

Examen de mathématiques pour l'informatique SINF1250

Marco Saerens & Nassim Benoussaid
prenom.nom@uclouvain.be

September 1, 2015

Résumé

Il s'agit de l'examen du cours SINF1250 de second baccalauréat en sciences informatiques, UCL. L'examen se déroule en trois heures. Il y a cinq questions regroupant à la fois des concepts théoriques et pratiques.

Nous vous demandons de répondre à chaque question sur une feuille séparée. Par ailleurs, merci de rendre les *cinq* feuilles réponse, même si certaines sont vides. Si certaines feuilles réponse ne sont pas rendues, nous considérons que c'est de la responsabilité de l'étudiant.

Question 1

Concernant la **logique mathématique** des propositions (30 min, 4 points).

1. Définissez la "*forme normale conjonctive*" et donnez un exemple.
2. Démontrez, en utilisant une table de vérité, la tautologie suivante :

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$$

3. Démontrez la même tautologie en utilisant des équivalences logiques. Chaque étape doit être justifiée soigneusement.
4. Réécrivez et simplifiez, en justifiant chaque étape, la proposition suivante de façon à ce que la négation n'apparaisse que devant les prédicats (pas de négation devant les quantificateurs).

$$\neg(\exists y (Q(y) \wedge (\forall x \neg R(x, y))))$$

Pour chaque sous-question, bien justifier chaque étape.

Question 2

Concernant l'**analyse combinatoire** (40 min, 4 points).

1. Combien de strings de bits de taille 8 contiennent :

- exactement trois 1 ?
- au plus trois 1 ?
- au moins trois 1 ?
- un nombre égal de 1 et de 0 ?

Le raisonnement précis et complet doit être détaillé dans vos réponses à chaque sous-question.

2. Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

avec x_1, x_2, x_3 et x_4 des nombres entiers et tous ≥ 0 ?

3. Énoncez le théorème qui vous a permis de résoudre ce problème (à savoir, les combinaisons avec répétitions).
4. Ensuite, démontrez ce théorème permettant de calculer le nombre de combinaisons avec répétitions à partir d'un ensemble de n éléments.

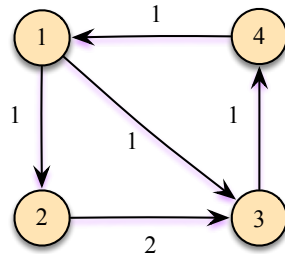
Question 3

Concernant les **équations de récurrence** linéaires (40 min, 5 points).

1. Trouvez une relation de récurrence pour calculer le nombre de strings de bits de taille n qui ne contiennent pas deux "0" consécutifs.
2. Donnez la(/les) condition(s) initiale(s) pour cette récurrence.
3. Déterminez la solution générale de cette équation aux récurrence.
4. Déterminez la solution répondant aux conditions initiales trouvées précédemment.
5. Déterminez finalement le nombre de strings de bits de taille 7 qui ne contiennent pas deux "0" consécutifs.

Le raisonnement précis et complet doit être détaillé dans vos réponses à chaque question.

Question 4



Concernant la **théorie des graphes**, soit le graphe dirigé et pondéré (les poids sont notés à côté des arcs) ci-dessus (40 min, 5 points).

1. Donnez sa matrices d'adjacence et calculez sa matrice de probabilités de transition.
2. Expliquez en détail (y compris les équations et leur interprétation) ce que représente le score PageRank *avec personnalisation*, comment il se différencie par rapport au PageRank de base et pourquoi ces modifications sont introduites.
3. Expliquez deux façons différentes de calculer ce score PageRank de base (sans personnalisation) en détaillant les équations.
4. Comme application de la question théorique précédente, calculez le score PageRank de base (sans personnalisation) de chaque noeud du graphe représenté ci-dessus, sans inclure de téléportation ($\alpha = 1$). Détaillez et justifiez vos calculs.
5. Commentez et interprétez ce résultat : le vecteur de scores PageRank obtenu est-il intuitivement satisfaisant ?

Le raisonnement précis et complet doit être détaillé dans vos réponses à chaque question.

Question 5

Questions diverses (30 min, 2 points).

1. Donnez et démontrez en détail la formule qui permet de calculer directement

$$S(x, n) = \sum_{i=1}^n x^i$$

en fonction de x, n . Bien détailler votre raisonnement.

2. Mettez l'équation de récurrence linéaire homogène suivante

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$$

sous forme d'équation d'évolution d'état (state-space approach) et donnez sa solution dans ce formalisme.

Bonne chance !!
