I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la proposition sur la dérivabilité et la dérivée de $L(f)$ lorsque L est une application linéaire et f dérivable.

2 - Énoncer et démontrer la proposition sur l'intégrale de $L(f)$ lorsque L est une application linéaire et f continue par morceaux.

3 - Donner la définition d'une somme de Riemann puis énoncer et démontrer la proposition sur la convergence des sommes de Riemann.

II Exercices

Exercice 1 :
Soient I un intervalle, E un espace vectoriel euclidien muni de la norme $\|\cdot\|$ issue du produit scalaire et $f : I \longrightarrow E$ dérivable.
On suppose que f ne s'annule pas et on pose, pour tout $t \in I$, $g(t) = \|f(t)\|$.
Démontrer que g est dérivable et donner g'.

Exercice 2 :
On considère les applications :

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}, 2t\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$$

Calculer la quantité $p\left(\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 3 :
Soit $f : [a;b] \longrightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$.
Démontrer que :

$$\left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right\| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t\in[a;b]} \|f'(t)\|.$$

Exercice 4 :
Soient E un espace vectoriel euclidien et une application $f : [a;b] \longrightarrow E$ continue telle que $\displaystyle\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right\|$.

On note u le vecteur unitaire de E défini par $u = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t}$.

Pour tout $t \in [a;b]$, on décompose $f(t)$ dans la somme directe $\mathbb{R}u \oplus (\mathbb{R}u)^{\perp}$ sous la forme $f(t) = \alpha(t)u + v(t)$.
1 - Montrer que α et v sont continues sur $[a;b]$.
2 - Démontrer que $\displaystyle\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ est orthogonal à u.
3 - Démontrer que $\displaystyle\int_a^b \alpha(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.
4 - Démontrer que pour tout $t \in [a;b]$, $\alpha(t) \leq \|f(t)\|$.
5 - Démontrer que pour tout $t \in [a;b]$, $f(t) \leq \|f(t)\|\,u$.
6 - Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose pas que E est euclidien ?

Exercice 5 :
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, on pose :

$$L(M) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} M^k.$$

On cherche à étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par $f(t) = \exp(-L(tM))$.
1 - Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \prod_{k=1}^{n-1} \exp\left(-\frac{t^k}{k} M^k\right)$$

2 - Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (I_n - tM)f'(t) = -Mf(t)$$

3 - Montrer que f' est constante.
4 - En déduire que $\exp(L(M)) = (I_n - M)^{-1}$.

Exercice 6 :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
1 - Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans E telle que les fonctions $\|f\|$ et $\|f''\|$ soient majorées respectivement par M_1 et M_2.
Montrer que pour tout $h > 0$, la fonction $\|f'\|$ est majorée par $\dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$. En déduire que la fonction $\|f'\|$ est majorée par $2\sqrt{M_0 M_2}$.
2 - Soit f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2(x-1)^2 - 1$.
Quelles sont les bornes de f, f' et f'' sur $[0;1]$? En utilisant la fonction cos, prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ pour laquelle la majoration de la question précédente est optimale.