I Questions de cours

1 - Exercice 39 banque CCINP :
On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2$ converge.

a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$ converge.

b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on pose $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ et on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans ℓ^2. On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

d) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\cdot|\cdot)$) puis comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

2 - Exercice 77 banque CCINP :
Soit E un espace euclidien.

a) Soit A un sous-espace vectoriel de E.
Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.

b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ puis que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

3 - Exercice 79 banque CCINP :
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

a) Soit h une fonction continue et positive de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrer que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \implies h = 0$.

b) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall (f,g) \in E^2,\ (f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

c) Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

II Exercices

Exercice 1 :
Soient $(E, <\cdot;\cdot>)$ un espace vectoriel euclidien, $(a,b) \in E^2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
La question 1 est indépendante des deux autres questions.
1 - Déterminer l'adjoint f^* de $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = <a;x> b - <b;x> a$$

2 - Montrer que

$$\mathrm{Ker}\,(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp \text{ et } \mathrm{Im}\,(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$$

puis en déduire que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}\,(u^*)$.
3 - Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\,(u^* \circ u)$ puis que $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Im}(u^* \circ u)$.

Exercice 2 :
Caractériser géométriquement l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :
Justifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et trouver $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ tel que $P^\intercal AP$ soit diagonale.

Exercice 4 :
Soient $m \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. On dit que A est de type n lorsque $A^\intercal = A^n$.
1 - Quelles sont les matrices de type 1 ? Donner une matrice de type -1 non diagonale.
2 - Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$N(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N^k(x) = N(kx)$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour quels x la matrice $N(x)$ est-elle de type n ?

3 - Dans toute cette question, on suppose $m \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^*$ et A de type n et on pose $B = A^{n+1}$.
a) Montrer que $A^{n^2} = A$ et $B^n = B$.
b) Montrer que B est symétrique. Quelles sont les valeurs propres possibles pour B ?
c) Montrer que -1 n'est pas valeur propre de B.
d) Montrer que B est la matrice d'un projecteur orthogonal.

v.hanecart@orange.fr

Exercice 5 :

Soient $(E, <\cdot;\cdot>)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

1 - Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout $x \in E$, $<u(x); x>= 0$.

ii) $u^* = -u$ (on dit que u est *antisymétrique*).

iii) La matrice de u dans une base orthonormée est antisymétrique.

2 - Montrer que le spectre d'un endomorphisme antisymétrique est soir $\emptyset$ soit $\{0\}$.

3 - En déduire qu'un endomorphisme antisymétrique non nul n'est jamais diagonalisable.

Exercice 6 :

Soit $(E, <\cdot;\cdot>)$ un espace euclidien.

1 - Montrer que si u et v sont deux vecteur unitaires de E, alors $<u+v; u-v>= 0$.

2 - Soit f un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité (c'est-à-dire que si deux vecteurs sont orthogonaux, alors leurs images par f sont orthogonales).

a) Montrer que si u et v sont unitaires, alors $\|f(u)\| = \|f(v)\|$.

b) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\,\|x\|$.