Leçon 228 - Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Au delà des définitions et premiers théorèmes, le programme offre de nombreuses pistes aux candidates et candidats pour élaborer leur plan : recherche d'extrema, utilisations de la continuité uniforme, fonctions convexes et leur régularité, approximation par des fonctions régulières, utilisations des formules de Taylor, liens entre caractère $\mathcal{C}^\infty$ et analycité, etc.
Des exemples explicites de fonctions continues et nulle part dérivables, de fonctions continues et croissantes à dérivée nulle presque partout, de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à dérivées en un point prescrites, etc. sont les bienvenus dans cette leçon.
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones ou lipschitziennes ou à celle de l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable, proposer diverses applications du théorème de Baire (continuité d'une limite simple de fonctions continues, points de continuité d'une dérivée, généricité des fonctions nulle part dérivables parmi les fonctions continues ou des fonctions nulle part analytiques parmi les fonctions $\mathcal{C}^\infty$, etc.).

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 228 intitulée : "Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.". La notion de fonction apparaît intuitivement avec Leibniz, mais son utilisation reste très peu consciente d'elle-même. Les fonctions se dérivent sans trop se soucier de leur dérivabilité dès Newton, et les fonctions les plus pathologiques sont encore avec Euler des fonctions continues par morceaux. Ce sont Cauchy et Abel qui sont les premiers à souligner ces erreurs et à motiver l'introduction rigoureuse et la formalisation de ces propriétés. La théorie des fonctions prend alors tout son essor au début du XXème siècle avec l'école française, notamment Baire, Borel et Lebesgue, mais la théorie dépasse alors les simples fonctions réelles d'une variable réelle.
Dans une première partie, on s'intéresse aux généralités concernant les notions de continuité et de dérivabilité. En ce qui concerne la continuité on commence par en rappeler la définition ainsi que quelques exemples de fonctions continues avant de donner des résultats sur les opérations et on termine ce premier point par énoncer la caractérisation séquentielle de la continuité ainsi que le théorème de prolongement par continuité. Dans un deuxième point on s'intéresse à la dérivabilité en suivant le même schéma : on commence par énoncer la définition de la dérivabilité ainsi que quelques exemples de fonctions dérivables usuelles avant de faire le lien entre continuité et dérivabilité ainsi que développement limité. On donne ensuite des résultats sur les opérations avant de conclure par le théorème 23 qui est un premier résultat puissant car il permet de dériver des fonctions dont on ne connaît pas d'expression explicite comme par exemple la fonction Arctangente.
Dans une deuxième partie on va donner des applications de ces notions avec des théorèmes majeurs d'analyse réelle. On commence par le théorème des valeurs intermédiaires qui nous permet de justifier l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$ sans avoir à la déterminer explicitement. On donne ensuite le théorème de Heine qui fait un lien entre continuité et compacité et qui permet de démontrer le théorème de Weierstrass qui donne un résultat de densité des fonctions polynomiales dans les fonctions continues sur un segment pour la norme de la convergence uniforme. Dans un troisième point on donne les théorèmes de Rolle et des accroissements finis qui servent à montrer qu'une fonction est lipschitzienne par exemple. Dans un dernier point on énonce les formules de Taylor qui permettent de montrer des inégalités, la convergence d'une somme vers une fonction ou encore de justifier la méthode de Newton.
Dans une dernière partie on s'intéresse à certaines classes de fonctions. Dans un premier point on donne des conditions pour qu'une suite de fonctions converge uniformément vers une fonction continue puis qu'une suite de fonctions converge uniformément vers une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On s'intéresse ensuite au cas des séries entières où l'on commence par rappeler brièvement quelques définitions et propriétés avant de parler de régularité sur le disque de convergence (tant au niveau de la continuité que de la dérivabilité terme à terme). Dans un troisième point on s'intéresse aux intégrales à paramètres où l'on regarde s'il y a un transfert de régularité entre l'intégrande et

l'intégrale. On se rend compte que modulo les bonnes hypothèses c'est le cas et c'est ce qu'énoncent les théorèmes 64 et 66 et permettent de montrer que des fonctions non explicites comme la fonction Γ d'Euler sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Finalement, on conclut cette leçon avec une application aux probabilités en parlant du processus de Galton-Watson. On trouvera également en annexe une illustration du théorème de Rolle et des accroissements finis ainsi que de G et de ses points fixes.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi que $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$.

