Leçon 261 - Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Extrait du rapport de jury

Cette leçon concerne les diverses lois du programme, leurs interactions et leurs propriétés de stabilité, et appelle donc quelques illustrations concrètes et bien choisies de calculs de lois, dans un contexte de modélisation. Le théorème de transfert, qui calcule $\mathbb{E}(f(X))$ à l'aide de la loi de X, les vecteurs aléatoires à coordonnées indépendantes, ainsi que la caractérisation de la loi par la fonction de répartition, fonction génératrice ou caractéristique, sont au coeur de cette leçon. Les principales propriétés des fonctions de répartition et des fonctions caractéristiques des variables aléatoires réelles doivent être connues.
Les candidates et candidats peuvent également aborder la convergence en loi en l'illustrant d'exemples et d'applications variés en probabilités et/ou en statistique (estimation par intervalle de confiance).
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation de la loi par les moments, à des inégalités de concentration, aux vecteurs gaussiens, au théorème central limite dans $\mathbb{R}^d$, aux chaînes de Markov, aux processus de Poisson.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 261 intitulée = "Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.". La théorie des probabilités a été formalisée dans les années 30 par Kolmogorov. Aujourd'hui on adopte point de vue fonctionnel avec les variables aléatoires et il est plus intéressant d'étudier la loi d'une variable aléatoire plutôt que la variable aléatoire en elle-même.
Dans une première partie on s'intéresse à la notion de variable aléatoire et quelques premières caractérisations. On introduit tout d'abord le vocabulaire général sur les variables aléatoires avec la définition d'une variable aléatoire, la loi d'une variable aléatoire, la définition d'une fonction de répartition ainsi que ses propriétés fondamentales. Dans un deuxième point on s'intéresse au cas des variables aléatoires discrètes en montrant en particulier que la loi est entièrement déterminée par la probabilité de chaque atome. Enfin on termine cette partie avec le cas des variables aléatoires à densité où l'on a la proposition 16 qui donne un lien entre la fonction de répartition et la densité.
Dans une deuxième partie on s'intéresse à une notion centrale en probabilité qui est l'indépendance. On commence par parler de vecteurs aléatoires et de leur loi avec la loi conjointe et on continue avec la loi marginale que l'on peut retrouver à partir de la loi conjointe. On passe ensuite à la notion d'indépendance en commençant par énoncer la définition de tribus indépendantes puis de variables aléatoires indépendantes et enfin on utilise l'hypothèse d'indépendance pour obtenir un moyen de calculer la loi d'un vecteur aléatoire via la proposition 26.
Dans une troisième partie on s'intéresse à la notion d'espérance ainsi qu'à de nouvelles caractérisations de la loi. On commence par parler d'espérance en énonçant la définition et quelques propriétés fondamentales et on passe ensuite aux moments d'ordre k et on s'intéresse plus particulièrement à la variance et l'écart-type. On termine ce premier point par des propriétés sur la variance et l'espérance ainsi que les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev qui sont utilisées pour la convergence en probabilités. Dans un deuxième point on donne deux nouvelles caractérisations de la loi via deux nouveaux outils. Le premier est celui des séries génératrices qui nous permet de déterminer totalement la loi ainsi que n'importe quel moment d'une variable aléatoire (lorsque celui-ci est bien défini). Le deuxième outil est celui des fonctions caractéristiques et qui est également très utile et assez puissant avec la proposition 52 car on peut calculer la fonctions caractéristique d'une somme de variables aléatoires réelles indépendantes par exemple. On termine cette partie avec un exemple : celui des vecteurs gaussiens. On commence ainsi par donner la définition d'un vecteur aléatoire gaussien puis l'on donne sa fonction caractéristique ainsi que sa loi et on conclut avec l'indépendance de ses composantes via la matrice de dispersion ainsi que l'expression de la densité.
Finalement, on conclut cette leçon avec la convergence en loi. On commence par en donner la définition avant d'énoncer le théorème de Lévy qui est assez puissant car il permet de ramener l'étude d'une convergence en loi à celle d'une convergence simple (ce qui est plus commode) et on termine par une application avec le théorème central

limite. Enfin dans un deuxième point on donne quelques applications du théorème central limite avec quelques résultats de statistiques comme la création d'intervalles de confiance ainsi qu'une démonstration probabiliste de la formule de Stirling.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

I Variables aléatoires et premières caractérisations

I.1 Variables aléatoires

Définition 1 : Variable aléatoire (réelle) [Chabanol, p.21] :
On appelle **variable aléatoire** (réelle lorsque $E = \mathbb{R}$) toute application mesurable $X : \Omega \longrightarrow E$.

