$$\frac{(7)(45.0)}{16.01} \leq \sigma_{X_1}^2 \leq \frac{(7)(45.0)}{1.690} \quad ; \quad \frac{(7)(0.0238)}{16.01} \leq \sigma_{X_2}^2 \leq \frac{(7)(0.0238)}{1.690}$$

$$\frac{(7)(13.9)}{16.01} \leq \sigma_{X_3}^2 \leq \frac{(7)(13.9)}{1.690}$$

c'est-à-dire :

$$19.7 \leq \sigma_{X_1}^2 \leq 186 \quad ; \quad 0.0104 \leq \sigma_{X_2}^2 \leq 0.0986 \quad ; \quad 6.08 \leq \sigma_{X_3}^2 \leq 57.6$$

On notera qu'il est également possible d'établir des intervalles de confiance pour les covariance et les coefficients de corrélation. Les formules dépassant le cadre d'une simple introduction, elles ne seront pas données ici. ■

Annexe A

Calcul combinatoire

L'objectif du calcul combinatoire est de dénombrer les dispositions possibles d'un certain nombre d'objets sous certaines conditions. De façon générale, on parle d'objets sans en spécifier la nature ; il peut donc s'agir en particulier d'événements. Seules les formules les plus utiles pour la lecture de cet ouvrage sont données ici.

A.1 Permutations

On appelle nombre de permutations P_n le nombre de manières qu'il y a de ranger n objets distincts dans un certain ordre. On peut représenter une de ces permutations comme résultant de la démarche suivante :

(1) on choisit parmi les n objets celui qui prendra la position $n^o 1$,

(2) on choisit parmi les $n-1$ objets restants celui qui prendra la position $n^o 2$,

et l'on continue ainsi de suite jusqu'à ce que tous les objets aient été placés. Il y a donc n choix possibles pour le premier objet et, ayant choisi ce premier objet, il y a $n-1$ choix possibles pour le second. Il y a donc au total $n(n-1)$ possibilités différentes pour les deux premières positions. On voit également que l'étape (2) peut être interprétée comme l'étape (1) de la recherche du nombre de permutations P_{n-1} pour $n-1$ objets, et l'on a ainsi la formule de récurrence $P_n = nP_{n-1}$, dont on tire directement que $P_n = nP_{n-1} = n(n-1)P_{n-2} = \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)$, soit :

$$P_n = n!$$

Une illustration de cette formule est donnée à la Fig. A.1 pour $n = 3$. On désigne chaque objet en lui attribuant un numéro, l'ensemble des objets étant $\{A_1, A_2, A_3\}$. On voit qu'en passant d'un niveau d'embranchement de l'arbre au suivant, le nombre de nouvelles branches pour ce niveau diminue d'une unité par rapport au niveau précédent. Au total, il y a bien $3! = (3)(2)(1) = 6$ branches terminales.

Exemple A-1. Afin d'identifier un agresseur, on fait entrer 7 prévenus dans une salle munie d'une vitre sans tain et on les aligne le long d'un mur face à la vitre. Quelle est le nombre de manières qu'il y a d'aligner ces prévenus ?
On calcule $P_7 = 7! = 5040$ possibilités. ■

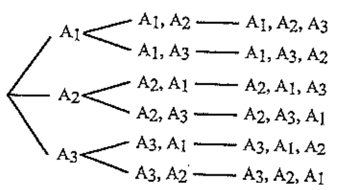

Fig. A.1: Ensemble des permutations pour 3 objets distincts

A.2 Arrangements sans répétitions

On appelle nombre d'arrangements sans répétitions A_n^k le nombre de manières qu'il y a de ranger dans un certain ordre k objets pris parmi n objets distincts ($k \leq n$). On précise qu'il n'y a pas de répétitions puisqu'un objet ne peut être choisi qu'une seule fois (tirage sans remise).

