

Logique et structure discrètes : Exercices  
LINGI1101

Séance 2

# 1 Rappel

## Liste des équivalences logiques

### Lois commutatives

1.  $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$  (*commutativité de  $\vee$* )
2.  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$  (*commutativité de  $\wedge$* )
3.  $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow q \Leftrightarrow p$  (*commutativité de  $\Leftrightarrow$* )

### Lois associatives

1.  $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$  (*associativité de  $\vee$* )
2.  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$  (*associativité de  $\wedge$* )

### Lois distributives

1.  $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  (*distributivité de  $\wedge$  sur  $\vee$* )
2.  $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  (*distributivité de  $\vee$  sur  $\wedge$* )

### Lois de De Morgan

1.  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$  (*loi 1 de De Morgan*)
2.  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$  (*loi 2 de De Morgan*)

### Loi de la négation

1.  $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

### Loi du tiers exclu

1.  $p \vee \neg p \Leftrightarrow \text{true}$

### Loi de la contradiction

1.  $p \wedge \neg p \Leftrightarrow \text{false}$

### Loi de l'implication

1.  $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

### Loi du contraposée

1.  $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

### Loi de l'équivalence

1.  $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

### Lois de l'idempotence

1.  $p \Leftrightarrow p \vee p$  (*idempotence de  $\vee$* )
2.  $p \Leftrightarrow p \wedge p$  (*idempotence de  $\wedge$* )

### Lois de simplification

1.  $p \wedge \mathbf{true} \Leftrightarrow p$
2.  $p \vee \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathbf{true}$
3.  $p \wedge \mathbf{false} \Leftrightarrow \mathbf{false}$
4.  $p \vee \mathbf{false} \Leftrightarrow p$
5.  $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
6.  $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

### Liste des règles d'inférence

Conjonction	Simplification	Addition	Syllogisme disjoint
$\frac{p}{q}$ $\frac{q}{p \wedge q}$	$\frac{p \wedge q}{p}$	$\frac{p}{p \vee q}$	$\frac{p \vee q}{\neg p}$ $\frac{\neg p}{q}$
Modus ponens	Modus tollens	Contradiction	Double négation
$\frac{p \Rightarrow q}{p}$ $\frac{p}{q}$	$\frac{p \Rightarrow q}{\neg q}$ $\frac{\neg q}{\neg p}$	$\frac{p}{\neg p}$ $\frac{\neg p}{q}$	$\frac{\neg \neg p}{p}$
Transitivité	Lois de l'équivalence	Théorème de la déduction	Réduction à l'absurde
$\frac{p \Leftrightarrow q}{q \Leftrightarrow r}$ $\frac{q \Leftrightarrow r}{p \Leftrightarrow r}$	$\frac{p \Leftrightarrow q}{p \Rightarrow q}$ $\frac{p \Rightarrow q}{q \Rightarrow p}$	$\frac{p, \dots, r, \boxed{s} \vdash t}{p, \dots, r \vdash s \Rightarrow t}$	$\frac{p, \dots, q, \boxed{r} \vdash s}{p, \dots, q, \boxed{r} \vdash \neg s}$ $\frac{p, \dots, q, \boxed{r} \vdash \neg s}{p, \dots, q \vdash \neg r}$

## 2 Exercices

### Exercice 1.

Démontrez les équivalences logiques suivantes.

1.  $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
2.  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3.  $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \Leftrightarrow \mathbf{true}$
4.  $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \Leftrightarrow q$
5.  $(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \mathbf{true}$
6.  $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee r))$
7.  $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
8.  $p \wedge q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)$

### Exercice 2.

Démontrez, à l'aide d'une table de vérité, la validité des arguments suivants :

1.

$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{q}$$

2.

$$\frac{p}{p \vee q}$$

3.

$$\frac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$$

### Exercice 3.

Démontrez que les arguments suivants ne sont pas valides.

1.

$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\neg q}$$

2.

$$\begin{array}{l}
p \Leftrightarrow q \\
p \Rightarrow r \\
r \\
\hline
p
\end{array}$$

3.

$$\begin{array}{l}
p \Rightarrow q \\
q \Rightarrow p \\
\hline
p \wedge q
\end{array}$$

#### Exercice 4.

Pour chaque ensemble de prémisses, démontrez la conclusion qui suit. Faites attention à bien identifier les lois logiques et les règles d'inférence utilisées.

1. Premisses :  $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$   
Conclusion :  $p \Rightarrow r$
2. Premisses :  $p \Rightarrow q, r \Rightarrow t, q \vee t \Rightarrow u, \neg u$   
Conclusion :  $\neg p \wedge \neg r$
3. Premisses :  $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r), t \vee \neg r \vee u, p \Rightarrow t, \neg t$   
Conclusion :  $q \Rightarrow u$
4. Premisses :  $p \Rightarrow \neg q, q \vee r \vee s, \neg r \vee s \Rightarrow p, \neg r$   
Conclusion :  $s$
5. Premisses :  $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r), s \vee \neg r \vee t, p \Rightarrow s, \neg s$   
Conclusion :  $q \Rightarrow t$
6. Premisses :  $\neg(\neg p \wedge q), \neg(\neg q \vee r)$   
Conclusion :  $p$
7. Premisses :  $p \vee q, \neg q \vee r$   
Conclusion :  $p \vee r$
8. Premisses :  $(p \wedge q) \vee (r \wedge s), (q \wedge r) \vee (s \wedge t)$   
Conclusion :  $r \vee (p \wedge t)$

#### Exercice 5.

Pour chaque ensemble de prémisses, démontrez la conclusion qui suit. Faites attention à bien identifier les lois logiques et les règles d'inférence utilisées.

1. Premisses :  
Conclusion :  $p \vee \neg(p \wedge q)$
2. Premisses :  
Conclusion :  $(p \wedge q) \vee \neg p \vee \neg q$
3. Premisses :  
Conclusion :  $\neg p \vee \neg(\neg q \wedge (\neg p \vee q))$