 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p non nuls. Donner le cardinal de $\mathcal{F}(E,F)$ puis en déduire le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

2 - Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

Montrer que le nombre de p-combinaisons de E est le coefficient binomial $\dbinom{n}{p}$.

Énoncer et démontrer les relations sur les coefficients binomiaux par des arguments combinatoires.

3 - Énoncer et démontrer l'inégalité de Jensen.

II Exercices sur le dénombrement

Exercice 1 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1 - Combien y a-t-il de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;2]\!]$?
2 - Combien y a-t-il de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;3]\!]$?

Exercice 2 :
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Démontrer que le nombre de couples (A,B) de parties de E telles que $A \subseteq B$ est 3^n.

Exercice 3 :
1 - Soient m, n et p trois entiers naturels.
Démontrer la formule :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

Indication : On pourra considérer un ensemble de cardinal $m+n$, réunion d'un ensemble de cardinal m et d'un ensemble de cardinal n.
2 - En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n, la formule :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice 4 :
Étant donné un ensemble E, on appelle *recouvrement de* E un couple (A,B) tel que $A \cup B = E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera r_n le nombre de recouvrements d'une ensemble E ayant n éléments.
1 - Que valent r_0 et r_1 ?

À partir de maintenant, on considère $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble à n éléments.
2 - Pour $k \in [\![0;n]\!]$, si A est une partie de E à k éléments, combien y a-t-il de parties B telles que $A \cup B = E$?
3 - En déduire r_n sous la forme d'une somme puis simplifier cette somme. Ce résultat est-il cohérent avec le résultat trouvé à la question 1 ?

Exercice 5 :
Soient k, p et n trois entiers naturels tels que $0 \leq k \leq p \leq n$.
En dénombrant de deux manières les couples (A,B) de parties d'un ensemble de cardinal n telles que $\mathrm{Card}(A) = k$, $\mathrm{Card}(B) = p$ et $A \subseteq B$, montrer que :

$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{p-k}{n-k}$$

Exercice 6 :
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
1 - Combien y a-t-il de couples (X,Y) de parties disjointes de E ?
2 - Combien y a-t-il de couples (X,Y) de parties de E telles que $X \cap Y$ soit un singleton ?

III Exercices sur la convexité

Exercice 7 :
Soit $f : x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.
1 - Vérifier qu'il existe un réel c tel que f est concave sur $[0;c]$ et convexe sur $[c;+\infty[$.
2 - Représenter l'allure de la courbe représentative de f au voisinage du point $(c;f(c))$ (on fera figurer la tangente en ce point).

Exercice 8 :
Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
1 - Vérifier que f est convexe sur $]0;+\infty[$.
2 - Montrer que f est une bijection de $]0;+\infty[$ dans lui-même et déterminer g sa bijection réciproque.
3 - Vérifier que g est également convexe sur $]0;+\infty[$.

Exercice 9 :
1 - Montrer que $f : x \longmapsto \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1;+\infty[$.
2 - En déduire :

$$\forall x,y \in]1;+\infty[,\ \sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$$