On peut représenter un de ces arrangements en suivant une démarche similaire à celle du calcul du nombre de permutations :

(1) on choisit parmi les n objets celui qui prendra la position n°1,

(2) on choisit parmi les $n-1$ objets restants celui qui prendra la position n°2,

et l'on continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait k objets placés. Contrairement au cas des permutations, on s'arrête ici avant d'avoir placé tous les objets, puisqu'on n'en choisira que k parmi les n. Il est alors immédiat de voir que $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$, que l'on peut encore écrire :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Bien entendu, si $k = n$, cela revient à placer tous les objets et l'on se retrouve dans le cas du calcul du nombre de permutations ; on a donc $A_n^n = P_n$.

Sur base de la Fig. A.1, on vérifie bien que s'il y a 3 objets au total, le nombre d'arrangements pour un objet est $A_3^1 = 3!/(3-1)! = 3$ (premier niveau de l'arbre), qu'il est de $A_3^2 = 3!/(3-2)! = 6$ pour deux objets (deuxième niveau de l'arbre), et qu'il est également de $A_3^3 = 3!/(3-3)! = 6$ si l'on prend les trois objets (dernier niveau de l'arbre).

Exemple A-2. S'il y a 15 chevaux partants lors d'un tiercé et que tous franchissent la ligne d'arrivée, combien y a-t-il de possibilités pour l'ordre des 3 premiers chevaux à l'arrivée ?
On calcule $A_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!} = 2730$ possibilités. ■

A.3 Combinaisons

On appelle nombre de combinaisons C_n^k, ou coefficient binomial $\binom{n}{k}$, le nombre d'ensembles différents de k objets pris parmi n objets distincts ($k \leq n$), quel que soit l'ordre dans lequel ces objets sont choisis.

Les formules pour le calcul du nombre de permutations et d'arrangements sans répétitions permettent d'écrire que :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

En effet, on sait qu'il y a A_n^k manières de ranger dans un ordre distinct k objets pris parmi n objets. Quels que soient les k objets choisis, on sait qu'il y a P_k manières de les ranger, mais ces manières ne comptent que comme un seul cas pour le calcul du nombre de combinaisons, puisque l'ordre n'a pas d'importance. Il faut donc diviser le nombre d'arrangements A_n^k par le nombre de permutations P_k, ce qui donne la formule proposée.

Sur base de la Fig. A.1, on vérifie bien que s'il y a 3 objets au total, le nombre de combinaisons pour un objet choisi est $C_3^1 = 3!/1!(3-1)! = 3$, qu'il est également de $C_3^2 = 3!/2!(3-2)! = 3$ pour deux objets, et qu'il est de $C_3^3 = 3!/3!(3-3)! = 1$ si l'on considère les trois objets.

Exemple A-3. Pour comprendre le fait que $C_n^k = A_n^k/P_k$, on peut imaginer l'expérience suivante. On écrit sur des bouts de papier tous les arrangements A_n^k possibles de k objets pris parmi n objets. On fait ensuite des paquets, chaque paquet comprenant tous les papiers sur lesquels sont écrits les arrangements impliquant les k mêmes objets. On sait qu'il y a P_k manières de ranger k objets, et il y a donc P_k bouts de papiers par paquet. S'il y a A_n^k bouts de papier au total et qu'il y a P_k papiers par paquet, c'est qu'il y a bien A_n^k/P_k paquets. ■

Exemple A-4. On tire 4 cartes dans un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de combinaisons possibles pour ces 4 cartes ?
Si l'on tient compte de l'ordre dans lequel les cartes sont tirées, il y a $A_{52}^4 = 6497400$ manières d'obtenir 4 cartes. Si l'on ne tient pas compte de l'ordre, il y a $C_{52}^4 = 270725$ possibilités. ■

A.4 Arrangements avec répétitions

On appelle nombre d'arrangements avec répétitions (ou arrangements multiples) R_n^k le nombre de manières qu'il y a de ranger dans un certain ordre k objets pris parmi n objets. On précise qu'il y a répétition parce qu'un objet qui a été choisi est replacé avec les autres avant de choisir l'objet suivant (tirage avec remise). Il est donc possible que $k \geq n$, puisqu'il y a toujours n objets avant un tirage.

