Logique et structure discrètes : Exercices
LINGI1101

TP 3

1 Rappel

Liste des règles d'inférence

Conjonction

$$\frac{p \quad q}{p \land q}$$

Simplification

$$\frac{p \land q}{p}$$

Addition

$$\frac{p}{p \lor q}$$

Syllogisme disjoint

$$\frac{p \lor q \quad \neg p}{q}$$

Modus ponens

$$\frac{p \Rightarrow q \quad p}{q}$$

Modus tollens

$$\frac{p \Rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$$

Contradiction

$$\frac{p \quad \neg p}{q}$$

Double négation

$$\frac{\neg\neg p}{p}$$

Transitivité

$$\frac{p \Leftrightarrow q \quad q \Leftrightarrow r}{p \Leftrightarrow r}$$

Lois de l'équivalence

$$\frac{p \Leftrightarrow q}{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow p}$$

Théorème de la déduction

$$\frac{p, \ldots, r, \boxed{s} \vdash t}{p, \ldots, r \vdash s \Rightarrow t}$$

Réduction à l'absurde

$$\frac{p, \ldots, q, \boxed{r} \vdash s \quad p, \ldots, q, \boxed{r} \vdash \neg s}{p, \ldots, q \vdash \neg r}$$

2 Exercices

Exercice 1.
Démontrez avec un preuve formelle que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est une tautologie.

Exercice 2.
Une formule propositionelle est en *forme normale disjonctive* si elle est composée de disjonctions de conjonctions de literaux, cet-à-dire, elle est de la forme

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij}$$

où L_{ij} sont des literaux.

1. Quel est l'avantage d'une formule en forme normale disjonctive ?
2. Comment peut-on faire pour automatiser la transformation d'une table de vérité en une formule qui possède la même table de vérité ?
3. Est-ce que toute formule propositionelle peut s'écrire en forme normale disjonctive ?

Exercice 3.
Metez les formules suivantes en forme normale conjonctive.

1. $p \oplus q$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
4. $(p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge s)$
5. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$
6. $(a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee \ldots \vee (a_n \wedge b_n)$

Exercice 4.
Montrez que la règle d'inférence suivante est valide :

$$\begin{array}{l} p \\ p \Leftrightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Exercice 5.
Montrez que la règle d'inférence suivante est valide :

$$\begin{array}{l} \neg p \\ p \Leftrightarrow q \\ \hline \neg q \end{array}$$

Exercice 6.
Montrez avec une preuve formelle que la règle d'inférence suivante est valide :

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \Rightarrow r \\ q \Rightarrow r \\ \hline r \end{array}$$

Exercice 7.
Montrez avec une preuve formelle que $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r, p \vdash q \Leftrightarrow r$