Définition 2 : Loi d'une variable aléatoire [Chabanol, p.21] :
On appelle **loi de** X la mesure image de $\mathbb{P}$ par X et on la note $\mathbb{P}_X$. Ainsi, pour tout $B \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) \in B\})$.

Exemple 3 : [Chabanol, p.21]
En lançant un dé deux fois, on peut définir X la variable aléatoire égale à la somme des résultats des dés. Dans ce cas, $\Omega = [\![1;6]\!]^2$, $E = [\![2;12]\!]$ et :

$$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36},\ p_3 = p_{11} = \frac{2}{36},\ p_4 = p_{10} = \frac{3}{36},\ p_5 = p_9 = \frac{4}{36},\ p_6 = p_8 = \frac{5}{36} \text{ et } p_7 = \frac{6}{36}$$

Définition 4 : Fonction de répartition [Chabanol, p.23] :
On considère X une variable aléatoire réelle.
On appelle **fonction de répartition de** X la fonction :

$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ t & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leq t) \end{array} \right.$$

Proposition 5 : [Chabanol, p.23]
Soit X une variable aléatoire réelle.
* La fonction F_X est croissante.
* La fonction F_X est continue à droite et limitée à gauche.
* On a $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$.

Proposition 6 : [Chabanol, p.24]
Soit X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition F_X de X caractérise la loi $\mathbb{P}_X$ de X.

I.2 Variables aléatoires discrètes

Définition 7 : Variable aléatoire discrète [Chabanol, p.21] :
Lorsque E est au plus dénombrable on dit que X est une **variable aléatoire discrète** (et dans ce cas, on prend souvent $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$).

Proposition 8 : [Chabanol, p.21]
La loi d'une variable aléatoire discrète X est donnée par $\mathbb{P}_X = \sum_{x\in E} p_x\delta_x$, où $p_x = \mathbb{P}(X = x)$.

Corollaire 9 : [Chabanol, p.21]
Soit X une variable aléatoire discrète.
La loi de X est caractérisée par la famille $(p_x)_{x\in E}$.

Remarque 10 : [Chabanol, p.23]
La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète est en escalier.

Remarque 11 :
On trouvera en annexe quelques propriétés des loi discrètes usuelles.

I.3 Variables aléatoires à densité

Définition 12 : Variable aléatoire à densité [Chabanol, p.22] :
Une variable aléatoire réelle X est une **variable aléatoire à densité** lorsque $\mathbb{P}_X$ est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

Remarque 13 : [Chabanol, p.22]
Par le théorème de Radon-Nikodym, il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée **densité de** X, telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mathbb{P}_X(B) = \int_B f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque 14 :
On trouvera en annexe quelques propriétés des lois à densité usuelles.

Remarque 15 : [Chabanol, p.22]
Si X est une variable aléatoire réelle à densité, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Proposition 16 : [Chabanol, p.23]
Soit X une variable aléatoire réelle à densité.
F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée la densité f de X.

Remarque 17 : [Chabanol, p.23]
Il existe des variables aléatoires qui ne sont ni discrètes, ni à densité !
Par exemple pour $\Omega = [0; 1]$ la variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = \mathbb{1}_{[0;\frac{1}{2}]}(\omega) + \omega\mathbb{1}_{[\frac{1}{2};1]}(\omega)$ n'est ni à densité ni discrète.

II Vecteurs aléatoires et indépendance

II.1 Vecteurs aléatoires

Dans toute cette sous-partie, on considère X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et respectivement à valeurs dans $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$.

