Examen de mathématiques pour l'informatique SINF1250

Marco Saerens
marco.saerens@uclouvain.be

Bertrand Lebichot
bertrand.lebichot@uclouvain.be

Mathieu Zen
mathieu.zen@uclouvain.be

May 30, 2016

Résumé

Il s'agit de l'examen du cours SINF1250 de second baccalauréat en sciences informatique, UCL. L'examen se déroule en trois heures. Il y a cinq questions regroupant à la fois des concepts théoriques et pratiques.

Nous vous demandons de répondre à chaque question sur une feuille séparée. Par ailleurs, merci de rendre les $*$cinq$*$ feuilles réponse, même si certaines sont vides.

Question 1

Concernant la **logique mathématique** des propositions (30 min, 4 points).

1. Soit $p \to q$ et $(p \land \neg q) \to F$
   (a) Montrez que ces propositions sont logiquement équivalentes à l'aide d'un tableau de vérité.
   (b) Montrez que ces propositions sont logiquement équivalentes à l'aide du raisonnement formel. Détaillez bien vos calculs et justifiez chaque étape.
   (c) Expliquez le lien qui existe entre ces propositions et le *raisonnement par l'absurde* ou *par contradiction*.
2. Formalisez les propositions suivantes en logique des prédicats :
   (a) Les jeunes ne sont pas tous des délinquants.
   (b) Tous les climatologues ne sont pas d'accord entre eux à propos du réchauffement climatique.

Le raisonnement et la démarche, précis et complets, doivent être détaillés dans vos réponses à chaque question.

Question 2

Concernant l'**analyse combinatoire** (40 min, 4 points).

1. Démontrez algébriquement l'identité de Pascal qui, pour rappel, est :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

   Détaillez bien vos calculs.

2. Un barman-mathématicien cherche à anticiper le nombre de commandes différentes qu'il est possible de réaliser dans son établissement. Il a un étalage de 35 boissons réputé pour ne jamais être à cours de stock. Un groupe de 8 consommateurs entre et n'a le temps que pour "seulement" 4 tournées. Combien de commandes (ensembles de boissons pour les quatre tournées) différentes sont-ils susceptibles de réaliser ?

3. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATHEMATIQUE (sans tenir compte de l'existence de chaque mot dans un dictionnaire et sans tenir compte des accents) ?

Le raisonnement et la démarche, précis et complets, doivent être détaillés dans vos réponses à chaque question.

Question 3

Concernant la **théorie des graphes et la programmation dynamique** (40 min, 4 points).

1. Démontrez par induction que $\mathbf{A}^n$, où $\mathbf{A}$ est la matrice d'adjacence d'un graphe sans pondération, contient, comme éléments, le nombre de chemins de longueur n connectant toute paire de noeuds.

2. Démontrez la formule de récurrence de programmation dynamique permettant de déterminer le coût optimal du chemin le plus court dans un graphe dirigé acyclique. Détaillez bien vos calculs.

3. Appliquez cet algorithme de programmation dynamique au calcul de l'edit distance entre les séquences "paradis" et "reparti", sans donner les détails théoriques.

Le raisonnement et la démarche, précis et complets, doivent être détaillés dans vos réponses à chaque question.

Question 4

Concernant les **équations de récurrence** linéaires (40 min, 5 points).

1. Énoncez et démontrez le théorème fondamental permettant de résoudre une équation de récurrence linéaire homogène (sans terme de source) à coefficients constants, dans le cas d'ordre 2 où les racines sont *confondues*.
2. Ensuite, donnez la forme de sa solution dans le cas général d'ordre k, toujours dans le cas où toutes les racines sont confondues (sans démonstration).
3. Au temps $t = 0$, une personne emprunte un capital de C euro à un taux d'intérêt de i pourcents par période de temps (par mois par exemple). Ainsi, a_t représentera le capital dû (donc comprenant les intérêts cumulés) à la période t. Initialement (en $t = 0$), $a_0 = C$. A une période quelconque $t > 0$, la personne devra donc le capital (avec intérêts cumulés) de la période $t - 1$ (c'est-à-dire a_{t-1}) plus les intérêts de la période allant de $t - 1$ à t (c'est-à-dire $i \times a_{t-1}$).

   Cependant, la banque souhaite faire un cadeau aux bons payeurs. Aussi, si la personne rembourse correctement son prêt (ce que l'on suppose), pour le calcul du capital au temps t (à savoir a_t), la banque lui fait une *ristourne* égale à $i/5$ fois le capital à la période $t - 2$. En d'autres termes, la banque ristourne un cinquième des intérêts sur la période précédente. Nous vous demandons de développer les points suivants :

   (a) Ecrivez l'équation de récurrence permettant de calculer le capital a_t a tout temps $t > 1$ en fonction du passé.

   (b) Déterminez la solution générale de cette équation aux récurrences linéaire.

   (c) Déterminez la solution obéissant aux conditions initiales $a_0 = C = 10000$, $a_1 = 11000$, et un taux d'intérêt de $i = 10\%$.

   (d) Ecrivez l'équation d'état (formulation state-space) correspondante ainsi que sa solution matricielle.

Le raisonnement et la démarche, précis et complets, doivent être détaillés dans vos réponses à chaque question.

Question 5

Questions diverses (30 min, 3 points).

1. Démontrez en détail la formule qui permet de calculer directement la valeur de
$$S(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \tag{1}$$
et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Nous supposons $x \in]0, 1[$.
2. Ecrivez le *pseudocode* de l'algorithme permettant de calculer le score PageRank avec personnalisation. L'input du programme sera la matrice d'adjacence, α, et le vecteur de personnalisation. Vous pouvez utiliser les opérations matricielles qui son supposées disponibles (comme dans un langage de type Matlab). Insérez des commentaires d'explication du pseudocode.

Bonne chance ! !
