Leçon 236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Extrait du rapport de jury

Les exemples proposés par les candidates et candidats doivent mettre en oeuvre des techniques diversifiées : méthodes élémentaires, intégrales dépendant d'un paramètre, utilisation de la formule des résidus, de sommes de Riemann, voire de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$.
Il est attendu par le jury quelques exemples significatifs de calculs d'intégrales multiples (utilisation du théorème de Fubini, de changements de variables, etc.).
Les résultats d'analyse ou de théorie des probabilités dont la preuve utilise crucialement un calcul spécifique d'intégrale, (à pur titre indicatif, celle du théorème d'inversion de Fourier basée sur la transformée de Fourier d'une gaussienne) peuvent constituer de bonnes sources de développements.
Il est enfin possible de proposer une ou deux méthodes pertinentes de calcul approché d'intégrales.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 236 intitulée : "Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.". L'intégrale a d'abord définie par Cauchy et Riemann, puis généralisée de manière fonctionnelle par Lebesgue, pour enfin être au coeur de bien des domaines où les variations sur les définitions ou les propriétés de l'intégrale font toute la richesse de ce procédé de sommation généralisé. De plus, calculer la valeur d'une intégrale est une question fréquente pour laquelle nous n'avons pas de procédure automatique donnant la solution : on a donc besoin de nombreux outils de calculs.
On commence dans une première partie par calculer une intégrale au sens de Riemann ainsi que Riemann généralisé (on distinguera les deux cas car les énoncés changent légèrement). Dans un premier point on parle rapidement du cas des sommes de Riemann qui sont à la base de la définition de l'intégrale de Riemann qui est assez peu utilisées pour calculer une intégrale. Dans un deuxième point on passe au calcul d'intégrale grâce à un calcul direct de primitives : cette technique est très directe mais n'est pas la plus utilisable en pratique. On passe ensuite à des techniques un peu plus élaborées avec tout d'abord l'intégration par partie qui consiste à reconnaître un certain type d'expression : cette technique permet notamment de calculer les intégrales de Wallis par exemple. On a ensuite le changement de variables qui permet de changer la forme de l'intégrale et de la rendre sous une forme plus agréable. On conclut cette première partie avec le cas des fractions rationnelles où la calcul d'intégrales utilise la décomposition en éléments simples.
Dans une deuxième partie on va utiliser la théorie de la mesure avec des outils encore plus élaborés dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. On commence avec les deux premiers points par les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée : ces deux théorèmes sont très agréables à utiliser car ne nécessitent que peu d'hypothèses et donne un résultat puissant qui n'est pas forcément vrai dans le cadre de l'intégrale de Riemann. On enchaîne avec le changement de variables dans le cas multidimensionnel où l'on donne le changement en coordonnées polaires qui est l'un des plus utilisés (notamment en physique) et qui permet par exemple de calculer l'intégrale de Gauss. On conclut cette deuxième partie avec le théorème de Fubini qui permet de réarranger le sens des intégrales sous certaines hypothèses afin de mieux les calculer.
Dans une troisième partie on s'intéresse aux intégrales à paramètres. Dans une première sous-partie on énonce les théorèmes de continuité, de dérivabilité et d'holomorphie sous le signe intégral qui permettent sous certaines hypothèses de voir s'il existe un transfert de régularité entre l'intégrande et l'intégrale. Dans une deuxième sous-partie on donne des applications de ces théorèmes avec la transformée de Laplace, une autre manière de calculer l'intégrale de Gauss et on termine par la régularité de la fonction Γ. Enfin une autre application de ces théorèmes est d'obtenir des équations différentielles qui donnent une forme plus explicite de l'intégrale comme on peut le voir avec le calcul de la transformée de Fourier d'une gausienne qui intervient dans la démonstration de l'injectivité de la transformée de Fourier.

