

Logique et structure discrètes : Exercices
LINGI1101

TP 5

1 Rappel

1. $\forall x p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow (\forall x p(x)) \wedge (\forall x q(x))$
2. $\exists x p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow (\exists x p(x)) \vee (\exists x q(x))$
3. $\neg \exists x p(x) \Leftrightarrow \forall x \neg p(x)$
4. $\neg \forall x p(x) \Leftrightarrow \exists x \neg p(x)$
5. $(\forall x p(x)) \vee (\forall x q(x)) \Rightarrow \forall x p(x) \vee q(x)$
6. $\exists x p(x) \wedge q(x) \Rightarrow (\exists x p(x)) \wedge (\exists x q(x))$
7. $\exists x p(y) \wedge q(x) \Rightarrow p(y) \wedge (\exists x p(x))$
8. $\exists x, y p(x, y) \Rightarrow \exists y, x p(x, y)$

2 Exercices

Exercice 1.

Expliquez ce qu'est un modèle en logique des prédicats.

Exercice 2.

Soit l'interprétation suivante :

$$\begin{aligned} D_I &= \mathbb{N} \\ val_I(a) &= 0 \\ val_I(f) &= \text{"succ"} \\ val_I(P) &= \text{"<"} \\ val_I(x) &= 1 \\ val_I(y) &= 0 \end{aligned}$$

Déterminez les valeurs de vérité des formules suivantes dans cette interprétation :

1. $P(x, a)$
2. $P(x, a) \wedge P(x, f(x))$
3. $\exists y P(y, x)$
4. $\exists y P(y, a) \vee P(f(y), y)$
5. $\forall x \exists y P(x, y)$
6. $\exists y \forall x P(x, y)$

Exercice 3.

On considère une grille 3×3 et

$$P = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

l'ensemble des positions de la grille. De plus, on considère les prédicats carre, circle, vide et adj qui représentent les choses suivantes :

carre(x)	la forme de la position x est un carré.
circle(x)	la forme de la position x est un cercle.
vide(x)	la position x est vide.
adj(x, y)	les positions x et y sont adjacentes

Pour chaque configuration, dites quelles sont les formules vraies.

1. $\exists x : P \text{ vide}(x)$
2. $\exists x : P \neg \text{vide}(x)$
3. $\exists x : P \text{ circle}(x)$
4. $\exists x : P \text{ carre}(x)$
5. $\forall x : P \text{ vide}(x) \vee \text{carre}(x) \vee \text{circle}(x)$
6. $\forall x : P \text{ carre}(x) \Rightarrow \exists y : P (\text{adj}(x, y) \wedge \text{circle}(y))$
7. $\forall x : P \text{ carre}(x) \Rightarrow \exists y : P (\text{adj}(x, y) \wedge \text{carre}(y))$
8. $\exists x, y, z : P \text{ vide}(x) \wedge \text{vide}(y) \wedge \text{vide}(z)$
9. $\exists x : P (\forall y : P \text{ circle}(y)) \vee \text{carre}(x)$
10. $\forall x : P \exists y : P \neg \text{vide}(x) \wedge \text{vide}(y)$
11. $\forall x : P \exists y : P \text{ vide}(x) \wedge \neg \text{vide}(y)$
12. $\forall x : P \exists y : P \neg \text{vide}(x) \Rightarrow \text{vide}(y)$
13. $\forall x : P \exists y : P \neg \text{vide}(y) \Rightarrow \text{vide}(x)$
14. $\forall x : P \text{ circle}(x) \Rightarrow \exists y, z : P \text{ carre}(y) \wedge \text{carre}(z) \wedge \text{adj}(x, y) \wedge \text{adj}(x, z)$
15. $\exists x : P \text{ vide}(x) \Rightarrow (\forall y : P \neg \text{vide}(x) \Rightarrow \text{carre}(y))$

Exercice 4.

Faites une preuve formelle de :

1.

$$\frac{\begin{array}{l} \exists x p(x) \\ \forall x p(x) \Rightarrow q(x) \end{array}}{\exists x q(x)}$$

2.

$$\frac{\begin{array}{l} \forall x p(x) \vee r(x) \Rightarrow \neg q(x) \\ \exists x \neg(\neg p(x) \wedge \neg r(x)) \end{array}}{\exists x \neg q(x)}$$

3.

$$\frac{\begin{array}{l} \forall x p(x) \vee q(x) \Rightarrow r(x) \wedge s(x) \\ \neg \forall x r(x) \wedge s(x) \end{array}}{\neg \forall x p(x)}$$

4.

$$\frac{\forall x \, q(x) \vee s(x) \Rightarrow r(x) \quad \neg \forall z \, p(z) \vee \neg s(z)}{\exists x \, r(x)}$$

5.

$$\frac{\forall x \, p(x) \Rightarrow \neg q(x) \quad \exists x \, r(x) \wedge q(x)}{\exists x \, r(x) \wedge \neg p(x)}$$

6.

$$\frac{p(a) \quad \forall x \, p(x) \Rightarrow q(x, b)}{\exists x \, q(a, x)}$$

7.

$$\frac{\forall x \, \forall y \, p(x, y)}{\exists x \, p(x, x)}$$

8.

$$\frac{\forall x \, \neg p(x, x) \wedge \forall x \, \forall y \, \forall z \, p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(x, z)}{\forall x \, \forall y \, \neg(p(x, y) \wedge p(y, x))}$$