u)) = n$.
$*$ u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.
$*$ π_u est scindé à racines simples.

Corollaire 26 : [Deschamps, p.91]
L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont remplies :
$*$ Son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
$*$ Pour toute valeur propre λ de u, on a $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

Définition 27 : Endomorphisme trigonalisable [Deschamps, p.92]
L'endomorphisme u est un **endomorphisme trigonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Théorème 28 : [Deschamps, p.93 + 103]
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ u est trigonalisable. $*$ u possède un polynôme annulateur scindé.
$*$ Le polynôme minimal de u est scindé.

Corollaire 29 : [Deschamps, p.95]
Si u est un endomorphisme trigonalisable, alors en notant $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de u on a $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $\det(u) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Remarque 30 :
En pratique, la diagonalisation et la trigonalisation sont très utiles pour calculer des puissances ou exponentielles de matrices ou encore résoudre des systèmes d'équations différentielles.

II Localisation de valeurs propres

II.1 Le théorème de Gerschgorin

Dans toute cette sous-partie, on écrit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 31 : Disques de Gerschgorin d'une matrice [Rombaldi, p.650] :
On appelle **disques de Gerschgorin de** M les disques fermés $D_i(M)$ définis par :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ D_i(M) = \mathcal{D}\left(m_{i,i}, R_i(M)\right), \text{ avec } R_i(M) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |m_{i,j}|$$

Définition 32 : Matrice à diagonale strictement dominante [Rombaldi, p.651] :
La matrice M est une **matrice à diagonale strictement dominante** lorsque :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

Théorème 33 : Théorème de Gerschgorin [Rombaldi, p.651] :
L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée complexe est inclus dans la réunion de ses disques de Gerschgorin.

Proposition 34 : [Rombaldi, p.651]
Si l'on pose $L = \max_{i \in [\![1;n]\!]} \{R_i(M) + m_{i,i}\}$ et $C = \max_{j \in [\![1;n]\!]} \{R_j(M^\intercal) + m_{j,j}\}$, alors pour toute valeur propre complexe λ de M, on a $|\lambda| \leq \min(L, C)$.

Lemme 35 : Lemme d'Hadamard [Rombaldi, p.651] :
Si M est une matrice complexe à diagonale strictement dominante, alors M est inversible.

Exemple 36 :
La matrice $A = \begin{pmatrix} 3+i & -1,5 & 0 & 1,5i \\ 0,5 & 4 & i & 0,5i \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}i & 2+3i & 0 \\ i & 1 & i & 4i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est inversible.

Proposition 37 :
Soient $P := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.
Si z est racine de P, alors on a l'encadrement :

$$\frac{|a_0|}{\max\left(|a_1|+|a_0|, ..., |a_{n-1}|+|a_0|, |a_n|\right)} \leq |z| \leq \frac{\max\left(|a_0|, |a_1|+|a_n|, ..., |a_{n-1}|+|a_n|\right)}{|a_n|}$$

II.2 Rayon spectral et application aux matrices symétriques

Définition 38 : Matrice symétrique (définie) positive [Rombaldi, p.735] :
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice symétrique positive** (resp. **matrice symétrique définie positive**) lorsque A est symétrique et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $< Ax; x >\geq 0$ (resp. $< Ax; x >> 0$).

Proposition 39 : [Rombaldi, p.736]
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont positives (resp. strictement positives).

Lemme 40 : [Rombaldi, p.734]
Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

Lemme 41 : [Rombaldi, p.734]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si $n \geq 2$ et que λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u, alors les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

Lemme 42 : [Rombaldi, p.734]
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u.
Si $n \geq 2$ et que $e \in E$ est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ et de norme égale à 1, alors l'hyperplan $H = (\mathbb{R}e)^\perp$ est stable par u et la restriction de u à H est symétrique.

Théorème 43 : Théorème spectral [Rombaldi, p.734] :
Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise en une base orthonormée.

