Leçon 266 - Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

Extrait du rapport de jury

Le titre de cette leçon en 2023 était : Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.
Cette reformulation a pour objectif d'en faire une leçon de synthèse autour de cette notion incontournable en probabilités.
L'indépendance est centrale en probabilités et démarque cette théorie de celle de l'intégration. Les notions importantes de probabilité conditionnelle, d'indépendance de deux événements, d'indépendance mutuelle d'une suite d'événements, (voire de celle d'une suite de tribus), d'indépendance de familles de variables aléatoires, doivent être connues.
Le programme fournit plusieurs utilisations élémentaires de l'indépendance : lien avec l'espérance, la variance, la covariance, le coefficient de corrélation, loi faible des grands nombres, lemme de Borel-Cantelli, stabilité de certaines lois (normale, Cauchy). Des thèmes pouvant également être abordés sont la loi forte des grands nombres ou le théorème central limite, ou l'étude de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.
Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi du 0-1 de Kolmogorov, la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les vecteurs gaussiens, le théorème de Cochran.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 266 intitulée : "Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.". L'indépendance est une notion probabiliste qualifiant de manière intuitive des événements aléatoires n'ayant aucune influence l'un sur l'autre. Cette notion permet également de simplifier certains problèmes de probabilités en termes de modélisation et de calculs de loi (comme on le verra).
Dans une première partie, on s'intéresse à la notion d'indépendance suivant plusieurs contextes. On commence par le cas des événements en donnant la définition de deux événements indépendants ainsi que le cas de n événements. On en profite pour signaler qu'il existe la notion d'indépendance deux à deux qui est moins forte et on termine ce premier point par deux propriétés. Dans un deuxième point on regarde l'indépendance de tribus puis de variables aléatoires ainsi que des premières caractérisations de l'indépendance dans le cas général (en étudiant les lois), puis dans le cas discret et à densité.
Dans une deuxième partie on s'intéresse aux premières propriétés autour de l'indépendance en commençant par quelques critères d'indépendance via l'étude de la covariance puis du coefficient de corrélation. Cependant ces résultats ne caractérisent pas la loi et il nous faut faire appel à la fonction génératrice pour obtenir un tel résultat. On introduit alors la fonction génératrice et on montre que la loi est entièrement déterminée par la fonction génératrice et on donne des résultats généraux au travers de l'indépendance, de l'espérance et de la variance. Puis enfin on donne la définition de la fonction caractéristique ainsi qu'une caractérisation très utile en pratique de l'indépendance via ces dernières. Dans une deuxième sous-partie on regarde comment se comporte la somme de deux variables aléatoires indépendantes : on obtient les propositions 36 et 37 qui sont très utiles (car dans le cas contraire il est plus difficile de connaître la loi d'une somme) et on donne un tableau qui résume les cas usuels de somme de variables aléatoires indépendantes. On remarque au passage que certaines familles ne sont pas stables par somme (les lois exponentielles par exemple). On termine cette partie avec une application en démontrant le théorème de Weierstrass du point de vue des probabilités.
Dans une troisième partie on s'intéresse à la notion d'indépendance au travers des convergences. On commence tout d'abord par parler des deux lemmes de Borel-Cantelli (que l'on peut résumer dans la loi du 0-1 de Borel) et qui donnent des résultats sur des événements de la tribu asymptotique. Dans un deuxième point on s'intéresse à la loi forte des grands nombres en commençant par le cas de la loi faible avant d'énoncer la loi forte des grands nombres qui donne plusieurs corollaires importants comme par exemple le phénomène de stabilisation des fréquences qui est souvent utilisé pour introduire les probabilités. Enfin, on conclut cette partie avec le théorème central limite en commençant par énoncer le théorème puis en donnant des applications en statistique (création d'intervalles de confiance et delta-méthode) puis une application en analyse où l'on démontre la formule de Stirling avec les probabilités.
Finalement, on termine cette leçon par des exemples particuliers. On commence par

le cas des vecteurs gaussiens (qui sont également très utilisés en statistiques) en en donnant la définition ainsi que certains résultats avant de donner des résultats sur l'indépendance avec la proposition 69 ainsi que la notion de vecteurs aléatoires non-corrélés. Pour conclure, on parle du processus de Galton-Watson en rappelant le fonctionnement de ce processus avant de démontrer quelques résultats sur ce dernier et notamment la convergence.