Dans une dernière partie on donne d'autres méthodes de calcul d'intégrales. On retourne avec l'intégrale de Riemann en parlant de la convergence uniforme qui nous permet de calculer une intégrale grâce à la notion de convergence uniforme d'une suite de fonctions vers une fonction limite. Dans un deuxième point on entre dans le champs de l'analyse complexe en calculant les intégrales grâce au théorème de Résidus et à la notion d'indice. Ce théorème assez puissant nous permet de ramener le calcul d'une intégrale sur un contour à celui de résidus et d'indices. On conclut avec des approximations de calcul d'intégrales avec tout d'abord le point de vue numérique. On illustre les méthodes de quadrature avec la méthode des rectangles puis des trapèzes : la méthode des rectangles étant la plus simple et naturelle mais sa convergence est assez lente puisqu'en $\frac{1}{n}$ tandis que la méthode des trapèzes converge en $\frac{1}{n^2}$. Enfin on conclut par une approche probabiliste avec la loi forte des grands nombres qui justifie la méthode de Monte-Carlo.
On trouvera enfin en annexe un catalogue de primitives usuelles puis une illustration de la méthode des rectangles et des trapèzes.

Plan

Cours détaillé

I Intégrales sur $\mathbb{R}$

I.1 Sommes de Riemann

Définition 1 : Somme de Riemann d'ordre n [Deschamps (1), p.625] :
On considère $f \in \mathcal{CM}([a;b],\mathbb{C})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **somme de Riemann d'ordre n associée à f** la somme $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.

Théorème 2 : [Deschamps (1), p.626]
Soit $f \in \mathcal{CM}([a;b],\mathbb{C})$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 3 : [Deschamps (1), p.626]

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$$

Corollaire 4 : [Deschamps (1), p.626]
Soit $f \in \mathcal{CM}([a;b],\mathbb{C})$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 5 : [Deschamps (1), p.626]
* On a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = +\infty$.
* On considère $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
Quand n tend vers $+\infty$, on a $S_\alpha(n) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

I.2 Primitives

Dans toute la suite de cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

Théorème 6 : [Deschamps (1), p.647]
Soient $a \in I$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'application $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f.
De plus, c'est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Corollaire 7 : [Deschamps (1), p.648]
Soit f une fonction continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et F une primitive de f.
Pour tout $(a,b) \in I^2$, on a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Exemple 8 : [Deschamps (1), p.649]

$$\int_0^1 2x^2+3x-5\mathrm{d}x = -\frac{17}{6} \text{ et } \int_0^2 x(x-\lfloor x \rfloor)\mathrm{d}x = \frac{7}{6}$$

I.3 Intégration par parties

Proposition 9 : Théorème d'intégration par parties [Deschamps (1), p.650] :
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et définies sur I.
Pour tout $(a,b) \in I^2$, on a $\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 10 : [Deschamps (1), p.651]
La fonction $x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.
On a alors $\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{5}+\ln(7)$.

Développement 1 : [cf. DESCHAMPS (1)]

Proposition 11 : [Deschamps (1), p.651]
On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.
* On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
* Pour tout $n \geq 2$, on a $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
* La suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et de valeur $\frac{\pi}{2}$.
* Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
* On a l'équivalent $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Proposition 12 : Formule de Stirling [Deschamps (1), p.792]
On a l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Théorème 13 : Théorème d'intégration par parties (2) [Deschamps (2), p.696] :
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I d'extrémités $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
L'existence de deux termes parmi $\int_a^b f'g$, $[fg]_a^b$ et $\int_a^b fg'$ entraîne l'existence du troisième et l'on a alors la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 14 : [Deschamps (2), p.697]

L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge et $I = -2\ln(2)$.

I.4 Changement de variables

Théorème 15 : Théorème de changement de variables [Deschamps (1), p.651] :

Soient I et J deux intervalles d'intérieur non vide, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et $u : J \longrightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\forall (a,b) \in J^2, \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))u'(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 16 : [Deschamps (1), p.652 + 655 + 656]

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12}, \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1} = 1+\ln(2)-\ln(e+1) \text{ et } \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}-1$$

Théorème 17 : Théorème de changement de variables (2) [Deschamps (2), p.697

Soient $f \in \mathcal{C}^0(]a;b[,\mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha;\beta[\longrightarrow]a;b[$ (avec $a,b,\alpha,\beta \in \overline{\mathbb{R}}$) une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et bijective.

