Logique et structure discrètes : Exercices LINGI1101

TP 5

1 Rappel

1.
$$\forall x \ p(x) \land q(x) \Leftrightarrow (\forall x \ p(x)) \land (\forall x \ q(x))$$

2.
$$\exists x \ p(x) \lor q(x) \iff (\exists x \ p(x)) \lor (\exists x \ q(x))$$

3.
$$\neg \exists x \ p(x) \iff \forall x \ \neg p(x)$$

4.
$$\neg \forall x \ p(x) \iff \exists x \ \neg p(x)$$

5.
$$(\forall x \ p(x)) \lor (\forall x \ q(x)) \Rightarrow \forall x \ p(x) \lor q(x)$$

6.
$$\exists x \ p(x) \land q(x) \Rightarrow (\exists x \ p(x)) \land (\exists x \ q(x))$$

7.
$$\exists x \ p(y) \land q(x) \Rightarrow p(y) \land (\exists x \ p(x))$$

8.
$$\exists x, y \ p(x, y) \Rightarrow \exists y, x \ p(x, y)$$

2 Exercices

Exercice 1.

Expliquez ce qu'est un modèle en logique des prédicats.

Exercice 2.

Soit l'interprétation suivante :

$$D_{I} = \mathbb{N}$$

$$val_{I}(a) = 0$$

$$val_{I}(f) = \text{"succ"}$$

$$val_{I}(P) = \text{"} < \text{"}$$

$$val_{I}(x) = 1$$

$$val_{I}(y) = 0$$

Déterminez les valeurs de vérité des formules suivantes dans cette interprétation :

- 1. P(x,a)
- 2. $P(x,a) \wedge P(x,f(x))$
- 3. $\exists y \ P(y,x)$
- 4. $\exists y \ P(y,a) \lor P(f(y),y)$
- 5. $\forall x \; \exists y \; P(x,y)$
- 6. $\exists y \ \forall x \ P(x,y)$

Exercice 3.

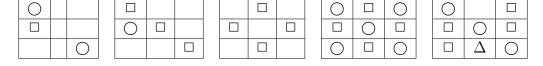
On condisére une grille 3×3 et

$$P = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

l'ensemble des positions de la grille. De plus, on considère les prédicats carre, circle, vide et adj qui représentent les choses suivantes :

carre(x) la forme de la position x est un carré. circle(x) la forme de la position x est un cercle. vide(x) la position x est vide. adj(x, y) les positions x et y sont adjacentes

Pour chaque configuration, dites quelles sont les formules vraies.



```
1. \exists x : P \text{ vide}(x)
```

2.
$$\exists x : P \neg vide(x)$$

3.
$$\exists x : P \text{ circle}(x)$$

4.
$$\exists x : P \text{ carre}(x)$$

5.
$$\forall x : P \text{ vide}(x) \lor \text{carre}(x) \lor \text{circle}(x)$$

6.
$$\forall x : P \text{ carre}(x) \Rightarrow \exists y : P \text{ (adj}(x, y) \land \text{circle}(y))$$

7.
$$\forall x : P \operatorname{carre}(x) \Rightarrow \exists y : P \operatorname{(adj}(x, y) \land \operatorname{carre}(x))$$

8.
$$\exists x, y, z : P \text{ vide}(x) \land \text{vide}(y) \land \text{vide}(z)$$

9.
$$\exists x : P \ (\forall x : P \ \text{circle}(x)) \lor \text{carre}(x)$$

10.
$$\forall x : P \ \exists y : P \ \neg vide(x) \land vide(y)$$

11.
$$\forall x : P \exists y : P \text{ vide}(x) \land \neg \text{vide}(y)$$

12.
$$\forall x : P \exists y : P \neg vide(x) \Rightarrow vide(y)$$

13.
$$\forall x : P \ \exists y : P \ \neg \text{vide}(y) \Rightarrow \text{vide}(x)$$

14.
$$\forall x : P \text{ circle}(x) \Rightarrow \exists y, z : P \text{ carre}(y) \land \text{carre}(z) \land \text{adj}(x, y) \land \text{adj}(x, z)$$

15.
$$\exists x : P \text{ vide}(x) \Rightarrow (\forall y : P \neg \text{vide}(x) \Rightarrow \text{carre}(y))$$

Exercice 4.

Faites une preuve formelle de :

1.

$$\exists x \ p(x) \\ \forall x \ p(x) \Rightarrow q(x) \\ \exists x \ q(x)$$

2.

3.

$$\forall x \ p(x) \lor q(x) \Rightarrow r(x) \land s(x)$$
$$\neg \forall x \ r(x) \land s(x)$$
$$\neg \forall x \ p(x)$$

4.

5.

$$\frac{\exists x \ p(x) \Rightarrow \neg q(x)}{\exists x \ r(x) \land q(x)}$$
$$\frac{\exists x \ r(x) \land \neg p(x)}{\exists x \ r(x) \land \neg p(x)}$$

6.

$$\frac{p(a)}{\forall x \ p(x) \Rightarrow q(x,b)}$$
$$\exists x \ q(a,x)$$

7.

$$\frac{\forall x \ \forall y \ p(x,y)}{\exists x \ p(x,x)}$$

8.

$$\frac{\forall x \neg p(x,x) \land \forall x \ \forall y \ \forall z \ p(x,y) \land p(y,z) \Rightarrow p(x,z)}{\forall x \ \forall y \ \neg (p(x,y) \land p(y,x))}$$