Définition 18 : Loi conjointe [Chabanol, p.25] :
On appelle **loi conjointe de** X **et** Y la loi du couple (X, Y) définie par :

$$\forall B \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2,\ \mathbb{P}_{(X,Y)}(B) = \mathbb{P}((X, Y) \in B)$$

Remarque 19 :
Si X et Y sont discrètes, alors la loi conjointe est caractérisée par l'application $\mathbb{P}$ définie sur $E_1 \times E_2$ par $(x, y) \longmapsto \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

En connaissant la loi du couple (X, Y) on peut retrouver la loi de X et de Y qui sont alors appelées **lois marginales** :
* Si X et Y sont discrètes, alors :

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y\in E_2} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \text{ et } \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x\in E_1} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

* Si (X, Y) est à valeurs dans $\mathbb{R}^{m+n}$ et de densité $f_{(X,Y)}$, alors la densité de X est :

$$\forall x \in \mathbb{R}^m,\ f_X(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{(X,Y)}(x, y)\mathrm{d}y$$

Remarque 20 : [Chabanol, p.25]
* Si X et Y sont à densité, alors (X, Y) ne l'est pas forcément (en effet, si $Y = X$, alors le vecteur (X, X) est à valeurs sur la droite $y = x$ qui est de mesure de Lebesgue nulle).
* On peut trouver les lois marginales à partir de la loi conjointe, mais la réciproque est fausse.

II.2 Indépendance

Définition 21 : Tribus indépendantes [Chabanol, p.26] :
On dit que des tribus $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n$ sont des **tribus indépendantes** lorsque tous leurs éléments sont indépendants.

Définition 22 : Variables aléatoires indépendantes [Chabanol, p.26] :
On dit que des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont des **variables aléatoires indépendantes** lorsque les tribus $\sigma(X_1), ..., \sigma(X_n)$ sont indépendantes.

Remarque 23 : [Chabanol, p.26]
n événements $A_1, ..., A_n$ sont indépendants si, et seulement si, les tribus $\sigma(A_1), ..., \sigma(A_n)$ sont indépendantes.

Théorème 24 : [Chabanol, p.27]
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires.
Les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes si, et seulement si, la loi du vecteur $(X_1, ..., X_n)$ est égale au produit des lois des X_i.

Proposition 25 : [Chabanol, p.27]
Deux variables aléatoires discrètes S et T sont indépendantes si, et seulement si, $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.

Proposition 26 : [Chabanol, p.27]
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles à densité à valeurs réelles.
$X_1, ..., X_n$ sont indépendantes si, et seulement si, la densité du vecteur $(X_1, ..., X_n)$ est égale au produit des densités des X_i.

III Espérance et caractérisation

III.1 Espérance et moments

Dans toute cette sous-partie, on considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.

Définition 27 : Espérance [Chabanol, p.35] :
Pour X intégrable appelle **espérance de** X la quantité :

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} x\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$$

Remarque 28 : [Chabanol, p.35]
* Si X est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors X est intégrable si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\mathbb{P}(X = n)$ converge. Auquel cas, on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n)$.
* Si X a une densité f, alors X est intégrable si, et seulement si, $x \longmapsto xf(x)$ l'est également. Auquel cas, on a $\mathbb{E}(X) = \int_\mathbb{R} xf(x)\mathrm{d}x$

Proposition 29 : [Chabanol, p.35]
Pour toute fonction mesurable $f : E \longrightarrow [0; +\infty]$, on a $\mathbb{E}(f(X)) = \int_E f(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$.

Proposition 30 : [Chabanol, p.37]
L'espérance est une application linéaire et positive.

Définition 31 : Moment d'ordre k [Chabanol, p.36] :
On considère k un entier naturel non nul.
Pour X^k est intégrable, on appelle **moment d'ordre** k **de** X la quantité $\mathbb{E}\left(X^k\right)$.

Définition 32 : Variance et écart-type [Chabanol, p.36] :
On suppose que X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2.
On appelle **variance de** X la quantité $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$ et **écart-type** la quantité $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Remarque 33 : [Chabanol, p.37]
* De manière informelle, $\mathrm{Var}(X)$ représente la dispersion de X autour de sa moyenne. De manière plus géométrique, en termes de norme dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la variance mesure la distance de X à son espérance : $\mathrm{Var}(X) = \|X - \mathbb{E}(X)\|_2^2$.
* On dit qu'une variable aléatoire est **réduite** lorsque sa variance vaut 1 et centrée lorsque son espérance vaut 0.