Les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Exemple 18 : [Deschamps (2), p.698]

L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge et $I = 0$.

I.5 Cas des fractions rationnelles

On peut s'intéresser au calcul de primitives de fractions rationnelles $F \in \mathbb{R}(X)$. Pour cela, on décompose en éléments simples celles-ci et on est donc amené à calculer des intégrales de la forme $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}$ et $\int_a^b \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+\gamma x+\delta)^n}\mathrm{d}x$ (avec $\gamma^2 - 4\delta < 0$).

Exemple 19 : [Deschamps (1), p.971]

$$\forall t > 0, \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \ln(|t|) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\ln(2) \text{ et } \int_1^3 \frac{x-1}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}+\ln(2)$$

II Théorie de la mesure

II.1 Convergence monotone

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème 20 : Théorème de convergence monotone [El Amrani, p.405] :

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de fonctions mesurables positives.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers une fonction f, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu$$

II.2 Théorème de convergence dominée

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème 21 : Lemme de Fatou [El Amrani, p.407] :

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0;+\infty]$, alors :

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_X f_n\mathrm{d}\mu$$

Exemple 22 : [Faraut, p.11]

L'inégalité du lemme de Fatou peut être stricte comme le montre l'exemple suivant :
Soient $X =]0;+\infty[$ et $f_n : x \longmapsto ne^{-nx}$.
On a $\int_X f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ mais pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Théorème 23 : Théorème de convergence dominée [El Amrani, p.408] :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables sur X convergeant μ-presque partout vers une fonction f.
S'il existe une fonction g μ-intégrable telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \underset{\mu-p.p.}{\leq} g$, alors f est μ-intégrable et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu$$

Exemple 24 : [Deschamps (2), p.749]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$.
On a $\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{4}$.

II.3 Changement de variables

Théorème 25 : Théorème de changement de variables (3) [Rouvière, p.214] :

Soit $F : (t,u) \longmapsto (f(t,u), g(t,u))$ un changement de coordonnées de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Pour $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et identiquement nulle en dehors d'un compact suffisamment petit, on a :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(F(t,u))|\det(dF(t,u))|\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

Exemple 26 : [Rouvière, p.215]

Si on a le changement en coordonnées polaires $F : (r,\theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Exemple 27 :

On peut par exemple calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ pour $a > 0$.

II.4 Théorème de Fubini

Dans toute cette sous-partie, on considère deux espaces mesurés $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ avec ν et μ supposées σ-finies.

Théorème 28 : Théorème de Fubini-Tonelli [El Amrani, p.422] :

Soit $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction mesurable.
Les fonctions partout définies par $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ sont mesurables (pour les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement) et on a :

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

Théorème 29 : Théorème de Fubini [El Amrani, p.422] :

Soit $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure $\mu\otimes\nu$.
$*$ Pour presque-tout $x \in X$, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est ν-intégrable.
$*$ La fonction définie presque-partout par $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ est μ-intégrable.
De plus, on a :

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

Exemple 30 : [El Amrani, p.423]

$*$ À l'aide de ce théorème ainsi que d'un changement de variables, on obtient la formule fondamentale suivante : $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\lambda^{(2)}(x,y) = \pi$.
$*$ Cependant le théorème de Fubini ne s'applique pas à l'intégrale suivante (car la fonction considérée n'est pas intégrable) : $\int_{[0;1]^2} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}\lambda^{(2)}(x,y)$.

III Utilisation d'intégrales à paramètres

III.1 Quelques résultats

Dans toute cette sous-partie, on considère I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et une application $f : X \times I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 31 : Théorème de continuité sous le signe $\int$ [El Amrani, p.410] :

Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
$*$ Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-intégrable.
$*$ Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
$*$ Il existe une fonction μ-intégrable positive g sur X telle que pour presque tout couple $(x,t) \in X \times I$, $|f(x,t)| \leq g(x)$.
alors la fonction $F : t \longmapsto \int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ est continue sur I.

