I Restitution du cours

1- Donner la définition de la convergence simple et énoncer les propriétés (de norme) de la norme de la convergence uniforme.

2 - Donner la définition de la convergence uniforme et énoncer le théorème d'interversion limite-intégrale pour une suite de fonctions.

3 - Donner la définition de la convergence uniforme sur tout segment et énoncer le théorème de dérivation de la limite pour une suite de fonctions.

II Questions de cours

1 - Étudier les modes de convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où l'on pose $f_n : x \longmapsto \dfrac{nx^2+1}{nx+1}$, sur $]0;+\infty[$.

2 - Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+\exp\left(\frac{x}{n}\right)}\mathrm{d}x$$

3 - Étudier les modes de convergence des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$, où l'on pose $f_n : x \longmapsto \sqrt{x+\dfrac{1}{n}}$.

III Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 :
Soient $\alpha > 0$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \longmapsto xn^\alpha e^{-nx}$$

1 - Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.
2 - Pour quelle(s) valeur(s) de α la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 2 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{n^3x}{n^4+x^4}$$

1 - Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à préciser.
2 - Que dire de $f_n(n)$? Que peut-on en conclure ?
3 - Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout intervalle du type $[-a;a]$.

Exercice 3 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;+\infty[$, on pose :

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

1 - Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0;+\infty[$.
2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;+\infty[$, on a $0 \leq f_n(x) \leq e^x$.
3 - Soit $a > 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0;a]$.
4 - Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x$ de deux manières différentes.
5 - La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$?

IV Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{F}(I,\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f.
1 - Montrer que si les fonctions f_n sont convexes, alors f est convexe.
2 - Montrer que si les fonctions f_n sont bornées et que la convergence précédente est uniforme, alors f est bornée.

Exercice 5 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{nx^2e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$$

1 - Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0;+\infty[$.
2 - Préciser $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f_n(x)$. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]0;+\infty[$.
3 - Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a;b]$ de $]0;+\infty[$.
4 - Montrer que pour $a > 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$.

V Exercices avec questions ouvertes

Exercice 6 :
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers ℓ.
La suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers $f(\ell)$?

 v.hanecart@orange.fr

Exercice 7 :
Existe-t-il une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers exp ?

Exercice 8 :
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$.
La suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?