

Thèse préparée à l’Institut de Physique du Globe de Paris  
École doctorale STEP’UP - ED 560  
IPGP-Équipe de Dynamique des Fluides Géologiques

# Écoulement dans un aquifère non confiné profond alimenté par la pluie

par  
Valentin Jules

présentée et soutenue publiquement le 05 mai 2020  
Thèse de doctorat des Sciences de la Terre et de l’Environnement  
dirigée par Olivier Devauchelle & Eric Lajeunesse

devant un jury composé de :

<b>François James</b>	Rapporteur
Professeur (Université d’Orléans)	
<b>Yves Méheust</b>	Rapporteur
Maître de conférences (Université de Rennes)	
<b>Claude Jaupart</b>	Examinateur
Professeur (Université de Paris)	
<b>Cyprien Soulaine</b>	Examinateur
Chargé de recherche (Université d’Orléans)	
<b>Stéphanie Deboeuf</b>	Examinateur
Chargée de recherche (UPMC)	
<b>Philippe Gondret</b>	Examinateur
Professeur (Université Paris-Saclay)	
<b>Olivier Devauchelle</b>	Co-encadrant
Chargé de recherche (Université de Paris)	
<b>Eric Lajeunesse</b>	Directeur de thèse
Physicien (Université de Paris)	

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>I État de l'art</b>	<b>8</b>
<b>1 Écoulements souterrains</b>	<b>11</b>
1.1 Bassin versant . . . . .	11
1.2 Les aquifères, réservoirs souterrains . . . . .	11
1.2.1 Composition des aquifères . . . . .	12
1.3 Écoulement en milieu poreux saturé . . . . .	16
1.4 Écoulement en milieu poreux homogène . . . . .	19
1.5 Écoulement dans un aquifère poreux homogène . . . . .	19
<b>2 Aquifère peu profond</b>	<b>25</b>
2.1 Hypothèse de Dupuit . . . . .	25
2.2 Équation de Dupuit-Boussinesq . . . . .	26
2.3 Solutions asymptotiques de l'équation de Dupuit-Boussinesq . . . . .	26
2.3.1 Étiage . . . . .	26
2.3.2 Montée de crue . . . . .	28
2.3.3 Approche expérimentale . . . . .	28
<b>3 Aquifère profond</b>	<b>32</b>
3.1 En laboratoire . . . . .	33
3.2 Dans la nature . . . . .	35
<b>II Aquifère profond expérimental</b>	<b>38</b>
<b>4 Écoulement bi-dimensionnel sur le terrain</b>	<b>39</b>
<b>5 Aquifère expérimental</b>	<b>44</b>
5.1 Dispositif expérimental . . . . .	44
5.2 Milieu poreux . . . . .	44

5.2.1	Porosité . . . . .	44
5.2.2	Mesure de la perméabilité par la méthode de Darcy . . . . .	47
5.2.3	Mesure de la perméabilité par relaxation . . . . .	51
5.3	Pluie . . . . .	54
5.3.1	Génération d'une pluie homogène . . . . .	55
5.3.2	Mesure de l'intensité de la pluie . . . . .	57
5.4	Mesure du débit de sortie . . . . .	58
5.5	Tension de surface . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Premières observations</b>	<b>60</b>
6.1	Transit par la zone insaturée . . . . .	60
6.2	Hydrogrammes . . . . .	60
6.3	Comparaison avec un aquifère peu profond . . . . .	61
<b>III</b>	<b>Écoulement stationnaire</b>	<b>63</b>
<b>7</b>	<b>Lignes de courant</b>	<b>64</b>
7.1	Traçage des lignes de courant . . . . .	64
7.2	Temps de trajet . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Écoulement potentiel</b>	<b>68</b>
<b>9</b>	<b>Linéarisation de la surface libre</b>	<b>70</b>
9.1	Linéarisation de la condition à la surface libre . . . . .	70
9.2	Analyse complexe . . . . .	72
9.3	Aquifère infiniment profond . . . . .	74
9.4	Aquifère de profondeur finie . . . . .	75
<b>10</b>	<b>Comportement de l'écoulement au voisinage de la sortie</b>	<b>84</b>
10.1	Comportement de l'écoulement au voisinage de la sortie sans pluie . . .	84
10.2	Comportement de l'écoulement au voisinage de la sortie avec la pluie .	88
<b>11</b>	<b>Aquifère non linéaire et infiniment profond</b>	<b>91</b>
11.1	Pluie faible . . . . .	93
<b>IV</b>	<b>Simulation numérique des écoulements souterrains</b>	<b>97</b>
<b>12</b>	<b>Écoulement stationnaire près de la sortie de l'aquifère</b>	<b>98</b>
12.1	Surface de suintement verticale . . . . .	98
12.2	Surface de suintement en biseau . . . . .	100

<b>13 Drainage d'une nappe par une sortie horizontale</b>	<b>102</b>
13.1 Écoulement stationnaire . . . . .	102
13.1.1 Nappe semi-infinie . . . . .	102
13.1.2 État stationnaire du drainage d'une nappe alimenté par les côtés	105
13.2 Simulation dynamique d'une nappe drainée par une sortie de taille finie	108
<b>14 Simulation de l'écoulement dans notre aquifère</b>	<b>113</b>
<b>V Montée de crue</b>	<b>116</b>
<b>15 Modèle d'impulsion uniforme</b>	<b>118</b>
15.1 Montée de crue dans notre aquifère expérimental . . . . .	121
15.2 Limites de l'approximation de couche uniforme . . . . .	123
15.3 Conclusion . . . . .	126
<b>Conclusion</b>	<b>128</b>
<b>Appendices</b>	<b>132</b>

# Introduction

Lors d'un épisode pluvieux, le débit d'une rivière peut augmenter rapidement. Il diminue ensuite lentement vers son niveau d'étiage quand les précipitations cessent (Figure 1). L'eau de pluie alimente les rivières de deux façons différentes : une partie de cette eau ruisselle sur le sol, mais, en général, l'essentiel s'infiltra et s'accumule dans un aquifère où elle forme une nappe hydrologique qui s'écoule lentement vers le réseau de drainage (Figure 2) (*Guérin et al.*, 2019).

L'observation des hydrogrammes de crue (*i.e.* la courbe de débit en fonction du temps) montre que chaque épisode pluvieux s'accompagne d'une montée rapide du débit, suivi d'une lente récession, après que la pluie a cessé (Figure 1). Pour cette raison, la communauté scientifique a longtemps considéré que la montée de crue est contrôlée par le ruissellement de surface. En effet, ce dernier met en jeu des vitesses d'écoulement relativement rapides (*Johnson et al.*, 1969). Selon ce modèle, la lente descente de crue serait au contraire contrôlée par l'écoulement dans l'aquifère, qui met en jeu des vitesses beaucoup plus lentes ( $10^{-13}$ - $10^{-3}$  m s<sup>-1</sup>) (*De Marsily*, 2004).

Ce scénario est cependant incompatible avec les données acquises par les géochimistes. En effet, lorsque la pluie s'infiltra dans le sol, elle interagit chimiquement avec les roches qui constituent l'aquifère. Ces réactions chimiques modifient la composition de l'eau accumulée dans la nappe. L'eau de ruissellement, quant à elle, ne traverse pas l'aquifère. Sa composition chimique reste donc proche de celle de la pluie. Or, les campagnes de mesure montrent que la composition chimique des eaux de rivière reste très proche de celle de la nappe, y compris pendant la montée de crue (*Neal and Rosier*, 1990; *McDonnell*, 1990; *Kirchner*, 2009). Ce constat, baptisé « paradoxe de l'eau vieille » par *Kirchner* (2003), suggère que la dynamique d'écoulement dans l'aquifère contrôle non seulement la descente, mais également la montée de crue.

Le mécanisme responsable de la montée de crue a été compris récemment. L'utilisation d'aquifères de laboratoire soumis à des pluies artificielles montre que l'infiltration d'eau de pluie provoque une élévation du niveau de la nappe (*Guérin*, 2015; *Pauwels and Troch*, 2010). Cette élévation modifie presque instantanément le champ de pression dans l'ensemble de l'aquifère, accélérant alors l'écoulement de l'eau souterraine vers le réseau de drainage. C'est donc la vitesse de transmission du signal de pression (et non celle de l'écoulement) qui explique la rapidité de la montée de crue dans la rivière. Une

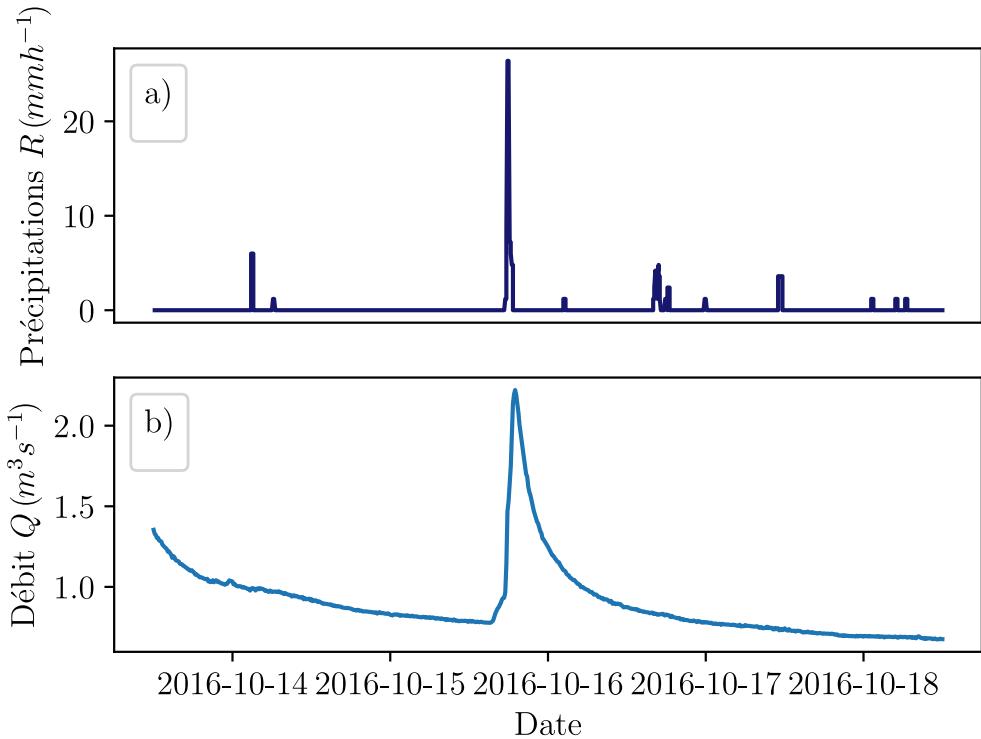


FIGURE 1 – (a) Taux de précipitation dans le bassin-versant de Capesterre (Île de Basse-Terre en Guadeloupe) en Octobre 2016 et (b) débit de la rivière mesuré à son exécutoire. Chaque épisode pluvieux s'accompagne d'une montée rapide du débit, suivi d'une lente récession lorsque les précipitations cessent.

étude de terrain récente confirme ce mécanisme (*Guérin et al., 2019*).

Dans la nature, l'épaisseur d'un aquifère est souvent faible devant son extension horizontale. Cette géométrie particulière permet d'utiliser l'approximation d'eau peu profonde, qui néglige la composante verticale de l'écoulement devant ses composantes horizontales (*Polubarinova-Kochina, 1962*). L'écoulement dans l'aquifère est alors décrit par l'équation de Dupuit-Boussinesq (*Dupuit, 1884; Boussinesq, 1904*).

Cette équation est couramment utilisée pour décrire l'écoulement des nappes libres (*Troch et al., 2013*). Des simulations numériques montrent qu'elle prédit correctement la forme des hydrogrammes de crue (*Guérin, 2015; Fiori, 2012*). Cette équation admet aussi des régimes asymptotiques. Ces derniers sont particulièrement utiles pour estimer les propriétés d'un aquifère à partir de l'hydrogramme de la rivière qui le draine. La descente de crue permet, par exemple, d'estimer la porosité et la conductivité d'un aquifère à l'échelle du bassin-versant (*Ibrahim and Brutsaert, 1965; Brutsaert and Neyer, 1977; Brutsaert and Lopez, 1998; Rupp and Selker, 2006; Guérin et al., 2019*). Le

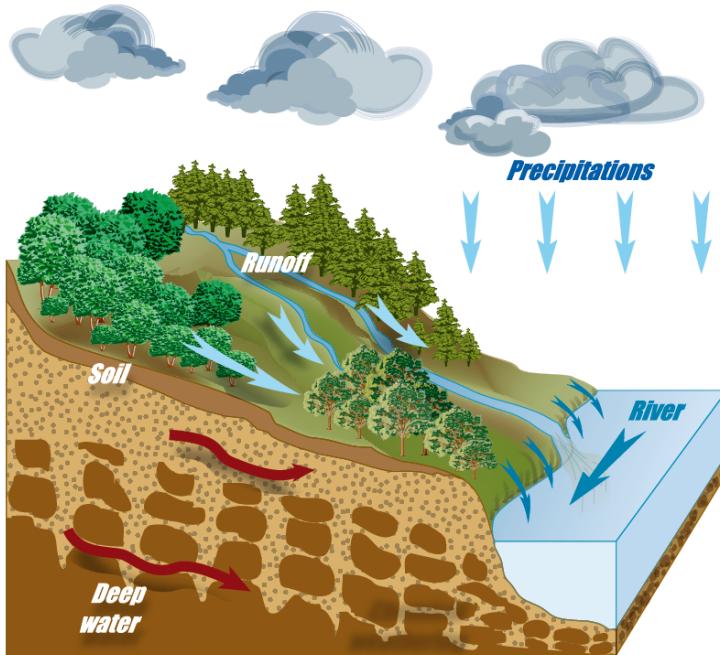


FIGURE 2 – Bassin versant vue en coupe. Lors d'un épisode de pluie, une partie de l'eau ruisselle. Le reste s'infiltra dans le sol et s'accumule dans l'aquifère, formant une nappe qui s'écoule vers la rivière. D'après [www.critex.fr](http://www.critex.fr).

régime de montée de crue quant à lui, permet d'estimer le volume actif d'un aquifère (*Guérin et al., 2019*).

Cependant, les écoulements souterrains ne respectent pas toujours les conditions d'application de l'équation de Dupuit-Boussinesq. C'est souvent le cas au voisinage de la frontière nappe-rivière : dans cette région, la composante verticale de l'écoulement n'est pas négligeable, et l'approximation de Boussinesq ne tient plus (Figure 3).

L'influence de cette composante verticale sur la réponse d'un aquifère à un épisode de pluie reste un problème ouvert. La dimension verticale de l'aquifère influence-t-elle l'écoulement de la nappe pendant la pluie ? Si oui, l'hydrogramme contient-il des informations sur les dimensions de l'aquifère ? Dans quelle mesure ces dernières influencent-elles la forme des lignes de courant et la distribution des temps de trajet de l'eau dans l'aquifère ?

Nous avons choisi d'explorer ces questions en utilisant un aquifère de laboratoire soumis à une pluie artificielle. Cet aquifère consiste en un milieu poreux homogène, maintenu entre deux plaques verticales séparées de quelques centimètres. Ce dispositif quasi-bidimensionnel est évidemment très simple comparé aux aquifères naturels. Il offre cependant de nombreux avantages. Il permet de contrôler les paramètres de l'aquifère (porosité, conductivité hydraulique), ainsi que la durée et l'intensité des précipitations.

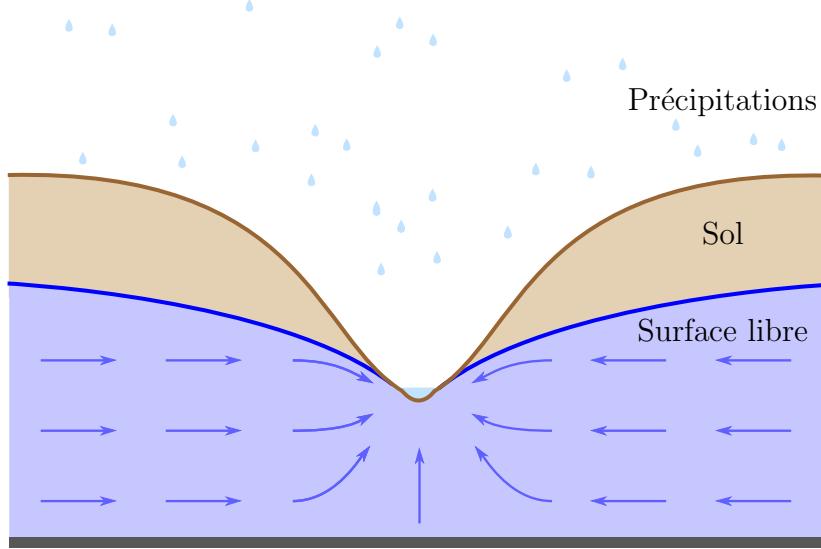


FIGURE 3 – Coupe d'un aquifère à surface libre drainée par une rivière : la composante verticale de l'écoulement ne peut plus être négligée près de la rivière (au centre).

Il permet également de visualiser directement les lignes de courant de l'écoulement, ce qui n'est pas possible sur le terrain.

Le manuscrit s'organise autour de cinq parties. Nous commencerons d'abord par un état des connaissances sur les écoulements souterrains. Ensuite, nous décrirons les caractéristiques de notre aquifère expérimental. Puis nous nous concentrerons sur l'état stationnaire de cette expérience quand le débit en sortie de l'aquifère contrebalance l'apport d'eau par les précipitations. Nous présenterons ensuite des simulations numériques d'écoulements à surface libre en milieu poreux. Enfin, nous examinerons le régime de montée de crue.

# Première partie

## État de l'art

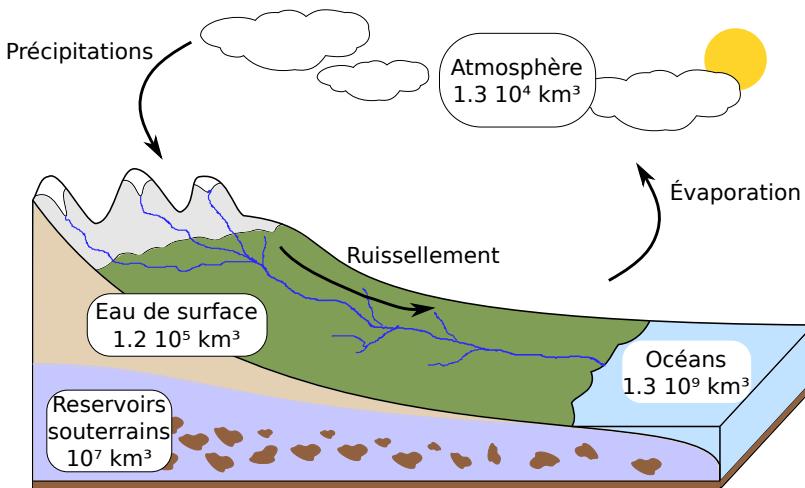


FIGURE 4 – Cycle de l'eau. Les volume d'eau dans les différents réservoirs sont extraits de *Gleick and Palaniappan (2010)*.

L'eau est omniprésente sur Terre, où elle représente un volume de l'ordre de  $10^9 \text{ km}^3$  en circulation permanente (Figure 4). L'immense majorité de l'eau est stocké dans les océans (97%). Sous l'action du soleil et du vent, l'eau des océans s'évapore dans l'atmosphère. Une partie de cette eau présente dans l'atmosphère tombe sur les continents sous forme de précipitations (pluie, neige, grêle). Par évapotranspiration, une partie de ces précipitations rejoint l'atmosphère (*Aussenac and Boulangeat, 1980*). Une autre partie est stockée dans les glaciers et les calottes polaires qui représentent 69 % du stock d'eau douce (*Gleick and Palaniappan, 2010*). L'eau des précipitations, si elle tombe sur un sol peu perméable, ruisselle jusqu'au rivières et aux océans. Si le sol est perméable, l'eau s'infiltra et est stockée dans le sous-sol poreux qui forme alors un aquifère. L'eau de ces réservoirs souterrains, qui représente 30% de l'eau douce sur la planète, s'écoule ensuite lentement jusqu'au réseau de drainage, pour retourner à l'océan.

En raison de la répartition des populations humaines sur la planète, l'eau souterraine est notre réserve d'eau douce la plus facile d'accès. Ces stocks souterrains sont donc essentiels pour l'humanité (*Gleick, 1996*).

L'eau souterraine est également une ressource indispensable au bon fonctionnement de la biosphère. D'une part, l'essentiel de la végétation puise son eau dans le sol (*Le Maitre et al., 1999; Naumburg et al., 2005*). D'autre part, les nappes souterraines joue un rôle central dans les processus d'altération chimique. Ces derniers transforment les roches primaires en minéraux secondaires non solubles qui forment un sol propice à la végétation (*Brantley and Lebedeva, 2011*).

Pour ces raisons, l'étude des écoulements souterrains est l'objet d'un très grand nombre de travaux. Dans cette première partie du manuscrit, organisée en 3 chapitres, nous nous intéressons à la relation entre nappe souterraine et rivière. Nous présentons

tour à tour les équations qui décrivent la dynamique de l'écoulement dans un aquifère (chapitre 1), l'approximation de Dupuit couramment utilisée pour les aquifères de faible rapport d'aspect (chapitre 2). Enfin, nous terminons avec le cas particuliers des aquifères profond pour lesquels la composante verticale de l'écoulement n'est pas négligeable (chapitre 3).

# Chapitre 1

## Écoulements souterrains

### 1.1 Bassin versant

Lorsque la pluie atteint le sol, ou lorsque la neige fond, une partie de l'eau s'évapore vers l'atmosphère, tandis que le reste finit par rejoindre les rivières. On peut alors définir pour chaque point d'une rivière une surface telle que l'ensemble de l'eau tombée sur cette surface converge vers le point considéré (Figure 1.1). Le point choisi est appelé exutoire et la surface drainée est appelée bassin versant. On suppose alors, en général, que l'écoulement suit la direction de plus grande pente définie par la topographie. Plus l'exutoire est situé en aval, plus le bassin versant est grand (Figure 1.2).

Si on considère le sol imperméable, seule l'eau qui ruisselle rejoint la rivière. Le bassin versant est alors défini par la topographie et délimité par les lignes de crête (Figure 1.3). Cependant, dans la nature, l'essentiel des précipitations rejoint le réseau de drainage après un séjour plus ou moins loin dans le sous-sol. C'est alors l'écoulement souterrain qui définit le bassin versant (Figure 1.3). La ligne de partage des eaux correspond alors à une séparatrice pour l'écoulement souterrain.

Bassins versants hydrologiques et topographiques ne coïncident pas nécessairement (*Haitjema and Mitchell-Bruker, 2005*). En pratique, il est donc difficile de déterminer la taille exacte du bassin versant, qui peut varier avec l'intensité des précipitations.

### 1.2 Les aquifères, réservoirs souterrains

L'aquifère est un ensemble géologique poreux et perméable permettant le stockage et l'écoulement de l'eau souterraine. On distingue deux types d'aquifères : les aquifères poreux et les aquifères fissurés. Les aquifères poreux sont composés de grains. C'est le cas pour les sables, les graviers et les argiles. L'eau est alors contenue dans les pores entre les grains. Les aquifères fissurés ou en lamelles, quant à eux, sont constitués de roches dans lesquelles l'eau est stockée dans des failles ou des fissures. C'est le cas des

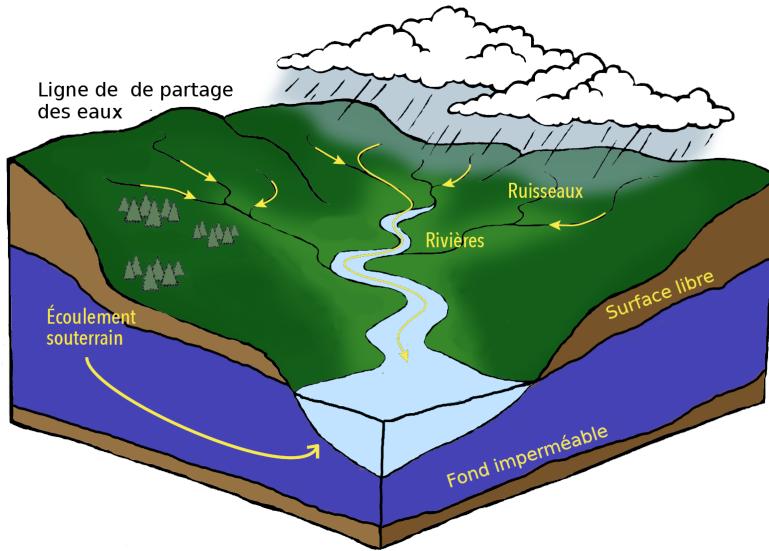


FIGURE 1.1 – Dans un bassin versant, un aquifère libre est délimité par la ligne de partage des eaux, sa surface libre, son fond imperméable et le réseau hydrographique. D'après <http://obvfleuvestjean.com>.

calcaires, des granites ou des karsts.

Quand l'eau s'infiltra dans le sol, elle forme une nappe souterraine au sein de l'aquifère. Ce réservoir est en relation avec la rivière. Quand il pleut, le réservoir se remplit, et se déverse ensuite lentement dans la rivière qui le draine. Dans certaines zones arides, il arrive que, au contraire, la rivière alimente l'aquifère qui l'entoure.

Lorsque le niveau du réservoir peut changer sans être limité par une couche imperméable, l'aquifère est dit « libre ». La nappe est alors surmontée d'une zone insaturée en eau. Dans le cas contraire, l'aquifère est dit « captif ». Nous nous intéresserons dans ce manuscrit, au cas des réservoirs libres (non confinés).

### 1.2.1 Composition des aquifères

Une grande variété de roches constitue la surface terrestre, dont la plupart est capable d'emmagerer de l'eau. La capacité de stockage d'un aquifère dépend des propriétés de la roche, principalement de sa porosité. La porosité est le rapport entre le volume occupé par l'air (ou l'eau),  $v_{vide}$  et le volume total du milieu poreux,  $v_{tot}$  :

$$s = \frac{V_{vide}}{V_{tot}} \quad (1.1)$$

Par définition, la porosité est comprise entre 0 et 1. Sa valeur varie d'un ensemble géologique à l'autre (Table 1.2.1). Cette porosité permet aux sols d'emmagerer de

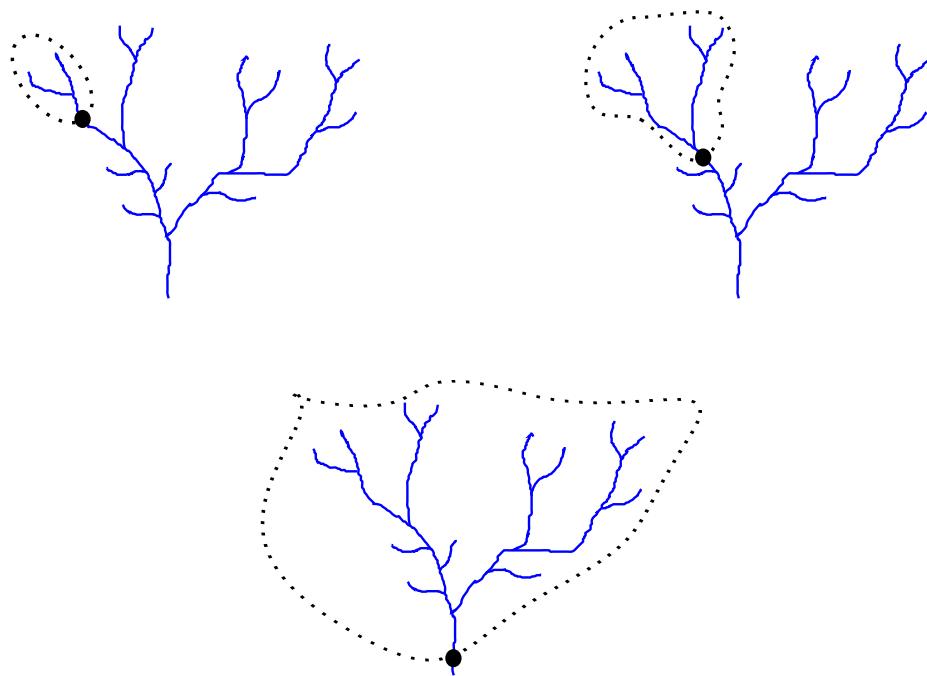


FIGURE 1.2 – Taille du bassin versant (pointillé noir) en fonction de la position du point exutoire (point noir). Le réseau de drainage est représenté en bleu.

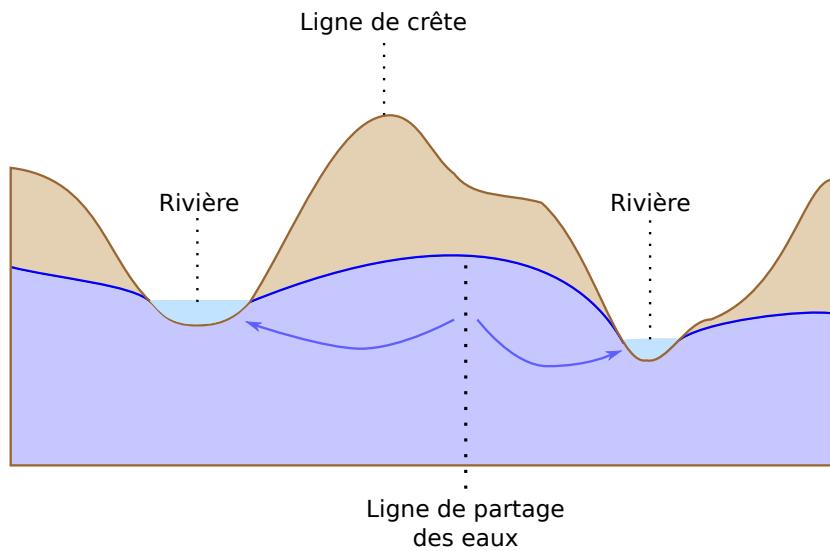


FIGURE 1.3 – Vue en coupe d'un bassin versant illustrant la différence entre ligne de crête et ligne de partage des eaux.

Type de roche	Porosité (%)	Perméabilité ( $\text{m s}^{-1}$ )
Schistes	0.5-7.5	$10^{-7} - 10^{-10}$
Calcaires, dolomies primaires	0.5-12.5	$10^{-2} - 10^{-6}$
Craies	8-37	$10^{-3} - 10^{-5}$
Grès	3.5-38	$10^{-3} - 10^{-6}$
Sables	15-48	$10^{-2} - 10^{-5}$
Argiles	44-53	$10^{-9} - 10^{-13}$

TABLE 1.1 – Porosité typique pour différents types de roches et milieux granulaires. Les fractures ne sont pas prises en compte ici, elle peuvent augmenter drastiquement la porosité. D'après *De Marsily* (1986).

l'eau.

En général, on définit trois zones de stockage : la zone vadose, la frange capillaire et la zone phréatique (*De Marsily*, 1986) (Figure 1.4). Près de la surface, la zone vadose correspond à la partie insaturée. Elle contient à la fois de l'eau et de l'air. C'est la zone à travers laquelle l'air atmosphérique percole. Dans cette partie, l'eau est maintenue sur les parois des pores par la tension de surface ce qui entraîne des variations spatiales et temporelles importantes de la proportion d'eau. La tension de surface introduit aussi des problèmes de mouillage et d'hystérésis sensibles à la géométrie des pores (*Gennes and Brochard-Wyart*, 2005; *Snoeijer and Andreotti*, 2013). En conséquence, la dynamique de l'écoulement dans la zone insaturée est compliquée par la présence de trois phases distinctes. La proportion d'eau dans la zone insaturée augmente progressivement avec la profondeur jusqu'à ce que les pores de l'aquifère ne contiennent pratiquement plus que de l'eau.

La zone saturée est séparée en deux parties. Sous la zone vadose, il y a une partie appelée frange capillaire (*Abdul and Gillham*, 1984). Cette zone est maintenue en dessous de la pression atmosphérique par capillarité. La taille de la frange capillaire varie fortement selon le milieu poreux : plus les pores sont petits plus la frange capillaire est grande (*Guyon et al.*, 2001).

En effet, la hauteur de la frange capillaire suit la loi de *Jurin* (1718). Cette dernière donne la hauteur de la dépression pour un capillaire plongé dans un liquide :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{r\rho g}, \quad (1.2)$$

où  $h$  est la hauteur de la dépression,  $\gamma$  la tension superficielle,  $\theta$  l'angle de contact entre le liquide et la paroi,  $\rho$  la masse volumique du liquide,  $r$  le rayon du capillaire et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Si on assimile un milieu poreux à un ensemble de capillaires, alors la loi de *Jurin* (1718) nous donne l'ordre de grandeur de la hauteur de la frange capillaire. Pour de l'eau,  $\gamma = 7.10^{-2} \text{ N m}^{-1}$ , et  $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . La hauteur

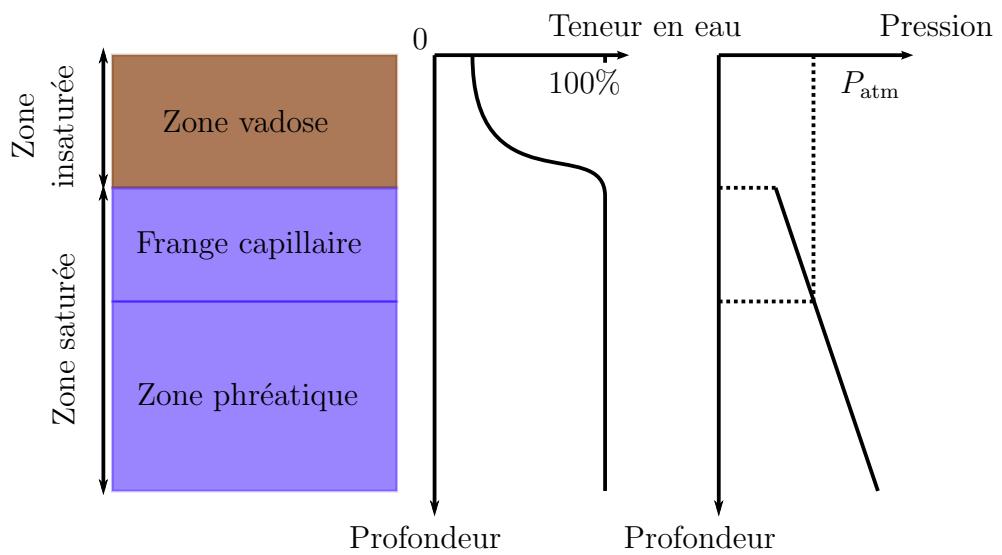


FIGURE 1.4 – Les trois couches d'un réservoir souterrain. La zone vadose est insaturée en eau, la frange capillaire est saturée avec une pression inférieure à la pression atmosphérique, et, en dessous du niveau piézométrique, le sol est saturé et la pression est supérieure à la pression atmosphérique. D'après Guérin (2015).

de la dépression dans le milieu poreux dépend donc de la taille des pores selon :

$$h \sim \frac{S_0}{r}, \quad (1.3)$$

où :

$$S_0 = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g} \quad (1.4)$$

est une constante qui vaut approximativement  $10^{-6} \text{ m}^2$ .

La taille des pores est du même ordre de grandeur que les grains qui composent l'aquifère. Pour de l'argile,  $r \sim 10^{-6} \text{ m}$ , de sorte que la frange capillaire peut être épaisse de plusieurs mètres (*Polubarinova-Kochina*, 1962). Dans du sable,  $r \sim 10^{-3} \text{ m}$  et la frange capillaire est épaisse de quelques millimètres.

Sous cette frange capillaire, on retrouve la partie phréatique dans laquelle la pression est supérieure à celle de l'atmosphère. La surface virtuelle qui sépare la frange capillaire de la zone phréatique est appelée « niveau piézométrique ». C'est la surface sur laquelle la pression est égale à la pression atmosphérique.

Dans la suite du manuscrit,  $s$  désigne la porosité efficace des aquifères. Elle correspond au rapport entre le volume d'eau que l'aquifère peut libérer par gravité et son volume total. La tension de surface retient une partie de l'eau dans les pores ; la porosité efficace est donc légèrement inférieure à la porosité totale de l'aquifère.

Dans la partie suivante, nous nous intéressons aux mécanismes du mouvement dans un milieu poreux homogène et saturé. Nous considérons que la zone vadose n'influence pas l'écoulement dans l'aquifère, et qu'elle peut être considérée comme un milieu poreux sec et non-mouillant. Nous ferons également l'hypothèse que l'épaisseur de la frange capillaire peut être négligée devant la taille de l'aquifère.

### 1.3 Écoulement en milieu poreux saturé

*Darcy* (1856) a été le premier à étudier expérimentalement l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux (Figure 1.5). Dans son expérience, de l'eau coule continûment à travers une colonne de sable. La pression de l'eau est imposée en entrée et en sortie de la colonne. Le débit sortant de la colonne,  $Q$ , est mesuré en fonction de la différence de hauteur d'eau  $\Delta H$ . *Darcy* (1856) observe que le débit est proportionnel à la différence de charge et inversement proportionnel à la longueur de la colonne :

$$Q = KS \frac{\Delta H}{L}, \quad (1.5)$$

où  $S$  est la section de la colonne et  $K$  le coefficient de proportionnalité. Ce coefficient exprimé en  $\text{m s}^{-1}$  est la conductivité hydraulique du milieu poreux. Il dépend à la fois des propriétés du milieu, mais aussi des propriétés du fluide. Le résultat empirique

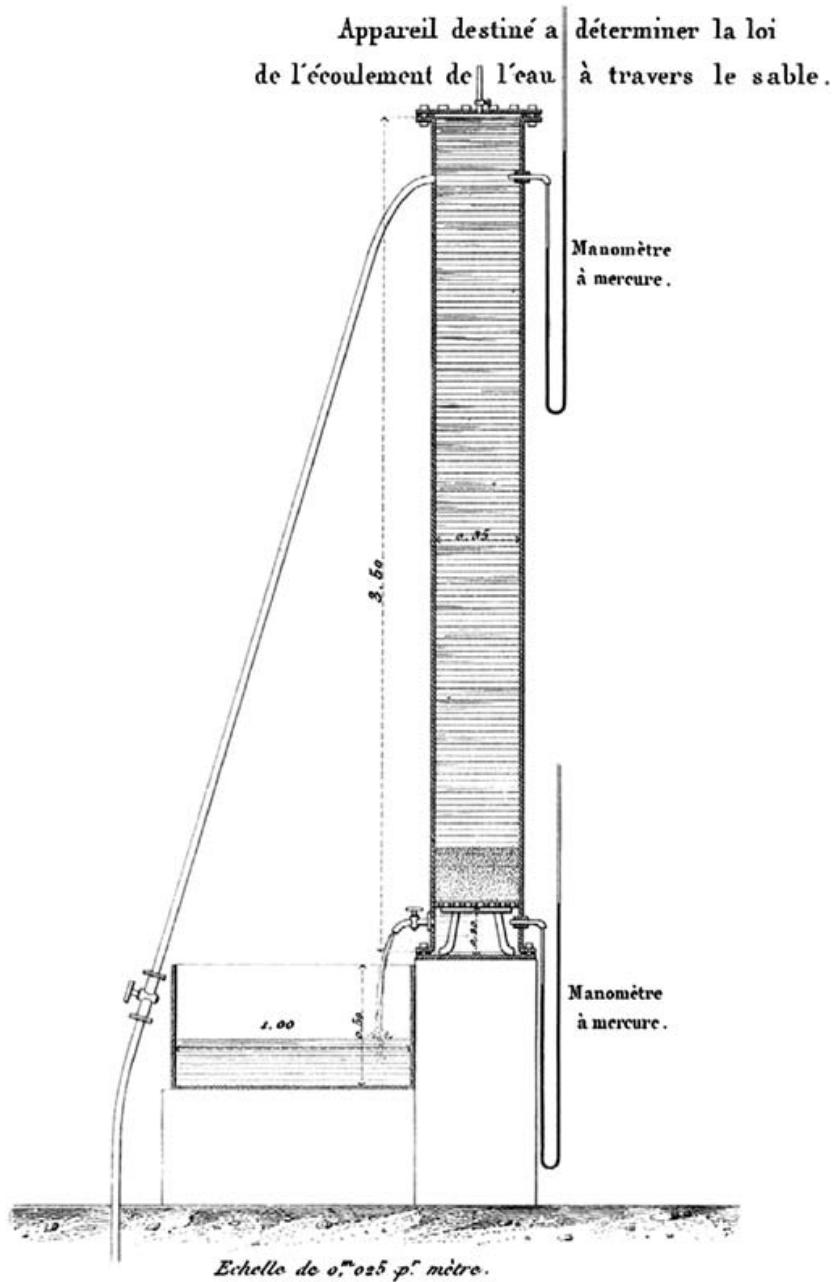


FIGURE 1.5 – Expérience développée par *Darcy* (1856) pour mesurer la perméabilité d'un milieu poreux. Lorsque de l'eau s'écoule dans un tube poreux, le débit sortant est proportionnel à la différence de pression entre l'entrée et la sortie du tube.

