Leçon 158 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidates et candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.
L'étude des projections orthogonales (en lien avec le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^\top A$.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 158 intitulée : "Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).". Les endomorphismes étant de coeur de bien des domaines mathématiques, de la théorie des nombres au calcul différentiel, il convient de bien cerner leur étude. Naturellement on essaie de faire ce travail sur des endomorphismes particuliers qui soit sont à la base des endomorphismes généraux, c'est le problème de la réduction, soit sont suffisamment fréquents pour que leur étude mérite de s'y arrêter.
Dans une première partie on s'intéresse aux généralités sur les espaces vectoriels euclidiens dans le but d'introduire tous les concepts et définitions utiles pour la suite de la leçon. On commence ainsi par rappeler la définition d'un produit scalaire et d'un espace euclidien et on donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis les identités de polarisation et du parallélogramme. On en vient ensuite aux vecteurs orthogonaux et aux familles orthonormales ainsi qu'au théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et la projection sur un sous-espace vectoriel. Dans une deuxième sous-partie on s'intéresse tout particulièrement à l'adjoint d'un endomorphisme en en donnant la définition et les propriétés fondamentales (cette notion d'adjoint sera très utilisée dans toute la suite de cette leçon).
Dans une deuxième partie on s'intéresse à un premier type d'endomorphismes remarquables : les endomorphismes orthogonaux. On commence par parler du groupe orthogonal en donnant la définition ainsi qu'une caractérisation d'une isométrie. On donne ensuite quelques autres propriétés sur les endomorphismes orthogonaux avant de traduire ceux-ci via les matrices orthogonales. On termine cette première sous-partie en s'intéressant à la structure du groupe orthogonal : on montre qu'il est compact et qu'il est engendré par les réflexions avec le théorème de Cartan-Dieudonné. Dans une deuxième sous-partie on s'intéresse à la réduction de ces endomorphismes avec comme résultat important le théorème 36 qui découle du théorème de Cartan-Dieudonné et qui permet par exemple de classifier toutes les isométries vectorielles en dimension 2 et 3. On donne également un corollaire topologique sur les composantes connexes de $\mathrm{O}(E)$ et on montre que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.
Dans une troisième partie on s'intéresse aux endomorphismes symétriques. On commence rapidement par donner quelques généralités comme le fait qu'ils sont auto-adjoints ou que leur matrice dans une base orthonormée est symétrique avant de passer à la réduction de ces endomorphismes. Le résultat central à retenir est le théorème spectral qui permet au premier coup d'oeil de dire qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée formée de vecteurs propres ! Cependant ce résultat ne persiste pas pour les matrices symétriques complexes... Dans une troisième sous-partie on s'intéresse rapidement à la notion d'endomorphisme symétrique (défini) positif avec la définition ainsi que deux caractérisations. Finalement, on termine cette partie avec quelques applications du théorème spectral. On commence par la co-diagonalisation d'endomorphismes dans une base orthonormée formée de vecteurs propres avant de poursuivre avec la décomposition polaire et les quelques

autres résultats qui en découlent.
Finalement, on conclut cette leçon avec un cadre plus général où l'on s'intéresse aux endomorphisme normaux, c'est-à-dire qui commutent avec leur adjoint. On commence par quelques généralités où l'on donne la définition d'un endomorphisme normal puis quelques exemples avant de passer à la réduction de ceux-ci avec le théorème 68. On retrouve bien dans ce théorème le fait que les endomorphismes orthogonaux et symétriques sont normaux au niveau de la forme de la matrice dans une certaine base.

Plan général

I - Espaces vectoriels euclidiens
1 - Généralités
2 - Adjoint d'un endomorphisme

II - Endomorphismes orthogonaux
1 - Le groupe orthogonal
2 - Réduction des endomorphismes orthogonaux

III - Endomorphismes symétriques
1 - Généralités
2 - Réduction des endomorphismes symétriques
3 - Endomorphismes symétriques positifs ou définis positifs
4 - Quelques applications du théorème spectral

IV - Endomorphismes normaux
1 - Généralités
2 - Réduction des endomorphismes normaux

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie notée $n > 0$.