Proposition 34 : [Chabanol, p.37]
Si le moment d'ordre k existe, alors pour tout $k' \in [\![1; k]\!]$, le moment d'ordre k' existe également.

Proposition 35 : [Chabanol, p.37]
Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, alors :
* $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$ (formule de König-Huygens)
* Si $\mathrm{Var}(X) = 0$, alors X est constante presque-sûrement.
* $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.

Proposition 36 : Inégalité de Markov [Chabanol, p.38] :
Soit $a > 0$.
Si X admet un moment d'ordre 1, alors $\mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.

Proposition 37 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev [Chabanol, p.38] :
Soit $\varepsilon > 0$.
Si X admet un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$.

Remarque 38 : [Chabanol, p.38 + 39]
* L'espérance vérifie également le théorème de convergence monotone, le lemme de Fatou et de théorème de convergence dominée.
* On peut également utiliser l'inégalité de Hölder et de Cauchy-Schwarz sur l'espérance.

Théorème 39 : [Chabanol, p.39]
Si Y et Z sont indépendantes et intégrables, alors YZ est aussi intégrable et on a $\mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$.
Plus généralement, si Y et Z sont indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g mesurables, $f(Y)$ et $g(Z)$ sont indépendantes et $\mathbb{E}(f(Y)g(Z)) = \mathbb{E}(f(Y))\mathbb{E}(g(Z))$.

III.2 Deux nouvelles caractérisations de la loi

III.2.1 Séries génératrices

Ici, on considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 40 : Série génératrice [Deschamps, p.949] :
On appelle **série génératrice de** X la fonction G_X définie par $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

Remarque 41 : [Deschamps, p.949]
$*$ Par le théorème du transfert, $G_X(t)$ est défini si, et seulement si, $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ converge absolument et on a alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x)t^n$.
$*$ La série entière $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, elle est définie, converge normalement sur $\mathcal{D}_f(0, 1)$ et est continue sur $[-1; 1]$.

Proposition 42 : [Deschamps, p.949]
La loi de X est entièrement déterminée par G_X.
Plus précisément, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = n!G_X^{(n)}(0)$.

Exemple 43 : [Deschamps, p.950]
Si X est une variable aléatoire réelle de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors on a pour tout $t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ (on retrouve bien le fait que $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$).

Proposition 44 : [Chabanol, p.42]
Soient Y et Z deux variables aléatoires portées par $\mathbb{N}$.
Si Y et Z sont indépendantes, alors $G_{Y+Z} = G_Y G_Z$.

Exemple 45 : [Chabanol, p.42]
On considère Y et Z deux variables aléatoires indépendantes suivants respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.
La variable aléatoire $Y + Z$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Théorème 46 : [Deschamps, p.950]
X est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et on a alors $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.

Théorème 47 : [Deschamps, p.950]
X possède un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et on a alors $G_X''(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$.

Corollaire 48 : [Deschamps, p.950]
Si G_X est deux fois dérivable en 1, alors X possède un moment d'ordre 2 et on a alors $\mathbb{E}\left(X^2\right) = G_X''(1) + G_X'(1)$.

Proposition 49 : [Chabanol, p.42]
G_X est m fois dérivable à gauche en 1 si, et seulement si, X a un moment d'ordre m. Dans ce cas, on a $G_X^{(m)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)...(X-m+1))$

III.2.2 Fonctions caractéristiques

Ici, on considère X et Y deux variables aléatoires réelles.

Définition 50 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\Phi_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \end{array} \right.$$

Exemple 51 :
$*$ Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\Phi_X : t \longmapsto 1 - p + pe^{it}$.
$*$ Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\Phi_X : t \longmapsto \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
$*$ Si X suit une loi de Poisson de paramètre μ, alors $\Phi_X : t \longmapsto e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}$.

Proposition 52 : [Chabanol, p.45]
X et Y sont indépendantes si, et seulement si, la fonction caractéristique du couple est égale au produit des fonctions caractéristiques.

III.3 Application : les vecteurs gaussiens

Définition 53 : Vecteur aléatoire gaussien de dimension d [Chabanol, p.160] :
On considère $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_d)$ un vecteur aléatoire de dimension d dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
On dit que Z est un **vecteur aléatoire gaussien de dimension** d lorsque toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire réelle gaussienne.