Exemple 32 : [Deschamps (2), p.756]

La fonction $g : t \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 33 : Théorème de dérivation sous le signe $\int$ [El Amrani, p.411] :

Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
$*$ Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-mesurable.
$*$ Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable sur I.
$*$ Il existe une fonction μ-intégrable positive g sur X telle que pour presque tout couple $(x,t) \in X \times I$ pour lequel $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$.
alors la fonction $F : t \longmapsto \int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable sur I, de dérivée la fonction $F' : t \longmapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$.

Remarque 34 :

Ce théorème se généralise pour montrer qu'une fonction F est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Exemple 35 : [El Amrani, p.411]
La fonction gamma d'Euler donnée par : $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}\mathrm{d}x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma^{(k)}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}(\ln(x))^k \mathrm{d}x$$

Exemple 36 : [Chabanol, p.46]
On considère X une variable aléatoire réelle qui suit la loi normale $\mathcal{N}_1\left(\mu, \sigma^2\right)$.
Sa fonction caractéristique est alors la fonction $t \longmapsto e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Théorème 37 : Théorème d'holomorphie sous le signe $\int$ [El Amrani, p.411] :
Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $g : X \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
* Pour presque tout $z \in \Omega$, la fonction $x \longmapsto g(x,z)$ est intégrable.
* Pour presque tout $x \in X$, la fonction $z \longmapsto g(x,z)$ est holomorphe dans Ω.
* Il existe une fonction intégrable positive g telle que pour presque tout couple $(x,z) \in X \times \Omega$, on a $|g(x,z)| \leq g(x)$.
alors la fonction $G : z \longmapsto \int_X g(x,z)\mathrm{d}x$ est analytique dans Ω, et de plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $G^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n g}{\partial z^n}(x,z)\mathrm{d}\mu(x)$.

III.2 Quelques applications

Exemple 38 : [Deschamps (2), p.757]
On considère $H = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que, pour tout $p \in H$, la fonction $t \longmapsto e^{-pt}f(t)$ soit intégrable sur $[0;+\infty[$.
* La transformée de Laplace $Lf : H \longrightarrow \mathbb{C}$ de f définie pour tout $p \in H$ par $Lf(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$ est continue sur H.
* On a également que la fonction Γ est analytique dans le demi-plan complexe H.

Exemple 39 : [Deschamps (2), p.763]
On considère la fonction $g : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
* La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
* La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, on a $g'(x) = -\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t$.
* En particulier, on en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Proposition 40 : [Gourdon, p.315]
* Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.
* La fonction Γ est log-convexe sur $]0;+\infty[$.
* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
* On a $\Gamma(x) \underset{0+}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

Développement 2 : [cf. EL AMRANI]

Proposition 41 : [El Amrani, p.112]
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.
On a $\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right) : \xi \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$.

Lemme 42 : Formule de dualité [El Amrani, p.115] :
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)g(v)\mathrm{d}v$$

Théorème 43 : [El Amrani, p.115]
La transformation de Fourier :

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array} \right.$$

est une application injective.

IV D'autres méthodes

IV.1 La convergence uniforme

Dans toute cette sous-partie, on suppose que les f_n sont des fonctions définies sur I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et continues sur I.

Théorème 44 : [Deschamps (2), p.512]
On suppose que $I = [a;b]$.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f sur I, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque 45 : [Deschamps (2), p.513]
Si l'on considère $I = [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)$ définie sur I et qui converge simplement vers la fonction nulle notée f, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = +\infty \neq \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$$

Théorème 46 : [Deschamps (2), p.514]
On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I vers f.
Pour $a \in I$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ et Φ_n les applications définies sur I par :

$$\Phi_n(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t \text{ et } \Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

La suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I vers a.

