 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 20 banque CCINP :

a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

b) Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}, \ \sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} z^n \text{ et } \sum_{n\geq 0} \cos(n) z^n$$

2 - Exercice 23 banque CCINP :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

a) - Démontrer que les séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence que l'on notera R.

b) - Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R;R[$.

3 - Exercice 24 banque CCINP :

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$ sur $]-R;R[$.

b) Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

c) Déterminer $S(x)$ pour $x \in]-R;R[$.

d) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \ f(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x}) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(x) = \cos(-\sqrt{x}) \text{ si } x < 0$$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II Exercices

Exercice 1 :

Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{ch}(n) x^{3n+1}$ et calculer sa somme.

Exercice 2 :

1 - Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{1;\dfrac{1}{2}\right\}$:

$$\frac{1}{2x^2-3x+1} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x}$$

2 - En déduire que $x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2-3x+1}$ est développable en série entière au voisinage de l'origine, préciser les coefficients et le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 3 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

1 - Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et déterminer, selon la valeur du réel x, la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.

2 - En cas de convergence, on note $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Calculer $(1-x)f(x)$ et en déduire $f(x)$.

Exercice 4 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note sous réserve de convergence :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

1 - Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2 - Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f''(x) + f'(x) + f(x)$.
3 - En déduire $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 5 :

Pour $x \in [-1;1]$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1 - Montrer que f est continue sur $[-1;1]$.
2 - Montrer que f est dérivable sur $]-1;1[$ et préciser $f'(x)$ pour $x \in]-1;1[$. En déduire $f(x)$ pour $x \in]-1;1[$.
3 - En déduire les valeurs de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$ et de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$.
4 - Retrouver la valeur de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$ par un calcul direct.

 v.hanecart@orange.fr

Exercice 6 :

On considère $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

1 - Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ et montrer que f est continue sur $[-1;1]$.

2 - Montrer que $x \longmapsto f(x) + f(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$ est constante sur $]0;1[$.

3 - En admettant que $f(1) = \frac{\pi^2}{6}$, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

Exercice 7 :

Soient α un réel strictement positif et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle vérifiant $a_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{2n+\alpha}{n+1} a_n$$

1 - Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

2 - On note f la somme de cette série entière.
Montrer que f est solution sur $]-R;R[$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

3 - En déduire $f(x)$ en fonction de $x \in]-R;R[$.