I Notions de continuité et de dérivabilité

I.1 Fonctions continues

Définition 1 : Fonction continue :
On dit que f est **continue en un point** α lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in I,\ (|x-\alpha| \leq \delta) \implies (|f(x) - f(\alpha)| \leq \varepsilon)$$

On dit également que f est **continue sur** I lorsqu'elle est continue en tout point de l'intervalle I.

Proposition 2 : [Deschamps (1), p.488]
Si f est continue en $\alpha \in I$, alors elle est bornée au voisinage de α.

Exemple 3 :
∗ Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$.
∗ Les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4 : [Deschamps (1), p.508 + 509]
Soient g et h deux fonctions continues sur I.
∗ Toute combinaison linéaire de g et h est continue sur I.
∗ La fonction gh est continues sur I.
∗ Si h ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{h}$ et $\frac{g}{h}$ sont continues sur I.

Théorème 5 : [Deschamps (1), p.509]
Soient J et K deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, g continue sur J et h continue sur K telles que $g(J) \subseteq K$.
La fonction $h \circ g$ est continue sur I.

Théorème 6 : [Deschamps (1), p.510]
Toute fonction lipschitzienne est continue.

Exemple 7 : [Deschamps (1), p.510]
∗ La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
∗ Les fonctions polynomiales (réelles) sont continues sur $\mathbb{R}$.
∗ La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 8 : [Deschamps (1), p.492]
f est continue en $\alpha \in I$ si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ de limite α, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $f(\alpha)$.

Remarque 9 :
Ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point. Par exemple la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0) = 0$ et $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0 car la suite $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et tend vers 0 mais la suite $(f\left(\frac{1}{n\pi}\right))_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Théorème 10 : [Deschamps (1), p.506]
Soient $\alpha \in I$ et $g : I\backslash\{\alpha\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Il existe une fonction $\widetilde{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en a prolongeant g sur I si, et seulement si, g admet une limite finie en a.
Dans ce cas, un tel prolongement est unique et $\widetilde{g}(a) = \lim_{x\to a} g(x)$.

Exemple 11 : [Deschamps (1), p.506]
La fonction g définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0.

I.2 Fonctions dérivables

Dans toute cette sous-partie, on considère $\alpha \in I$.

Définition 12 : Fonction dérivable [Deschamps (1), p.552] :
On dit que la fonction f est une **fonction dérivable en** α lorsque son taux d'accroissement en a :

$$\tau_a(f) : \left| \begin{array}{ccc} I\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

admet une limite finie en α. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée le **nombre dérivé de** f **en** α et notée $f'(\alpha)$.

Exemple 13 : [Deschamps (1), p.552 + 553]
$*$ Toute fonction constante sur I est dérivable et de dérivée nulle.
$*$ Pour tout entier naturel non nul n, la fonction $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$.
$*$ La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Proposition 14 : [Deschamps (1), p.710]
f est dérivable en α si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 1 en α.

Corollaire 15 : [Deschamps (1), p.554]
Si f est dérivable en α, alors f est continue en α.

Remarque 16 :
Attention, la réciproque est fausse (en un point comme sur un intervalle).

Proposition 17 : [Deschamps (1), p.555]
Soient g et h deux fonctions dérivables en α.
$*$ Pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en α et $(\lambda f + \mu g)'(\alpha) = \lambda f'(\alpha) + \mu g'(\alpha)$.
$*$ Le produit fg est dérivable en α et $(fg)'(\alpha) = f'(\alpha)g(\alpha) + f(\alpha)g'(\alpha)$.

Exemple 18 : [Deschamps (1), p.556]
Les fonctions polynomiales réelles sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Théorème 19 : [Deschamps (1), p.556]
Soient J et K deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : K \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $g(J) \subseteq K$.
Si g est dérivable en α et h est dérivable en $b = g(\alpha)$, alors $h \circ g$ est dérivable en α et $(h \circ g)'(\alpha) = g'(\alpha)h'(\alpha) = g'(\alpha)h'(f(\alpha))$.

Corollaire 20 :
Si f est dérivable en α, alors :
$*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f^n est dérivable en α et $(f^n)'(\alpha) = nf'(\alpha)f^{n-1}(\alpha)$.
$*$ Pour tout $n \in \mathbb{Z}_-^*$, si $f(\alpha) \neq 0$, alors la fonction f^n est dérivable en α et $(f^n)'(\alpha) = nf'(\alpha)f^{n-1}(\alpha)$. En particulier, $\left(\frac{1}{f}\right)'(\alpha) = -\frac{f'(\alpha)}{f^2(\alpha)}$.

