LBIRE 1203
Probabilités

P. Bogaert

Université catholique de Louvain
UCL/AGRO/ELIE
Croix du Sud 2/16
1348 Louvain-la-Neuve, Belgique

patrick.bogaert@uclouvain.be

Informations

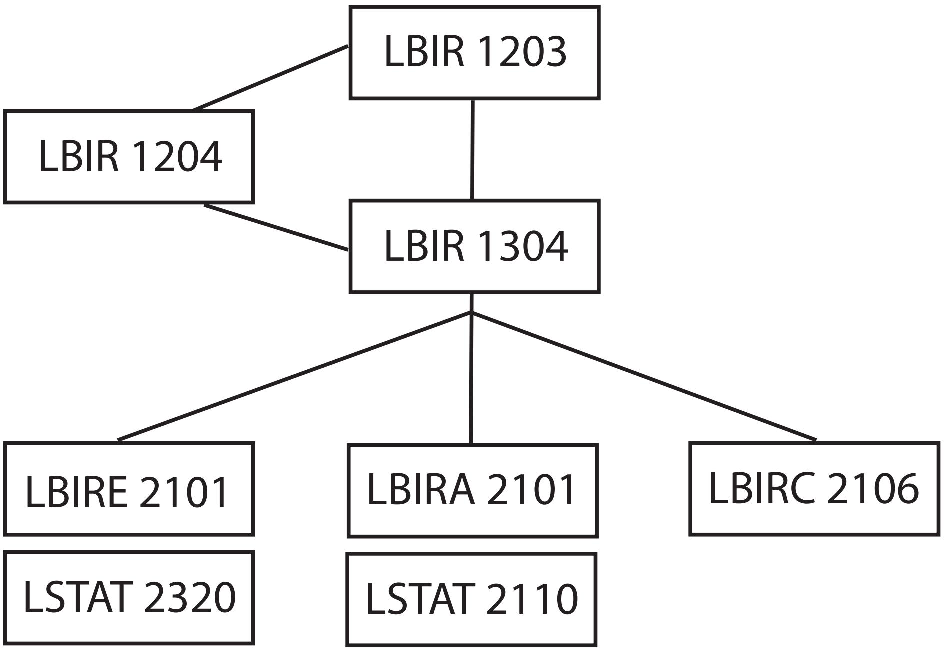
Contacts

- Titulaire : Patrick Bogaert (ENGE)
  Bâtiment Mendel, Local C 313
  Tél : 010/47.36.82
  E-mail : patrick.bogaert@uclouvain.be
- Assistant : Sarah Gengler (ENGE)
  Bâtiment Mendel, Local C 305
  Tél : 010/47.36.11
  E-mail : sarah.gengler@uclouvain.be

Enseignement

- Support : Livre *Probabilités pour scientifiques & ingénieurs*
  Cahier d'exercices
- Travaux : Deux à trois travaux à préparer
  A remettre à date fixée
- Examen : A livre ouvert
  Uniquement à l'aide du support original
  Ne comprend que des exercices
- Conseils : Lire le support
  Ne rien mémoriser, tout comprendre
  Etre à jour dans la matière
  Préparer les T.P.

Structure du cursus "Probabilités-Statistique"



Acquis d'apprentissage

A la fin de cette activité, l'étudiant est capable de :

- Nommer, décrire et expliquer les concepts théoriques relatifs à la théorie des probabilités ;
- Manipuler les expressions mathématiques de manière formelle et avec une notation rigoureuse en vue d'en déduire de nouvelles expressions utiles ou des résultats théoriques recherchés ;
- Reformuler l'énoncé textuel d'un problème dans un formalisme mathématique et probabiliste non ambigu, en utilisant les concepts et outils théoriques adéquats ;
- Résoudre un problème appliqué en suivant une approche déductive basée sur la manipulation correcte et utile des expressions ;
- Valider la cohérence interne de la formalisation et de la solution d'un problème de calcul des probabilités sur base des contraintes logiques induites par la théorie.

