v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer la forme des solutions dans le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients non constants.

2 - Énoncer et démontrer le principe de superposition pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

3 - Énoncer et démonter la méthode de variation de la constante.

II Exercices sur les équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1 :
Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

$$y'+y=\frac{1}{1+e^x} \text{ et } (1-x)y'+y=\frac{x-1}{x}$$

Exercice 2 :
On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy'-3y=0 \quad (H) \quad \text{et} \quad 2xy'-3y=\sqrt{x} \quad (E).$$

1 - Résoudre l'équation (H) sur $]0;+\infty[$.
2 - Résoudre l'équation (E) sur $]0;+\infty[$.
3 - L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0;+\infty[$.

Exercice 3 :
Trouver toutes les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)f(y)$$

III Exercices sur les équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Exercice 4 :
Résoudre l'équation différentielle suivante sur tout intervalle ne contenant pas -1 :

$$(1+x)^2y''+(1+x)y'-2=0 \quad (E).$$

Exercice 5 :
On considère l'équation différentielle :

$$xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0 \quad (E).$$

En utilisant la fonction $z : x\longmapsto xy(x)$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 :
Soit (E) l'équation différentielle :

$$ax^2y''+bxy'+cy=0 \text{ avec } (a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$$

1 - Soit y une fonction deux fois dérivable sur $I=\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que y est solution de (E) sur I si, et seulement si, la fonction $z : t\longmapsto y\left(e^t\right)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
2 - Quelle est la forme des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$?
3 - Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$x^2y''-xy'+y=0.$$

4 - Comment adapter les résultats des questions précédentes dans le cas de $I=\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 7 :
Soient a et b deux scalaires et c une fonction continues d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$.
Considérons l'équation :

$$y''+ay'+by=c(x) \quad (E)$$

et r une racine de l'équation caractéristique associée.
1 - Soient f une fonction deux fois dérivable sur I et z la fonction définie de I dans $\mathbb{C}$ par $z(x)=e^{-rx}f(x)$.
Montrer que la fonction f est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction z' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
2 - En déduire que l'équation (E) admet des solutions.