I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer les propriétés algébriques du logarithme et de l'exponentielle.

2 - Énoncer et démontrer les propriétés algébriques des puissances.

3 - Énoncer et démontrer les croissances comparées.

II Exercices sur les systèmes linéaires

Exercice 1 :
Résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} 2x+y-2z &= 1 \\ -2x-2y+3z &= 1 \\ 4x-y-2z &= 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2x+y-2z &= 1 \\ -2x-2y+3z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2 :
Résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} 2x+y-2z &= 1 \\ 4x+y-3z &= 3 \\ -4x-4y+6z &= 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+ay &= b \\ ax+y &= -b \end{cases}, \ (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 3 :
1 - Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 5x+3y &= -2 \\ 2x+y &= 3 \end{cases}$$

2 - Résoudre le système suivant, dépendant de paramètres réels λ et μ :

$$\begin{cases} \lambda x+3y &= -3 \\ 2x+y &= \mu \end{cases}$$

III Exercices sur les fonctions usuelles

Exercice 4 :
Soit f la fonction d'une variable réelle $f : x \longmapsto \sin(2x) - \dfrac{3}{4}\tan(x)$.
1 - Étudier la parité et vérifier que f est π-périodique.
2 - Montrer que f admet un maximum sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et préciser la valeur de ce maximum.
3 - Représenter f est un intervalle de longueur trois périodes.

Exercice 5 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$.
1 - Étudier la parité et vérifier que f est périodique. En déduire un intervalle $\mathcal{D}$ suffisant pour étudier f.
2 - Étudier les variations de f sur $\mathcal{D}$.
3 - Représenter f sur un intervalle de longueur trois périodes.
4 - Résoudre l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in [-\pi; \pi]$.

Exercice 6 :
On considère la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$ par :

$$\forall x > \frac{1}{e}, \ f(x) = \frac{x}{\ln(x)+1}$$

1 - Préciser les limites de f au bornes du domaine $\left]\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$.
2 - Dresser le tableau de variation de f. Préciser si f admet ou non un extremum que l'on précisera le cas échéant.
3 - Préciser si la dérivée f' admet ou non un extremum que l'on précisera le cas échéant.

Exercice 7 :
Soient $\omega > 0$ et $f : t \longmapsto \cos(\omega t) + \cos(t)$.
À quelle condition sur ω, la fonction f est-elle périodique ?
Indication : On pourra envisager $f'' + \omega^2 f$.

Exercice 8 :
On considère la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_0^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^x \end{array} \right.$$

1 - Donner les limites de f en 0 et $+\infty$.
2 - Étudier les variations de f.
3 - On prolonge f par continuité, en posant $f(0) = 1$. En utilisant $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$, vérifier que le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse 0.