Plan général

I - Notion(s) d'indépendance
1 - Événements indépendants
2 - Indépendance de tribus et de variables aléatoires

II - Premières propriétés autour de l'indépendance
1 - Critères d'indépendance
2 - Somme de variables aléatoires indépendantes

III - Application de l'indépendance aux convergences
1 - Lemmes de Borel-Cantelli
2 - Lois des grands nombres
3 - Théorème central limite

IV - Exemples particuliers
1 - Vecteurs gaussiens
2 - Processus de Galton-Watson

V - Annexe
1 - Illustration graphique de G et de ses points fixes

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, n, d des entiers naturels non nuls et X, Y deux variables aléatoires réelles.

I Notion(s) d'indépendance

I.1 Événements indépendants

Définition 1 : Événements indépendants [Chabanol, p.15] :
On dit que deux événements $A, B \in \mathcal{F}$ sont des **événements indépendants** lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Plus généralement, on a :

Définition 2 : Événements indépendants [Chabanol, p.15] :
On dit que n événements $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ sont des **événements indépendants** lorsque pour tout sous-ensemble non vide $\{j_1, ..., j_p\}$ de $[\![1; n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(A_{j_1} \cap ... \cap A_{j_p}) = \mathbb{P}(A_{j_1})...\mathbb{P}(A_{j_p})$$

Remarque 3 : [Chabanol, p.15]
Ceci n'est pas équivalent à la seule égalité $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)...\mathbb{P}(A_n)$! Ni à l'indépendance pour chaque paire d'élément (on parle dans ce cas **d'événements deux-à-deux indépendants**).

Exemple 4 : [Chabanol, p.15]
Considérons l'espace correspondant à deux lancers de pile ou face et prenons les événements $A = \{\text{pile au premier lancer}\}$, $B = \{\text{pile au second lancer}\}$ et enfin $C = \{\text{même résultats aux deux lancers}\}$.
Les 3 événements sont alors deux à deux indépendants mais ne sont pas indépendants.

Définition 5 : Famille d'événements indépendants :
On dit que deux familles événements $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ sont des **familles d'événements indépendants** lorsque tout élément de $\mathcal{A}$ est indépendant de tout élément de $\mathcal{B}$.

Proposition 6 : [Chabanol, p.15]
n événements $A_1, ..., A_n$ sont indépendants si, et seulement si :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap ... \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)...\mathbb{P}(B_n)$$

pour tout choix des $B_i \in \sigma(A_i) = \{\emptyset, \Omega, A_i, A_i^c\}$.

Proposition 7 : [Chabanol, p.15]
Si A et B sont deux événements indépendants, alors A et B^c sont indépendants.
En particulier, événements de probabilité nulle et de probabilité 1 sont indépendants de tous les autres événements.

I.2 Indépendance de tribus et de variables aléatoires

Définition 8 : Tribus indépendantes [Chabanol, p.26] :
On dit que des tribus $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n$ sont des **tribus indépendantes** lorsque tous leurs éléments sont indépendants.

Définition 9 : Variables aléatoires indépendantes [Chabanol, p.26] :
On dit que des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont des **variables aléatoires indépendantes** lorsque les tribus $\sigma(X_1), ..., \sigma(X_n)$ sont indépendantes.

Remarque 10 : [Chabanol, p.26]
n événements $A_1, ..., A_n$ sont indépendants si, et seulement si, $\sigma(A_1), ..., \sigma(A_n)$ sont indépendants.

Théorème 11 : [Chabanol, p.27]
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires.
Les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes si, et seulement si, la loi du vecteur $(X_1, ..., X_n)$ est égale au produit des lois des X_i.