I Espaces vectoriels euclidiens

I.1 Généralités

Définition 1 : Produit scalaire [Rombaldi, p.713] :
On appelle **produit scalaire sur** E toute forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition 2 : Espace euclidien [Rombaldi, p.713] :
On appelle **espace euclidien** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Dans toute la suite de cette leçon, on suppose que $(E, <\cdot;\cdot>)$ est un espace euclidien de dimension $n > 0$ et pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{<x;x>}$.

Proposition 3 : Inégalité de Cauchy-Schwarz [Rombaldi, p.713]
Pour tous $x, y \in E$ on a $|<x;y>| \leq \|x\| \, \|y\|$.
De plus, on a égalité si, et seulement si, x et y sont liés.

Remarque 4 : [Rombaldi, p.714]
Par l'inégalité de Minkowski, l'application définie sur E par $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{<x;x>}$ est une norme sur E que l'on appelle **norme euclidienne sur** E.

Proposition 5 : [Rombaldi, p.714]
Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$<x;y> = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad \text{(Id. de polarisation)}$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \text{(Id. du parallélogramme)}$$

Définition 6 : Vecteurs orthogonaux [Rombaldi, p.715] :
On dit que deux vecteurs x et y de E sont des **vecteurs orthogonaux** lorsque $<x;y> = 0$.

Définition 7 : Famille orthogonale/orthonormale [Rombaldi, p.715] :
On appelle **famille orthogonale de** E toute famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E telle que $<e_i;e_j> = \delta_{i,j}$.
Si de plus les e_i sont de norme 1, alors on dit que cette famille est une **famille orthonormale**.

Théorème 8 : Théorème d'orthonorm. de Gram-Schmidt [Rombaldi, p.715] :
Pour toute famille libre $(x_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ dans E, il existe une unique famille orthonormée $(e_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ telle que :

$$\forall k \in [\![1;p]\!], \begin{cases} \text{Vect}(e_1,...,e_k) = \text{Vect}(x_1,...,x_k) \\ < x_k; e_k >> 0 \end{cases}$$

Théorème 9 : [Rombaldi, p.716]
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Pour tout $x \in E$, il existe un unique vecteur $y \in E$ tel que l'on ait l'égalité $\|x-y\| = d(x,F) = \inf\limits_{z\in F} \|x-z\|$. Ce vecteur est également l'unique élément appartenant à F tel que $x-y \in F^{\perp}$.
De plus, son expression dans une base orthonormée $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de F est donnée par $y = \sum_{i=1}^n < x; e_i > e_i$ et on a :

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n < x; e_k >^2$$

Exemple 10 : [Rombaldi, p.717]
Si $D = \mathbb{R}a$ est une droite vectorielle, une base orthonormée de D est $\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)$ et pour tout $x \in E$ on a $p_D(x) = \frac{<x;a>}{\|a\|^2}a$.

Corollaire 11 : [Rombaldi, p.717]
Pour tout sous-espace vectoriel F de E on a $E = F \oplus F^{\perp}$.

I.2 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 12 : [Rombaldi, p.718]
Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tous $x, y \in E$ on ait $< u(x), y >=< x, u^*(y) >$.

Définition 13 : Adjoint d'un endomorphisme [Rombaldi, p.718] :
Avec les notations du théorème précédent, on dit que u^* est **l'adjoint de** u.

Théorème 14 : [Rombaldi, p.718]
Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![2;n]\!]}$ une base de E et $G = (< e_i, e_j >)_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de Gram correspondante.
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans la base $\mathcal{B}$, alors la matrice de u^* dans $\mathcal{B}$ est $B = G^{-1}A^{\intercal}G$. Dans le cas où la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a alors $B = A^{\intercal}$.