(1.5) obtenu par Darcy à depuis été généralisé à trois dimensions pour des fluides incompressibles :

$$\vec{q} = -\frac{k}{\eta}(\vec{\nabla}p - \rho\vec{g}) \quad (1.6)$$

où  $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide,  $\rho$  sa densité,  $p$  la pression, et  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur.  $\vec{q}$  est la vitesse de Darcy ou de filtration (vecteur flux volumique de fluide en  $\text{m s}^{-1}$ ). Elle correspond au débit volumique normalisé par unité de surface. Le coefficient de proportionnalité,  $k$ , est la perméabilité du milieu poreux. Exprimée en  $\text{m}^2$ , elle caractérise le géométrie du milieu poreux. À géométrie fixée, elle est proportionnelle et est proportionnelle au carré de la taille des pores (*Guyon et al.*, 2001).

En notant  $y$  la coordonnée verticale orientée vers le haut, on peut réécrire la loi de Darcy sous la forme :

$$\vec{q} = -\frac{k}{\eta\rho g}\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho g} + y\right) \quad (1.7)$$

On peut alors introduire le potentiel de vitesse  $\phi = \frac{p}{\rho g} + y$  qu'on appelle aussi charge hydraulique. La loi de Darcy s'écrit alors sous la forme :

$$\vec{q} = -K\vec{\nabla}\phi \quad (1.8)$$

avec  $K = \frac{k}{\eta\rho g}$ , la conductivité hydraulique.  $K$  est homogène à une vitesse, on l'exprime généralement en  $\text{m s}^{-1}$ .

Les composantes horizontales et verticales de la vitesse de Darcy sont alors définies par :

$$\vec{u} = -K\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad (1.9)$$

et :

$$\vec{v} = -K\frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (1.10)$$

La loi de Darcy a néanmoins plusieurs limites. L'écoulement doit être laminaire et le milieu homogène. Dans la nature, on retrouve des aquifères dans lesquels la loi de Darcy (1.6) n'est pas valide. Par exemple, dans les aquifères karstiques, l'écoulement se fait dans des cavités dont les dimensions peuvent aller jusqu'à plusieurs mètres. L'écoulement n'y est alors plus laminaire (*Aquilina et al.*, 2006). C'est la même chose dans les aquifères fracturés lorsque certaines fractures sont suffisamment larges (*Long et al.*, 1982; *Renard and De Marsily*, 1997). La loi de Darcy peut alors être corrigée, en introduisant un coefficient  $\alpha$  dénommé paramètre d'Ergün. On obtient alors la loi de Darcy-Forcheimer (*Ward*, 1964) :

$$\vec{q}(1 + \alpha Re_k) = -\frac{k}{\eta\rho g}\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho g} + y\right), \quad (1.11)$$

où  $Re_k$  est le nombre de Reynolds basé sur la longueur caractéristique  $\sqrt{k}$ .

Lorsque les fractures sont orientées dans une direction préférentielle, l'aquifère n'est plus isotrope (*Neuman et al.*, 1984). Cet effet peut être pris en compte en introduisant une perméabilité tensorielle.

## 1.4 Écoulement en milieu poreux homogène

Contrairement aux aquifères karstiques et fracturés, les aquifères poreux sont composés de grains (sables, craies, graviers, grès, etc.). À l'échelle de l'aquifère qui fait au minimum plusieurs dizaines de mètres, on peut souvent le considérer comme homogène. C'est sur ces aquifères que nous nous concentrerons dans ce manuscrit.

L'eau étant incompressible, la conservation de la masse implique que la divergence de la vitesse de Darcy est nulle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0. \quad (1.12)$$

En combinant la loi de Darcy (1.6) à la conservation de la masse, on obtient une équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0, \quad (1.13)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien. En coordonnées cartésiennes, il correspond à :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}. \quad (1.14)$$

Pour résoudre l'équation de Laplace (8.1), il faut préciser les conditions aux limites.

Dans la partie suivante, nous décrirons les conditions aux limites classiquement utilisées dans un aquifère poreux homogène.

## 1.5 Écoulement dans un aquifère poreux homogène

La première étape pour étudier l'écoulement dans un aquifère consiste à réduire la complexité du réseau de drainage. Pour ce faire, nous avons choisi de représenter le réseau par une rivière droite séparant l'aquifère en deux parties symétriques. Le chenal est également considéré comme infiniment long avec une pente faible. L'écoulement dans l'aquifère est donc essentiellement perpendiculaire au chenal. L'étude de l'écoulement dans un aquifère peut donc se ramener à celle de l'écoulement dans un plan vertical (Figure 1.6).

Dans la suite du manuscrit, nous nous concentrerons sur l'écoulement dans un plan vertical transverse à la rivière, et nous noterons  $x$  la coordonnée horizontale et  $y$  la coordonnée verticale.

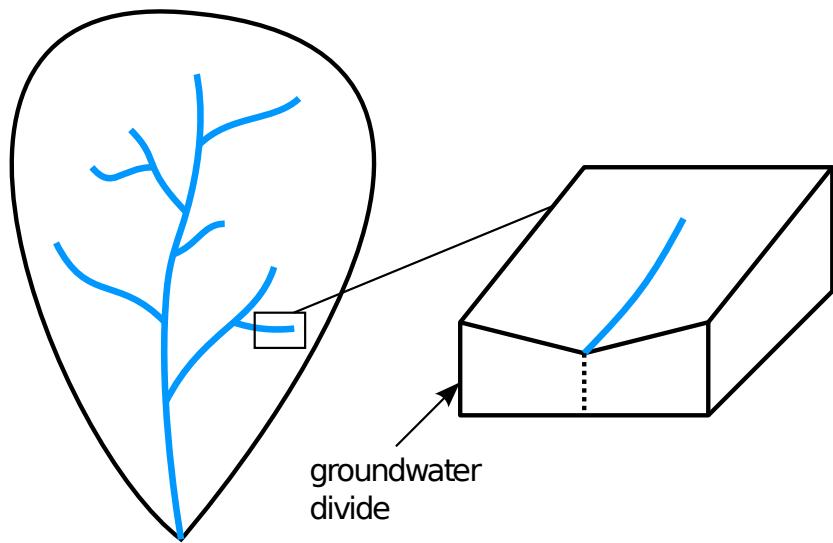


FIGURE 1.6 – Un réseau de drainage est complexe et ramifié. Pour simplifier le problème de l’écoulement souterrain, nous réduisons le réseau de drainage à un chenal linéaire. Le chenal sépare alors l’aquifère en deux parties symétrique de part et d’autre du cours d’eau. L’écoulement est maintenu dans un plan vertical perpendiculaire à la rivière.  
D’après *Bresciani et al. (2014)*

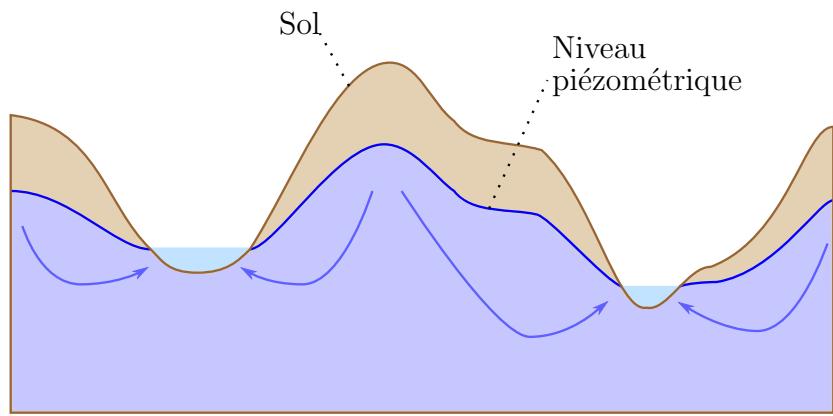


FIGURE 1.7 – Niveau piézométrique dans un aquifère. Selon l’hypothèse de *Toth (1963)*, la position de la nappe est fixe et proportionnelle à la topographie.

Si on regarde une coupe transversale à l'axe de la rivière (Figure 1.7), nous devons définir cinq conditions aux limites.

La limite la plus évidente est la ligne de partage des eaux. De l'autre côté de cette limite, l'eau s'écoule vers une autre rivière. Si on appelle  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la ligne de partage des eaux, alors la condition à cette limite est :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0. \quad (1.15)$$

Si la ligne de partage des eaux est verticale, cette condition devient :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0. \quad (1.16)$$

Le fond de l'aquifère est lui délimité par une couche imperméable. Cette couche n'est pas toujours bien définie. Dans certains cas, la perméabilité décroît progressivement avec la profondeur (*Godsey et al.*, 2009). Dans d'autres cas, la couche imperméable est considérée comme étant situé à l'infini (*Goderniaux et al.*, 2013).

Pour des raisons de simplicité, on considérera la limite comme étant bien définie, séparant l'aquifère homogène d'une couche imperméable dans laquelle l'eau ne peut pas circuler. La condition est alors la même que pour la ligne de partage des eaux :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0. \quad (1.17)$$

Si la couche imperméable est horizontale, la condition limite devient alors :

$$\frac{d\phi}{dy} = 0. \quad (1.18)$$

Le niveau piézométrique, quant à lui, est la frontière qui concentre les difficultés. Dans un aquifère libre, la hauteur varie selon l'eau de pluie qui recharge l'aquifère. *Toth* (1963) considère que la hauteur de la nappe est fixe et reproduit la topographie (Figure 1.7). Il linéarise ensuite la position de la surface de la nappe et considère que la topographie agit comme une faible perturbation sur le potentiel. Ceci lui permet de résoudre l'équation de Laplace (Figure 1.8). Avec cette hypothèse sur la forme de la surface libre, *Toth* (1963) a mis en évidence l'existence d'écoulements profond sur des temps géologiques, et de flux d'eau entre bassin versants.

En réalité, la surface de la nappe est libre. Sa forme dépend de l'écoulement et l'écoulement dépend de sa forme. On a donc affaire à un problème de Stefan (*Stefan*, 1875). Il faut donc deux conditions pour décrire cette limite.

La nappe est relié à l'atmosphère par les pores du milieu poreux. Elle est donc à pression atmosphérique, ce qui donne pour le potentiel de vitesse :

$$\phi = h \text{ sur la surface libre.} \quad (1.19)$$

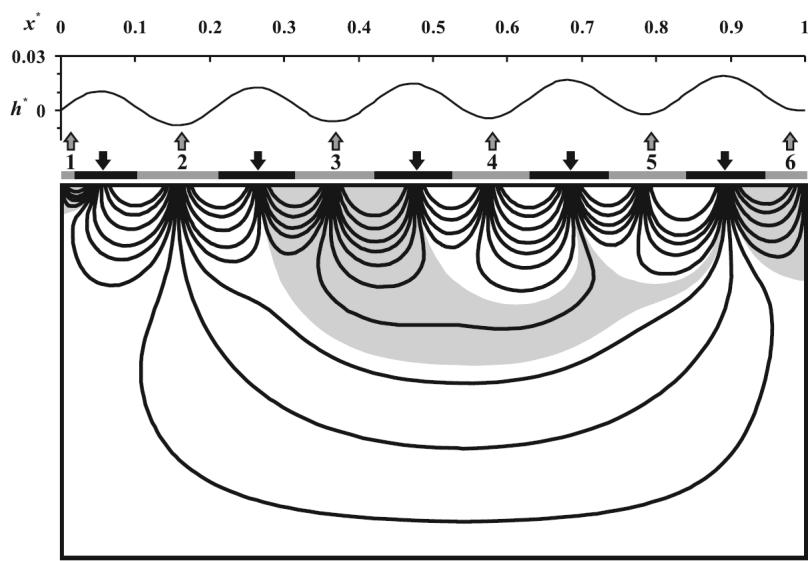


FIGURE 1.8 – Ligne de courant de l'équation de Laplace pour une condition de surface libre linéarisée. La perturbation représenté en haut est sinusoïdale avec une pente  $s$  :  $\phi = sx + a \sin(kx)$ , où  $a$  est l'amplitude et  $k$  le nombre d'onde de la perturbation. En haut, les six sorties représentent six rivières. La zone en gris correspond à la partie du domaine qui alimente la rivière 3. Cette simulation numérique extraite de *Cardenas* (2007) reproduit la solution de *Toth* (1963).

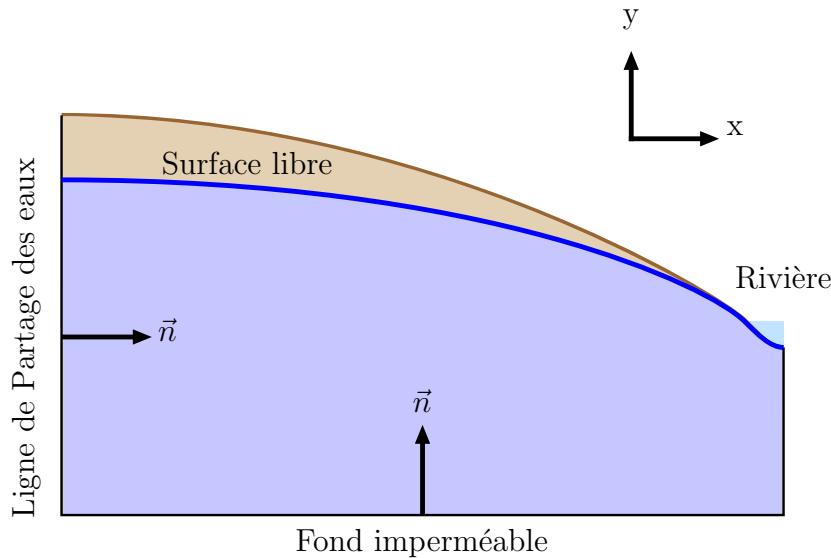


FIGURE 1.9 – Coupe transversale d'un aquifère délimité par la ligne de partage des eaux la rivière s'écoule perpendiculairement au plan de la figure.

De plus, la surface libre doit satisfaire la conservation de la masse :

$$\left( s \frac{\partial h}{\partial t} - R \right) n_y = K \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} \quad (1.20)$$

où  $R$  désigne le taux de précipitations,  $h$  la hauteur du niveau piézométrique,  $\vec{n}$  le vecteur normal à la surface libre, et  $n_y$  sa composante verticale.

Lorsque le niveau piézométrique s'élève suffisamment pour dépasser le niveau du sol, l'eau suinte le long de la topographie. La surface libre adopte alors la forme du sol, sa position est contrainte. Cette surface fixe, appelée surface de suintement satisfait alors la condition :

$$\phi = h \text{ sur la surface de suintement.} \quad (1.21)$$

Ce qui revient à l'hypothèse de *Toth* (1963).

L'aquifère est considéré comme symétrique de part et d'autre de la rivière (*Bresciani et al.*, 2014), l'étude de l'écoulement peut se faire sur une moitié de l'aquifère. Nous devons donc définir une ligne de partage des eaux sous la rivière. Cette dernière est donc une fois de plus :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0. \quad (1.22)$$

Les différentes conditions aux limites de notre aquifère sont donc bien définies (1.9.)

L'écoulement dans un aquifère est donc un écoulement bi-dimensionnel avec frontière libre régi par l'équation de Laplace. Il n'existe pas de solution analytique générale à cette équation. Pour la résoudre dans une configuration réaliste, il faut une résolution

numérique. Or, les résolutions numériques sont généralement conçues pour modéliser le comportement d'un aquifère spécifique, et doivent être adaptées pour toute nouvelle situation. Au contraire, en choisissant d'étudier des modèles simplifiés, la résolution analytique est facilitée, ce qui permet de dégager les caractéristiques génériques de l'écoulement, et ainsi de répondre à des questions fondamentales dans des cas simplifiés. C'est la démarche que nous adoptons dans la suite du manuscrit.

# Chapitre 2

## Aquifère peu profond

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à l'hypothèse la plus courante pour étudier l'écoulement de l'eau souterraine, l'hypothèse de Dupuit.

### 2.1 Hypothèse de Dupuit

Lorsque la hauteur de la nappe  $H$  peut être négligée par rapport à sa longueur  $L$ , l'écoulement est dit en « eau peu profonde »(Figure 2.1). On peut alors supposer que la composante verticale de la vitesse est négligeable devant la composante horizontale, comme pour l'écoulement unidimensionnel dans un canal décrit par l'équation *de Saint-Venant* (1871).

Par exemple, le bassin versant de la Seine s'étend sur plusieurs centaines de kilomètres, et n'occupe que quelques centaines de mètres de profondeur. On peut alors considérer l'écoulement dans l'aquifère comme étant pratiquement horizontal. Ainsi la vitesse est horizontale et uniforme le long d'une ligne verticale (Figure ??). Elle est donnée par la dérivée du potentiel de vitesse :

$$u_{Dupuit} = -K \frac{dh}{dx}. \quad (2.1)$$

Le débit traversant une ligne verticale est alors donné par :

$$Q = -Kh \frac{dh}{dx} = -\frac{K}{2} \frac{dh^2}{dx} \quad (2.2)$$

En combinant cette équation avec la conservation de la masse, on obtient l'équation de Dupuit-Boussinesq (*Boussinesq*, 1904) :

$$s \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + R, \quad (2.3)$$

où  $s$  est la porosité efficace de l'aquifère.

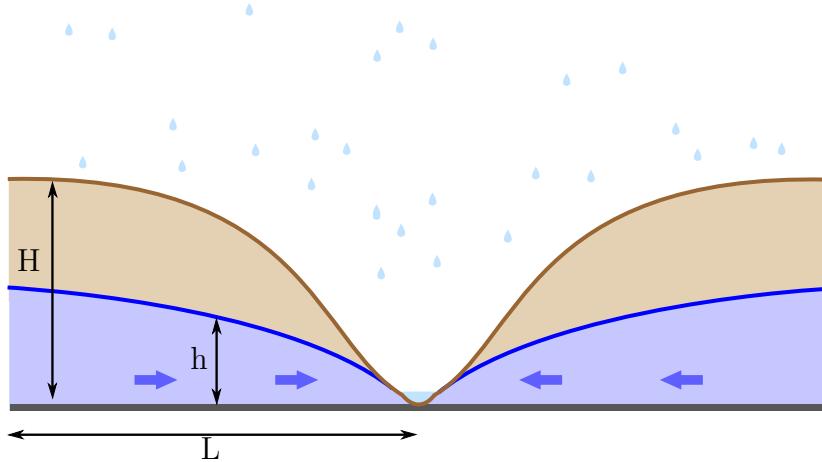


FIGURE 2.1 – Coupe verticale perpendiculairement à la rivière d'un aquifère peu profond. Quand  $h \ll L$ , l'écoulement peut être considéré comme horizontal.

## 2.2 Équation de Dupuit-Boussinesq

Les modèles développés à partir de l'équation de Dupuit-Boussinesq (2.3) sont largement employés pour décrire les écoulements souterrains. L'équation de Dupuit-Boussinesq permet de réduire le problème à ses dimensions horizontales. C'est une équation non-linéaire, qui n'admet pas de solution analytique générale. Sa résolution numérique permet d'estimer la forme des basins versants hydrologiques. Cependant, on trouve dans la littérature des solutions asymptotiques pour l'étiage et la montée de crue.

## 2.3 Solutions asymptotiques de l'équation de Dupuit-Boussinesq

Parmi les solutions de l'équation de Dupuit-Boussinesq il existe deux régimes asymptotiques. Le régime de montée de crue, juste après le début de la pluie, ainsi que le régime de fin de crue, longtemps après l'arrêt de la pluie.

### 2.3.1 Étiage

Après une longue période sans précipitations, l'aquifère se décharge (*Brutsaert and Nieber, 1977*). Dans la nature, ce régime est souvent utilisé pour estimer la conductivité

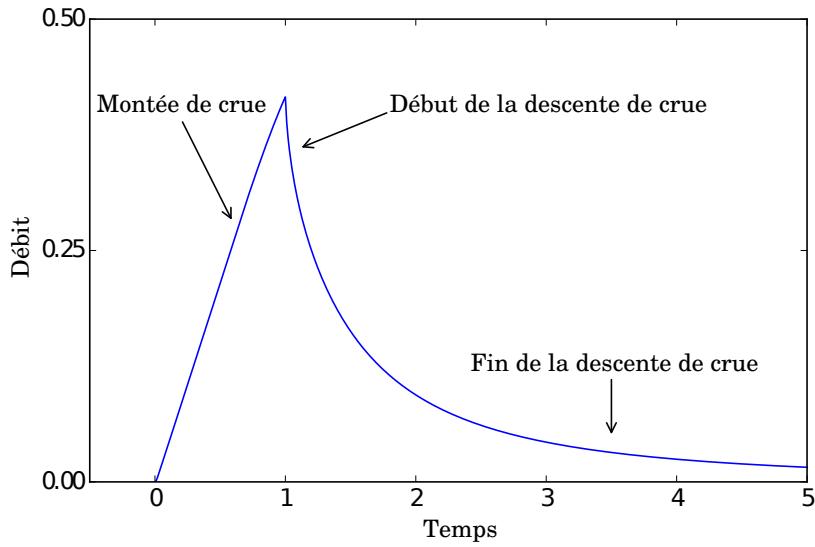


FIGURE 2.2 – Simulation numérique d'un hydrogramme par l'équation de Dupuit-Boussinesq. Les paramètres  $s$  et  $K$  sont fixés à 1. Une pluie constante est imposée entre  $t = 0$  et  $t = 1$ . D'après Guérin (2015).

hydraulique et la porosité de l'aquifère à l'échelle du bassin versant. Longtemps après les précipitations, la surface libre approche une solution auto-similaire de l'équation de Dupuit-Boussinesq (2.3) :

$$h(x, t) = \frac{L_a^2 s_a}{K_a(t - t_0)} H_r \left( \frac{x}{L_a} \right) \quad (2.4)$$

où  $L_a$  est la longueur de l'aquifère,  $s_a$  sa porosité,  $K_a$  sa conductivité hydraulique,  $x$  la distance à la rivière,  $t$  le temps et  $t_0$  le temps critique pour lequel le régime asymptotique diverge.  $H_r$  est un profil sans dimension de l'élévation du niveau piézométrique. Il satisfait une équation différentielle sans paramètre définie par Polubarnova-Kochina (1962) :

$$H_r H_r'' + H_r'^2 + H_r = 0 \quad (2.5)$$

Près de la sortie, la solution de cette équation peut être approximée par une racine carrée :

$$H_r \sim a_r \sqrt{\frac{x}{L_a}}, \quad (2.6)$$

où  $a_r$  est une constante mathématiques exprimée à l'aide de la fonction gamma d'Euler  $\Gamma$  (Brutsaert, 2005) :

$$a_r = \sqrt{\frac{8}{3}} \left( \frac{\Gamma(7/6)}{\sqrt{\pi} \Gamma(2/3)} \right)^{3/2} \approx 1.177. \quad (2.7)$$

En injectant cette solution auto-similaire à l'expression du flux à travers une surface verticale (2.2) et en multipliant par la largeur de l'aquifère  $W_a$ , on obtient le débit sortant dans la rivière :

$$Q_r = C_r \frac{s_a^2 W_a L_a^3}{K_a (t - t_0)^2} \quad (2.8)$$

où  $C_r$  est une constante mathématique définie par  $C_r = \frac{a_r^2}{2}$ . Ainsi, l'étude des signaux de récession sur un hydrogramme permet de calculer le rapport  $\frac{s_a^2}{K_a}$ . Il ne permet cependant pas de séparer la porosité  $s_a$  de la conductivité hydraulique  $K_a$ .

### 2.3.2 Montée de crue

Lorsqu'un aquifère initialement vide est soumis à une pluie constante, l'équation de Dupuit-Boussinesq (2.3) admet une solution asymptotique appelée régime de montée de crue. À  $t = 0$ , l'aquifère est vide  $h_m(x, t = 0) = 0$ . La pluie commence avec un taux de précipitations  $R_m$  qui demeure constante pendant une durée  $T_m$ . La solution de ce problème mathématique est alors une solution auto-similaire dont l'expression est :

$$h_m = \frac{R_m t}{s_a} H_m \left( \frac{s_a x}{t} \sqrt{\frac{2}{K_a R_m}} \right), \quad (2.9)$$

où  $H_m$  est la solution d'une équation différentielle sans paramètre (*Guérin et al.*, 2014) :

$$H_m H_m'' + H_m'^2 + \frac{1}{2}(\chi H_m' - H_m + 1) = 0, \quad (2.10)$$

où  $\chi$  est une coordonnée auto-similaire dépendant du temps et de l'espace :

$$\chi = \frac{s_a x}{t} \sqrt{\frac{2}{K_a R_m}}. \quad (2.11)$$

En combinant cette expression avec celle du flux à travers une surface verticale (2.2), on obtient le débit de montée de crue :

$$Q_m = \frac{a_m^2 W_a}{s_a} \sqrt{\frac{K_a}{2}} R_m^{3/2} t, \quad (2.12)$$

où  $a_m \approx 1.016$  est une constante obtenue numériquement à partir de (2.10).

### 2.3.3 Approche expérimentale

Afin d'étudier ces solutions asymptotiques, *Guérin* (2015) a mis en place un aquifère expérimental (Figure 2.3). Il est composé de billes de verre maintenues dans

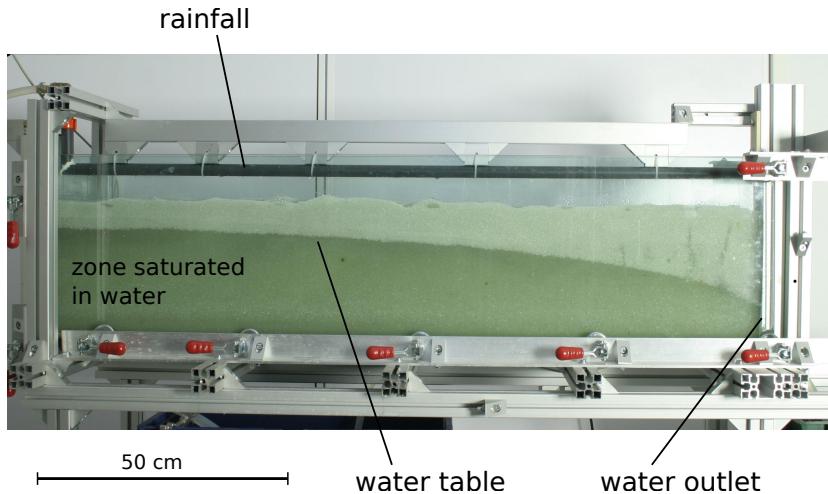


FIGURE 2.3 – Photo de l'aquifère expérimental de Guérin (2015)

une tranche verticale par des plaques en verre. La limite de partage des eaux et le fond de l'aquifère sont modélisés par des murs imperméables. Les précipitations sont obtenues grâce à un tuyau percé qui crée une pluie artificielle au dessus de l'aquifère. Une expérience typique commence avec un aquifère vide. L'eau de pluie s'infiltra dans le milieu poreux et s'y accumule. La nappe s'élève et l'eau s'écoule lentement à travers une grille perméable modélisant la rivière. L'eau quittant l'aquifère est ensuite récoltée et pesée. Le débit est obtenu en calculant la dérivée de la masse d'eau accumulée par rapport au temps. Cet aquifère expérimental permet d'obtenir des hydrogrammes en laboratoire (Figure 2.4).

Ces hydrogrammes permettent d'étudier les régimes asymptotiques. Par exemple, pour la montée de crue, en dérivant l'équation (2.12) issue de l'équation de Dupuit-Boussinesq, on prévoit que la pente du débit sortant  $\dot{Q}_m$  est proportionnelle à  $(R_m/K)^{3/2}$  :

$$\frac{\dot{Q}_m s_a}{K_a^2 W_a} \sim \frac{a^2}{\sqrt{2}} \left( \frac{R}{K} \right)^{3/2}. \quad (2.13)$$

Pour différents taux de précipitations, Guérin *et al.* (2014) mesure la pente du régime de montée de crue et la trace en fonction du taux de précipitations (Figure 2.5). Une loi de puissance est ensuite ajustée sur les résultats. L'exposant obtenu est  $1.47 \pm 0.01$ , en accord avec la prédiction théorique de  $3/2$ . Cependant, le préfacteur de la loi expérimental est deux fois plus grand que la prédiction théorique.

Cet aquifère expérimental a été conçu pour respecter l'hypothèse de Dupuit. Néanmoins, en ignorant la composante verticale de l'écoulement, cette hypothèse engendre des erreurs, surtout près de l'exutoire, où la surface libre s'incline considérablement. Nous pouvons donc suggérer que le désaccord entre le préfacteur observé dans les expériences et la théorie asymptotique résulte de ce que la composante verticale de

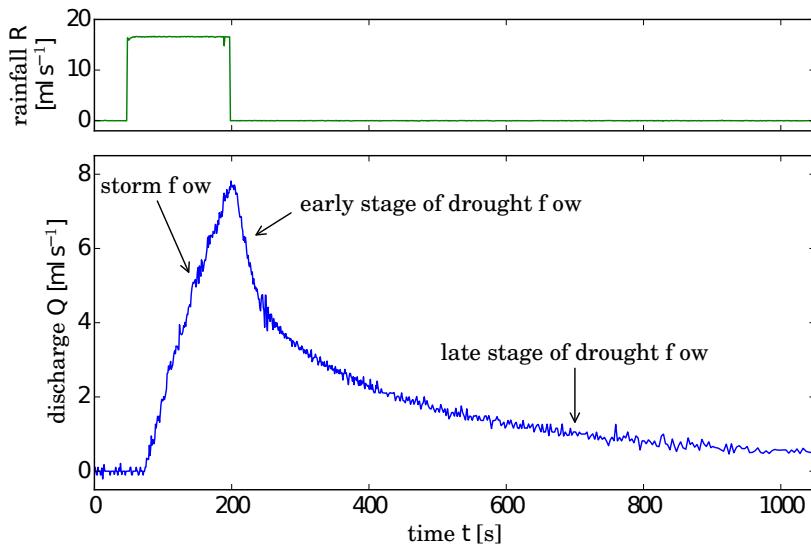


FIGURE 2.4 – Hydrographe expérimental (*Guérin*, 2015). En haut le taux de précipitations, en bas le débit sortant de l'aquifère. La forme de l'hydrogramme est identique à celle observée dans la nature.

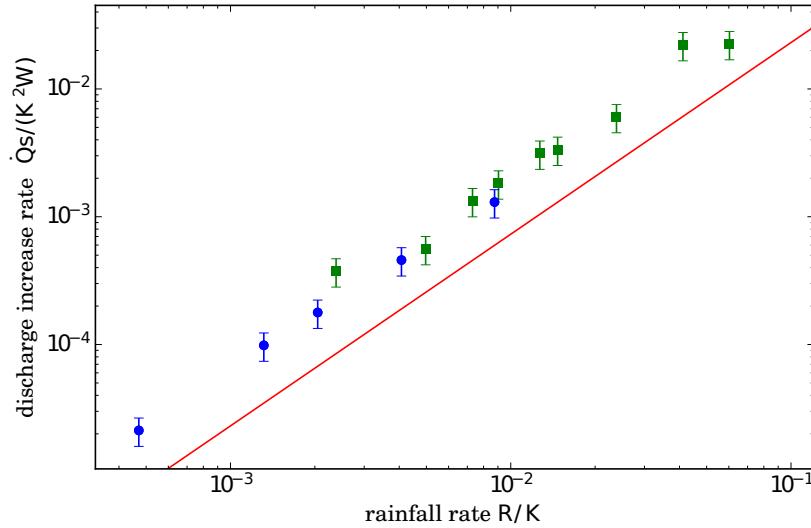


FIGURE 2.5 – Régime asymptotique de montée de crue dans l'aquifère expérimental de *Guérin* (2015). Les points représentent les résultats expérimentaux, en vert pour des billes de 4 mm, et en bleu pour les billes de 1 mm de diamètre. La ligne rouge correspond à la loi de puissance ajustée sur les points expérimentaux. Son exposant est de  $1.47 \pm 0.01$ .

l'écoulement importe près de l'exutoire.

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons au cas où l'hypothèse de Dupuit n'est plus valide, c'est-à-dire lorsque l'aquifère est perméable jusqu'à une profondeur comparable à la distance entre deux rivières.

# Chapitre 3

## Aquifère profond

L'hypothèse de Dupuit repose sur le fait que les dimensions horizontales d'un aquifère sont souvent bien plus grande que ses dimensions verticales. L'écoulement est alors quasi-horizontal. Cependant dans la nature, on ne peut pas toujours négliger la composante verticale de l'écoulement, notamment près de la rivière (*Bresciani et al.* (2014), Figure 3.1).

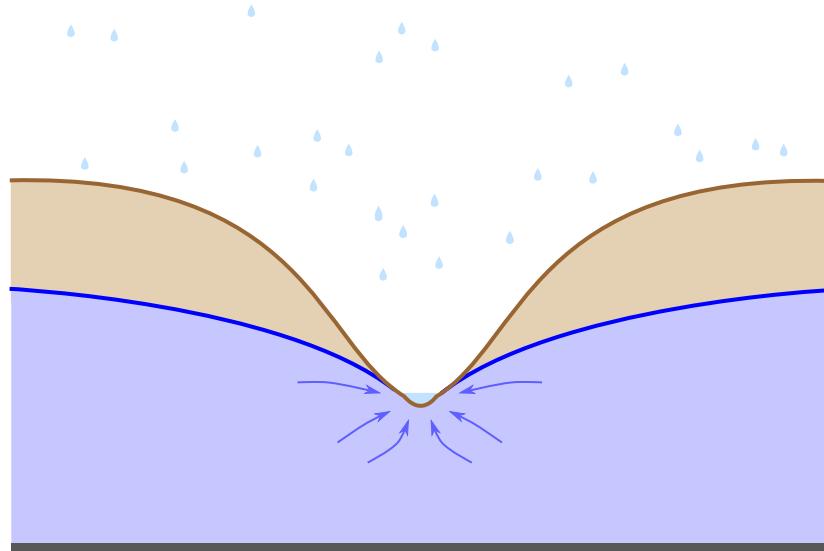


FIGURE 3.1 – Coupe verticale perpendiculaire à l'axe de la rivière d'un aquifère profond. Près de la rivière, l'écoulement ne peut plus être considéré comme horizontal.

### 3.1 En laboratoire

*Lehr* (1963) est le premier à avoir étudié les effets bi-dimensionnels d'un écoulement souterrain à l'aide d'une expérience de laboratoire (Figure 3.2). Pour cela, un milieu poreux composé de billes de verre est maintenu dans un plan vertical par des plaques transparentes. Un flux constant d'eau, imposé par les côtés, s'écoule dans le milieu poreux et sort par la rivière expérimentale située au milieu du dispositif. En injectant du colorant, on peut suivre les lignes de courant. Dans cette expérience, on s'intéresse seulement à l'état stationnaire ; le débit sortant par la rivière est alors égal à celui entrant par les côtés.

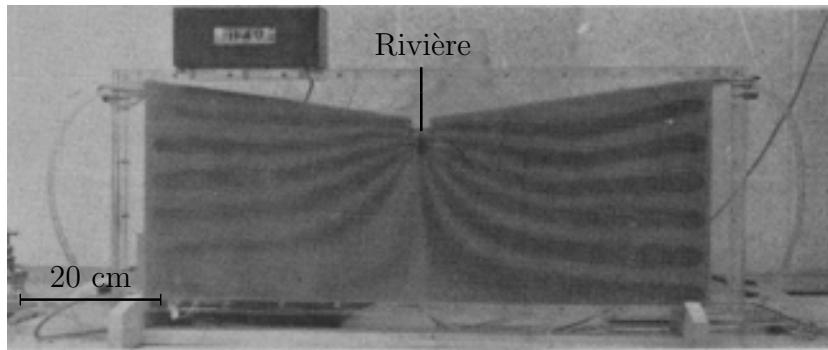


FIGURE 3.2 – Photographie de l'expérience de *Lehr* (1963). L'eau alimente l'aquifère expérimental par les côtés. Le colorant injecté permet de suivre les lignes de courant.

Dans l'expérience de *Lehr* (1963), la largeur de l'aquifère est faible devant sa hauteur et sa profondeur, l'écoulement se fait donc dans le plan vertical. La hauteur de l'aquifère est comparable à sa longueur, l'écoulement est donc bi-dimensionnel. Enfin, c'est un écoulement dans un milieu poreux, que l'on peut donc décrire par l'équation de Laplace (8.1). Pour résoudre cette équation, il nous faut d'abord préciser les conditions aux limites. Le fond de l'aquifère est imperméable et horizontal, la condition pour le potentiel de vitesse peut alors s'écrire :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0. \quad (3.1)$$

À la rivière, la nappe est en contact avec l'air. La pression est donc atmosphérique, ce qui correspond pour le potentiel de vitesse à :

$$\phi = h \quad \text{sur la rivière.} \quad (3.2)$$

Sur chaque côté, un flux constant d'eau  $Q$  arrive. Ces côtés sont verticaux donc les conditions aux limites peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{Q}{H} & \text{à gauche,} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{Q}{H} & \text{à droite,} \end{cases} \quad (3.3)$$

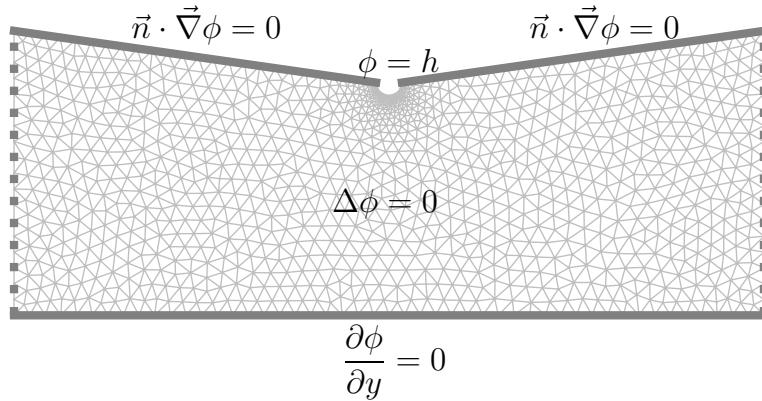


FIGURE 3.3 – Condition aux limites de l’expérience de *Lehr* (1963). Le maillage obtenu avec Freefem++ est représenté en gris.

où  $H$  est la hauteur de l’aquifère. Dans cette expérience, il n’y a pas de surface libre. La surface de la nappe phréatique est imposé par une surface en plexiglas imperméable. La condition à la surface est donc à nouveau :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0. \quad (3.4)$$

Puisque les conditions aux limites sont imposées pour tous les bords, nous pouvons résoudre l’équation de Laplace (8.1). Ici, nous utiliserons la méthode des éléments finis (*Hecht*, 2012). Cette méthode numérique peut être utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles sur un domaine compact. Pour cela, le domaine doit être découpé en mailles (Figure 3.3). Sur chacune de ces mailles, la solution est représentée par une fonction linéaire par morceau, appelée « élément fini ». L’équation aux dérivées partielles se réduit alors à un système d’équation algébriques linéaires. Une matrice représente les conditions aux limites. Finalement, nous obtenons une équation matricielle linéaire pour tout le domaine qui peut ensuite être résolue numériquement. L’écoulement est alors connu sur les noeuds du maillage (les intersections des mailles). Une extrapolation permet de calculer l’écoulement sur tout le domaine. Nous pouvons alors tracer les lignes de courant pour retrouver celles obtenues expérimentalement (Figure 3.4).

Nous observons que, près de la sortie, les lignes de courant ne sont pas horizontales. L’écoulement est même exactement vertical juste sous la rivière, conformément aux observations expérimentales de *Lehr* (1963).

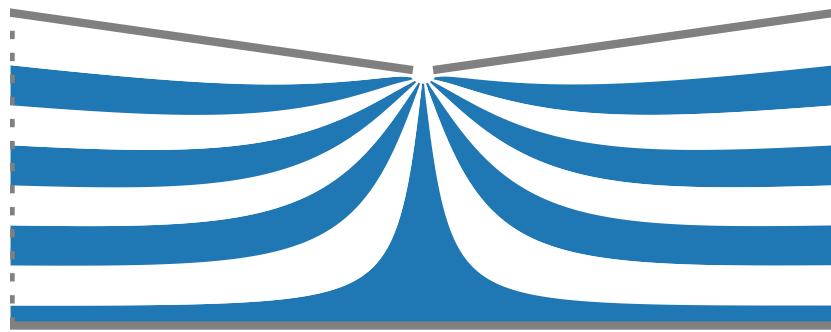


FIGURE 3.4 – Résolution numérique à l'aide de la méthode des éléments finis du problème de *Lehr* (1963). Le contour des lignes de courant de l'écoulement sont représentés en contour bleu .

## 3.2 Dans la nature

Afin d'observer les effets bi-dimensionnels sur le terrain, il est possible d'utiliser une installation dite en « flûte de Pan ». Cela consiste à placer des piézomètres (*i.e.* des forages dans la nappe) à différentes profondeurs, mais à la même distance de la rivière. Si l'écoulement est strictement horizontal, alors les piézomètres de la flûte mesurent une charge hydraulique identique. *Haria and Shand* (2004) ont utilisée ce type de dispositif pour étudier l'influence de la distance à la rivière sur l'écoulement dans la nappe dans le bassin versant du fleuve Severn au Pays de Galles : quatre flûtes de pan (A, B, C et D) ont été placées dans l'aquifère (Figure 3.5).