Proposition 12 : [Chabanol, p.27]
Deux variables aléatoires discrètes S et T sont indépendantes si, et seulement si, $\mathbb{P}((S = x) \cap (T = y)) = \mathbb{P}(S = x)\mathbb{P}(T = y)$.

Proposition 13 : [Chabanol, p.27]
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles à densité.
$X_1, ..., X_n$ sont indépendantes si, et seulement si, la densité du vecteur $(X_1, ..., X_n)$ est égale au produit des densités des X_i.

II Premières propriétés autour de l'indépendance

II.1 Critères d'indépendance

Définition 14 : Covariance [Chabanol, p.39] :
On appelle **covariance de X et Y** la quantité (lorsqu'elle existe) définie par $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$.

Théorème 15 : [Chabanol, p.39]
Si X et Y sont indépendantes et intégrables, alors XY est aussi intégrable et on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Plus généralement, si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g mesurables, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes et $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$.

Proposition 16 : [Chabanol, p.39]
Si X et Y sont indépendantes et admettent une covariance, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Remarque 17 : [Chabanol, p.40]
Attention, la réciproque est fausse ! En effet, si l'on considère X et Y telles que :

$$\mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = -1)) = \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 1)) = \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 0)) = 0$$

$$\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = -1)) = \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{4} \text{ et } \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{2}$$

alors la covariance est nulle sans que X et Y soient indépendantes.

Théorème 18 : [Chabanol, p.40]
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.
On a :

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

En particulier, si les X_i sont deux à deux indépendants et identiquement distribuées, alors :

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n^2 \, \mathrm{Var}(X_1)$$

Définition 19 : Coefficient de corrélation [Chabanol, p.40] :
On appelle **coefficient de corrélation de X et Y** la quantité (lorsqu'elle existe) définie par $\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$. On dit de plus que X et Y sont **non-corrélées** lorsque $\rho(X, Y) = 0$.

Remarque 20 : [Chabanol, p.40]
Si X et Y sont indépendantes, alors leur coefficient de corrélation est nul. Cependant la réciproque est fausse ! Ainsi le coefficient de corrélation donne une information plus ou moins précise sur l'indépendance de deux variables aléatoires.

Proposition 21 : [Chabanol, p.41]
On a $\rho(X, Y) \in [-1; 1]$ et $\rho(X, Y) = \pm 1$ si, et seulement si, Y est une fonction affine de X.

Dans toute la suite de cette sous-partie et jusqu'à la notion de fonction caractéristique, on suppose que X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 22 : Série génératrice [Chabanol, p.41] :
On appelle **série génératrice de** X la fonction G_X définie par :

$$\forall t \in [-1;1],\ G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)t^k$$

Remarque 23 : [Deschamps, p.949]
$*$ Par le théorème du transfert, $G_X(t)$ est défini si, et seulement si, $\sum \mathbb{P}(X=n)t^n$ converge absolument et on a alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=x)t^n$.
$*$ La série entière $\sum \mathbb{P}(X=n)t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, elle est définie, converge normalement sur $\mathcal{D}_f(0,1)$ et est continue sur $[-1;1]$.

Proposition 24 : [Deschamps, p.949]
La loi de X est entièrement déterminée par G_X.
Plus précisément, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = n!G_X^{(n)}(0)$.

Proposition 25 : [Chabanol, p.42]
Soient U et V deux variables aléatoires portées par $\mathbb{N}$.
Si U et V sont indépendantes, alors $G_{U+V} = G_U G_V$.

Exemple 26 : [Chabanol, p.42]
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes suivants respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.
Alors la variable aléatoire $U+V$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Théorème 27 : [Deschamps, p.950]
X est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et on a alors $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

Théorème 28 : [Deschamps, p.950]
X possède un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et on a alors $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$.

Corollaire 29 : [Deschamps, p.950]
Si G_X est deux fois dérivable en 1, alors X possède un moment d'ordre 2 et on a alors $\mathbb{E}\left(X^2\right) = G''_X(1) + G'_X(1)$.