Introduction

Différence entre Probabilités et Statistique

- **Probabilités :** Modèle mathématique pour analyser les phénomènes aléatoires (où le hasard intervient).
- **Statistique :** Apprendre en observant les phénomènes aléatoires. Nécessité d'estimer, d'inférer.

"En Probabilités, Dieu nous donne les paramètres et nous déterminons ce qui va s'ensuivre. En Statistique, les choses se sont déjà produites et nous essayons de déterminer les paramètres que Dieu a choisis."

Exemples – probabilités

- On sait que la probabilité d'obtenir pile est de 0.5.
  - ☐ quelle est la probabilité d'obtenir deux fois pile sur 2 jets ?
  - ☐ quelle est la probabilité de ne pas obtenir pile sur 10 jets ?
- On sait que parmi 100 appareils, 3 sont défectueux.
  - ☐ quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun appareil qui soit défectueux parmi 10 appareils pris au hasard ?
  - ☐ quelle est la taille maximale d'un lot aléatoire telle qu'il ne contient aucun appareil défectueux avec une probabilité au moins égale à 90 % ?

Exemples – statistique

- On observe la production de 10 vaches de race A et de 10 vaches de race B.
  - ☐ quelle est la production moyenne de chaque race ?
  - ☐ quelle est la variabilité de la production de chaque race ?
  - ☐ peut-on admettre que les races ont la même production ?
- On observe des colonies de bactéries sur 100 plaques de Pétri.
  - ☐ quelle est le nombre moyen de colonies par plaque ?
  - ☐ quelle est la probabilité que j'observe 1,2,3,. . . colonies ?

Résumé

Les **Probabilités** font appel à la notion de **modèle**. Quels modèles et hypothèses va-t-on utiliser pour effectuer ces calculs ?

La **Statistique** fait appel à des observations et **estime** ou **vérifie** la pertinence d'un modèle/de ses paramètres.

La maîtrise du calcul des Probabilités est un pré-requis essentiel pour aborder la Statistique :

Pour pouvoir estimer la pertinence d'un modèle à partir d'observations, il faut pouvoir déterminer ce qu'on s'attend à observer sur base de ce modèle.

Illustration : jet d'un dé

- Si l'on suppose un dé équilibré et les jets successifs indépendants, on peut calculer toutes les probabilités désirées. Par exemple :
  - ☐ la probabilité d'obtenir au moins un "6" en 3 jets
  - ☐ la probabilité d'obtenir un "6" pour les 3 jets

- Pour tester le fait que le dé est équilibré, on effectue une longue série de jets et on observe la fréquence de chaque résultat. Comment décider si l'hypothèse est acceptable ou non lorsque :
  - ☐ sur 5 jets, on obtient le même résultat ?
  - ☐ sur 50 jets, on obtient le même résultat ?

  Pour répondre à cette question, on a besoin des Probabilités.

1. Notions de base

Epreuve ou expérience aléatoire

- expérience où le hasard intervient (résultat inconnu à l'avance)
- l'ensemble des résultats possibles Ω peut être décrit
- l'expérience est répétable sous des conditions semblables

On doit définir $\Omega = \{\omega : \omega \text{ est un résultat possible}\}$.
L'ensemble Ω est aussi appelé l'*univers* de l'expérience.
Cet ensemble Ω peut contenir :

  - un nombre fini d'éléments
  - une infinité dénombrable d'éléments
  - une infinité non dénombrable d'éléments

Exemples

- nombre fini d'éléments :

  (a) jet d'une pièce : $\Omega = \{P, F\}$
  (b) jet successif de deux pièces : $\Omega = \{PP, FF, PF, FP\}$
  (c) jet d'un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  (d) jet de deux dés :

  $$\Omega = \{\{1,1\}, \ldots, \{1,6\}, \{2,1\}, \ldots, \{2,6\}, \ldots, \{6,1\}, \ldots, \{6,6\}\}$$
  $$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

- infinité dénombrable d'éléments :