Chaque piézomètre mesure la charge hydraulique. Cette charge hydraulique peut être convertie en hauteur d'eau par rapport au niveau du sol (*metres relative to ground level*, mrgl). Ainsi, on obtient une série temporelle de la charge dans chaque forage (Figure 3.6).

Sur la série temporelle, les charges hydrauliques mesurées à différentes profondeurs sont en phase ; après la pluie la pression augmente dans l'aquifère. Cependant, ces signaux ne se superposent pas comme pour un écoulement strictement horizontal.

Les résultats de cette étude suggèrent que l'écoulement présente une forte composante verticale au voisinage de la rivière, en violation avec l'hypothèse de Dupuit. Dans la suite de ce manuscrit, nous allons donc nous attacher à essayer de comprendre dans quelle mesure la structure bi-dimensionnelle de l'écoulement influence les relations

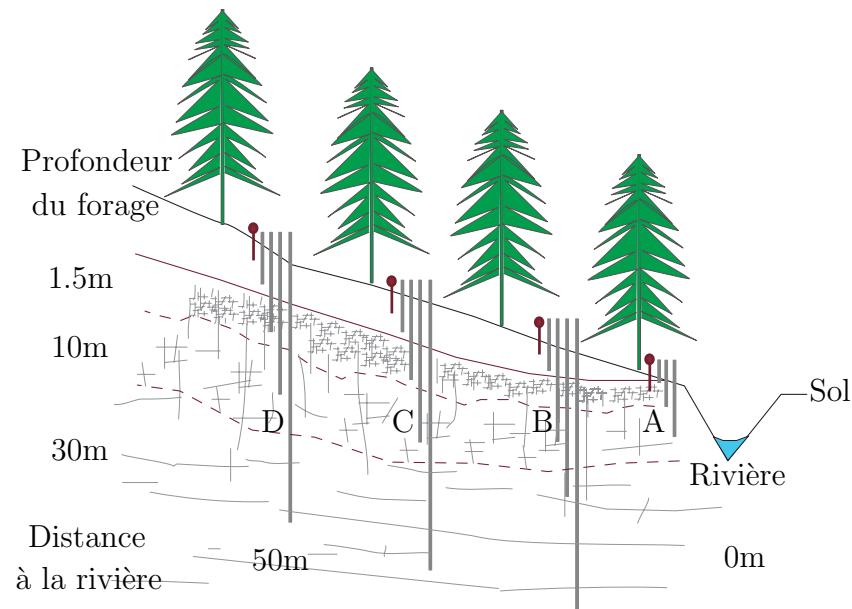


FIGURE 3.5 – Schéma en coupe du dispositif de *Haria and Shand* (2004) sur la rivière Severn pour mesurer la pression à différentes profondeurs. Les flûtes de pan sont constituées de plusieurs piézomètres plongeant à différentes profondeur, ces dispositifs (notés A, B, C et D) sont placées à différentes distance du cours d'eau.

nappe-rivière.

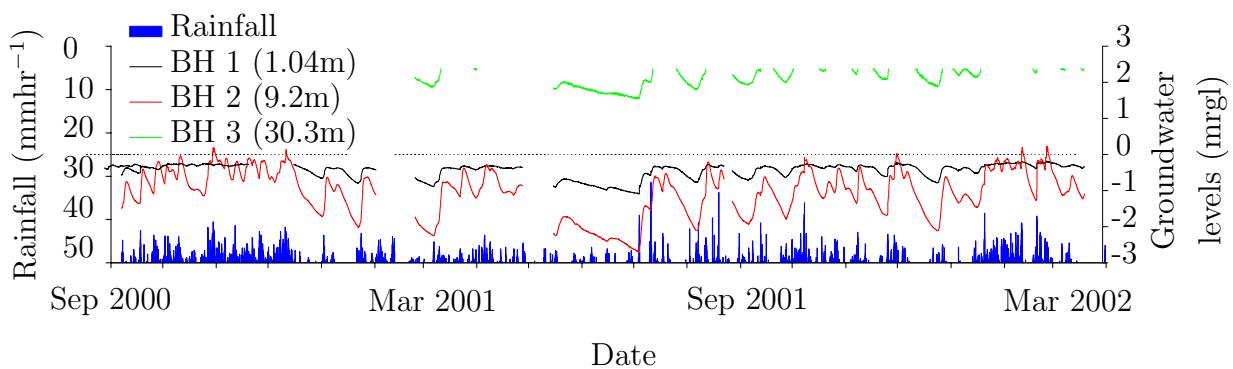


FIGURE 3.6 – Série temporelle du signal de pression des différents piézomètres de la flûte B. Les précipitations sont représentées en bleu (*Haria and Shand, 2004*). Les signaux des différents piézomètres sont représentés en noir rouge et vert. Lorsque la pluie est trop importante, le signal sur le piézomètre BH2 dépasse le maximum mesurable de 2.4 mrgl (*metres relative to ground levels*).

# **Deuxième partie**

## **Aquifère profond expérimental**

Cette seconde partie du manuscrit est consacrée à la mesure de la composante verticale dans un écoulement souterrain. Nous avons débuté notre étude des écoulements bidimensionnels souterrains par une série de mesures sur le terrain. Nous commençons donc cette seconde partie du manuscrit avec une description du dispositif de mesures que nous avons mis en place sur le bassin versant de la ravine Quiock en Guadeloupe (chapitre 4). Les difficultés de mesures sur le terrain nous ont conduit à développer un aquifère expérimental. Nous présentons ce dispositif expérimental au chapitre 5 et discutons une partie des observations expérimentales au chapitre 6.

# Chapitre 4

## Écoulement bi-dimensionnel sur le terrain

Pour observer les signes d'un écoulement bi-dimensionnel, nous avons instrumenté le bassin versant de la ravine Quiock (Figure 4.2). Cette ravine située sur l'île de Basse-Terre en Guadeloupe, est suivie par l'observatoire de l'Eau de l'Érosion aux Antilles (obsERA) (Figure 4.1).

Pour comprendre le comportement de la nappe lors d'une crue, *Guérin et al.* (2019) ont instrumenté l'aquifère qui alimente la ravine Quiock. Un canal Venturi mesure le débit de la rivière en temps réel, et un pluviomètre enregistre les précipitations. Pour avoir des informations sur la nappe, 7 forages ont été réalisés le long d'un axe perpendiculaire à la rivière (Figure 4.4). Dans chaque forage est placé un tube en PVC percé au fond. Ainsi, l'eau remplit le tube à un niveau correspondant à la pression au fond du forage. Dans chaque tube, un capteur de pression mesure le niveau d'eau. Dans l'hypothèse de Dupuit, la pression est hydrostatique, et le niveau dans les tubes correspond au niveau de la nappe. Les piézomètres permettent donc de connaître la position de la nappe dans une coupe perpendiculaire à la rivière (Figure 4.4). Si l'hypothèse de Dupuit n'est pas valide (*i.e.* l'écoulement est bi-dimensionnel), la pression dans l'aquifère n'est pas hydrostatique. La mesure de la pression ne permet pas de connaître la position de la surface libre. En effet des piézomètres à différentes profondeurs mesurent des charges hydrauliques différentes.

Pour mesurer ce phénomène nous avons creusés 3 forages mesurant la pression d'eau à une distance identique de la rivière, mais pour des profondeurs différentes. Ce dispositif, appelé « flûte de Pan » permet d'obtenir la pression à des profondeurs de 2.3 m (forage B), 4.0 m (forage B1) et 5.9 m (forage B2) (Figure 4.4). Nous traçons alors le niveau d'eau dans chacun des puits de la flûte de Pan (Figure 4.5).

Pour un écoulement horizontal (hypothèse de Dupuit), les trois piézomètres en flûte de Pan devraient mesurer le même niveau d'eau, indépendamment de la profondeur du capteur. Nous pouvons observer que ce n'est pas le cas près de la ravine Quiock,

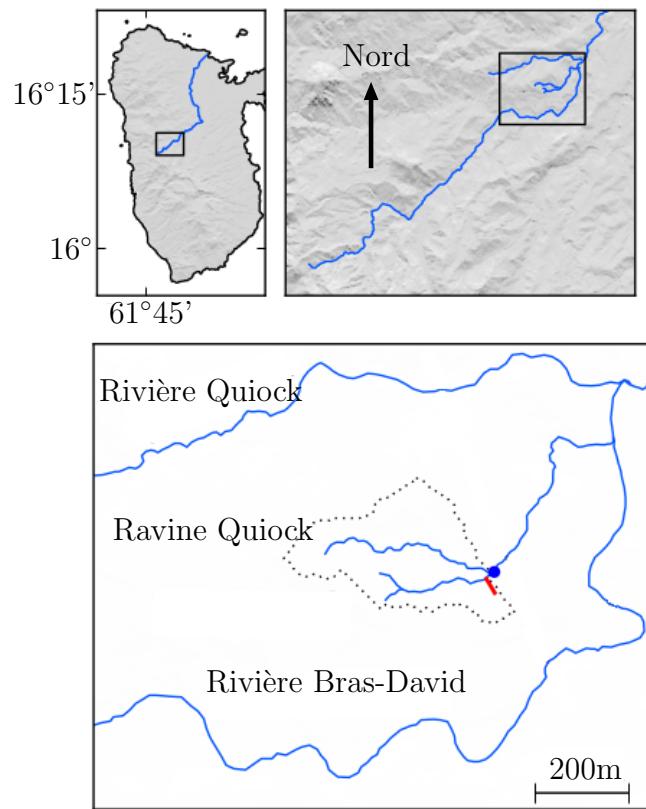


FIGURE 4.1 – Position de la ravine Quiock sur l’île de Basse-Terre en Guadeloupe. En pointillé le bassin versant topographique de la ravine Quiock, en bleu le canal Venturi et en rouge la position des piézomètres (*Guérin, 2015*).



FIGURE 4.2 – La ravine Quiock dans le bassin versant de la rivière de Capesterre, en Guadeloupe ( $16^{\circ} 10' 36''$  N,  $61^{\circ} 41' 44''$  W). Le canal Venturi (en bleu) mesure le débit de l'eau (Guérin, 2015).

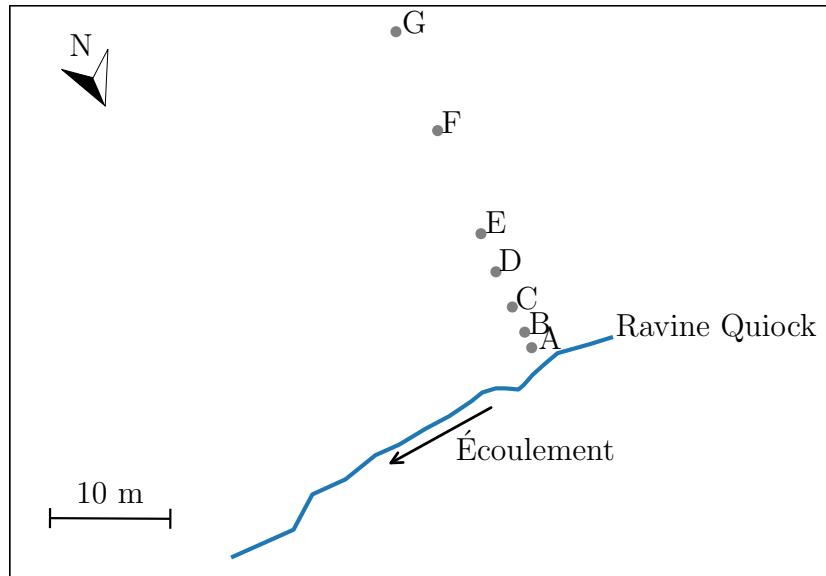


FIGURE 4.3 – Position des piézomètres mis en place avant la présente étude par Guérin (2015) (vue de dessus).

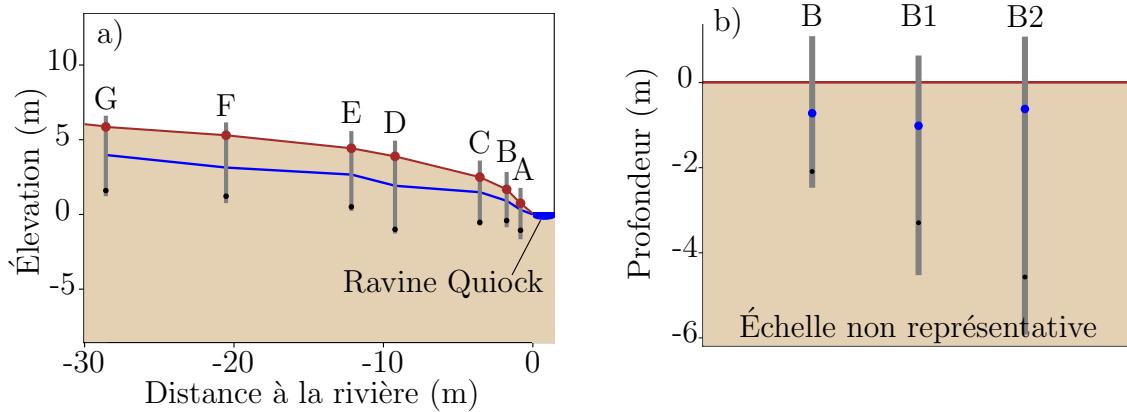


FIGURE 4.4 – (a) Coupe transversale de la ravine Quiock. La ravine est représentée en bleu à droite. Les forages sont en gris, avec un point noir pour la position du capteur de pression. Les niveaux d'eau permettent de connaître la position de la surface de la nappe, en bleu ici. (b) Coupe des piézomètres en flûte de Pan . Le point noir correspond à la position du capteur, et celui en bleu au niveau d'eau le 16 Juin 2017. La distance séparant les différents forages de la flûte de Pan n'est pas représentative.

les charges hydrauliques ne sont pas identiques. L'écoulement souterrain près de la rivière n'est donc pas horizontal. Nous pouvons remarquer que les signaux sont en phase. Cependant, plus le piézomètre est profond moins les variations de la charge hydraulique sont rapides.

Les mesures de terrains présentent plusieurs difficultés. Premièrement, le fond de l'aquifère n'est pas bien défini. Pour la ravine Quiock, les différents forages n'ont mis en évidence aucune limite imperméable marquant le fond de l'aquifère. L'hypothèse la plus courante consiste à supposer que la perméabilité augmente avec la profondeur. À partir d'une certaine profondeur, le milieu est considéré comme imperméable. Lors des forages, nous ne pouvons pas mesurer la perméabilité puisque l'argile est tassée par la tarière que nous utilisons pour creuser. En conséquence, les paramètres contrôlant l'écoulement de l'eau dans l'aquifère comme la perméabilité ou la porosité ne sont pas connus. D'autre part, même si, leurs mesures étaient possible, on ne pourrait que estimer leurs valeurs à l'échelle du bassin versant à partir de mesures ponctuelles. De plus, la pluie n'est ni régulière, ni homogène sur le bassin. Il est donc difficile d'isoler l'effet d'un paramètre en particulier, pour l'étudier indépendamment des autres.

Afin de s'affranchir de ces inconvénients, nous avons mis en place un aquifère expérimental inspiré des travaux de *Guérin* (2015). La géométrie de notre aquifère est alors librement choisie, la composition du matériau poreux peut être fixée, et ainsi nous pouvons étudier la dynamique de l'écoulement d'un aquifère à deux dimensions dans des conditions contrôlées et reproductibles.

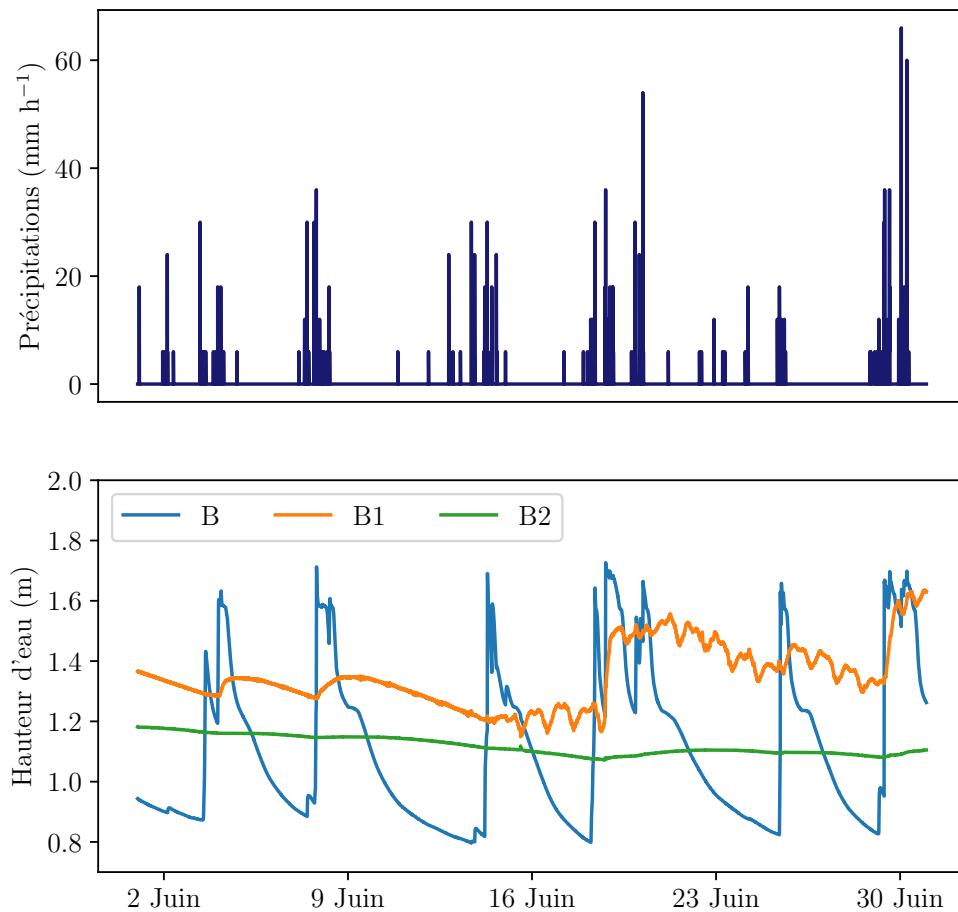


FIGURE 4.5 – Précipitations dans le bassin versant de la ravine Quiock (en haut). Niveau d'eau par rapport à la rivière mesuré par les trois capteurs de la flûte de Pan (en bas). Les profondeurs des capteurs B, B1 et B2 sont de respectivement 2.3, 4.0, et 5.9 m.

# Chapitre 5

## Aquifère expérimental

### 5.1 Dispositif expérimental

La disposition la plus simple pour reproduire un aquifère libre est celle utilisée par *Guérin* (2015). Elle consiste en un milieu poreux homogène maintenu dans un plan vertical. Cette expérience a permis de décrire les régimes asymptotiques de l'équation de Dupuit-Boussinesq (*Guérin et al.*, 2014) qui furent ensuite identifiés sur le terrain (*Guérin et al.*, 2019). Pour un écoulement à deux dimensions, il faut que la dimension verticale de l'aquifère soit comparable à sa dimension horizontale. Il faut donc disposer le fond de l'aquifère bien en dessous du niveau de la rivière.

Notre aquifère est composé d'un milieu poreux composé de billes de verre de même diamètre (1, 3, ou 4 mm) maintenu dans un plan vertical par deux plaques de plexiglas. Les limites de l'aquifère sont assurées par des bords métalliques en dessous et sur les côtés. Sur le côté droit, on modélise la sortie de l'aquifère par une grille perméable. Ainsi notre aquifère expérimental a une largeur,  $L$ , de 90 cm et une hauteur,  $H$ , de 62 cm. La pluie est simulée par une série de capillaires placés au-dessus du milieu poreux (Figure 5.2). Ci-dessous, nous présentons en détail chacun de ces éléments.

### 5.2 Milieu poreux

#### 5.2.1 Porosité

Dans notre aquifère, le milieu poreux est composé de billes de verre de même diamètre (1, 3 ou 4 mm). L'empilement de sphères de mêmes taille intéresse les mathématiciens depuis *Kepler* (1611). Pour un empilement aléatoire compact, la porosité a une valeur limite  $s_{min} = 0.366$  (*Song et al.*, 2008). Dans notre aquifère, nous nous attendons à ce que la porosité soit proche de cette valeur car les billes sont tassées par le passage de l'eau.

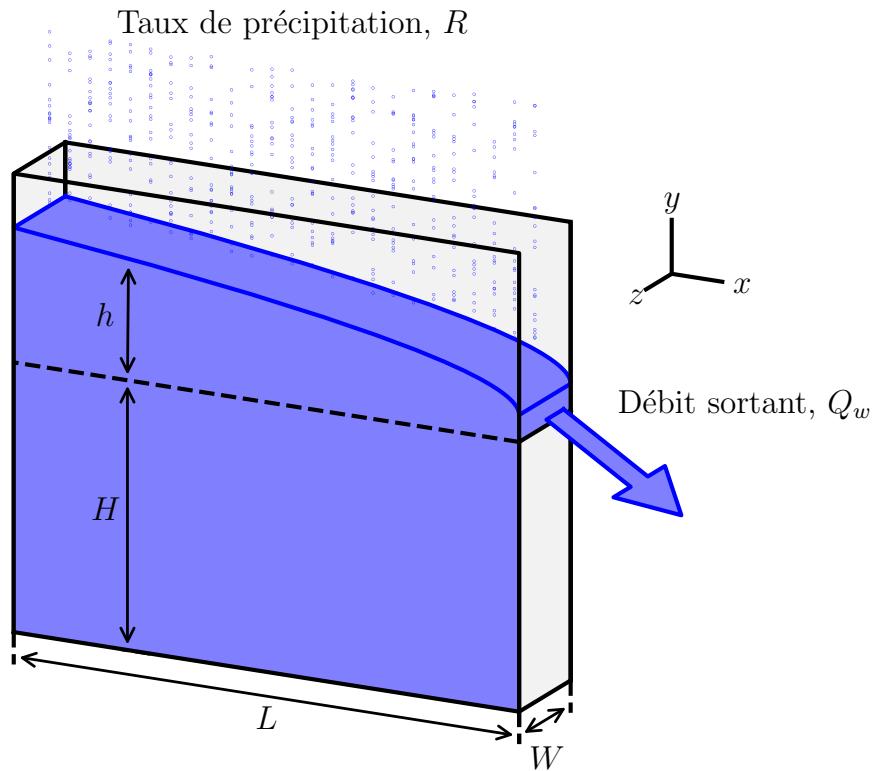


FIGURE 5.1 – Aquifère expérimental avec les différentes notations. Cet aquifère est composé de billes de verre maintenues dans un plan vertical d'épaisseur  $W = 5$  cm. Sa longueur et sa hauteur sont respectivement de  $L = 90$  cm et  $H = 62$  cm. Nous maintenons un taux de précipitation,  $R$ , qui alimente la nappe de hauteur  $h$ . L'eau s'écoule au travers de milieu poreux jusqu'à la sortie de l'aquifère, avec un débit sortant  $Q_w$ .

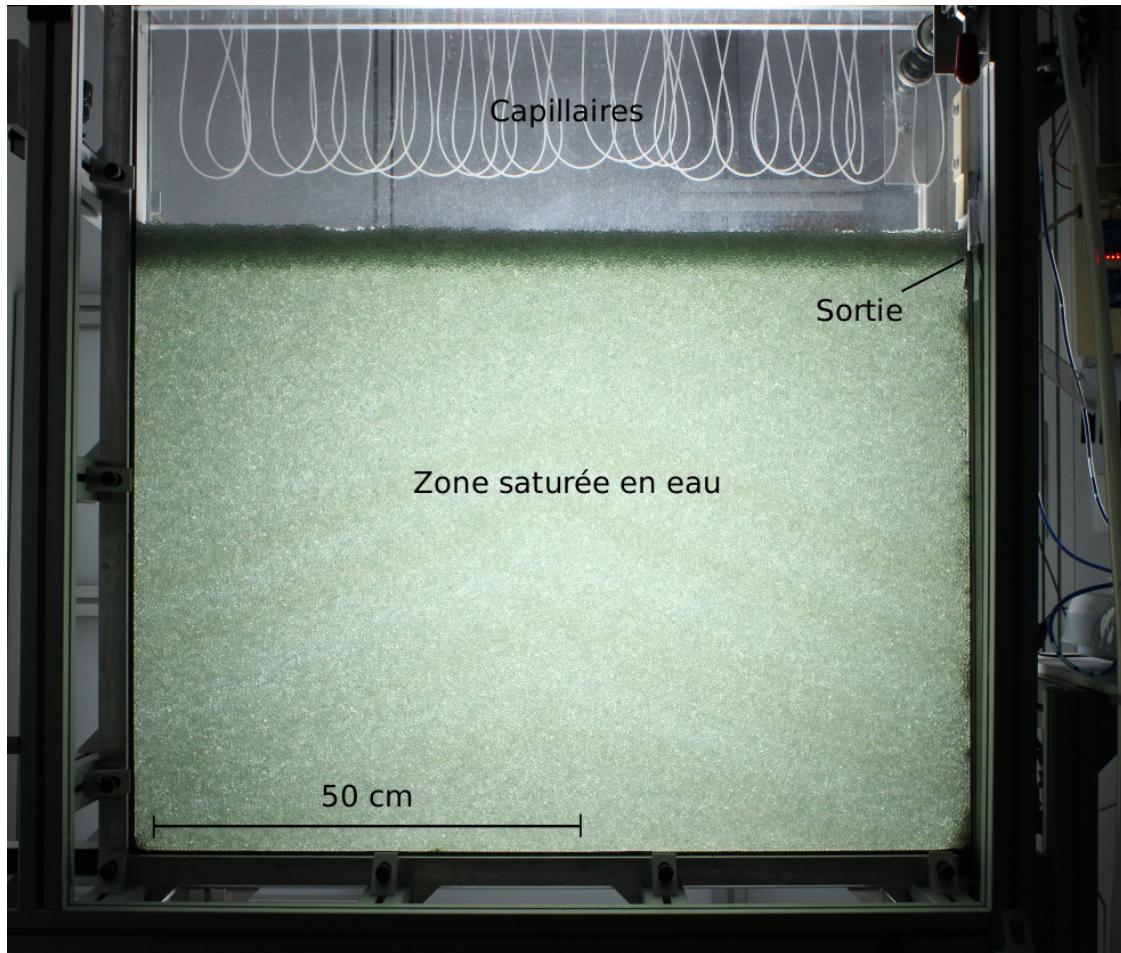


FIGURE 5.2 – Aquifère expérimental. La surface libre sépare la zone saturée en eau (zone claire) de la zone insaturée (zone sombre).

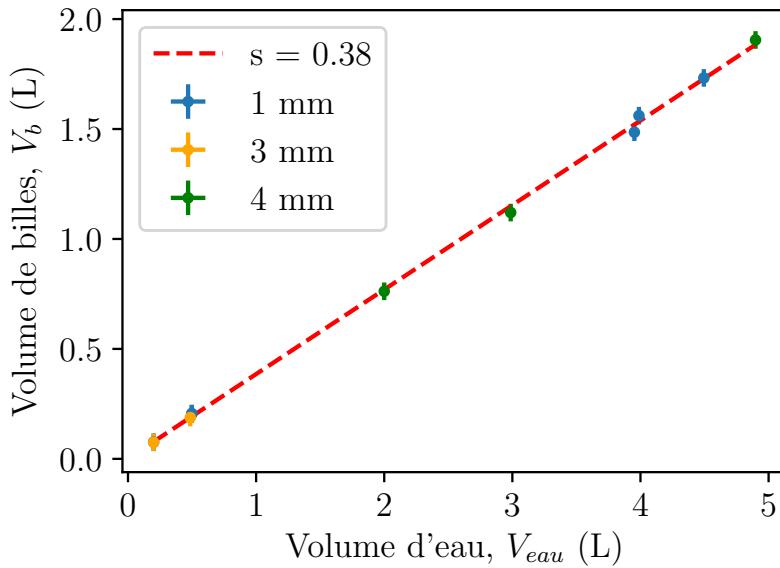


FIGURE 5.3 – Volume occupé par les billes de même diamètre disposées aléatoirement en fonction du volume d'eau entre les billes pour des diamètres de 1, 3 et 4 mm.

Pour vérifier cela, nous remplissons un volume connu de billes et on pèse le total. Nous remplissons ensuite avec de l'eau jusqu'à affleurement, et nous pesons la masse de l'eau et des billes. La différence des deux masses nous donne la masse de l'eau. En divisant par la masse volumique nous obtenons le volume des pores. Nous pouvons refaire cette expérience pour plusieurs volumes de billes et pour différentes tailles de billes. Nous traçons alors le volume du milieu poreux en fonction du volume d'eau qu'il peut contenir (figure 5.3) et la porosité est alors donné par la pente de cette relation. Nous trouvons  $s = 0.38 \pm 0.01$ . Nous retrouvons bien la porosité d'un empilement aléatoire proche de la valeur maximale donnée par *Song et al.* (2008).

### 5.2.2 Mesure de la perméabilité par la méthode de Darcy

Pour mesurer la conductivité hydraulique d'un empilement de billes, nous utilisons l'expérience imaginée par *Darcy* (1856). Celle-ci consiste à faire passer de l'eau à travers une colonne de sable et à mesurer la différence de charge hydraulique entre l'arrivée d'eau et la sortie. Notre dispositif expérimental est composé d'une colonne remplie avec les billes de notre aquifère (Figure 5.4). Cette colonne est alimentée par dessous avec un château d'eau dont la hauteur est réglable. L'eau traverse la colonne et se déverse dans un récipient. Ce récipient est pesé à l'aide d'une balance (KERN PLJ) ce qui permet, par dérivation, d'obtenir le débit quittant la colonne,  $Q$ . Dans notre dispositif expérimental, nous mesurons les pressions en connectant des pipettes transparentes remplies d'eau au

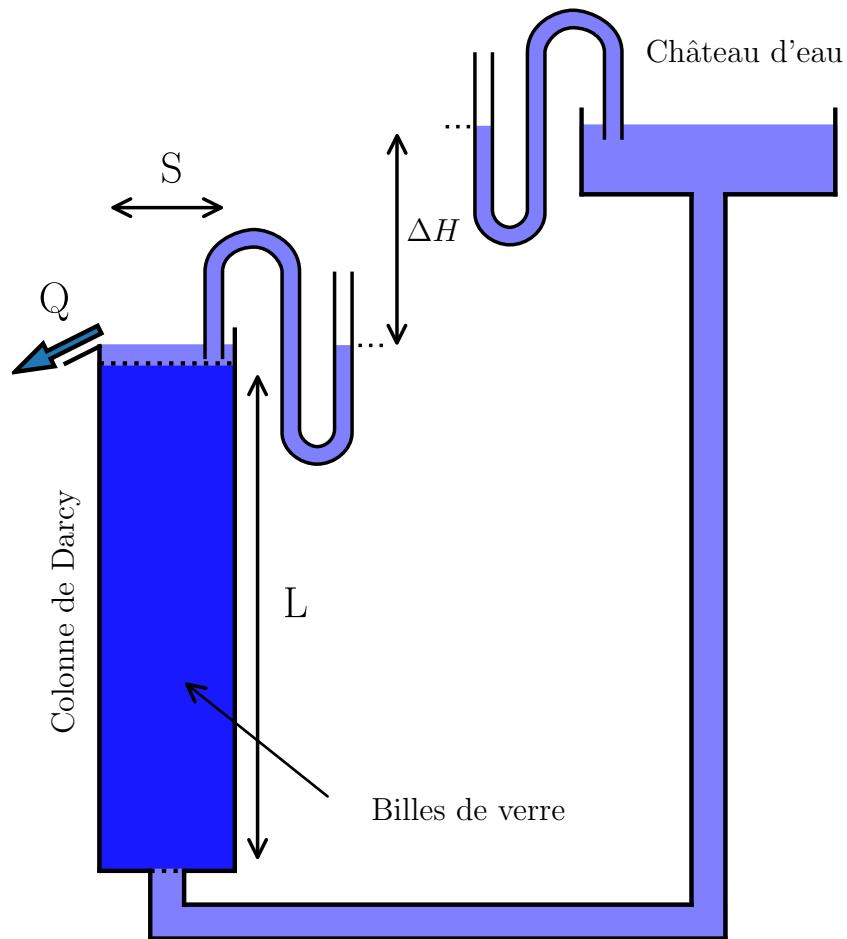


FIGURE 5.4 – Expérience destinée à mesurer la perméabilité d'un milieu poreux inspirée de la colonne de *Darcy* (1856). Des pipettes transparentes remplies d'eau permettent de mesurer la différence de pression entre le château d'eau et la sortie de la colonne.

château d'eau et en sortie de la colonne. Nous prenons une photographie du niveau d'eau dans les pipettes (Figure 5.4) ; la lecture de ce niveau nous permet alors de connaître la différence de charge entre l'entrée et la sortie de la colonne.

À la sortie de la colonne, nous nous attendons à ce que le débit suive la loi de Darcy :

$$\frac{Q}{S} = K \frac{\Delta H}{L}. \quad (5.1)$$

Plutôt que de tracer pour chaque taille de billes le débit en fonction du gradient hydraulique pour obtenir la conductivité hydraulique, nous choisissons de regrouper les différentes tailles de billes en écrivant la loi de Darcy sous forme adimensionnée. Pour ce faire, nous écrivons le nombre de Reynolds de l'écoulement :

$$Re = \frac{ud}{\nu} = \frac{Qd}{S\nu}, \quad (5.2)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique,  $d$  le diamètre des billes et  $u$  la vitesse de l'écoulement. Cette dernière correspond à la vitesse de Darcy divisée par la section de la colonne. En combinant l'équation (5.2) avec la loi de Darcy, le nombre de Reynolds s'écrit :

$$Re = \frac{Kd}{\nu} \frac{\Delta H}{L} \quad (5.3)$$

D'autre part, la conductivité s'exprime en fonction de la perméabilité (*Darcy*, 1856) :

$$K = \frac{kg}{\nu}. \quad (5.4)$$

Cette perméabilité,  $k$ , est une propriété, qui ne dépend que de la géométrie du milieu. La perméabilité ne dépend donc pas du diamètre des billes. Nous l'exprimons alors  $k = \alpha d^2$  où  $\alpha$  est un paramètre géométrique qui ne dépend pas de la taille des billes, mais qui dépend de la géométrie de leur empilement. Ainsi :

$$K = \frac{\alpha d^2 g}{\nu}. \quad (5.5)$$

Sous forme adimensionnée, la loi de Darcy s'écrit donc :

$$Re = \alpha \left( \frac{d^3 g}{\nu^2} \frac{\Delta H}{L} \right). \quad (5.6)$$

Nos expériences avec différentes tailles de billes peuvent être utilisées pour ajuster le coefficient  $\alpha$  (Figure 5.5). Comme prévu par la loi de Darcy, pour des bas Reynolds ( $Re \ll 1$ ), nous retrouvons une droite. Puis autour de  $Re=1$ , nous avons une rupture de pente prévue par Forcheimer (équation 1.11). Cependant, les billes de 1 mm n'ont pas

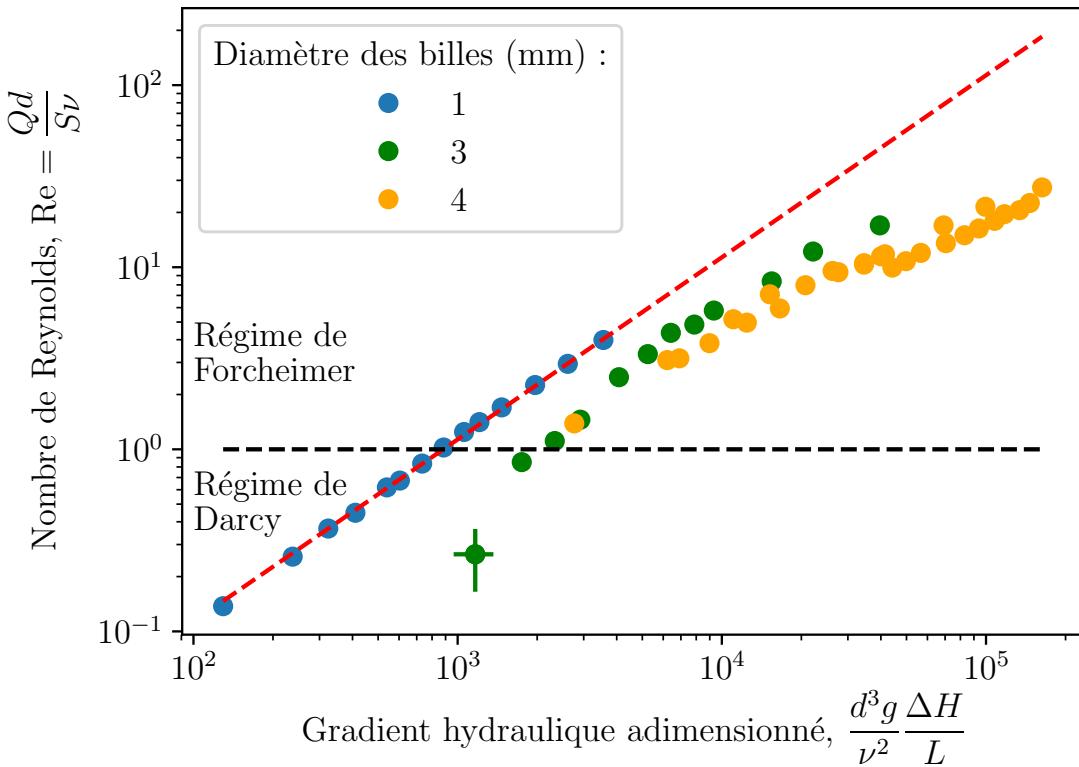


FIGURE 5.5 – Nombre de Reynolds en fonction du gradient hydraulique adimensionné pour trois diamètres de billes : 1 mm, 3 mm et 4 mm. Les pointillés noirs correspondent à la limite de l'application de la loi de Darcy. Les pointillés rouges sont l'ajustement linéaire pour les billes de 1 mm. L'erreur sur nos mesures expérimentales est représentée sur un seul point.

le même préfacteur,  $\alpha$  que celles de 3 et 4 mm. Ce qui est étonnant car  $\alpha$  dépend de la géométrie du milieu poreux qui est celle d'un empilement compact aléatoire de sphères. Une des raisons qui expliquerait cette différence pourrait être la distribution des tailles pour les billes de 1mm. En réalité, ces dernières ont un diamètre compris entre 800 et 1300  $\mu\text{m}$ . Cette dispersion peut changer la géométrie du milieu poreux et donc la valeur du préfacteur  $\alpha$ .

La loi de Darcy n'est applicable que pour un écoulement visqueux (soit  $Re \ll 1$ ). Pour les billes de 3 et 4 mm cette condition n'est respectée que pour les débits très faible, tandis que pour les billes de 1 mm elle est respectée pour toutes les hauteurs d'eau que nous avons appliquées. Nous ajustons donc le coefficient  $\alpha$  uniquement sur les billes de 1 mm de diamètre. Nous obtenons alors le facteur  $\alpha = 0.00113 \pm 0.00001$ . Ce qui permet de calculer les différentes conductivité hydraulique (Table 5.1).

	1mm	3mm	4mm
K (cm s <sup>-1</sup> )	1.1 ± 0.4	10.0 ± 0.5	18 ± 1

TABLE 5.1 – Tableau des résultats de l’expérience de la colonne de Darcy pour les trois tailles de billes. En appliquant l’équation (5.5) avec  $\alpha$  ajusté sur les billes de 1 mm de diamètre.

Afin de confirmer nos valeurs obtenues pour le préfacteur  $\alpha$ , nous mettons donc en place une autre méthode pour mesurer la perméabilité de notre milieu poreux.

### 5.2.3 Mesure de la perméabilité par relaxation

La mesure visuelle de la différence de pression étant fastidieuse et peu précise, nous mettons en place un nouveau dispositif expérimental (Figure 5.6). Celui-ci est composé d’une colonne de milieu poreux relié par le bas à un réservoir d’eau. Avant le début de l’expérience, le niveau de l’eau est le même au dessus du milieu poreux et dans le château d’eau. Nous introduisons un volume connu d’eau au dessus de la colonne. La différence de hauteur d’eau induit donc un écoulement à travers le milieu poreux jusqu’au réservoir. Une mesure de la masse d’eau dans le réservoir d’eau,  $m$ , est effectuée à l’aide d’une balance. La masse augmente progressivement puis sature lorsque les niveaux d’eau s’équilibrent (Figure 5.7).