Proposition 30 : [Chabanol, p.42]
Soit Y une variable aléatoire réelle portée par $\mathbb{N}$.
G_Y est m fois dérivable à gauche en 1 si, et seulement si, X admet un moment d'ordre m. Dans ce cas, on a $G_X^{(m)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)...(X-m+1))$

Remarque 31 : [Chabanol, p.42]
On retrouve ainsi les résultats ci-dessus sur l'espérance et la variance.

Théorème 32 : [Chabanol, p.43]
Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des X_i.
Si l'on pose $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$, alors la fonction génératrice de S_N vérifie la relation $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$.
De plus, si X_1 et N admettent une espérance, alors S_N admet une espérance et $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

Exemple 33 : [Chabanol, p.42]
Si N suit une loi de Poisson de paramètre λ et les X_i suivent des lois de Bernoulli de paramètre p, on a alors S qui suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

Définition 34 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\Phi_X : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \end{array}\right.$$

Proposition 35 : [Chabanol, p.45]
X et Y sont indépendantes si, et seulement si, la fonction caractéristique du couple est égale au produit des fonctions caractéristiques.

II.2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Dans toute cette sous-partie, on suppose que X et Y sont indépendantes.

Proposition 36 : [Chabanol, p.28]
Si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$$

Proposition 37 : [Chabanol, p.29]
Si X et Y sont à densité et indépendantes, alors :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ (f_X * f_Y)(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)F_Y(z-x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} F_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

Lois	X	Y	$X+Y$
Gamma	$\gamma(a_1,p)$	$\gamma(a_2,p)$	$\gamma(a_1+a_2,p)$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\gamma(2,\lambda)$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathcal{P}(\mu)$	$\mathcal{P}(\lambda+\mu)$
Bernoulli	$\mathcal{B}(1,p)$	$\mathcal{B}(1,p)$	$\mathcal{B}(2,p)$
Binomiale	$\mathcal{B}(n_1,p)$	$\mathcal{B}(n_2,p)$	$\mathcal{B}(n_1+n_2,p)$
Normale	$\mathcal{N}_1\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$	$\mathcal{N}_1\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$	$\mathcal{N}_1\left(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$

Remarque 38 :
On remarque que les lois exponentielles ne sont pas stables par somme. Cependant, on peut les "plonger" dans les lois gamma qui elles sont stables par somme.

Développement 1 : [cf. DESCHAMPS]

Lemme 39 : [Deschamps, p.994]
Soient f une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \in [0;1]$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(x)$ et $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall (t,u) \in [0;1]^2,\ |f(t)-f(u)| \leq M(t-u)^2 + \varepsilon$$

En particulier, on a $|\mathbb{E}(f(Y_n)) - f(x)| \leq M\,\mathrm{Var}(Y_n) + \varepsilon \leq \frac{M}{4n} + \varepsilon$

Théorème 40 : Théorème de Weierstrass [Deschamps, p.994]
Si l'on considère les polynômes de Bernstein définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{k}{n} x^k(1-x)^{n-k}$$

alors la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

Corollaire 41 : [Deschamps, p.530]
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle sur $[0;1]$.

III Application de l'indépendance aux convergences

III.1 Lemmes de Borel-Cantelli

Lemme 42 : Lemme I de Borel-Cantelli [Chabanol, p.16]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
Si $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$ (c'est-à-dire, presque-sûrement, seulement un nombre fini des événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réalisé).

Lemme 43 : Lemme II de Borel-Cantelli [Chabanol, p.16]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants.
Si $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n\right) = 1$ (c'est-à-dire, presque-sûrement, un nombre infini des événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réalisé).

Remarque 44 :
∗ L'hypothèse d'indépendance n'est pas utile dans le lemme I de Borel-Cantelli mais nécessaire dans le lemme II de Borel-Cantelli. En effet, si l'on considère U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0;1]$ et que l'on pose $A_n = \left\{U \leq \frac{1}{n+1}\right\}$, alors on a $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$ alors que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
∗ Dans le cas d'une suite infinie d'événements indépendants, on peut résumer les lemmes I et II de Borel-Cantelli en une seule proposition.

