 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer les propriétés sur la fonction Arctan (définition, monotonie, dérivabilité, formule de la dérivée et courbe représentative).

2 - Énoncer et démontrer les propriétés de $e^{i\theta}$ ainsi que les formules d'Euler.

3 - Énoncer et démontrer la formule de Moivre.

II Exercices sur les fonctions circulaires réciproques

Exercice 1 :
1 - Montrer à l'aide des formules trigonométriques :

$$\forall x \in [-1;1],\ \text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi$$

2 - Montrer que :

$$\forall x \in [-1;1],\ \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2 :
Pour tout réel x tel que $\sin(x) \neq 0$, on pose $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)$.
1 - Vérifier que f est 2π-périodique et que f est impaire.
2 - En remarquant que $\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, exprimer $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ à l'aide de $\dfrac{x}{2}$.
3 - Soit $x \in]0;\pi[$. Donner une expression simple de $f(x)$.
4 - Représenter f sur $]-3\pi;3\pi[$.
5 - Que vaut $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$?

Exercice 3 :
Simplifier l'expression $x \longmapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

III Exercices sur les nombres complexes

Exercice 4 :
1 - Donner la forme trigonométrique de $1+i$. En déduire une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2 - Linéariser $\cos^5(\theta)$ et $\sin^5(\theta)$.

Exercice 5 :
Pour $z \in \mathbb{C}^*$, établir que $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $|z| = 1$ ou $z \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 6 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1 - Déterminer le module et un argument de $(1+i)^n$.
2 - En déduire :

$$S = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \text{ et } S' = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$$

Exercice 7 :
1 - Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2 - En déduire une expression de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 8 :
On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.
1 - Montrer que $\overline{S} = T$ et $\text{Im}(S) > 0$.
2 - Calculer $S + T$ et ST. En déduire S et T.