La conservation de la masse d’eau en haut de la colonne et dans le château d’eau donnent :

$$\begin{cases} q = -S_1 \frac{\partial z_1}{\partial t} \\ q = S_2 \frac{\partial z_2}{\partial t} \end{cases} \quad (5.7)$$

où  $z_1$  et  $z_2$  correspondent respectivement au niveau d’eau dans la colonne poreuse et dans le réservoir (Figure 5.6). Nous pouvons regrouper ces deux équations en une seule :

$$\frac{\partial(z_1 - z_2)}{\partial t} = - \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) q, \quad (5.8)$$

où  $z_1 - z_2$  est la différence de hauteur d’eau,  $\Delta H$ . Soit :

$$q = -\frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \frac{\partial \Delta H}{\partial t}. \quad (5.9)$$

Ce qui, combiné avec la loi de Darcy, donne une équation différentielle pour la différence de hauteur d’eau :

$$\tau \frac{\partial \Delta H}{\partial t} + \Delta H = 0, \quad (5.10)$$

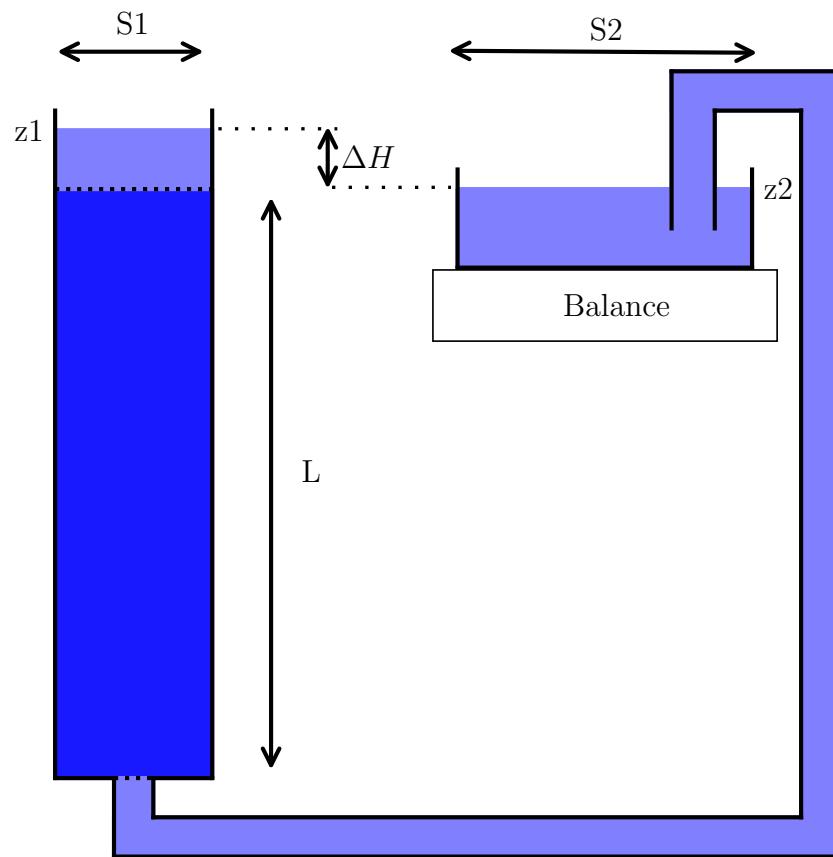


FIGURE 5.6 – Expérience pour mesurer la perméabilité d'un milieu poreux par relaxation. La masse de l'eau dans le réservoir est mesurée par la balance avec une fréquence de 10 Hz.

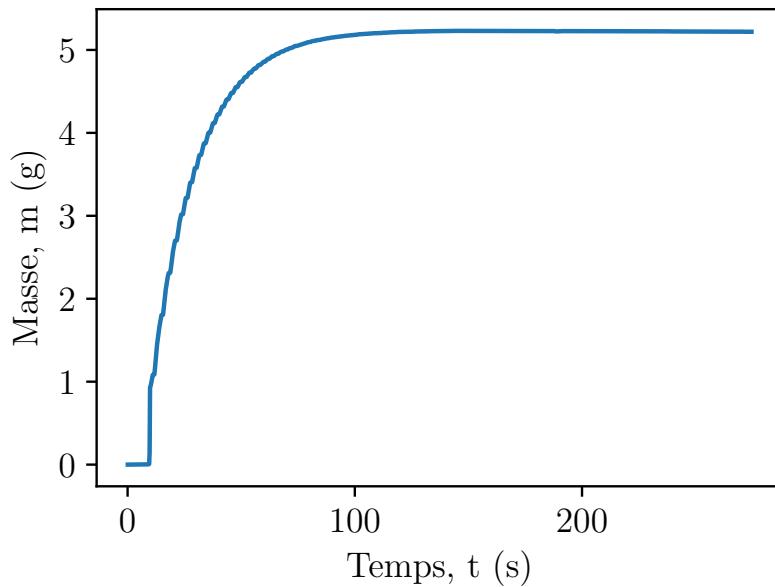


FIGURE 5.7 – Masse mesurée dans le réservoir d'eau alimenté à travers une colonne de milieu poreux.

avec :

$$\tau = \frac{L}{K(1 + S_1/S_2)}. \quad (5.11)$$

La différence de hauteur d'eau décroît donc exponentiellement :

$$\Delta H = \Delta H_0 \exp -t/\tau. \quad (5.12)$$

Le débit décroît lui aussi exponentiellement suivant :

$$q = q_0 \exp -t/\tau, \quad (5.13)$$

avec :

$$q_0 = \Delta H_0 \frac{KS_1}{L}. \quad (5.14)$$

La masse d'eau dans le château d'eau,  $m$ , étant l'intégrale du débit depuis le début de l'expérience :

$$m = \int_0^t q(t) dt = q_0 \tau (1 - \exp -t/\tau), \quad (5.15)$$

il nous suffit d'ajuster la masse par une exponentielle décroissante pour obtenir le paramètre  $\tau$ , et donc la conductivité hydraulique (Figure 5.8). Le facteur  $q_0\tau$  est égal à la masse à l'équilibre,  $m_{\text{eq}}$  dans le château d'eau à la fin de l'expérience. Ainsi :

$$\frac{m_{\text{eq}} - m}{m_{\text{eq}}} = \exp -t/\tau. \quad (5.16)$$

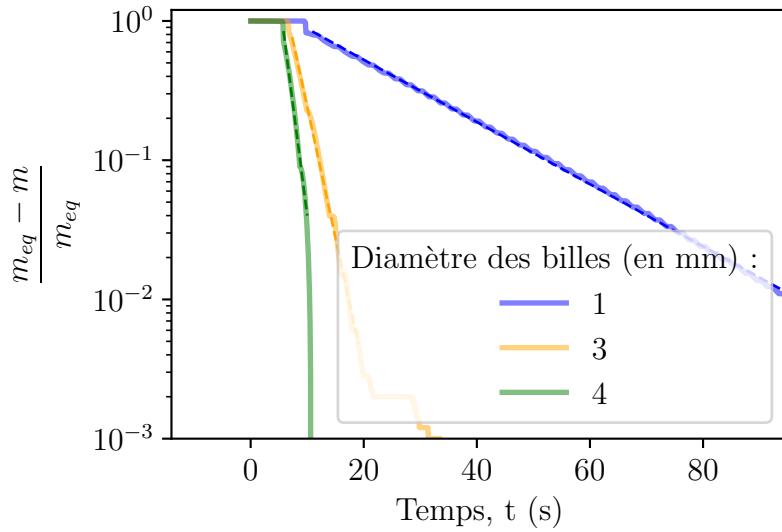


FIGURE 5.8 – Masse adimensionnée dans le réservoir d'eau en fonction du temps pour les différentes tailles de billes. En pointillé l'ajustement qui permet d'obtenir le temps caractéristique  $\tau$ .

Au début de l'expérience, l'introduction du volume d'eau perturbe les mesures. À la fin, nous ne mesurons plus que du bruit. C'est pourquoi nous ajustons seulement sur les mesures situées entre 5% et 95% de la masse finale.

Nous répétons l'expérience plusieurs fois, ce qui nous permet d'estimer la variabilité de notre mesure (Table 5.2). Ces valeurs sont assez proches de celles obtenues avec une utilisation classique de la colonne de Darcy. Cependant elles sont plus précises, car cette méthode est moins sensible à la précision de la mesure. En effet ces dernières sont atténuées par le grand nombre de points de mesures utilisées pour l'ajustement. De plus, en calculant le coefficient adimensionné  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{K\nu}{gd^2}, \quad (5.17)$$

nous pouvons remarquer qu'il varie peu avec la taille des billes (Table 5.2). Dans la suite du manuscrit, nous utiliserons donc les valeurs de perméabilité obtenues par la méthode de relaxation.

### 5.3 Pluie

Pour simuler les précipitations, *Guérin et al.* (2014) ont utilisé un tuyau percé. Ce système est facile à mettre en place. Cependant, toute la perte de charge se fait

	1mm	3mm	4mm
$\tau$ (s)	$20.3 \pm 0.5$	$2.4 \pm 0.1$	$1.6 \pm 0.1$
$K$ (cm s $^{-1}$ )	$1.07 \pm 0.02$	$9.1 \pm 0.3$	$13 \pm 0.9$
$\alpha \cdot 10^3$	$1.10 \pm 0.03$	$1.03 \pm 0.04$	$0.85 \pm 0.05$

TABLE 5.2 – Tableau des résultats des conductivité hydraulique pour les trois tailles de billes pour la méthode de relaxation. Le coefficient adimensionné  $\alpha$  est quasiment le même pour les différents diamètres.

au niveau des trous. Le débit dépend de la taille et de la forme des trous ; il est donc fortement impacté par la qualité des trous. En pratique, les précipitations issues de ce dispositif ne sont pas homogènes.

### 5.3.1 Génération d'une pluie homogène

Pour améliorer l'homogénéité des précipitations, nous simulons la pluie par une série de capillaires raccordés à un château d'eau. Les capillaires ont tous le même diamètre et la même longueur. Ainsi la perte de charge est identique pour tous, ce qui assure un débit identique à la sortie des capillaires. Le débit sortant d'un capillaire correspond à celui d'un écoulement de Poiseuille dans un tube :

$$Q_s = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \rho g \Delta H, \quad (5.18)$$

où  $R$  est le rayon du capillaire,  $L$  sa longueur,  $\eta$  la viscosité dynamique de l'eau,  $\rho$  la masse volumique,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\Delta H$  la hauteur d'eau entre le haut du château d'eau et la sortie du capillaire. Typiquement,  $L$  est de l'ordre de la dizaine de centimètres et  $R$  de l'ordre du millimètre.

Pour vérifier que ce système de pluie permet d'obtenir une pluie homogène, nous mesurons la masse d'eau sortant d'un capillaire pendant une durée de 35 secondes. En dérivant, nous obtenons le débit en sortie du capillaire. Cette mesure est effectué pour tous les capillaires, ce qui permet d'obtenir le débit moyen et sa dispersion (Figure 5.9). Cette méthode nous permet d'obtenir un taux de précipitations homogène pour les différents capillaires à 3% près. Le débit obtenu par cette méthode est légèrement inférieur à celui d'un écoulement de Poiseuille  $Q_p = 0.083$  L/min. Ce qui est normal puisque nous négligeons la perte de charge dans le tuyaux qui relie le château d'eau aux capillaires.

Pour modifier l'intensité de la pluie nous pouvons, au choix, changer le nombre de capillaires, leur rayon  $R$ , leur longueur  $L$  ou la hauteur du château d'eau  $\Delta H$ . En pratique, nous ne ferons varier que le rayon et la longueur des capillaires.

Afin de vérifier que l'écoulement dans notre aquifère est bien un écoulement de

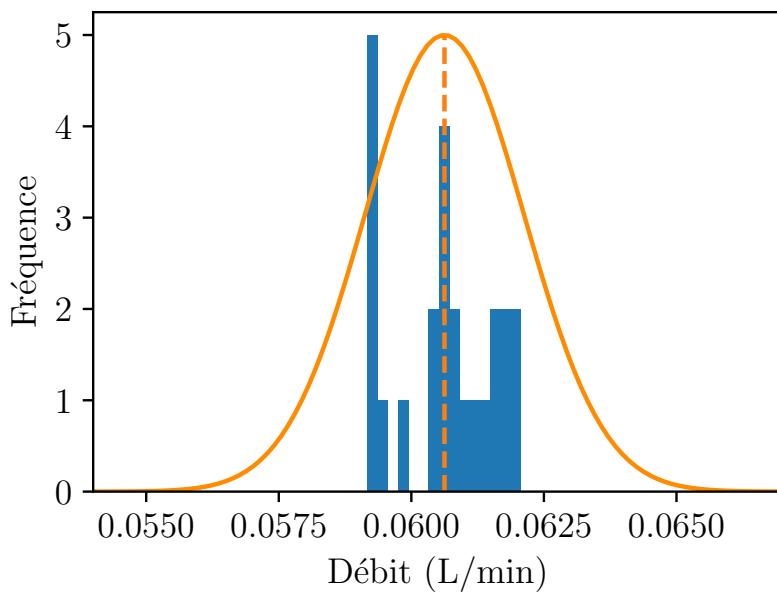


FIGURE 5.9 – Histogramme des débit en sortie des différents capillaires de longueur  $L = 50$  cm, de rayon  $R = 0.6$  mm. Les capillaires sont alimentés par une hauteur d'eau de  $\Delta H = 1.45$  m. Le débit total des précipitations est de 1.45 L/min. La droite verticale en pointillé correspond au débit moyen des capillaires. La loi normale centrée sur la moyenne des expériences est tracée en orange, l'amplitude est telle que l'intégrale vaut le nombre de capillaires.

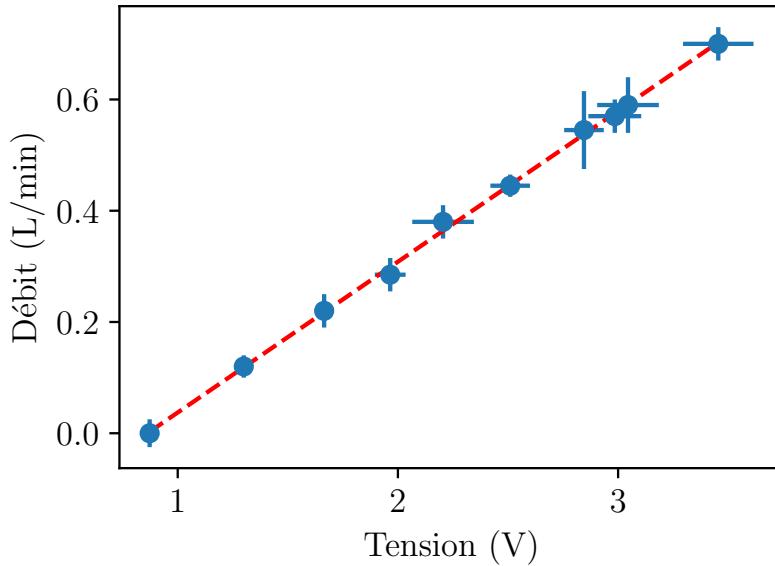


FIGURE 5.10 – Calibration du débitmètre électromagnétique (Kobold, MIK-5NA10AE34R). Tension mesurée aux bornes d'une résistance de  $220\Omega$ .

Darcy, nous allons calculer le nombre de Reynolds à la surface libre. Pour les pluies maximales dans notre dispositif ( $0.9 \text{ L/min}$ ) et les billes de  $4 \text{ mm}$ , nous obtenons un nombre de Reynolds de  $\text{Re} = 1.3$ . Nous serons donc, pour les plus grands taux de précipitation à la limite de l'écoulement de Darcy.

### 5.3.2 Mesure de l'intensité de la pluie

Pour mesurer le taux de précipitations, on utilise un débitmètre électromagnétique (Kobold, MIK-5NA10AE34R) précis à 2 % pour des débits de  $0.05 \text{ L/min}$  à  $1.0 \text{ L/min}$ . Le débitmètre renvoie une intensité électrique qui varie en fonction de la mesure. Cette intensité est obtenue en mesurant, avec une carte *Arduino*, la tension au borne d'une résistance de  $220\Omega$ . Pour obtenir le débit de précipitation, nous mesurons la tension pour des débits connus et nous traçons la calibration du débitmètre (Figure 5.10). La tension mesurée,  $U$  est reliée au taux de précipitations  $R$  suivant la loi :

$$R = \xi U + \kappa, \quad (5.19)$$

avec  $\xi = 0.271 \pm 0.003 \text{ L/min}^{-1} \text{ V}^{-1}$  et  $\kappa = -0.234 \pm 0.008 \text{ L/min}^{-1}$ . Cette relation nous permet finalement de mesurer le taux de précipitations avec une précision de  $0.1 \text{ L/min}$ .

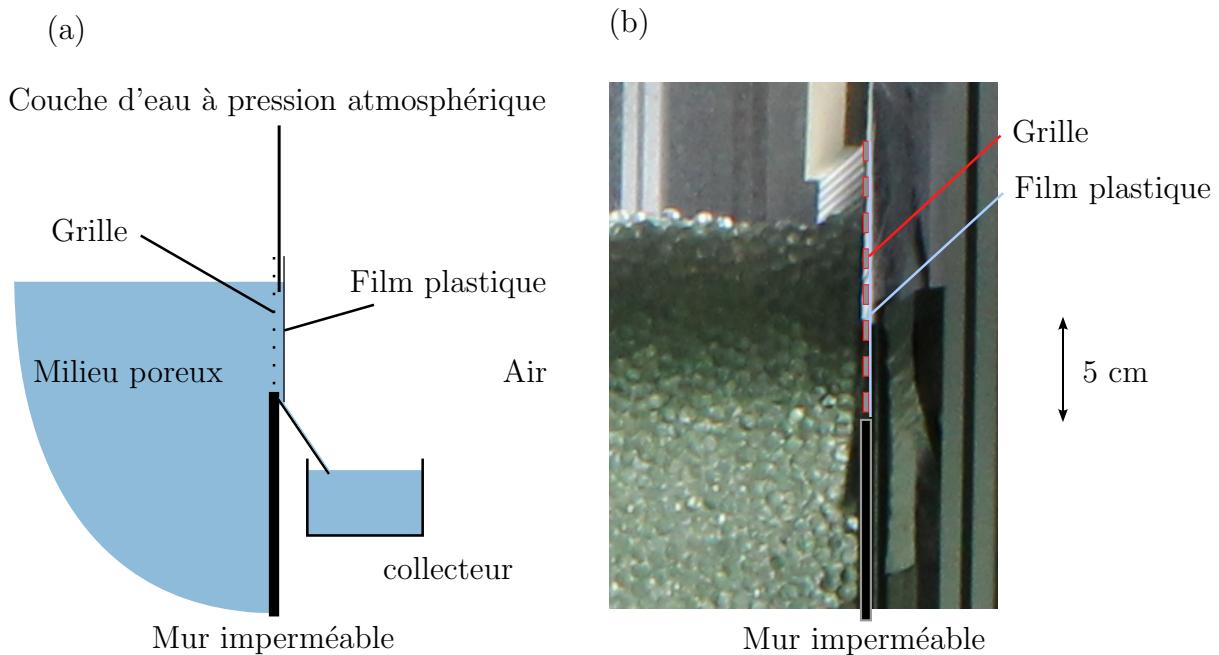


FIGURE 5.11 – À gauche (a), position du film plastique à la sortie de notre aquifère maintenant une couche d'eau à pression atmosphérique le long de la grille. À droite (b), photographie de la sortie de notre aquifère expérimental.

## 5.4 Mesure du débit de sortie

L'eau sortant de l'aquifère est collectée dans un récipient et pesée tous les dixièmes de secondes avec une balance (KERN PLJ 2000 3A), avec une précision de 0.1 mg. En dérivant le poids par rapport au temps, on obtient alors le débit sortant de l'aquifère. Pour minimiser le bruit, dû notamment à l'écoulement entre la sortie de l'aquifère et le récipient collecteur, nous reproduisons l'expérience cinq fois. Les hydrogrammes obtenus sont la moyenne de ces cinq expériences (chapitre 6).

## 5.5 Tension de surface

Dans le milieu poreux, à la limite entre la zone saturée et la zone insaturée, la tension de surface crée une frange capillaire de quelques centimètres d'épaisseur. Afin de limiter l'influence de cette frange capillaire, nous avons choisi des billes de 3 ou 4 millimètres de diamètre. Cependant, même si la frange capillaire est fine (quelques billes d'épaisseur), elle empêche de repérer visuellement la position de la surface libre avec précision (Figure 5.11).

À la sortie, la grille a des ouvertures de 1.5 mm de diamètre, de telle sorte que les billes ne puissent pas passer. Étant en contact direct avec l'air, il y a une discontinuité de pression induit par la tension de surface. Pour limiter ce phénomène, nous avons

placé un film plastique maintenant une fine couche d'eau à pression atmosphérique sur la surface de la grille (Figure 5.11).

# Chapitre 6

## Premières observations

Au début d'une expérience typique, l'aquifère est saturé en eau jusqu'au niveau de la sortie. La nappe au repos présente une surface horizontale. Par le biais d'une carte *Arduino* nous actionnons alors un relais électromagnétique qui commande une électrovanne. Une fois cette vanne ouverte, le château d'eau alimente le réseau de capillaires simulant la pluie en maintenant un taux de précipitations  $R$  constant.

### 6.1 Transit par la zone insaturée

L'eau de pluie s'infiltra verticalement dans le milieu poreux jusqu'à rejoindre la nappe. La zone insaturée a une épaisseur d'environ 8 cm (Figure 5.11). Visuellement l'écoulement à travers cette zone prend environ 3 secondes. Pour s'assurer que la durée de ce transit ne varie pas trop d'une expérience à l'autre nous attendons une journée entre chaque expérience. Ainsi la zone insaturée est sèche au début de l'expérience, et il n'y a plus d'écoulement dans l'aquifère.

### 6.2 Hydrogrammes

Une fois que l'eau de pluie a atteint la nappe, la pression sur la surface libre augmente. Immédiatement, de l'eau sort de l'aquifère. La pluie et le débit étant enregistrés en temps réel, nous pouvons tracer pour chaque expérience un hydrogramme (Figure 6.1). Le temps de transit par la zone insaturée correspond au décalage entre le signal de pluie et le débit. Nous retrouvons bien les 3 secondes estimées visuellement. Tant que la pluie continue, la surface s'élève et le débit de sortie augmente rapidement : c'est le régime de montée de crue. Le débit augmente alors jusqu'à atteindre le régime stationnaire (lorsque le débit sortant est égal au débit des précipitations). Ce régime est atteint en quelques dizaines de secondes. Lorsque la pluie s'arrête, le débit diminue lentement jusqu'à revenir à zéro c'est le régime de descente de crue. Les caractéristiques

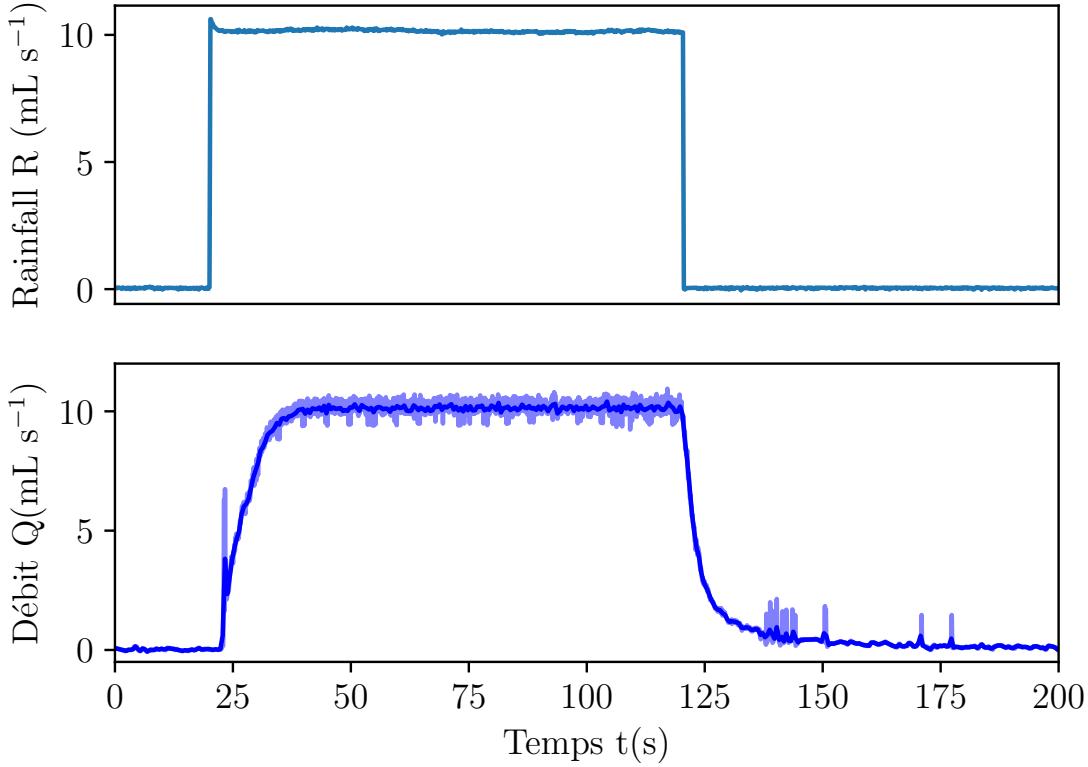


FIGURE 6.1 – Taux de précipitations  $R$  imposé à l'aquifère (en haut), et débit sortant  $Q$  (en bas). Les mesures sont effectuées à une fréquence de 10 Hz. Pour le débit la courbe en bleu foncé représente la moyennes glissante des données en bleu clair.

de l'aquifère étant connues, nous allons pouvoir étudier leur influence sur la réponse de l'aquifère à un épisode de pluie.

### 6.3 Comparaison avec un aquifère peu profond

Avant de nous intéresser plus en détail à l'écoulement dans notre aquifère, nous allons comparer nos hydrogrammes expérimentaux à ceux obtenus par *Guérin* (2015) avec un aquifère peu profond. Pour cela, nous reproduisons des conditions identiques à celles utilisées par *Guérin* (2015) en choisissant un taux de précipitations de  $7.9 \text{ mL s}^{-1}$  et des billes de 4 mm de diamètre. Nous traçons alors les deux hydrogrammes en synchronisant le début du régime de montée de crue (Figure 6.2). La première chose que l'on remarque, c'est que l'aquifère profond réagit plus rapidement : il atteint le régime stationnaire en environ 50 secondes alors qu'il en faut environ 250 pour l'aquifère peu profond. Cette rapidité n'est pas intuitive, car l'aquifère profond met en œuvre un

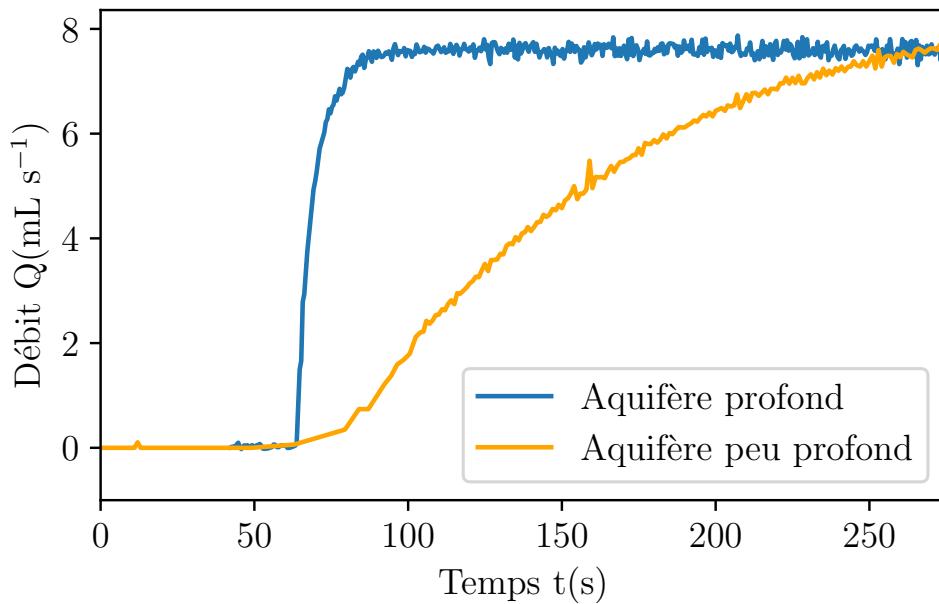


FIGURE 6.2 – Hydrogrammes expérimentaux pour l'aquifère profond (en bleu), et peu profond (en orange). Le taux de précipitation,  $R = 7.9 \text{ mL s}^{-1}$  est le même dans les deux expériences. Les billes des aquifères sont de 4 mm de diamètre.

plus grand volume d'eau. Le raisonnement naïf qui consisterait à estimer le temps de réaction en divisant le volume de l'aquifère par le débit des précipitations conduit donc à un résultat qualitativement faux.

Cette différence de rapidité de la montée de crue indique que l'aquifère profond ne peut pas être décrit par l'équation de Dupuit-Boussinesq. D'autre part, il semble que cette géométrie, sans doute courante dans la nature, puisse induire des crues rapides. Nous nous intéresserons donc dans les prochains chapitres aux équations qui décrivent l'écoulement dans l'aquifère profond. Dans le prochain chapitre, nous chercherons d'abord à caractériser notre écoulement dans le régime stationnaire.

# Troisième partie

## Écoulement stationnaire

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que notre aquifère expérimental réagissait plus rapidement aux précipitations que l'aquifère peu profond de *Guérin et al.* (2014). Cette surprenante rapidité suggère que l'écoulement dans l'aquifère profond est radicalement différent de l'écoulement presque horizontal décrit par *Guérin et al.* (2014). Dans cette partie, nous allons caractériser cet écoulement bidimensionnel dans le cas stationnaire en traçant les lignes de courant dans notre aquifère expérimental (chapitre 7), puis en comparant ces lignes de courant à nos prédition théoriques, dans le cas où la condition à la surface libre est linéarisée (chapitre 9). Nous verrons ensuite comment caractériser l'écoulement au voisinage de la sortie (chapitre 10), et pour un aquifère infiniment profond non linéaire (chapitre 11).

# Chapitre 7

## Lignes de courant

### 7.1 Traçage des lignes de courant

Dans un premier temps, nous souhaitons repérer la position des lignes d'écoulement. Pour cela, nous suivons le trajet emprunté par un petit volume de colorant déposé sur la surface libre dans l'expérience décrite au chapitre 5.

Après avoir déclenché la pluie, nous attendons quelques minutes pour que le régime stationnaire soit atteint. Une carte *Arduino* commande alors une pompe à seringue de modèle ... qui introduit en six points d'injection un volume,  $V_c = 3 \text{ mL}$  d'eau colorée en bleu à la surface libre. Le colorant est injecté à l'aide d'une aiguille quelques millimètres sous la surface libre et les points d'injection sont situés tous les 15 cm. Le colorant s'écoule alors dans l'aquifère en suivant les lignes de courant tout en se dispersant par diffusion moléculaire et dispersion hydrologique (*Van Genuchten and Wierenga*, 1976, 1977). Afin d'obtenir ces lignes de courant, un appareil photo, dont l'axe est orthogonal au plan de l'écoulement, prend une photographie toutes les 15 secondes jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de trace de colorant dans l'aquifère (Figure 7.1a, b, c). Les photographies successives sont ensuite combinées en une seule image, en ne conservant que le minimum d'intensité enregistré en chaque pixel parmi les différentes photographies de l'expérience (Figure 7.1d). Afin de visualiser les lignes de courant, nous sélectionnons sur la nouvelle image les pixels bleus, et nous augmentons la saturation de ces pixels. Ainsi les lignes de courants sont plus visibles, mais leur épaisseur est exagérée.

Nous pouvons remarquer que la dispersion (c'est-à-dire l'étalement) des tache de colorant se fait principalement dans la direction de l'écoulement : les taches de colorant dessinent les lignes de courant, sans se disperser notablement dans la direction transverse. C'est une manifestation classique de la dispersion hydrodynamique en milieu poreux (*Saffman*, 1959).

Les lignes de courant descendant profondément dans l'aquifère : l'écoulement n'est pas uniquement horizontal, mais bien bidimensionnel. L'hypothèse de Dupuit n'est donc pas valide dans cet aquifère profond. En particulier la ligne de courant qui commence le

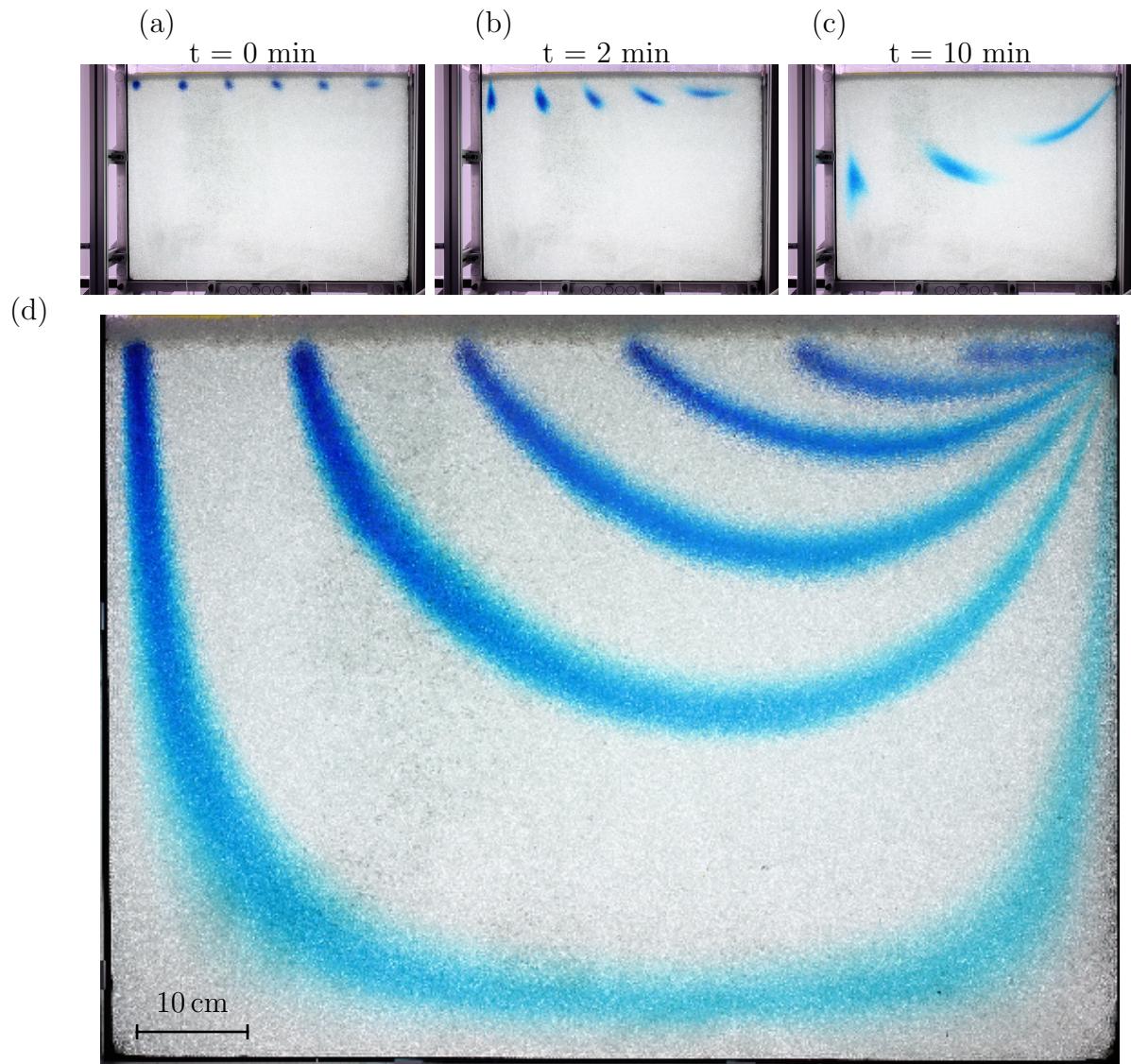


FIGURE 7.1 – Transport de colorant dans notre aquifère de laboratoire. En haut (a, b, c) : trois étapes de ce transport. En bas (d), la superposition de toutes les images laisse apparaître les lignes de courant. Intensité des précipitations :  $R = 7.6\text{mm/s}$

plus loin de la sortie longe les bords imperméables de notre aquifère. Toute l'eau dans l'aquifère est donc mobilisée par l'écoulement. Près de la sortie, l'angle séparant deux lignes de courant consécutives semble être uniforme ; nous reviendrons plus sur cette remarque au chapitre 9.3.

## 7.2 Temps de trajet

Une observation cinématique nous donne une information de plus : le temps de trajet de la tache de colorant dépend fortement du point d'injection. Par exemple, il faut deux minutes pour que le colorant injecté à 15 cm de la sortie quitte l'aquifère, alors que le colorant injecté à 90 cm de la sortie met plus d'une heure et demie à quitter l'aquifère. Plus généralement, nous pouvons mesurer pour chaque position d'injection le temps qu'il faut à la tache pour quitter l'aquifère (Figure 7.2).

La distribution des temps de trajet est un moyen de caractériser l'écoulement dans l'aquifère (*McDonnell et al.*, 2010). De plus, lorsque l'eau s'infiltre dans le sol, elle interagit chimiquement avec les roches qui composent l'aquifère. Ces processus d'altération, transforment les roches primaires et modifient la composition de l'eau accumulée dans la nappe. La mesure de la composition chimique de l'eau souterraine permet donc d'estimer le temps de résidence de l'eau dans l'aquifère (*Cornaton and Perrochet*, 2006). Inversement le temps de trajet de l'eau influence les réactions chimiques, par exemple pour la dégradation de polluants (*Vogel et al.*, 1981). Afin de décrire l'écoulement et d'évaluer les temps de trajets dans notre aquifère, nous allons analyser théoriquement l'écoulement.

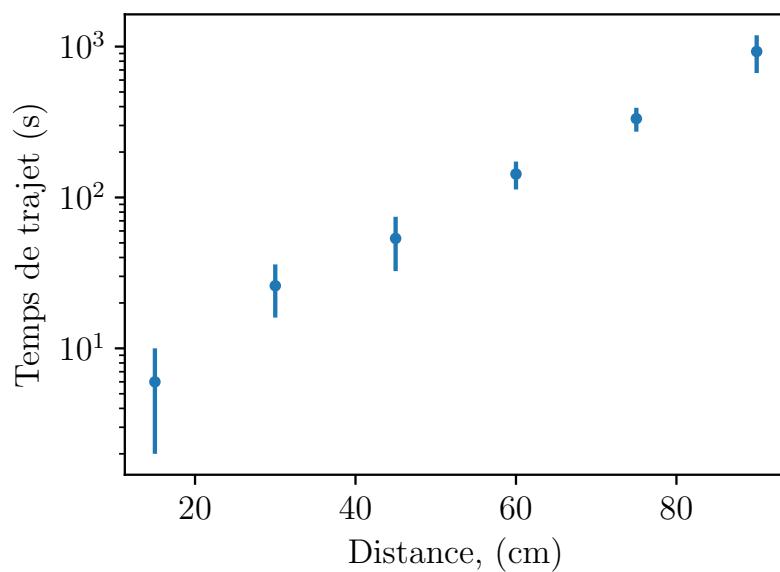


FIGURE 7.2 – Temps de trajet du colorant au sein de l'aquifère en fonction de la distance à la sortie. L'incertitude des mesures correspond à l'étalement du colorant dans la direction de l'écoulement.

# Chapitre 8

## Écoulement potentiel

Dans notre aquifère, l'écoulement ne peut pas être décrit par l'équation de Dupuit-Boussinesq (2.3). Nous allons donc, dans ce chapitre, nous intéresser aux équations qui décrivent l'écoulement dans un aquifère profond.

Dans un premier temps, nous pouvons assimiler l'écoulement dans notre aquifère à un écoulement dans un milieu poreux à deux dimensions, régit par l'équation de Laplace (section 1.4) :

$$\Delta\phi = 0, \quad (8.1)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien et  $\phi$  le potentiel de vitesse. Nous devons maintenant définir les différentes conditions aux limites. Ici, il y a trois types de conditions aux limites : les trois murs imperméables, la surface libre et la sortie (Figure 8.1). Sur les murs imperméables, la vitesse normale de l'écoulement est nulle :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0, \quad (8.2)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal au mur. À la sortie, sur la grille, la pression est atmosphérique ce qui donne pour le potentiel de vitesse :

$$\phi = y, \quad (8.3)$$

où  $y$  est la coordonnée verticale. La dernière limite concerne la surface libre. C'est une frontière libre, il faut donc deux conditions pour la définir. La première est une pression égale à la pression atmosphérique :

$$\phi = h_s, \quad (8.4)$$

la deuxième représente la conservation de la masse d'eau (section 1.5) :

$$\left( s \frac{\partial h}{\partial t} - R \right) n_y = K \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n}. \quad (8.5)$$

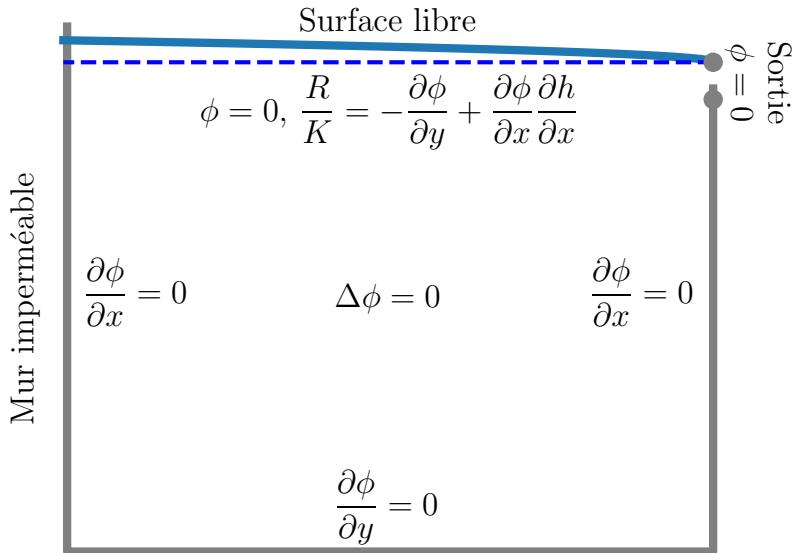


FIGURE 8.1 – Conditions de bord pour un aquifère en régime permanent. Nos observations expérimentales indique que la position de la surface libre est proche de  $h_s = 0$ .