Proposition 54 : [Chabanol, p.160]
Soit Z un vecteur aléatoire de dimension d admettant une espérance donnée par $m = (m_1, m_2, ..., m_d) \in \mathbb{R}^d$ et une matrice de dispersion D_Z.
Z est un vecteur gaussien si, et seulement si, sa fonction caractéristique Φ_Z est définie, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, par :

$$\Phi_Z(u) = e^{i<u,m>-\frac{1}{2}<u,D_Z u>}$$

Ce qu'on peut écrire avec la notation matricielle de la transposée :

$$\Phi_Z(u) = e^{iu^\intercal m - \frac{1}{2}u^\intercal D_Z u}$$

Définition 55 : Loi de Gauss-Laplace (ou loi normale sur $\mathbb{R}^d$) :
On appelle **loi de Gauss-Laplace de paramètres m et D** (ou **loi normale sur $\mathbb{R}^d$ de paramètres m et D**) la loi de probabilité d'un vecteur gaussien de dimension d d'espérance m et de matrice de dispersion D. Dans ce cas, on note $\mathcal{N}_d(m, D)$ cette probabilité.

La proposition ci-dessous sera souvent utilisée pour prouver que certains vecteurs sont gaussiens :

Proposition 56 : [Chabanol, p.159 + 161]
Si Z est un vecteur gaussien de dimension d, A une matrice rectangulaire $k \times d$ à coefficients réels et b un vecteur de dimension k, alors le vecteur aléatoire défini par $W = AZ + b$ est un vecteur gaussien de dimension k.
De plus, si $\mathcal{N}_d(m, D)$ est la loi de Z, la loi de W est $\mathcal{N}_k(Am + b, ADA^\intercal)$

Proposition 57 : [Chabanol, p.162]
Soit $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_d)$ un vecteur gaussien de dimension d.
La suite de variables aléatoires réelles $(Z_1, Z_2, ..., Z_d)$ est indépendante si, et seulement si, la matrice de dispersion D_Z de Z est diagonale.

Proposition 58 : [Chabanol, p.161]
Soient $m \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice carrée d'ordre d à coefficients réels, symétrique et de type positif.
Si D est inversible, alors la probabilité de Gauss d-dimensionnelle $\mathcal{N}_d(m, D)$ admet pour densité ρ sur $\mathbb{R}^d$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(D)}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T D^{-1}(x-m)}$$

IV Convergence en loi

IV.1 Définitions et théorème central limite

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X également une variable aléatoire réelle.

Définition 59 : Convergence en loi [Chabanol, p.57] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Développement 1 : [A] [cf. QUEFFELEC]

Lemme 60 : [Queffélec, p.542]
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Remarque 61 : [Chabanol, p.60]
La convergence en loi n'est pas compatible avec l'addition en général.
En effet, on peut prendre $X \rightsquigarrow \mathcal{R}\left(\frac{1}{2}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = Y_n = -X$.

Cependant, on a tout de même résultat suivant :

Proposition 62 : [Chabanol, p.60]
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^k$.
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, alors $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

Développement 2 : [B] [cf. QUEFFELEC]

Théorème 63 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :
On a équivalence entre :
* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
* La suite $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.

Théorème 64 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}_1(0,1)$$

IV.2 Applications

Corollaire 65 : [Chabanol, p.62]
Soit $a > 0$.
Avec les mêmes hypothèses que le théorème central limite, on a :

$$\mathbb{P}\left(\mu \in \left[\overline{X_n} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X_n} + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

Dans le cas de lois de Bernoulli, on obtient alors :

Corollaire 66 : [Chabanol, p.63]
Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors la suite $\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

On a également la généralisation suivante :

Proposition 67 : Delta-méthode [Chabanol, p.63] :
Soient $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dérivable en θ telle que $g'(\theta) \neq 0$.
S'il existe deux réels θ et σ tels que la suite $(\sqrt{n}(X_n - \theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}_1\left(0, \sigma^2\right)$, alors la suite $(\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}_1\left(0, \sigma^2 (g'(\theta))^2\right)$.

Développement 3 : [cf. FRANCINOU]

Lemme 68 : [Francinou, p.165]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La série $\sum \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \frac{1}{n!}$.