Proposition 15 : [Rombaldi, p.719]
Pour tous endomorphismes $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$*$ $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$. $*$ $u\,(^*)^* = u$. $*$ $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
$*$ Si $u \in \text{GL}(E)$, alors $u^* \in \text{GL}(E)$ et $(u^*)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^*$.
$*$ On a $\text{Ker}\,(u^*) = \text{Im}(u)^{\perp}$ et $\text{Im}\,(u^*) = \text{Ker}(u)^{\perp}$. $*$ $\text{rg}\,(u^*) = \text{rg}(u)$.
$*$ Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.

II Endomorphismes orthogonaux

II.1 Le groupe orthogonal

Définition 16 : Isométrie [Rombaldi, p.720] :
On appelle **isométrie de** E (ou encore **application orthogonale de** E) toute application $u : E \longrightarrow E$ qui conserve le produit scalaire et on note alors $\text{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Exemple 17 : [Rombaldi, p.720]
$*$ Les seules homothéties qui sont des isométries sont Id_E et $-\text{Id}_E$.
$*$ Pour E de dimension 1, on a $\text{O}(E) = \{-\text{Id}_E; \text{Id}_E\}$.

Remarque 18 : [Rombaldi, p.720]
$*$ Une isométrie conserve l'orthogonalité mais la réciproque est fausse (toute homothétie de rapport $\lambda \notin \{-1;1\}$ conserve le produit scalaire mais n'est pas une isométrie).
$*$ Une isométrie conserve également les mesures d'angles géométriques.

Théorème 19 : [Rombaldi, p.720]
Une application $u : E \longrightarrow E$ est une isométrie si, et seulement si, elle est linéaire et conserve la norme.

Remarque 20 : [Rombaldi, p.721]
$*$ Les seules valeurs propres réelles possibles d'une isométries sont -1 et 1.
$*$ Une application $u : E \longrightarrow E$ qui conserve la norme n'est pas nécessairement linéaire (et donc pas une isométrie).

Théorème 21 : [Rombaldi, p.721]
Une isométrie de E est un automorphisme de E et $\text{O}(E)$ est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$.

Remarque 22 : [Rombaldi, p.721 + 722]
$*$ Dans le cas où E est de dimension finie, on dit que $\text{O}(E)$ est le groupe orthogonal de E.
$*$ Si E est de dimension infinie, une isométrie est toujours injective mais n'est pas nécessairement surjective.

Théorème 23 : [Rombaldi, p.722]
Soit u une isométrie de E.
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors son orthogonal $F^{\perp}$ est aussi stable par u.

Théorème 24 : [Rombaldi, p.722]
Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de E et u une application linéaire de E dans E.
L'application u est une isométrie si, et seulement si, elle transforme $\mathcal{B}$ en une base orthonormée de E.

Théorème 25 : [Rombaldi, p.723]
Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de E et u une application linéaire de E dans E de matrice A dans $\mathcal{B}$.
L'application u est une isométrie si, et seulement si, on a $AA^{\intercal} = A^{\intercal}A = I_n$.

Définition 26 : Matrice orthogonale [Rombaldi, p.723] :
On appelle **matrice orthogonale** toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait $AA^{\intercal} = A^{\intercal}A = I_n$.

Remarque 27 : [Rombaldi, p.723]
* Il revient au même de dire qu'une matrice orthogonale est une matrice A inversible et d'inverse $A^{\intercal}$.
* On peut retraduire tous les résultats précédents en termes matriciels.

Proposition 28 :
Si $A \in \mathrm{O}_n^+(E)$ (resp. $A \in \mathrm{O}_n^-(E)$), alors on a $A = C$ (resp. $A = -C$) (où C est la matrice des cofacteurs de A).

Proposition 29 : [Rombaldi, p.722]
$\mathrm{O}(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.

Définition 30 : Symétrie orthogonale [Rombaldi, p.730] :
On considère F un sous-espace vectoriel de E et on note p_F la projection orthogonale sur F.
On appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F l'application définie sur E par $s_F : x \longmapsto p_F(x) - p_{F^{\perp}}(x)$.