IV.2 Le théorème des résidus

Théorème 47 : Théorème des résidus [Tauvel, p.103] :
Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $Z \subseteq \Omega$ un fermé discret, $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash Z)$ et Γ un cycle dans Ω.
Si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ on a $\mathrm{Ind}_\Gamma(\lambda) = 0$ et $\Gamma^* \cap Z = \emptyset$, alors l'ensemble $\{a \in Z \text{ tq } \mathrm{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$ est fini et :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{a\in Z} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f,a)$$

Exemple 48 : [Tauvel, p.104]
Pour $a > 1$ fixé, on a $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin(t)}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Exemple 49 : [Tauvel, p.193]
On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et α un réel tel que $n > \alpha+1 > 0$.
On a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^n}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{n}\right)}$$

IV.3 Méthodes d'approximation

IV.3.1 Quelques méthodes de quadrature

Lemme 50 : [Deschamps (1), p.660]
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f(a)\right| \leq \frac{M_1}{2}(b-a)^2 \text{ avec } M_1 = \max_{x\in[a;b]} |f'(x)|$$

Proposition 51 : [Deschamps (1), p.661]
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n(f)\right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n} \text{ avec } M_1 = \max_{x\in[a;b]} |f'(x)|$$

Remarque 52 : [Deschamps (1), p.661]
La méthode des rectangles n'est pas très efficace car l'erreur de la méthode est en $\frac{1}{n}$, cela signifie grosso modo que pour avoir une valeur approchée à 10^{-p} près, il faut faire 10^p calculs ! Il faut donc nous tourner vers des méthodes plus efficaces.

Lemme 53 : [Deschamps (1), p.662]
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)^3 \text{ avec } M_2 = \max_{x\in[a;b]} |f''(x)|$$

La méthode des trapèzes consiste donc à approcher l'intégrale par $S_n'(f)$ qui est la somme des aires des trapèzes associés à la subdivision régulière à $n+1$ points, c'est-à-dire par :

$$S_n'(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f(a_k)\right)$$

où l'on a noté $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

Proposition 54 : [Deschamps (1), p.662]
Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n'(f)\right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

Remarque 55 : [Deschamps (1), p.661]
∗ La méthode des trapèzes est déjà plus efficace que celle des rectangles car l'erreur de la méthode est en $\frac{1}{n^2}$.
∗ Il est également possible d'obtenir d'autres méthodes de quadratures encore plus efficaces comme la méthode de Simpson par exemple.

IV.4 Approche probabiliste

Dans toute cette sous-partie, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Théorème 56 : Loi forte des grands nombres [Chabanol, p.53] :
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
La variable aléatoire $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Exemple 57 : Méthode de Monte-Carlo [Chabanol, p.53] :
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{U}\left([0;1]^d\right)$.
Si $f : [0;1]^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application Lebesgue-intégrable, alors on a :

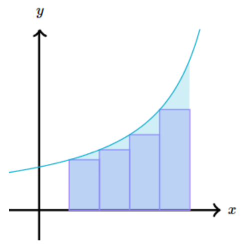
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \int_{[0;1]^d} f(x)\mathrm{d}x$$

V Annexe

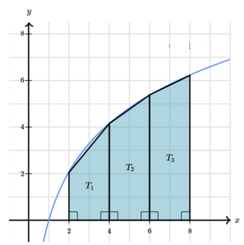
V.1 Catalogue de primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)$
c	cx
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log(\lvert x\rvert)$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\log(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{Arccos}(x)$

V.2 Illustration de la méthode des rectangles



V.3 Illustration de la méthode des trapèzes



Remarques sur le plan

- On peut s'intéresser d'avantage aux méthodes numériques avec les méthodes de quadrature ou encore aux règles de Bioche (ou même à des règles de symétrie de manière plus générale).

Liste des développements possibles

- Formule de Stirling.
- Étude de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$.
- Injectivité de la transformée de Fourier.
- Illustration du théorème des résidus.

Bibliographie

- Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.
- Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.
- Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.
- Jacques Faraut, *Calcul intégral*.
- François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*.
- Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.
- Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.
- Patrice Tauvel, *Analyse complexe pour la licence 3*.