Corollaire 21 : [Deschamps (1), p.557]
Soient $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que h ne s'annule pas.
Si g et h sont dérivables sur I, alors $\frac{g}{h}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h+gh'}{h^2}$.

Exemple 22 : [Deschamps (1), p.558]
La fonction tan est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et :

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

Théorème 23 : [Deschamps (1), p.558]
Soit $g : I \longrightarrow J$ une bijection continue sur I, dérivable en a.
g^{-1} est dérivable en $b = g(a)$ si, et seulement si, $g'(a) \neq 0$. Et dans ce cas, $\left(g^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{g'(a)} = \frac{1}{g'(g^{-1}(b))}$.

Exemple 24 : [Deschamps (1), p.558]
$*$ Puisque la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ln est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$, qui est à valeurs strictement positives, la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.
$*$ Puisque la dérivée sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tan est la fonction $1 + \tan^2$, qui est à valeurs strictement positives, la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\text{Arctan}' = \frac{1}{1+x^2}$.

II Théorèmes principaux

II.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 25 : Théorème des valeurs intermédiaires [Deschamps (1), p.511] :
Si f et continue sur $[a;b]$ et que $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = 0$.

Corollaire 26 : [Deschamps (1), p.512]
Si f est continue sur I et ne s'annule pas, alors f a un signe (strict) constant.

Corollaire 27 : [Deschamps (1), p.513]
Soient $c, d \in I$.
Si f est continue sur I, alors toutes les valeurs entre $f(c)$ et $f(d)$ dont atteintes par f.

Théorème 28 : [Deschamps (1), p.513]
L'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

II.2 Continuité et compacité

Théorème 29 : [Deschamps (1), p.514]
Soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
f est majorée (resp. minorée) et admet un maximum M (resp. un minimum m).
De plus $f([a;b]) = [m, M]$.

Théorème 30 : Théorème de Heine [Deschamps (1), p.518]
Toute fonction continue définie sur un segment est uniformément continue.

Exemple 31 : [Deschamps (1), p.518]
$*$ La fonction carrée n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
$*$ La fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Développement 1 : [cf. DESCHAMPS (2)]

Lemme 32 : [Deschamps (2), p.994]
Soient f une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \in [0;1]$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(x)$ et $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall (t,u) \in [0;1]^2, \ |f(t) - f(u)| \leq M(t-u)^2 + \varepsilon$$

En particulier, on a $|\mathbb{E}(f(Y_n)) - f(x)| \leq M \operatorname{Var}(Y_n) + \varepsilon \leq \frac{M}{4n} + \varepsilon$

Théorème 33 : Théorème de Weierstrass [Deschamps (2), p.994] :
Si l'on considère les polynômes de Bernstein définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{k}{n} x^k(1-x)^{n-k}$$

alors la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

Corollaire 34 : [Deschamps (2), p.530]
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle sur $[0;1]$.

II.3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 35 : Théorème de Rolle [Deschamps (1), p.562] :
Soit $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ telle que $g(a) = g(b)$.
Il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Remarque 36 : [Deschamps (1), p.562]
Bien noter que le théorème de Rolle fournit l'existence d'un c tel que $g'(c) = 0$, mais en aucun cas l'unicité.

Théorème 37 : Théorème de Darboux [Deschamps (1), p.599] :
Si f est dérivable sur I, alors $f'(I)$ est un intervalle.

Théorème 38 : Égalité des accroissements finis [Deschamps (1), p.562] :
Soit $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Il existe $c \in]a;b[$ tel que $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$.

Remarque 39 : [Deschamps (1), p.581]
Le théorème des accroissements finis n'est pas vrai pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. En effet, la fonction g définie sur $[0; 2\pi]$ par $g(t) = e^{it}$ ne vérifie pas l'égalité des accroissements finis.

Théorème 40 : Inégalité des accroissements finis [Deschamps (1), p.567] :
Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I.
S'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathring{I}$, $|g'(x)| \leq M$, alors g est M-lipschitzienne.

