v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 101 banque CCINP :
Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t=0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau et l'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement "l'animal est en A après son n-ième trajet".
On note B_n l'événement "l'animal est en B après son n-ième trajet".
On note C_n l'événement "l'animal est en C après son n-ième trajet".

On pose $\mathbb{P}(A_n)=a_n$, $\mathbb{P}(B_n)=b_n$ et $\mathbb{P}(C_n)=c_n$.
a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
c) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
d) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
e) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D=P^{-1}AP$ (le calcul de P^{-1} n'est pas demandé).
f) Montrer comment les résultats des questions c),d) et e) peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n (aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée).

2 - Exercice 107 banque CCINP :
On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires et l'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 et sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au n-ième tirage est blanche" et on pose $p_n=\mathbb{P}(B_n)$.
a) Calculer p_1.
b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1}=-\dfrac{6}{35}p_n+\dfrac{4}{7}$.
c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

3 - Exercice 112 banque CCINP :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
a) Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subseteq B$.
b) Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
c) Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

II Exercices

Exercice 1 :
Soit $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
On dit qu'un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ est un **nombre algébrique** lorsqu'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha)=0$. Dans le cas contraire, on parle alors de **nombre transcendant**.
1 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Z}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ de degré inférieur ou égal à n est dénombrable. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.
2 - En déduire que l'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques est dénombrable.
3 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des nombres transcendants n'est pas dénombrable.

Exercice 2 :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
1 - Soit A un événement dont on note $\overline{A}$ l'événement contraire.
Montrer que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \leq \dfrac{1}{4}$.
2 - Soient A et B deux événements.
Monter que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right)-\mathbb{P}(A\cap B)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$. En déduire que $|\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)| \leq \dfrac{1}{4}$.

Exercice 3 :
Dans cet exercice, on utilisera librement le lemme suivant :

Lemme : Deuxième lemme de Borel-Cantelli :
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Si les événements A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors l'événement $\bigcap_{n=0}^{+\infty}\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p$ est presque-sûr.

Supposons qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(n\mathbb{N}^*)=\dfrac{1}{n}$ (où $n\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls multiples de n).

 v.hanecart@orange.fr

Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers deux à deux distincts et rangés dans l'ordre croissant.
1 - Montrer que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p = \emptyset$.
2 - Montrer que la suite d'événements $(p_k \mathbb{N}^*)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est indépendante.
3 - En admettant que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ diverge, montrer qu'alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p\right) = 1$.
En déduire qu'il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(n\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}$.

Exercice 4 :
On extrait 13 cartes d'un jeu de 52 cartes classiques.
1 - Les deux évènements "On tire un seul as" et "On tire l'as de pique" sont-ils indépendants ?
2 - Le résultat demeure-t-il si on ajoute un joker aux 52 cartes avant d'extraire les 13 cartes ?