Proposition 45 : Loi du 0-1 de Borel :
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants.
On a les équivalences :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n) = +\infty \iff \mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n\right) = 1 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n) < +\infty \iff \mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n\right) = 0$$

Proposition 46 : [Gourdon, p.332]
Il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{\text{Multiples de } n\}) = \frac{1}{n}$.

III.2 Lois des grands nombres

Théorème 47 : Loi faible des grands nombres [Chabanol, p.55] :
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.
Si $\mathbb{E}\left(Y_1^2\right) < +\infty$, alors $\left(\overline{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $\mathbb{E}(Y_1)$.

Remarque 48 : [Chabanol, p.56]
Le résultat reste vrai sous des hypothèses moins fortes. En effet, on peut demander que la suite $\left(\mathbb{E}(Y_n^2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et que les espérances de chaque Y_i sont identiques ou bien encore que les Y_i soient juste deux à deux indépendants.

Proposition 49 : [Chabanol, p.56]
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.
Si $\mathbb{E}\left(Y_1^4\right) < +\infty$, alors $\left(\overline{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers $\mathbb{E}(Y_1)$.

Théorème 50 : Loi forte des grands nombres [Chabanol, p.53] [ADMIS] :
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.
Si les Y_i sont intégrables, alors $\left(\overline{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers $\mathbb{E}(Y_1)$.

Corollaire 51 : [Chabanol, p.53]
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements indépendants de même probabilité, alors on a : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} \mathbb{P}(A_1)$.

Exemple 52 : [Chabanol, p.53]
Si on lance une infinité de fois un dé et que l'on note A_n l'événement "Avoir un 6 au n-ième lancer", alors la proportion de "6" obtenus au cours des n premiers lancers tend vers $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{6}$.

Remarque 53 : [Chabanol, p.173]
La moyenne empirique $\overline{Y_n}$ est un estimateur sans biais et (fortement) convergent de $\mathbb{E}(Y_1)$ par la loi forte des grands nombres.

III.3 Théorème central-limite

Théorème 54 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}_1(0,1)$$

Corollaire 55 : [Chabanol, p.62]
Soit $a > 0$.
Avec les même hypothèses que le théorème central limite, on a :

$$\mathbb{P}\left(\mu \in \left[\overline{X_n} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X_n} + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Dans le cas de lois de Bernoulli, on obtient alors :

Corollaire 56 : [Chabanol, p.63]
Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors la suite $\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

On a également la généralisation suivante :

Proposition 57 : Delta-méthode [Chabanol, p.63] :
Soient $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dérivable en θ telle que $g'(\theta) \neq 0$.
S'il existe deux réels θ et σ tels que la suite $(\sqrt{n}(X_n - \theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}_1\left(0,\sigma^2\right)$, alors la suite $(\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}_1\left(0, \sigma^2(g'(\theta))^2\right)$.

Développement 2 : [cf. FRANCINOU]

Lemme 58 : [Francinou, p.165]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La série $\sum \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \frac{1}{n!}$.

Proposition 59 : [Francinou, p.165]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 1.
Si l'on a $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ alors $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n \geq x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Théorème 60 : Formule de Stirling [Francinou, p.165] :
On a l'équivalent : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

IV Exemples particuliers

IV.1 Vecteurs gaussiens

Définition 61 : Vecteur aléatoire gaussien de dimension d [Chabanol, p.160] :
On considère $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_d)$ un vecteur aléatoire de dimension d dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
On dit que Z est un **vecteur aléatoire gaussien de dimension** d lorsque toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire réelle gaussienne.

Exemple 62 : [Chabanol, p.160]
Une variable aléatoire réelle gaussienne est en particulier un vecteur gaussien de dimension 1.

Proposition 63 :
Soit $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_d)$ une suite de variables aléatoires réelles.
Si le vecteur aléatoire X est un vecteur aléatoire gaussien de dimension d, alors, pour tout $k \in [\![1; d]\!]$, X_k est une variable aléatoire réelle gaussienne.

