Examen de Mathématiques pour l'Informatique SINF1250

Marco Saerens
marco.saerens@uclouvain.be

Bertrand Lebichot
bertrand.lebichot@uclouvain.be

Mathieu Zen
mathieu.zen@uclouvain.be

Janvier 23, 2017

Résumé

Il s'agit de l'examen du cours SINF1250 de second bloc en sciences informatique, UCL. L'examen se déroule en trois heures. Il y a cinq questions regroupant à la fois des concepts théoriques et pratiques.

Nous vous demandons de répondre à chaque question sur une feuille séparée. Par ailleurs, merci de rendre les ∗cinq∗ feuilles réponse, même si certaines sont vides.

Question 1

Concernant la **logique mathématique** des propositions (40 min, 5 points).

1. La déclaration conditionnelle if...then...else... est commune à de nombreux language de programmation et peut être représentée sous forme de proposition en logique formelle. Soit la déclaration suivante contenant trois conditions p, q, r :

   if p **then** S_1
   else if q **then** S_2
      else if r **then** S_3
         else S_4

   (a) S_4 sera exécuté dans un cas bien précis, exprimez cette *condition* sous la forme d'une proposition logique formelle dépendant uniquement des propositions p, q, r.

   (b) Dans le même schéma, énoncez les conditions qui entraînent respectivement l'exécution de S_1, S_2 et S_3 sous leur forme logique et montrez à l'aide d'une table de vérité que ces conditions sont bien *mutuellement exclusives*.

2. Transformez en applicant des règles d'équivalence logique la proposition suivante en *forme normale disjonctive* en justifiant précisément chaque étape (approche formelle) :

$$\neg \left((\neg p \to q) \to \neg (q \leftrightarrow p) \right)$$

3. Concernant la validité d'une proposition :
   (a) Définissez ce qu'est un *raisonnement valide* en logique des propositions. À l'inverse, comment peut-on vérifier qu'un raisonnement n'est pas valide ?
   (b) Dans le même contexte, comment peut-on vérifier formellement en logique des propositions qu'un raisonnement ayant pour prémisses $p_1, p_2, \ldots, p_m$ et conclusion q est bien valide ?

Le raisonnement et la démarche, précis et complets, doivent être détaillés dans vos réponses à chaque question.

Question 2

Concernant l'**analyse combinatoire** (40 min, 4 points).

1. Plus particulièrement, relativement à la théorie des ensembles :
   (a) Enoncez la formule permettant de calculer la cardinalité de deux ensembles A et B, $|A \cup B|$, en fonction des cardinalités individuelles et leurs intersections et justifiez-la.
   (b) Démontrez la formule permettant de calculer la cardinalité de trois ensembles A, B et C, $|A \cup B \cup C|$.
2. La FIFA propose d'organiser la coupe du monde de football en élargissant la compétition à 48 pays. Le découpage initial se fera désormais par groupes de 3 (et non plus 4) : il s'agit de la *constitution des groupes*. Une fois les groupes constitués, dans une première phase, chaque pays participant affrontera une fois chaque autre membre de son groupe et les 2 premiers du groupe seront qualifiés : il s'agit de la *phase de qualification*. Finalement, la *phase finale* sera (comme auparavant) organisée sous forme d'étapes à élimination directe.
   (a) La *constitution des groupes* est déterminée par un tirage au sort pour lequel les équipes sont choisies parmi 3 chapeaux constitués en fonction de leur classement FIFA. Le premier chapeau contiendra donc les 16 meilleures équipes, le second chapeau contiendra les 16 équipes suivantes et le troisième chapeau contiendra les 16 équipes les plus faibles selon ce classement. Pour constituer un groupe, une équipe est tirée au hasard à partir de chacun

des trois chapeaux. Déterminez le nombre de possibilités pour la formation de ces groupes.

Notez que, une fois ce partitionement en groupes établi, le planning des compétitions futures est complètement pré-déterminé à l'avance par la FIFA et donc déterministe. Seules les issues des compétitions varient.

(b) Durant *la phase de qualification*, les affrontements ont lieu au sein des groupes et, à l'issue de ceux-ci, les 2 premiers de chaque groupe se verront attribuer un ticket pour la phase finale. Notez que le classement est important étant donné qu'il détermine les affrontements de la suite de la compétition qui sont fixés à priori par la FIFA (e.g. le 1er du groupe A affrontera le 2ème du groupe B, etc). Déterminez le nombre d'issues de ces affrontements.

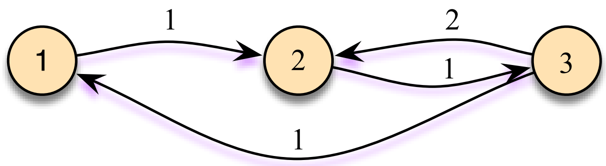
(c) La *phase finale* commencera, cette fois, par les seizièmes de finale ($1/16$). Durant cette phase finale, chaque équipe ne joue qu'un seul match à chaque étape et l'ensemble de ces matchs est prédéfini à l'avance sur base du classement propre à chaque groupe à l'issue de la phase de qualification. Ainsi, s'il y a n équipes restantes à une étape donnée, $n/2$ matchs prédéfinis sont joués (il s'agit du $2/n$ ième de finale) et les gagnants de ces matchs passent à l'étape suivante, alors que les perdants sont éliminés. Les étapes s'arrêtent lorsqu'il n'y a plus qu'un seul match entre deux équipes (la finale). Déterminez le nombre d'issues de ces affrontements.

