

NOM:	Année d'étude:
PRÉNOM:	

Examen type BIR 1203 “Probabilités et statistiques (I)”,

Question 1

Un couple d'oiseaux niche dans un grenier. Pour rentrer dans le grenier, les oiseaux passent par une fente qui a exactement la même hauteur que ces oiseaux en vol et dont la largeur est de 50 centimètres. La distance entre le bord gauche de la fente et la tête d'un des oiseaux au moment d'entrer (ou de sortir) suit une loi Uniforme entre 5 et 45 centimètres. Notons cette distance X pour le mâle et Y pour la femelle.

On sait que l'envergure ne dépend pas du sexe et qu'elle est égale à 16 centimètres. Ceci rend donc l'approche périlleuse. Les pauvres bêtes risquent chacune de percuter un des bords et/ou son partenaire s'il vient dans l'autre sens. Ainsi, si les deux oiseaux font leur approche en même temps, il y a 0, 1 ou 2 oiseaux qui passeront sans problème. (*Indice: si les oiseaux se percutent, on considère qu'aucun oiseau n'a pu passer sans problème.*)

1. La femelle essaye de rentrer toute seule. Calculez la probabilité qu'elle passe sans encombre.
2. Plus tard, le mâle arrive dans l'entrée au moment où la femelle veut sortir. Pour chacun des événements suivants, donnez-en une représentation graphique sur le domaine de variation du couple (X, Y) et calculez la probabilité correspondante
 - les oiseaux se percutent aux vols (sans tenir compte des bords)
 - les oiseaux touchent chacun un bord différent
 - seul un oiseau a pu passer sans problème
 - les deux oiseaux sont passés sans problème

Calculez ensuite le nombre moyen d'oiseaux qui passent sans problème lorsqu'ils passent en même temps.

3. Ils sont passés tous les deux sains et saufs. La femelle revient et entame une approche en visant à 38 centimètres du bord gauche. Si le mâle sort au même moment, est-il vraisemblable qu'il puisse passer sans problème ? Justifiez par un calcul.
-

Question 2

La société PALOUR produit des yaourts *Light*. Pour pouvoir utiliser ce terme, la société doit s'assurer que chacun des petits pots de yaourts ne contienne pas plus de 6% de matières grasses. Malheureusement, le mélangeur se faisant vieux, la production n'est pas homogène. En effet, le taux de matières grasses dans un pot suit une loi normale telle que i) 20% des pots contiennent moins de 4.16% et ii) 80% des pots contiennent moins de 5.84%. Les pots sont conditionnés par barquettes de 6. On dira qu'une barquette n'est pas acceptable si au moins un pot dépasse 6%. Parallèlement, *Test Achat* utilise un test de contrôle de la production. Malheureusement pour le consommateur, ce test n'est pas absolument fiable, de sorte que i) si un pot dépasse 6%, l'instrument de mesure utilisé indiquera "*plus de 6%*" dans 80% des cas et ii) si un pot est en dessous de 6%, il indiquera "*moins de 6%*" dans 90% des cas. Lorsqu'une barquette est testée, tous les pots sont mesurés. Si l'instrument indique qu'il y a au moins un pot qui dépasse 6%, *Test achat* déclare la barquette comme ne pouvant pas faire état de la mention "*produit light*".

1. Quels sont les paramètres μ et σ^2 pour la distribution de matières grasses dans un pot pris au hasard? Quelle est la probabilité que ce pot ait un taux de matières grasses inférieur à 6%?
 2. Quelle est la probabilité qu'une barquette prise au hasard soit acceptable?
 3. *Test achat* a mesuré qu'un pot dépasse 6% de matières grasses. Quelles est la probabilité que ce soit réellement le cas?
 4. Sachant qu'une barquette est acceptable, quelle est la probabilité que *Test Achat* la déclare non conforme à la mention "*produit light*"?
-

Question 3

Suite à la baisse du prix du grain, un agriculteur a décidé de diversifier ses activités et d'intégrer un troupeau ovin dans son exploitation de grandes cultures. Il décide de modéliser sa production de laine annuelle pour les trois prochaines années (X_1, X_2, X_3) à l'aide d'une loi normale multivariée. Il sait que la production attendue est de 240, 255 et 270kg la première, deuxième et troisième année, respectivement. L'écart-type des productions est de 6, 8 et 9 pour la première, deuxième et troisième année, respectivement. L'agriculteur sait également qu'entre deux années successives, la corrélation entre les productions est de 0,8 et que la corrélation est de 0,4 entre la première et la troisième année.

1. Ecrivez le vecteur espérance et la matrice de variance-covariance de la loi normale multivariée des productions de laine pour les trois premières années.
 2. Quelle est la production attendue la deuxième année si on observe une production de 243kg la première année ?
 3. Si la production atteint 249kg la deuxième année, quelle est la production minimale que l'agriculteur peut espérer dépasser la troisième année avec une probabilité de 85% ?
 4. Quelle est la probabilité que la moyenne de la production sur les trois premières années dépasse $250kg.an^{-1}$?
-

