

Examen de mathématiques pour l'informatique SINF1250

Marco Saerens
marco.saerens@uclouvain.be

Bertrand Lebuchot
bertrand.lebuchot@uclouvain.be

Mathieu Zen
mathieu.zen@uclouvain.be

September 2, 2016

Résumé

Il s'agit de l'examen du cours SINF1250 de second baccalauréat en sciences informatiques, UCL. L'examen se déroule en trois heures. Il y a cinq questions regroupant à la fois des concepts théoriques et pratiques.

Nous vous demandons de répondre à chaque question sur une feuille séparée. Par ailleurs, merci de rendre les *cinq* feuilles réponse, même si certaines sont vides.

Question 1

Concernant la **logique mathématique** des propositions (40 min, 5 points).

1. Soit $p \rightarrow q$ et $\neg q \rightarrow \neg p$
 - (a) Montrez qu'une implication est logiquement équivalente à sa contraposition à l'aide d'un tableau de vérité.
 - (b) Montrez qu'une implication est logiquement équivalente à sa contraposition à l'aide du raisonnement formel. Détaillez bien vos calculs et justifiez chaque étape.
 - (c) Illustrez ce lien en donnant un exemple concret de proposition logique dans la vie de tous les jours.
2. Formalisez les propositions suivantes en logique des prédicats :
 - (a) Un philosophe discute avec quelqu'un qui n'est pas un philosophe.
 - (b) La nuit, tous les chats sont gris.

3. Soit $((a \wedge b) \rightarrow c) \vee ((a \rightarrow b) \rightarrow \neg c)$.
 - (a) Définissez les concepts de tautologie et de contradiction.
 - (b) Déterminez formellement si la proposition énoncée est une tautologie ou une contradiction.

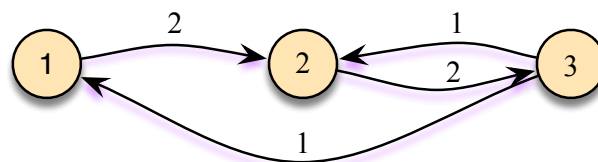
Le raisonnement et la démarche, précis et complets, doivent être détaillés dans vos réponses à chaque question (y compris celles qui suivent).

Question 2

Concernant l'**analyse combinatoire** (30 min, 4 points).

1. Définissez la règle du produit et la règle de la somme et donnez un exemple chiffré combinant ces deux règles.
2. Un réseau est formé de 6 ordinateurs. Chaque ordinateur est directement lié à au moins un des autres ordinateurs. Montrez qu'il existe au moins deux ordinateurs dans le réseau qui sont liés au même nombre d'ordinateurs dans le réseau. Expliquez le principe sous-jacent de cet énoncé et résolvez l'exercice.
3. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot KAYAK (sans tenir compte de l'existence de chaque mot dans un dictionnaire) ?

Question 3



Concernant la **théorie des graphes**, soit le graphe dirigé et pondéré (les poids sont notés à côté des arcs) ci-dessus (40 min, 4 points).

1. Déduisez sa matrices d'adjacence et calculez sa matrice de probabilités de transition.
2. Expliquez en détail de manière théorique ce que représente le score PageRank *de base* (y compris l'équation et son interprétation). Par ailleurs, comment le calcule-t-on habituellement *en pratique* à l'aide d'un algorithme ? Donnez et décrivez les formules principales.
3. Comme application, calculez le score PageRank de base (sans personnalisation) de chaque noeud du graphe représenté ci-dessus, sans inclure de téléportation ($\alpha = 1$).

Question 4

Concernant les **équations de récurrence** linéaires (40 min, 4 points).

1. Énoncez et démontrez le théorème fondamental permettant de résoudre une équation de récurrence linéaire homogène (sans terme de source) à coefficients constants, dans le cas d'ordre 2 où les racines du polynôme caractéristique ne sont *pas* confondues.
Ensuite, donnez la forme de sa solution dans le cas général d'ordre k , toujours dans le mesure où toutes les racines sont distinctes (sans démonstration).
2. Calculez la solution générale de l'équation de récurrence linéaire non-homogène (avec terme de source) à coefficients constants suivante :

$$6a_{t+2} - 5a_{t+1} + a_t = -2t - 1 \quad (1)$$

Plus précisément, nous vous demandons de développer les points suivants :

- (a) Déterminez la solution générale de l'équation aux récurrences homogène associée à l'Equation (1).
- (b) Déterminez la solution générale de l'équation aux récurrences non-homogène (1), donc avec terme de source.
- (c) Déterminez les solutions obéissant aux conditions initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = -1$.
- (d) Finalement, calculez la valeur de a_2 de deux manières différentes : par application directe de l'équation (1) et par en utilisant la solution générale obtenue au point précédent, lorsque $t = 2$. Comparez les valeurs obtenues par les deux méthodes : elles devraient être égales.

Question 5

Questions diverses (30 min, 3 points).

1. Dérivez (démontrez) en détail la formule qui permet de calculer directement la valeur de

$$S(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \quad (2)$$

et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Nous supposons $x \in]0, 1[$.

2. Donnez simplement la formule de récurrence de programmation dynamique permettant de déterminer le coût optimal du chemin le plus court dans un graphe dirigé acyclique, tout en définissant chaque variable.
Ensuite, calculez (et détaillez ce calcul dans un tableau) l'edit-distance entre les mots "signaux" et "iguane".

Bonne chance !!
