v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Énoncer et démontrer le théorème de la base extraite.

2 - Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que F est de dimension finie et que $\dim_{\mathbb{K}}(F) \leq \dim_{\mathbb{K}}(E)$ puis énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que $E = F$ et démontrer ce résultat.

3 - Énoncer et démontrer la formule de Grassmann.

II Exercices

Exercice 1 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle commutant de A l'ensemble des matrices qui commutent avec A :
$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MA = AM\}$$
1 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$.
2 - Est-il également un sous-anneau de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$?
3 - Dans cette question on suppose que $n = 2$ et on pose :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(B)$.

Exercice 2 :
On considère E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, L l'ensemble des fonctions ℓ de E de la forme $x \longmapsto ax$ où a est une constante, et G l'ensemble des fonctions g de E qui sont nulles en 1.
1 - Montrer que L et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2 - Montrer qu'ils sont supplémentaires dans E.

Exercice 3 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \longmapsto e^{x\sqrt{n}}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice 4 :
Pour $a \in \mathbb{R}$, on note E_a l'ensemble des polynômes P divisibles par $X - a$.
1 - Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2 - Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$.
Montrer qu'il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$1 = \alpha(X - a) + \beta(X - b)$$
En déduire que $E_a + E_b = \mathbb{R}[X]$. La somme est-elle directe ?

Exercice 5 :
Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :
$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\right\} \text{ et } G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0\right\}$$
1 - Donner une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.
2 - Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.
3 - Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F et des vecteurs de la base de G trouvées à la question 1 est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?
4 - Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 6 :
Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels
$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\right\} \text{ et } G = \{(2a, -a, 0, a), \text{ avec } a \in \mathbb{R}\}$$
Le but de l'exercice est de démontrer que F et G sont supplémentaires.
1 - Démontrer que F et G sont en somme directe.
2 - Déterminer la dimension de F et celle de G.
3 - En déduire que F et G sont supplémentaires.
4 - Trouver l'unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $(1, 2, 3, 4) = u_F + u_G$.

v.hanecart@orange.fr

Exercice 7 :

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs :

$$v_1 = (1,2,0,1) \text{ et } v_2 = (1,0,2,1) \text{ et } v_3 = (2,0,4,2)$$

$$w_1 = (1,2,1,0) \text{ et } w_2 = (-1,1,1,1) \text{ et } w_3 = (2,-1,0,1) \text{ et } w_4 = (2,2,2,2)$$

1 - Montrer que (v_1, v_2) est libre et que (v_1, v_2, v_3) est liée.
2 - Montrer que (w_1, w_2, w_3) est libre et que (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée.
3 - Montrer que (v_1, v_2, w_1, w_2) est libre.
4 - Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3).
 a) Déterminer une base de F.
 b) Donner un supplémentaire de F.
5 - Soit G le sous-espace vectoriel engendré par (w_1, w_2, w_3, w_4).
Déterminer une base de G.
6 - a) À l'aide des bases trouvées aux questions 4 et 5, construire un système générateur de $F + G$.
 b) En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7 - a) Montrer que $v_1 + v_2$ est dans $F \cap G$.
 b) Calculer la dimension de $F \cap G$.
 c) Donner une base de $F \cap G$.
8 - F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 8 :

On considère dans $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,3,-2,2) \text{ et } v_2 = (2,7,-5,6) \text{ et } v_3 = (1,2,-1,0)$$

$$w_1 = (1,3,0,2) \text{ et } w_2 = (2,7,-3,6) \text{ et } w_3 = (1,1,6,-2)$$

Soient F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (w_1, w_2, w_3).
1 - Montrer que v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2 puis en déduire une base de F.
2 - Montrer que w_3 est une combinaison linéaire de w_1 et w_2 puis en déduire une base de G.
3 - Montrer que (v_1, v_2, w_1, w_2) est liée. En déduire une base de $F + G$.
4 - Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$.
Donner une base de E.
5 - Montrer que $F+G = E$. La somme est-elle directe ? Quelle est la dimension de $F \cap G$?

Exercice 9 :

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}$$

1 - Donner une base de F.
2 - Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3 - On pose $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$ et $u_3 = (-1,0,-1,0)$.
La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
4 - On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3.
Quelle est la dimension de G ?
5 - Donner une base de $F \cap G$.
6 - En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7 - Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Exercice 10 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les 3 vecteurs suivants :

$$v_1 = (1,0,-1), \text{ et } v_2 = (0,1,2), \text{ et } v_3 = (1,2,3)$$

1 - La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
2 - On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.
Déterminer une base de F et sa dimension.
3 - Déterminer trois réels a, b, c tels que l'on ait :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$$

4 - Déterminer un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.
5 - Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
6 - On considère $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + 2z = 0\}$.
Déterminer une base de G. Quelle est sa dimension ?
7 - Déterminer une base de $F \cap G$. Quelle est sa dimension ?
8 - Sans chercher à déterminer une base de $F + G$, donner la dimension de $F + G$.
9 -En déduire que $F + G = \mathbb{R}^3$.