Proposition 69 : [Francinou, p.165]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 1.
Si l'on a $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ alors $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n \geq x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Théorème 70 : Formule de Stirling [Francinou, p.165] :
On a l'équivalent : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

V Annexe

V.1 Tableau des lois discrètes usuelles

Lois	Dirac de paramètre a	Uniforme-discrète de paramètre n	Bernoulli de paramètre p
Densités	δ_a	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k$	$(1-p)\delta_0 + p\delta_1$
Fonctions de répartition	$\mathbb{1}_{[a;+\infty[}(x)$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{[k;+\infty[}(x)$	$(1-p)\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) + p\mathbb{1}_{[1;+\infty[(x)}$
Fonctions caractéristiques	e^{ita}	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{itk}$	$1 - p + pe^{it}$
Espérances	a	$\frac{n+1}{2}$	p
Variances	0	$\frac{n^2-1}{12}$	$p(1-p)$

Lois	Rademacher de paramètre p	Binomiale de paramètres n et p
Densités	$(1-p)\delta_{-1} + p\delta_1$	$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\delta_k$
Fonctions de répartition	$(1-p)\mathbb{1}_{[-1;+\infty[}(x) + p\mathbb{1}_{[1;+\infty[(x)}$	$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\mathbb{1}_{[k;+\infty[}(x)$
Fonctions caractéristiques	$(1-p)e^{-it} + pe^{it}$	$\left(1-p+pe^{it}\right)^n$
Espérances	$2p-1$	np
Variances	$4p(1-p)$	$np(1-p)$

Lois	Géométrique de paramètre p	Poisson de paramètre α
Densités	$\sum_{k=1}^{+\infty}p(1-p)^{k-1}\delta_k$	$\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}\delta_k$
Fonctions de répartition	$\sum_{k=1}^{+\infty}p(1-p)^{k-1}\mathbb{1}_{[k;+\infty[}(x)$	$\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}\mathbb{1}_{[k;+\infty[}(x)$
Fonctions caractéristiques	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$	$e^{\alpha(e^{it}-1)}$
Espérances	$\frac{1}{p}$	α
Variances	$\frac{1-p}{p^2}$	α

V.2 Tableau des lois à densité usuelles

Lois	Uniforme discrète de paramètres a et b	Gamma de paramètres a et θ
Densités	$\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a;b]}(x)$	$\frac{\theta^a x^{a-1}e^{-\theta x}}{\Gamma(a)}\mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x)$
Fonctions de répartition	$\frac{x-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a;b[}(x)+\mathbb{1}_{[b;+\infty[}(x)$	$\int_{-\infty}^{x}\frac{\theta^a x^{a-1}e^{-\theta x}}{\Gamma(a)}\mathbb{1}_{]0;+\infty[}(t)\mathrm{d}t$
Fonctions caractéristiques	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)+\mathbb{1}_{\{0\}}(x)$	$\left(\frac{\theta}{\theta-it}\right)^a$
Espérances	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{a}{\theta}$
Variances	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{a}{\theta^2}$

Lois	Exponentielle de paramètre λ	Cauchy de paramètre a
Densités	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x)$	$\frac{a}{\pi\left(a^2+x^2\right)}$
Fonctions de répartition	$\left(1-e^{-\lambda x}\right)\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$	$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{Arct}\left(\frac{x}{a}\right)\right)$
Fonctions caractéristiques	$\frac{\lambda}{\lambda-it}$	$e^{-a\lvert t\rvert}$
Espérances	$\frac{1}{\lambda}$	$\emptyset$
Variances	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\emptyset$

Lois	Normale unidimensionnelle de paramètres a et b
Densités	$\frac{1}{\sqrt{2b\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2b}}$
Fonctions de répartition	$\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2b\pi}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2b}}\mathrm{d}t$
Fonctions caractéristiques	$e^{iat-\frac{bt^2}{2}}$
Espérances	a
Variances	b

Remarques sur le plan

— Savoir calculer une loi avec le théorème du transfert et connaître quelques propriétés des lois usuelles.

Liste des développements possibles

— Théorème de Weierstrass.

— Théorème de Lévy + TCL.

— Formule de Stirling par le TCL.

Bibliographie

— Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.

— Serge Francinou, *Oraux X-ENS, Mathématiques, Tome 6*.