  (a) nombre de colonies sur une plaque de Pétri : $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$
  (b) âge d'un personne majeure prise au hasard : $\Omega = \{18, 19, \ldots\}$

Exemples (suite)

- infinité non dénombrable d'éléments :

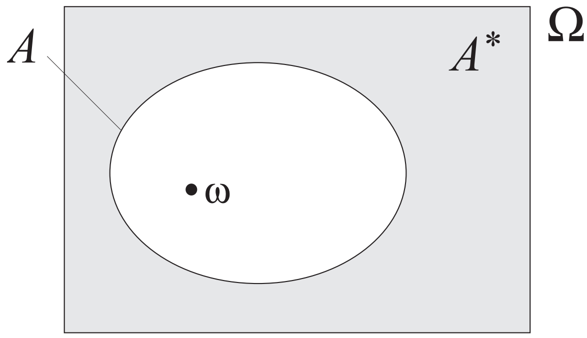
(a) volume de lait produit par une vache :$\Omega = \{\omega : \omega \geq 0\}$
(b) température au 1er janvier : $\Omega = \{\omega : \omega \in [-273^o, \infty)\}$

Remarque : l'ensemble Ω peut être défini :

- ☐ en extension (on énumère un à un les éléments)
- ☐ en compréhension (on définit ces éléments par une propriété)

Evénement

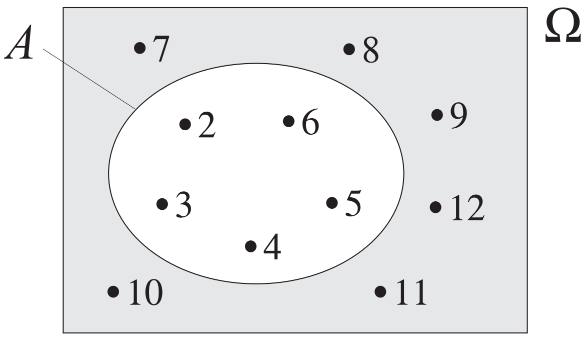
- sous-ensemble A de Ω possédant une propriété
- on parle d'évènement réalisé (A) ou non réalisé (A^*)



A est réalisé si le résultat ω de l'épreuve $\in A$
A n'est pas réalisé si le résultat ω de l'épreuve $\notin A$

Exemples

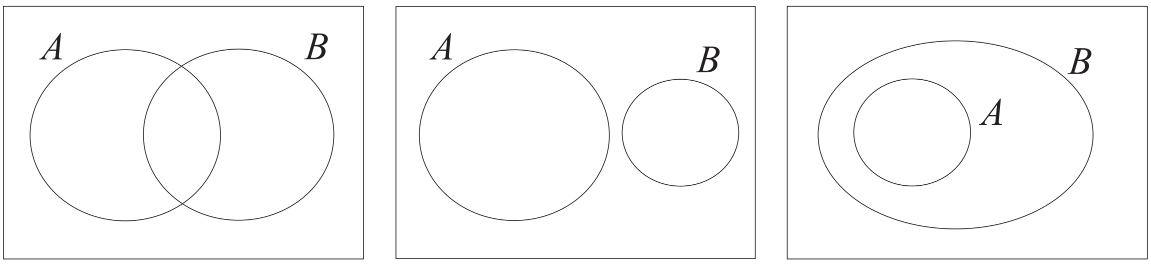
(a) jet d'une pièce : $A = \{P\}$
(b) jet successif de deux pièces : $A = \{PP, FF\}$
(c) jet de deux dés : $A =$"la somme est inférieure à 7"



- ω : évènement élémentaire (résultat de l'épreuve)
- Ω : évènement certain (tous les résultats possibles)
- $\emptyset$: évènement impossible (ensemble vide)

Relations entre évènements

- si deux évènements A et B ont certains éléments en commun, alors $A \cap B$ est l'ensemble de ces éléments
- si deux évènements A et B n'ont pas d'éléments communs, il sont incompatibles : $A \cap B = \emptyset$
- si un évènement A implique un évènement B, alors $A \subset B$