À l'état stationnaire, cette dernière devient

$$-Rn_y = K\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n} \quad \text{sur la surface libre,} \quad (8.6)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{R}{K} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (8.7)$$

Dans cette partie, nous utiliserons la forme stationnaire de cette condition.

L'équation de Laplace (8.1) associées aux conditions aux limites (8.2), (8.3), (8.4) et (8.7), définit entièrement l'écoulement dans notre aquifère sous la forme du potentiel de vitesse  $\phi$ . Cependant, il n'existe pas de solution analytique générale à cette équation. Nous devons donc la résoudre numériquement, ou la simplifier en nous fondant sur des approximations. Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons à l'écoulement dans le cas où les conditions à la surface libre peuvent être linéarisée.

# Chapitre 9

## Linéarisation de la surface libre

### 9.1 Linéarisation de la condition à la surface libre

En régime stationnaire, la position de la surface libre est indépendante du temps, mais elle n'est pas connue a priori. Elle fait partie intégrante de la solution : c'est un problème de Stefan. Nos observations expérimentales montrent que l'élévation de la nappe provoquée par la pluie est faible en regard de sa profondeur (Figure 9.1). Ce résultat suggère de simplifier notre problème en linéarisant les conditions de la surface libre (équations (8.4) et (8.7)) autour de sa position  $h_s = 0$ . Cette hypothèse revient à considérer que la pluie est faible devant la conductivité hydraulique :

$$\frac{R}{K} \ll 1. \quad (9.1)$$

Pour représenter cette approximation, nous définissons les quantités suivantes :

$$\begin{cases} h_s = \frac{R}{K} h_s^* \\ \phi = \frac{R}{K} \phi^* \end{cases} \quad (9.2)$$

où l'exposant \* dénote les termes d'ordre un. Avec ces notations, la condition à la surface libre (8.7) devient :

$$\frac{R}{K} = \frac{R}{K} \frac{\partial \phi^*}{\partial y} - \left( \frac{R}{K} \right)^2 \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial h^*}{\partial x}, \quad (9.3)$$

et en linéarisant nous obtenons :

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial y} = 1. \quad (9.4)$$

Mathématiquement, la sortie est alors de taille infinitésimale. L'eau sort de l'aquifère par un point singulier situé à l'origine. Dans ces conditions, pour satisfaire la conservation

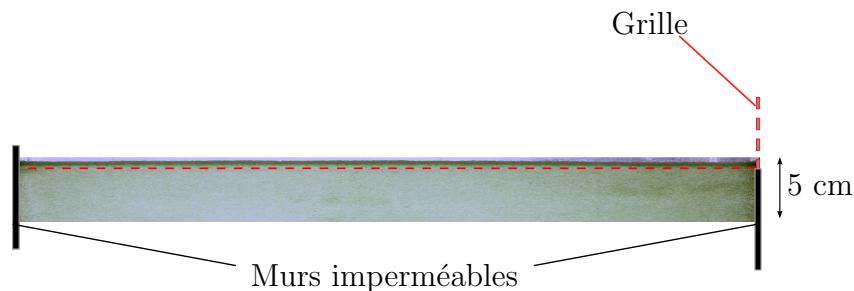


FIGURE 9.1 – Photographie de la surface libre à l'état stationnaire pour un taux de précipitations de 0.56 L/min. La position de la surface libre avant la pluie est noté en pointillé rouge.

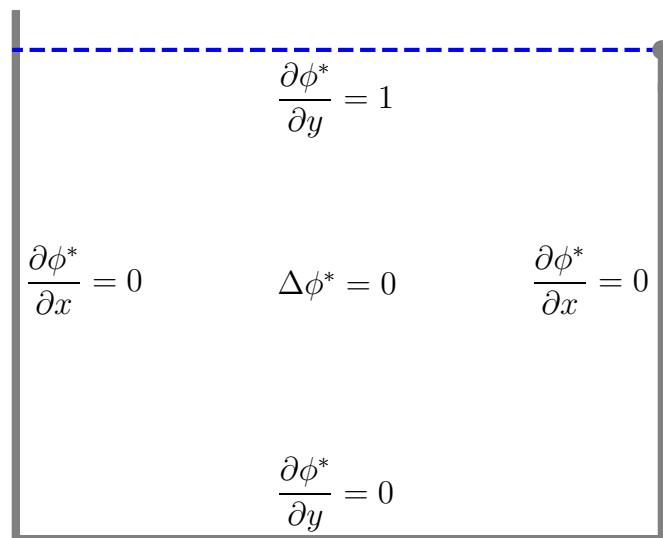


FIGURE 9.2 – Conditions de bord en régime permanent pour un aquifère dont la condition à la surface libre est linéarisé autour de  $h_s = 0$ .

de la masse, le débit sortant en ce point devient infini. Physiquement cela n'est pas possible, mais cette divergence est indispensable mathématiquement.

Le système linéarisé complet peut alors s'écrire (Figure 9.2) :

$$\begin{cases} \Delta\phi^* = 0, \\ \frac{\partial\phi^*}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = -L \quad \text{et } x = 0, \\ \frac{\partial\phi^*}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = -H, \\ \frac{\partial\phi^*}{\partial y} = 0 \quad \text{en } x = 0 \end{cases} \quad (9.5)$$

Par soucis de clarté, dans cette partie, nous noterons les termes d'ordre un sans l'exposant \*. Pour résoudre ce système, nous allons utiliser l'analyse complexe (*Polubarinova-Kochina*, 1962; *Appel*, 2008; *Bear*, 1972). En effet, l'analyse complexe est une méthode efficace de résolution de l'équation de Laplace à deux dimensions.

## 9.2 Analyse complexe

Nous décrivons le plan physique par la variable complexe  $z = x + iy$ , où  $i$  est le nombre imaginaire pur de module un ( $|z| = 1$ ). Nous introduisons alors le champ scalaire réel  $\psi(x, y)$ , appelé fonction de courant, et le champ scalaire complexe  $\Phi(x, y)$  défini par :

$$\Phi(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (9.6)$$

Si  $\Phi$  est une fonction analytique alors elle vérifie (*Rudin*, 1966) :

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{dz} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = i\frac{d\Phi}{dz} \end{cases} \quad (9.7)$$

et les champs réels  $\phi$  et  $\psi$  vérifient les relations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (9.8)$$

de sorte que  $\phi$  et  $\psi$  vérifie bien l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \quad (9.9)$$

Dans ces conditions, les composantes de la vitesse sont données par :

$$u = R\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -R\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (9.10)$$

Le potentiel  $\psi$  est alors la fonction courant de l'écoulement. Ses contours dans le plan complexe correspondent aux lignes de courant de l'écoulement ( $\psi = \text{constante}$ ). Les murs définissent donc une ligne de courant, la condition à la limite devient alors  $\psi = \text{constante}$  le long des murs imperméables.. Une façon plus formelle de retrouver ce résultat consiste à écrire, pour les murs verticaux, la dérivée le long du mur :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad (9.11)$$

Ce qui combiné aux équations de Cauchy-Riemann (9.8) donne :

$$R \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = 0. \quad (9.12)$$

De même pour le mur horizontal :

$$-R \frac{\partial \psi}{\partial x} = v = 0. \quad (9.13)$$

Nous pouvons alors choisir la constante le long d'un mur imperméable. Dans notre aquifère expérimental, nous choisissons  $\psi = 0$  le long des trois murs imperméables.

En ce qui concerne la condition à la surface libre (??), nous pouvons la récrire sous la forme :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -1. \quad (9.14)$$

Ce qui en intégrant le long de la surface, donne :

$$\psi = -(x + L). \quad (9.15)$$

Cette forme nous sera utile dans la section 9.4. Mais pour l'instant, nous pouvons remarquer que d'après l'équation (9.7) :

$$\frac{d\Phi}{dz} = i \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad (9.16)$$

et ainsi :

$$\operatorname{Re} \left( i \frac{d\Phi}{dz} \right) = - \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (9.17)$$

L'écoulement dans notre aquifère est donc décrit par le système d'équations :

$$\begin{cases} \Phi \text{ analytique} \\ \operatorname{Im}(\Phi) = 0 & \text{sur les murs,} \\ \operatorname{Re}(\Phi) = 0 & \text{sur la sortie,} \\ \operatorname{Re} \left( i \frac{d\Phi}{dz} \right) = - \frac{\partial \phi}{\partial y} & \text{sur la surface libre,} \end{cases} \quad (9.18)$$

Si  $\Phi$  est analytique, sa dérivée est analytique et réciproquement. Nous pouvons alors introduire une nouvelle fonction analytique  $\chi$  telle que :

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{R}{K}(\chi + 1), \quad (9.19)$$

Cette fonction nous permet d'écrire les différentes conditions aux limites sous une forme condensée :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\chi) = 0 & \text{sur la surface libre,} \\ \operatorname{Im}(\chi) = 0 & \text{sur les murs.} \end{cases} \quad (9.20)$$

Ce système n'admet pas, à notre connaissance, de solution analytique. Nous allons donc dans un premier temps considérer le cas d'un aquifère infiniment profond (section 9.3). Nous prendrons en compte le fond imperméable dans la section 9.4.

### 9.3 Aquifère infiniment profond

Dans un premier temps, nous considérerons l'aquifère comme étant infiniment profond. Ainsi, la condition sur le fond de l'aquifère n'intervient qu'en  $y = -\infty$ . La résolution du problème est alors simplifiée, car il suffit d'imposer que  $\Phi$  ne diverge pas en  $y = -\infty$ . Dans ces conditions, nous proposons comme expression pour  $\chi$  :

$$\chi = \frac{1 + \exp(i\pi z)}{1 - \exp(i\pi z)}. \quad (9.21)$$

Avec cette expression, les conditions aux limites (équation (9.20)) sont vérifiées. En combinant cette expression avec l'équation (9.19) nous obtenons une expression pour le potentiel complexe :

$$\Phi = \frac{R}{K} \left( \frac{2}{\pi} \log(1 - \exp(i\pi z)) - 2iz \right), \quad (9.22)$$

où  $\log$  est le logarithme complexe.

Près de la sortie ( $z = 0$ ),  $\Phi$  tend vers l'infini : c'est une singularité. En développant (9.22) au premier ordre en  $z$ , nous voyons que près de la sortie,  $\Phi$  se comporte comme un logarithme. Traçons alors les lignes de courant obtenues pour un potentiel  $\Phi^* = \log(z)$  (Figure 9.3). Dans ce cas, les contours de charge hydrologique, c'est-à-dire de  $\operatorname{Re}(\Phi)$ , sont des cercles centrés sur la sortie. Les lignes de courant, c'est-à-dire les contours de  $\operatorname{Im}(\Phi)$  sont des droites passant par l'origine. L'angle entre deux lignes séparées par un même flux est indépendant de leurs orientations. Cet écoulement ressemble à ce que nous obtenions expérimentalement (section 7). Près de la singularité, l'écoulement est donc correctement décrit par l'équation (15.5).

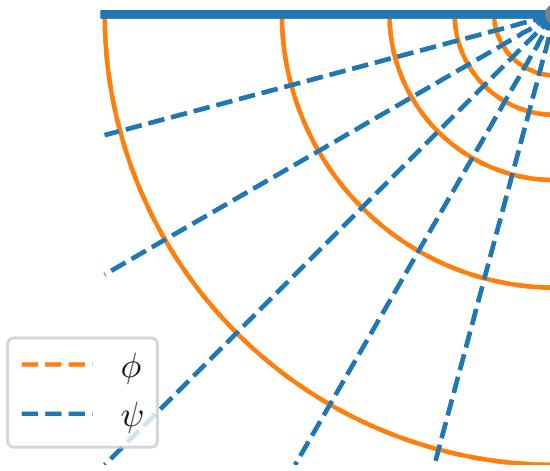


FIGURE 9.3 – Écoulement représenté par le potentiel complexe  $\Phi = \log(z)$ . Pointillés :  $\psi = \text{Im}(\Phi)$ . Trait plein :  $\phi = \text{Re}(\Phi)$

Vérifions maintenant si nous pouvons reproduire les lignes de courant loin de la sortie. Pour cela, nous superposons les lignes de courant expérimentales à celles obtenues avec l'expression de  $\Phi$  (Figure 9.4). Ce faisant, nous remarquons que, près de la surface libre, les prédictions sont correctes. Cependant, près du fond, l'équation (15.5) ne rend pas compte de la présence d'un mur imperméable. En effet, nous avons supposé que ce dernier était à l'infini. La ligne de courant qui passe près du fond n'est donc pas correctement décrite. Pour décrire correctement l'écoulement dans un aquifère, fini nous devons donc imposer cette condition de bord.

## 9.4 Aquifère de profondeur finie

Considérons maintenant que le fond de l'aquifère est situé à une profondeur  $H$ . Nous adimensionnons  $x$ ,  $y$  et  $h$  par  $L$  et  $\phi$  et  $\psi$  par  $LR/K$ . Nous pouvons donc exprimer le problème à résoudre pour obtenir l'écoulement dans notre aquifère :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 \\ \psi = 0 & \text{sur les murs,} \\ \psi = -(x + 1) & \text{sur la surface libre,} \end{cases} \quad (9.23)$$

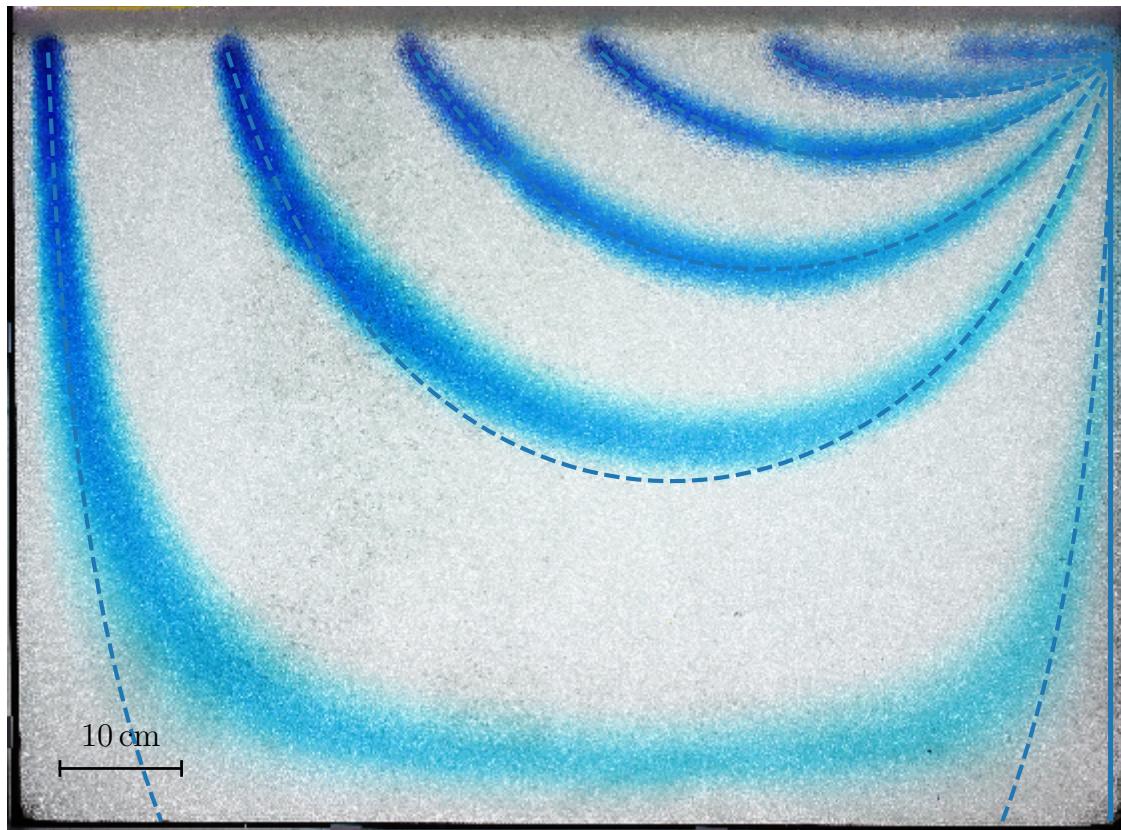


FIGURE 9.4 – Lignes de courant dans un aquifère infiniment profond (en pointillées) comparées à l’expérience de la figure 7.1d. Les lignes de courant de l’aquifère infiniment profond sont obtenues avec l’expression du potentiel complexe (équation 9.22).

En quantités adimensionnées, les murs sont situés en  $x = 0$ ,  $x = 1$ , et  $y = A$ , où  $A$  est le rapport d'aspect  $A = \frac{H}{L}$ . Ce qui se traduit en :

$$\begin{cases} \Phi \text{ analytique} \\ \operatorname{Im}(\Phi) = 0 & \text{sur les murs,} \\ \operatorname{Im}(\Phi) = -(x + 1) & \text{sur la surface libre,} \end{cases} \quad (9.24)$$

En nous appuyant sur les travaux de *Polubarinova-Kochina* (1962), nous trouvons une fonction analytique vérifiant les conditions sur les murs :

$$\Phi_1(z) = \cosh(\pi(iz - A)) \quad (9.25)$$

À la surface libre, la partie imaginaire de ce potentiel complexe est un cosinus (Figure 9.5a), ce qui ne satisfait pas la condition recherchée. Cependant, toutes les fonctions de la forme :

$$\Phi_k(z) = \cosh(k\pi(iz - A)) \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}^*, \quad (9.26)$$

sont analytiques et vérifient les conditions sur les bords (Figure 9.5b,c). De plus, la somme de fonction analytique est analytique. Nous cherchons alors une solution sous la forme d'une série de Fourier :

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cosh(k\pi(iz - A)). \quad (9.27)$$

Chaque terme de la somme vérifie les conditions sur les murs verticaux. Nous devons maintenant déduire l'amplitude  $C_k$  du mode  $k$  des autres conditions aux limites. La conservation de la masse à la surface libre impose :

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sinh(k\pi A) \sin(k\pi x) = (x + 1). \quad (9.28)$$

En multipliant cette équation par  $\sin(k\pi x)$  et en intégrant entre  $x = -1$  et  $x = 0$ , nous obtenons alors pour les coefficients :

$$C_k = -\frac{2}{k\pi} \frac{1}{\sinh(k\pi A)} \quad (9.29)$$

Et finalement le potentiel complexe devient :

$$\Phi(z) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \frac{\cosh(k\pi(iz - A))}{\sinh(k\pi A)} \quad (9.30)$$

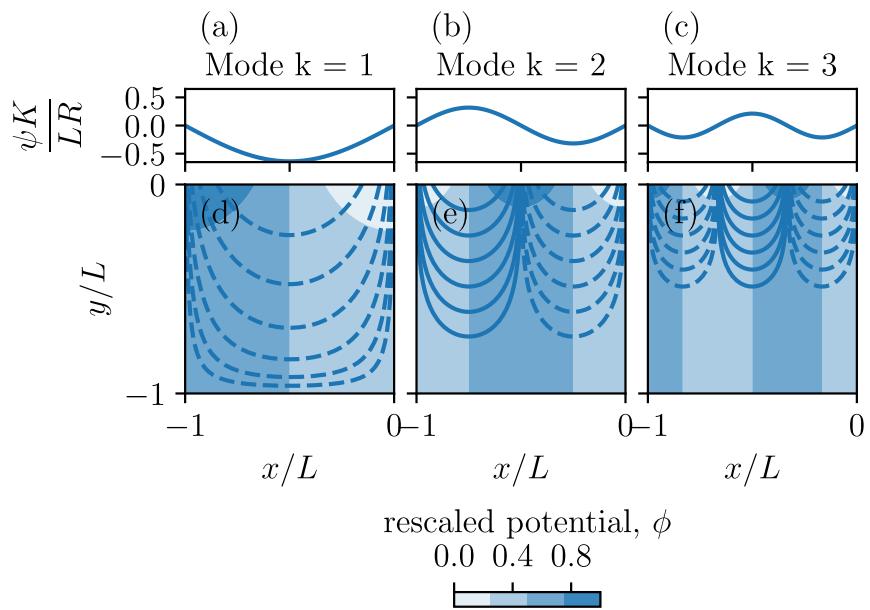


FIGURE 9.5 – Les trois premiers modes de l’expression du potentiel (9.30). (a),(b) et (c) : Fonction de courant à la surface libre. (d), (e) et (f) Échelle de bleu : charge hydraulique relativement à sa valeur maximale ( $\text{Re}(\Phi)/\max(\text{Re}(\Phi))$ ), traits pleins et pointillés : lignes de courant correspondant à des valeurs de la fonction de courant ( $\text{Im}(\Phi)$ ) respectivement positives et négatives.

Nous pouvons alors calculer ce potentiel pour les différents modes. Chaque mode de la série est régulier (Figure 9.5). En effet, le potentiel,  $\psi_k$  est continu à la surface. La série totale en revanche possède une singularité par laquelle l'eau s'écoule (Figure 9.6). Le potentiel à la surface est discontinu à la sortie. C'est la raison pour laquelle il faut une centaine de modes avant d'avoir une expression du potentiel correcte. Près de la sortie, nous pouvons toujours observer des oscillations sur la fonction de courant à la surface. Celles-ci sont dues au nombre de modes. Pour y remédier, il faut augmenter le nombre de modes pris en compte.

Avec l'expression du potentiel complexe nous pouvons tracer les lignes de courant obtenues pour différents rapport d'aspect (Figure 9.7). Lorsque  $A$  est petit, nous retrouvons les lignes de courant presque horizontales comme dans l'approximation de Dupuit, sauf près de la sortie. Quand le rapport d'aspect  $A$  augmente, nous observons clairement que l'écoulement est bidimensionnel, même loin de la sortie.

Comparons à présent notre solution théorique avec les lignes de courant expérimentales. Pour cela, nous calculons le potentiel complexe (9.30) pour un aquifère ayant le même rapport d'aspect que notre aquifère expérimental ( $A = 0.71$ ). Nous utilisons dans ce calcul, les 100 premiers modes. Nous obtenons alors la valeur du potentiel complexe partout dans l'aquifère. Une ligne de courant correspond à une iso-potentielle scalaire ( $\psi = \text{constante}$ ). Nous devons donc choisir pour quelles valeurs de  $\psi$  nous traçons les lignes de courant. Ce choix revient à sélectionner un point pour chaque ligne de courant expérimentale, et à calculer la valeur de la fonction de courant en ce point.

En pratique, puisque nos lignes de courant ont une épaisseur, nous pouvons tracer deux lignes de courant pour chaque tache de colorant (une pour chaque bord) (Figure 9.8). Contrairement à l'aquifère infiniment profond, l'expression du potentiel complexe sous forme d'une série (équation 9.30) reproduit de manière convaincante nos expériences partout dans l'aquifère.

Sous cette forme linéarisée, le potentiel complexe ne dépend que du rapport d'aspect de l'aquifère. La forme de l'écoulement ne dépend pas du taux de précipitation, seule la vitesse de l'écoulement en dépend, linéairement (équation 9.10). Pour des taux de précipitation élevés, nous nous attendons cependant à ce que la déformation de la surface libre soit trop importante pour pouvoir faire l'hypothèse de quasi-horizontalité. L'expression du potentiel complexe (équation 9.30) nous permet de calculer avec le taux de précipitation le champs des vitesses dans notre aquifère. Avec ce dernier nous pouvons prédire la position de la tache de colorant en fonction du temps écoulé depuis l'injection (Figure 9.9). Notre modèle théorique reproduit donc bien l'écoulement dans notre aquifère à l'état stationnaire.

Avec l'hypothèse de l'horizontalité de la surface libre, nous réduisons la sortie à une singularité. C'est cette singularité qui va contrôler le débit sortant de l'aquifère. Mais de quelle façon ? Est-ce que cela impact aussi l'écoulement loin de la sortie ? Pour répondre à ces questions, nous allons maintenant nous intéresser au comportement de l'écoulement au voisinage de la sortie.

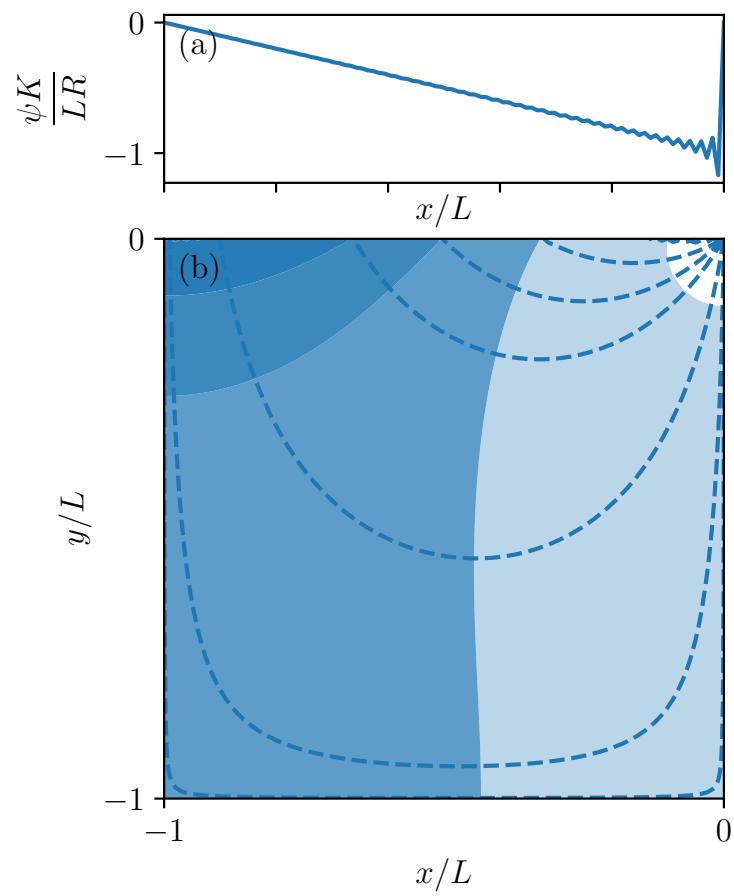


FIGURE 9.6 – Écoulement dans un aquifère fini, pour une surface libre linéarisée (équation (9.30)), calculé avec les 100 premiers modes. (a) : valeur de la fonction de courant sur la surface. (b) : lignes de courant et potentiel de vitesse dans l'aquifère.

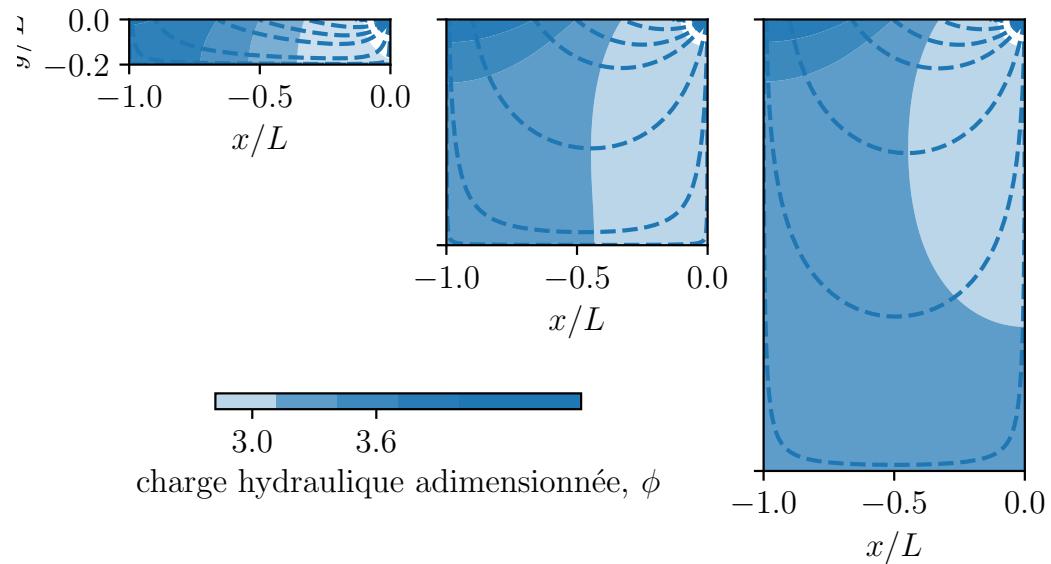


FIGURE 9.7 – Écoulement dans un aquifère fini calculé d'après (9.30) pour différents rapport d'aspect ( $A = 0.2, 1$  et  $2$ ). Nous avons pris les 100 premiers modes pour calculer les potentiels complexes.

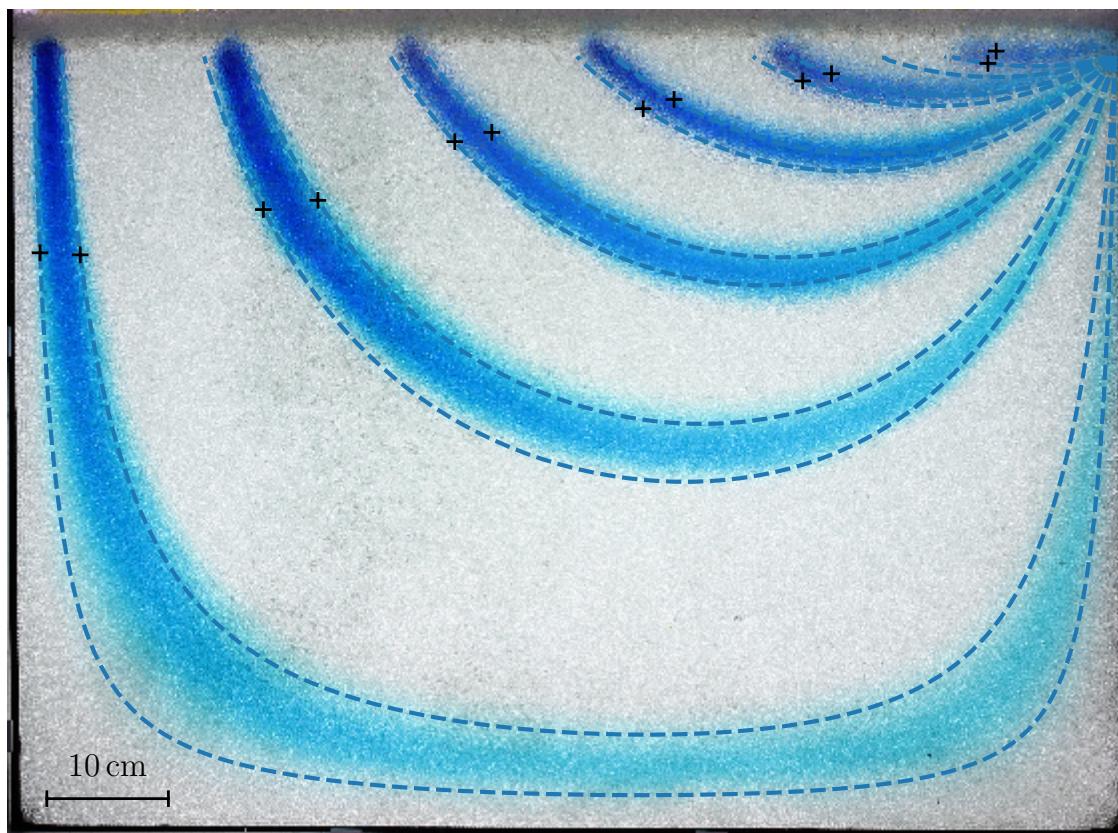


FIGURE 9.8 – Lignes de courant dans l’expérience et ligne de courant calculées avec les séries de Fourier (équation (9.30)). Les valeurs de  $\psi$  utilisées pour tracer les lignes de courants sont calculées pour les points représentés par une croix, choisis manuellement.

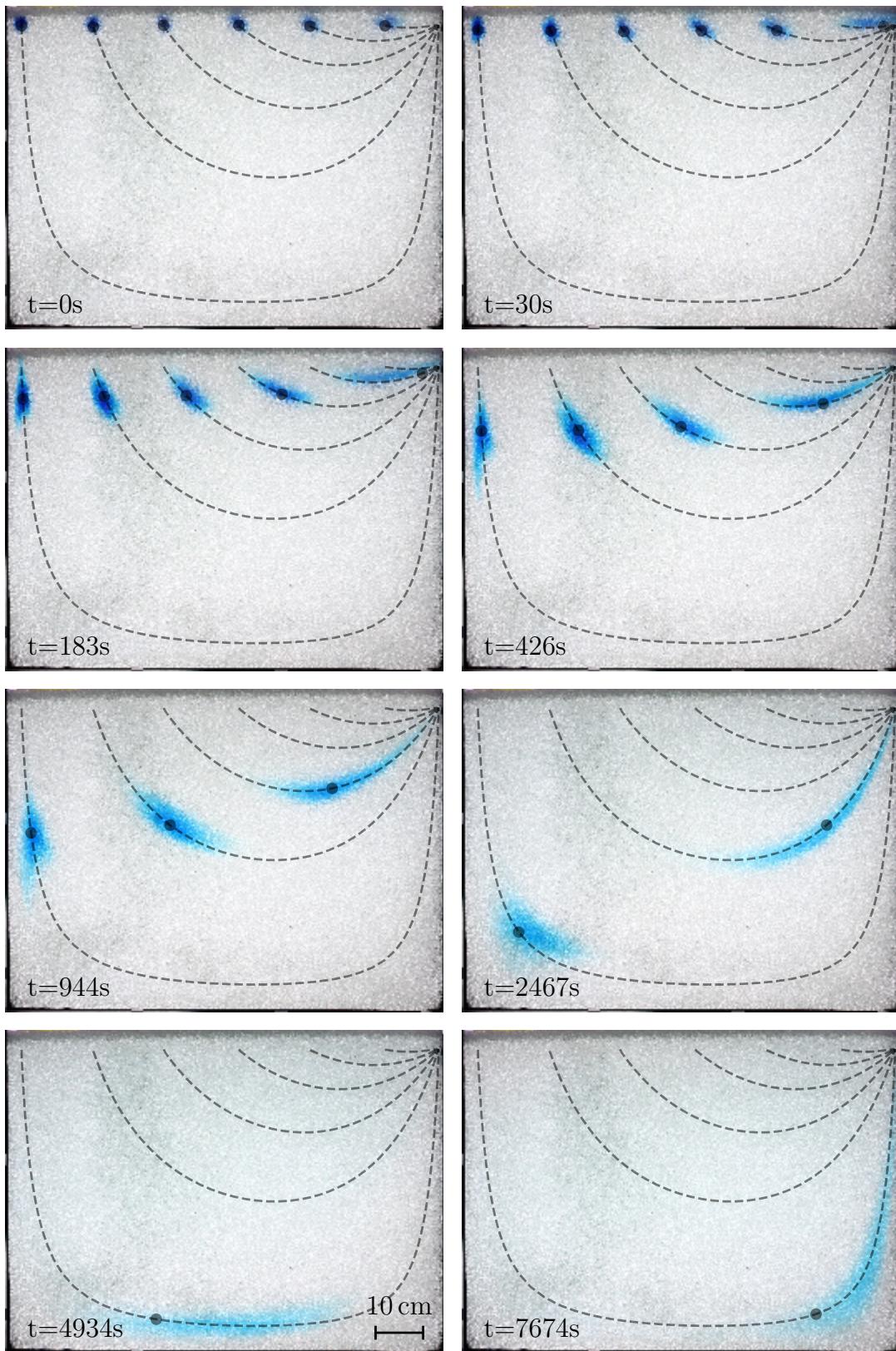


FIGURE 9.9 – Propagation des taches de colorant et prédition de la position des taches d'après l'expression du potentiel complexe (équation 9.30).

# Chapitre 10

## Comportement de l'écoulement au voisinage de la sortie

Jusqu'ici nous avons considéré la sortie comme un point singulier. Pourtant, dans nos expériences, la sortie est en réalité une surface de suintement le long de la grille verticale (Figure 5.11b). Dans nos expériences, elle est d'approximativement 3 cm. Nous nous intéressons maintenant au comportement de l'écoulement au voisinage de cette surface de suintement.

### 10.1 Comportement de l'écoulement au voisinage de la sortie sans pluie

Près de la sortie, nous considérons que l'eau s'écoule à travers une grille perméable de hauteur finie, mais inconnue. Plus exactement, c'est la position de l'intersection entre la surface de l'eau et la grille qui est inconnue. Nous considérons, dans un premier temps, que l'apport d'eau par la pluie, dans cette zone, est négligeable devant le débit sortant. Ainsi, la surface libre est une ligne de courant (Figure 10.1). Elle est donc définie par une fonction de courant constante. Nous conservons la convention de  $\psi = 0$  sur le mur, nous devons donc trouver la valeur pour la surface libre. Pour cela, nous exprimons le débit sortant  $Q_w$  en intégrant la vitesse le long de la surface de suintement :

$$Q_w = \int_{\text{sortie}} u dy = \int_{\text{sortie}} K \frac{\partial \psi}{\partial y} = [\psi]_0^{h_0}, \quad (10.1)$$

où  $[\psi]_0^{h_0} = \psi(z = 0) - \psi(z = h_0)$  est la différence entre la valeur de  $\psi$  aux extrémités de la surface de suintement. Nous obtenons donc pour la surface libre :

$$\psi = -\frac{Q_w}{K}; \quad (10.2)$$

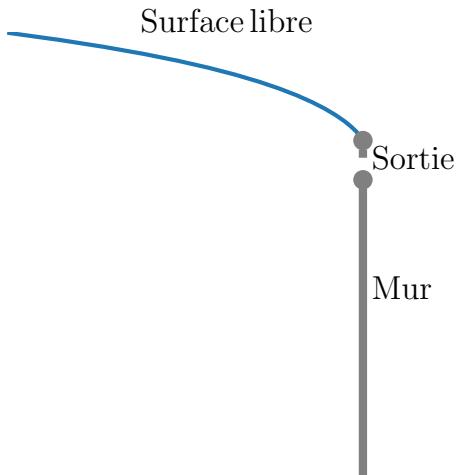


FIGURE 10.1 – Écoulement dans l'aquifère près de la sortie. L'apport de l'eau de pluie dans cette zone peut être négligé.

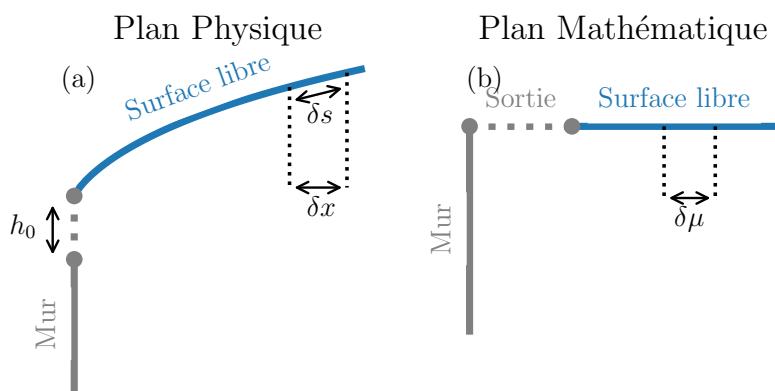


FIGURE 10.2 – Schéma de l'aquifère près de la sortie. Dans le plan physique (a) la position du mur est connue, celle de la surface libre et la hauteur de la zone de suintement ne le sont pas. Dans le plan mathématique, la position de toutes les limites est connue.

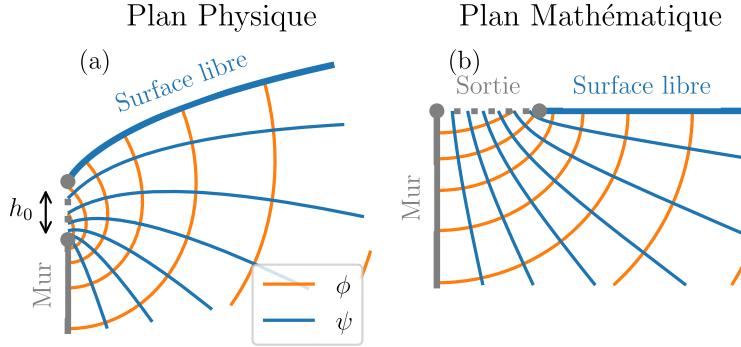


FIGURE 10.3 – Lignes de courant (en bleu) et lignes isopotentielles de vitesse (en orange) dans le plan physique (a) et dans le plan mathématique (b).

