 v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 37 banque CCINP :
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose :

$$\forall f \in E,\ N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \text{ et } N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

a) Démontrer que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.
b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

2 - Exercice 54 banque CCINP :
Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.
a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
Pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on pose $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.
b) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
c) Montrer que, pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

3 - Démontrer que tout boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe.

II Exercices

Exercice 1 :
Soit E l'espace vectoriel des suites presque nulles.
Pour tout $a \in E$, on pose : $\|a\| = \max\limits_{k\in\mathbb{N}}|a_k|$.
1 - Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2 - Pour $n \in \mathbb{N}$, on note e_n la suite dont tous les termes sont nuls sauf le terme d'indice n qui vaut 1.
Montrer que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas au sens de $\|\cdot\|$.

Exercice 2 :
Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.
Pour tout $f \in E$, on note :

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \text{ et } N_\infty(f) = \max_{x\in[0;1]}|f(x)|$$

1 - Montrer que N est une norme sur E.
2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(\pi n x)$$

Calculer $N_\infty(f_n)$ et $N(f_n)$ en fonction de n.
3 - Montrer que les normes N et N_∞ ne sont pas équivalentes.
4 -Montrer que :

$$\forall f \in E,\ N_\infty(f) \leq N(f)$$

Indication : On remarquera que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) - f(0) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 3 :
On note $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ et pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \text{ et } N(f) = \int_0^1 t|f(t)|\mathrm{d}t$$

1 - Montrer que N est une norme sur E.
2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f_n : t \longmapsto \begin{cases} n(1-nt) & \text{si } t \in \left[0;\frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $N(f_n)$ en fonction de n et vérifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle au sens de N.
3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\|f_n\|_1$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4 :
Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les normes N_1 et N_2 définies par :

$$N_1(P) = \int_0^1 |P(t)|\mathrm{d}t \text{ et } N_2(P) = \int_0^2 |P(t)|\mathrm{d}t$$

Montrer que N_1 est dominée par N_2 mais que N_2 n'est pas dominée par N_1.

Exercice 5 :
Soit E un espace vectoriel normé réel. Montrer que tout sous-espace affine de E est une partie convexe.

Exercice 6 :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_{n+1})$ une $(n+1)$-liste de scalaires deux à deux distincts.
Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}[X]$ en posant :

$$\|P\| = \max_{k\in[\![1;n+1]\!]}|P(a_k)|$$