II.4 Formules de Taylor

Théorème 41 : Formule de Taylor-Laplace à l'ordre n [Deschamps (1), p.657] :
Soient $a \in I$ et g une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour tout $x \in I$, on a :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 42 : [Deschamps (1), p.658]
$*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
$*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Théorème 43 : Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n [Deschamps (1), p.658] :
Soient $a \in I$ et g une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si la fonction $\left|g^{(n+1)}\right|$ est majorée par une constante $M_{n+1} > 0$, alors pour tout $x \in I$, on a :

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Exemple 44 : [Deschamps (1), p.658]
On note f l'application définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(1+x)$.
Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $\ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

Théorème 45 : Formule de Taylor-Young à l'ordre n [Deschamps (1), p.659] :
Soient $a \in I$ et g une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour tout $x \in I$, on a :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

Développement 2 : [cf. ROUVIERE]

Théorème 46 : Méthode de Newton [Rouvière, p.152] :
Soit $f : [c; d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c; d]$ et on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [c; d]$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
$*$ f possède un unique zéro noté a et pour tout $x \in [c; d]$, il existe $z \in [a; x]$ tel que $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$.
$*$ Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [c; d]$, $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha; a+\alpha]$ soit stable par F et que pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une convergence d'ordre 2 vers a dans I.
$*$ Si on suppose de plus que $f'' > 0$ sur $[c; d]$, alors l'intervalle $I = [a; d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec :

$$0 \leq x_{n-1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et } x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$$

Remarque 47 :
Le premier résultat est un résultat local, tandis que dans le second résultat, on suppose f convexe pour avoir la convergence d'ordre 2.

III Étude de certaines classes de fonctions

III.1 Suites de fonctions

Dans toute cette sous-partie, on considère X un ensemble non vide quelconque, $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé complet sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E et enfin $f : X \longrightarrow E$.

Théorème 48 : [Deschamps (2), p.511]
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur X qui converge uniformément vers f sur X, alors f est continue sur X.

Exemple 49 :
L'hypothèse de convergence uniforme n'est pas superflue. En effet, si l'on considère les fonctions $f_n : x \longmapsto x^n$ sur $[0; 1]$, alors on remarque que chaque f_n est continue sur $[0; 1]$ mais que la limite ne l'est pas. Donc la convergence ne peut être uniforme.

Théorème 50 : [Deschamps (2), p.514]
Supposons que les f_n soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f et si la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors :
$*$ La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

$*$ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I.

L'hypothèse de convergence uniforme des dérivée n'est pas superflue :

Exemple 51 : [Deschamps (2), p.514]
On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valeur absolue. Cependant, cette fonction n'est pas dérivable en 0.

III.2 Séries entières

Définition 52 : Série entière [Deschamps (2), p.601] :
On appelle **série entière associée à** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum f_n$ où chaque $f_n : z \longmapsto a_n z^n$ est définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 53 : Rayon de convergence [Deschamps (2), p.602] :
On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ de l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ et on la note R.

Définition 54 : Disque ouvert de convergence [Deschamps (2), p.602] :
On appelle **disque ouvert de convergence** de la série $\sum a_n z^n$ le disque $D_o(0, R)$.

Exemple 55 : [Deschamps (2), p.602]
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série $\sum a^n z^n$ est égal à $\dfrac{1}{|\alpha|}$.
En effet, la suite $((az)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $|az| \leq 1$.

Dans toute la suite de cette sous-partie, on considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Proposition 56 : Règle de d'Alembert [Deschamps (2), p.606] :
Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain n_0 assez grand et que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geq n_0}$ possède une limite ℓ, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

Exemple 57 : [Deschamps (2), p.604]
La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Théorème 58 : [Deschamps (2), p.610]
La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\mathcal{D}_f(0,\rho)$ où $\rho \in [0; R[$.

Corollaire 59 : [Deschamps (2), p.610]
La restriction de la somme au disque ouvert de convergence est continue.

Théorème 60 : Théorème de dérivation terme à terme [Deschamps (2), p.611] :
Si f est la somme de $\sum a_n z^n$, alors $f \in \mathcal{C}^1(]-R;R[)$, alors pour tout $t \in]-R;R[$, on a :

$$f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}t^n$$

Exemple 61 : [Deschamps (2), p.612]

$$\forall x \in]-1;1[,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

Remarque 62 : [Deschamps (2), p.612]
On a en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(]-R;R[)$ et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Exemple 63 : [Berthelin, p.147]
Une solution de l'équation différentielle $(E) : (t^2+t)y'' + (3t+1)y' + y = 0$ est la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(t) = \frac{a_0}{1+t}$ (avec $a_0 \in \mathbb{R}$).

III.3 Intégrales à paramètres

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 64 : Théorème de continuité sous le signe $\int$ [El Amrani, p.410] :
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
$*$ Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-intégrable.
$*$ Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
$*$ Il existe une fonction μ-intégrable positive g sur X telle que pour presque tout couple $(x,t) \in X \times I$, $|f(x,t)| \leq g(x)$.
alors la fonction $F : t \longmapsto \int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ est continue sur I.