Remarque 64 : [Chabanol, p.160]
Attention, la réciproque de la proposition précédente est fausse ! En effet, si l'on considère $X \rightsquigarrow \mathcal{N}_1(0,1)$ et $\mathcal{E} \rightsquigarrow \mathcal{R}\left(\frac{1}{2}\right)$ indépendante de X, et que l'on pose la variable aléatoire réelle $Y := \mathcal{E}X$, alors $X = (Y, \mathcal{E}Y)$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont gaussiennes mais la combinaison linéaire $Y + \mathcal{E}Y$ ne l'est pas...

En revanche, si on rajoute une hypothèse d'indépendance sur la suite des composantes du vecteur X, on obtient un procédé simple de construction de vecteurs gaussiens de dimension d grâce à la proposition suivante :

Proposition 65 :
Soit $(Z_1, Z_2, ..., Z_d)$ une suite indépendante de variables aléatoires réelles.
Le vecteur aléatoire $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_d)$ est un vecteur gaussien de dimension d si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1; d]\!]$, Z_k est une variable aléatoire réelle gaussienne.

Proposition 66 : [Chabanol, p.160]
Soit Z un vecteur aléatoire de dimension d admettant une espérance donnée par $m = (m_1, m_2, ..., m_d) \in \mathbb{R}^d$ et une matrice de dispersion D_Z.
Z est un vecteur gaussien si, et seulement si, sa fonction caractéristique Φ_Z est définie, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, par :

$$\Phi_Z(u) = e^{i<u,m> - \frac{1}{2}<u, D_Z u>}$$

Ce qu'on peut écrire avec la notation matricielle de la transposée :

$$\Phi_Z(u) = e^{iu^\intercal m - \frac{1}{2}u^\intercal D_Z u}$$

Définition 67 : Loi de Gauss-Laplace (ou loi normale sur $\mathbb{R}^d$) :
On appelle **loi de Gauss-Laplace de paramètres** m **et** D (ou **loi normale sur** $\mathbb{R}^d$ **de paramètres** m **et** D) la loi de probabilité d'un vecteur gaussien de dimension d d'espérance m et de matrice de dispersion D. Dans ce cas, on note $\mathcal{N}_d(m, D)$ cette probabilité.

La proposition ci-dessous sera souvent utilisée pour prouver que certains vecteurs sont gaussiens :

Proposition 68 : [Chabanol, p.159 + 161]
Si Z est un vecteur gaussien de dimension d, A une matrice rectangulaire $k \times d$ à coefficients réels et b un vecteur de dimension k, alors le vecteur aléatoire défini par $W = AZ + b$ est un vecteur gaussien de dimension k.
De plus, si $\mathcal{N}_d(m, D)$ est la loi de Z, la loi de W est $\mathcal{N}_k(Am + b, ADA^\intercal)$

Proposition 69 : [Chabanol, p.162]
Soit $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_d)$ un vecteur gaussien de dimension d.
La suite de variables aléatoires réelles $(Z_1, Z_2, ..., Z_d)$ est indépendante si, et seulement si, la matrice de dispersion D_Z de Z est diagonale.

Définition 70 : Vecteurs aléatoires non-corrélés :
Deux vecteurs aléatoires W et Z de dimensions quelconques sont dits **non-corrélés** si la **matrice d'intercorrélation** :

$$I_{W,Z} = \mathbb{E}\left((W - \mathbb{E}(W))(Z - \mathbb{E}(Z))^\intercal\right)$$

est égale à la matrice nulle.

Proposition 71 :
Soient W et Z deux vecteurs aléatoires de dimensions respectives d et k.
Si D_U est la matrice de dispersion du vecteur concaténé $U := (W, Z)$ de dimension $d + k$, D_X et D_Y les matrices de dispersion respectives de X et Y, alors :
$*$ La matrice d'intercorrélation $I_{W,Z}$ est une matrice rectangulaire à d lignes et k colonnes dont le coefficient général d'indice (i, j), où $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq k$, est : $\mathrm{Cov}(W_i, Z_j)$.