Dans l'espace physique, le mur imperméable est une limite dont nous connaissons la position, contrairement à la surface libre. La surface de suintement est un cas intermédiaire, sa position horizontale,  $x$ , est connue, mais pas sa hauteur,  $h_0$ . et la surface de suintement dont les positions ne sont pas connues. Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser la technique des transformations conformes (*Polubarinova-Kochina*, 1962). Afin d'éviter les problèmes liés aux coupures de certaines fonctions complexes tel le logarithme, nous changeons le sens de représentation. Ainsi, la sortie reste à l'origine du plan mais l'aquifère est du côté des réels positifs ( $x > 0$ , Figure 10.2). Nous définissons alors une nouvelle variable complexe  $\zeta = \mu + i\nu$  telle que :

$$\zeta = z - i\Phi. \quad (10.3)$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{cases} \mu = x + \psi, \\ \nu = y - \phi. \end{cases} \quad (10.4)$$

Nous pouvons alors exprimer nos différentes conditions aux limites avec cette nouvelle variable. Sur la surface libre, nous avons :

$$\begin{cases} \mu = \psi + x = \frac{Q_s}{K} + x, \\ \nu = 0. \end{cases} \quad (10.5)$$

De même sur le mur :

$$\begin{cases} \mu = 0, \\ \nu = y - \phi. \end{cases} \quad (10.6)$$

Il ne nous reste alors que la sortie :

$$\begin{cases} \mu = \psi + x, \\ \nu = 0 \end{cases} \quad (10.7)$$

Cette variable  $\zeta$  nous permet de définir un nouveau plan mathématique décrit par  $\mu$  et  $\nu$ . Dans ce plan, les limites de notre domaine sont fixes. D'autre part, si une fonction est analytique alors son inverse est aussi analytique. Ainsi, nous pouvons maintenant résoudre une équation de Laplace pour la coordonnée complexe  $z$  dans le plan mathématiques décrit par  $\zeta$ . Dans ce plan, les conditions aux limites pour la coordonnée  $x$  s'écrivent :

$$\begin{cases} x = \mu - \frac{q_s}{K} & \text{sur la surface libre,} \\ x = 0 & \text{sur le mur,} \\ x = 0 & \text{sur la sortie,} \end{cases} \quad (10.8)$$

Les conditions aux limites pour la coordonnée  $y$  se déduisent des précédentes avec les conditions de Cauchy-Riemann.

Nous pouvons alors introduire une fonction analytique  $\chi$  telle que :

$$\chi = z', \quad (10.9)$$

soit la dérivée de  $z$  par rapport à  $\zeta$ . Ainsi nous pouvons écrire notre problème à une constante près avec  $\chi$  :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\chi) = 1 & \text{sur la surface libre,} \\ \operatorname{Re}(\chi) = 0 & \text{sur le mur,} \\ \operatorname{Re}(\chi) = 0 & \text{sur la sortie.} \end{cases} \quad (10.10)$$

Nous proposons alors comme solution :

$$\chi = \frac{i}{\pi} \log\left(\frac{Q + \zeta}{Q - \zeta}\right), \quad (10.11)$$

où  $Q$  est le débit quittant l'aquifère normalisé par la conductivité hydraulique du milieu poreux :

$$Q = \frac{Q_w}{K}. \quad (10.12)$$

Ceci nous permet en intégrant d'obtenir l'expression :

$$z = \frac{i}{\pi} [(Q - \zeta) \log(Q - \zeta) + (Q + \zeta) \log(Q + \zeta) - 2Q \log(Q)], \quad (10.13)$$

où nous fixons l'origine  $z(0) = 0$ .

Maintenant, nous pouvons tracer l'écoulement obtenu dans les plans mathématique et physique (Figure 10.3). La sortie admet bien une taille finie, et sa hauteur peut être calculée :

$$h_0 = \operatorname{Im}(z(Q)) = \frac{i}{\pi} (2Q \log(2Q) - 2Q \log(Q)), \quad (10.14)$$

Finalement :

$$h_0 = \frac{2 \log(2)}{\pi} Q. \quad (10.15)$$

La hauteur de la sortie est proportionnelle au débit sortant de l'aquifère.

## 10.2 Comportement de l'écoulement au voisinage de la sortie avec la pluie

Considérons maintenant les cas où la pluie près de la sortie n'est plus négligeable. La surface libre n'est alors plus une ligne de courant. Sur cette dernière, la conservation de la masse peut alors s'écrire :

$$\frac{R}{K} \delta x + \delta \psi = 0, \quad (10.16)$$

Dans le plan complexe décrit par  $\zeta$ , les conditions aux limites sont les mêmes que dans le cas sans pluie (Figure 10.3). Seule la condition à la surface libre diffère. Il nous donc l'écrire. Tout d'abord, nous pouvons noter que, par définition :

$$\delta \psi = \delta \mu - \delta x. \quad (10.17)$$

De même, la variation de la longueur d'arc le long de la surface libre  $\delta s$  est proportionnelle à la variation de  $\mu$  dans le plan complexe :

$$\delta s = |z'| \delta \mu, \quad (10.18)$$

où  $z'$  est la dérivée de  $z$  selon  $\zeta$ .

La condition à la surface libre (10.16) devient alors :

$$\left( \frac{R}{K} - 1 \right) \delta x + \delta \mu = 0 \quad (10.19)$$

Il ne nous reste plus qu'à remarquer que :

$$\frac{\delta x}{\delta \mu} = \operatorname{Re}(z'), \quad (10.20)$$

et la condition à la surface libre devient finalement :

$$\operatorname{Re} \left( \left( \frac{R}{K} - 1 \right) z' \right) = 1. \quad (10.21)$$

Pour trouver une solution, nous introduisons alors une fonction  $\chi_1 = (R - 1)z'$ .  $\chi_1$  étant la dérivée d'une fonction analytique, elle est elle-même analytique. La résolution

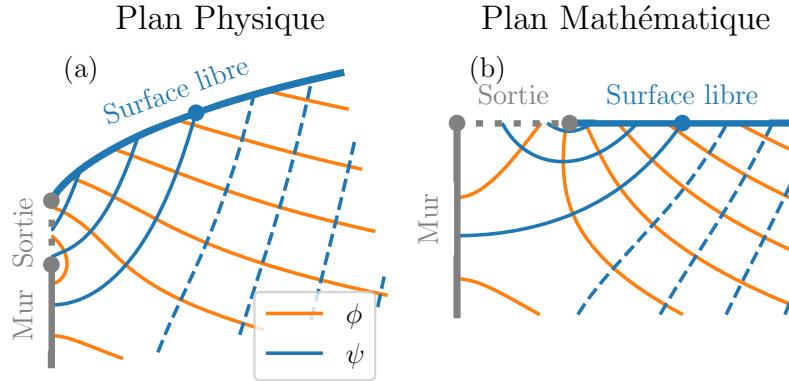


FIGURE 10.4 – Lignes de l’écoulement près de la sortie lorsque la pluie ne peut pas être négligée. (Plan physique (a) et mathématique (b)). L’écoulement est séparé en deux parties par une ligne de courant commençant par un point bleu. En deçà de cette séparatrice, l’eau s’écoule jusqu’à la sortie. Au delà, l’eau s’écoule par le fond de l’aquifère.

de notre problème revient donc à trouver la fonction  $\chi_1$  vérifiant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\chi_1) = 1 & \text{sur la surface libre,} \\ \operatorname{Im}(\chi_1) = 0 & \text{sur le mur,} \\ \operatorname{Re}(\chi_1) = 0 & \text{sur la sortie.} \end{cases} \quad (10.22)$$

Nous proposons alors comme solution :

$$\chi_1 = \frac{i}{\pi} \log \left( \frac{Q + \zeta}{Q - \zeta} \right), \quad (10.23)$$

Ceci nous permet en intégrant d’obtenir l’expressions :

$$z = -\frac{i}{\pi} \left( \frac{R}{K} - 1 \right) [(Q - \zeta) \log(Q - \zeta) - (Q + \zeta) \log(Q + \zeta) - 2Q \log(Q)], \quad (10.24)$$

où nous fixons l’origine  $z(0) = 0$ .

Intéressons-nous d’abord aux cas où le taux de précipitations est non nul. Lorsque  $0 < R/K < 1$ , l’équation (10.24) définit l’écoulement de la Figure 10.4. En suivant les contours de  $\psi$ , nous pouvons décrire le trajet de l’eau. L’eau de pluie rejoint la nappe en traversant la surface libre. Ensuite il y a deux cas de figure. Près de la sortie ( $x < Q/R$ ), l’eau quitte l’aquifère par la zone de suintement, tandis que loin de la sortie ( $x > Q/R$ ), l’eau s’écoule vers le fond de l’aquifère sans jamais en sortir. L’écoulement admet donc

une séparatrice définie par  $\psi = 0$  au delà de laquelle l'eau ne sort pas de l'aquifère, et s'enfonce vers  $y = -\infty$ .

Enfin si  $R/K > 1$ , l'équation (10.24) n'admet pas de solution physique. Mathématiquement, il y a une solution pour laquelle l'eau ne sort plus par la sortie. Physiquement, cette solution correspond au cas où l'eau de pluie ne peut plus s'infiltrer dans l'aquifère, car le taux de précipitation ( $R$ ) excède la vitesse maximale de pénétration de l'eau dans le milieu poreux sous l'effet de la seule gravité ( $K$ ).

L'utilisation des transformations conformes nous permet de caractériser l'écoulement au voisinage de la surface de suintement sans linéariser la condition à la surface libre. Dans le chapitre suivant, nous regardons comment il est possible d'appliquer cette méthode à un aquifère infiniment profond.

# Chapitre 11

## Aquifère non linéaire et infiniment profond

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'écoulement dans un aquifère infiniment profond. Pour cela, nous ajoutons au domaine précédent (Figure 10.4) le mur imperméable qui, dans nos expériences, représente une ligne de partage des eaux (Figure 11.1). Dans le plan physique, cette limite correspond à un mur imperméable en  $x = L$ . La ligne de courant  $\psi = 0$  passe alors par les deux murs imperméables. La position de la ligne de partage des eaux dans le plan complexe est donc en  $\mu = L$ . Nous avons, comme dans la section 10.2, un domaine fixe avec une géométrie simple. Nous définissons alors une fonction analytique,  $\chi_2$ , qui vérifie les mêmes conditions aux limites que  $\chi_1$ , plus la condition à la ligne de partage des eaux :

$$\text{Im}(\chi_2) = 0 \quad \text{sur la ligne de partage des eaux.} \quad (11.1)$$

Nous proposons alors comme expression :

$$\chi_2 = \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{\exp(i\pi\zeta/L) - \exp(i\pi R/K)}{\exp(i\pi\zeta/L) - \exp(-i\pi R/K)} \right) + iL \left( 1 - \frac{R}{K} \right). \quad (11.2)$$

Nous intégrons pour obtenir le plan physique :

$$z = \zeta + \frac{L}{\left( \frac{R}{K} - 1 \right) \pi^2} (\text{Li}_2(\exp(-i\pi(\zeta/L - R/K))) - \text{Li}_2(\exp(-i\pi(\zeta/L + R/K)))) , \quad (11.3)$$

où  $\text{Li}_2$  est la fonction de Spence, également appelée « dilogarithme » dont la coupure est l'axe des  $x$  négatifs. Nous obtenons alors l'écoulement dans un aquifère infiniment profond non-linéaire (Figure 11.1).

Dans le plan physique, toute l'eau de pluie qui rejoint la surface libre s'écoule dans l'aquifère jusqu'à la sortie. L'écoulement est similaire à celui de la section 9.3 pour

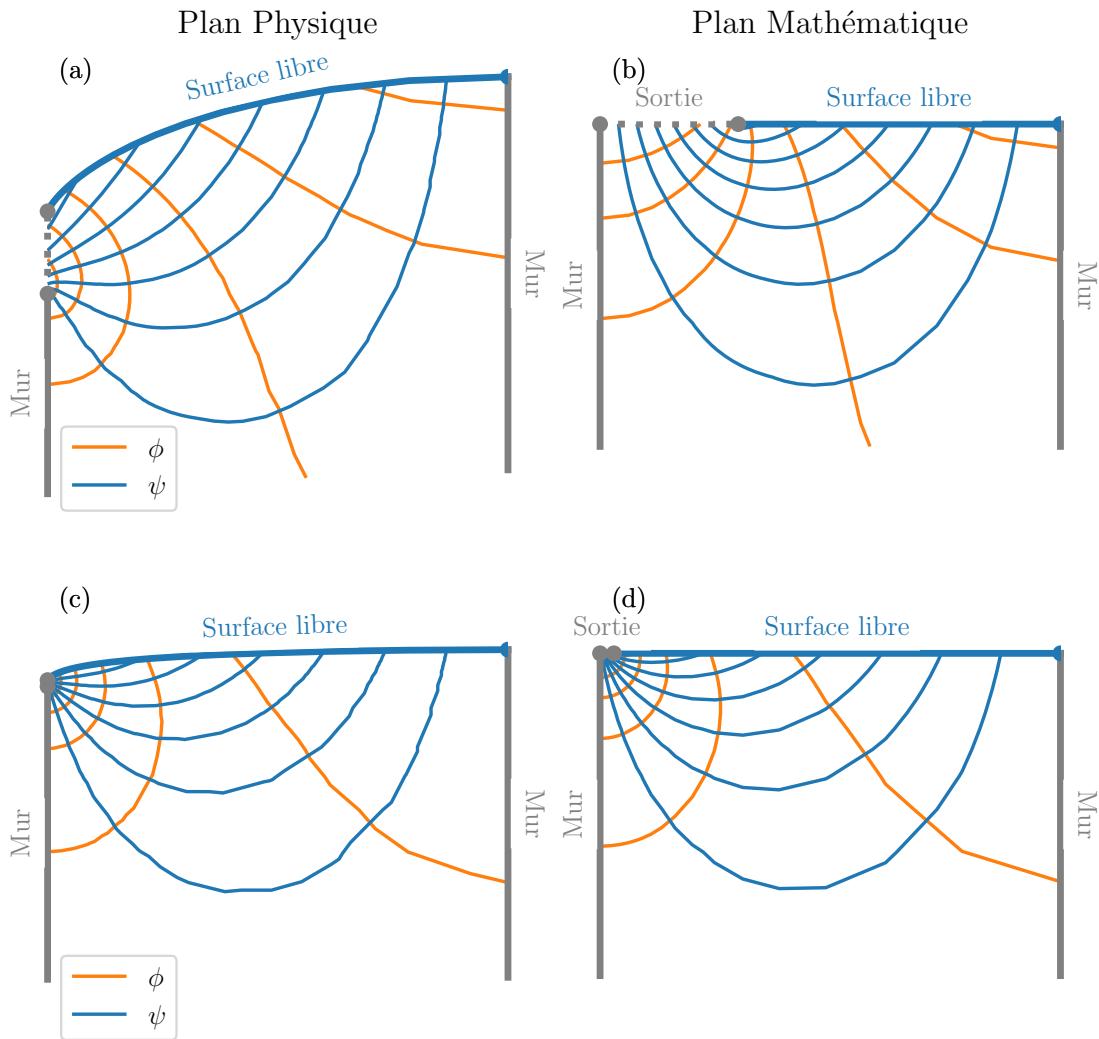


FIGURE 11.1 – Lignes de l’écoulement dans un aquifère infiniment profond soumis à une pluie ( $R/K = 0.3$ )((a) : plan physique, (b) : plan mathématique, et soumis à une pluie faible ( $R/K = 0.03$ )((c) : plan physique, (d) : plan mathématique

un aquifère linéaire infiniment profond. Dans le cas limite où les pluies sont petites ( $R/K \ll 1$ ), cette solution devrait s'approcher de la solution linéaire (section 9.3) ; c'est ce que nous vérifions au chapitre suivant.

## 11.1 Pluie faible

L'équation (11.3) est une solution exacte de l'équation (10.24) à l'état stationnaire. Lorsque le taux de précipitation diminue, on s'attend à ce que la déformation de la surface libre soit plus faible, jusqu'à retrouver une surface libre horizontale pour un taux de précipitation nul ( $R/K = 0$ ).

Pour traduire mathématiquement ce raisonnement, nous calculons le développement limité de l'équation (11.3) lorsque  $R$  tend vers zéro, ce qui nous donne l'expression suivante pour le potentiel complexe :

$$\Phi \sim \frac{2RL}{K\pi} \left( \tilde{\Phi} \left( \frac{\zeta}{L} \right) - \log \frac{R}{K} \right), \quad (11.4)$$

où

$$\tilde{\Phi} \left( \frac{\zeta}{L} \right) = \log \left( 1 - \exp(-i\pi \frac{\zeta}{L}) \right) - \log \pi. \quad (11.5)$$

Comme nous l'attendions, quand le taux de précipitation est exactement nul, nous trouvons  $\Phi = 0$ , ainsi  $z = \zeta$ , et donc une surface libre horizontale, et un débit sortant nul. Pour un taux de précipitation faible, l'écoulement décrit par la solution approchée s'approche de la solution exacte (Figure 11.2). Cependant, près de la sortie, lorsque  $R$  et  $\zeta$  sont petits, le dilogarithme de l'équation (11.3) se rapproche de sa coupure et la solution approchée ne décrit plus correctement l'écoulement.

Pour la solution linéarisée (11.4) la partie imaginaire de  $\Phi$  est proportionnelle au taux de précipitation, et les lignes de courant ne changent pas selon l'intensité de la pluie. Mais la partie réelle (la charge hydraulique), est la somme d'un terme proportionnel à  $R$  et un autre proportionnel à  $R \log R$ . Ainsi, même pour de très faibles précipitations, le champ de pression dans l'aquifère porte la marque de la non-linéarité induite par la surface libre. La solution linéarisée conserve la non linéarité induite de la surface libre. Expérimentalement, cette non-linéarité ne peut pas être observée en suivant les lignes de courant, il nous faudrait mesurer le champ de charge hydraulique avec des piézomètres, comme sur les mesures de terrain (section 4).

Dans nos expériences, nos débits de précipitations sont compris entre 0.1 et 0.9 L/min soit :

$$4 \cdot 10^{-4} \ll \frac{R}{K} \ll 3 \cdot 10^{-3}. \quad (11.6)$$

Nous sommes donc dans le régime des pluies faibles. L'amplitude,  $\delta h$ , de la déformation non-linéaire sur le mur imperméable en  $x = L$  pour un aquifère infiniment profond est

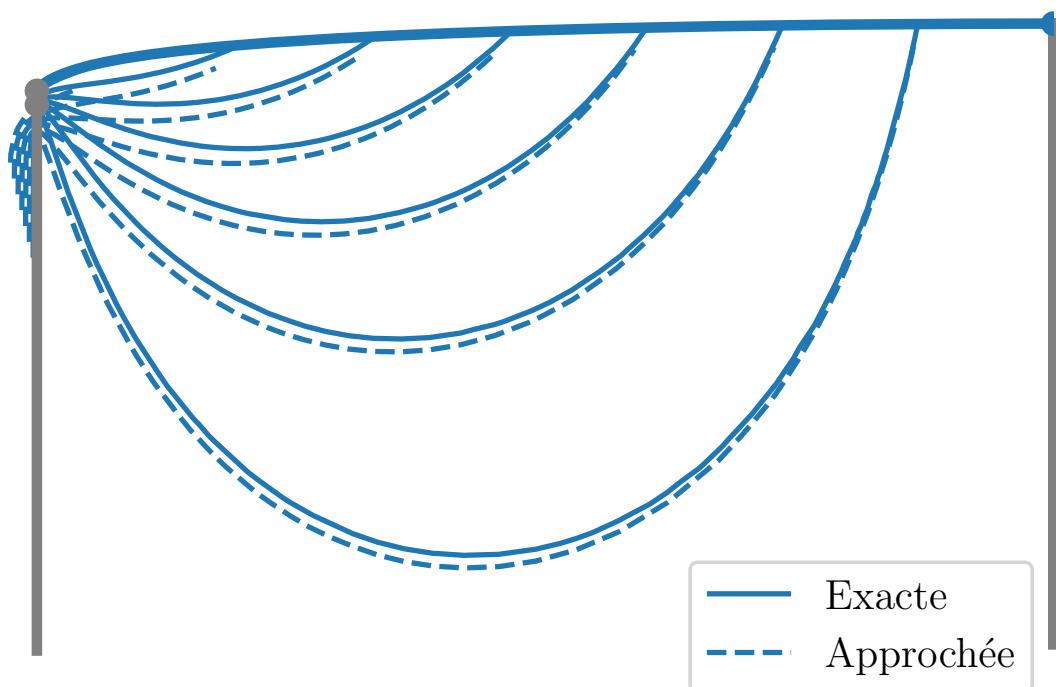


FIGURE 11.2 – Schéma des lignes de l'écoulement dans un aquifère infiniment profond soumis à une pluie faible ( $R = 0.03$ ). Les lignes pleines correspondent à la solution exacte (équation 11.3), les pointillées à l'approximation de pluie faible (équation 11.4).

$R$ (mm s <sup>-1</sup> )	$\delta h$ mesuré (cm)	$\delta h$ théorique (cm)
7.6	1.0	0.4
12.6	1.6	0.6
16.3	2.2	0.7

TABLE 11.1 – Valeurs de l'amplitude (mesurée et théorique) de la déformation sur le mur imperméable en  $x = L$ ,  $\delta h$  pour différents taux de précipitation.

de l'ordre de :

$$\delta h = -\frac{2L}{\pi} \frac{R}{K} \log \left( \frac{R}{K} \right). \quad (11.7)$$

Nous pouvons comparer cette amplitude théorique à celle mesurée dans nos expériences pour des billes de 4 mm de diamètre (Table 11.1). L'ordre de grandeur est le même ; autour de 1 cm. Nous traçons donc ces amplitudes en fonction du taux de précipitations pour vérifier comment l'amplitude varie en fonction du taux de précipitation (Figure 11.3). Pour nos différents taux de précipitation, nos mesures ne suivent pas la prédiction théorique. Cependant, en prenant la valeur de conductivité hydraulique de *Guérin* (2015) nous pouvons voir que dans cette gamme de taux de précipitation, l'incertitude sur la valeur de la conductivité est suffisante pour expliquer l'écart à la théorie. De plus, l'équation (11.7) prédit l'amplitude de la déformation pour un aquifère infiniment profond, ce qui n'est pas le cas dans nos expériences. La présence d'un fond augmente probablement la déformation.

Dans ce chapitre nous avons vu que l'écoulement dans notre aquifère est bidimensionnel. Nous avons étudié cet écoulement à l'état stationnaire : pour de faible taux de précipitations, une linéarisation de la condition à la surface libre est possible. Cependant, certains termes ne peuvent pas être linéarisés, il y a toujours une marque de la non-linéarité dans l'écoulement. Dans ces conditions, comment appréhender la dynamique de l'écoulement lors des crues : par une théorie linéaire, ou pas ?

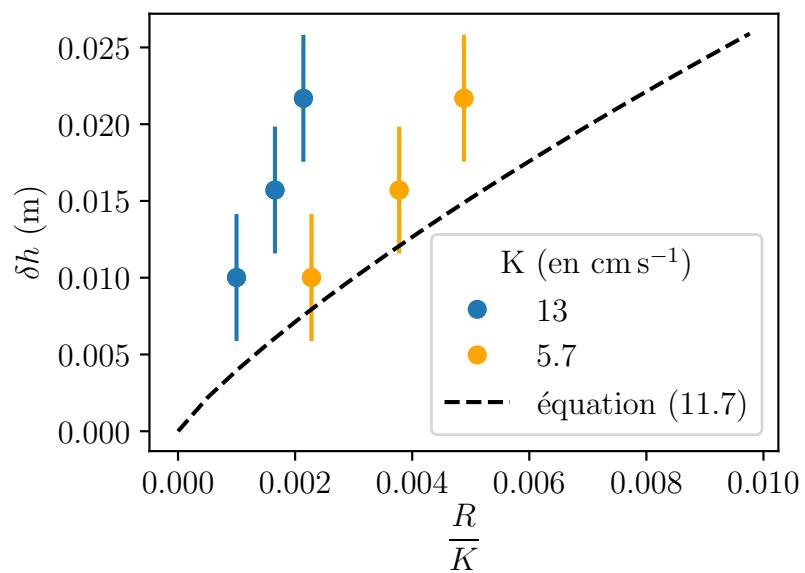


FIGURE 11.3 – Amplitude de la déformation non-linéaire en fonction du taux de précipitations d'après l'équation (11.7) pour différentes valeurs de conductivité hydraulique. Les points correspondent aux expériences, en bleu : avec nos valeurs de conductivité hydraulique (section 5.2.3), en orange : avec celles de Guérin (2015).

# Quatrième partie

## Simulation numérique des écoulements souterrains

Dans la partie précédente , nous avons vu que l'état stationnaire de l'écoulement pouvait être décrit en linéarisant la condition à la surface libre. Cependant, même pour des pluies faibles, il reste une signature de la non-linéarité sous la forme d'une dépendance en  $R \log R$  de la charge hydraulique,  $\phi$ . Avant de nous intéresser au régime particulier de la montée de crue, nous nous intéressons à la simulation numérique des écoulements à surface libre en milieu poreux. D'abord, nous commençons cette partie en étudiant l'écoulement au voisinage de la sortie selon différentes géométrie de surface de suintement (chapitre 12). Puis nous simulerons l'écoulement dans un cas simplifié où la surface libre et la surface de suintement ne sont pas en contact (chapitre 13). Finalement, nous simulerons l'écoulement dans notre aquifère (chapitre 14).

# Chapitre 12

## Écoulement stationnaire près de la sortie de l'aquifère

### 12.1 Surface de suintement verticale

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux écoulements stationnaires. Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'écoulement près de la sortie de notre aquifère. Considérons le cas où la nappe forme une surface de suintement verticale d'épaisseur  $h_s$  au niveau de la sortie de l'aquifère. La position de la surface libre n'étant pas connue, nous ne pouvons pas directement simuler l'écoulement. Grâce à l'analyse complexe, nous pouvons écrire le problème dans le plan mathématique défini précédemment (Figure 10.2). Dans ce plan mathématique, les limites sont connues. Nous pouvons alors résoudre le laplacien sur notre domaine avec comme conditions aux limites pour  $x$  :

$$\begin{cases} x = \mu - \frac{Q}{K} & \text{sur la surface libre,} \\ x = 0 & \text{sur le mur,} \\ x = 0 & \text{sur la sortie,} \end{cases} \quad (12.1)$$

Nous pouvons adimensionner notre problème par le facteur  $\frac{Q}{K}$ . Les conditions aux limites deviennent alors :

$$\begin{cases} x = \mu - 1 & \text{sur la surface libre,} \\ x = 0 & \text{sur le mur,} \\ x = 0 & \text{sur la sortie,} \end{cases} \quad (12.2)$$

Loin de la sortie, nous devons respecter la solution que nous avons trouvée au chapitre 10.1. Les conditions aux limites pour la coordonnée  $y$  se déduisent des précédentes avec les conditions de Cauchy-Riemann. Nous effectuons la résolution avec la méthode des éléments finis avec Freefem++ (*Hecht, 2012*). Nous pouvons ensuite revenir dans le

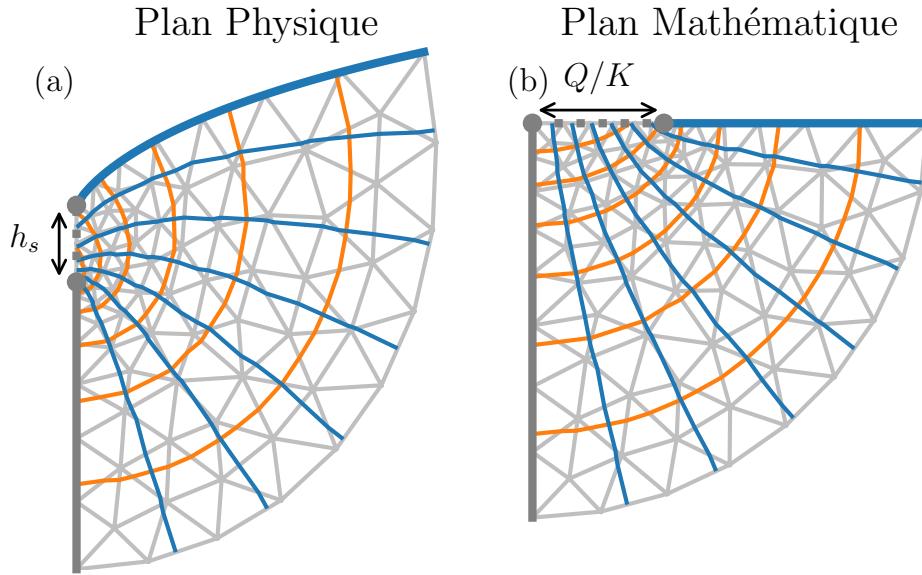


FIGURE 12.1 – Schéma des lignes de courant dans le plan physique (a) et dans le plan mathématique (b). Les lignes de courant sont obtenus en résolvant l'équation de Laplace (12.1) dans le plan mathématique.

plan physique est ainsi obtenir la position de la surface libre et de la sortie et les lignes d'écoulements. La taille de la sortie est alors donnée par :

$$h_s = h_0 \frac{Q}{K}, \quad (12.3)$$

où  $h_0$  est la hauteur de la sortie dans notre espace physique adimensionné :

$$h_0 = 0.441. \quad (12.4)$$

La solution exacte, donnée par *Polubarinova-Kochina* (1962) vaut :

$$h_0 = \frac{2 \log 2}{\pi} Q \sim 0.441. \quad (12.5)$$

Nous retrouvons bien les résultats théoriques.

Cette configuration simple est celle de notre expérience pour laquelle nous disposons d'une d'une solution analytique. La méthode numérique ci-dessus nous permet d'obtenir les lignes de courant pour différentes formes de sortie pour lesquelles nous n'avons pas de solution analytique.

## 12.2 Surface de suintement en biseau

Par exemple pour une sortie en biseau de hauteur  $h_0$  et de longueur  $l_0$  (Figure 12.2). Dans ce cas, le plan mathématique est quasiment le même. Seule la taille de la sortie,  $\mu_0$ , est différente. Elle vaut ici :

$$\mu_0 = \frac{Q}{K} + l_0. \quad (12.6)$$

Sur cette sortie la condition diffère elle aussi du cas vertical. Nous pouvons écrire :

$$x = Ay \quad (12.7)$$

où  $A$  est la pente du biseau :

$$A = \frac{l_0}{h_0} \quad (12.8)$$

Ainsi :

$$y = \frac{1}{A}x \quad (12.9)$$

Nous pouvons alors dériver le long de la sortie :

$$\vec{\nabla}y \cdot \vec{s} = \frac{1}{A}\vec{\nabla}x \cdot \vec{s}, \quad (12.10)$$

où  $\vec{s}$  est le vecteur directeur à la sortie. Ainsi avec les équations de Cauchy-Riemann (9.8) nous obtenons le flux de  $y$  à travers la sortie :

$$\vec{\nabla}y \cdot \vec{n} = A\vec{\nabla}y \cdot \vec{s}. \quad (12.11)$$

Loin de la sortie, nous supposons que nous pouvons conserver le comportement asymptotique du cas précédent. Nous avons ainsi assez de conditions aux limites pour résoudre le Laplacien dans le plan mathématique. Nous pouvons alors revenir dans l'espace physique et obtenir les lignes de courant (Figure 12.2).

Nous obtenons ainsi les lignes de courant proches de la sortie, ainsi que la position de la surface libre.

Peut-on généraliser la méthode ? Que se passe-t-il pour une sortie de forme arbitraire ? Que conclure du fait que le comportement loin de la rivière reste inchangé ? La méthode des éléments finis couplés avec des transformations conformes nous permet de simuler des écoulements stationnaires. Cependant, les écoulements dans les aquifères sont souvent dynamiques. Intéressons-nous maintenant aux simulations dynamiques.

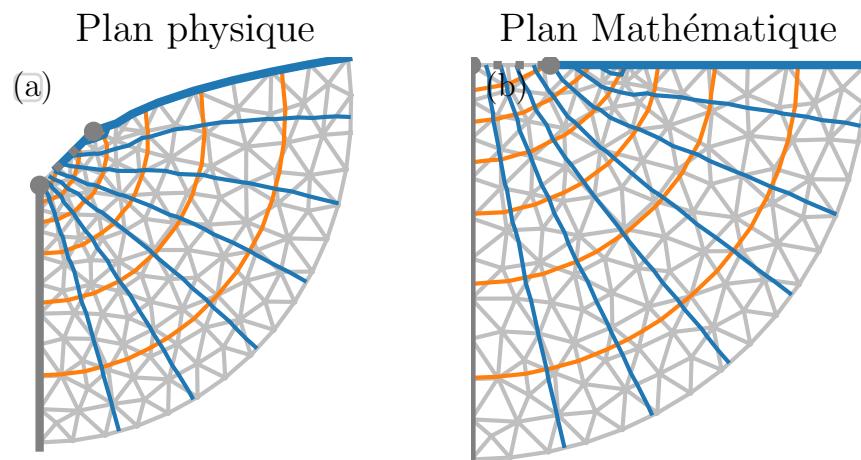


FIGURE 12.2 – Schéma des lignes de courant dans le plan physique (a) et dans le plan mathématique (b) pour une sortie en biseau. Les lignes de courant sont obtenues en résolvant le Laplacien dans le plan mathématique.

# Chapitre 13

## Drainage d'une nappe par une sortie horizontale

Dans un premier temps, afin d'éviter les problèmes liés à une singularité, nous nous intéresserons aux écoulements dans lesquels la surface libre et la surface de suintement ne sont pas en contact, pour simplifier les simulations. Pour cela, nous considérons une nappe à deux dimensions alimentée par les côtés comme dans l'aquifère expérimental de *Lehr* (1963) (Section 3.1). Mais ici, la nappe se vide par une sortie horizontale située sur le fond de l'aquifère (Figure 13.1). Ainsi, nous nous attendons à avoir une surface libre déformée par l'écoulement dont la forme est similaire à celle d'une vidange d'un écoulement visqueux à deux dimensions (*du Pont and Eggers*, 2006).

### 13.1 Écoulement stationnaire

D'abord nous nous intéresserons à l'écoulement statique, ce qui nous permettra ensuite de vérifier nos simulations dynamiques.

#### 13.1.1 Nappe semi-infinie

Avant toute chose, considérons l'écoulement stationnaire d'une nappe d'eau sur un mur imperméable semi-infini. La nappe est alimentée par la droite et se vidange sur une sortie de largeur inconnue (Figure 13.2). Nous pouvons alors facilement écrire les différentes conditions aux limites permettant de résoudre le Laplacien  $\Delta\Phi = 0$  sur notre domaine (Figure 13.2). Comme précédemment, le mur délimite une ligne de courant ( $\psi = \text{constante}$ ). La surface libre est aussi une ligne de courant mais vérifie une deuxième condition de pression atmosphérique ( $\phi = y$ ). La sortie, elle aussi à pression atmosphérique, a été choisie comme origine de notre repère ainsi ( $\phi = 0$ ). Ainsi notre

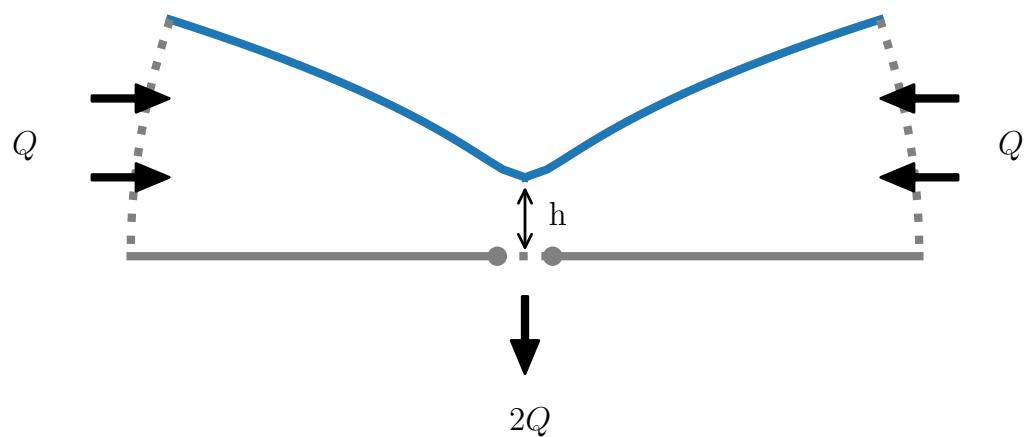


FIGURE 13.1 – Schéma de la boîte avec un écoulement où la surface libre n'est pas en contact avec la sortie.

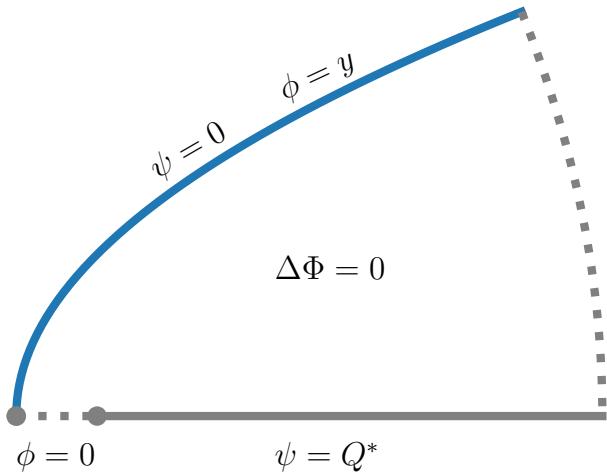


FIGURE 13.2 – Conditions aux limites de l’écoulement de la nappe sur un mur semi-infini.

problème peut s’écrire :

$$\begin{cases} \phi = y \text{ et } \psi = 0 & \text{sur la surface libre,} \\ \psi = 0 & \text{sur le mur,} \\ \phi = \frac{Q}{K} & \text{sur la sortie,} \end{cases} \quad (13.1)$$

Une fois de plus, nous ne connaissons pas la position de la surface libre, nous pouvons donc utiliser une transformation conforme pour se placer dans un plan mathématique dans lequel le domaine est connu. Ici nous utiliserons le plan défini par  $\Phi = \phi + i\psi$ . Dans ce plan mathématique, les limites de notre domaine sont connues (Figure 13.3) et nous avons :

$$\begin{cases} y = \phi & \text{sur } \psi = \frac{Q}{K} \\ y = 0 & \text{sur } \psi = 0 \\ y = 0 & \text{sur } \phi = 0 \end{cases} \quad (13.2)$$

Nous proposons, en nous appuyant sur les travaux de *Guérin* (2015), la solution :

$$z = \frac{2K}{Q} \Phi^2. \quad (13.3)$$

En effet, cette dernière vérifie les conditions aux limites (équation 13.2). En projetant cette solution dans le plan physique, on trouve l’expression des lignes de courant ainsi

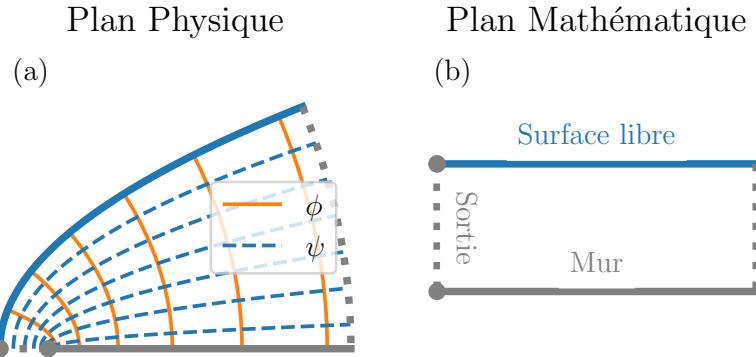


FIGURE 13.3 – Lignes de courant de l’écoulement dans le plan physique (a). Limite du domaine dans le plan mathématique (b)

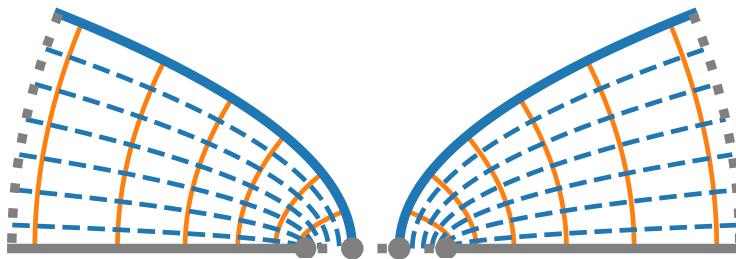


FIGURE 13.4 – Lignes de courant de l’écoulement d’une nappe séparée en deux parties par une vidange à travers une sortie de largeur  $l > 2l_0$ .

que la largeur de la sortie :

$$l_0 = \operatorname{Re} \left( z \left( i \frac{Q}{K} \right) \right) = \frac{2Q}{K}. \quad (13.4)$$

### 13.1.2 État stationnaire du drainage d'une nappe alimenté par les côtés

Considérons maintenant que la nappe est alimentée par les deux cotés et qu'elle se vidange par une sortie de largeur  $l$ . Tant que cette largeur est plus grande que deux fois la largeur caractéristique  $l_0$ , la nappe est séparée en deux parties (Figure 13.4)

Si maintenant, nous prenons un cas où la largeur de la sortie est inférieure à deux

fois  $l_0$ . La nappe ne peut pas être en deux parties, sa hauteur ne devient jamais nulle. La nappe a une hauteur minimale,  $h$  au dessus de la sortie (Figure 13.1).