Exemple 65 : [Deschamps (2), p.756]
La fonction $g : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 66 : Théorème de dérivation sous le signe $\int$ [El Amrani, p.411] :
On suppose que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
∗ Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-mesurable.
∗ Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable sur I.
∗ Il existe une fonction μ-intégrable positive g sur X telle que pour presque tout couple $(x,t) \in X \times I$ pour lequel $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$.
alors la fonction $F : t \longmapsto \int_X f(x,t) \mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable sur I, de dérivée la fonction $F' : t \longmapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \mathrm{d}\mu(x)$.

Proposition 67 : [Gourdon (1), p.315]
On considère la fonction Γ d'Euler donnée par : $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} \mathrm{d}x$.
∗ Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.
∗ La fonction Γ est log-convexe sur $]0;+\infty[$.
∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
∗ On a $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

III.4 Processus de Galton-Watson

Dans toute cette sous-partie, on considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi notée μ admettant une espérance notée m, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et on suppose que $p_0 \in]0;1[$.

Définition 68 : Série génératrice [Deschamps (2), p.949] :
On appelle **série génératrice de** X la fonction G_X définie par $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

Soit $(X_{n,i})_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de X. On définit la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

La variable aléatoire Z_n représente le nombre d'individus à la génération n. On note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction la probabilité d'extinction à l'instant n, $P_{\text{ext}} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction de la population et G_n la fonction génératrice de Z_n.

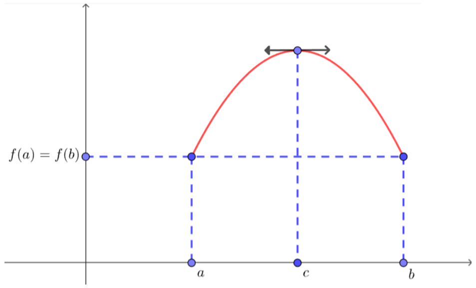
Lemme 69 : [Gourdon (2), p.345]
∗ G est bien définie, de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $[0;1]$.
∗ G est strictement croissante sur $[0;1]$.
∗ G est strictement convexe sur $]0;1]$ si, et seulement si $p_0 + p_1 < 1$.

Proposition 70 : [Gourdon (2), p.376]
∗ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G \circ G \circ ... \circ G$ (n fois), avec G la série génératrice de X.
∗ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.
∗ De plus, on a : $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$.

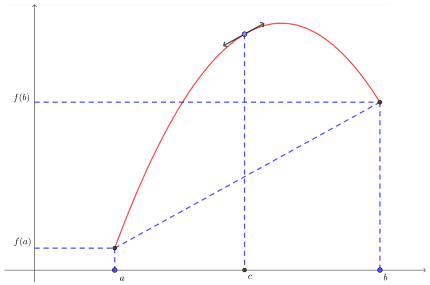
Théorème 71 : [Gourdon (2), p.376]
∗ P_{ext} est la plus petite solution de l'équation $G(s) = s$ sur $]0;1]$.
∗ Si $m \leq 1$ (cas sous-critique et critique), alors $P_{ext} = 1$.
∗ Si $m > 1$ (cas super-critique), alors P_{ext} est l'unique point fixe de G sur $]0;1[$.

IV Annexe

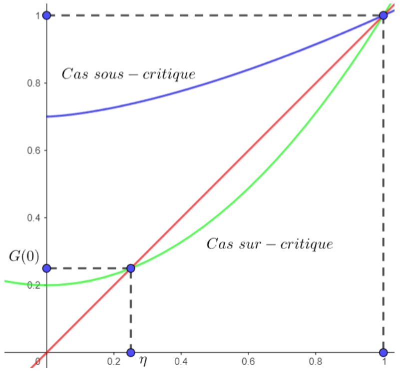
IV.1 Illustration du théorème de Rolle



IV.2 Illustration du théorème des accroissements finis



IV.3 Représentation graphique de G et de ses points fixes



Remarques sur la leçon

— On peut également parler d'équicontinuité et du théorème d'Ascoli ou encore de fonctions lipschitziennes ou convexes.

Liste des développements possibles

— Méthode de Newton.

— Théorème de Weierstrass.

— Résolution d'une EDO par DSE.

— Étude de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$.

— Processus de Galton-Watson.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*.

— Florent Berthelin, *Équations différentielles*.

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.