$*$ $I_{Z,W} = I_{W,Z}^\intercal$, $D_W = I_{W,W}$ et D_U est la matrice par blocs :

$$D_U = \begin{pmatrix} D_W & I_{W,Z} \\ I_{Z,W} & D_Z \end{pmatrix}$$

Proposition 72 :
Soient $W = (W_1, W_2, ..., W_d)$ et $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_K)$ deux vecteurs aléatoires de dimension respectives d et k tels que le vecteur concaténé $u := (W_1, W_2, ..., W_d, Z_1, Z_2, ..., Z_k)$ est gaussien de dimension $d + k$.
Le couple de vecteurs aléatoires (W, Z) est indépendant si, et seulement si, les vecteurs W et Z sont non-corrélés.

Proposition 73 : [Chabanol, p.161]
Soient $m \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice carrée d'ordre d à coefficients réels, symétrique et de type positif.
Si D est inversible, alors la probabilité de Gauss d-dimensionnelle $\mathcal{N}_d(m, D)$ admet pour densité ρ sur $\mathbb{R}^d$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(D)}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T D^{-1}(x-m)}$$

Définition 74 : Loi de Gauss dégénérée et non-dégénérée :
Si la matrice D est inversible, on dit que la loi de Gauss (ou le vecteur gaussien) $\mathcal{N}_d(m, D)$ est **non-dégénéré**. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est **dégénérée**.

Exemple 75 :
Une variable aléatoire réelle gaussienne est non dégénérée si, et seulement si, sa loi est une loi normale de variance non nulle.
Donc une variable aléatoire réelle gaussienne dégénérée est une variable de loi δ_m, où m est un réel quelconque.

IV.2 Processus de Galton-Watson

Dans toute cette sous-partie, on considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi notée μ admettant une espérance notée m, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et on suppose que $p_0 \in]0;1[$.

Soit $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de X. On définit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

La variable aléatoire Z_n représente le nombre d'individus à la génération n. On note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction la probabilité d'extinction à l'instant n, $P_{\text{ext}} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction de la population et G_n la fonction génératrice de Z_n.

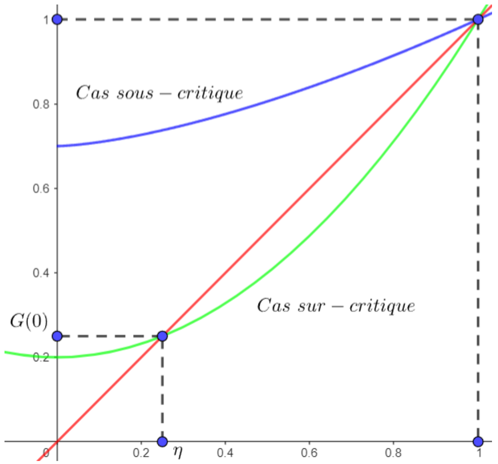
Lemme 76 : [Gourdon, p.345]
$*$ G est bien définie, de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $[0;1]$.
$*$ G est strictement croissante sur $[0;1]$.
$*$ G est strictement convexe sur $]0;1]$ si, et seulement si $p_0 + p_1 < 1$.

Proposition 77 : [Gourdon, p.376]
$*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G \circ G \circ \ldots \circ G$ (n fois), avec G la série génératrice de X.
$*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.
$*$ De plus, on a : $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$.

Théorème 78 : [Gourdon, p.376]
$*$ P_{ext} est la plus petite solution de l'équation $G(s) = s$ sur $]0;1]$.
$*$ Si $m \leq 1$ (cas sous-critique et critique), alors $P_{ext} = 1$.
$*$ Si $m > 1$ (cas super-critique), alors P_{ext} est l'unique point fixe de G sur $]0;1[$.

V Annexe

V.1 Représentation graphique de G et de ses points fixes



Remarques sur le plan

— Il faut savoir en quoi la notion d'indépendance est importante et cruciale en probabilités et en connaître différentes caractérisations.

Liste des développements possibles

— Théorème de Weierstrass.

— Formule de Stirling par le TCL.

— Processus de Galton-Watson.

Bibliographie

— Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.

— Serge Francinou, *Oraux X-ENS, Mathématiques, Tome 6*.