L'écoulement étant symétrique, nous pouvons nous intéresser seulement à une moitié afin d'écrire les différentes conditions aux limites. Ce sont les mêmes que précédemment (équation 13.1) avec en plus sur la ligne de partage des eaux au milieu de la sortie :

$$\psi = 0, \quad (13.5)$$

en effet, cette ligne fait partie de la même ligne de courant que la surface libre. Avant de continuer, nous pouvons adimensionner notre problème par  $l_0$  :

$$\begin{cases} \phi = y \text{ et } \psi = 1 & \text{sur la surface libre,} \\ \psi = 0 & \text{sur le mur,} \\ \phi = 0 & \text{sur la sortie,} \\ \phi = 0 & \text{sur la ligne de partage des eaux.} \end{cases} \quad (13.6)$$

À ce jour, nous ne connaissons pas de solution analytique, nous allons donc utiliser la méthode des éléments finis dans le plan mathématique défini par  $\Phi$ . Dans ce plan les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} y = \phi & \text{sur } \psi = 1 \text{ et } \phi > h \\ x = 0 & \text{sur } \psi = 0 \text{ et } \phi < h \\ y = 0 & \text{sur } \psi = 0 \\ y = 0 & \text{sur } \phi = 0 \end{cases} \quad (13.7)$$

Loin de la sortie, nous considérons que nous retrouvons le comportement de la nappe semi-infinie (équation 13.3). Les limites dans notre plan mathématique ne dépendent pas de la longueur de la sortie  $l$  mais de la hauteur minimale  $h$ . Pour que le problème soit bien posé nous devons choisir une hauteur, et nous obtiendrons la longueur de la sortie, ce qui est l'inverse du problème physique. Une fois cette hauteur choisie, nous pouvons alors résoudre le Laplacien avec Freefem++ (Hecht, 2012). Puis nous revenons à l'espace physique. Nous obtenons alors la forme de la nappe (Figure 13.5). Nous pouvons alors mesurer la largeur de la sortie.

Nous répétons la simulation pour différentes valeurs de  $h$ , ce qui nous permet de tracer, pour  $l_0 = 1$ , la hauteur minimale de la nappe en fonction de la taille de la sortie. Lorsque la hauteur de la nappe tend vers zéro, la largeur de la sortie tend vers  $l_0$ , la nappe se sépare alors en deux parties distinctes et nous retrouvons le cas d'une nappe semi-infinie.

Maintenant que nous avons l'écoulement stationnaire d'une telle nappe, nous allons pouvoir simuler l'écoulement dynamique et vérifier que nous obtenons le même résultat lorsque l'écoulement atteint son régime permanent.

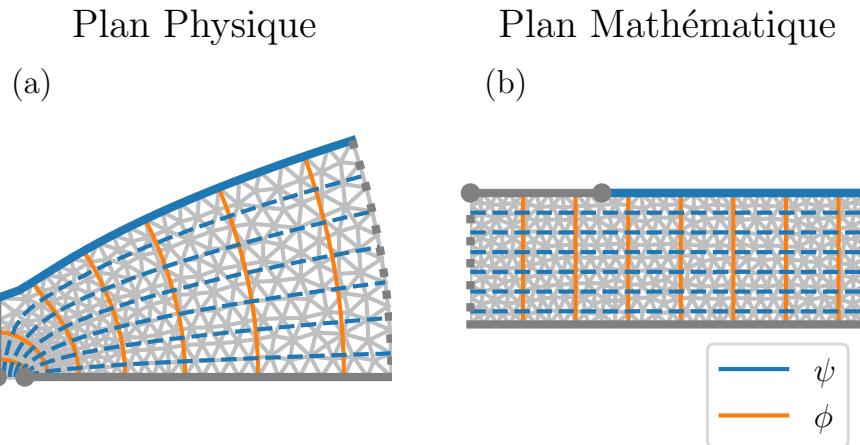


FIGURE 13.5 – Lignes de courant dans notre boîte dans le plan physique (a) et dans le plan mathématique (b).

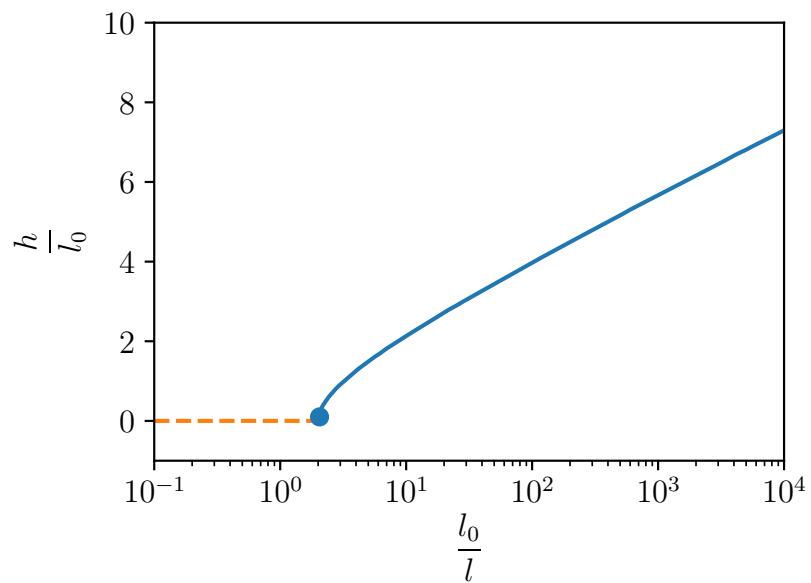


FIGURE 13.6 – Hauteur de la nappe en fonction de l'inverse de la taille de la sortie (en bleu). Lorsque  $l_0 < l$ , la nappe est drainée avant d'arriver jusqu'au bout de la sortie, sa hauteur minimale est nulle (pointillé orange). Ces résultats sont issus d'une simulation numérique.

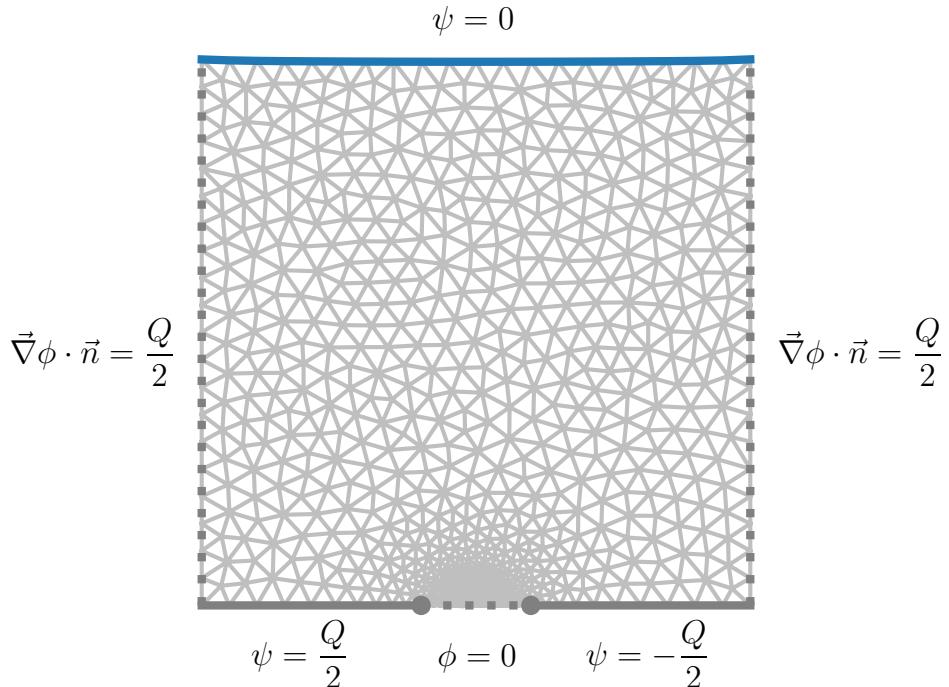


FIGURE 13.7 – Conditions aux limites de l’écoulement dans la boîte à l’instant initial. Le maillage pour la méthode des éléments finis est représenté en gris.

## 13.2 Simulation dynamique d’une nappe drainée par une sortie de taille finie

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes concentré sur l’écoulement statique. Intéressons-nous maintenant à l’écoulement dynamique.

Pour cela, nous simulons l’écoulement à l’aide de la méthode des éléments finis à chaque pas de temps. À l’état initial, nous considérons une hauteur de la nappe constante sur toute sa largeur. Comme précédemment, la surface libre est une ligne de courant, de même pour les murs de part et d’autres de la sortie. Nous pouvons alors écrire les différentes conditions aux limites sur notre boîte (Figure 13.7)

Avec les différentes conditions aux limites, nous pouvons résoudre l’équation de Laplace,  $\Delta\Phi = 0$ , sur notre domaine à l’aide de la méthode des éléments finis. Nous obtenons alors l’écoulement dans la boîte. Il nous faut maintenant déformer le maillage pour satisfaire la condition cinématique de notre écoulement. La seule équation faisant intervenir le temps dans notre aquifère est la conservation de la masse à la surface libre :

$$\frac{\partial h_s}{\partial t} n_y = K \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}. \quad (13.8)$$

Ainsi entre chaque pas de temps, nous pouvons décrire par un schéma numérique explicite la variation de hauteur de la nappe :

$$\delta h_s = \Delta t K \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} \frac{1}{n_y}, \quad (13.9)$$

Nous pouvons alors déplacer notre maillage en vérifiant cette condition à la surface libre et un déplacement nul sur les murs et la sortie. Une fois le nouveau maillage obtenu, nous résolvons à l'équation de Laplace avec les nouvelles limites, et ainsi de suite. Le code est retranscrit en appendice (15.3). Nous pouvons alors obtenir l'écoulement pour chaque pas de temps (Figure 13.2).

Nous pouvons alors mesurer à chaque pas de temps la hauteur de la nappe au dessus de la sortie  $h$ . Cette dernière évolue jusqu'à sa valeur à l'état d'équilibre (Figure 13.9).

Nous pouvons maintenant comparer les hauteurs obtenues avec la simulation dynamique avec celles de l'état stationnaire (Figure 13.10) Lorsque que la sortie est petite, les simulations dynamiques reproduisent parfaitement les résultats stationnaires. Cependant, lorsque la taille de la sortie s'approche de  $l_0$ , nous n'arrivons pas à atteindre un état stationnaire avec les simulations numériques. En effet, dans ces conditions, le maillage triangulaire ne permet pas de reproduire assez précisément la forme de la surface libre (Figure 13.11). Son déplacement est à l'origine d'une instabilité numérique, qui entraîne des déplacements tels que l'orientation des triangles du maillage est inversée. Raffiner le maillage ne permet pas d'atténuer cette instabilité.

Nous avons vu que les simulations numériques nous permettait de reproduire écoulement d'une nappe dans un cas simplifié. En statique, l'utilisation des transformations conformes permet d'obtenir la position de la surface libre. En dynamique, tant que la surface libre n'est pas trop déformée nous pouvons simuler les écoulements à l'aide d'un schéma numérique explicite. Intéressons-nous maintenant à l'écoulement dans notre aquifère expérimental.

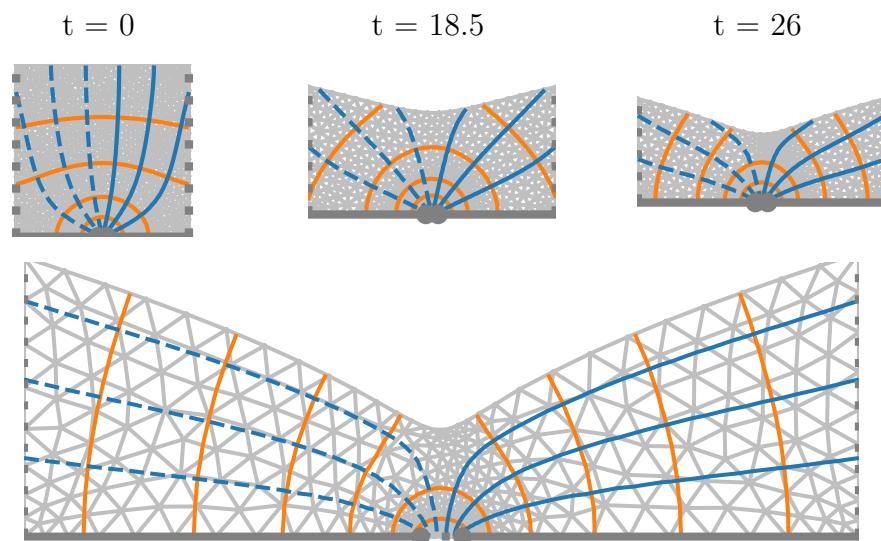


FIGURE 13.8 – En haut, lignes de courant dans la boîte à différents pas de temps de la simulation. En bas, lignes de courant à l'état final de notre simulation. À l'état initial nous considérons une nappe de rapport d'aspect égal à un. Les lignes de courant sont représentés en bleu, et les isopotentielles de vitesse en orange.

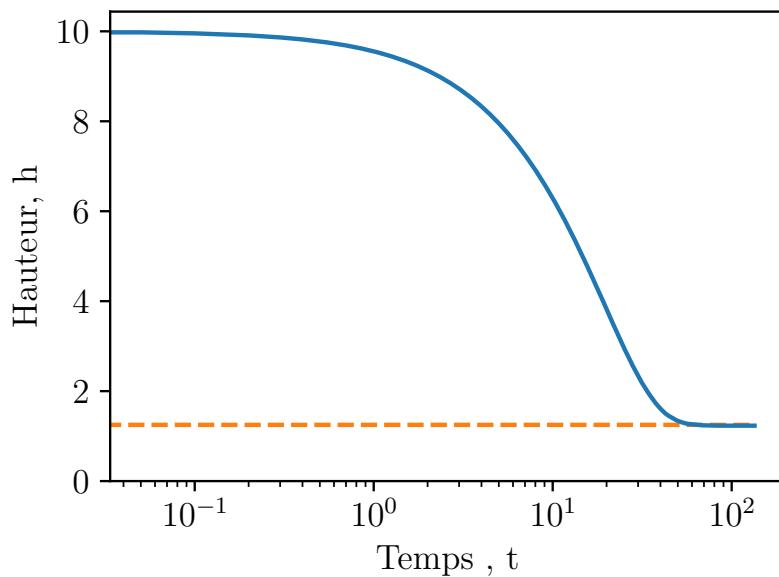


FIGURE 13.9 – Hauteur de la nappe au dessus de la sortie en fonction du temps de simulation.

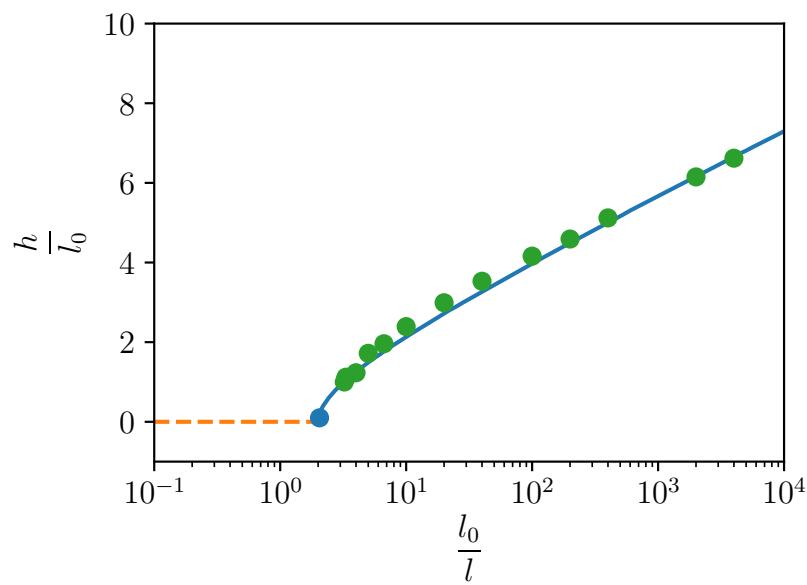


FIGURE 13.10 – Hauteur de la nappe en fonction de l'inverse de la taille de la sortie. Les résultats des simulations dynamiques sont représentés par des points vert.

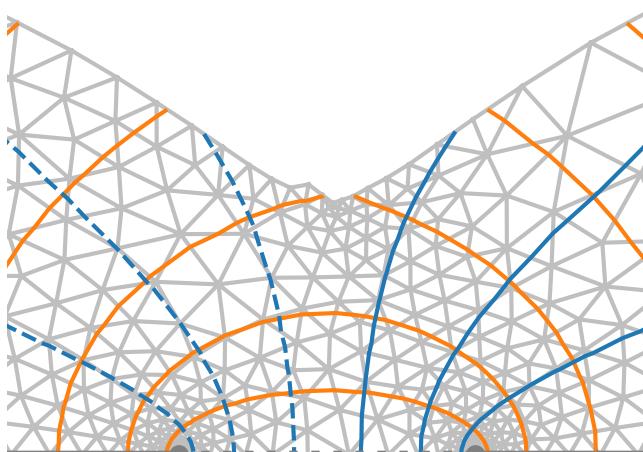


FIGURE 13.11 – Exemple d'instabilité numérique associée à la surface libre. Au pas de temps suivant, la simulation s'arrête car un triangle au moins a été inversé par la déformation du maillage.

# Chapitre 14

## Simulation de l'écoulement dans notre aquifère

L'écoulement dans notre aquifère est un écoulement à surface libre, la différence avec le paragraphe précédent est la position de la sortie. Dans notre aquifère cette dernière est situé sur la surface libre.

Bien que la simulation directe d'un écoulement à surface libre ne soit pas évidente, nous allons dans cette partie simuler l'écoulement dans notre aquifère avec la méthode des éléments finis. Initialement, nous considérons que l'aquifère est surmonté d'une fine couche d'eau. Nous pouvons résoudre les conditions aux différentes limites :

$$\begin{cases} \psi = 0 & \text{sur les murs,} \\ \phi = y & \text{sur la sortie,} \\ \phi = y & \text{sur la surface libre.} \end{cases} \quad (14.1)$$

Nous obtenons ainsi l'écoulement au premier pas de temps. La conservation de la masse à la surface libre s'écrit :

$$\left( \frac{\partial h_s}{\partial t} - R \right) n_y = K \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}. \quad (14.2)$$

Ainsi entre chaque pas de temps, la variation de hauteur de la nappe à la surface libre s'écrit :

$$\Delta h_s = \Delta t K \vec{\nabla} \phi \cdot \frac{\vec{n}}{n_y} - R \quad (14.3)$$

Nous pouvons alors déplacer notre maillage en vérifiant cette condition à la surface libre et un déplacement nul et sur le fond de l'aquifère et le mur sous la sortie. Une fois le nouveau maillage obtenu, nous résolvons l'équation de Laplace avec les nouvelles limites, et ainsi de suite. Nous pouvons alors obtenir l'écoulement pour chaque pas de temps (Figure 13.2). Cependant, près de la sortie, nous finissons toujours par retrouver

l'instabilité numérique obtenue à la section 13.2. L'orientation d'un triangle du maillage est inversée. Nous ne pouvons plus résoudre l'équation de Laplace. Nous n'arrivons jamais à un état stationnaire. Nous ne sommes pas parvenu à résoudre ce problème numérique. En conséquence, à ce stade, nous ne pouvons pas utiliser cette approche pour estimer les régimes asymptotiques.

Dans la suite du manuscrit, nous utiliserons donc des approximations afin de décrire l'écoulement pour le régime de montée de crue.

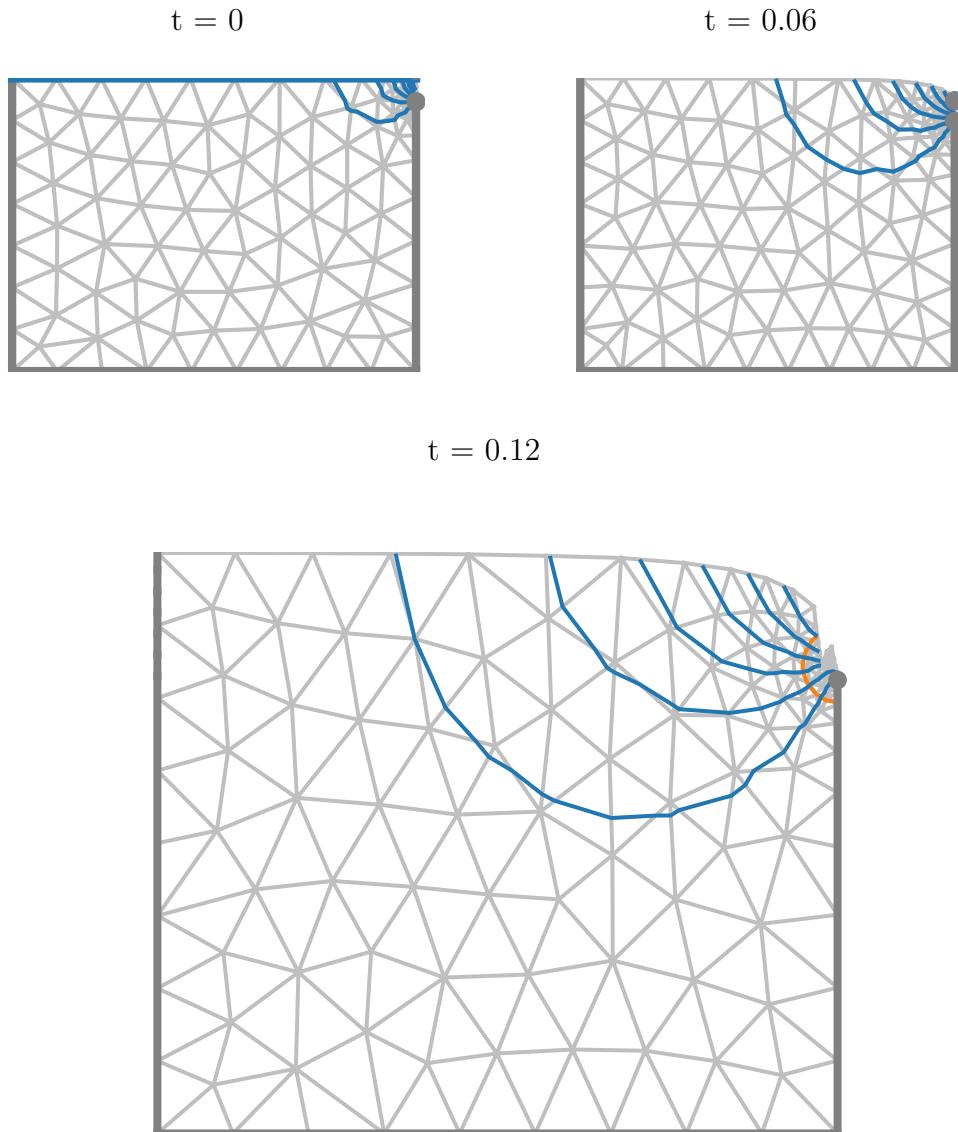


FIGURE 14.1 – Lignes de courant dans la boîte à différents pas de temps de la simulation.

# **Cinquième partie**

## **Montée de crue**

Dans les deux chapitres précédents, nous avons vu que l'état stationnaire de l'écoulement dans un aquifère à deux dimensions pouvait être décrit en linéarisant la condition à la surface libre. Cependant, l'écoulement conserve une trace de la non-linéarité même pour des pluies faibles. Nous avons aussi vu que nos simulations numériques de l'écoulement ne permettent pas de décrire les régimes transitoires dans notre aquifère. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au comportement de la nappe dans les premiers instants de l'épisode de pluie.

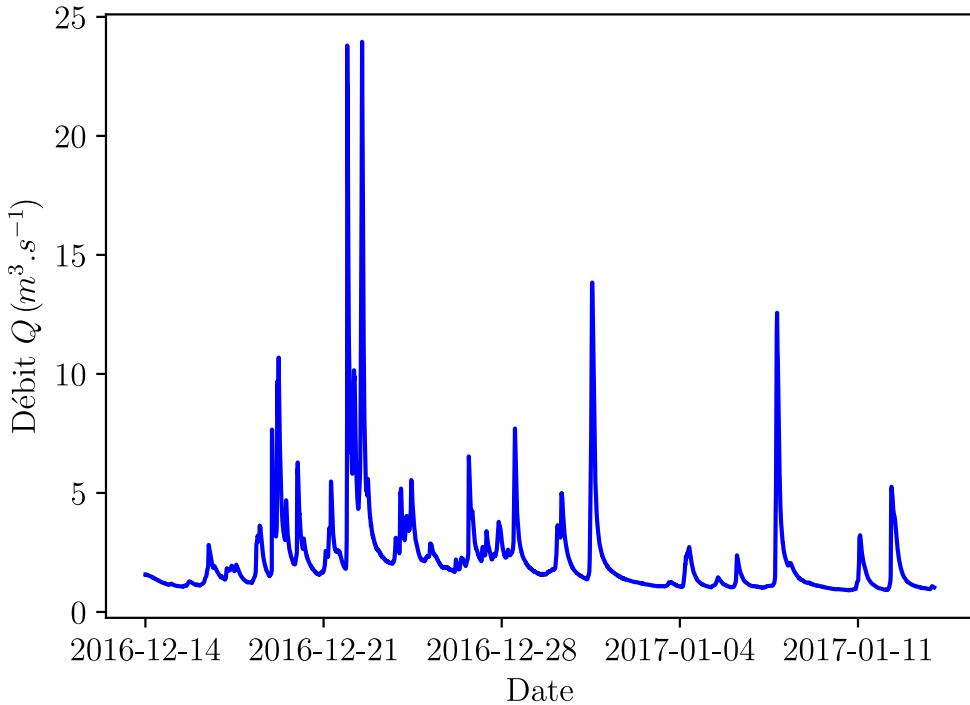


FIGURE 14.2 – Hydrogramme de la ravine Quiock en Guadeloupe. Le régime de montée de crue ne dure que quelques heures.

Ce régime asymptotique est appelé régime de montée de crue. Il correspond à l'augmentation du débit d'une rivière après un épisode de pluie. Dans la nature, sa durée est courte (*Guérin et al.*, 2019). Pour l'observer il est donc nécessaire de disposer de mesures hautes fréquences du débit de la rivière. Par exemple, sur la ravine Quiock (section 4), les montées de crue durent environ une heure (Figure V).

Pendant la montée de crue, seule la condition à la surface libre dépend du temps :

$$\left( s \frac{\partial h}{\partial t} - R \right) n_y = K \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}, \quad (14.4)$$

C'est la surface libre qui se déforme pour s'adapter aux précipitations. Les transformations conformes que nous avons utilisées aux chapitres III et IV sont difficiles à mettre en œuvre pour un écoulement dépendant du temps. C'est pourquoi nous proposerons dans ce chapitre d'approcher la dynamique de l'écoulement par une suite d'écoulements stationnaires.

# Chapitre 15

## Modèle d'impulsion uniforme

Au début d'un épisode de pluie, la surface libre se déforme pour s'adapter aux précipitations. La description de l'écoulement revient donc à résoudre un problème d'analyse complexe (chapitre ??). Nous ne sommes pas parvenu à résoudre ce problème analytiquement ni numériquement (chapitre ??). Pour contourner le problème, nous modélisons ici l'effet de la pluie en supposant que, dans les premiers instants de la montée de crue, la pluie se dépose sur la surface libre de la nappe en formant une succession de lames d'eau mince uniformes. Chaque lame surélève la surface d'une épaisseur uniforme  $\delta h = R\delta t/s$  (Figure 15). Cette hypothèse, initialement suggérée par Vaughan R. Voller, revient à négliger la déformation de la nappe provoquée par l'écoulement au voisinage de la sortie.

Après un temps  $t$ , la hauteur de la couche d'eau est donc :

$$h = \frac{Rt}{s}. \quad (15.1)$$

Cette élévation accroît la pression dans tout l'aquifère, ce qui induit un écoulement. Regardons alors l'écoulement induit par cette déformation (Figure 15.2).

Au temps court, seule l'eau située près de la sortie contribue au débit sortant de l'aquifère. Nous traitons donc l'écoulement en faisant alors l'hypothèse que l'aquifère est infiniment long. Dans nos différentes expériences, nous soumettons notre aquifère à des pluies faibles ( $R/K < 1$ ). Nous considérons donc que la couche d'eau de pluie est mince (ou que l'aquifère est infiniment profond). Au total, ces trois hypothèses nous ramènent à la résolution d'un écoulement semi-infini autour de la sortie (Figure 15.3). Une fois de plus, l'écoulement peut être décrit par le potentiel de vitesse,  $\phi$ , qui vérifie l'équation de Laplace (8.1). Il nous faut alors écrire les différentes conditions aux limites de notre écoulement. L'eau ne peut franchir le mur vertical sous la sortie, la condition à cette limite s'écrit donc :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y < 0. \quad (15.2)$$

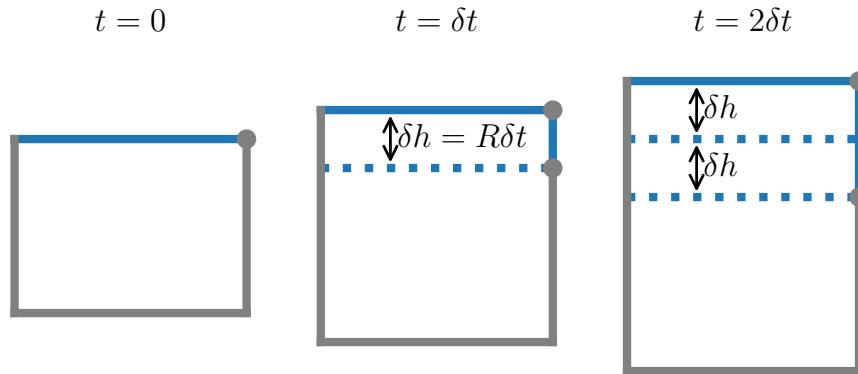


FIGURE 15.1 – Premiers instants de la montée de crue dans le cadre de l’approche d’impulsion uniforme. L’eau de pluie forme de fines couches d’eau d’épaisseur uniforme  $\delta h$ .

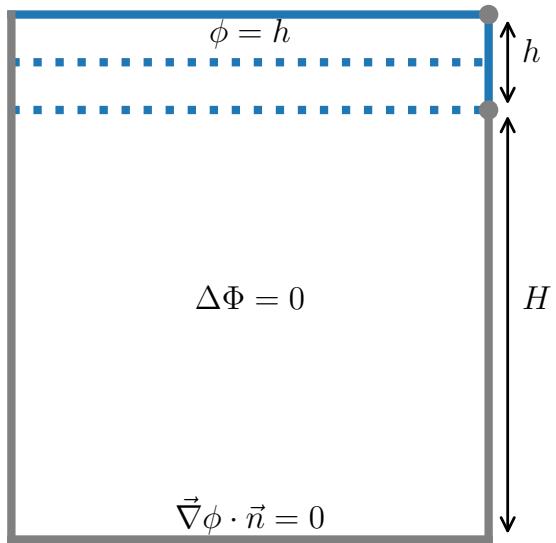


FIGURE 15.2 – Aquifère juste après le début des précipitations dans l’hypothèse d’impulsion uniforme ainsi que les différentes conditions aux limites associées à cette hypothèse.

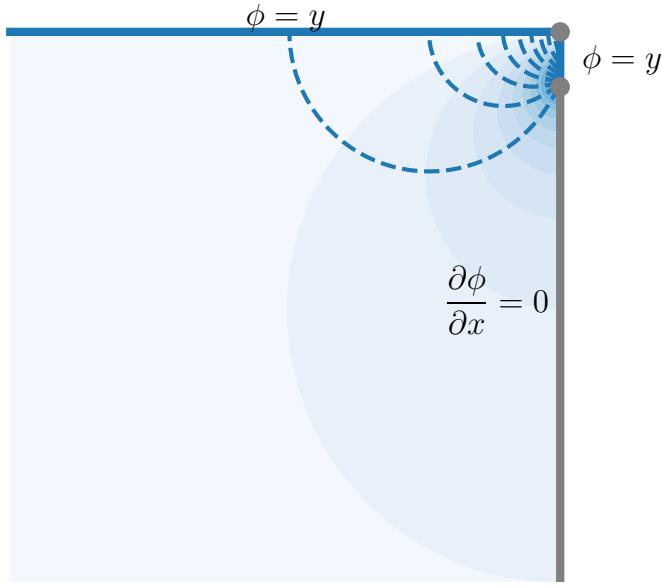


FIGURE 15.3 – Potentiel de vitesse (en échelle de bleu) et lignes de courant (en pointillés) dans l'aquifère pendant montée de crue. Les lignes de courant sont espacées logarithmiquement.

À la surface libre, la pression est atmosphérique :

$$\phi = y \quad \text{en} \quad y = h(t). \quad (15.3)$$

La dernière condition de bord est celle sur la sortie. Cette dernière s'écrit :

$$\phi = y \quad \text{en} \quad 0 < y < h. \quad (15.4)$$

En utilisant l'analyse complexe, nous trouvons l'expression suivante pour le potentiel complexe (*Gubiec and Szymczak, 2008*) :

$$\Phi = -iz + \sqrt{-z^2 - h^2}. \quad (15.5)$$

Avec cette expression du potentiel, nous pouvons tracer les lignes de courant de l'écoulement (Figure 15.3). L'essentiel de l'écoulement est localisé à la proximité de la sortie, en accord avec l'hypothèse d'un aquifère infiniment long et infiniment profond.

L'expression du potentiel (15.5) nous permet de calculer le débit à la sortie,  $Q_m$  :

$$Q_m = -KW \int_0^h \frac{\partial \phi}{\partial x} dy = KW \int_0^h \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = [\psi]_0^{-ih}. \quad (15.6)$$

Puisque :

$$\begin{cases} \psi(z = 0) = \text{Im}(\sqrt{-h^2}) = h \\ \psi(z = -ih) = \text{Im}(h^2 - h^2) = 0, \end{cases} \quad (15.7)$$

le débit sortant s'écrit :

$$Q_m = KWh. \quad (15.8)$$

Par ailleurs,

$$h = \frac{Rt}{s} \quad (15.9)$$

ce qui donne finalement :

$$Q_m = \frac{K W}{s} R t. \quad (15.10)$$

Le débit sortant est donc proportionnel au temps, comme dans le cas de Dupuit-Boussinesq (équation (2.12)). En revanche dans le cas profond, le débit sortant est également proportionnel au forçage  $R$  tandis qu'il est proportionnel à  $R^{3/2}$  dans le cas peu profond. Cette relation linéaire est surprenante, car dans notre modèle, l'hypothèse de couche uniforme n'est pas linéaire, puisque la surface libre se déforme.

## 15.1 Montée de crue dans notre aquifère expérimental

Regardons maintenant si nous retrouvons le comportement représenté par l'équation (15.10) dans nos expériences. Pour cela, nous prenons deux hydrogrammes obtenus pour des taux de précipitations et des tailles de billes différents (Figure 15.4(a)). À partir de l'expression du débit sortant de montée de crue (15.10), nous construisons un débit adimensionné :

$$Q^* = \frac{Q}{RWL}, \quad (15.11)$$

et un temps adimensionné :

$$t^* = \frac{Kt}{sL}. \quad (15.12)$$

Avec ces notations,  $Q^* = 1$  lorsque l'état stationnaire est atteint et,  $Q^* = t^*$  pendant le régime de montée de crue. Nous pouvons donc tracer le débit adimensionné en fonction du temps adimensionné (Figure 15.4(b)). Les données expérimentales montrent l'existence de trois régimes. À temps court, les débits adimensionnés se superposent, conformément à notre modèle. Ici, il n'y a pas d'ajustement de paramètre ; nous pouvons donc évaluer directement la linéarité de l'équation (15.10) et la valeur de son préfacteur. Ensuite survient un régime transitoire, pendant lequel les débits dépendent des paramètres de l'expérience (taille des billes et taux de précipitations). Finalement, les débits finissent tous sur la droite  $Q^* = 1$ , comme nous l'attendions, par construction de dimensionnement.

Notre modèle de montée de crue semble compatible avec nos hydrogrammes expérimentaux. Pour nous en assurer, nous ajustons pour chacun de nos hydrogrammes expérimentaux le régime de montée de crue par une fonction linéaire (Figure 15.5). Nous constatons que, lors de nos expériences, la durée du régime linéaire de montée

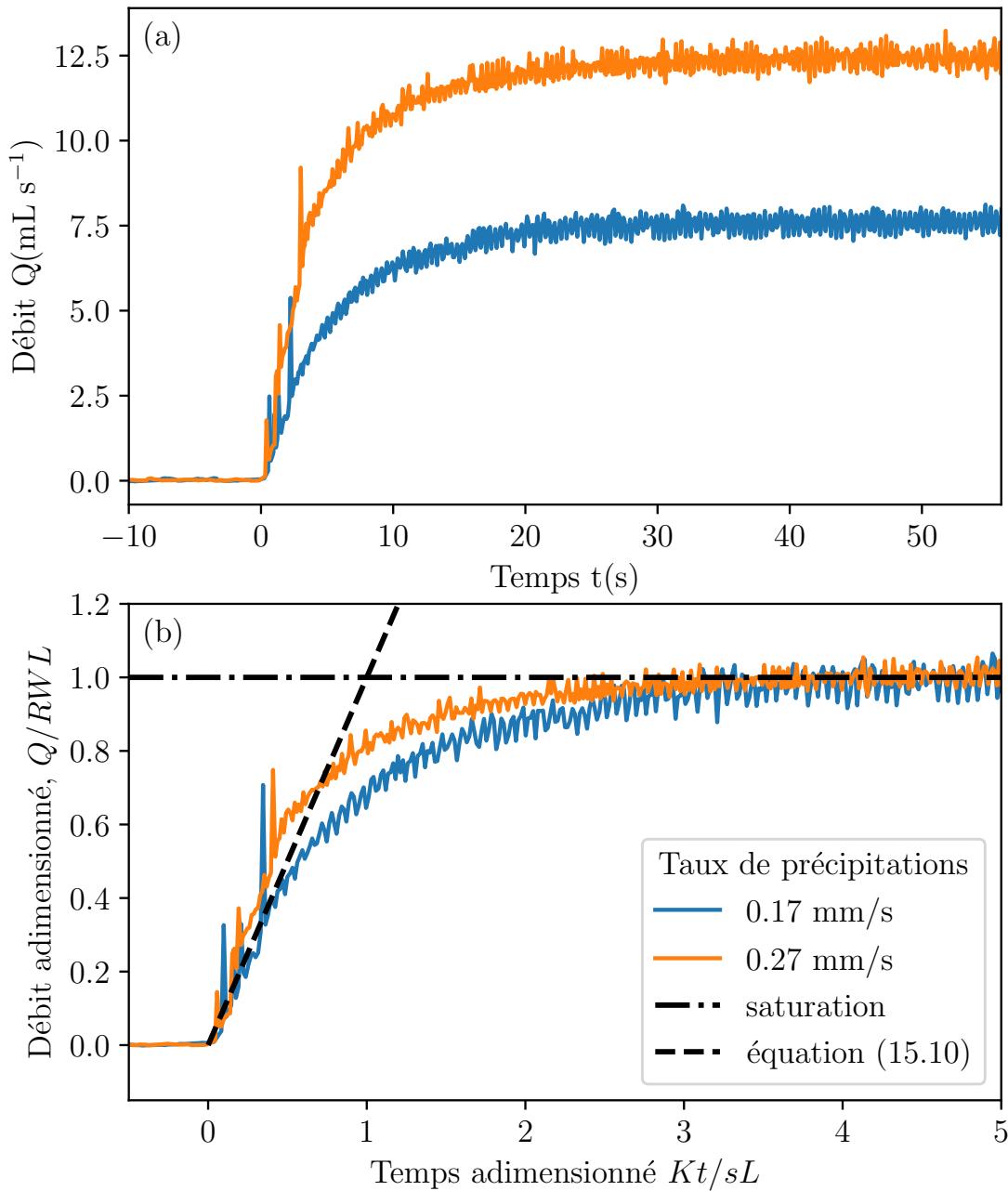


FIGURE 15.4 – Débit sortant de l'aquifère en fonction du temps (en haut) et dans l'espace adimensionné (équations (15.11) et (15.12)) (en bas). Les pointillés noirs correspondent aux débits adimensionnés théoriques au début de la montée de crue et à la fin de la crue. Les deux expériences correspondent aux expériences 5 (en bleu) et 9 (en orange) (Table 15.2).