Exemple 31 : [Rombaldi, p.730]
* Si $D = \mathbb{R}a$ est une droite vectorielle, alors on a $s_D(x) = 2p_D(x) - x = 2\frac{<x;a>}{\|a\|^2}a$.
* Si $F = D^{\perp}$ est un hyperplan, alors on a $s_H(x) = 2p_H(x) - x = x - 22\frac{<x;a>}{\|a\|^2}a$.

Définition 32 : Réflexion/retournement [Rombaldi, p.730] :
On appelle **réflexion** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan et **retournement** toute symétrie orthogonale par rapport à un droite.

Proposition 33 : [Rombaldi, p.730]
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
* Pour tout $x \in E$, on a $x \in F$ (resp. $x \in F^{\perp}$) si, et seulement si, $s_F(x) = x$ (resp. $s_F(x) = -x$).
* s_F est une involution et donc $s_F^{-1} = s_F$.
* s_F est un endomorphisme auto-adjoint. * s_F est une isométrie.
* On a $s_F + s_{F^{\perp}} = 0$ et $s_F \circ s_{F^{\perp}} = s_{F^{\perp}} \circ s_F = -\mathrm{Id}_E$.
* Si F est de dimension $p \in [\![1; n-1]\!]$, alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de s_F est $\mathrm{diag}(I_p, -I_{n-p})$ et $\det(s_F) = (-1)^{n-p}$.

Théorème 34 : Théorème de Cartan-Dieudonné [Rombaldi, p.731] :
Pour $n \geq 2$, le groupe $\mathrm{O}(E)$ est engendré par l'ensemble des réflexions.
Plus précisément, toute isométrie de E peut s'écrire comme le produit d'au plus n réflexions.

II.2 Réduction des endomorphismes orthogonaux

Lemme 35 : [Rombaldi, p.726]
Soit $u \in \mathrm{O}(E)$.
Il existe des sous-espaces vectoriels $P_1, ..., P_r$ de E de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u et tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i$.

Théorème 36 : [Rombaldi, p.727]
Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ avec $n \geq 2$.
Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $D = \mathrm{diag}(I_p, I_q, R_1, ..., R_r)$ avec les R_i des matrices de rotation en dimension 2.

Corollaire 37 : [Rombaldi, p.728]
Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$.
Il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\,\mathrm{diag}(I_p, I_q, R_1, ..., R_r)P^{\intercal}$.

Corollaire 38 : [Rombaldi, p.728]
Les composantes connexes de $\mathrm{O}(E)$ sont les fermés $\mathrm{O}^+(E)$ et $\mathrm{O}^-(E)$.

Développement 1 : [cf. FRANCINOU]

Théorème 39 : [Francinou, p.67]
Le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.

III Endomorphismes symétriques

III.1 Généralités

Définition 40 : Endomorphisme symétrique [Rombaldi, p.732] :
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **endomorphisme symétrique** lorsque $u = u^*$ (autrement dit, un endomorphisme symétrique est un auto-adjoint).

Théorème 41 : [Rombaldi, p.732]
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

Corollaire 42 : [Rombaldi, p.733]
$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

III.2 Réduction des endomorphismes symétriques

Lemme 43 : [Rombaldi, p.734]
Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

Lemme 44 : [Rombaldi, p.734]
Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{S}(E)$.

Lemme 45 : [Rombaldi, p.734]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si $n \geq 2$ et que λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u, alors les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

Lemme 46 : [Rombaldi, p.734]
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u.
Si $n \geq 2$ et que $e \in E$ est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ et de norme égale à 1, alors l'hyperplan $H = (\mathbb{R}e)^\perp$ est stable par u et la restriction de u à H est symétrique.

Théorème 47 : Théorème spectral [Rombaldi, p.734] :
Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise en une base orthonormée.

Corollaire 48 : [Rombaldi, p.735]
Toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée (autrement dit, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ telles que $A = PDP^\intercal$).

Remarque 49 : [Rombaldi, p.735]
Le résultat n'est plus vrai pour les matrices symétriques complexes. En effet, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique complexe mais sa seule valeur propre est 1 et pourtant $A \neq I_2$...

