Examen de mathématiques pour l'informatique SINF1250

Marco Saerens & Bertrand Lebichot
prenom.nom@uclouvain.be

Septembre 26, 2014

Résumé

Il s'agit de l'examen du cours SINF1250 de second baccalauréat en sciences informatique, UCL. L'examen se déroule en trois heures trente. Il y a cinq questions regroupant à la fois des concepts théoriques et pratiques.

Nous vous demandons de répondre à chaque question sur une feuille séparée. Par ailleurs, merci de rendre les ∗cinq∗ feuilles réponse, même si certaines sont vides.

Question 1

Concernant la **logique mathématique** des propositions (30 min).

1. Quatre amis ont accès à une salle de chat. Est-il possible de déterminer qui chatte ou pas, si les informations suivantes sont connues ? Expliquez votre raisonnement de manière précise !
   — Soit Kevin, soit Heater, soit les deux est/sont en train de chatter.
   — Randy et Kevin ne chattent jamais ensemble.
   — Si Abby est en train de chatter, alors Randy également.
   — Si Heater est en train de chatter, alors Abby également.
2. Utilisez les règles d'inférence pour montrer que les hypothèses
   — S'il ne pleut pas ou s'il n'y a pas de brouillard, alors la course de voile aura lieu ainsi qu'une démonstration de sauvetage.
   — Si la course de voile a lieu, alors un trophée sera décerné.
   — Aucun trophée n'a été décerné.

impliquent une des deux conclusion suivantes : { "il pleut", "il ne pleut pas" }. On vous demande laquelle de ces deux conclusions est vraie ?

Présentez votre explication en deux colonnes : dans la première vous mettrez chaque étape de votre raisonnement et dans la seconde vous indiquerez les règles logiques qui vous permettent de passer d'une étape à l'autre, avec commentaires.

3. Démontrez les deux lois de De Morgan à l'aide de tables de vérité.

Question 2

Concernant les **équations de récurrence** linéaires (40 min).

1. Enoncez et démontrez le théorème fondamental permettant de résoudre une équation de récurrence linéaire *non-homogène* à coefficients constants, en fonction de la solution de l'équation homogène. Par ailleurs, quelle est la forme générale de la solution de l'équation non-homogène ?
2. Les banques souhaitant effectuer des économies, elles décident de ne payer les intérêts d'un capital qu'avec *un mois de délais*. Soit $t \geq 0$ le taux d'intérêt mensuel et a_n le capital au temps (début du mois) n. Au lieu de calculer le capital au temps $(n+1)$ en ajoutant simplement au capital au temps n les intérêts du dernier mois, c'est-à-dire $a_{n+1} = a_n + t\, a_n = (1+t)a_n$, la banque utilisera maintenant

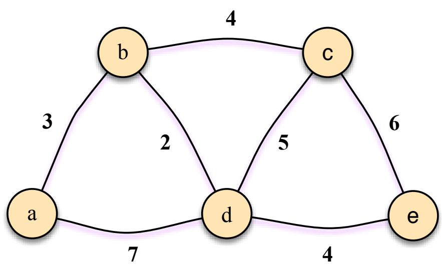
$$a_{n+1} = a_n + t\, a_{n-1} \tag{1}$$

   et les intérêts sont donc payés sur le capital d'il y a *deux mois* (retard d'un mois). Calculez la solution générale de cette équation (1) en fonction du taux mensuel t et du mois n, sachant que vous placez 100 Euro de capital sur le compte en fin du premier mois. Autrement dit, $a_0 = 0$ et $a_1 = 100$.

   Bien expliquer votre raisonnement.
3. Supposez maintenant que le taux d'intérêt mensuel vaut $t = 0.1 = 1/10$ (autrement dit, 10%). Comparez le capital obtenu après un an ($n = 12$), calculé à partir de la solution de l'équation (1) obtenue au point précédent, au capital que vous auriez obtenu à partir de la procédure de calcul habituelle ($a_{n+1} = (1+t)a_n$), dans les même conditions ($a_1 = 100$). Combien d'Euro la banque gagne-t-elle en utilisant la nouvelle procédure de calcul des intérêts ?

   Bien expliquer votre raisonnement.

Question 3



Concernant la **théorie des graphes**, soit le graphe non dirigé et pondéré (les poids sont notés à côté des arcs) ci-dessus (40 min).

1. Décrivez clairement, sous forme de pseudocode avec commentaires, l'algorithme de Dijkstra permettant de calculer les distances de plus court chemin entre un noeud particulier et tous les autres noeuds du graphe.
2. Pour le graphe représenté ci-dessus, appliquez cette procédure afin de calculer la distance du chemin le plus court entre le noeud a et le noeud e. Détaillez chaque étape de vos calculs et donnez, à chaque itération, les valeurs de S et L.
3. Démontrez formellement que, à chaque itération, pour tout noeud u compris dans la liste S, $L(u)$ contient la longueur d'un plus court chemin partant du noeud de départ et aboutissant à u.

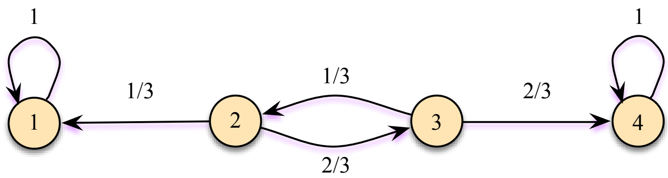
Question 4

Concernant l'**analyse combinatoire** (30 min).

1. Démontrez la formule permettant de calculer le nombre de permutations de r objets parmi n. Bien expliquer votre raisonnement.
2. De combien de manières peut-on asseoir quatre personnes parmi un groupe de 10 autour d'une table circulaire à 4 places si l'on considère qu'une manière de s'assoir est identique à une autre quand tout le monde possède des voisins de gauche et de droite identiques.
3. Une équipe de 13 personnes joue au softball.
   — Combien de manières y a-t-il de choisir 10 joueurs pour aller sur le terrain ?
   — Combien de manières y a-t-il d'assigner les 10 positions différentes sur le terrain aux 13 joueurs ?
   — S'il y a trois femmes et 10 hommes, combien de manières y a-t-il de choisir 10 joueurs pour aller sur le terrain s'il faut au moins une femme sur le terrain ?

4. Un département contient 10 hommes et 15 femmes. Combien de manières y a-t-il de former un comité de six membres s'il doit contenir strictement plus de femmes que d'hommes ?

Question 5



Concernant les **chaînes de Markov**, soit la chaîne ci-dessus dont les probabilités de transition sont notées à côté des arcs (40 min).

1. Donnez et expliquez, sans démonstration, la formule permettant de calculer la probabilité d'absorption par un état absorbant en partant d'un état quelconque. En particulier, expliquez la signification de chacune des matrices utilisées et la procédure précise qui doit être suivie pour calculer ces matrices ainsi que les probabilités d'absorption.
2. Le chaîne ci-dessus représente une marche aléatoire. Ecrivez sa matrice de probabilités de transition. Ensuite, exprimez-la sous forme canonique.
3. Enfin, appliquez la procédure décrite au point 1 et calculez la probabilité que le marcheur aléatoire soit absorbé par l'état 1 et la probabilité qu'il soit absorbé par l'état 4, en partant de l'état 2. A-t-il plus de chance d'atteindre l'état 1 ou l'état 4 en partant de l'état 2 ?

Les énoncés de l'examen sont maintenant terminés. Nous vous souhaitons

Bonne chance ! !