Corollaire 44 : [Rombaldi, p.735]
Toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée (autrement dit, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ telles que $A = PDP^\intercal$).

Remarque 45 : [Rombaldi, p.735]
Le résultat n'est plus vrai pour les matrices symétriques complexes. En effet, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique complexe mais sa seule valeur propre est 1 et pourtant $A \neq I_2$...

Corollaire 46 : [Rombaldi, p.739]
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de matrices symétriques réelles de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Ces matrices sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée si, et seulement si, elles commutent deux à deux.

Corollaire 47 : [Rombaldi, p.736]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\intercal B$.

Théorème 48 : Décomposition polaire [Rombaldi, p.740] :
Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 49 : [Rombaldi, p.741]
L'application :

$$\Psi : \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (\Omega, S) & \longmapsto & \Omega S \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme.

Définition 50 : Rayon spectral [Rombaldi, p.654] :
On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On appelle **rayon spectral de** A le réel $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$.

Lemme 51 : [Rombaldi, p.654]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si A est une matrice normale, alors $|||A|||_2 = \rho(A)$.

Théorème 52 : [Rombaldi, p.656]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour toute norme matricielle induite par une norme vectorielle, on a $\rho(A) \leq |||A|||$ (l'inégalité pouvant être stricte).

Théorème 53 : Théorème de Gelfand [Rombaldi, p.659] :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Quelle que soit la norme $|||\cdot|||$ choisie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) = \lim_{k\to+\infty} |||A^k|||^{\frac{1}{k}}$.

Lemme 54 : [Rombaldi, p.654]
Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\|\|A\|\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

Développement 1 : [cf. Rombaldi]

Théorème 55 : [Rombaldi, p.771 + 780]
L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

III Quelques cas particuliers

III.1 Les matrices compagnons

Dans toute cette sous-partie, on considère un polynôme $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Définition 56 : Matrice compagnon [Rombaldi, p.693] :
On appelle **matrice compagnon associée au polynôme** P la matrice :

$$\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Théorème 57 : [Rombaldi, p.693]
Le polynôme P est le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de sa matrice compagnon $\mathcal{C}_P$.

Corollaire 58 : [Rombaldi, p.696]
Le spectre de $\mathcal{C}_p$ est égal à l'ensemble des racines de P.

Corollaire 59 : [Rombaldi, p.696]
La matrice compagnon $\mathcal{C}_P$ est diagonalisable si, et seulement si, P est scindé à racine simple.

III.2 Les matrices circulantes

Définition 60 : Matrice circulante [Gourdon, p.190] :
On appelle **matrice circulante** toute matrice carrée telle que l'on passe d'une ligne à la suivante par décalage à droite des coefficients de façon circulaire. Une matrice circulante C de taille n s'écrit donc :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

où $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des nombres complexes.

Développement 2 : [cf. GOURDON + CALDERO]

Proposition 61 : [Gourdon, p.153]
Si l'on note $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\det(C) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} P\left(\omega^i\right)$.

Proposition 62 : [Caldero, p.45]
Soient P un polygone du plan complexe dont les sommets sont notés $z_1, ..., z_n$ et $a, b \in]0;1[$ tels que $a + b = 1$.
Si l'on définit par récurrence la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = \mathcal{B}_{a,b}(P)$ le polygone $(z_i')_{i\in[\![1;n]\!]}$ avec $z_i' = az_i + bz_{i+1}$, alors la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P.

IV Calcul approché de valeurs propres

IV.1 Méthode de la puissance

La méthode de la puissance permet de calculer la plus grande valeur propre en module ainsi qu'un vecteur propre associé :
On choisit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de norme 1, on pose pour $k \geq 1$, $y_k = Ax_{k-1}$ et $x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$ et on itère la méthode tant que les vecteurs x_k ne sont pas proches à ε donné.

Remarque 63 : [Allaire, p.441]
Cependant cette méthode s'applique aux matrices qui ne possède qui ne possède qu'une seule valeur propre de plus grand module...

