Logique et structure discrètes : Exercices
LINGI1101

TP 4

1 Rappel

Forme normale conjonctive (FNC) :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}$$

avec L_{ij} litéral, cet-à-dire, une proposition primaire (ex. A) ou sa négation (ex. $\neg A$).

Example :

$$(\neg A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg D)$$

Algorithme de normalisation :

1. Eliminer les $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ en les remplaçant par des formules équivalentes a l'aide des lois de l'implication et de l'équivalence.

$$p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \neg p \vee q \quad \text{et} \quad p \Leftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

2. Déplacer les négations vers l'intérieur et utilisant les lois de De Morgan.
3. Déplacer les disjonctions ($\vee$) vers l'intérieur en utilisant les lois distributives.
4. Simplifier en éliminant les formes ($P \vee \neg P$) dans chaque disjonction.

Règle de résolution :

$$\frac{\begin{array}{l} p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_{i-1} \vee c \vee p_{i+1} \vee \ldots \vee p_n \\ q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_{j-1} \vee \neg c \vee q_{j+1} \vee \ldots \vee q_m \end{array}}{p_1 \vee \ldots \vee p_{i-1} \vee p_{i+1} \vee \ldots \vee p_n \vee q_1 \vee \ldots \vee q_{j-1} \vee q_{j+1} \vee \ldots \vee q_m}$$

Example :

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee \neg q \\ \neg r \vee q \end{array}}{p \vee \neg r}$$

Algorithme de résolution :

1. Mettre les prémisses et la négation en FNC dans S
2. Tant que **false** $\notin S$ et qu'il existent p, q résolvables, non résolues
   (a) Apliquer la résolution sur p et q
   (b) Ajouter le résultat dans S
3. Si **false** $\in S$ alors c'est prouvé
4. Sinon il n'y a pas de preuve

Propriétés de l'algorithme :

Soit $P = \{p_1, \dots p_n\}$ l'ensemble de prémisses et c une proposition.

Soundness (adéquat) : Si $P \vdash c$ alors $P \vDash c$
Completeness (complet) : Si $P \vDash c$ alors $P \vdash c$
Decidable (décidable) : L'algorithme se termine après un nombre fini d'étapes.

2 Exercices

Exercice 1.
Prouvez que la régle de résolution est valide.

Exercice 2.
Est-ce que cette aplication de la régle de résoluton est correcte ? Justifiez.

$$res(P \lor Q, \neg P \lor \neg Q) = \textbf{false}$$

Exercice 3.
Pour chaque ensemble de prémisses montrez avec l'algorithme de résolution que la conclusion est un conséquence logique des prémisses.

1. Prémisses : $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R$
   Conclusion : $P \Rightarrow R$
2. Prémisses : $P \lor Q, P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R$
   Conclusion : R
3. Prémisses : $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R, P$
   Conclusion : $Q \Leftrightarrow R$
4. Prémisses : $P \Rightarrow Q, R \Rightarrow T, Q \lor T \Rightarrow U, \neg U$
   Conclusion : $\neg P \land \neg R$
5. Prémisses : $\neg P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), T \lor \neg R \lor U, P \Rightarrow T, \neg T$
   Conclusion : $Q \Rightarrow U$

Exercice 4.
Demontrez que $p_1 \land \ldots \land p_n \models c$ si et seulement si $p_1 \land \ldots \land p_n \land \neg c \models \textbf{false}$.