Composition d'évènements

- négation ($*$) d'un évènement :

  A^* est réalisé si A n'est pas réalisé
  A^* est le complémentaire de A par rapport à Ω

- union ($\cup$) de deux évènements A et B :

  $A \cup B$ est réalisé si A *ou* B est réalisé

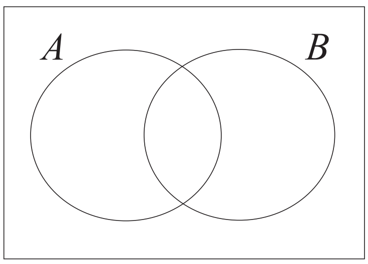
- intersection ($\cap$) de deux évènements A et B :

  $A \cap B$ est réalisé si A et B sont réalisés

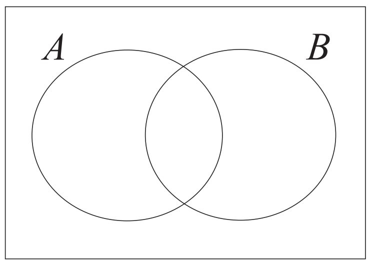
Exercice : Représentez les évènements sur les graphiques

(a) $A \cup B$ (b) $A \cup B^*$ (c) $A^* \cup B^*$
(d) $A \cap B$ (e) $A^* \cap B$ (f) $A^* \cap B^*$

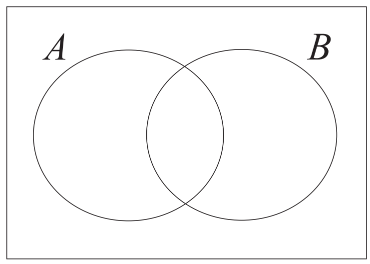
(a)



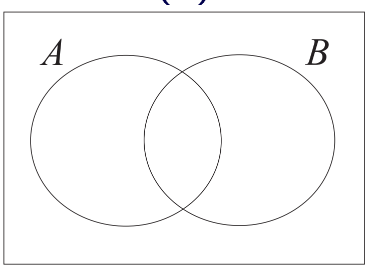
(b)



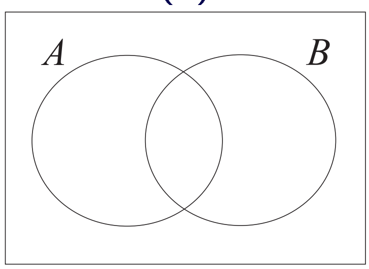
(c)



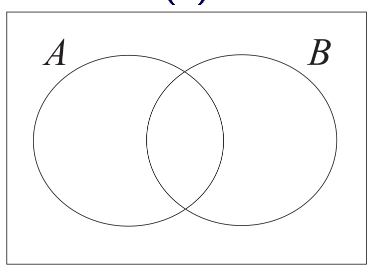
(d)



(e)



(f)



Algèbre des évènements

- idempotence: $A \cup A = A \qquad A \cap A = A$
- commutativité : $A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$
- associativité : $$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C\\(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C\end{aligned}$$
- distributivité : $$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\\(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)\end{aligned}$$
- identité : $$\begin{aligned}A \cup \emptyset = A \quad A \cup \Omega = \Omega\\A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cap \Omega = A\end{aligned}$$

Exercice : vérifiez graphiquement toutes ces égalités

Algèbre des évènements

- complémentarité : $A \cup A^* = \Omega \quad A \cap A^* = \emptyset$
  $(A^*)^* = A \quad \emptyset^* = \Omega \quad \Omega^* = \emptyset$

- lois de *de Morgan* : $(A \cup B)^* = A^* \cap B^* \qquad (A \cap B)^* = A^* \cup B^*$

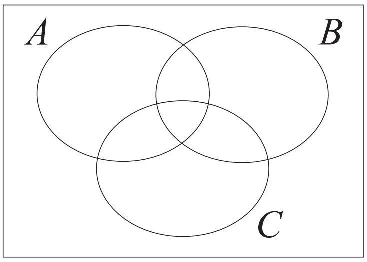
Les lois de *de Morgan* sont particulièrement utiles pour simplifier certaines expressions (raisonnement par le contraire).