Proposition 64 : [Allaire, p.441]
Soit A une matrice symétrique réelle de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ associées à une base orthonormée de vecteurs propres $(e_1, ..., e_n)$.
Si la plus grande valeur propre (en module) λ_n est simple et positive et que le vecteur initial x_0 n'est pas orthogonal à e_n, alors la méthode de la puissance converge, c'est-à-dire que :

$$\lim_{k\to+\infty} \|y_k\| = \lambda_n \text{ et } \lim_{k\to+\infty} x_k = x_\infty \text{ avec } x_\infty = \pm e_n$$

Remarque 65 : [Allaire, p.441]
La vitesse de convergence est proportionnelle au rapport $\frac{|\lambda_{n-1}|}{\lambda_n}$:

$$|\|y_k\| - \lambda_n| \leq C \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^{2k} \text{ et } \|x_k - x_\infty\| \leq C \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^{k}$$

En pratique, on est surtout intéressé par la plus petite valeur propre en module d'une matrice. On peut alors adapter la méthode de la puissance pour obtenir la méthode de la puissance inverse :
On choisit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de norme 1, pour $k \geq 1$, on résout $Ay_k = x_{k-1}$ et on pose $x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$ et on itère la méthode tant que les vecteurs x_k ne sont pas proches à ε donné.

Proposition 66 : [Allaire, p.441]
Soit A une matrice symétrique réelle de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ associées à une base orthonormée de vecteurs propres $(e_1, ..., e_n)$.
Si la plus petite valeur propre (en module) λ_1 est simple et strictement positive et que le vecteur initial x_0 n'est pas orthogonal à e_1, alors la méthode de la puissance inverse converge, c'est-à-dire que :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\|y_k\|} = \lambda_1 \text{ et } \lim_{k\to+\infty} x_k = x_\infty \text{ avec } x_\infty = \pm e_1$$

Remarque 67 : [Allaire, p.441]
La vitesse de convergence est proportionnelle au rapport $\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}$:

$$\left|\|y_k\|^{-1} - \lambda_1\right| \leq C \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^{2k} \text{ et } \|x_k - x_\infty\| \leq C \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^{k}$$

IV.2 Application à la résolution de systèmes d'équations

Dans toute cette partie, on considère $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Ces méthodes permettent de résoudre de manière approchée des systèmes d'équations linéaires du type $Ax = b$ lorsque les matrices sont assez grosses.

Définition 68 : Splitting [Allaire, p.428] :
On appelle **splitting de** A la décomposition $A = M - N$ avec M inversible.

Remarque 69 : [Allaire, p.428]
Le but de ces méthodes est d'approcher x et pour cela on considère $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné et $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$.
En cas de convergence vers x, on s'arrête en pratique lorsque la norme $\|Ax_k - b\|$ est assez petite.

Définition 70 : Méthode itérative convergente [Allaire, p.428] :
On dit qu'une méthode itérative est une **méthode convergente** lorsque pour tout vecteur initial x_0, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution de (S).

Proposition 71 : [Allaire, p.428]
La méthode de la remarque précédente converge si, et seulement si, $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Proposition 72 : [Allaire, p.428]
Si A est une matrice symétrique réelle définie positive et que (M, N) est son splitting, alors $M^\intercal + N$ est symétrique.
Si de plus $M^\intercal + N$ est définie positive, alors $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$.

Voici quelques méthodes itératives classiques :

Méthodes	Splitting
Jacobi	$M = \mathrm{diag}(a_{i,i})$ et $N = M - A$
Gauss-Seidel	$A = D - E - F$, $M = D - E$ et $N = F$
Relaxation ($\omega \in]0;2[$)	$M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$

Remarques sur le plan

— Il faut bien comprendre les algorithmes de calcul ainsi que les hypothèses.

— Bien connaître les propriétés de la matrice compagnon (polynôme minimal, caractéristique et la réduction de Frobenius).

Liste des développements possibles

— Homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

— Matrices circulantes.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.

— Grégoire Allaire, *Analyse numérique et optimisation*.