

# Examen de mathématiques pour l'informatique SINF1250

Marco Saerens & Nassim Benoussaid  
prenom.nom@uclouvain.be

June 1, 2015

## Résumé

Il s'agit de l'examen du cours SINF1250 de second baccalauréat en sciences informatiques, UCL. L'examen se déroule en trois heures. Il y a cinq questions regroupant à la fois des concepts théoriques et pratiques.

**Nous vous demandons de répondre à chaque question sur une feuille séparée. Par ailleurs, merci de rendre les *\*cinq\** feuilles réponse, même si certaines sont vides.**

## Question 1

Concernant la **logique mathématique** des propositions (30 min, 5 points).

1. Définissez la "*forme normale disjonctive*" et donnez un exemple.
2. Déterminez la forme normale disjonctive de

$$(P \vee Q) \rightarrow \neg R$$

Chaque étape de la transformation doit être détaillée et justifiée.

3. Réécrivez, en justifiant chaque étape, la proposition suivante de façon à ce que la négation n'apparaisse que devant les prédicats (pas de négation devant les quantificateurs).

$$\neg (\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z R(x, y, z)))$$

4. Démontrez que la proposition suivante est une tautologie, **soit** en utilisant une table de vérité, **soit** en utilisant des équivalences logiques :

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

## Question 2

Concernant l'**analyse combinatoire** (40 min, 4 points).

1. Démontrez la formule permettant de calculer le nombre de combinaisons de  $m$  objets parmi  $n$  sans répétitions et sans ordre ( $C_m^n$ ) à partir du nombre de permutations de ces objets. Bien expliquer votre raisonnement.
2. Donnez et justifiez brièvement la formule du théorème binomial. Pour rappel, la formule permet de calculer  $(x + y)^n$ .
3. Donnez le coefficient du terme en  $x^3$  dans le développement de  $(2x + 3y)^7$ . Détaillez le raisonnement.
4. Combien de permutations des lettres ABCDEFG contiennent :
  - La chaîne de lettres BCD ?
  - La chaîne de lettres CFGA ?
  - Les chaînes de lettres BA et FG ?
  - Les chaînes de lettres CBA et BED ?

Le raisonnement précis et complet doit être détaillé dans vos réponses à chaque sous-question.

## Question 3

Concernant la **théorie des graphes** (40 min, 4 points).

1. Définissez ce qu'est un circuit Eulérien.
2. Énoncez une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un circuit Eulérien dans un graphe connecté et non dirigé.
3. Démontrez cette condition nécessaire et suffisante. Justifiez bien chaque étape.
4. Décrivez en pseudocode un algorithme permettant de déterminer un circuit Eulérien dans un graphe connecté et non dirigé.

Le raisonnement précis et complet doit être détaillé dans vos réponses à chaque question.

## Question 4

Concernant les **équations de récurrence** linéaires (40 min, 4 points).

1. Énoncez et démontrez le théorème fondamental permettant de résoudre une équation de récurrence linéaire non-homogène à coefficients constants, dans le cas d'ordre 2. Ensuite, donnez la forme de sa solution dans le cas général d'ordre  $k$ , sans la démontrer.

2. Une population d'écureuils est de 200 individus au temps  $n = 0$  et de 220 au temps  $n = 1$  (périodes d'une année, le temps  $n$  correspond donc au début de l'année  $n$ ). Par ailleurs, les biologistes ont observé que l'accroissement de population entre le temps  $n - 1$  et le temps  $n$  est toujours le double de l'accroissement de population entre le temps  $n - 2$  et  $n - 1$ . Écrivez l'équation aux récurrences permettant de calculer le nombre d'écureuils au temps  $n$  en fonction de la population antérieure.
3. Déterminez la solution générale de cette équation aux récurrences.
4. Déterminez la solution obéissant aux conditions initiales spécifiées précédemment.
5. Comme le nombre des écureuils augmente trop vite, les biologistes décident d'introduire des prédateurs. Suite à la présence de ces prédateurs, que se passe-t-il si, en plus de la situation précédente, durant chaque période d'une année, 50% des écureuils présents au temps initial (début de l'année) sont tués par les prédateurs ? Écrivez l'équation de récurrence dans ces conditions, sans la résoudre. Expliquez votre raisonnement.

## **Question 5**

Questions diverses (30 min, 3 points).

1. Dérivez en détail la formule qui permet de calculer directement

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad \text{pour } x \in ]0, 1[$$

Bien détailler votre raisonnement.

2. Donnez deux interprétations synthétiques du modèle de classement de pages web PageRank (sans téléportation). Notez les formules principales et expliquez-les clairement.

**Bonne chance !!**

---