Exercice : Représentez les évènements sur les graphiques

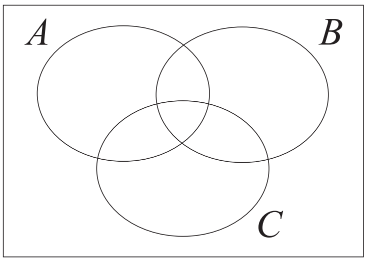
(a) $A^* \cap B^* \cap C^*$ (b) $A^* \cup B^* \cup C^*$ (c) $(A \cup B) \cap C$

(d) $(A^* \cap B^*) \cup C^*$ (e) $(A \cap B) \cup C$ (f) $(A^* \cup B^*) \cap C^*$

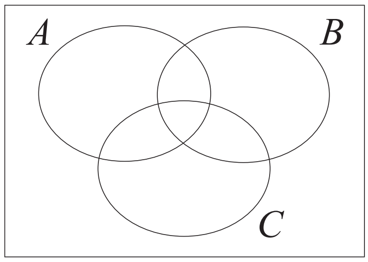
(a)



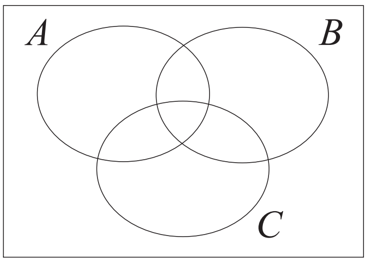
(b)



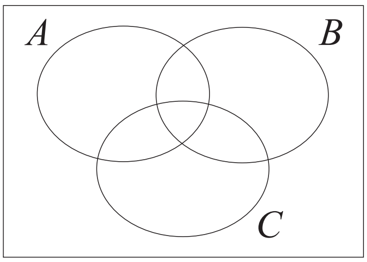
(c)



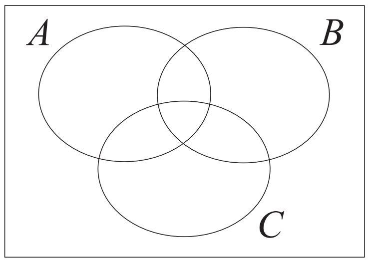
(d)



(e)



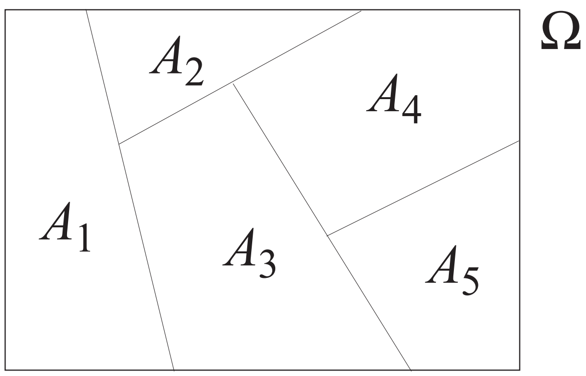
(f)



Système complet d'événemements

Une famille d'évènements $\{A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ forme un système complet d'évènements (une partition de Ω) ssi :

- aucun des évènements n'est impossible : $\forall i, A_i \neq \emptyset$
- les évènements sont incompatibles deux à deux : $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- l'union des évènements est l'évènement certain : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$



Exercice

Les évènements suivants forment-il un système complet ?

- $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$ pour le jet d'un dé.
- $A_1 = \{\omega : \omega \geq 0\}$, $A_2 = \{\omega : \omega \geq 5\}$, $A_3 = \{\omega : \omega \geq 10\}$ pour le nombre ω de colonies sur une plaque de Pétri.
- $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$ pour le nombre de pièces qui sont défectueuses dans un lot de 3 pièces.