On peut représenter un de ces arrangements comme issu de la démarche suivante :

(1) on choisit parmi les n objets celui qui prendra la position n°1, puis on le replace avec les $n-1$ objets restants,

(2) on choisit parmi les n objets celui qui prendra la position n°2, puis on le replace avec les $n-1$ objets restants,

et l'on continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait k objets placés. On voit ainsi que l'étape (2) peut être interprétée comme l'étape (1) de la recherche du nombre d'arrangements avec répétitions R_n^{k-1} pour $k-1$ objets, et l'on a ainsi la formule de récurrence $R_n^k = nR_n^{k-1}$, dont on tire directement que $R_n^k = nR_n^{k-1} = n^2R_n^{k-2} = \ldots$, soit :

$$R_n^k = \overbrace{(n)(n)\ldots(n)}^{k \text{ fois}} = n^k$$

Exemple A-5. L'ADN est constitué d'une séquence de bases azotées qui sont la Thymine (T), l'Adénine (A), la Guanine (G) et la Cytosine (C). Quel est le nombre possible de séquences distinctes constituées de 100 bases ?
On calcule $R_4^{100} = 4^{100} \simeq 1.6\ 10^{60}$ possibilités. ■

Exemple A-6. Si l'on jette un dé six fois, combien y a-t-il de séquences distinctes ? Parmi ces séquences, combien y en a-t-il donnant une seule fois chacun des 6 nombres possibles ?
Le nombre total de séquences pour 6 jets de dé est $R_6^6 = 46656$. Parmi ces séquences, il n'y en a que $P_6 = 720$ donnant des nombres tous différents, soit environ 1.5% des séquences possibles. ■

A.5 Approximation de Stirling

Lorsque n est grand, les valeurs de la fonction $n!$ sont très grandes. Dans ce cas, une approximation utile est fournie par la formule de Stirling, qui donne :

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \text{avec } e = \exp(1) = 2.718\ldots$$

Exemple A-7. Pour quelques valeurs de n, voici la valeur de $n!$ et celle de son approximation par la formule de Stirling, ainsi que les erreurs absolues et relatives correspondantes :

n	$n!$	Stirling	Erreur absolue	Erreur relative (%)
4	24	23.5	0.5	2
6	720	710	10	1.4
8	40320	39902	400	1
10	3628800	3598696	30000	0.8

l'erreur relative tendant vers zéro lorsque n augmente. ■

Annexe B

Calcul matriciel

Le calcul matriciel permettant d'alléger notablement les écritures, on donnera ici un bref résumé des résultats utiles pour la lecture de cet ouvrage. Les démonstrations des différentes propriétés seront omises, le lecteur intéressé pouvant se rapporter à la littérature pour plus de détails. Seul le cas des matrices réelles (dont les éléments sont tous des nombres réels) sera considéré.

B.1 Matrices réelles

Une *matrice réelle* $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ est un tableau bidimensionnel de nombres réels $a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ comprenant m lignes et n colonnes, avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si l'on fait la distinction entre matrices en fonction des valeurs de m et n, on parlera de *matrice carrée* lorsque $m = n$, tandis qu'on parlera de *vecteur colonne* $\mathbf{a}$ lorsque $n = 1$ et $m \neq 1$ et de *vecteur ligne* $\mathbf{b}'$ lorsque $m = 1$ et $n \neq 1$, avec[1]:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b}' = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

le vecteur $\mathbf{b}'$ étant la transposée du vecteur colonne $\mathbf{b}$ (voir ci-dessous).

Si la distinction est faite en fonction des éléments de la matrice, on parlera de *matrice diagonale* $\mathbf{D}$ lorsque la matrice est carrée avec $a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$, soit :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix}$$

[1]Pour $m = 1$ et $n = 1$, on retrouve bien entendu un scalaire.