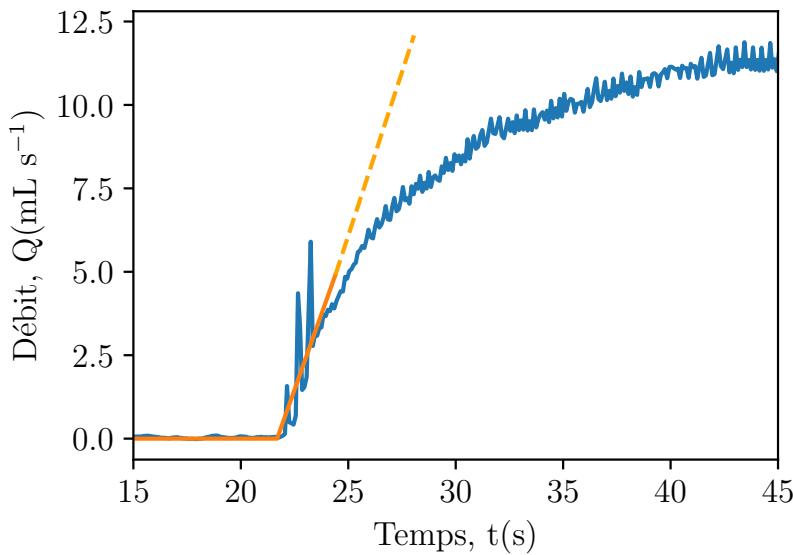


FIGURE 15.5 – Débit sortant de l'aquifère en fonction du temps lors de l'expérience 1 (Table 15.2). Nous ajustons la montée de crue par une droite (en orange).

de crue est courte (environ 3 secondes). Le débit augmente ensuite plus lentement. La pente de la droite ajustée nous donne la dérivée initiale du débit. Cette dernière, d'après l'équation (15.10), peut s'écrire :

$$\dot{Q}_m = \frac{KW}{s} R. \quad (15.13)$$

Finalement :

$$\frac{s\dot{Q}_m}{KW} = R, \quad (15.14)$$

ce paramètre devrait être égal au taux de précipitations dans nos différentes expériences (Figure 15.6). Nos mesures expérimentales peuvent être ajustées par une loi de puissance d'exposant 1.06. Avec les valeurs de conductivité hydraulique de Guérin (2015), nous obtenons un exposant de 0.97. Avec les imprécisions de la mesure sur la conductivité hydraulique, nous pouvons en conclure que l'intensité de la montée de crue dépend linéairement du taux de précipitations.

## 15.2 Limites de l'approximation de couche uniforme

Regardons maintenant jusqu'où le modèle d'impulsion uniforme est vérifié. Ce modèle comporte différentes approximations : l'hypothèse de couche uniforme, l'hypothèse de couche mince et l'hypothèse d'aquifère infiniment profond. Nous allons tester

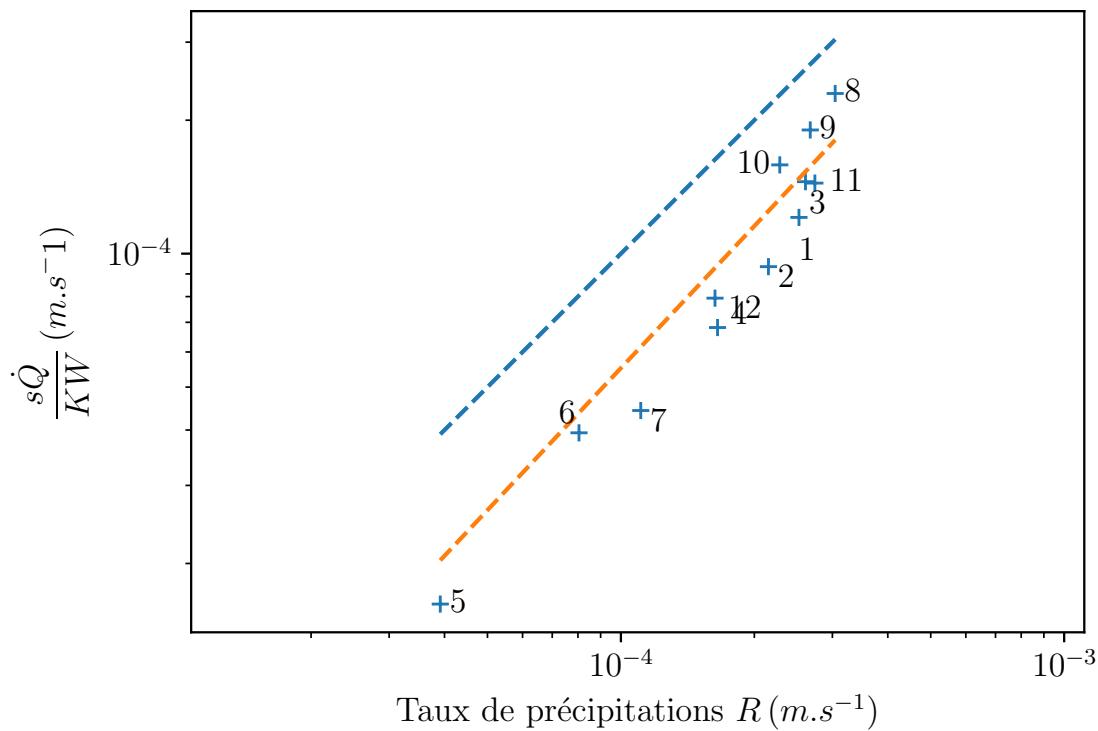


FIGURE 15.6 – Pente de la montée de crue adimensionnée en fonction du taux de précipitations (équation (15.14)). Notre modèle de couche uniforme est représenté par les pointillés bleus. Les pointillés oranges sont l'ajustement par une loi de puissance des données, l'exposant de l'ajustement est de 1.06.

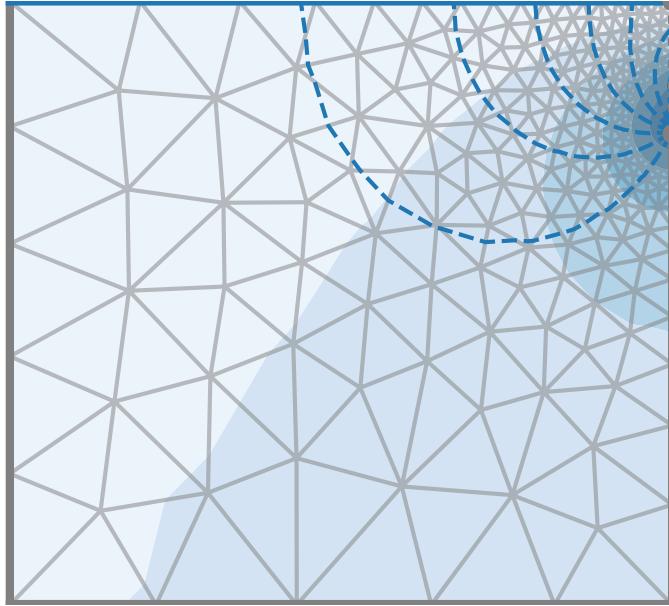


FIGURE 15.7 – Lignes de courant (en pointillés bleus) et isopotentielles de charge hydraulique (en échelle de bleu) obtenues avec Freefem++ sur le maillage (en gris) pour un aquifère de rapport d'aspect similaire à notre aquifère expérimental.

ici l'hypothèse de couche mince. Pour cela, nous supposons que la hauteur de la couche d'eau de pluie,  $h$ , n'est plus négligeable devant la hauteur de l'aquifère,  $H$ . Nous devons donc considérer les autres murs de l'aquifère. Dans ces conditions, nous ne connaissons pas de solution analytique. Nous résolvons donc le problème numériquement à l'aide de Freefem++ (Figure 15.7).

Nous pouvons alors obtenir l'écoulement dans l'aquifère pour différente hauteur de la couche d'eau de pluie,  $h$ . Ainsi, nous obtenons le débit selon la hauteur de la couche d'eau de pluie (Figure 15.8). Lorsque  $h$  est petit, nous retrouvons le débit de la solution analytique (15.5) : le débit est proportionnel à la hauteur de la couche d'eau. Cependant quand  $h$  augmente, le débit n'est plus proportionnel à la hauteur de la couche d'eau. Cette transition a lieu autour de :

$$\frac{h}{L} \simeq 0.5, \quad (15.15)$$

ce qui fixe une limite à l'hypothèse de couche mince. En effet, augmenter l'épaisseur de la couche d'eau de pluie est équivalent à avancer dans le temps lors de la montée de

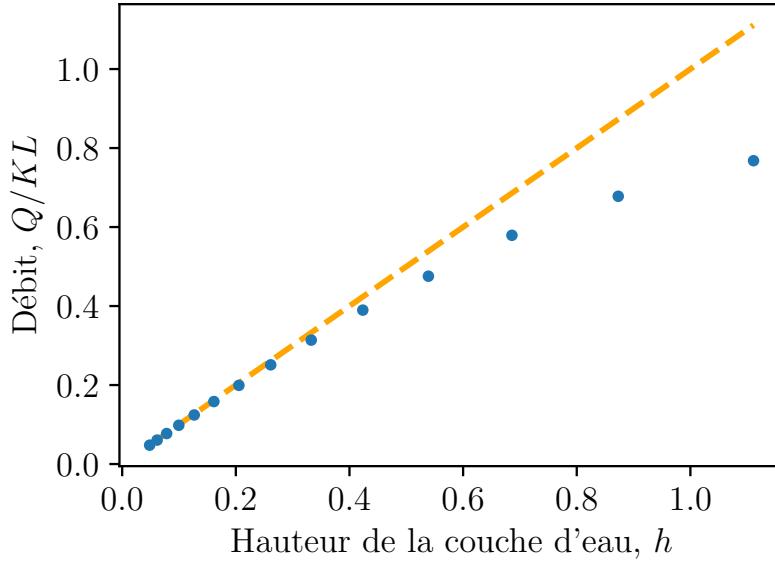


FIGURE 15.8 – Débit sortant de l'aquifère en fonction de la hauteur de la couche d'eau de pluie dans le cadre de l'approximation de couche uniforme, mais sans l'approximation de couche mince. Les simulations numériques sont représentées par des points, la droite pointillée fait référence à l'équation (15.8).

crue. Nous définissons alors le temps caractéristique,

$$t_m = \frac{sL}{R}, \quad (15.16)$$

au-delà duquel l'hypothèse de couche mince n'est plus valable. nous obtenons un temps de montée critique d'environ :

$$t_m \sim 200\text{s}. \quad (15.17)$$

Cette limite n'est jamais atteinte dans nos expériences. Dans celles-ci, c'est probablement la courbure de la surface libre due à l'écoulement qui va limiter la validité de l'approximation d'impulsion uniforme.

### 15.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons obtenu un modèle simplifié permettant de capturer la montée de crue. Ce régime asymptotique est différent de celui d'un aquifère peu profond. En principe, il est donc possible de distinguer les aquifères peu profonds des aquifères profonds en se fondant sur leurs hydrogrammes de crue. Si l'aquifère est profond, la montée de crue nous renseigne également sur les propriétés hydrauliques de

Expérience	Taille des billes (mm)	R ( $\text{mm s}^{-1}$ )	$\dot{Q} \cdot 10^6 (\text{m}^3 \text{s}^{-2})$
1	4	0.252	1.96
2	4	0.215	1.52
3	4	0.261	2.36
4	4	0.165	1.11
5	4	0.043	0.19
6	4	0.08	0.64
7	4	0.111	0.72
8	3	0.304	2.58
9	3	0.267	2.14
10	3	0.228	1.78
11	3	0.274	1.62
12	3	0.163	0.89

TABLE 15.1 – Taux de précipitation et tailles des billes pour les différentes expériences de montée de crue.

l'aquifère. Le préfacteur du régime de montée de crue nous donne le rapport de la porosité sur la conductivité hydraulique ( $s/K$ ). Cependant, ce régime de crue ne contient pas d'information sur la profondeur de l'aquifère. Pour cela, il nous faudrait une description plus complète de l'écoulement qui permette de comprendre la succession des régimes asymptotiques durant une crue.

# Conclusion et perspectives

Les hydrogrammes de rivières montrent que lors d'un épisode pluvieux le débit augmente rapidement au début de la pluie, puis diminue lentement lorsque la pluie s'arrête. En général, l'eau de pluie s'infiltra dans le sol, s'accumule dans un aquifère où elle forme une nappe qui s'écoule lentement vers le réseau de drainage (*Guérin et al.*, 2019). La géométrie des aquifères permet dans certains cas d'utiliser l'approximation de Dupuit. Dans ces cas, des solutions de l'équation de Dupuit-Boussinesq décrivent les régimes asymptotiques de montée de crue, juste après le début des précipitations, et de récession, après que les précipitations ont cessé. Des mesures sur le terrain de ces régimes permettent alors d'obtenir des informations sur les propriétés physiques de l'aquifère (*Guérin et al.*, 2019; *Brutsaert and Nieber*, 1977).

Cependant, dans la nature, les écoulements souterrains ne vérifient pas toujours l'approximation de Dupuit, la composante verticale de l'écoulement ne peut plus être négligée. Nos mesures préliminaires sur la ravine Quiock en Guadeloupe, mettent en évidence que près de la rivière les charges hydrauliques mesurées ne sont pas celles d'un écoulement quasi-horizontal. Nous avons donc mis en place un aquifère expérimental afin d'étudier l'influence de cette composante verticale de l'écoulement. Notre aquifère expérimental composé d'un milieu poreux homogène maintenu dans un plan vertical est un dispositif simple permettant de reproduire les écoulements souterrains. Lorsqu'il est soumis à une pluie artificielle, l'eau y forme une nappe qui s'écoule lentement vers la sortie. Nous pouvons donc produire des hydrogrammes expérimentaux. Ces derniers reproduisent ceux obtenus sur le terrain. Une montée de crue rapide puis lorsque la pluie s'arrête une diminution lente. Plus surprenant, notre aquifère profond réagit plus rapidement à la pluie que celui de *Guérin* (2015); la montée de crue est plus rapide.

Afin de caractériser l'écoulement et d'identifier ses caractéristiques, nous avons commencé par étudier l'état stationnaire. L'écoulement ne peut être décrit par l'équation de Dupuit-Boussinesq, il nous faut donc résoudre l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0, \quad (15.18)$$

où  $\phi$  est la charge hydraulique en fixant les conditions aux limites. À l'état stationnaire, dans l'approximation des pluies faibles, la linéarisation de la condition à la surface libre permet d'obtenir le champs de charge hydraulique partout dans l'aquifère. Ainsi, nous

pouvons tracer les lignes de courant dans notre aquifère (Figure ??). Cette résolution analytique nous permet de prédire l'écoulement pour différents rapport d'aspect.

Cependant, la linéarisation de la condition à la surface libre réduit la sortie en un point singulier. Nous nous sommes donc intéressés à l'écoulement au voisinage de la sortie. À l'aide de transformation conforme, nous avons pu décrire l'écoulement au voisinage de cette dernière. En particulier, dans le cas où l'apport de la pluie est négligeable devant le débit sortant, la surface de suintement s'adapte à l'écoulement en prenant une taille proportionnelle au débit. La technique des transformations conformes nous a permis de caractériser l'écoulement sans linéariser la condition à la surface libre, pour un aquifère infiniment profond. Nous avons notamment montré que, même pour des pluies faibles, l'écoulement conserve une marque de la non-linéarité de la surface libre.

Nous nous sommes ensuite concentrés sur la simulation numérique des écoulements à surface libre en milieu poreux. Pour cela, nous avons utilisé la technique des éléments finis. Cette dernière couplée aux transformations conformes permet de reproduire des écoulements dans lesquels la position de la surface libre n'est pas connue à l'avance. Cependant, une instabilité numérique nous empêche d'obtenir des résultats probants pour des écoulements non stationnaire et en particulier pour le régime de montée de crue.

Puisque la simulation numérique ne permet pas d'étudier le régime de montée de crue, nous nous sommes tournés vers un modèle analytique simplifié. À l'aide d'une approximation d'impulsion uniforme, nous avons montré alors que l'augmentation du débit contient des informations sur les propriétés de l'aquifère. En effet, lors de la montée de crue, le débit augmente comme une fonction proportionnelle au taux de précipitation :

$$Q \propto \frac{K}{s} Rt. \quad (15.19)$$

L'ajustement linéaire de la montée de crue nous permet donc de d'estimer le rapport conductivité sur porosité,  $K/s$ , de l'aquifère.

Si le régime de montée de crue dépend de la porosité et de la conductivité hydraulique de l'aquifère, il semble en revanche ne pas dépendre de la géométrie de ce dernier. Le rapport d'aspect de l'aquifère influence-t-il le régime de récession, après que la pluie a cessé ? Nos résultats ne permettent pas de répondre à cette question qui reste ouverte.

Les résultats du chapitre 10 montrent que l'écoulement dans l'aquifère dépend fortement de la condition de sortie. On peut donc se demander dans quelle mesure la forme du lit d'une rivière peut influencer l'écoulement au sein de la nappe qui l'alimente.

Enfin l'étude détaillée des lignes de courant dans la 3<sup>e</sup> partie du manuscrit ouvre la voie à l'étude de la distribution des temps de résidence de l'eau au sein d'un aquifère. Il s'agit là d'une question importante, puisque cette distribution des temps de résidence exerce un contrôle de premier ordre sur les réactions chimiques d'altération ou sur le transport des polluants dans les hydrosystèmes.

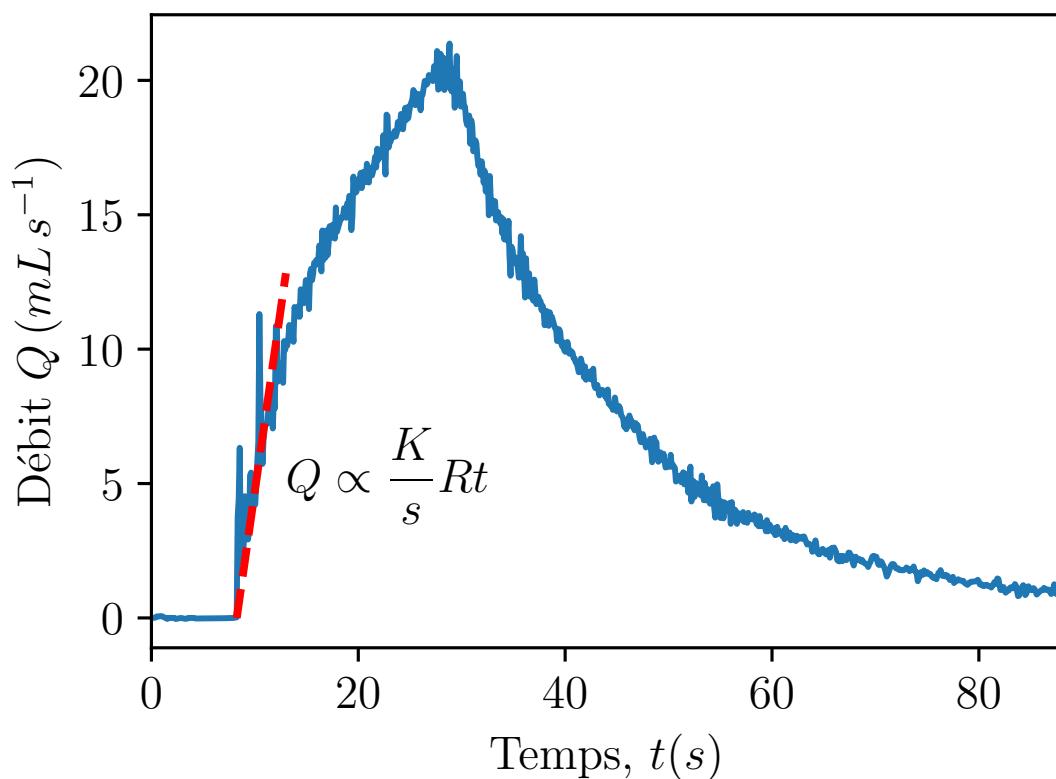


FIGURE 15.9 – Hydrogramme de notre aquifère de laboratoire pour un taux de précipitation,  $R = 3.5\text{mm/s}$ . L'ajustement linéaire de la montée de crue nous donne des informations sur les propriétés de l'aquifère.

# Appendices

# Appendice A

## Résolution numérique de l'équation de Laplace, dans l'écoulement de *Lehr* (1963) avec Freefem++

```
1 //  
2 //      Code FreeFem++ pour résoudre le problème de Lehr  
3 //  
4  
5  
6 // Définition des constantes  
7 real L=14.5;           // longueur de l'aquifère  
8 real H=4.5;            // hauteur de l'aquifère  
9 real l=0.5;             // largeur de la sortie  
10 real h = 1;            // hauteur de la surface libre  
11 real height = h+ H;  
12 real hh = 0.05, HH = 0.3; // taille minimale et maximale des mailles  
13 real Q=1;  
14 real a = h/( L/2 - l/2 ); // pente de la surface libre  
15 real b = -a*l/2;         // pente de la surface libre  
16  
17  
18 // Définition des frontières  
19 border bottom( t==L/2, L/2 ){ x=t; y==H; };  
20 border right ( t==H, h ){ x=L/2; y=t; };  
21 border freesurferight( t=L/2, l/2 ){ x=t; y=a*t + b; };  
22 border hole( t=0, -pi ){ x=l/2*cos(t); y=l/2*sin(t); };  
23 border freesurfaceleft( t=-l/2, -L/2 ){ x=t; y=-a*t + b; };  
24 border left( t=h, -H ){ x=-L/2; y=t; };  
25  
26  
27 // Construction du maillage  
28 int n=5;  
29 mesh Th=buildmesh ( bottom(n) + right(n) + freesurferight(n) + hole  
    ( 10*n ) + freesurfaceleft(n) + left(n) );  
30 plot(Th);  
31
```

```

32
33 // Définition des variables
34 fespace Vh( Th, P2 );
35 Vh psi , phi , w;
36 macro Grad(u) [dx(u),dy(u)]
37
38
39 // Formulation faible
40
41 problem LaplacienPhi(phi,w) =
42     int2d(Th)(Grad(phi)'*Grad(w))
43     + int1d( Th, left )( w*Q/(height) )
44     + int1d( Th, right )( w*Q/(height) )
45     + on( hole , phi = y );
46
47
48 problem LaplacienPsi( psi , w, solver = Crout ) =
49     int2d(Th)(Grad(psi)'*Grad(w))
50     +int1d( Th, hole )( -w*N.x )
51     + on( bottom , psi = 0 )
52     + on( freesurfaceleft , psi = Q/2 )
53     + on( freesurfaceright , psi = -Q/2 )
54     + on( left , psi = Q/(2*(H + h))*y + Q*H/(2*(height)) )
55     + on( right , psi = -Q/(2*(H + h))*y - Q*H/(2*(height)) );
56
57
58 // Résolution
59 for( int i = 0; i < 5; i++ )
60 {
61     height = int1d( Th, left )( 1. );
62     LaplacienPsi;
63     Th = adaptmesh( Th, psi , hmin = hh , hmax = HH );
64 }
65
66 LaplacienPhi;
67 LaplacienPsi;
68
69 plot(Th);
70 // plot(phi, fill = 1, value = 1);
71 // Sauvegarde du maillage et résultats
72 savemesh( Th, "./data/mesh/mesh_file_x0.mesh" , [x,y,x] );
73 savemesh( Th, "./data/mesh/mesh_file_y0.mesh" , [x,y,y] );
74 savemesh( Th, "./data/mesh/psi0.mesh" , [x,y,psi] );

```

---

# Appendice B

## Résolution numérique avec Freefem++ de l’écoulement dynamique du drainage d’une nappe

```
1 //  
2 //      Code FreeFem++ pour simuler la dynamique d'un écoulement  
3 //  
4  
5  
6  
7 string DataFolder = "./" ;  
8  
9  
10 // Définition des constantes  
11  
12 real L=10;           // longueur du domaine  
13 real H=10;           // hauteur des cotés  
14 real l=0.5;          // largeur de la sortie  
15  
16 real dt=0.05;        // pas de temps  
17 real hh=0.3;          // taille maillage max  
18  
19  
20 real incomingdischarge = 1;      // débit entrant  
21 real Q;  
22  
23 real maxfreesurfaceheight;  
24 real minfreesurfaceheight;  
25  
26  
27  
28 // Définition des frontières  
29 border bottomleft( t=0, L/2-1/2 ){ x=t; y=0; };           // mur  
    imperméable  
30 border outlet ( t=L/2-1/2, L/2+1/2 ){ x=t; y=0; };           // sortie
```

```

31 border bottomright( t=L/2+1/2, L ){ x=t; y=0; } ; // mur
32 border right( t=0, H ){ x=L; y=t; } ; // droite
33 border freesurface( t=L, 0 ){ x=t; y=H; } ; // surface
34 border left( t=H, 0 ){ x=0; y=t; } ; // gauche
35
36
37
38 // Construction du maillage
39 int n=5;
40 mesh Th=buildmesh ( bottomleft( 10*n ) + outlet(n) + bottomright( 10*n )+
41   right( 10*n )+freesurface( 20*n )+left( 10*n ) );
42
43
44
45 // Définition des variables
46 fespace Vh( Th, P2 );
47 fespace Vgrad( Th, P1 );
48 Vh psi, phi, movement, freesurfaceheight, w, kapint;
49 Vgrad u, v;
50 macro Grad(u) [dx(u),dy(u)] //
51
52
53
54 ////////////////////////////// Variational problems
55
56 problem LaplacianPsi( psi, w, solver = Crout ) =
57   int2d(Th)(Grad(psi)'*Grad(w))
58   +int1d( Th, freesurface )( -w*N.x )
59   + on( bottomleft, psi = -Q/2 )
60   + on( bottomright, psi = Q/2 )
61   + on( left, psi = incomingdischarge*y/maxfreesurfaceheight -Q/2 )
62   + on( right, psi = -incomingdischarge*y/maxfreesurfaceheight + Q/2 );
63
64
65 problem FreesurfaceHeight( freesurfaceheight, w, solver = Crout ) =
66   int2d(Th)(Grad(freesurfaceheight)'*Grad(w))
67   + on( freesurface, freesurfaceheight = y );
68
69
70 problem LaplacianPhi( phi, w, solver = Crout ) =
71   int2d(Th)(Grad(phi)'*Grad(w))
72   + on( freesurface, phi = y )
73   + int1d( Th, left )( -w*incomingdischarge/maxfreesurfaceheight )
74   + int1d( Th, right )( -w*incomingdischarge/maxfreesurfaceheight )
75   + on( outlet, phi = 0 );
76

```

```

77
78 problem LaplacianMovement( movement, w, solver = Crout ) =
79     int2d(Th)( Grad(movement) '*Grad(w) )
80     + on( freesurface, movement = (-dy(phi)*N.y - dx(phi)*N.x)*sqrt( 1 +
81         (N.x/N.y)^2 ) )
82     + on( bottomleft, bottomright, outlet, movement = 0 ) ;
83
84 problem LaplacianTweak( kapint, w, solver = Crout ) =
85     int2d(Th)(Grad(kapint) '*Grad(w))
86     + int1d(Th, freesurface)( -w*N.x/N.y )
87     + on( bottomleft, outlet, bottomright, kapint = phi ) ;
88
89
90
91 // Boucle temporelle
92 for( int i = 0; i < 3000; i++ )
93 {
94     for( int j=0; j < 5; j++)
95     {
96         maxfreesurfaceheight = int1d( Th, left )( 1. );
97         LaplacianPhi;
98         LaplacianTweak;
99         Th = adaptmesh( Th, kapint, err = .05, hmax = hh );
100        plot( psi, fill = 1, value = 1 );
101    }
102
103    LaplacianPhi;
104    Q = int1d( Th, outlet )( dy(phi) );
105    LaplacianPsi;
106    FreesurfaceHeight;
107    minfreesurfaceheight = freesurfaceheight [].min;
108    maxfreesurfaceheight = int1d( Th, left )( 1. );
109    LaplacianMovement;
110
111 // Calcul déplacement du maillage
112 u = 0;
113 v = movement ;
114
115
116
117 // Sauvegarde des mesh
118 savemesh( Th, DataFolder + "mesh/mesh_file_x.mesh", [x,y,x] );
119 savemesh( Th, DataFolder + "mesh/mesh_file_y.mesh", [x,y,y] );
120 savemesh( Th, DataFolder + "mesh/phi.mesh", [x,y,phi] );
121 savemesh( Th, DataFolder + "mesh/psi.mesh", [x,y,psi] );
122
123
124

```

```
125     // Déplacement du maillage
126     Th = movemesh( Th, [ x + u*dt , y + v*dt ] );
127
128
129
130     // Écrit les données dans un fichier
131     {
132         ofstream f(" hauteur.txt",append);
133         f << i*dt << " " << minfreesurfaceheight << "\n";
134     };
135
136
137 };
```

# Bibliographie

Abdul, A., and R. Gillham, Laboratory studies of the effects of the capillary fringe on streamflow generation, *Water Resources Research*, 20(6), 691–698, 1984.

Appel, W., *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, H. et K. Editions, 2008.

Aquilina, L., B. Ladouce, and N. Dörfliger, Water storage and transfer in the epikarst of karstic systems during high flow periods, *Journal of Hydrology*, 327(3-4), 472–485, 2006.

Arduino, S. A., Arduino, *Arduino LLC*.

Aussenac, G., and C. Boulangeat, Interception des précipitations et évapotranspiration réelle dans des peuplements de feuillu (*fagus silvatica* l.) et de résineux (*pseudotsuga menziesii* (mirb) franco), in *Annales des Sciences forestières*, vol. 37, pp. 91–107, EDP Sciences, 1980.

Bear, J., *Dynamics of fluids in porous media*, Courier Corporation, 1972.

Boussinesq, J., Recherches théoriques sur l’écoulement des nappes d’eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 10, 5–78, 1904.

Brantley, S. L., and M. Lebedeva, Learning to read the chemistry of regolith to understand the critical zone, 2011.

Bresciani, E., P. Davy, and J.-R. de Dreuzy, Is the dupuit assumption suitable for predicting the groundwater seepage area in hillslopes ?, *Water Resources Research*, 50, 2394–2406, doi :10.1002/2013WR014284, 2014.

Brutsaert, W., *Hydrology : an introduction*, Cambridge University Press, 2005.

Brutsaert, W., and J. P. Lopez, Basin-scale geohydrologic drought flow features of riparian aquifers in the southern great plains, *Water Resources Research*, 34(2), 233–240, 1998.

- Brutsaert, W., and J. L. Nieber, Regionalized drought flow hydrographs from a mature glaciated plateau, *Water Resources Research*, 13(3), 637–643, 1977.
- Cardenas, M. B., Potential contribution of topography-driven regional groundwater flow to fractal stream chemistry : Residence time distribution analysis of tóth flow, *Geophysical Research Letters*, 34(5), 2007.
- Cornaton, F., and P. Perrochet, Groundwater age, life expectancy and transit time distributions in advective-dispersive systems : 1. generalized reservoir theory, *Advances in Water Resources*, 29(9), 1267–1291, 2006.
- Darcy, H., *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application...*, Victor Dalmont, 1856.
- De Marsily, G., Quantitative hydrogeology, *Tech. rep.*, Paris School of Mines, Fontainebleau, 1986.
- De Marsily, G., Cours d'hydrogéologie, *Université paris VI*, 2004.
- de Saint-Venant, A. J.-C., Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit, *CR Acad. Sci. Paris*, 73(147-154), 5, 1871.
- du Pont, S. C., and J. Eggers, Sink flow deforms the interface between a viscous liquid and air into a tip singularity, *Physical review letters*, 96(3), 034,501, 2006.
- Dupuit, J., De la mesure de l'utilité des travaux publics, *Revue française d'économie*, 10(2), 55–94, 1884.
- Fiori, A., Old water contribution to streamflow : Insight from a linear boussinesq model, *Water Resources Research*, 48(6), 2012.
- Gennes, D., and F. Brochard-Wyart, *Gouttes, Bulles, Perles Et Ondes*, 2005.
- Gleick, P. H., Basic water requirements for human activities : meeting basic needs, *Water international*, 21(2), 83–92, 1996.
- Gleick, P. H., and M. Palaniappan, Peak water limits to freshwater withdrawal and use, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(25), 11,155–11,162, 2010.
- Goderniaux, P., P. Davy, E. Bresciani, J.-R. de Dreuzy, and T. Le Borgne, Partitioning a regional groundwater flow system into shallow local and deep regional flow compartments, *Water Resources Research*, 49(4), 2274–2286, 2013.

- Godsey, S. E., J. W. Kirchner, and D. W. Clow, Concentration–discharge relationships reflect chemostatic characteristics of us catchments, *Hydrological Processes : An International Journal*, 23(13), 1844–1864, 2009.
- Gubiec, T., and P. Szymczak, Fingered growth in channel geometry : A loewner-equation approach, *Physical Review E*, 77(4), 041,602, 2008.
- Guérin, A., Dynamique de l’écoulement dans un aquifère non confiné, Ph.D. thesis, Paris 7, 2015.
- Guérin, A., O. Devauchelle, and E. Lajeunesse, Response of a laboratory aquifer to rainfall, *Journal of Fluid Mechanics*, 759, R1, 2014.
- Guérin, A., O. Devauchelle, V. Robert, T. Kitou, C. Dessert, A. Quiquerez, P. Allemand, and É. Lajeunesse, Stream-discharge surges generated by groundwater flow, *Geophysical Research Letters*, 46(13), 7447–7455, 2019.
- Guyon, E., J.-P. Hulin, L. Petit, and P. G. de Gennes, *Hydrodynamique physique*, EDP sciences Les Ulis, 2001.
- Haitjema, H. M., and S. Mitchell-Bruker, Are water tables a subdued replica of the topography ?, *Groundwater*, 43(6), 781–786, 2005.
- Haria, A. H., and P. Shand, Evidence for deep sub-surface flow routing in forested upland wales : implications for contaminant transport and stream flow generation, *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*, 8(3), 334–344, 2004.
- Hecht, F., New development in freefem++, *Journal of numerical mathematics*, 20(3-4), 251–266, 2012.
- Ibrahim, H. A., and W. Brutsaert, Inflow hydrographs from large unconfined aquifers, *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 91(2), 21–38, 1965.
- Johnson, N. M., G. E. Likens, F. Bormann, D. Fisher, and R. Pierce, A working model for the variation in stream water chemistry at the hubbard brook experimental forest, new hampshire, *Water Resources Research*, 5(6), 1353–1363, 1969.
- Jurin, J., Ii. an account of some experiments shown before the royal society ; with an enquiry into the cause of the ascent and suspension of water in capillary tubes., *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 30(355), 739–747, 1718.
- Kepler, J., *Strena seu de nive sexangula*, vol. 1, 1611.
- Kirchner, J., A double paradox in catchment hydrology and geochemistry, *Hydrological Processes*, 17(4), 871–874, 2003.

- Kirchner, J. W., Catchments as simple dynamical systems : Catchment characterization, rainfall-runoff modeling, and doing hydrology backward, *Water Resources Research*, 45(2), 2009.
- Le Maitre, D. C., D. F. Scott, and C. Colvin, Review of information on interactions between vegetation and groundwater, 1999.
- Lehr, J. H., Groundwater : Flow toward an effluent stream, *Science*, 140(3573), 1318–1320, doi :10.1126/science.140.3573.1318, 1963.
- Long, J., J. Remer, C. Wilson, and P. Witherspoon, Porous media equivalents for networks of discontinuous fractures, *Water Resources Research*, 18(3), 645–658, 1982.
- McDonnell, J. J., A rationale for old water discharge through macropores in a steep, humid catchment, *Water Resources Research*, 26(11), 2821–2832, 1990.
- McDonnell, J. J., et al., How old is streamwater ? open questions in catchment transit time conceptualization, modelling and analysis, *Hydrological Processes*, 24(12), 1745–1754, 2010.
- Naumburg, E., R. Mata-Gonzalez, R. G. Hunter, T. McLendon, and D. W. Martin, Phreatophytic vegetation and groundwater fluctuations : a review of current research and application of ecosystem response modeling with an emphasis on great basin vegetation, *Environmental Management*, 35(6), 726–740, 2005.
- Neal, C., and P. T. Rosier, Chemical studies of chloride and stable oxygen isotopes in two conifer afforested and moorland sites in the british uplands, *Journal of Hydrology*, 115(1), 269–283, 1990.
- Neuman, S. P., G. R. Walter, H. W. Bentley, J. J. Ward, and D. D. Gonzalez, Determination of horizontal aquifer anisotropy with three wells, *Groundwater*, 22(1), 66–72, 1984.
- Pauwels, V. R., and P. A. Troch, Estimation of aquifer lower layer hydraulic conductivity values through base flow hydrograph rising limb analysis, *Water resources research*, 46(3), 2010.
- Polubarinova-Kochina, P. I., *Theory of ground water movement*, Princeton University Press, 1962.
- Renard, P., and G. De Marsily, Calculating equivalent permeability : a review, *Advances in water resources*, 20(5-6), 253–278, 1997.
- Rudin, W., *Real and complex analysis*, Tata McGraw-hill education, 1966.

- Rupp, D. E., and J. S. Selker, On the use of the boussinesq equation for interpreting recession hydrographs from sloping aquifers, *Water Resources Research*, 42(12), 2006.
- Saffman, P., A theory of dispersion in a porous medium, *Journal of Fluid Mechanics*, 6(3), 321–349, 1959.
- Snoeijer, J. H., and B. Andreotti, Moving contact lines : scales, regimes, and dynamical transitions, *Annual review of fluid mechanics*, 45, 269–292, 2013.
- Song, C., P. Wang, and H. A. Makse, A phase diagram for jammed matter, *Nature*, 453(7195), 629, 2008.
- Stefan, J., Versuche über die scheinbare adhäsion, *Annalen der Physik*, 230(2), 316–318, 1875.
- Toth, J., A theoretical analysis of groundwater flow in small drainage basins, *Journal of geophysical research*, 68(16), 4795–4812, 1963.
- Troch, P. A., et al., The importance of hydraulic groundwater theory in catchment hydrology : The legacy of wilfried brutsaert and jean-yves parlange, *Water Resources Research*, 49(9), 5099–5116, 2013.
- Van Genuchten, M. T., and P. Wierenga, Mass transfer studies in sorbing porous media i. analytical solutions 1, *Soil science society of america journal*, 40(4), 473–480, 1976.
- Van Genuchten, M. T., and P. Wierenga, Mass transfer studies in sorbing porous media : II. experimental evaluation with tritium ( $^{3}\text{H}_2\text{O}$ ), *Soil Science Society of America Journal*, 41(2), 272–278, 1977.
- Vogel, J., A. Talma, and T. Heaton, Gaseous nitrogen as evidence for denitrification in groundwater, *Journal of Hydrology*, 50, 191–200, 1981.
- Ward, J., Turbulent flow in porous media, *Journal of the Hydraulics Division*, 90(5), 1–12, 1964.



# Écoulement dans un aquifère non confiné profond alimenté par la pluie

par  
Valentin Jules

## Résumé

Lors d'un épisode pluvieux, l'eau s'infiltra dans le sol et forme une nappe qui s'écoule lentement vers la rivière. L'échelle de temps et la géométrie de cet écoulement contrôlent la composition chimique et le débit de la rivière. Nous avons exploré ces questions à l'aide d'un aquifère expérimental. Ce dernier est composé de billes de verre maintenues dans un plan vertical par des plaques séparées de quelques centimètres. Lorsqu'on soumet cet aquifère à une pluie artificielle, l'eau s'infiltra alors dans le milieu poreux et s'écoule jusqu'à la sortie située sur un côté de l'aquifère. Guérin *et al.* (2014) a étudié le cas d'un écoulement quasi-horizontal. Cependant, dans la nature, l'écoulement souterrain est souvent bidimensionnel. Pour créer un écoulement vertical, nous plaçons la sortie de notre aquifère à une hauteur élevée au dessus de son fond. Afin de caractériser l'écoulement dans notre aquifère, nous étudions l'état stationnaire en utilisant une combinaison d'analyse complexe et de méthodes numériques. Ainsi, nous pouvons comparer les lignes de courant expérimentales et théorique dans notre aquifère. De plus, à l'aide d'une approximation d'impulsion uniforme, nous trouvons que lors de la pluie, le débit,  $Q$  augmente proportionnellement au taux de précipitation,  $R$  et au temps,  $t$  ( $Q \propto Rt$ ). La réponse de notre aquifère est donc linéaire au forçage. Cette dernière nous permet d'obtenir des informations sur les propriétés physique de l'aquifère. Néanmoins nous n'avons aucune information sur la géométrie de l'aquifère.

## Abstract

During a rain event, water infiltrates into the ground where it flows slowly towards a river. The time scale and the geometry of this flow control the chemical composition and the discharge of the river. We use a tank filled with glass beads to simulate this process in a simplified laboratory experiment. A sprinkler pipe generates rain, which infiltrates into the porous material. Groundwater exits this laboratory aquifer through a side of the tank. Guérin *et al.* (2014) investigated the case of a quasi-horizontal flow. In nature, however, groundwater often follows non-horizontal flowlines. To create a vertical flow, we place the outlet of our experiment high above its bottom. Long after the rain started, in steady state, we can describe the flow in our aquifer with a combination of complex analysis and numerical methods. The distribution of travel times can thus give informations about the aquifer geometry. Moreover, we find that, during rainfall, the discharge  $Q$  increases as the rainfall rate  $R$  times the time  $t$  ( $Q \propto Rt$ ). This laboratory aquifer thus responds linearly to the forcing. This response give informations about hydrological properties of the aquifer.