III.3 Endomorphismes symétriques positifs ou définis positifs

Définition 50 : Endo. symétrique (défini) positif [Rombaldi, p.735] :
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme **symétrique positif** (resp. **symétrique défini positif**) lorsqu'il est symétrique et que pour tout $x \in E$ on ait $< u(x); x >\geq 0$ (resp. pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$ on ait $< u(x); x >> 0$).

Remarque 51 : [Rombaldi, p.735]
On définit de même la notion de matrice symétrique (définie) positive.

Théorème 52 : [Rombaldi, p.736]
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
On a $u \in \mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Corollaire 53 : [Rombaldi, p.736]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\intercal B$.

III.4 Quelques applications du théorème spectral

III.4.1 Diagonalisation simultanée d'endomorphisme symétriques

Théorème 54 : [Rombaldi, p.739]
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes symétriques de E.
Il existe une base orthonormée commune de diagonalisation de E pour la famille $(u_i)_{i\in I}$ si, et seulement si, ces endomorphismes commutent deux à deux.

Corollaire 55 : [Rombaldi, p.739]
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de matrices symétriques réelles de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Ces matrices sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée si, et seulement si, elles commutent deux à deux.

III.4.2 Décomposition polaire

Lemme 56 : Lemme de la racine carré [Rombaldi, p.739]
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Remarque 57 : [Rombaldi, p.740]
Avec les notations du théorème, on dit que B est la **racine carrée positive de** $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus, cette racine carrée positive est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 58 : Décomposition polaire [Rombaldi, p.740] :
Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 59 : [Rombaldi, p.741]
Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Théorème 60 : [Rombaldi, p.741]
L'application :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (\Omega, S) & \longmapsto & \Omega S \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme.

Lemme 61 : [Rombaldi, p.654]
Pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $|||M|||_2 = \sqrt{\rho(M^*M)}$.

Développement 2 : [cf. ROMBALDI]

Théorème 62 : [Rombaldi, p.771 + 780]
L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

IV Endomorphismes normaux

IV.1 Généralités

Définition 63 : Endomorphisme normal [Rombaldi, p.743] :
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est un **endomorphisme normal** lorsque u commute avec son adjoint.

Exemple 64 : [Rombaldi, p.743]
Les endomorphismes du type suivant sont normaux :
* u symétrique (ou auto-adjoint), c'est-à-dire tel que $u^* = u$.
* u anti-symétrique, c'est-à-dire tel que $u^* = -u$.
* u orthogonal, c'est-à-dire tel que $u^* \circ u = u \circ u^* = \mathrm{Id}_E$.
* u similitude, c'est-à-dire la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

Lemme 65 : [Rombaldi, p.743]
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F est un sous-espace vectoriel de E.
Si u est un endomorphisme normal et que F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

IV.2 Réduction des endomorphismes normaux

Lemme 66 : [Rombaldi, p.743]
Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un sous-espace vectoriel P de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Lemme 67 : [Rombaldi, p.744]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.
Il existe des sous-espaces vectoriels $P_1, ..., P_r$ de E de dimension égale à 1 ou 2 deux à deux orthogonaux, stables par u et tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r P_i$.

Théorème 68 : [Rombaldi, p.745]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.
Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\Delta = \mathrm{diag}(D_p, R_1, ..., R_r)$ avec D une matrice diagonale d'ordre p et pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ avec $b_k \neq 0$.

Corollaire 69 : [Rombaldi, p.745]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme anti-symétrique.
Toutes les valeurs propres de u sont imaginaires pures (éventuellement nulles) et il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit $\Delta = \mathrm{diag}(0_p, R_1, ..., R_r)$ avec D une matrice diagonale d'ordre p et pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, $R_k = \begin{pmatrix} 0 & -b_k \\ b_k & 0 \end{pmatrix}$ avec $b_k \neq 0$.

Remarques sur la leçon

— On peut s'intéresser à la méthode des moindres carrés ou encore à la classification des isométries vectorielles en dimension 2 et 3.

Liste des développements possibles

— Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.

— Homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Bibliographie

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Serge Francinou, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 3*.