v.hanecart@orange.fr

I Questions de cours

1 - Exercice 59 banque CCINP :
Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.
a) Démontrer que f est bijective de deux manières : sans utiliser puis en utilisant une matrice de f.
b) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : Si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3 - L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2 - Exercice 71 banque CCINP :
Soient P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.
a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
b) Soient p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D et $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

3 - Exercice 73 banque CCINP :
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
b) En déduire une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonale.
c) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

II Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 :
Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
1 - Déterminer les valeurs propres de A.
2 - Préciser une matrice P telle que $D = PAP^{-1}$ soit diagonale.
3 - Préciser la limite de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 :
On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{ll} x_{n+1} & = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{4}z_n \\ y_{n+1} & = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{4}z_n \\ z_{n+1} & = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2}z_n \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}^\top$.
1 - Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$$

2 - Vérifier que si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter A^n en fonction de P, D, P^{-1} et n.
4 - En déduire que les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et préciser leurs limites en fonction de x_0, y_0 et z_0.

Exercice 3 :
1 - La matrice $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

2 - Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et expliciter une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.

III Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 :
1 - Montrer qu'une matrice nilpotente est de trace nulle.
2 - Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer, sans calculer le polynôme caractéristique, qu'il existe un réel λ tel que $A - \lambda I_3$ soit nilpotente.

Exercice 5 :
Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
1 - Montrer que -1 est valeur propre de A et préciser le sous-espace propre associé.

v.hanecart@orange.fr

2 - Montrer que A et T sont semblables.
3 - En déduire le polynôme caractéristique de A.

Exercice 6 :

Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ de rang 1.
1 - Justifier que 0 est valeur propre de f et préciser la dimension de $E_0(f)$. En déduire que f est trigonalisable.
2 - En déduire que f est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(f) \neq 0$.
3 - Montrer que $f^2 = \mathrm{Tr}(f)f$ (on discutera les cas suivant la valeur de $\mathrm{Tr}(f)$).