Sur base des calculs précédents, calculez finalement le nombre total de formes différentes, ou scénarios, que peut prendre la compétition (constitution des groupes a, phase de qualification au sein des groupes b et enfin phase finale à étapes, jusqu'au match final c). Il s'agit donc de calculer le nombre de possibilités distinctes. Justifiez à chaque fois en mentionnant quelle règle de combinatoire vous utilisez.

3. Démontrez analytiquement à partir des formules permettant de calculer les permutations et les combinaisons que $C(n,k)\,P(k,k-1) = P(n,k)$.

Le raisonnement et la démarche, précis et complets, doivent être détaillés dans vos réponses à chaque question.

Question 3



Concernant la **théorie des graphes** (40 min, 5 points).

1. Démontrez par induction que, dans l'algorithme de Dijkstra, à la fin de chaque itération k, pour n'importe quel noeud u dans l'ensemble S_k, $L_k(u)$ (le label du noeud u) contient la longueur du plus court chemin du noeud de départ a à u, $L^*(u)$.
2. Soit le graphe dirigé et pondéré (les poids sont notés à côté des arcs) ci-dessus.
   (a) Déduisez sa matrice d'adjacence et calculez sa matrice de probabilités de transition.
   (b) Expliquez ce qu'est l'algorithme de "power method" et quel est son objectif dans le cadre de PageRank ? Détaillez l'algorithme sous forme de pseudo-code contenant les formules principales en expliquant les notations mathématiques.
   (c) Calculez le score PageRank de base de chaque noeud de ce graphe à l'aide de la *power method*, sans inclure de téléportation ($\alpha = 1$). Arrêtez-vous après cinq itérations (il s'agit d'une approximation donc) et justifiez bien chaque étape.
3. En ne tenant pas compte des flèches ni des poids, et donc en considérant le graphe non-dirigé et non-pondéré correspondant (on gomme les flèches et les poids de la figure représentant le graphe), ce graphe contient-il un chemin Eulérien ? Un circuit Eulérien ? Justifiez vos réponses par des résultats théoriques. Si le graphe contient bien un circuit ou un chemin Eulérien, énumérez la séquence de noeuds de ce circuit ou de ce chemin.

Le raisonnement et la démarche, précis et complets, doivent être détaillés dans vos réponses à chaque question.

Question 4

Concernant les **équations de récurrence** linéaires (50 min, 5 points).

1. Énoncez et démontrez le théorème permettant de déterminer la solution d'une équation de récurrence linéaire non-homogène (avec terme de source) à coefficients constants.

2. Quelle forme de solution test devez-vous essayer lorsque le terme de source est du type n^3 ?
3. Un biologiste botaniste, spécialiste des plantes d'eau, souhaite décorer son étang de jardin avec des nénuphars. Ainsi, il achète une plante contenant une seule feuille et souhaite modéliser l'évolution de celle-ci. Chaque feuille du nénuphar produit 1 nouvelle feuille durant chaque semaine de vie, mais chacune de ces feuilles dépérit (càd disparaît – on considère dans notre modèle qu'elle disparaît instantanément) après 3 semaines exactement (durée de vie de chaque feuille). Par exemple, si une plante ayant une feuille est plantée au temps $t = 0$, elle produit une nouvelle feuille durant la premiere semaine, etc. Donc, le nombre de feuilles évoluera en $t = 1, 2, 3$ selon $1, 2, 4, 7, \ldots$

   Si on note a_t le nombre de feuilles issues de la plante au temps t (en semaines), nous vous demandons de développer les points suivants :
   (a) Ecrivez l'équation de récurrence permettant de calculer le nombre de feuilles a_t à tout temps $t \geq 1$ en fonction du passé.
   (b) Déterminez la solution générale de cette équation aux récurrences linéaire homogène.
   (c) Ecrivez l'équation d'état (formulation "state-space") correspondante, ainsi que sa solution matricielle.
   (d) $*$ Déterminez la solution obéissant aux conditions initiales $a_0 = 1$, $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$. Elles signifient qu'en $t = 0$, le nénuphar est planté et contient une seule feuille.

La question précédée d'une astérisque ($*$) est plus difficile et devrait être résolue en dernier lieu ! Le raisonnement et la démarche, précis et complets, doivent être détaillés dans vos réponses à chaque question.

Question 5

Questions diverses (10 min, 1 point).

1. Appliquez systématiquement l'algorithme d'edit-distance, basé sur la programmation dynamique, au calcul de la distance entre les séquences "paradis" et "paris", sans entrer dans les détails théoriques. On suppose un coût unitaire pour chaque erreur.

Bonne chance ! !
